Notas de aula de Lógica para Ciência da Computação

Daniel Oliveira Dantas

11 de setembro de 2020

Sumário

Capítulo 1

A linguagem da lógica proposicional

Capítulo 1 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

— Alfabeto: o alfabeto da Lógica Proposicional é composto por
- Símbolos de pontuação: ( )
- Símbolos de verdade: *true false*
- Símbolos proposicionais: $A\ B\ C\ P\ Q\ R\ A_1\ A_2\ A_3\ a\ b\ c\ \ldots$
  - Não se usam as letras V, v, F, f, T e t para não confundir com os valores de verdade.
- Conectivos proposicionais: $\sim\ \ \vee\ \ \wedge\ \ \rightarrow \leftrightarrow$

— Fórmula: as fórmulas da linguagem da lógica proposicional são construídas a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir:
- Todo símbolo de verdade é uma fórmula.
- Todo símbolo proposicional é uma fórmula.
- Se H é fórmula, $\sim H$ é fórmula.
- Se H e G são fórmulas, $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são fórmulas.

— Fórmulas mal formadas: são fórmulas não obtidas da definição anterior.

— Ordem de precedência:
- $\sim$ Precedência maior.
- $\rightarrow \leftrightarrow$ $A \rightarrow B \leftrightarrow C$ possui duas interpretações.
- $\wedge$
- $\vee$ Precedência menor.

— Comprimento de uma fórmula:

- Se H é um símbolo proposicional ou de verdade, $\text{comp}(H) = 1$.
- Se H é fórmula, $\text{comp}(\sim H) = \text{comp}(H) + 1$.
- Se H e G são fórmulas:
  - ○ $\text{comp}(H \vee G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.
  - ○ $\text{comp}(H \wedge G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.
  - ○ $\text{comp}(H \rightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.
  - ○ $\text{comp}(H \leftrightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.

— Subfórmulas:

- H é subfórmula de H.
- Se $H = \sim G$, G é subfórmula de H.
- Se H é uma fórmula do tipo $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H.
- Se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.

Capítulo 2

A semântica da lógica proposicional

Capítulo 2 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

— Função: é uma relação entre dois conjuntos que associa cada elemento do conjunto de entrada a um único elemento do conjunto de saída

— Função binária: é uma função em que seu contradomínio possui apenas dois elementos

— Interpretação I é uma função binária tal que:
- O domínio de I é constituído pelo conjunto de fórmulas da lógica proposicional.
- O contradomínio de I é o conjunto $\{T, F\}$.
- $I(\mathit{true}) = T,\ I(\mathit{false}) = F$.
- Se P é um símbolo proposicional, $I(P) \in \{T, F\}$.

— Interpretação de fórmulas: dadas uma fórmula E e uma interpretação I, o significado ou interpretação de E, denotado por $I(E)$, é determinado pelas regras:
- Se $E = P$, onde P é um símbolo proposicional, então $I(E) = I(P)$, onde $I(P) \in \{T, F\}$.
- Se $E = \mathit{true}$, então $I(E) = I(\mathit{true}) = T$.
- Se $E = \mathit{false}$, então $I(E) = I(\mathit{false}) = F$.
- Seja H uma fórmula, se $E = {\sim}H$ então:
  - ∘ $I(E) = I({\sim}H) = T \Leftrightarrow I(H) = F$.
  - ∘ $I(E) = I({\sim}H) = F \Leftrightarrow I(H) = T$.

- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \lor G)$ então:
  - ∘ $I(H) = T$ e/ou $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \lor G) = T$.
  - ∘ $I(H) = F$ e $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \lor G) = F$.
- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \land G)$ então:
  - ∘ $I(H) = T$ e $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \land G) = T$.

- $I(H) = F$ e/ou $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \ \wedge \ G) = F$.

- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \rightarrow G)$ então:
  - $I(H) = T$ então $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = T$.
  - $I(H) = F$ e/ou $I(G) = T \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = T$.
  - $I(H) = T$ e $I(G) = F \Leftrightarrow I(E) = I(H \rightarrow G) = F$.
- Sejam H e G duas fórmulas, se $E = (H \leftrightarrow G)$ então:
  - $I(H) = I(G) \Leftrightarrow I(E) = I(H \leftrightarrow G) = T$.
  - $I(H) \neq I(G) \Leftrightarrow I(E) = I(H \leftrightarrow G) = F$.

Capítulo 3

Propriedades semânticas da lógica proposicional

Capítulo 3 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

3.1 Propriedades semânticas

— Tautologia: uma fórmula H é tautologia ou válida se e somente se (sse) para toda interpretação I
$$I(H) = T$$

— Satisfatibilidade: uma fórmula H é satisfatível ou factível se e somente se (sse) existe pelo menos uma interpretação I tal que
$$I(H) = T$$

— Contingência: uma fórmula H é uma contingência se e somente se (sse) existem interpretações I e J tais que
$$I(H) = T \text{ e } J(H) = F$$

— Contradição: uma fórmula H é contraditória se e somente se (sse) para toda interpretação I
$$I(H) = F$$

— Implicação: dadas duas fórmulas H e G, $H \vDash G$ (H implica G) sse para toda interpretação I
$$\text{se } I(H) = T \text{ então } I(G) = T$$

— Equivalência: dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G sse para toda interpretação I

$$I(H) = I(G)$$

— Dada uma fórmula H e uma interpretação I, dizemos que I satisfaz H se

$$I(H) = T$$

— Um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfatível sse existe interpretação I tal que

$$I(H_1) = I(H_2) = \cdots = I(H_n) = T$$

— Um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é insatisfatível sse não existe interpretação I tal que

$$I(H_1) = I(H_2) = \cdots = I(H_n) = T$$

3.2 Relações entre propriedades semânticas

— Proposição 3.1: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia } \Rightarrow H \text{ é satisfatível.}$$

- Demonstração: H é tautologia $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = T \Rightarrow$ existe interpretação I tal que $I(H) = T \Leftrightarrow H$ é satisfatível. $\blacksquare$

— Proposição 3.3: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia } \Rightarrow H \text{ não é contingência.}$$

- Demonstração: H é tautologia $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = T \Leftrightarrow$ não existe interpretação I tal que $I(H) = F \Rightarrow$ não existem interpretações I e J tais que $I(H) = F$ e $J(H) = T \Leftrightarrow H$ não é contingência. $\blacksquare$

— Proposição 3.4: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é contingência } \Rightarrow H \text{ é satisfatível.}$$

- Demonstração: H é contingência $\Leftrightarrow$ existem interpretações I e J tais que $I(H) = T$ e $J(H) = F \Rightarrow$ existe interpretação I tal que $I(H) = T \Leftrightarrow H$ é satisfatível. $\blacksquare$

— Proposição 3.5: seja H uma fórmula,

$$H \text{ é tautologia } \Leftrightarrow \sim H \text{ é contraditória.}$$

- Demonstração: H é tautologia $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(\sim H) = F \Leftrightarrow \sim H$ é contraditória. $\blacksquare$

— Proposição 3.7: sejam H e G duas fórmulas,

$$H \text{ equivale a } G \Leftrightarrow \ (H \leftrightarrow G) \text{ é tautologia.}$$

- Demonstração: H equivale a $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H) = I(G) \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H \leftrightarrow G) = T \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$ é tautologia. ■

— Proposição 3.8: sejam H e G duas fórmulas,

$$H \text{ implica } G \Leftrightarrow \ (H \rightarrow G) \text{ é tautologia.}$$

- Demonstração: H implica $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se $I(H) = T$ então $I(G) = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I(H \rightarrow G) = T \Leftrightarrow (H \rightarrow G)$ é tautologia. ■

3.3 Relações semânticas entre os conectivos da lógica proposicional

— Conjunto de conectivos completo: o conjunto de conectivos ψ é dito completo se é possível expressar os conectivos $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando apenas os conectivos de ψ.

- O conectivo $\rightarrow$ pode ser expresso com $\{\sim, \vee\}$:

$$(P \rightarrow Q) \equiv \ (\sim P \ \vee \ Q)$$

- O conectivo $\wedge$ pode ser expresso com $\{\sim, \vee\}$:

$$(P \ \wedge \ Q) \equiv \ \sim(\sim P \ \vee \ \sim Q)$$

- O conectivo $\leftrightarrow$ pode ser expresso com $\{\sim, \vee\}$:

$$(P \leftrightarrow Q) \equiv \ \sim(\sim(\sim P \ \vee \ Q) \ \vee \ \sim(\sim Q \ \vee \ P))$$

— O conjunto $\{\sim, \vee\}$ é completo, pois é possível expressar os conectivos $\{\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando apenas $\{\sim, \vee\}$.

— Proposição 3.15 (regra da substituição): sejam G, G', H e H' fórmulas da lógica proposicional tais que:

- G e H são subfórmulas de G' e H' respectivamente.
- G' é obtida de H' da substituição de H por G em H'.

$$G \equiv H \Rightarrow G' \equiv H'$$

— Definição: o conectivo NAND ($\overline{\wedge}$) é definido por $(P \,\overline{\wedge}\, Q) \equiv \ \sim(P \ \wedge \ Q)$.

- O conectivo $\sim$ pode ser expresso com $\{\overline{\wedge}\}$:

$$(\sim P) \equiv \ (P \,\overline{\wedge}\, P)$$

- O conectivo $\vee$ pode ser expresso com $\{\overline{\wedge}\}$:

$$(P \ \vee \ Q) \equiv \ ((P \,\overline{\wedge}\, P) \,\overline{\wedge}\, (Q \,\overline{\wedge}\, Q))$$

3.4 Formas normais na lógica proposicional

— Literais: um literal na lógica proposicional é um símbolo proposicional ou sua negação.
— Forma normal: dada uma fórmula H da lógica proposicional, existe uma fórmula G, equivalente a H, que está na forma normal. Forma normal é uma estrutura de fórmula pré-definida.
- Forma normal disjuntiva (FND): é uma disjunção ($\vee$) de conjunções ($\wedge$).
- Forma normal conjuntiva (FNC): é uma conjunção ($\wedge$) de disjunções ($\vee$).

— Obtenção de formas normais:
- FND:
  - Obtenha a tabela verdade da fórmula.
  - Selecione as linhas cuja interpretação é T.
  - Para cada linha selecionada, faça a conjunção ($\wedge$) de todos os símbolos proposicionais cuja interpretação é T com a negação dos símbolos proposicionais cuja interpretação é F.
  - Faça a disjunção ($\vee$) das fórmulas obtidas no passo anterior.
- FNC:
  - Obtenha a tabela verdade da fórmula.
  - Selecione as linhas cuja interpretação é F.
  - Para cada linha selecionada, faça a disjunção ($\vee$) de todos os símbolos proposicionais cuja interpretação é F com a negação dos símbolos proposicionais cuja interpretação é T.
  - Faça a conjunção ($\wedge$) das fórmulas obtidas no passo anterior.

— Exemplo: encontre a FND e a FNC da fórmula $((P \to Q) \wedge R)$.

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge R$	FND	FNC
T	T	T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$	
T	T	F	T	F		$\sim P \vee \sim Q \vee R$
T	F	T	F	F		$\sim P \vee Q \vee \sim R$
T	F	F	F	F		$\sim P \vee Q \vee R$
F	T	T	T	T	$\sim P \wedge Q \wedge R$	
F	T	F	T	F		$P \vee \sim Q \vee R$
F	F	T	T	T	$\sim P \wedge \sim Q \wedge R$	
F	F	F	T	F		$P \vee Q \vee R$

- FND: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R)$
- FNC: $(\sim P \vee \sim Q \vee R) \wedge (\sim P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee Q \vee R) \wedge$
$(P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

3.5 Exercícios

1. Determine o comprimento e o conjunto de subfórmulas das fórmulas a seguir.

   (a) $P \vee P$

   (b) $((\sim\sim P \vee Q) \leftrightarrow (P \to Q)) \wedge true$

   (c) $P \to ((Q \to R) \to ((P \to R) \to (P \to R)))$

   (d) $((P \to \sim P) \leftrightarrow \sim P) \vee Q$

   (e) $\sim(P \to \sim P)$

2. Dentre as concatenações de símbolos a seguir, quais são fórmulas bem formadas e quais são fórmulas mal formadas?

   (a) $(P \to \wedge\ true)$

   (b) $(P \wedge Q) \to ((Q \leftrightarrow P) \vee \sim\sim R)$

   (c) $\sim\sim P$

   (d) $\vee Q$

   (e) $(P \vee Q) \to ((Q \leftrightarrow R))$

   (f) PQR

   (g) $A\sim$

3. Demonstre as proposições abaixo usando as regras de interpretação de fórmulas.

   (a) $I(P \wedge Q) = T \Leftrightarrow I(\sim(\sim P \vee \sim Q)) = T$

   (b) $I(P \wedge Q) = F \Leftrightarrow I(\sim(\sim P \vee \sim Q)) = F$

   (c) $I(P \wedge Q) = T \Leftrightarrow I(\sim P \vee \sim Q) = F$

   (d) $I(P \to Q) = F \Leftrightarrow I(\sim P \vee Q) = F$

(e) $I(P \to Q) = T \Leftrightarrow I(\sim P \lor Q) = T$

(f) $I(P \to Q) = F \Leftrightarrow I(P \land \sim Q) = T$

Responda as questões 4, 5 e 6 conforme os exemplos abaixo.

(a) Se $I(P) = F$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?
R: Pode-se concluir que $I(H) = T$.

(b) Se $I(P) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?
R: Nada se pode concluir.

4. Seja $H = (P \to Q)$ e I uma interpretação.

   (a) Se $I(H) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(P)$ e $I(Q)$?

   (b) Se $I(H) = T$ e $I(P) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(Q)$?

   (c) Se $I(Q) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?

   (d) Se $I(H) = T$ e $I(P) = F$, o que se pode concluir a respeito de $I(Q)$?

   (e) Se $I(Q) = F$ e $I(P) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?

5. Seja I uma interpretação tal que $I(P \leftrightarrow Q) = T$. O que se pode concluir a respeito de

   (a) $I(\sim P \land Q)$

   (b) $I(P \lor \sim Q)$

   (c) $I(Q \to P)$

   (d) $I((P \land R) \leftrightarrow (Q \land R))$

   (e) $I((P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R))$

6. Repita o exercício anterior considerando $I(P \leftrightarrow Q) = F$.

7. Sejam H e G as fórmulas indicadas a seguir. Identifique, justificando sua resposta, os casos em que H implica G.

   (a) $H = (P \land Q), G = P$

   (b) $H = (P \lor Q), G = P$

   (c) $H = (P \lor \sim Q), G = \mathit{false}$

   (d) $H = \mathit{false}, G = P$

   (e) $H = P, G = \mathit{true}$

8. Demonstre as proposições abaixo ou dê um contra-exemplo.

   (a) Proposição 3.6: H não é satisfatível $\Leftrightarrow$ H é contraditória.

   (b) H é satisfatível $\Leftrightarrow$ H não é contraditória.

   (c) $\sim H$ é tautologia $\Leftrightarrow$ H é contraditória.

   (d) H não é tautologia $\Leftrightarrow$ H é contraditória.

9. Encontre a FND e a FNC das das fórmulas a seguir.

   (a) $(P \leftrightarrow Q) \land (P \lor R)$

   (b) $(P \to Q) \land (P \to R)$

3.6 Exercícios v.2

1. Determine o comprimento e o conjunto de subfórmulas das fórmulas a seguir.

   (a) $P \lor Q$

   (b) $\sim(P \to Q) \leftrightarrow (R \land S)$

   (c) $(\sim P \lor \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \land Q)$

   (d) $(A \land (B \land (C \land D))) \lor (\sim A \land (\sim B \land (C \land D)))$

2. Dentre as concatenações de símbolos a seguir, quais são fórmulas bem formadas e quais são fórmulas mal formadas?

   (a) $P \to ((Q \to R) \to ((P \to R) \to (P \to R)))$

   (b) $(P \lor \to Q) \land R$

   (c) $((P \to \sim P) \leftrightarrow \sim P) \lor Q$

   (d) $P \sim \to Q$

3. Demonstre as proposições abaixo usando as regras de interpretação de fórmulas.

   (a) $I(P \to Q) = T \Leftrightarrow I(\sim(P \land Q)) = T$

   (b) $I(\sim P \to \sim Q) = T \Leftrightarrow I(\sim(\sim P \land Q) = T$

   Responda as questões 4 conforme os exemplos abaixo.

   (a) Se $I(P) = F$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?
   R: Pode-se concluir que $I(H) = T$.

   (b) Se $I(P) = T$, o que se pode concluir a respeito de $I(H)$?
   R: Nada se pode concluir.

4. O que se pode concluir a respeito de

   (a) $I(P \land Q)$ se $I(P) = T$

   (b) $I(P \land Q)$ se $I(P) = F$

   (c) $I(P \lor Q)$ se $I(Q) = T$

   (d) $I(P \lor Q)$ se $I(Q) = F$

   (e) $I(P \to Q)$ se $I(P) = T$

   (f) $I(P \to Q)$ se $I(Q) = T$

   (g) $I(P \to Q)$ se $I(P) = F$

   (h) $I(P \to Q)$ se $I(Q) = F$

   (i) $I(P \leftrightarrow Q)$ se $I(P) = T$

   (j) $I(P \leftrightarrow Q)$ se $I(P) = F$

5. Mostre se os conjuntos de fórmulas a seguir são satisfatíveis ou insatisfatíveis.

   (a) $\{(P \land Q), (P \lor Q)\}$

(b) $\{(P \wedge Q), (P \rightarrow Q)\}$

(c) $\{(P \vee Q), (P \leftrightarrow Q)\}$

(d) $\{(P \wedge Q), (P \rightarrow \sim Q)\}$

6. Demonstre as proposições abaixo ou dê um contra-exemplo.

   (a) H é satisfatível $\Leftrightarrow \sim H$ é satisfatível

   (b) H é contraditória $\Leftrightarrow \sim H$ é tautologia

   (c) H é tautologia $\Leftrightarrow \sim H$ é contraditória

   (d) H é tautologia $\Rightarrow H$ é satisfatível

   (e) H implica $G \Leftrightarrow (H \rightarrow G)$ é tautologia

   (f) H equivale a $G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$ é tautologia

7. Demonstre se as fórmulas a seguir são tautologias usando o método da tabela verdade e o da árvore semântica.

   (a) $H = (P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \rightarrow Q)$

   (b) $H = \sim(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \leftrightarrow Q)$

   (c) $H = (\sim P \leftrightarrow \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \leftrightarrow \sim Q)$

   (d) $H = (P \vee \sim Q) \leftrightarrow (\sim P \rightarrow \sim Q)$

8. Demonstre por absurdo se as fórmulas a seguir são ou não tautologias.

   (a) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$

   (b) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$

   (c) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim P)$

Capítulo 4

Métodos semânticos de dedução na lógica proposicional

Capítulo 4 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

4.1 Introdução

— Validade de fórmulas: uma fórmula é válida sse todas as suas interpretações são iguais a T.

4.2 Método da tabela verdade

— Método da tabela verdade: é um método exaustivo, ou seja, enumera todas as possibilidades. A desvantagem é que, se houver muitos símbolos proposicionais, a tabela fica muito grande.

— Exemplo: seja $H = \sim(P \land Q) \leftrightarrow (\sim P \lor \sim Q)$, demonstre que H é uma tautologia usando o método da tabela verdade.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(P \land Q)$	$\sim(P \land Q)$	$(\sim P \lor \sim Q)$	H
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

4.3 Método da negação ou absurdo

— Método da negação ou absurdo: funciona da seguinte maneira.

- Faça uma suposição.
- Se todas as substituições possíveis levarem a contradições, a suposição é falsa. Ou seja, a negação da suposição é verdadeira.

— Exemplo: seja $H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$, demonstre por absurdo que H é uma tautologia.

- Demonstração: assuma por absurdo que existe interpretação I tal que $I(H) = F$.
  Então $I((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) = T$ e $I(P \rightarrow R) = F$.
  Como $I(P \rightarrow R) = F$, então $I(P) = T$ e $I(R) = F$.
  Distribuindo na fórmula os valores de verdade encontados, temos
  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
  $T \quad T \quad F \quad F \quad T\,F\,F$
  de onde obtemos
  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
  $T\ T\,T\ \ T\ \ F\ \ T\ \ F\ \ \ F\ \ T\,F\,F$
  $\uparrow \quad \uparrow$
  Absurdo
  Portanto, a suposição inicial de que existe interpretação I tal que $I(H) = F$ é falsa. Em outras palavras, para todo I, $I(H) = T$, ou seja, H é tautologia.

— Exemplo: seja $H = (P \rightarrow Q) \wedge (\sim(\sim P \vee Q))$, demonstre por absurdo que H é uma contradição.

- Demonstração: assuma por absurdo que existe interpretação I tal que $I(H) = T$.
  Então $I(P \rightarrow Q) = T$ e $I(\sim(\sim P \vee Q)) = T$.
  Como $I(\sim(\sim P \vee Q)) = T$, então $I(\sim P \vee Q) = F$. E portanto, $I(Q) = F$, $I(\sim P) = F$ e $I(P) = T$.
  Distribuindo na fórmula os valores de verdade encontados, temos
  $(P \rightarrow Q) \wedge (\sim(\sim P \vee Q))$
  $T \quad T\ \ T\ \ F\ \ T\ \ F\ \ F$
  mas se $I(P) = T$, temos que $I(Q)$ precisa ser T já que $I(P \rightarrow Q) = T$, portanto obtemos
  $(P \rightarrow Q) \wedge (\sim(\sim P \vee Q))$
  $T\ \ T\ \ T\ \ \ T\ \ \ T\ \ F\ \ T\ \ F\ \ F$
  $\uparrow \qquad\qquad \uparrow$
  Absurdo
  Portanto, a suposição inicial de que existe interpretação I tal que $I(H) = T$ é falsa. Em outras palavras, para todo I, $I(H) = F$, ou seja, H é contradição.

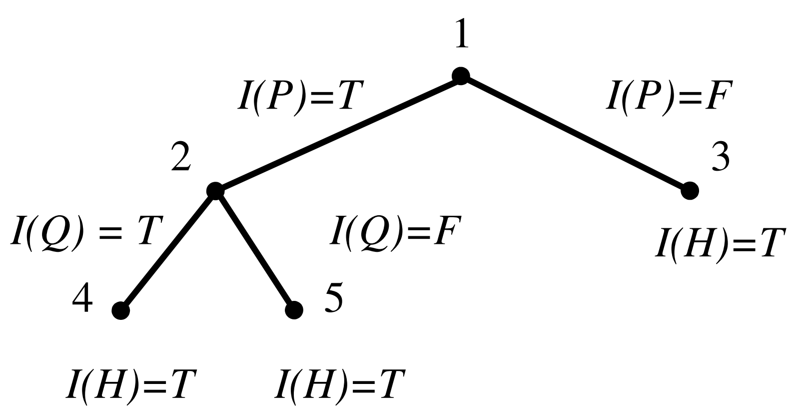
— Observe que para demonstrar corretamente que uma fórmula H é tautologia, é necessário chegar a um absurdo em todas as substituições possíveis. Caso alguma substituição não chegue a um absurdo, pode-se interromper a demonstração e concluir que a fórmula não é tautologia. Isso é evidente, pois, se você assume que $I(H) = F$ e não chega a um absurdo, significa que essa substituição específica faz com que $I(H)$ seja F e, portanto, com que H não seja tautologia. Diferentes substituições representam diferentes linhas da tabela verdade, e pode ocorrer de algumas linhas serem iguais a T, caso em que há absurdo, e outras linhas iguais a F, caso em que não há absurdo. Por isso é necessário explorar todas as substituições possíveis. O mesmo vale para a contradição.

4.4 Método da árvore semântica

— Método da árvore semântica: é um método que permite a verificação da validade de uma fórmula sem ser exaustivo. A depender da fórmula, pode ser possível obter a resposta sem verificar todas as interpretações possíveis. Este conteúdo está na primeira edição do livro de Souza *Lógica para Ciência da Computação* [1].

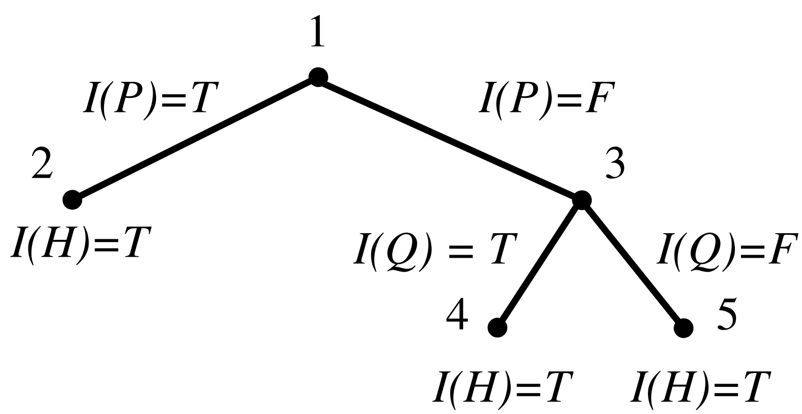
— Exemplo: seja $H = \sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$, demonstre que H é uma tautologia usando o método da árvore semântica.

	$\sim$	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim$	P	$\vee$	$\sim$	$Q)$
2		T				F	T			
3	T	F	F		T	T	F	T		
4	F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
5	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F



— Exemplo: seja $H = (P \vee \sim Q) \leftrightarrow (\sim P \rightarrow \sim Q)$, demonstre que H é uma tautologia usando o método da árvore semântica.

	$(P$	$\vee$	$\sim$	$Q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim$	P	$\rightarrow$	$\sim$	$Q)$
2	T	T			T	F	T	T		
3	F					T	F			
4	F	F	F	T	T	T	F	F	F	T
5	F	T	T	F	T	T	F	T	T	F



4.5 Método dos tableaux semânticos

— Tableau semântico: sequência de fórmulas construída de acordo com um conjunto de regras e apresentada em forma de árvore. O método dos tableaux semânticos é um mecanismo de decisão para a pergunta $\beta \vdash H$, sim ou não?

— Elementos do sistema de tableaux semânticos da lógica proposicional:

- Alfabeto da lógica proposicional sem os símbolos de verdade *true* e *false*.
- Conjunto das fórmulas da lógica proposicional.
- Um conjunto de regras de dedução.

— Regras de dedução do tableau semântico: sejam A e B duas fórmulas da lógica proposicional, as regras de dedução do sistema de tableaux semânticos são

$$R_1 = A \wedge B \qquad\qquad R_2 = A \vee B \qquad\qquad R_3 = A \rightarrow B$$
$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ A \quad B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \neg A \quad B \end{array}$$

$$R_4 = A \leftrightarrow B \qquad\qquad R_5 = \neg\neg A \qquad\qquad R_6 = \neg(A \wedge B)$$
$$\begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ A \wedge B \quad \neg A \wedge \neg B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \neg A \quad \neg B \end{array}$$

$$R_7 = \neg(A \vee B) \qquad\qquad R_8 = \neg(A \rightarrow B) \qquad\qquad R_9 = \neg(A \leftrightarrow B)$$
$$\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \neg A \wedge B \quad A \wedge \neg B \end{array}$$

— Construção de um tableau semântico: se dá aplicando alguma regra de dedução uma vez para cada linha que não seja um literal (símbolo proposicional ou sua negação). O tableau resultante tende a ficar mais simples se aplicarmos primeiro as regras de dedução que não geram bifurcações (R_1, R_5, R_7, R_8).

- Exemplo: considere o conjunto de fórmulas $\beta = \{P \vee (Q \vee \sim R), P \rightarrow \sim R, Q \rightarrow \sim R\}$. Verifique se $\beta \vdash \sim R$.
  - Uma possível solução seria montar a árvore semântica de $\sim((P \vee (Q \vee \sim R)) \wedge (P \rightarrow \sim R) \wedge (Q \rightarrow \sim R) \rightarrow \sim R)$.
  - Uma solução equivalente é listar as hipóteses de β seguidas da negação da conclusão.

$\{P \vee (Q \vee \sim R), P \rightarrow \sim R, Q \rightarrow \sim R\} \vdash \sim R$

1.	$P \vee (Q \vee \sim R)$ ✓	Hip
2.	$P \rightarrow \sim R$ ✓	Hip
3.	$Q \rightarrow \sim R$ ✓	Hip
4.	$\sim\sim R$	$\sim$ Conc
5.	$P \qquad\qquad Q \vee \sim R$	$1 \vee$ Elim
6.	$\sim P \quad \sim R$	$2 \rightarrow$ Elim
7.	$\underset{5,6}{\otimes} \quad \underset{4,6}{\otimes} \quad Q \quad \sim R \ \underset{4,7}{\otimes}$	$5 \vee$ Elim
8.	$\sim Q \ \underset{7,8}{\otimes} \quad \sim R \ \underset{4,8}{\otimes}$	$3 \rightarrow$ Elim

— Ramo: é uma sequência de fórmulas onde cada fórmula é derivada das anteriores através das regras de dedução. A primeira fórmula do ramo é sempre a primeira fórmula do tableau.

— Ramo saturado: é um ramo onde, para todas as suas fórmulas,

- já foi aplicada alguma regra de dedução; ou
- não é possível aplicar nenhuma regra de derivação, isto é, a fórmula é um literal.

— Ramo fechado: é um ramo que contém uma fórmula e sua negação. Um ramo pode ser fechado sem ser saturado.

— Ramo aberto: é um ramo saturado não fechado.

— Tableau fechado: é um tableau onde todos os ramos são fechados.

— Tableau aberto: é um tableau onde algum ramo é aberto.

— Prova de H no sistema de tableaux semânticos: é um tableau fechado iniciado com a fórmula $\sim H$

- Exemplos: verifique se as fórmulas abaixo são tautologias:
  - $H_1 = \sim((P \to Q) \land \sim(P \leftrightarrow Q) \land \sim\sim P)$
  - $H_2 = (P \leftrightarrow Q) \lor \sim P$
  - $H_3 = (((P \land Q) \land (Q \to Q_1)) \land ((P \land Q_1) \to \sim P_1)) \to \sim P_1$

$(((P \land Q) \land (Q \to Q_1)) \land ((P \land Q_1) \to \sim P_1)) \to \sim P_1$

1.	$\sim((((P \land Q) \land (Q \to Q_1)) \land ((P \land Q_1) \to \sim P_1)) \to \sim P_1)$ ✓	$\sim H_3$
2.	$(((P \land Q) \land (Q \to Q_1)) \land ((P \land Q_1) \to \sim P_1))$ ✓	R_8 em 1
3.	$\sim\sim P_1$ ✓	R_8 em 1
4.	P_1	R_5 em 3
5.	$(P \land Q) \land (Q \to Q_1)$ ✓	R_1 em 2
6.	$(P \land Q_1) \to \sim P_1$ ✓	R_1 em 2
7.	$P \land Q$ ✓	R_1 em 5
8.	$Q \to Q_1$ ✓	R_1 em 5
9.	P	R_1 em 7
10.	Q	R_1 em 7
11.	$\sim(P \land Q_1)$ ✓ | $\sim P_1$	R_3 em 6
12.	$\sim Q$ | Q_1 (sob $\sim(P \land Q_1)$); $\sim Q$ $\otimes$ 11,4 | Q_1 $\otimes$ 11,4 (sob $\sim P_1$)	R_3 em 8
13.	$\sim P$ $\otimes$ 12,10 | $\sim Q_1$ $\otimes$ 12,10 (sob $\sim Q$); $\sim P$ $\otimes$ 13,9 | $\sim Q_1$ $\otimes$ 13,12 (sob Q_1)	R_6 em 11

■ Observe que o tableau foi desenvolvido até que todos os ramos ficassem saturados. Alternativamente, é possível fechar os ramos à medida que são encontrados pares de fórmulas contraditórias entre si, como na versão abaixo

$(((P \land Q) \land (Q \to Q_1)) \land ((P \land Q_1) \to {\sim}P_1)) \to {\sim}P_1$

1.	${\sim}((((P \land Q) \land (Q \to Q_1)) \land ((P \land Q_1) \to {\sim}P_1)) \to {\sim}P_1)$ ✓	${\sim}H_3$
2.	$(((P \land Q) \land (Q \to Q_1)) \land ((P \land Q_1) \to {\sim}P_1))$ ✓	R_8 em 1
3.	${\sim}{\sim}P_1$ ✓	R_8 em 1
4.	P_1	R_5 em 3
5.	$(P \land Q) \land (Q \to Q_1)$ ✓	R_1 em 2
6.	$(P \land Q_1) \to {\sim}P_1$ ✓	R_1 em 2
7.	$P \land Q$ ✓	R_1 em 5
8.	$Q \to Q_1$ ✓	R_1 em 5
9.	P	R_1 em 7
10.	Q	R_1 em 7
11.	${\sim}(P \land Q_1)$ ✓	${\sim}P_1$ $\otimes$ 11,4	R_3 em 6
12.	${\sim}Q$ $\otimes$ 12,10	Q_1	R_3 em 8
13.	${\sim}P$ $\otimes$ 13,9	${\sim}Q_1$ $\otimes$ 13,12	R_6 em 11

- Pergunta: um tableau iniciado com uma tautologia necessariamente terá todos os ramos abertos?
  - Resposta: não. Um contra-exemplo é a fórmula $(P \land {\sim}P) \lor (Q \to Q)$

— Para provar que uma fórmula H é tautologia, iniciamos um tableau semântico com ${\sim}H$, que é uma contradição. Se H for realmente uma tautologia, todas as interpretações de ${\sim}H$ devem ser iguais a F, fazendo com que todos os ramos do tableau sejam fechados. O método do tableau semântico pode ser visto como uma variação do método da negação ou absurdo, onde ramos fechados correspondem a substituições que levam a um absurdo. Ramos abertos por sua vez correspondem a substituições que não levam a um absurdo, ou seja, substituições que fazem $I({\sim}H) = T$.

4.5.1 Prova de que uma fórmula é uma contradição

— Na seção anterior, vimos que é possível mostrar que H é uma tautologia iniciando um tableau semântico com ${\sim}H$, que é uma contradição e obtendo um tableau com todos os ramos fechados. Da mesma maneira, é possível mostrar que H é uma contradição iniciando um tableau com H e obtendo um tableau com todos os ramos fechados.

4.5.2 Consequência lógica em tableaux semânticos

— Dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses $\beta = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, dizemos que H é uma consequência lógica de β ($\beta \vdash H$) se existe uma prova de $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \to H$.

- Exemplo: Considere as sentenças
  - P = Guga é determinado
  - Q = Guga é inteligente
  - $(P \land R) \to {\sim}P_1$ = Se Guga é determinado e atleta, então ele não é um perdedor

◦ $Q_1 \rightarrow R$ Guga é atleta se ele é amante de tênis
◦ $Q \rightarrow R_1$ Guga é amante de tênis se ele é inteligente
A afirmação abaixo é conseqência lógica das anteriores?
◦ $\sim P_1$ Guga não é um perdedor

4.5.3 Prova de que um conjunto de fórmulas é insatisfatível

— Como foi visto na seção 3.1, um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é dito insatisfaftível sse não existe interpretação que faça com que todas as fórmulas tenham interpretação igual a T ao mesmo tempo. Em outras palavras, se o conjunto β é insatisfatível, podemos dizer que $I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = F$ para toda interpretação, ou seja, essa fórmula é contraditória. É possível então mostrar que o conjunto de fórmulas β é insatisfatível através de um tableau semântico fechado iniciado por $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$.

4.6 Exercícios

1. Determine por absurdo se as fórmulas a seguir são ou não tautologias.
   (a) $H_1 = (H \vee H) \rightarrow H$
   (b) $H_2 = H \rightarrow (G \vee H)$
   (c) $H_3 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$
   (d) $H_4 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((G \rightarrow E) \rightarrow (H \rightarrow E))$
   (e) $H_5 = ((G \rightarrow (E \rightarrow H)) \wedge (G \rightarrow E)) \rightarrow (G \rightarrow H)$
   (f) $H_6 = A \rightarrow ((B \wedge C) \rightarrow ((D \wedge E) \rightarrow ((G \wedge H) \rightarrow A)))$
   (g) $H_7 = ((((A \rightarrow B) \rightarrow (\sim C \rightarrow \sim D)) \rightarrow C) \rightarrow E) \rightarrow$
   $((E \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A))$

2. Determine por absurdo se as fórmulas a seguir são ou não tautologias.
   (a) $H_1 = \sim(\sim H) \leftrightarrow H$
   (b) $H_2 = \sim(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\sim H \leftrightarrow G)$
   (c) $H_3 = \sim(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\sim H \leftrightarrow G)$
   (d) $H_4 = (H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$
   (e) $H_5 = (H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$
   (f) $H_6 = ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$
   (g) $H_7 = ((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$
   (h) $H_8 = H \rightarrow (H \wedge G)$

3. Repita os exercícios anteriores usando o método do tableau semântico.

Capítulo 5

Um método sintático de dedução na lógica proposicional

Capítulo 5 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

5.1 Introdução

— Métodos sintáticos são diferentes dos métodos semânticos de dedução. Enquanto nos métodos semânticos é levada em consideração a semântica das fórmulas, ou seja, a sua interpretação, nos métodos sintáticos as deduções são puramente simbólicas, ou seja, dependem da sequência de símbolos da fórmula.

— Para denotar implicação semântica, usamos o símbolo $\vDash$, mas para denotar implicação sintática, usamos o símbolo $\vdash$.

— Um método semântico nos permitiria inferir diretamente que $\sim\sim P \vDash P$, já que sabemos que ambos possuem a mesma tabela verdade ou que uma dupla negação, se eliminada, resulta na mesma interpretação. Em um método sintático, não podemos simplesmente afirmar que $\sim\sim P \vdash P$. Para demonstrar essa implicação, precisamos usar os axiomas e regras de dedução disponíveis.

5.2 O sistema formal Pa

— Alfabeto da lógica proposicional na forma simplificada: é constituído por
- Símbolos de pontuação: ( )
- Símbolos de verdade: *false*
- Símbolos proposicionais: $A\ B\ C\ P\ Q\ R\ A_1\ A_2\ A_3\ a\ b\ c\ \ldots$
- Conectivos proposicionais: $\sim\ \vee$

— Sistema axiomático Pa: é um sistema formal composto por
- Alfabeto da lógica proposicional na forma simplificada sem o símbolo de verdade *false*.
- Conjunto das fórmulas da lógica proposicional.
- Um subconjunto das fórmulas, denominadas axiomas.
- Um conjunto de regras de dedução ou de inferência.

— Axiomas do sistema Pa
- Axioma 1: $\sim(H \vee H) \vee H$
- Axioma 2: $\sim H \vee (G \vee H)$
- Axioma 3: $\sim(\sim H \vee G) \vee (\sim(E \vee H) \vee (G \vee E))$

Usando outros conectivos, os axiomas do sistema Pa podem ser denotados por
- Axioma 1: $(H \vee H) \rightarrow H$
- Axioma 2: $H \rightarrow (G \vee H)$
- Axioma 3: $(H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (G \vee E))$

— Notação:
- $(H \rightarrow G)$ denota $(\sim H \vee G)$
- $(H \leftrightarrow G)$ denota $(H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)$
- $(H \wedge G)$ denota $\sim(\sim H \vee \sim G)$

— Postulado modus ponens: é uma regra de inferência do sistema Pa definida pelo procedimento

$$\text{tendo } H \text{ e } (\sim H \vee G) \text{ deduza } G$$

ou, usando a notação alternativa,

$$\text{tendo } H \text{ e } (H \rightarrow G) \text{ deduza } G.$$

Em outras palavras, se H e $(H \rightarrow G)$ são fórmulas válidas, então G também é válida. Uma regra de inferência nos permite inferir novas fórmulas a partir de fórmulas já inferidas.

Exercícios

1. Prove $H_1 = P \rightarrow (Q \lor P)$.

   R: Fazendo $H = P$ e $G = Q$, a fórmula H_1 é obtida do axioma 2.

2. Prove $H_2 = (P \rightarrow (Q \lor P)) \rightarrow ((\sim P \lor P) \rightarrow ((Q \lor P) \lor \sim P))$.

   R: Fazendo $H = P$, $G = (Q \lor P)$ e $E = \sim P$, a fórmula H_2 é obtida do axioma 3.

3. Considere o conjunto de hipóteses $\beta = \{G_1, G_2\}$ onde $G_1 = P$ e $G_2 = (P \rightarrow Q)$. Prove $(R \lor Q)$ a partir de β no sistema axiomático Pa.

   R:

Fórmulas	Justificativa
$H_1 = P$	Hipótese G_1
$H_2 = P \rightarrow Q$	Hipótese G_2
$H_3 = Q$	Modus ponens em H_1 e H_2
$H_4 = Q \rightarrow (R \lor Q)$	Axioma 2, $H = Q$ e $G = R$
$H_5 = R \lor Q$	Modus ponens em H_3 e H_4 ■

4. Considere o conjunto de hipóteses $\beta = \{G_1, \ldots, G_9\}$ onde

$G_1 = (P \land R) \rightarrow P$	$G_4 = (P_1 \land P_2) \rightarrow Q$	$G_7 = P_1$
$G_2 = Q \rightarrow P_4$	$G_5 = (P_3 \land R) \rightarrow R$	$G_8 = P_3 \rightarrow P$
$G_3 = P_1 \rightarrow Q$	$G_6 = P_4 \rightarrow P$	$G_9 = P_2$

   Prove $(S \lor P)$ a partir de β no sistema axiomático Pa.

   R:

Fórmulas	Justificativa
$H_1 = P_1$	Hipótese G_7
$H_2 = P_1 \rightarrow Q$	Hipótese G_3
$H_3 = Q$	Modus ponens em H_1 e H_2
$H_4 = Q \rightarrow P_4$	Hipótese G_2
$H_5 = P_4$	Modus ponens em H_3 e H_4
$H_6 = P_4 \rightarrow P$	Hipótese G_6
$H_7 = P$	Modus ponens em H_5 e H_6
$H_8 = P \rightarrow (S \lor P)$	Axioma 2, $H = P$ e $G = S$
$H_9 = S \lor P$	Modus ponens em H_7 e H_8 ■

— Consequência lógica sintática no sistema Pa: dada uma fórmula H e um conjunto de hipóteses β, dizemos que H é consequência lógica sintática de β em Pa se existe uma prova de H em Pa a partir de β. A notação para isso é $\beta \vdash H$.

— Teorema no sistema Pa: uma fórmula H é um teorema em Pa se existe uma prova de H em Pa que utiliza apenas os axiomas. É permitido usar outros teoremas, já que também foram provados usando apenas axiomas. Teoremas são denotados por $\vdash H$, já que o conjunto de hipóteses é vazio.

— Proposição 1: sejam β um conjunto de hipóteses, e A, B e C três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \rightarrow B) \text{ e } \beta \vdash (C \lor A) \text{ então } \beta \vdash (B \lor C)$$

Demonstração:

$H_1 = (A \rightarrow B)$	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$
$H_2 = (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \lor A) \rightarrow (B \lor C))$	Axioma 3, $H = A$, $G = B$ e $E = C$
$H_3 = (C \lor A) \rightarrow (B \lor C)$	Modus ponens (MP) em H_1 e H_2
$H_4 = (C \lor A)$	$\beta \vdash (C \lor A)$
$H_5 = (B \lor C)$	MP em H_4 e H_3 ■

— Proposição 2: temos que $\vdash (P \lor \sim P)$.

Demonstração:

$H_1 = ((P \lor P) \rightarrow P) \rightarrow ((\sim P \lor (P \lor P)) \rightarrow (P \lor \sim P))$	Axioma 3, $H = (P \lor P)$, $G = P$ e $E = \sim P$
$H_2 = (P \lor P) \rightarrow P$	Axioma 1, $H = P$
$H_3 = (\sim P \lor (P \lor P)) \rightarrow (P \lor \sim P)$	MP em H_2 e H_1
$H_4 = \sim P \lor (P \lor P)$	Axioma 2, $H = P$ e $G = P$
$H_5 = (P \lor \sim P)$	MP em H_4 e H_3 ■

— Proposição 3, regra da substituição: sejam β um conjunto de hipóteses e H uma fórmula da lógica proposicional, tais que $\beta \vdash H$. Seja $\{P_1, \ldots, P_n\}$ um conjunto de símbolos proposicionais que ocorrem em H mas não ocorrem em β, seja G a fórmula obtida de H substituindo $P_1, \ldots, P_n$ pelas fórmulas $E_1, \ldots, E_n$ respectivamente. Temos que $\beta \vdash G$.

- Para entender o porque de evitar substituir símbolos que ocorrem em β, observe os seguintes exemplos.
  - Considere $\beta = \{P_1, P_2\}$ e a substituição $P_1 = P$ e $P_2 = \sim P$. Acabamos de obter resultados contraditórios entre si, o que torna nosso sistema inconsistente.
  - Considere $\beta = \{P_1, P_2, P_1 \land P_2\}$ e a substituição $P_1 = P$ e $P_2 = \sim P$. Acabamos de demonstrar a contradição $(P \land \sim P)$ o que torna nosso sistema incorreto.

— Proposição 4a: temos que $\vdash (P \to \sim\sim P)$.

Demonstração:

$H_1 = P \lor \sim P$	Prop. 2
$H_2 = \sim P \lor \sim\sim P$	Regra da Substituição (RS) em H_1
$H_3 = P \to \sim\sim P$	Mudança de notação (MN) em H_2 ■

— Proposição 4b: temos que $\vdash (\sim\sim P \to P)$.

Demonstração:

$H_1 = P \to \sim\sim P$	Prop 4a
$H_2 = \sim P \to \sim\sim\sim P$	RS em H_1
$H_3 = (\sim P \to \sim\sim\sim P) \to ((P \lor \sim P) \to (\sim\sim\sim P \lor P))$	Axioma 3, $H = \sim P$, $G = \sim\sim\sim P$ e $E = P$
$H_4 = (P \lor \sim P) \to (\sim\sim\sim P \lor P)$	MP em H_2 e H_3
$H_5 = P \lor \sim P$	Prop. 2
$H_6 = \sim\sim\sim P \lor P$	MP em H_5 e H_4
$H_7 = \sim\sim P \to P$	MN em H_6 ■

— Proposição 5: temos que $\vdash (P \to P)$.

Demonstração:

$H_1 = P \to \sim\sim P$	Prop. 4a
$H_2 = (P \to \sim\sim P) \to ((P \lor P) \to (\sim\sim P \lor P))$	Axioma 3, $H = P$, $G = \sim\sim P$ e $E = P$
$H_3 = (P \lor P) \to (\sim\sim P \lor P)$	MP em H_1 e H_2
$H_4 = (P \to \sim\sim P) \to ((\sim\sim P \lor P) \to (\sim\sim P \lor \sim\sim P))$	Axioma 3, $H = P$, $G = \sim\sim P$ e $E = \sim\sim P$
$H_5 = (\sim\sim P \lor P) \to (\sim\sim P \lor \sim\sim P)$	MP em H_1 e H_4
$H_6 = \sim P \lor (P \lor P)$	Axioma 2, $H = P$ e $G = P$
$H_7 = (\sim\sim P \lor P) \lor \sim P$	Prop. 1 em H_3 e H_6
$H_8 = \sim P \to \sim\sim\sim P$	RS em Prop. 4a
$H_9 = \sim\sim\sim P \lor (\sim\sim P \lor P)$	Prop. 1 em H_8 e H_7
$H_{10} = (\sim\sim P \lor \sim\sim P) \lor \sim\sim\sim P$	Prop. 1 em H_5 e H_9
$H_{11} = \sim\sim\sim P \to \sim P$	RS em Prop. 4b
$H_{12} = \sim P \lor (\sim\sim P \lor \sim\sim P)$	Prop. 1 em H_{11} e H_{10}
$H_{13} = (\sim\sim P \lor \sim\sim P) \to \sim\sim P$	Axioma 1, $H = \sim\sim P$
$H_{14} = \sim\sim P \lor \sim P$	Prop. 1 em H_{13} e H_{12}
$H_{15} = \sim\sim\sim P \lor \sim\sim P$	RS em H_{14}
$H_{16} = \sim\sim P \to P$	Prop. 4b
$H_{17} = P \lor \sim\sim\sim P$	Prop. 1 em H_{16} e H_{15}
$H_{18} = \sim P \lor P$	Prop. 1 em H_{11} e H_{17}
$H_{19} = P \to P$	MN em H_{18} ■

— Proposição 6, comutatividade: temos que

$$\vdash (A \lor B) \to (B \lor A).$$

Demonstração:

$H_1 = B \to B$	RS em Prop. 5
$H_2 = (B \to B) \to ((A \lor B) \to (B \lor A))$	Axioma 3, $H = B$, $G = B$ e $E = A$
$H_3 = (A \lor B) \to (B \lor A)$	MP em H_1 e H_2 ■

— Proposição 6b: sejam β um conjunto de hipóteses, e A e B duas fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \lor B) \text{ então } \beta \vdash (B \lor A).$$

— Proposição 7: sejam β um conjunto de hipóteses, e A, B e C três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \to B) \text{ e } \beta \vdash (B \to C) \text{ então } \beta \vdash (A \to C).$$

Demonstração:

$H_1 = B \to C$	$\beta \vdash (B \to C)$
$H_2 = \sim A \lor B$	$\beta \vdash (A \to B)$
$H_3 = C \lor \sim A$	Prop. 1 em H_1 e H_2
$H_4 = (C \lor \sim A) \to (\sim A \lor C)$	RS em Prop. 6
$H_5 = \sim A \lor C$	MP em H_3 e H_4
$H_6 = A \to C$	MN em H_5 ■

— Proposição 8: sejam β um conjunto de hipóteses, e A, B e C três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \to C) \text{ e } \beta \vdash (B \to C) \text{ então } \beta \vdash ((A \lor B) \to C).$$

Demonstração:

$H_1 = B \to C$	$\beta \vdash (B \to C)$
$H_2 = (B \to C) \to ((A \lor B) \to (C \lor A))$	Axioma 3, $H = B$, $G = C$ e $E = A$
$H_3 = (A \lor B) \to (C \lor A)$	MP em H_1 e H_2
$H_4 = A \to C$	$\beta \vdash (A \to C)$
$H_5 = (A \to C) \to ((C \lor A) \to (C \lor C))$	Axioma 3, $H = A$, $G = C$ e $E = C$
$H_6 = (C \lor A) \to (C \lor C)$	MP em H_4 e H_5
$H_7 = (A \lor B) \to (C \lor C)$	Prop. 7 em H_3 e H_6
$H_8 = (C \lor C) \to C$	Axioma 1, $H = C$
$H_9 = (A \lor B) \to C$	Prop. 7 em H_7 e H_8 ■

— Proposição 9: sejam β um conjunto de hipóteses, e A, B e C três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \to C) \text{ e } \beta \vdash (\sim A \to C) \text{ então } \beta \vdash C.$$

Demonstração:

$H_1 = A \to C$	$\beta \vdash (A \to C)$
$H_2 = \sim A \to C$	$\beta \vdash (\sim A \to C)$
$H_3 = (A \lor \sim A) \to C$	Prop. 8 em H_1 e H_2
$H_4 = (A \lor \sim A)$	Prop. 2
$H_5 = C$	MP em H_4 e H_3 ■

— Proposição 10: sejam β um conjunto de hipóteses, e A, B e C três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \rightarrow B) \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow (C \lor B)) \text{ e } \beta \vdash (A \rightarrow (B \lor C)).$$

Demonstração:

$H_1 = A \rightarrow B$	$\beta \vdash (A \rightarrow B)$
$H_2 = B \rightarrow (C \lor B)$	Axioma 2, $H = B$ e $G = C$
$H_3 = A \rightarrow (C \lor B)$	Prop. 7 em H_1 e H_2
$H_4 = (C \lor B) \rightarrow (B \lor C)$	Prop. 6
$H_5 = A \rightarrow (B \lor C)$	Prop. 7 em H_3 e H_4 ■

— Proposição 11, associatividade: temos que

$$\vdash ((A \lor B) \lor C) \rightarrow (A \lor (B \lor C)).$$

Demonstração:

$H_1 = A \rightarrow A$	Prop. 5
$H_2 = A \rightarrow (A \lor (B \lor C))$	RS, Prop 10 em H_1
$H_3 = B \rightarrow B$	Prop. 5
$H_4 = B \rightarrow (B \lor C)$	Prop 10 em H_3
$H_5 = B \rightarrow (A \lor (B \lor C))$	Prop 10 em H_4
$H_6 = (A \lor B) \rightarrow (A \lor (B \lor C))$	Prop 8 em H_2 e H_5
$H_7 = C \rightarrow C$	Prop. 5
$H_8 = C \rightarrow (B \lor C)$	Prop 10 em H_7
$H_9 = C \rightarrow (A \lor (B \lor C))$	Prop 10 em H_8
$H_{10} = ((A \lor B) \lor C) \rightarrow (A \lor (B \lor C))$	Prop 8 em H_6 e H_9 ■

— Proposição 12, associatividade: sejam β um conjunto de hipóteses, e A, B e C três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash ((A \lor B) \lor C) \text{ então } \beta \vdash (A \lor (B \lor C)).$$

— Proposição 13: sejam β um conjunto de hipóteses, e A, B e C três fórmulas da lógica proposicional. Temos que

$$\text{se } \beta \vdash (A \rightarrow B) \text{ e } \beta \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \text{ então } \beta \vdash (A \rightarrow C).$$

Demonstração:

$H_1 = A \to B$	$\beta \vdash (A \to B)$
$H_2 = A \to (B \to C)$	$\beta \vdash (A \to (B \to C))$
$H_3 = \sim A \lor (\sim B \lor C)$	MN em H_2
$H_4 = (\sim B \lor C) \lor \sim A$	Prop. 6b em H_3
$H_5 = \sim B \lor (C \lor \sim A)$	Prop. 12 em H_4
$H_6 = B \to (C \lor \sim A)$	MN em H_5
$H_7 = A \to (C \lor \sim A)$	Prop. 7 em H_1 e H_6
$H_8 = \sim A \lor (C \lor \sim A)$	MN em H_7
$H_9 = (C \lor \sim A) \lor \sim A$	Prop. 6b em H_8
$H_{10} = C \lor (\sim A \lor \sim A)$	Prop. 12 em H_9
$H_{11} = (\sim A \lor \sim A) \to \sim A$	Axioma 1, $H = \sim A$
$H_{12} = \sim A \lor C$	Prop. 1 em H_{11} e H_{10}
$H_{13} = A \to C$	MN em H_{12} ■

5.3 Exercícios

1. Demonstre os teoremas abaixo no sistema axiomático Pa. Use os axiomas e proposições vistos em aula.

   (a) $\vdash (\sim P \lor P)$

   (b) $\vdash (\sim P \lor \sim\sim P)$

   (c) $\vdash (H \to (H \lor G))$

   (d) $\vdash (H \to (G \to H))$

   (e) $\vdash ((H \to G) \to (\sim G \to \sim H))$

2. Demonstre os teoremas abaixo no sistema axiomático Pa. Use os axiomas e proposições vistos em aula.

   (a) Se $\beta \vdash (A \to B)$ e $\beta \vdash (C \lor A)$ então $\beta \vdash (C \lor B)$

   (b) Se $\beta \vdash (A \to \sim B)$ e $\beta \vdash (C \to A)$ então $\beta \vdash (B \to \sim C)$

3. Considere um sistema axiomático igual ao Pa mais o axioma 4 dado abaixo. Mostre que se $\beta \vdash H$ então $\beta \vdash \sim H$.

   Axioma 4: $H \to (H \lor G)$

Capítulo 6

A linguagem da lógica de predicados

Capítulo 6 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [2].

6.1 O alfabeto da lógica de predicados

— Alfabeto: o alfabeto da lógica de predicados é composto por
- Símbolos de pontuação: ( )
- Símbolos de verdade: *true false*
- Símbolos para variáveis: $x\ y\ z\ w\ x_1\ y_1\ z_1\ x_2 \ldots$
- Símbolos para funções: $f\ g\ h\ f_1\ g_1\ h_1\ f_2 \ldots$
- Símbolos para predicados: $p\ q\ r\ s\ p_1\ q_1\ r_1\ s_1\ p_2 \ldots$
- Conectivos: $\sim\ \lor\ \land\ \rightarrow \leftrightarrow\ \forall\ \exists$

— Associado a cada função ou predicado está um número inteiro $k \geq 0$ que indica a sua "aridade", ou seja, seu número de argumentos.

— Os símbolos para funções zero-árias, isto é, funções constantes, são: $a\ b\ c\ a_1\ b_1\ c_1\ a_2 \ldots$

— Os símbolos para predicados zero-ários, isto é, símbolos proposicionais, são: $P\ Q\ R\ S\ P_1\ Q_1\ R_1\ S_1\ P_2 \ldots$

6.2 Fórmulas da lógica de predicados

— Termo: um termo pode ser
- uma variável
- $f(t_1, \ldots, t_n)$ onde f é uma função n-ária e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

A INTERPRETAÇÃO DE UM TERMO É UM OBJETO MATEMÁTICO

— Átomo: um átomo pode ser

• um símbolo de verdade
• $p(t_1, \ldots, t_n)$ onde p é um predicado n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

A INTERPRETAÇÃO DE UM ÁTOMO É UM VALOR DE VERDADE $\in \{T, F\}$

— Fórmula: as fórmulas da linguagem da lógica de predicados são construídas a partir dos símbolos do alfabeto conforme as regras a seguir:
• Todo átomo é uma fórmula.
• Se H é fórmula, $\sim H$ é fórmula.
• Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são fórmulas.
• Se H é fórmula e x é variável, então, $((\forall x)H)$ e $((\exists x)H)$ são fórmulas.
— Expressão: uma expressão pode ser
• um termo
• uma fórmula

6.3 Correspondência entre quantificadores

— $((\forall x)H) \equiv \sim((\exists x)(\sim H))$
— $((\exists x)H) \equiv \sim((\forall x)(\sim H))$

6.4 Símbolos de pontuação

— Ordem de precedência:
• $\sim$ Maior
• $\forall$ $\exists$
• $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $A \rightarrow B \leftrightarrow C$ possui duas interpretações.
• $\wedge$
• $\vee$ Menor

6.5 Características sintáticas das fórmulas

— Subtermo, subfórmula e subexpressão:
• Se $E = x$ então x é subtermo de E.
• Se $E = f(t_1, \ldots, t_n)$ então $t_1, \ldots, t_n, f(t_1, \ldots, t_n)$ são subtermos de E.
• Se H é fórmula, H é subfórmula de H.
• Se $E = \sim H$, então H e $\sim H$ são subfórmulas de E.
• Se E é uma fórmula do tipo $(G \vee H)$, $(G \wedge H)$, $(G \rightarrow H)$ ou $(G \leftrightarrow H)$, então G e H são subfórmulas de E.
• Se E é uma fórmula do tipo $(\forall x)H$ ou $(\exists x)H$, então H é subfórmula de E.
• Se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.
• Todo subtermo ou subfórmula é também subexpressão.
— Comprimento de uma fórmula:
• Se H é um átomo, $\text{comp}(H) = 1$.
• Se H é fórmula, $\text{comp}(\sim H) = \text{comp}(H) + 1$.

- Se H e G são fórmulas:
  - $\circ$ $\text{comp}(H \lor G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.
  - $\circ$ $\text{comp}(H \land G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.
  - $\circ$ $\text{comp}(H \rightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.
  - $\circ$ $\text{comp}(H \leftrightarrow G) = \text{comp}(H) + \text{comp}(G) + 1$.
- Se $H = ((\forall x)G)$ ou $H = ((\exists x)G)$, então $\text{comp}(H) = \text{comp}(G) + 1$.

6.6 Formas normais

— Literal: um literal pode ser
- um átomo
- a negação de um átomo

— Forma normal: uma fórmula está na
- forma normal conjuntiva (FNC) se for uma conjunção ($\land$) de disjunções ($\lor$) de literais
- forma normal disjuntiva (FND) se for uma disjunção ($\lor$) de conjunções ($\land$) de literais

6.7 Classificações de variáveis

— Escopo de um quantificador: seja G uma fórmula da lógica de predicados:
- Se $(\forall x)H$ é uma subfórmula de G, então o escopo de $(\forall x)$ em G é a subfórmula H.
- Se $(\exists x)H$ é uma subfórmula de G, então o escopo de $(\exists x)$ em G é a subfórmula H.

Exercícios

1. Considere a fórmula abaixo.

$$G = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, z, w) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$$

   Qual é o escopo de

   (a) $(\forall x)$
   (b) $(\exists y)$
   (c) $(\forall z)$
   (d) $(\forall y)$

— Ocorrência livre e ligada: sejam x uma variável e G uma fórmula.
• Uma ocorrência de x em G é ligada se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$.
• Uma ocorrência de x em G é livre se não for ligada.
— Variável livre e ligada: sejam x uma variável e G uma fórmula.
• A variável x é ligada em G se existe pelo menos uma ocorrência ligada de x em G.
• A variável x é livre em G se existe pelo menos uma ocorrência livre de x em G.
— Símbolo livre: seja G uma fórmula, os seus símbolos livres são as variáveis com ocorrência livre em G, símbolos de função e símbolos de predicado.
— Fórmula fechada: uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.
— Fecho de uma fórmula: seja H uma fórmula da lógica de predicados, e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ o conjunto das variáveis livres de H.
• O fecho universal de H, indicado por $(\forall *)H$, é dado pela fórmula $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)H$.
• O fecho existencial de H, indicado por $(\exists *)H$, é dado pela fórmula $(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)H$.

6.8 Exercícios

1. Determine o comprimento das fórmulas a seguir.

   (a) $H_1 = p(x, y, f(z))$
   (b) $H_2 = (P \lor \sim Q) \to \sim(q(x, y) \lor r(z))$
   (c) $H_3 = (\exists y)r(y) \leftrightarrow \sim(\exists y)P)$
   (d) $H_4 = \sim(p(x, y, z)) \to \sim((\forall x)(\forall y)(\forall z)p(x, y, z))$

2. Determine o conjunto de subespressões das expressões a seguir.

   (a) $H_1 = p(x, y, f(z))$
   (b) $H_2 = g(x, y, f(z))$
   (c) $H_3 = (\exists y)r(y) \leftrightarrow \sim(\exists y)P)$
   (d) $H_4 = \sim(p(x, y, z)) \to \sim((\forall x)(\forall y)(\forall z)p(x, y, z))$

3. Verdadeiro ou falso?

(a) Toda variável é um termo
(b) Todo termo é uma variável
(c) Toda função é um termo
(d) Todo termo é uma função
(e) Toda variável é um átomo
(f) Todo átomo é uma variável
(g) Todo termo é um átomo
(h) Todo átomo é um termo
(i) Todo termo é uma fórmula
(j) Toda fórmula é um termo
(k) Todo átomo é um literal
(l) Todo literal é um átomo
(m) Todo átomo é uma fórmula
(n) Toda fórmula é um átomo
(o) Todo literal é uma fórmula
(p) Toda fórmula é um literal
(q) Toda variável é uma expressão
(r) Toda expressão é uma variável
(s) Todo átomo é uma expressão
(t) Toda expressão é um átomo
(u) Todo literal é uma expressão
(v) Toda expressão é um literal
(w) Todo termo é uma expressão
(x) Toda expressão é um termo

4. Indique se os itens abaixo são ou não variáveis, termos, funções, átomos, literais, fórmulas e expressões.

(a) z
(b) a
(c) $P \leftrightarrow Q$
(d) $g(x, y, z)$
(e) $p(x, y, z)$
(f) $\sim P$

5. Escreva uma fórmula equivalente usando o quantificador existencial $\exists$.

(a) $H_1 = (\forall x)P$
(b) $H_2 = \sim(\forall x)P)$

(c) $H_3 = (\forall x){\sim}P$
(d) $H_4 = \ {\sim}((\forall x){\sim}P)$

6. Considere a fórmula $(\forall y)((\exists x){\sim}q(x) \ \wedge \ (\exists y)(\forall z)p(y,z))$. Qual é o escopo de
   (a) $(\forall y)$
   (b) $(\exists x)$
   (c) $(\exists y)$
   (d) $(\forall z)$
7. Indique o escopo de todos os quantificadores das fórmulas abaixo.
   (a) $(\forall x)(\ (\forall z)p(x,y,z) \leftrightarrow (\forall y)q(x,y,z)\ )$
   (b) $(\forall x)p(x,y,z) \rightarrow (\forall y)(\exists z)q(x,y,z)$
8. Indique se as ocorrências de variáveis nas fórmulas abaixo são livres ou ligadas.
   (a) $(\forall x)(\ (\forall z)p(x,y,z,w) \leftrightarrow (\forall y)q(x,y,z,z_1)\ )$
   (b) $(\forall x)(\ \ p(x,y,z_1) \rightarrow (\forall y)(\exists z)(\ q(w,x,y) \ \wedge \ (\forall w)r(w,x,z)\ )\ \ )$
9. Indique se as variáveis nas fórmulas da questão anterior são livres ou ligadas.
10. Encontre o fecho universal e o fecho existencial das fórmulas da questão anterior.

Capítulo 7

Tableaux semânticos na lógica de predicados

Capítulo 13 de Souza, *Lógica para Ciência da Computação* [1].

— Elementos do sistema de tableaux semânticos da lógica de predicados:
- Alfabeto da lógica de predicados
- Conjunto das fórmulas da lógica de predicados
- Um conjunto de regras de dedução

— Regras de dedução do tableau semântico: sejam A e B duas fórmulas da lógica de predicados, as regras R_1 a R_9 são as mesmas do sistema de tableaux semânticos da lógica de predicados. As demais são

$$R_{10} = \frac{\neg(\forall x)A}{(\exists x)\neg A} \qquad R_{11} = \frac{\neg(\exists x)A}{(\forall x)\neg A}$$

$$R_{12} = \frac{(\exists x)A}{A(t)} \qquad R_{13} = \frac{(\forall x)A}{A(t)}$$

onde t é novo

onde t é qualquer.

• Exemplo: mostre que a fórmula $H = (\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$ é tautologia.

$(\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$

1.	$\sim((\forall x)(\forall y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$ ✓	$\sim H$
2.	$(\forall x)(\forall y)p(x,y)$ ✓	R_8 em 1
3.	$\sim p(a,a)$	R_8 em 1
4.	$(\forall y)p(a,y)$ ✓	R_{13} em 2, $x = a$
5.	$p(a,a)$	R_{13} em 4, $y = a$
	$\underset{5,3}{\otimes}$	

• Exemplo: mostre que a fórmula $H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y)$ é tautologia.

$(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y)$

1.	$\sim((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists y)p(y))$ ✓	$\sim H$
2.	$(\forall x)p(x)$ ✓	R_8 em 1
3.	$\sim(\exists y)p(y)$ ✓	R_8 em 1
4.	$(\forall y)\sim p(y)$ ✓	R_{11} em 3
5.	$\sim p(a)$	R_{13} em 4, $y = a$
6.	$p(a)$	R_{13} em 2, $x = a$
	$\underset{5,6}{\otimes}$	

• Exemplo: mostre que a fórmula $H = (\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$ é tautologia.

$(\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$

1.	$\sim((\exists x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow p(a,a))$ ✓	$\sim H$
2.	$(\exists x)(\exists y)p(x,y)$ ✓	R_8 em 1
3.	$\sim p(a,a)$	R_8 em 1
4.	$(\exists y)p(b_1,y)$ ✓	R_{13} em 2, $x = b_1$
5.	$p(b_1,b_2)$	R_{13} em 4, $y = b_2$

O tableau não pode ser fechado, então H não é tautologia.

— Teorema no sistema de tableaux semânticos da lógica de predicados.

- Considere o teorema $H = (\forall x)(p(x) \land q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x)$. O tableau abaixo mostra que $\vdash H$.

$(\forall x)(p(x) \land q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x)$

1.	$\sim((\forall x)(p(x) \land q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$ ✓	$\sim H$
2.	$(\forall x)(p(x) \land q(x))$ ✓	R_8 em 1
3.	$\sim(\forall x)P(x)$ ✓	R_8 em 1
4.	$(\exists x)\sim p(x)$ ✓	R_{10} em 3
5.	$\sim p(a)$	R_{12} em 3, $x = a$
6.	$p(a) \land q(a)$ ✓	R_{13} em 2, $x = a$
7.	$p(a)$	R_1 em 6
8.	$q(a)$	R_1 em 6
	$\otimes$ 5,7	

- O tableau abaixo porém, onde a aplicação das regras é invertida, não é fechado.

$(\forall x)(p(x) \land q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x)$

1.	$\sim((\forall x)(p(x) \land q(x)) \rightarrow (\forall x)p(x))$ ✓	$\sim H$
2.	$(\forall x)(p(x) \land q(x))$ ✓	R_8 em 1
3.	$\sim(\forall x)P(x)$ ✓	R_8 em 1
4.	$(\exists x)\sim p(x)$ ✓	R_{10} em 3
5.	$p(a) \land q(a)$ ✓	R_{13} em 2, $x = a$
6.	$p(a)$	R_1 em 5
7.	$q(a)$	R_1 em 5
8.	$\sim p(b)$	R_{12} em 4, $x = b$

- Ao desenvolver um tableau, priorize sempre a aplicação de R_{12} em detrimento de R_{13}. Assim o termo usado na aplicação de R_{13} pode ser o mesmo usado na aplicação de R_{12}, facilitando a repetição de fórmulas necessária para fechar os ramos do tableau.

- Podemos afirmar o seguinte sobre tableaux semânticos associados a fórmulas da lógica de predicados.
  - Se H é tautologia, então existe tableau fechado associado a H.
  - Se H é tautologia, então pode existir tableau aberto associado a H.
  - Se H não é tautologia, então todo tableau associado a H é aberto.
  - Se um tableau associado a H é fechado, então H é tautologia.
  - Se um tableau associado a H é aberto, então não se pode concluir que H não é tautologia.
  - Se todo tableau associado a H é aberto, então H não é tautologia.

— Consequência lógica em tableaux semânticos:

- Sejam H_1 e H_2 duas fórmulas da lógica de predicados. Dizemos que H_1 equivale a H_2 se e somente se $H_1 \leftrightarrow H_2$ é tautologia.

- Exemplo: sejam $H_1 = (\exists x)(p(x) \to q(x))$ e $H_2 = (\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x)$. Mostre que H_1 equivale a H_2.

$(\exists x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x))$

1.	$\sim((\exists x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x)))$ ✓				$\sim(H_1 \leftrightarrow H_2)$
2.	$(\exists x)(p(x) \to q(x)) \land \sim((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x))$ ✓		$\sim(\exists x)(p(x) \to q(x)) \land ((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x))$ ✓		R_9 em 1
3.	$(\exists x)(p(x) \to q(x))$ ✓		$\sim(\exists x)(p(x) \to q(x))$ ✓		R_1 em 2
4.	$\sim((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x))$ ✓		$((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x))$ ✓		R_1 em 2
5.	$(\forall x)p(x)$ ✓				R_8 em 4
6.	$\sim(\exists x)q(x)$ ✓				R_8 em 4
7.	$(\forall x)\sim q(x)$ ✓				R_{11} em 6
8.	$(p(a) \to q(a))$ ✓				R_{12} em 3, $x = a$
9.	$p(a)$				R_{13} em 5, $x = a$
10.	$\sim q(a)$				R_{13} em 7, $x = a$
11.	$\sim p(a)$	$q(a)$			R_3 em 8
12.	$\otimes$ 9,11	$\otimes$ 10,11	$(\forall x)\sim(p(x) \to q(x))$ ✓		R_{11} em 3
13.			$\sim(\forall x)p(x)$ ✓	$(\exists x)q(x)$ ✓	R_3 em 4
14.			$(\exists x)\sim p(x)$ ✓		R_{10} em 13
15.			$\sim p(a)$	$q(a)$	R_{12} em 14; R_{12} em 13,
16.			$\sim(p(a) \to q(a))$ ✓	$\sim(p(a) \to q(a))$ ✓	R_{13} em 12, $x = a$
17.			$p(a)$	$p(a)$	R_8 em 16
18.			$\sim q(a)$	$\sim q(a)$	R_8 em 16
			$\otimes$ 15,17	$\otimes$ 15,18	

- Sejam H_1 e H_2 duas fórmulas da lógica de predicados. Dizemos que H_1 implica em H_2 se e somente se $H_1 \rightarrow H_2$ é tautologia.

- Exemplo: sejam $H_1 = (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ e $H_2 = (\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$. Mostre que H_2 implica em H_1.

$((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

1.	$\sim(((\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)))$ ✓		$\sim(H_1 \leftrightarrow H_2)$
2.	$(\exists x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)$ ✓		R_8 em 1
3.	$\sim(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ ✓		R_8 em 1
4.	$(\exists x)\sim(p(x) \rightarrow q(x))$ ✓		R_{10} em 3
5.	$\sim(p(a) \rightarrow q(a))$ ✓		R_{12} em 4, $x = a$
6.	$p(a)$ ✓		R_8 em 5
7.	$\sim q(a)$ ✓		R_8 em 5
8.	$\sim(\exists x)p(x)$ ✓	$(\forall x)q(x)$ ✓	R_9 em 2
9.	$(\forall x)\sim p(x)$ ✓		R_{12} em 8
10.	$\sim p(a)$	$q(a)$	R_{13} em 8; R_{13} em 9, $x = a$
	$\otimes$ 6,10	$\otimes$ 7,10	

7.1 Exercícios

1. Determine se as fórmulas a seguir são ou não equivalentes usando o método dos tableaux semânticos.
   (a) $(\forall x)q(y)$ e $q(y)$
   (b) $(\exists x)q(y)$ e $q(y)$
   (c) $(\forall x)(p(x) \land q(y))$ e $(\forall x)(p(x) \land q(y)$
   (d) $(\exists x)(p(x) \land q(y))$ e $(\exists x)(p(x) \land q(y)$
   (e) $(\forall x)(p(x) \lor q(y))$ e $(\forall x)(p(x) \lor q(y)$
   (f) $(\exists x)(p(x) \lor q(y))$ e $(\exists x)(p(x) \lor q(y)$
   (g) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(y))$ e $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(y)$
   (h) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(y))$ e $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(y)$

Referências Bibliográficas

[1] João Nunes de Souza. *Lógica para Ciência da Computação*. Campus, Brasil, 1st edition, 2002.

[2] João Nunes de Souza. *Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins*. Campus-Elsevier, Brasil, 3rd edition, 2014.