Notas de aula de Lógica para Ciência da Computação

Daniel Oliveira Dantas

11 de setembro de 2020

Sumário

Capítulo 1

A linguagem da Lógica Proposicional

Capítulo 1 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [1].

— Alfabeto: o alfabeto da Lógica Proposicional é composto por
- Símbolos de pontuação: ( )
- Símbolos de verdade: *true false*
- Símbolos proposicionais: $A\ B\ C\ P\ Q\ R\ A_1\ A_2\ A_3\ a\ b\ c\ \ldots$
- Conectivos proposicionais: $\sim\ \vee\ \wedge\ \rightarrow \leftrightarrow$

— Fórmula: as fórmulas da linguagem da lógica proposicional são construídas a partur dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir:
- Todo símbolo de verdade é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se H é fórmula, $\sim H$ é fórmula.
- Se H e G são fórmulas, $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são fórmulas.

— Fórmulas mal formadas: são fórmulas não obtidas da definição anterior.

— Ordem de precedência:
- $\sim$
- $\rightarrow\leftrightarrow$ $\quad$ $A \rightarrow B \leftrightarrow C$ possui duas interpretações.
- $\wedge$
- $\vee$

— Comprimento de uma fórmula:

- Se H é um símbolo proposicional ou de verdade, comp$(H) = 1$.
- Se H é fórmula, comp$(\sim H) =$ comp$(H) + 1$.
- Se H e G são fórmulas:
  - comp$(H \vee G) =$ comp$(H) +$ comp$(G) + 1$.
  - comp$(H \wedge G) =$ comp$(H) +$ comp$(G) + 1$.
  - comp$(H \rightarrow G) =$ comp$(H) +$ comp$(G) + 1$.
  - comp$(H \leftrightarrow G) =$ comp$(H) +$ comp$(G) + 1$.

— Subfórmulas:

- H é subfórmula de H.
- Se $H =\sim G$, G é subfórmula de H.
- Se H é uma fórmula do tipo $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H.
- Se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.

Capítulo 2

A semântica da Lógica Proposicional

Capítulo 2 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [1].

— Função: é uma relação entre dois conjuntos que associa cada elemento do conjunto de entrada a um único elemento do conjunto de saída

— Função binária: é uma função em que seu contradomínio possui apenas dois elementos

— Interpretação I é uma função binária tal que:
- O domínio de I é constituído pelo conjunto de fórmulas da lógica proposicional.
- O contradomínio de I é o conjunto $\{T, F\}$.
- $I(\mathit{true}) = T,\ I(\mathit{false}) = F$.
- Se P é um símbolo proposicional, $I(P) \in \{T, F\}$.

— Interpretação de fórmulas: dadas uma fórmula E e uma interpretação I, o significado ou interpretação de E, denotado por $I(E)$, é determinado pelas regras:
- Se $E = P$, onde P é um símbolo proposicional, então $I(E) = I(P)$, onde $I(P) \in \{T, F\}$.
- Se $E = \mathit{true}$, então $I(E) = I(\mathit{true}) = T$.
- Se $E = \mathit{false}$, então $I(E) = I(\mathit{false}) = F$.
- Seja H uma fórmula, se $E = \sim H$ então:
  - $I(E) = I(\sim H) = T \Leftrightarrow I(H) = F$.
  - $I(E) = I(\sim H) = F \Leftrightarrow I(H) = T$.

- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \vee G)$ então:
  - $I(H) = T$ e/ou $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \vee G) = T$.
  - $I(H) = F$ e $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \vee G) = F$.
- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \wedge G)$ então:
  - $I(H) = T$ e $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \wedge G) = T$.
  - $I(H) = F$ e/ou $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \wedge G) = F$.
- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \rightarrow G)$ então:
  - $I(H) = T$ então $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = T$.
  - $I(H) = F$ e/ou $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = T$.
  - $I(H) = T$ e $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = F$.
- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \leftrightarrow G)$ então:
  - $I(H) = I(G) \Leftrightarrow I(E) = I(H \leftrightarrow G) = T$.
  - $I(H) \neq I(G) \Leftrightarrow I(E) = I(H \leftrightarrow G) = F$.

Capítulo 3

Propriedades semânticas da Lógica Proposicional

Capítulo 3 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [1].

3.1 Propriedades semânticas

— Tautologia: uma fórmula H é tautologia ou válida se e somente se (sse) para toda interpretação I

$$I(H) = T$$

— Satisfatibilidade: uma fórmula H é satisfatível ou factível se e somente se (sse) existe pelo menos uma interpretação I tal que

$$I(H) = T$$

— Contingência: uma fórmula H é uma contingência se e somente se (sse) existem interpretações I e J tais que

$$I(H) = T \text{ e } J(H) = F$$

— Contradição: uma fórmula H é contraditória se e somente se (sse) para toda interpretação I

$$I(H) = F$$

— Implicação: dadas duas fórmulas H e G, $H \vDash G$ (H implica G) sse para toda interpretação I

$$\text{se } I(H) = T \text{ então } I(G) = T$$

— Equivalência: dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G sse para toda interpretação I

$$I(H) = I(G)$$

— Dada uma fórmula H e uma interpretação I, dizemos que I satisfaz H se

$$I(H) = T$$

— Um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfatível sse existe interpretação I tal que

$$I(H_1) = I(H_2) = \cdots = I(H_n) = T$$

— Um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é insatisfatível sse não existe interpretação I tal que

$$I(H_1) = I(H_2) = \cdots = I(H_n) = T$$

3.2 Relações entre propriedades semânticas

— Proposição 3.1: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia } \Rightarrow H \text{ é satisfatível.}$$

- Demonstração: H é tautologia $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = T \Rightarrow$ existe interpretação I tal que $I(H) = T \Leftrightarrow H$ é satisfatível. ■

— Proposição 3.3: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia } \Rightarrow H \text{ não é contingência.}$$

- Demonstração: H é tautologia $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = T \Rightarrow$ não existe interpretação I tal que $I(H) = F \Leftrightarrow H$ não é contingência. ■

— Proposição 3.4: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é contingência } \Rightarrow H \text{ é satisfatível.}$$

- Demonstração: H é contingência $\Leftrightarrow$ existem interpretações I e J tais que $I(H) = T$ e $J(H) = F \Rightarrow$ existe interpretação I tal que $I(H) = T$ $\Leftrightarrow$ H é satisfatível. ■

— Proposição 3.5: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia } \Leftrightarrow \sim H \text{ é contraditória.}$$

- Demonstração: H é tautologia $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(\sim H) = F \Leftrightarrow \sim H$ é contraditória. ■

— Proposição 3.7: sejam H e G duas fórmulas,

$$H \text{ equivale a } G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia.}$$

- Demonstração: H equivale a $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = I(G) \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H \leftrightarrow G) = T \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$ é tautologia. ■

— Proposição 3.8: sejam H e G duas fórmulas,

$$H \text{ implica } G \Leftrightarrow (H \rightarrow G) \text{ é tautologia.}$$

- Demonstração: H implica $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se $I(H) = T$ então $I(G) = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H \rightarrow G) = T \Leftrightarrow$ $(H \rightarrow G)$ é tautologia. ■

3.3 Relações semânticas entre os conectivos da lógica proposicional

— Conjunto de conectivos completo: o conjunto de conectivos ψ é dito completo se é possível expressar os conectivos $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando apenas os conectivos de ψ.

- O conectivo $\rightarrow$ pode ser expresso com $\{\sim, \vee\}$:

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\sim P \vee Q)$$

- O conectivo $\wedge$ pode ser expresso com $\{\sim, \vee\}$:

$$(P \wedge Q) \equiv \sim (\sim P \vee \sim Q)$$

- O conectivo $\leftrightarrow$ pode ser expresso com $\{\sim, \vee\}$:

$$(P \leftrightarrow Q) \equiv \sim (\sim (\sim P \vee Q) \vee (\sim (\sim (Q \vee P))$$

— O conjunto $\{\sim, \vee\}$ é completo, pois é possível expressar os conectivos $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando apenas $\{\sim, \vee\}$.

— Proposição 3.15 (regra da substituição): sejam G, G', H e H' fórmulas da lógica proposicional tais que:
- G e H são subfórmulas de G' e H' respectivamente.
- G' é obtida de H' da substituição de H por G em G'.
- G e H são subfórmulas de G' e H' respectivamente.

$$G \equiv H \Rightarrow G' \equiv H'$$

— Definição: o conectivo NAND ($\overline{\wedge}$) é definido por $(P \,\overline{\wedge}\, Q) \equiv \sim (P \wedge Q)$.
- O conectivo $\sim$ pode ser expresso com $\{\overline{\wedge}\}$:

$$(\sim P) \equiv \ (P \,\overline{\wedge}\, P)$$

- O conectivo $\vee$ pode ser expresso com $\{\overline{\wedge}\}$:

$$(P \vee Q) \equiv \ ((P \,\overline{\wedge}\, P) \,\overline{\wedge}\, (Q \,\overline{\wedge}\, Q))$$

3.4 Formas normais na lógica proposicional

— Literais: um literal na lógica proposicional é um símbolo proposicional ou sua negação.

— Forma normal: dada uma fórmula H da lógica proposicional, existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma normal. Forma normal é uma estrutura de fórmula pré-definida.
- Forma normal disjuntiva (FND): é uma disjunção ($\vee$) de conjunções ($\wedge$).
- Forma normal conjuntiva (FNC): é uma conjunção ($\wedge$) de disjunções ($\vee$).

— Obtenção de formas normais:
- FND:
  - ◦ Obtenha a tabela verdade da fórmula.
  - ◦ Selecione as linhas cuja interpretação é V.
  - ◦ Para cada linha selecionada, faça a conjunção ($\wedge$) de todos os símbolos proposicionais cuja interpretação é V com a negação dos símbolos proposicionais cuja interpretação é F.
  - ◦ Faça a disjunção ($\vee$) das fórmulas obtidas no passo anterior.
- FNC:
  - ◦ Obtenha a tabela verdade da fórmula.
  - ◦ Selecione as linhas cuja interpretação é F.
  - ◦ Para cada linha selecionada, faça a disjunção ($\vee$) de todos os símbolos proposicionais cuja interpretação é F com a negação dos símbolos proposicionais cuja interpretação é V.
  - ◦ Faça a conjunção ($\wedge$) das fórmulas obtidas no passo anterior.

— Exemplo: encontre a FND e a FNC da fórmula $((P \to Q) \wedge R)$.

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge R$	FND	FNC
T	T	T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$	
T	T	F	T	F		$\sim P \vee \sim Q \vee R$
T	F	T	F	F		$\sim P \vee Q \vee \sim R$
T	F	F	F	F		$\sim P \vee Q \vee R$
F	T	T	T	T	$\sim P \wedge Q \wedge R$	
F	T	F	T	F		$P \vee \sim Q \vee R$
F	F	T	T	T	$\sim P \wedge \sim Q \wedge R$	
F	F	F	T	F		$P \vee Q \vee R$

- FND: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R)$
- FNC: $(\sim P \vee \sim Q \vee R) \wedge (\sim P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee Q \vee R) \wedge$
$(P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

3.5 Exercícios

1. Determine o comprimento e o conjunto de subfórmulas das fórmulas a seguir.
   (a) $P \vee P$
   (b) $((\sim\sim P \vee Q) \leftrightarrow (P \to Q)) \wedge true$
   (c) $P \to ((Q \to R) \to ((P \to R) \to (P \to R)))$
   (d) $((P \to \sim P) \leftrightarrow \sim P) \vee Q$
   (e) $\sim (P \to \sim P)$
2. Dentre as concatenações de símbolos a seguir, quais são fórmulas bem formadas e quais são fórmulas mal formadas?
   (a) $(P \to \wedge true)$
   (b) $(P \wedge Q) \to ((Q \leftrightarrow P) \vee \sim\sim R)$
   (c) $\sim\sim P$
   (d) $\vee Q$
   (e) $(P \vee Q) \to ((Q \leftrightarrow R))$
   (f) PQR
   (g) $A \sim$
3. Demonstre as proposições abaixo usando as regras de interpretação de fórmulas.
   (a) $I(P \wedge Q) = T \Leftrightarrow I(\sim (\sim P \vee \sim Q)) = T$
   (b) $I(P \wedge Q) = F \Leftrightarrow I(\sim (\sim P \vee \sim Q)) = F$
   (c) $I(P \wedge Q) = T \Leftrightarrow I(\sim P \vee \sim Q) = F$

(d) $I(P \to Q) = F \Leftrightarrow I(\sim P \vee Q) = F$

(e) $I(P \to Q) = T \Leftrightarrow I(\sim P \vee Q) = T$

(f) $I(P \to Q) = F \Leftrightarrow I(P \wedge \sim Q) = T$

4. Seja $H = (P \to Q)$ e I uma interpretação.

   (a) Se $I(H) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(P)$ e $I(Q)$?

   (b) Se $I(H) = T$ e $I(P) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(Q)$?

   (c) Se $I(Q) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?

   (d) Se $I(H) = T$ e $I(P) = F$, o que se pode concluir a respeito de $I(Q)$?

   (e) Se $I(Q) = F$ e $I(P) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?

5. Seja I uma interpretação tal que $I(P \leftrightarrow Q) = T$. O que se pode concluir a respeito de:

   (a) $I(\sim P \wedge Q)$

   (b) $I(P \vee \sim Q)$

   (c) $I(Q \to P)$

   (d) $I((P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R))$

   (e) $I((P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R))$

6. Repita o exercício anterior considerando $I(P \leftrightarrow Q) = F$.

7. Sejam H e G as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que H implica G.

   (a) $H = (P \wedge Q), G = P$

   (b) $H = (P \vee Q), G = P$

   (c) $H = (P \vee \sim Q), G = \mathit{false}$

   (d) $H = \mathit{false}, G = P$

   (e) $H = P, G = \mathit{true}$

8. Demonstre as proposições abaixo ou dê um contra-exemplo.

   (a) Proposição 3.6: H não é satisfatível $\Leftrightarrow$ H é contraditória.

   (b) H é satisfatível $\Leftrightarrow$ H não é contraditória.

   (c) $\sim H$ é tautologia $\Leftrightarrow$ H é contraditória.

   (d) H não é tautologia $\Leftrightarrow$ H é contraditória.

Referências Bibliográficas

[1] João Nunes de Souza. *Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins.* Campus-Elsevier, Brasil, 1 edition, 2014.