

# Notas de aula de Lógica para Ciência da Computação

Daniel Oliveira Dantas

11 de setembro de 2020

# Sumário

<b>1</b>	<b>A linguagem da lógica proposicional</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A semântica da lógica proposicional</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Propriedades semânticas da lógica proposicional</b>	<b>5</b>
3.1	Propriedades semânticas . . . . .	5
3.2	Relações entre propriedades semânticas . . . . .	6
3.3	Relações semânticas entre os conectivos da lógica proposicional . . . . .	7
3.4	Formas normais na lógica proposicional . . . . .	8
3.5	Exercícios . . . . .	9
3.6	Exercícios v.2 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Métodos semânticos de dedução na lógica proposicional</b>	<b>13</b>
4.1	Introdução . . . . .	13
4.2	Método da tabela verdade . . . . .	13
4.3	Método da negação ou absurdo . . . . .	14
4.4	Método da árvore semântica . . . . .	15
4.5	Método dos tableaux semânticos . . . . .	16
4.5.1	Prova de que uma fórmula é uma contradição . . . . .	19
4.5.2	Prova de que um conjunto de fórmulas é insatisfatível . . . . .	20
4.6	Exercícios . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Um método sintático de dedução na lógica proposicional</b>	<b>21</b>
5.1	Introdução . . . . .	21
5.2	O sistema formal Pa . . . . .	22
5.3	Exercícios . . . . .	28
<b>6</b>	<b>A linguagem da lógica de predicados</b>	<b>29</b>
6.1	O alfabeto da lógica de predicados . . . . .	29
6.2	Fórmulas da lógica de predicados . . . . .	29
6.3	Correspondência entre quantificadores . . . . .	30
6.4	Símbolos de pontuação . . . . .	30
6.5	Características sintáticas das fórmulas . . . . .	30
6.6	Formas normais . . . . .	31

6.7	Classificações de variáveis . . . . .	31
6.8	Exercícios . . . . .	32

# Capítulo 1

## A linguagem da lógica proposicional

Capítulo 1 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

- Alfabeto: o alfabeto da Lógica Proposicional é composto por
  - Símbolos de pontuação:  $()$
  - Símbolos de verdade: *true false*
  - Símbolos proposicionais:  $A B C P Q R A_1 A_2 A_3 a b c \dots$ 
    - Não se usam as letras  $V, v, F, f, T$  e  $t$  para não confundir com os valores de verdade.
  - Conectivos proposicionais:  $\sim \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow$
- Fórmula: as fórmulas da linguagem da lógica proposicional são construídas a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir:
  - Todo símbolo de verdade é uma fórmula.
  - Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
  - Se  $H$  é fórmula,  $\sim H$  é fórmula.
  - Se  $H$  e  $G$  são fórmulas,  $(H \vee G)$ ,  $(H \wedge G)$ ,  $(H \rightarrow G)$  e  $(H \leftrightarrow G)$  são fórmulas.
- Fórmulas mal formadas: são fórmulas não obtidas da definição anterior.
- Ordem de precedência:
  - $\sim$  Precedência maior.
  - $\rightarrow \leftrightarrow$   $A \rightarrow B \leftrightarrow C$  possui duas interpretações.
  - $\wedge$
  - $\vee$  Precedência menor.

— Comprimento de uma fórmula:

- Se  $H$  é um símbolo proposicional ou de verdade,  $\text{comp}(H) = 1$ .
- Se  $H$  é fórmula,  $\text{comp}(\sim H) = \text{comp}(H) + 1$ .
- Se  $H$  e  $G$  são fórmulas:
  - $\text{comp}(H \vee G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .
  - $\text{comp}(H \wedge G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .
  - $\text{comp}(H \rightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .
  - $\text{comp}(H \leftrightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .

— Subfórmulas:

- $H$  é subfórmula de  $H$ .
- Se  $H = \sim G$ ,  $G$  é subfórmula de  $H$ .
- Se  $H$  é uma fórmula do tipo  $(G \vee E)$ ,  $(G \wedge E)$ ,  $(G \rightarrow E)$  ou  $(G \leftrightarrow E)$ , então  $G$  e  $E$  são subfórmulas de  $H$ .
- Se  $G$  é subfórmula de  $H$ , então toda subfórmula de  $G$  é subfórmula de  $H$ .

## Capítulo 2

# A semântica da lógica proposicional

Capítulo 2 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

- Função: é uma relação entre dois conjuntos que associa cada elemento do conjunto de entrada a um único elemento do conjunto de saída
- Função binária: é uma função em que seu contradomínio possui apenas dois elementos
- Interpretação  $I$  é uma função binária tal que:
  - O domínio de  $I$  é constituído pelo conjunto de fórmulas da lógica proposicional.
  - O contradomínio de  $I$  é o conjunto  $\{T, F\}$ .
  - $I(true) = T$ ,  $I(false) = F$ .
  - Se  $P$  é um símbolo proposicional,  $I(P) \in \{T, F\}$ .
- Interpretação de fórmulas: dadas uma fórmula  $E$  e uma interpretação  $I$ , o significado ou interpretação de  $E$ , denotado por  $I(E)$ , é determinado pelas regras:
  - Se  $E = P$ , onde  $P$  é um símbolo proposicional, então  $I(E) = I(P)$ , onde  $I(P) \in \{T, F\}$ .
  - Se  $E = true$ , então  $I(E) = I(true) = T$ .
  - Se  $E = false$ , então  $I(E) = I(false) = F$ .
  - Seja  $H$  uma fórmula, se  $E = \sim H$  então:
    - $I(E) = I(\sim H) = T \Leftrightarrow I(H) = F$ .
    - $I(E) = I(\sim H) = F \Leftrightarrow I(H) = T$ .

- Sejam  $H$  e  $G$  duas fórmulas, se  $E = (H \vee G)$  então:
  - $I(H) = T$  e/ou  $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \vee G) = T$ .
  - $I(H) = F$  e  $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \vee G) = F$ .
- Sejam  $H$  e  $G$  duas fórmulas, se  $E = (H \wedge G)$  então:
  - $I(H) = T$  e  $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \wedge G) = T$ .
  - $I(H) = F$  e/ou  $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \wedge G) = F$ .
- Sejam  $H$  e  $G$  duas fórmulas, se  $E = (H \rightarrow G)$  então:
  - $I(H) = T$  então  $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = T$ .
  - $I(H) = F$  e/ou  $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = T$ .
  - $I(H) = T$  e  $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = F$ .
- Sejam  $H$  e  $G$  duas fórmulas, se  $E = (H \leftrightarrow G)$  então:
  - $I(H) = I(G) \Leftrightarrow I(E) = I(H \leftrightarrow G) = T$ .
  - $I(H) \neq I(G) \Leftrightarrow I(E) = I(H \leftrightarrow G) = F$ .

## Capítulo 3

# Propriedades semânticas da lógica proposicional

Capítulo 3 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

### 3.1 Propriedades semânticas

- Tautologia: uma fórmula  $H$  é tautologia ou válida se e somente se (sse) para toda interpretação  $I$

$$I(H) = T$$

- Satisfatibilidade: uma fórmula  $H$  é satisfatível ou factível se e somente se (sse) existe pelo menos uma interpretação  $I$  tal que

$$I(H) = T$$

- Contingência: uma fórmula  $H$  é uma contingência se e somente se (sse) existem interpretações  $I$  e  $J$  tais que

$$I(H) = T \text{ e } J(H) = F$$

- Contradição: uma fórmula  $H$  é contraditória se e somente se (sse) para toda interpretação  $I$

$$I(H) = F$$



- Implicação: dadas duas fórmulas  $H$  e  $G$ ,  $H \models G$  ( $H$  implica  $G$ ) sse para toda interpretação  $I$

$$\text{se } I(H) = T \text{ então } I(G) = T$$

- Equivalência: dadas duas fórmulas  $H$  e  $G$ ,  $H$  equivale a  $G$  sse para toda interpretação  $I$

$$I(H) = I(G)$$

- Dada uma fórmula  $H$  e uma interpretação  $I$ , dizemos que  $I$  satisfaz  $H$  se

$$I(H) = T$$

- Um conjunto de fórmulas  $\beta = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  é satisfatível sse existe interpretação  $I$  tal que

$$I(H_1) = I(H_2) = \dots = I(H_n) = T$$

- Um conjunto de fórmulas  $\beta = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  é insatisfatível sse não existe interpretação  $I$  tal que

$$I(H_1) = I(H_2) = \dots = I(H_n) = T$$

## 3.2 Relações entre propriedades semânticas

- Proposição 3.1: seja  $H$  uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia} \Rightarrow H \text{ é satisfatível.}$$

- Demonstração:  $H$  é tautologia  $\Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ ,  $I(H) = T \Rightarrow$  existe interpretação  $I$  tal que  $I(H) = T \Leftrightarrow H$  é satisfatível. ■

- Proposição 3.3: seja  $H$  uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia} \Rightarrow H \text{ não é contingência.}$$

- Demonstração:  $H$  é tautologia  $\Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ ,  $I(H) = T \Leftrightarrow$  não existe interpretação  $I$  tal que  $I(H) = F \Rightarrow$  não existem interpretações  $I$  e  $J$  tais que  $I(H) = F$  e  $J(H) = T \Leftrightarrow H$  não é contingência. ■

- Proposição 3.4: seja  $H$  uma fórmula,

$$H \text{ é contingência} \Rightarrow H \text{ é satisfatível.}$$

- Demonstração:  $H$  é contingência  $\Leftrightarrow$  existem interpretações  $I$  e  $J$  tais que  $I(H) = T$  e  $J(H) = F \Rightarrow$  existe interpretação  $I$  tal que  $I(H) = T \Leftrightarrow H$  é satisfatível. ■

— Proposição 3.5: seja  $H$  uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia} \Leftrightarrow \sim H \text{ é contraditória.}$$

- Demonstração:  $H$  é tautologia  $\Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ ,  $I(H) = T \Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ ,  $I(\sim H) = F \Leftrightarrow \sim H$  é contraditória. ■

— Proposição 3.7: sejam  $H$  e  $G$  duas fórmulas,

$$H \text{ equivale a } G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia.}$$

- Demonstração:  $H$  equivale a  $G \Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ ,  $I(H) = I(G) \Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ ,  $I(H \leftrightarrow G) = T \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$  é tautologia. ■

— Proposição 3.8: sejam  $H$  e  $G$  duas fórmulas,

$$H \text{ implica } G \Leftrightarrow (H \rightarrow G) \text{ é tautologia.}$$

- Demonstração:  $H$  implica  $G \Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ , se  $I(H) = T$  então  $I(G) = T \Leftrightarrow$  para toda interpretação  $I$ ,  $I(H \rightarrow G) = T \Leftrightarrow (H \rightarrow G)$  é tautologia. ■

### 3.3 Relações semânticas entre os conectivos da lógica proposicional

— Conjunto de conectivos completo: o conjunto de conectivos  $\psi$  é dito completo se é possível expressar os conectivos  $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  usando apenas os conectivos de  $\psi$ .

- O conectivo  $\rightarrow$  pode ser expresso com  $\{\sim, \vee\}$ :

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\sim P \vee Q)$$

- O conectivo  $\wedge$  pode ser expresso com  $\{\sim, \vee\}$ :

$$(P \wedge Q) \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q)$$

- O conectivo  $\leftrightarrow$  pode ser expresso com  $\{\sim, \vee\}$ :

$$(P \leftrightarrow Q) \equiv \sim(\sim(\sim P \vee Q) \vee \sim(\sim Q \vee P))$$

— O conjunto  $\{\sim, \vee\}$  é completo, pois é possível expressar os conectivos  $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  usando apenas  $\{\sim, \vee\}$ .

- Proposição 3.15 (regra da substituição): sejam  $G, G', H$  e  $H'$  fórmulas da lógica proposicional tais que:
  - $G$  e  $H$  são subfórmulas de  $G'$  e  $H'$  respectivamente.
  - $G'$  é obtida de  $H'$  da substituição de  $H$  por  $G$  em  $H'$ .

$$G \equiv H \Rightarrow G' \equiv H'$$

- Definição: o conectivo NAND ( $\bar{\wedge}$ ) é definido por  $(P \bar{\wedge} Q) \equiv \sim(P \wedge Q)$ .
  - O conectivo  $\sim$  pode ser expresso com  $\{\bar{\wedge}\}$ :

$$(\sim P) \equiv (P \bar{\wedge} P)$$

- O conectivo  $\vee$  pode ser expresso com  $\{\bar{\wedge}\}$ :

$$(P \vee Q) \equiv ((P \bar{\wedge} P) \bar{\wedge} (Q \bar{\wedge} Q))$$

### 3.4 Formas normais na lógica proposicional

- Literais: um literal na lógica proposicional é um símbolo proposicional ou sua negação.
- Forma normal: dada uma fórmula  $H$  da lógica proposicional, existe uma fórmula  $G$ , equivalente a  $H$ , que está na forma normal. Forma normal é uma estrutura de fórmula pré-definida.
  - Forma normal disjuntiva (FND): é uma disjunção ( $\vee$ ) de conjunções ( $\wedge$ ).
  - Forma normal conjuntiva (FNC): é uma conjunção ( $\wedge$ ) de disjunções ( $\vee$ ).
- Obtenção de formas normais:
  - FND:
    - Obtenha a tabela verdade da fórmula.
    - Selecione as linhas cuja interpretação é  $T$ .
    - Para cada linha selecionada, faça a conjunção ( $\wedge$ ) de todos os símbolos proposicionais cuja interpretação é  $T$  com a negação dos símbolos proposicionais cuja interpretação é  $F$ .
    - Faça a disjunção ( $\vee$ ) das fórmulas obtidas no passo anterior.
  - FNC:
    - Obtenha a tabela verdade da fórmula.
    - Selecione as linhas cuja interpretação é  $F$ .
    - Para cada linha selecionada, faça a disjunção ( $\vee$ ) de todos os símbolos proposicionais cuja interpretação é  $F$  com a negação dos símbolos proposicionais cuja interpretação é  $T$ .
    - Faça a conjunção ( $\wedge$ ) das fórmulas obtidas no passo anterior.

— Exemplo: encontre a FND e a FNC da fórmula  $((P \rightarrow Q) \wedge R)$ .

$P$	$Q$	$R$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$	FND	FNC
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$P \wedge Q \wedge R$	
$T$	$T$	$F$	$T$	$F$		$\sim P \vee \sim Q \vee R$
$T$	$F$	$T$	$F$	$F$		$\sim P \vee Q \vee \sim R$
$T$	$F$	$F$	$F$	$F$		$\sim P \vee Q \vee R$
$F$	$T$	$T$	$T$	$T$	$\sim P \wedge Q \wedge R$	
$F$	$T$	$F$	$T$	$F$		$P \vee \sim Q \vee R$
$F$	$F$	$T$	$T$	$T$	$\sim P \wedge \sim Q \wedge R$	
$F$	$F$	$F$	$T$	$F$		$P \vee Q \vee R$

- FND:  $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R)$
- FNC:  $(\sim P \vee \sim Q \vee R) \wedge (\sim P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

### 3.5 Exercícios

- Determine o comprimento e o conjunto de subfórmulas das fórmulas a seguir.
  - $P \vee P$
  - $((\sim\sim P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge true$
  - $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
  - $((P \rightarrow \sim P) \leftrightarrow \sim P) \vee Q$
  - $\sim(P \rightarrow \sim P)$
- Dentre as concatenações de símbolos a seguir, quais são fórmulas bem formadas e quais são fórmulas mal formadas?
  - $(P \rightarrow \wedge true)$
  - $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee \sim\sim R)$
  - $\sim\sim P$
  - $\vee Q$
  - $(P \vee Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow R))$
  - $PQR$
  - $A\sim$
- Demonstre as proposições abaixo usando as regras de interpretação de fórmulas.
  - $I(P \wedge Q) = T \Leftrightarrow I(\sim(\sim P \vee \sim Q)) = T$
  - $I(P \wedge Q) = F \Leftrightarrow I(\sim(\sim P \vee \sim Q)) = F$

- (c)  $I(P \wedge Q) = T \Leftrightarrow I(\sim P \vee \sim Q) = F$
- (d)  $I(P \rightarrow Q) = F \Leftrightarrow I(\sim P \vee Q) = F$
- (e)  $I(P \rightarrow Q) = T \Leftrightarrow I(\sim P \vee Q) = T$
- (f)  $I(P \rightarrow Q) = F \Leftrightarrow I(P \wedge \sim Q) = T$

Responda as questões 4, 5 e 6 conforme os exemplos abaixo.

- (a) Se  $I(P) = F$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(H)$ ?  
R: Pode-se concluir que  $I(H) = T$ .
- (b) Se  $I(P) = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(H)$ ?  
R: Nada se pode concluir.

4. Seja  $H = (P \rightarrow Q)$  e  $I$  uma interpretação.

- (a) Se  $I(H) = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(P)$  e  $I(Q)$ ?
- (b) Se  $I(H) = T$  e  $I(P) = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(Q)$ ?
- (c) Se  $I(Q) = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(H)$ ?
- (d) Se  $I(H) = T$  e  $I(P) = F$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(Q)$ ?
- (e) Se  $I(Q) = F$  e  $I(P) = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(H)$ ?

5. Seja  $I$  uma interpretação tal que  $I(P \leftrightarrow Q) = T$ . O que se pode concluir a respeito de:

- (a)  $I(\sim P \wedge Q)$
- (b)  $I(P \vee \sim Q)$
- (c)  $I(Q \rightarrow P)$
- (d)  $I((P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R))$
- (e)  $I((P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R))$

6. Repita o exercício anterior considerando  $I(P \leftrightarrow Q) = F$ .

7. Sejam  $H$  e  $G$  as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que  $H$  implica  $G$ .

- (a)  $H = (P \wedge Q), G = P$
- (b)  $H = (P \vee Q), G = P$
- (c)  $H = (P \vee \sim Q), G = \text{false}$
- (d)  $H = \text{false}, G = P$
- (e)  $H = P, G = \text{true}$

8. Demonstre as proposições abaixo ou dê um contra-exemplo.

- (a) Proposição 3.6:  $H$  não é satisfatível  $\Leftrightarrow H$  é contraditória.
- (b)  $H$  é satisfatível  $\Leftrightarrow H$  não é contraditória.

- (c)  $\sim H$  é tautologia  $\Leftrightarrow H$  é contraditória.
  - (d)  $H$  não é tautologia  $\Leftrightarrow H$  é contraditória.
9. Encontre a FND e a FNC das das fórmulas a seguir.
- (a)  $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee R)$
  - (b)  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

### 3.6 Exercícios v.2

1. Determine o comprimento e o conjunto de subfórmulas das fórmulas a seguir.
  - (a)  $P \vee Q$
  - (b)  $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (R \wedge S)$
  - (c)  $(\sim P \vee \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge Q)$
  - (d)  $(A \wedge (B \wedge (C \wedge D))) \vee (\sim A \wedge (\sim B \wedge (C \wedge D)))$
2. Dentre as concatenações de símbolos a seguir, quais são fórmulas bem formadas e quais são fórmulas mal formadas?
  - (a)  $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
  - (b)  $(P \vee \rightarrow Q) \wedge R$
  - (c)  $((P \rightarrow \sim P) \leftrightarrow \sim P) \vee Q$
  - (d)  $P \sim \rightarrow Q$
3. Demonstre as proposições abaixo usando as regras de interpretação de fórmulas.
  - (a)  $I(P \rightarrow Q) = T \Leftrightarrow I(\sim(P \wedge Q)) = T$
  - (b)  $I(\sim P \rightarrow \sim Q) = T \Leftrightarrow I(\sim(\sim P \wedge Q)) = T$

Responda as questões 4 conforme os exemplos abaixo.

- (a) Se  $I(P) = F$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(H)$ ?  
R: Pode-se concluir que  $I(H) = T$ .
  - (b) Se  $I(P) = T$ , o que se pode concluir a respeito de  $I(H)$ ?  
R: Nada se pode concluir.
4. O que se pode concluir a respeito de
- (a)  $I(P \wedge Q)$  se  $I(P) = T$
  - (b)  $I(P \wedge Q)$  se  $I(P) = F$
  - (c)  $I(P \vee Q)$  se  $I(Q) = T$
  - (d)  $I(P \vee Q)$  se  $I(Q) = F$

- (e)  $I(P \rightarrow Q)$  se  $I(P) = T$
  - (f)  $I(P \rightarrow Q)$  se  $I(Q) = T$
  - (g)  $I(P \rightarrow Q)$  se  $I(P) = F$
  - (h)  $I(P \rightarrow Q)$  se  $I(Q) = F$
  - (i)  $I(P \leftrightarrow Q)$  se  $I(P) = T$
  - (j)  $I(P \leftrightarrow Q)$  se  $I(P) = F$
5. Mostre se os conjuntos de fórmulas a seguir são satisfatíveis ou insatisfatíveis.
- (a)  $\{(P \wedge Q), (P \vee Q)\}$
  - (b)  $\{(P \wedge Q), (P \rightarrow Q)\}$
  - (c)  $\{(P \vee Q), (P \leftrightarrow Q)\}$
  - (d)  $\{(P \wedge Q), (P \rightarrow \sim Q)\}$
6. Demonstre as proposições abaixo ou dê um contra-exemplo.
- (a)  $H$  é satisfatível  $\Leftrightarrow \sim H$  é satisfatível
  - (b)  $H$  é contraditória  $\Leftrightarrow \sim H$  é tautologia
  - (c)  $H$  é tautologia  $\Leftrightarrow \sim H$  é contraditória
  - (d)  $H$  é tautologia  $\Rightarrow H$  é satisfatível
  - (e)  $H$  implica  $G \Leftrightarrow (H \rightarrow G)$  é tautologia
  - (f)  $H$  equivale a  $G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$  é tautologia
7. Demonstre se as fórmulas a seguir são tautologias usando o método da tabela verdade e o da árvore semântica.
- (a)  $H = (P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \rightarrow Q)$
  - (b)  $H = \sim(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \leftrightarrow Q)$
  - (c)  $H = (\sim P \leftrightarrow \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \leftrightarrow \sim Q)$
  - (d)  $H = (P \vee \sim Q) \leftrightarrow (\sim P \rightarrow \sim Q)$
8. Demonstre por absurdo se as fórmulas a seguir são ou não tautologias.
- (a)  $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$
  - (b)  $(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$
  - (c)  $(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim P)$

## Capítulo 4

# Métodos semânticos de dedução na lógica proposicional

Capítulo 4 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

### 4.1 Introdução

- Validade de fórmulas: uma fórmula é válida sse todas as suas interpretações são iguais a  $T$ .

### 4.2 Método da tabela verdade

- Método da tabela verdade: é um método exaustivo, ou seja, enumera todas as possibilidades. A desvantagem é que, se houver muitos símbolos proposicionais, a tabela fica muito grande.
- Exemplo: seja  $H = \sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ , demonstre que  $H$  é uma tautologia usando o método da tabela verdade.

$P$	$Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$(P \wedge Q)$	$\sim(P \wedge Q)$	$(\sim P \vee \sim Q)$	$H$
$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$
$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$



### 4.3 Método da negação ou absurdo

- Método da negação ou absurdo: funciona da seguinte maneira.
  - Faça uma suposição.
  - Se todas as substituições possíveis levarem a contradições, a suposição é falsa. Ou seja, a negação da suposição é verdadeira.
- Exemplo: seja  $H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ , demonstre por absurdo que  $H$  é uma tautologia.

- Demonstração: assuma por absurdo que existe interpretação  $I$  tal que  $I(H) = F$ .

Então  $I((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) = T$  e  $I(P \rightarrow R) = F$ .

Como  $I(P \rightarrow R) = F$ , então  $I(P) = T$  e  $I(R) = F$ .

Distribuindo na fórmula os valores de verdade encontrados, temos

$$\begin{array}{ccccccc} ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) \\ T & T & F & F & T & F & F \end{array}$$

de onde obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R) \\ T & T & T & T & F & T & F & F & T & F & F \end{array}$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{Absurdo} \end{array}$

Portanto, a suposição inicial de que existe interpretação  $I$  tal que  $I(H) = F$  é falsa. Em outras palavras, para todo  $I$ ,  $I(H) = T$ , ou seja,  $H$  é tautologia.

- Exemplo: seja  $H = (P \rightarrow Q) \wedge (\sim(\sim P \vee Q))$ , demonstre por absurdo que  $H$  é uma contradição.

- Demonstração: assuma por absurdo que existe interpretação  $I$  tal que  $I(H) = T$ .

Então  $I(P \rightarrow Q) = T$  e  $I(\sim(\sim P \vee Q)) = T$ .

Como  $I(\sim(\sim P \vee Q)) = T$ , então  $I(\sim P \vee Q) = F$ . E portanto,  $I(Q) = F$ ,  $I(\sim P) = F$  e  $I(P) = T$ .

Distribuindo na fórmula os valores de verdade encontrados, temos

$$\begin{array}{ccccccc} (P \rightarrow Q) \wedge (\sim(\sim P \vee Q)) \\ T & T & T & F & T & F & F \end{array}$$

mas se  $I(P) = T$ , temos que  $I(Q)$  precisa ser  $T$  já que  $I(P \rightarrow Q) = T$ , portanto obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} (P \rightarrow Q) \wedge (\sim(\sim P \vee Q)) \\ T & T & T & T & T & F & T & F & F \end{array}$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{Absurdo} \end{array}$

Portanto, a suposição inicial de que existe interpretação  $I$  tal que  $I(H) = T$  é falsa. Em outras palavras, para todo  $I$ ,  $I(H) = F$ , ou seja,  $H$  é contradição.

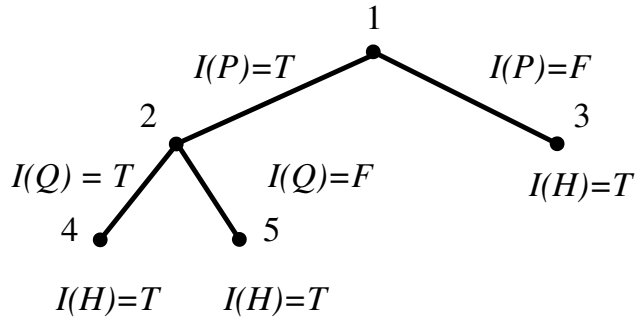
- Observe que para demonstrar corretamente que uma fórmula  $H$  é tautologia, é necessário chegar a um absurdo em todas as substituições possíveis. Caso alguma substituição não chegue a um absurdo, pode-se interromper a demonstração e concluir que a fórmula não é tautologia. Isso é evidente,

pois, se você assume que  $I(H) = F$  e não chega a um absurdo, significa que essa substituição específica faz com que  $I(H)$  seja  $F$  e, portanto, com que  $H$  não seja tautologia. Diferentes substituições representam diferentes linhas da tabela verdade, e pode ocorrer de algumas linhas serem iguais a  $T$ , caso em que há absurdo, e outras linhas iguais a  $F$ , caso em que não há absurdo. Por isso é necessário explorar todas as substituições possíveis. O mesmo vale para a contradição.

## 4.4 Método da árvore semântica

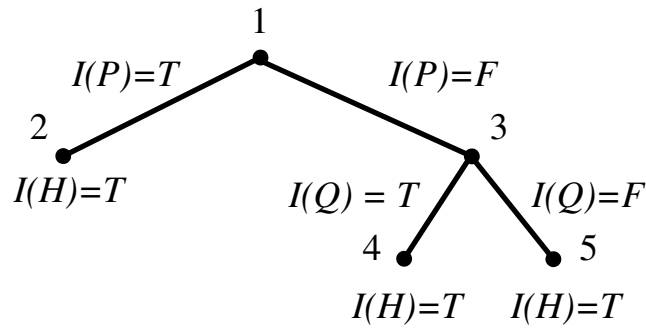
- Método da árvore semântica: é um método que permite a verificação da validade de uma fórmula sem ser exaustivo. A depender da fórmula, pode ser possível obter a resposta sem verificar todas as interpretações possíveis. Este conteúdo está na primeira edição do livro de Souza *Lógica para Ciência da Computação* [1].
- Exemplo: seja  $H = \sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ , demonstre que  $H$  é uma tautologia usando o método da árvore semântica.

	$\sim$	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim$	$P$	$\vee$	$\sim$	$Q)$
2		$T$				$F$	$T$			
3	$T$	$F$	$F$		$T$	$T$	$F$	$T$		
4	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$
5	$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$	$F$



- Exemplo: seja  $H = (P \vee \sim Q) \leftrightarrow (\sim P \rightarrow \sim Q)$ , demonstre que  $H$  é uma tautologia usando o método da árvore semântica.

	$(P$	$\vee$	$\sim$	$Q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim$	$P$	$\rightarrow$	$\sim$	$Q)$
2	$T$	$T$			$T$	$F$	$T$	$T$		
3	$F$					$T$	$F$			
4	$F$	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$
5	$F$	$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$



## 4.5 Método dos tableaux semânticos

- Tableau semântico: sequência de fórmulas construída de acordo com um conjunto de regras e apresentada em forma de árvore. O método dos tableaux semânticos é um mecanismo de decisão para a pergunta  $\beta \vdash H$ , sim ou não?
- Elementos do sistema de tableaux semânticos da lógica proposicional:
- Alfabeto da lógica proposicional sem os símbolos de verdade *true* e *false*.
  - Conjunto das fórmulas da lógica proposicional.
  - Um conjunto de regras de dedução.
- Regras de dedução do tableau semântico: sejam  $A$  e  $B$  duas fórmulas da lógica proposicional, as regras de dedução do sistema de tableaux semânticos são

$$\begin{array}{lll}
R_1 = A \wedge B & R_2 = A \vee B & R_3 = A \rightarrow B \\
\begin{array}{c} A \\ \swarrow \searrow \\ B \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ A \quad B \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \neg A \quad B \end{array} \\
R_4 = A \leftrightarrow B & R_5 = \neg \neg A & R_6 = \neg(A \wedge B) \\
\begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ A \wedge B \quad \neg A \wedge \neg B \end{array} & \begin{array}{c} A \\ \neg A \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \neg A \quad \neg B \end{array} \\
R_7 = \neg(A \vee B) & R_8 = \neg(A \rightarrow B) & R_9 = \neg(A \leftrightarrow B) \\
\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array} & \begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array} & \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \neg A \wedge B \quad A \wedge \neg B \end{array}
\end{array}$$

— Construção de um tableau semântico: se dá aplicando alguma regra de dedução uma vez para cada linha que não seja um literal (símbolo proposicional ou sua negação). O tableau resultante tende a ficar mais simples se aplicarmos primeiro as regras de dedução que não geram bifurcações ( $R_1, R_5, R_7, R_8$ ).

- Exemplo: considere o conjunto de fórmulas:  $\{A \rightarrow B, \sim(A \vee B), \sim(C \rightarrow A)\}$ . Encontre o tableau semântico iniciado com esse conjunto de fórmulas.

$$\{P \vee (Q \vee \sim R), P \rightarrow \sim R, Q \rightarrow \sim R\} \vdash \sim R \quad P \sim P$$

$$\begin{array}{lll}
1. & P \vee (Q \vee \sim R) \checkmark & \text{Ass} \\
2. & P \rightarrow \sim R \checkmark & \text{Ass} \\
3. & Q \rightarrow \sim R \checkmark & \text{Ass} \\
4. & \sim \sim R & \sim \text{Conc} \\
5. & \begin{array}{c} P \quad Q \vee \sim R \end{array} & 1 \vee \text{Elim} \\
6. & \begin{array}{cc} \sim P & \sim R \end{array} & 2 \rightarrow \text{Elim} \\
7. & \begin{array}{cc} \otimes & \otimes \\ 5, 6 & 4, 6 \end{array} & 5 \vee \text{Elim} \\
8. & \begin{array}{ccc} & Q & \sim R \\ & \swarrow \searrow & \otimes \\ \sim Q & \sim R & 4, 7 \\ \otimes & \otimes & \\ 7, 8 & 4, 8 & \end{array} & 3 \rightarrow \text{Elim}
\end{array}$$

- Ramo: é uma sequência de fórmulas onde cada fórmula é derivada das anteriores através das regras de dedução. A primeira fórmula do ramo é sempre a primeira fórmula do tableau.
- Ramo saturado: é um ramo onde, para todas as suas fórmulas,
  - já foi aplicada alguma regra de dedução; ou
  - não é possível aplicar nenhuma regra de derivação, isto é, a fórmula é um literal.
- Ramo fechado: é um ramo que contém uma fórmula e sua negação. Um ramo pode ser fechado sem ser saturado.
- Ramo aberto: é um ramo saturado não fechado.
- Tableau fechado: é um tableau onde todos os ramos são fechados.
- Tableau aberto: é um tableau onde algum ramo é aberto.
- Prova de  $H$  no sistema de tableaux semânticos: é um tableau fechado iniciado com a fórmula  $\sim H$ 
  - Exemplos: verifique se as fórmulas abaixo são tautologias:
    - $H_1 = \sim((P \rightarrow Q) \wedge \sim(P \leftrightarrow Q) \wedge \sim\sim P)$
    - $H_2 = (P \leftrightarrow Q) \vee \sim P$
    - $H_3 = (((P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge ((P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1)) \rightarrow \sim P_1$

$$(((P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge ((P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1)) \rightarrow \sim P_1$$

1.	$\sim(((P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge ((P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1)) \rightarrow \sim P_1 \checkmark$	$\sim H_3$
2.	$((P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge ((P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1) \checkmark$	$R_8$ em 1
3.	$\sim\sim P_1 \checkmark$	$R_8$ em 1
4.	$P_1$	$R_5$ em 3
5.	$(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1) \checkmark$	$R_1$ em 2
6.	$(P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1 \checkmark$	$R_1$ em 2
7.	$P \wedge Q \checkmark$	$R_1$ em 5
8.	$Q \rightarrow Q_1 \checkmark$	$R_1$ em 5
9.	$P$	$R_1$ em 7
10.	$Q$	$R_1$ em 7
11.	$\swarrow \quad \searrow$ $\sim(P \wedge Q_1) \checkmark \quad \sim P_1$	$R_3$ em 5
12.	$\swarrow \quad \searrow$ $\sim Q \quad Q_1$	$R_3$ em 8
13.	$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$ $\sim P \quad \sim Q_1 \quad \sim P \quad \sim Q_1$ $\otimes \quad \otimes \quad \otimes \quad \otimes$ $12,10 \quad 12,10 \quad 13,9 \quad 13,12$	$R_6$ em 11

- Observe que o tableau foi desenvolvido até que todos os ramos ficassem saturados. Alternativamente, é possível fechar os ramos à medida que são encontrados pares de fórmulas contraditórias entre si, como na versão abaixo

	$((P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge ((P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1) \rightarrow \sim P_1$	
1.	$\sim(((P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge ((P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1)) \rightarrow \sim P_1 \checkmark$	$\sim H_3$
2.	$((P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge ((P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1) \checkmark$	$R_8$ em 1
3.	$\sim \sim P_1 \checkmark$	$R_8$ em 1
4.	$P_1$	$R_5$ em 3
5.	$(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow Q_1) \checkmark$	$R_1$ em 2
6.	$(P \wedge Q_1) \rightarrow \sim P_1 \checkmark$	$R_1$ em 2
7.	$P \wedge Q \checkmark$	$R_1$ em 5
8.	$Q \rightarrow Q_1 \checkmark$	$R_1$ em 5
9.	$P$	$R_1$ em 7
10.	$Q$	$R_1$ em 7
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> <math>\sim(P \wedge Q_1) \checkmark</math>  <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> <math>\sim Q</math>  <math>\otimes</math>  12,10 </div> <div> <math>Q_1</math>  <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> <math>\sim P</math>  <math>\otimes</math>  13,9 </div> <div> <math>\sim Q_1</math>  <math>\otimes</math>  13,12 </div> </div> </div> </div> </div> <div> <math>\sim P_1</math>  <math>\otimes</math>  11,4 </div> </div>	$R_3$ em 5
11.		
12.		$R_3$ em 8
13.		$R_6$ em 11

- Pergunta: um tableau iniciado com uma tautologia necessariamente terá todos os ramos abertos?

◦ Resposta: não. Um contra-exemplo é a fórmula  $(P \wedge \sim P) \vee (Q \rightarrow Q)$

- Para provar que uma fórmula  $H$  é tautologia, iniciamos um tableau semântico com  $\sim H$ , que é uma contradição. Se  $H$  for realmente uma tautologia, todas as interpretações de  $\sim H$  devem ser iguais a  $F$ , fazendo com que todos os ramos do tableau sejam fechados. O método do tableau semântico pode ser visto como uma variação do método da negação ou absurdo, onde ramos fechados correspondem a substituições que levam a um absurdo. Ramos abertos por sua vez correspondem a substituições que não levam a um absurdo, ou seja, substituições que fazem  $I(\sim H) = T$ .

#### 4.5.1 Prova de que uma fórmula é uma contradição

- Na seção anterior, vimos que é possível mostrar que  $H$  é uma tautologia iniciando um tableau semântico com  $\sim H$ , que é uma contradição e obtendo um tableau com todos os ramos fechados. Da mesma maneira, é possível mostrar que  $H$  é uma contradição iniciando um tableau com  $H$  e obtendo um tableau com todos os ramos fechados.

### 4.5.2 Prova de que um conjunto de fórmulas é insatisfatível

- Como foi visto na seção 3.1, um conjunto de fórmulas  $\beta = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  é dito insatisfatível sse não existe interpretação que faça com que todas as fórmulas tenham interpretação igual a  $T$  ao mesmo tempo. Em outras palavras, se o conjunto  $\beta$  é insatisfatível, podemos dizer que  $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n) = F$  para toda interpretação, ou seja, essa fórmula é contraditória. É possível então mostrar que o conjunto de fórmulas  $\beta$  é insatisfatível através de um tableau semântico fechado iniciado por  $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ .

## 4.6 Exercícios

1. Determine por absurdo se as fórmulas a seguir são ou não tautologias.

- (a)  $H_1 = (H \vee H) \rightarrow H$
- (b)  $H_2 = H \rightarrow (G \vee H)$
- (c)  $H_3 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$
- (d)  $H_4 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((G \rightarrow E) \rightarrow (H \rightarrow E))$
- (e)  $H_5 = ((G \rightarrow (E \rightarrow H)) \wedge (G \rightarrow E)) \rightarrow (G \rightarrow H)$
- (f)  $H_6 = A \rightarrow ((B \wedge C) \rightarrow ((D \wedge E) \rightarrow ((G \wedge H) \rightarrow A)))$
- (g)  $H_7 = (((A \rightarrow B) \rightarrow (\sim C \rightarrow \sim D)) \rightarrow C) \rightarrow E) \rightarrow ((E \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A))$

2. Determine por absurdo se as fórmulas a seguir são ou não tautologias.

- (a)  $H_1 = \sim(\sim H) \leftrightarrow H$
- (b)  $H_2 = \sim(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\sim H \leftrightarrow G)$
- (c)  $H_3 = \sim(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\sim H \leftrightarrow G)$
- (d)  $H_4 = (H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$
- (e)  $H_5 = (H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$
- (f)  $H_6 = ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$
- (g)  $H_7 = ((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$
- (h)  $H_8 = H \rightarrow (H \wedge G)$

3. Repita os exercícios anteriores usando o método do tableau semântico.

## Capítulo 5

# Um método sintático de dedução na lógica proposicional

Capítulo 5 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

### 5.1 Introdução

- Métodos sintáticos são diferentes dos métodos semânticos de dedução. Enquanto nos métodos semânticos é levada em consideração a semântica das fórmulas, ou seja, a sua interpretação, nos métodos sintáticos as deduções são puramente simbólicas, ou seja, dependem da sequência de símbolos da fórmula.
- Para denotar implicação semântica, usamos o símbolo  $\models$ , mas para denotar implicação sintática, usamos o símbolo  $\vdash$ .
- Um método semântico nos permitiria inferir diretamente que  $\sim\sim P \models P$ , já que sabemos que ambos possuem a mesma tabela verdade ou que uma dupla negação, se eliminada, resulta na mesma interpretação. Em um método sintático, não podemos simplesmente afirmar que  $\sim\sim P \vdash P$ . Para demonstrar essa implicação, precisamos usar os axiomas e regras de dedução disponíveis.



## 5.2 O sistema formal Pa

- Alfabeto da lógica proposicional na forma simplificada: é constituído por
    - Símbolos de pontuação: ( )
    - Símbolos de verdade: *false*
    - Símbolos proposicionais:  $A B C P Q R A_1 A_2 A_3 a b c \dots$
    - Conectivos proposicionais:  $\sim \vee$
  - Sistema axiomático Pa: é um sistema formal composto por
    - Alfabeto da lógica proposicional na forma simplificada sem o símbolo de verdade *false*.
    - Conjunto das fórmulas da lógica proposicional.
    - Um subconjunto das fórmulas, denominadas axiomas.
    - Um conjunto de regras de dedução ou de inferência.
  - Axiomas do sistema Pa
    - Axioma 1:  $\sim(H \vee H) \vee H$
    - Axioma 2:  $\sim H \vee (G \vee H)$
    - Axioma 3:  $\sim(\sim H \vee G) \vee (\sim(E \vee H) \vee (G \vee E))$
- Usando outros conectivos, os axiomas do sistema Pa podem ser denotados por
- Axioma 1:  $(H \vee H) \rightarrow H$
  - Axioma 2:  $H \rightarrow (G \vee H)$
  - Axioma 3:  $(H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$
- Notação:
    - $(H \rightarrow G)$  denota  $(\sim H \vee G)$
    - $(H \leftrightarrow G)$  denota  $(H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)$
    - $(H \wedge G)$  denota  $\sim(\sim H \vee \sim G)$
  - Postulado modus ponens: é uma regra de inferência do sistema Pa definida pelo procedimento

tendo  $H$  e  $(\sim H \vee G)$  deduza  $G$

ou, usando a notação alternativa,

tendo  $H$  e  $(H \rightarrow G)$  deduza  $G$ .

Em outras palavras, se  $H$  e  $(H \rightarrow G)$  são fórmulas válidas, então  $G$  também é válida. Uma regra de inferência nos permite inferir novas fórmulas a partir de fórmulas já inferidas.

### Exercícios

1. Prove  $H_1 = P \rightarrow (Q \vee P)$ .

R: Fazendo  $H = P$  e  $G = Q$ , a fórmula  $H_1$  é obtida do axioma 2.

2. Prove  $H_2 = (P \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow ((\sim P \vee P) \rightarrow ((Q \vee P) \vee \sim P))$ .

R: Fazendo  $H = P$ ,  $G = (Q \vee P)$  e  $E = \sim P$ , a fórmula  $H_2$  é obtida do axioma 3.

3. Considere o conjunto de hipóteses  $\beta = \{G_1, G_2\}$  onde  $G_1 = P$  e  $G_2 = (P \rightarrow Q)$ . Prove  $(R \vee Q)$  a partir de  $\beta$  no sistema axiomático Pa.

R:

Fórmulas	Justificativa
$H_1 = P$	Hipótese $G_1$
$H_2 = P \rightarrow Q$	Hipótese $G_2$
$H_3 = Q$	Modus ponens em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = Q \rightarrow (R \vee Q)$	Axioma 2, $H = Q$ e $G = R$
$H_5 = R \vee Q$	Modus ponens em $H_3$ e $H_4$ ■

4. Considere o conjunto de hipóteses  $\beta = \{G_1, \dots, G_9\}$  onde

$$\begin{array}{lll}
 G_1 = (P \wedge R) \rightarrow P & G_4 = (P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q & G_7 = P_1 \\
 G_2 = Q \rightarrow P_4 & G_5 = (P_3 \wedge R) \rightarrow R & G_8 = P_3 \rightarrow P \\
 G_3 = P_1 \rightarrow Q & G_6 = P_4 \rightarrow P & G_9 = P_2
 \end{array}$$

Prove  $(S \vee P)$  a partir de  $\beta$  no sistema axiomático Pa.

R:

Fórmulas	Justificativa
$H_1 = P_1$	Hipótese $G_7$
$H_2 = P_1 \rightarrow Q$	Hipótese $G_3$
$H_3 = Q$	Modus ponens em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = Q \rightarrow P_4$	Hipótese $G_2$
$H_5 = P_4$	Modus ponens em $H_3$ e $H_4$
$H_6 = P_4 \rightarrow P$	Hipótese $G_6$
$H_7 = P$	Modus ponens em $H_5$ e $H_6$
$H_8 = P \rightarrow (S \vee P)$	Axioma 2, $H = P$ e $G = S$
$H_9 = S \vee P$	Modus ponens em $H_7$ e $H_8$ ■

— Consequência lógica sintática no sistema Pa: dada uma fórmula  $H$  e um conjunto de hipóteses  $\beta$ , dizemos que  $H$  é consequência lógica sintática de  $\beta$  em Pa se existe uma prova de  $H$  em Pa a partir de  $\beta$ . A notação para isso é  $\beta \vdash H$ .

— Teorema no sistema Pa: uma fórmula  $H$  é um teorema em Pa se existe uma prova de  $H$  em Pa que utiliza apenas os axiomas. É permitido usar

outros teoremas, já que também foram provados usando apenas axiomas. Teoremas são denotados por  $\vdash H$ , já que o conjunto de hipóteses é vazio.

- Proposição 1: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \rightarrow B) \text{ e } \beta \vdash (C \vee A) \text{ então } \beta \vdash (B \vee C)$$

Demonstração:

$H_1 = (A \rightarrow B)$	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$
$H_2 = (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (B \vee C))$	Axioma 3, $H = A$ , $G = B$ e $E = C$
$H_3 = (C \vee A) \rightarrow (B \vee C)$	Modus ponens (MP) em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = (C \vee A)$	$\beta \vdash (C \vee A)$
$H_5 = (B \vee C)$	MP em $H_4$ e $H_3$ ■

- Proposição 2: temos que  $\vdash (P \vee \sim P)$ .

Demonstração:

$H_1 = ((P \vee P) \rightarrow P) \rightarrow ((\sim P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \sim P))$	Axioma 3, $H = (P \vee P)$ , $G = P$ e $E = \sim P$
$H_2 = (P \vee P) \rightarrow P$	Axioma 1, $H = P$
$H_3 = (\sim P \vee (P \vee P)) \rightarrow (P \vee \sim P)$	MP em $H_2$ e $H_1$
$H_4 = \sim P \vee (P \vee P)$	Axioma 2, $H = P$ e $G = P$
$H_5 = (P \vee \sim P)$	MP em $H_4$ e $H_3$ ■

- Proposição 3, regra da substituição: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses e  $H$  uma fórmula da lógica proposicional, tais que  $\beta \vdash H$ . Seja  $\{P_1, \dots, P_n\}$  um conjunto de símbolos proposicionais que ocorrem em  $H$  mas não ocorrem em  $\beta$ , seja  $G$  a fórmula obtida de  $H$  substituindo  $P_1, \dots, P_n$  pelas fórmulas  $E_1, \dots, E_n$  respectivamente. Temos que  $\beta \vdash G$ .

- Para entender o porque de evitar substituir símbolos que ocorrem em  $\beta$ , observe os seguintes exemplos.
  - Considere  $\beta = \{P_1, P_2\}$  e a substituição  $P_1 = P$  e  $P_2 = \sim P$ . Acabamos de obter resultados contraditórios entre si, o que torna nosso sistema inconsistente.
  - Considere  $\beta = \{P_1, P_2, P_1 \wedge P_2\}$  e a substituição  $P_1 = P$  e  $P_2 = \sim P$ . Acabamos de demonstrar a contradição  $(P \wedge \sim P)$  o que torna nosso sistema incorreto.

— Proposição 4a: temos que  $\vdash (P \rightarrow \sim\sim P)$ .

Demonstração:

$H_1 = P \vee \sim P$	Prop. 2
$H_2 = \sim P \vee \sim\sim P$	Regra da Substituição (RS) em $H_1$
$H_3 = P \rightarrow \sim\sim P$	Mudança de notação (MN) em $H_2$ ■

— Proposição 4b: temos que  $\vdash (\sim\sim P \rightarrow P)$ .

Demonstração:

$H_1 = P \rightarrow \sim\sim P$	Prop 4a
$H_2 = \sim P \rightarrow \sim\sim\sim P$	RS em $H_1$
$H_3 = (\sim P \rightarrow \sim\sim\sim P) \rightarrow ((P \vee \sim P) \rightarrow (\sim\sim\sim P \vee P))$	Axioma 3, $H = \sim P$ , $G = \sim\sim\sim P$ e $E = P$
$H_4 = (P \vee \sim P) \rightarrow (\sim\sim\sim P \vee P)$	MP em $H_2$ e $H_3$
$H_5 = P \vee \sim P$	Prop. 2
$H_6 = \sim\sim\sim P \vee P$	MP em $H_5$ e $H_4$
$H_3 = \sim\sim P \rightarrow P$	MN em $H_6$ ■

— Proposição 5: temos que  $\vdash (P \rightarrow P)$ .

Demonstração:

$H_1 = P \rightarrow \sim\sim P$	Prop. 4a
$H_2 = (P \rightarrow \sim\sim P) \rightarrow ((P \vee P) \rightarrow (\sim\sim P \vee P))$	Axioma 3, $H = P$ , $G = \sim\sim P$ e $E = P$
$H_3 = (P \vee P) \rightarrow (\sim\sim P \vee P)$	MP em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = (P \rightarrow \sim\sim P) \rightarrow ((\sim\sim P \vee P) \rightarrow (\sim\sim P \vee \sim\sim P))$	Axioma 3, $H = P$ , $G = \sim\sim P$ e $E = \sim\sim P$
$H_5 = (\sim\sim P \vee P) \rightarrow (\sim\sim P \vee \sim\sim P)$	MP em $H_1$ e $H_4$
$H_6 = \sim P \vee (P \vee P)$	Axioma 2, $H = P$ e $G = P$
$H_7 = (\sim\sim P \vee P) \vee \sim P$	Prop. 1 em $H_3$ e $H_6$
$H_8 = \sim P \rightarrow \sim\sim\sim P$	RS em Prop. 4a
$H_9 = \sim\sim\sim P \vee (\sim\sim P \vee P)$	Prop. 1 em $H_8$ e $H_7$
$H_{10} = (\sim\sim P \vee \sim\sim P) \vee \sim\sim\sim P$	Prop. 1 em $H_5$ e $H_9$
$H_{11} = \sim\sim\sim P \rightarrow \sim P$	RS em Prop. 4b
$H_{12} = \sim P \vee (\sim\sim P \vee \sim\sim P)$	Prop. 1 em $H_{11}$ e $H_{10}$
$H_{13} = (\sim\sim P \vee \sim\sim P) \rightarrow \sim\sim P$	Axioma 1, $H = \sim\sim P$
$H_{14} = \sim\sim P \vee \sim P$	Prop. 1 em $H_{13}$ e $H_{12}$
$H_{15} = \sim\sim\sim P \vee \sim\sim P$	RS em $H_{14}$
$H_{16} = \sim\sim P \rightarrow P$	Prop. 4b
$H_{17} = P \vee \sim\sim\sim P$	Prop. 1 em $H_{16}$ e $H_{15}$
$H_{18} = \sim P \vee P$	Prop. 1 em $H_{11}$ e $H_{17}$
$H_{19} = P \rightarrow P$	MN em $H_{18}$ ■

— Proposição 6, comutatividade: temos que

$$\vdash (A \vee B) \rightarrow (B \vee A).$$

Demonstração:

$H_1 = B \rightarrow B$	RS em Prop. 5
$H_2 = (B \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (B \vee A))$	Axioma 3, $H = B$ , $G = B$ e $E = A$
$H_3 = (A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$	MP em $H_1$ e $H_2$ ■

— Proposição 6b: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$  e  $B$  duas fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \vee B) \text{ então } \beta \vdash (B \vee A).$$

— Proposição 7: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \rightarrow B) \text{ e } \beta \vdash (B \rightarrow C) \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C).$$

Demonstração:

$H_1 = B \rightarrow C$	$\beta \vdash (B \rightarrow C)$
$H_2 = \sim A \vee B$	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$
$H_3 = C \vee \sim A$	Prop. 1 em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = (C \vee \sim A) \rightarrow (\sim A \vee C)$	RS em Prop. 6
$H_5 = \sim A \vee C$	MP em $H_3$ e $H_4$
$H_6 = A \rightarrow C$	MN em $H_5$ ■

— Proposição 8: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \rightarrow C) \text{ e } \beta \vdash (B \rightarrow C) \text{ então } \beta \vdash ((A \vee B) \rightarrow C).$$

Demonstração:

$H_1 = B \rightarrow C$	$\beta \vdash (B \rightarrow C)$
$H_2 = (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (C \vee A))$	Axioma 3, $H = B$ , $G = C$ e $E = A$
$H_3 = (A \vee B) \rightarrow (C \vee A)$	MP em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = A \rightarrow C$	$\beta \vdash (A \rightarrow C)$
$H_5 = (A \rightarrow C) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee C))$	Axioma 3, $H = A$ , $G = C$ e $E = C$
$H_6 = (C \vee A) \rightarrow (C \vee C)$	MP em $H_4$ e $H_5$
$H_7 = (A \vee B) \rightarrow (C \vee C)$	Prop. 7 em $H_3$ e $H_6$
$H_8 = (C \vee C) \rightarrow C$	Axioma 1, $H = C$
$H_9 = (A \vee B) \rightarrow C$	Prop. 7 em $H_7$ e $H_8$ ■

— Proposição 9: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \rightarrow C) \text{ e } \beta \vdash (\sim A \rightarrow C) \text{ então } \beta \vdash C.$$

Demonstração:

$H_1 = A \rightarrow C$	$\beta \vdash (A \rightarrow C)$
$H_2 = \sim A \rightarrow C$	$\beta \vdash (\sim A \rightarrow C)$
$H_3 = (A \vee \sim A) \rightarrow C$	Prop. 8 em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = (A \vee \sim A)$	Prop. 2
$H_5 = C$	MP em $H_4$ e $H_3$ ■

— Proposição 10: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

se  $\beta \vdash (A \rightarrow B)$  então  $\beta \vdash (A \rightarrow (C \vee B))$  e  $\beta \vdash (A \rightarrow (B \vee C))$ .

Demonstração:

$H_1 = A \rightarrow B$	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$
$H_2 = B \rightarrow (C \vee B)$	Axioma 2, $H = B$ e $G = C$
$H_3 = A \rightarrow (C \vee B)$	Prop. 7 em $H_1$ e $H_2$
$H_4 = (C \vee B) \rightarrow (B \vee C)$	Prop. 6
$H_5 = A \rightarrow (B \vee C)$	Prop. 7 em $H_3$ e $H_4$ ■

— Proposição 11, associatividade: temos que

$\vdash ((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$ .

Demonstração:

$H_1 = A \rightarrow A$	Prop. 5
$H_2 = A \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	RS, Prop 10 em $H_1$
$H_3 = B \rightarrow B$	Prop. 5
$H_4 = B \rightarrow (B \vee C)$	Prop 10 em $H_3$
$H_5 = B \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	Prop 10 em $H_4$
$H_6 = (A \vee B) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	Prop 8 em $H_2$ e $H_5$
$H_7 = C \rightarrow C$	Prop. 5
$H_8 = C \rightarrow (B \vee C)$	Prop 10 em $H_7$
$H_9 = C \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	Prop 10 em $H_8$
$H_{10} = ((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$	Prop 8 em $H_6$ e $H_9$ ■

— Proposição 12, associatividade: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

se  $\beta \vdash ((A \vee B) \vee C)$  então  $\beta \vdash (A \vee (B \vee C))$ .

— Proposição 13: sejam  $\beta$  um conjunto de hipóteses, e  $A$ ,  $B$  e  $C$  três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

se  $\beta \vdash (A \rightarrow B)$  e  $\beta \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$  então  $\beta \vdash (A \rightarrow C)$ .

Demonstração:

---

$H_1 = A \rightarrow B$	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$
$H_2 = A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\beta \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
$H_3 = \sim A \vee (\sim B \vee C)$	MN em $H_2$
$H_4 = (\sim B \vee C) \vee \sim A$	Prop. 6b em $H_3$
$H_5 = \sim B \vee (C \vee \sim A)$	Prop. 12 em $H_4$
$H_6 = B \rightarrow (C \vee \sim A)$	MN em $H_5$
$H_7 = A \rightarrow (C \vee \sim A)$	Prop. 7 em $H_1$ e $H_6$
$H_8 = \sim A \vee (C \vee \sim A)$	MN em $H_7$
$H_9 = (C \vee \sim A) \vee \sim A$	Prop. 6b em $H_8$
$H_{10} = C \vee (\sim A \vee \sim A)$	Prop. 12 em $H_9$
$H_{11} = (\sim A \vee \sim A) \rightarrow \sim A$	Axioma 1, $H = \sim A$
$H_{12} = \sim A \vee C$	Prop. 1 em $H_{11}$ e $H_{10}$
$H_{13} = A \rightarrow C$	MN em $H_{12}$ ■

---

### 5.3 Exercícios

- Demonstre os teoremas abaixo no sistema axiomático Pa. Use os axiomas e proposições vistos em aula.
  - $\vdash (\sim P \vee P)$
  - $\vdash (\sim P \vee \sim \sim P)$
  - $\vdash (H \rightarrow (H \vee G))$
  - $\vdash (H \rightarrow (G \rightarrow H))$
  - $\vdash ((H \rightarrow G) \rightarrow (\sim G \rightarrow \sim H))$
- Demonstre os teoremas abaixo no sistema axiomático Pa. Use os axiomas e proposições vistos em aula.
  - Se  $\beta \vdash (A \rightarrow B)$  e  $\beta \vdash (C \vee A)$  então  $\beta \vdash (C \vee B)$
  - Se  $\beta \vdash (A \rightarrow \sim B)$  e  $\beta \vdash (C \rightarrow A)$  então  $\beta \vdash (B \rightarrow \sim C)$
- Considere um sistema axiomático igual ao Pa mais o axioma 4 dado abaixo. Mostre que se  $\beta \vdash H$  então  $\beta \vdash \sim H$ .  
 Axioma 4:  $H \rightarrow (H \vee G)$

## Capítulo 6

# A linguagem da lógica de predicados

Capítulo 6 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

### 6.1 O alfabeto da lógica de predicados

- Alfabeto: o alfabeto da lógica de predicados é composto por
  - Símbolos de pontuação:  $()$
  - Símbolos de verdade:  $true\ false$
  - Símbolos para variáveis:  $x\ y\ z\ w\ x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ \dots$
  - Símbolos para funções:  $f\ g\ h\ f_1\ g_1\ h_1\ f_2\ \dots$
  - Símbolos para predicados:  $p\ q\ r\ s\ p_1\ q_1\ r_1\ s_1\ p_2\ \dots$
  - Conectivos:  $\sim\ \vee\ \wedge\ \rightarrow\ \leftrightarrow\ \forall\ \exists$
- Associado a cada função ou predicado está um número inteiro  $k \geq 0$  que indica a sua “aridade”, ou seja, seu número de argumentos.
- Os símbolos para funções zero-árias, isto é, funções constantes, são:  $a\ b\ c\ a_1\ b_1\ c_1\ a_2\ \dots$
- Os símbolos para predicados zero-ários, isto é, símbolos proposicionais, são:  $P\ Q\ R\ S\ P_1\ Q_1\ R_1\ S_1\ P_2\ \dots$

### 6.2 Fórmulas da lógica de predicados

- Termo: um termo pode ser
  - uma variável
  - $f(t_1, \dots, t_n)$  onde  $f$  é uma função  $n$ -ária e  $t_1, \dots, t_n$  são termos.

A INTERPRETAÇÃO DE UM TERMO É UM OBJETO MATEMÁTICO



- Átomo: um átomo pode ser
  - um símbolo de verdade
  - $p(t_1, \dots, t_n)$  onde  $p$  é um predicado  $n$ -ário e  $t_1, \dots, t_n$  são termos.

A INTERPRETAÇÃO DE UM ÁTOMO É UM VALOR DE VERDADE  $\in \{T, F\}$

- Fórmula: as fórmulas da linguagem da lógica de predicados são construídas a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir:
  - Todo átomo é uma fórmula.
  - Se  $H$  é fórmula,  $\sim H$  é fórmula.
  - Se  $H$  e  $G$  são fórmulas, então  $(H \vee G)$ ,  $(H \wedge G)$ ,  $(H \rightarrow G)$  e  $(H \leftrightarrow G)$  são fórmulas.
  - Se  $H$  é fórmula e  $x$  é variável, então,  $(\forall x)H$  e  $(\exists x)H$  são fórmulas.
- Expressão: uma expressão pode ser
  - um termo
  - uma fórmula

### 6.3 Correspondência entre quantificadores

- $(\forall x)H \equiv \sim((\exists x)(\sim H))$
- $(\exists x)H \equiv \sim((\forall x)(\sim H))$

### 6.4 Símbolos de pontuação

- Ordem de precedência:
 

• $\sim$	Maior
• $\forall \exists$	
• $\rightarrow \leftrightarrow$	$A \rightarrow B \leftrightarrow C$ possui duas interpretações.
• $\wedge$	
• $\vee$	Menor

### 6.5 Características sintáticas das fórmulas

- Subtermo, subfórmula e subexpressão:
  - Se  $E = x$  então  $x$  é subtermo de  $E$ .
  - Se  $E = f(t_1, \dots, t_n)$  então  $t_1, \dots, t_n, f(t_1, \dots, t_n)$  são subtermos de  $E$ .
  - Se  $H$  é fórmula,  $H$  é subfórmula de  $H$ .
  - Se  $E = \sim H$ , então  $H$  e  $\sim H$  são subfórmulas de  $E$ .
  - Se  $E$  é uma fórmula do tipo  $(G \vee H)$ ,  $(G \wedge H)$ ,  $(G \rightarrow H)$  ou  $(G \leftrightarrow H)$ , então  $G$  e  $H$  são subfórmulas de  $E$ .
  - Se  $E$  é uma fórmula do tipo  $(\forall x)H$  ou  $(\exists x)H$ , então  $H$  é subfórmula de  $E$ .

- Se  $G$  é subfórmula de  $H$ , então toda subfórmula de  $G$  é subfórmula de  $H$ .
- Todo subtermo ou subfórmula é também subexpressão.
- Comprimento de uma fórmula:
  - Se  $H$  é um átomo,  $\text{comp}(H) = 1$ .
  - Se  $H$  é fórmula,  $\text{comp}(\sim H) = \text{comp}(H) + 1$ .
  - Se  $H$  e  $G$  são fórmulas:
    - $\text{comp}(H \vee G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .
    - $\text{comp}(H \wedge G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .
    - $\text{comp}(H \rightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .
    - $\text{comp}(H \leftrightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$ .
  - Se  $H = ((\forall x)G)$  ou  $H = ((\exists x)G)$ , então  $\text{comp}(H) = \text{comp}(G) + 1$ .

## 6.6 Formas normais

- Literal: um literal pode ser
  - um átomo
  - a negação de um átomo
- Forma normal: uma fórmula está na
  - forma normal conjuntiva (FNC) se for uma conjunção ( $\wedge$ ) de disjunções ( $\vee$ ) de literais
  - forma normal disjuntiva (FND) se for uma disjunção ( $\vee$ ) de conjunções ( $\wedge$ ) de literais

## 6.7 Classificações de variáveis

- Escopo de um quantificador: seja  $G$  uma fórmula da lógica de predicados:
  - Se  $(\forall x)H$  é uma subfórmula de  $G$ , então o escopo de  $(\forall x)$  em  $G$  é a subfórmula  $H$ .
  - Se  $(\exists x)H$  é uma subfórmula de  $G$ , então o escopo de  $(\exists x)$  em  $G$  é a subfórmula  $H$ .

## Exercícios

1. Considere a fórmula abaixo.

$$G = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, z, w) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$$

Qual é o escopo de

- (a)  $(\forall x)$
  - (b)  $(\exists y)$
  - (c)  $(\forall z)$
  - (d)  $(\forall y)$
- Ocorrência livre e ligada: sejam  $x$  uma variável e  $G$  uma fórmula.
- Uma ocorrência de  $x$  em  $G$  é ligada se  $x$  está no escopo de um quantificador  $(\forall x)$  ou  $(\exists x)$ .
  - Uma ocorrência de  $x$  em  $G$  é livre se não for ligada.
- Variável livre e ligada: sejam  $x$  uma variável e  $G$  uma fórmula.
- A variável  $x$  é ligada em  $G$  se existe pelo menos uma ocorrência ligada de  $x$  em  $G$ .
  - A variável  $x$  é livre em  $G$  se existe pelo menos uma ocorrência livre de  $x$  em  $G$ .
- Símbolo livre: seja  $G$  uma fórmula, os seus símbolos livres são as variáveis com ocorrência livre em  $G$ , símbolos de função e símbolos de predicado.
- Fórmula fechada: uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.
- Fecho de uma fórmula: seja  $H$  uma fórmula da lógica de predicados, e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  o conjunto das variáveis livres de  $H$ .
- O fecho universal de  $H$ , indicado por  $(\forall^*)H$ , é dado pela fórmula  $(\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)H$ .
  - O fecho existencial de  $H$ , indicado por  $(\exists^*)H$ , é dado pela fórmula  $(\exists x_1)(\exists x_2) \dots (\exists x_n)H$ .

## 6.8 Exercícios

1. Determine o comprimento das fórmulas a seguir.

- (a)  $H_1 = p(x, y, f(z))$
- (b)  $H_2 = (P \vee \sim Q) \rightarrow \sim(q(x, y) \vee r(z))$
- (c)  $H_3 = (\exists y)r(y) \leftrightarrow \sim(\exists y)P$
- (d)  $H_4 = \sim(p(x, y, z)) \rightarrow \sim((\forall x)(\forall y)(\forall z)p(x, y, z))$

2. Determine o conjunto de subexpressões das expressões a seguir.

- (a)  $H_1 = p(x, y, f(z))$

- (b)  $H_2 = g(x, y, f(z))$
- (c)  $H_3 = (\exists y)r(y) \leftrightarrow \sim(\exists y)P$
- (d)  $H_4 = \sim(p(x, y, z)) \rightarrow \sim((\forall x)(\forall y)(\forall z)p(x, y, z))$

3. Verdadeiro ou falso?

- (a) Toda variável é um termo
  - (b) Todo termo é uma variável
  - (c) Toda função é um termo
  - (d) Todo termo é uma função
  - (e) Toda variável é um átomo
  - (f) Todo átomo é uma variável
  - (g) Todo termo é um átomo
  - (h) Todo átomo é um termo
  - (i) Todo termo é uma fórmula
  - (j) Toda fórmula é um termo
  - (k) Todo átomo é um literal
  - (l) Todo literal é um átomo
  - (m) Todo átomo é uma fórmula
  - (n) Toda fórmula é um átomo
  - (o) Todo literal é uma fórmula
  - (p) Toda fórmula é um literal
  - (q) Toda variável é uma expressão
  - (r) Toda expressão é uma variável
  - (s) Todo átomo é uma expressão
  - (t) Toda expressão é um átomo
  - (u) Todo literal é uma expressão
  - (v) Toda expressão é um literal
  - (w) Todo termo é uma expressão
  - (x) Toda expressão é um termo
4. Indique se os itens abaixo são ou não variáveis, termos, funções, átomos, literais, fórmulas e expressões.
- (a)  $z$
  - (b)  $a$
  - (c)  $P \leftrightarrow Q$
  - (d)  $g(x, y, z)$

(e)  $p(x, y, z)$

(f)  $\sim P$

5. Escreva uma fórmula equivalente usando o quantificador existencial  $\exists$ .

(a)  $H_1 = (\forall x)P$

(b)  $H_2 = \sim(\forall x)P$

(c)  $H_3 = (\forall x)\sim P$

(d)  $H_4 = \sim((\forall x)\sim P)$

6. Considere a fórmula  $(\forall y)((\exists x)\sim q(x) \wedge (\exists y)(\forall z)p(y, z))$ . Qual é o escopo de

(a)  $(\forall y)$

(b)  $(\exists x)$

(c)  $(\exists y)$

(d)  $(\forall z)$

7. Indique o escopo de todos os quantificadores das fórmulas abaixo.

(a)  $(\forall x)( (\forall z)p(x, y, z) \leftrightarrow (\forall y)q(x, y, z) )$

(b)  $(\forall x)p(x, y, z) \rightarrow (\forall y)(\exists z)q(x, y, z)$

8. Indique se as ocorrências de variáveis nas fórmulas abaixo são livres ou ligadas.

(a)  $(\forall x)( (\forall z)p(x, y, z, w) \leftrightarrow (\forall y)q(x, y, z, z_1) )$

(b)  $(\forall x)( p(x, y, z_1) \rightarrow (\forall y)(\exists z)( q(w, x, y) \wedge (\forall w)r(w, x, z) ) )$

9. Indique se as variáveis nas fórmulas da questão anterior são livres ou ligadas.

10. Encontre o fecho universal e o fecho existencial das fórmulas da questão anterior.

# Referências Bibliográficas

- [1] João Nunes de Souza. *Lógica para Ciência da Computação*. Campus, Brasil, 1st edition, 2002.
- [2] João Nunes de Souza. *Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins*. Campus-Elsevier, Brasil, 3rd edition, 2014.