Notas de aula de Grafos e Algoritmos Computacionais

Daniel Oliveira Dantas

20 de outubro de 2020

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Exercícios preliminares

1. Defina matriz quadrada.
2. Defina matriz simétrica.
3. O que é um conjunto?
4. Defina cardinalidade de um conjunto.
5. Defina par ordenado.
6. Defina par não-ordenado.
7. Defina produto cartesiano de dois cojuntos.
8. Defina conjunto das partes.
9. Qual é a cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto A em função da cardinalidade de A?
10. Quando podemos dizer que dois conjuntos são iguais?
11. A cardinalidade do conjunto dos números naturais é maior, menor ou igual à do conjunto dos números racionais?
12. A cardinalidade do conjunto dos números naturais é maior, menor ou igual à do conjunto dos números reais?
13. Como provar que dois conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade?
14. Defina função bijetora.
15. Seja R o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Podemos dizer que R pertence a si mesmo?

Capítulo 2

Uma iniciação à Teoria dos Grafos

Capítulo 2 de Szwarcfiter, *Grafos e Algoritmos Computacionais* [1].

2.1 Introdução

Serão dadas nesse capítulo algumas definições de Teoria dos Grafos.

2.2 Os primeiros conceitos

— Grafo: representado por $G(V, E)$, é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares não ordenados de elementos distintos de V. Ver Figura 2.1.
— Vértices: são os elementos de V.
— Arestas: são os elementos de E.

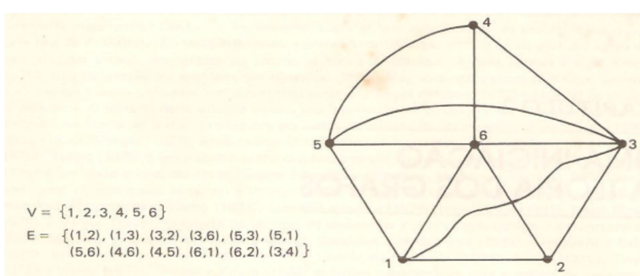


Figura 2.1: Um grafo $G(V, E)$ e sua representação geométrica.

Fonte: Szwarcfiter [1].

— Grafo trivial: é um grafo onde $|V| = 1$.
— Vértices adjacentes: dois vértices v, w são ditos adjacentes quando existe uma aresta e tal que $e = (v, w)$; em outras palavras, quando alguma aresta incide em v e w.
— Arestas adjacentes: são arestas que possuem uma extremidade em comum, ou seja, que incidem em algum vértice em comum.
— Isomorfismo entre grafos: dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$, com $|V_1| = |V_2|$, são ditos isomorfos se e somente se (sse) existe uma função bijetora $f : V_1 \mapsto V_2$ tal que $(v, w) \in E_1$ sse $(f(v), f(w)) \in E_2$ para todo $v, w \in V_1$. Ver Figura 2.2.

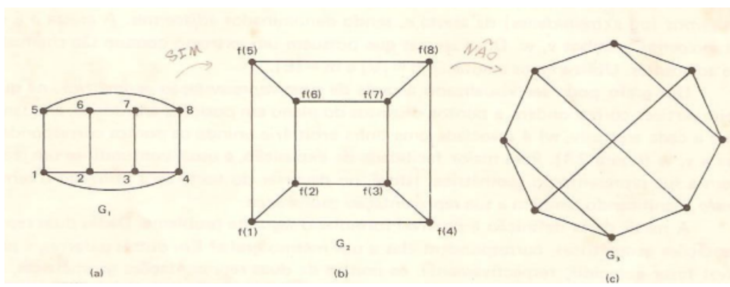
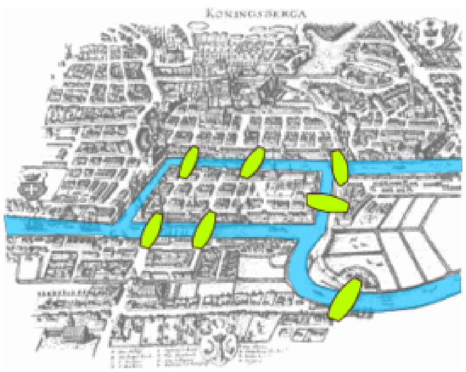


Figura 2.2: Os grafos G_1 e G_2 são isomorfos um ao outro, mas não a G_3.

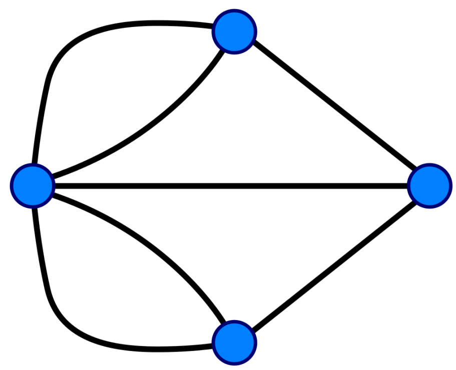
Fonte: Szwarcfiter [1].

— Grafo com laços: $G(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares não ordenados de elementos de V.
— Grafo dirigido: $G(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares ordenados de elementos de V.
— Multigrafo: $G(V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um multiconjunto E de pares não ordenados de elementos de V.
— Grau de um vértice v é o número de arestas que incidem em v. Laços são contados duas vezes. É denotado por grau(v).
— Vértice isolado: é um vértice com grau zero.
— Grafo regular de grau r: é um grafo em que todos os vértices possuem o mesmo grau r.
— Caminho: uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E, 1 \leq i < k$ é denominada caminho de v_1 a v_k. Seu comprimento é $k - 1$.
— Alcance: dizemos que um vértice v alcança um vértice w se existe um caminho de v a w.
— Caminho simples: caminho onde todos os vértices de v_1 a v_k são diferentes.
— Trajeto: caminho onde todas as arestas são distintas.
— Ciclo: é um caminho $v_1, \ldots, v_{k+1}$ em que $v_1 = v_{k+1}$ e $k \geq 3$.
— Ciclo simples: é um ciclo onde todos os vértices são diferentes, exceto o primeiro e o último.
— Grafo acíclico: é um grafo que não possui ciclos simples.

— Ciclos idênticos: ciclos obtidos um do outro por uma rotação de seus vértices.
— Caminho Hamiltoniano: caminho que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez.
— Ciclo Hamiltoniano: ciclo $v_1, \ldots, v_{k+1}$ onde o caminho $v_1, \ldots, v_k$ é Hamiltoniano.
— Caminho ou ciclo Euleriano: caminho ou ciclo que contém cada aresta do grafo exatamente uma vez.



(a) Pontes de Konigsberg.



(b) Representação geométrica.

Figura 2.3: Existe caminho que percorra todas as pontes uma única vez?

Fonte: Wikipedia.

— Grafo conexo: grafo onde, entre cada par de vértices, existe um caminho.
— Grafo desconexo: grafo que não é conexo. Em outras palavras, grafo em que existe algum par de vértices entre os quais não existe caminho.
— Grafo totalmente desconexo: grafo que não possui arestas.
— Subconjunto maximal em relação à propriedade P: seja S um conjunto e $S' \subseteq S$, S' é dito maximal em relação à propriedade P quando S' satisfaz P e não existe subconjunto $S'' \supset S$ que satisfaça P.
— Componente conexo: subgrafo de um grafo G maximal com relação à conectividade.
— Subconjunto minimal em relação à propriedade P: definido de forma análoga ao subconjunto maximal.
— Distância entre dois vértices v e w: denotada por $d(v, w)$ é o comprimento do menor caminho entre v e w.
— Subtração e adição de vértices e arestas: seja $G(V, E)$ um grafo.
  - Seja $e \in E$ uma aresta, denota-se por $G - e$ o grafo obtido de G pela exclusão da aresta e.
  - Seja (v, w) um par de vértices não adjacentes de G, denota-se por $G + (v, w)$ o grafo obtido de G adicionando-se a aresta (v, w).
  - Seja $v \in V$ um vértice, denota-se por $G - v$ o grafo obtido da remoção do vértice v e de dotas as arestas nele incidentes.

- Seja $v \notin V$ um vértice, denota-se por $G + v$ o grafo obtido de G adicionando-se o vértice v.

— Teorema 2.1: Un grafo conexo G possui ciclo Euleriano sse todo vértice de G possui grau par.

- $\Rightarrow$ Seja C um ciclo Euleriano de G. Para cada ocorrência de um vértice v em C, somamos 2 a seu grau pelo fato de uma ocorrência corresponder a uma aresta de entrada e uma de saída. Portanto, todo vértice de G possui grau par.
- $\Leftarrow$ Assuma que todos os vértices de G têm grau par. Começamos de um vértice arbitrário v e percorremos um ciclo começando e terminando em v, sem repetir arestas. Se todas as arestas foram visitadas, então G é Euleriano. Se não, removemos de G as arestas pertencentes a C e vértices isolados após a remoção, ficando com o grafo G'. Todos os vértices de G' têm grau par. Partimos então de algum vértice $u \in G'$ pertencente ao ciclo C e percorremos outro ciclo. O processo é repetido até que o grafo fique vazio. Um ciclo Euleriano pode ser obtido da concatenação de todos os ciclos encontrados. Portanto, G possui ciclo Euleriano.

— Grafo completo: é um grafo que possui uma aresta entre cada par de seus vértices. É denotado por K_n, onde $n = |V|$. Possui $\binom{n}{2}$ arestas.

— Complemento de um grafo $G(V, E)$: é o grafo $\bar{G}$ que também possui V como conjunto de vértices e possui como conjunto de arestas $V^2 - E$, onde V^2 denota o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos distintos de V.

— Grafo bipartido: um grafo $G(V, E)$ é bipartido quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2, tais que toda aresta incide em um vértice de V_1 e em um vértice de V_2.

— Grafo bipartido completo: possui uma aresta para par de vértices (v_1, v_2), onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. É denotado por K_{n_1,n_2}, onde $n_1 = |V_1|$ e $n_2 = |V_2|$. Possui $n_1 \times n_2$ arestas.

Referências Bibliográficas

[1] Jayme Luiz Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais.* Campus, Rio de Janeiro, 2 edition, 1986.