שאלה 2.1:

גרף הטבעת וגרף הקליקה הם גרפים מכוונים ו- d רגולריים, לכן,
ממשפט Perron Forbenius נובע שקיים להם
ו"ה סטציונרית $\vec{p}$ המקיים:

$$\tilde{A}_G \vec{p} = \vec{p}$$

ובנוסף לכל ו"ה $\vec{p_0}$ מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{A}_G^t \vec{p_0} = \vec{p} \quad (*)$$

משום שגרף הטבעת וגרף הקליקה שקולים לגרפים לא מכוונים (לפי דף ז"מ ההפניה שלה) d רגולריים, קשירים ואינם דו-צדדיים אז ממשפט לכל ו"ה $\vec{p_0}$ מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{A}_G^t \vec{p_0} = \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix} \quad (**)$$

לכן ממסקנת (*),(**) נובע שגרף הטבעת וגרף הקליקה מתכנסים לו"ה סטציונרי והוא

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix}.$$

צ"ל: נראה שבגרף הסוכריה ובגרף שרשרת דקליקות מתכנסים לו"ק סטציונרי אחיד.

הוכחה:

תחילה, נבחין שמטריצת השכנויות המנורמלת $\tilde{A}_G$ מקיימת לכל i:

$$\sum_{j=0}^{n} \tilde{A}_{ij} = 1$$

זאת משום שאם לקודקוד יש d שכנים אז יש d איברים בשורה שערכם $1/d$.

כעת נוכיח שלכל t באינדוקציה מתקיים:

$$\sum_{j=0}^{n} \tilde{A}^{t}_{ij} = 1 ,$$

בסיס עבור $t=1$ הראינו.

נניח נכונות עבור $t-1$ ונוכיח עבור t:

יהי $0 \le i < n$:

$$\sum_{j=0}^{n} \tilde{A}^{t}_{ij} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^{t-1}_{ik} \cdot A^{t-1}_{kj} =$$

[החלפת סדר סכומים]

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \tilde{A}^{t-1}_{ik} \cdot \tilde{A}^{t-1}_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^{t-1}_{ik} \sum_{j=0}^{n} \tilde{A}^{t-1}_{kj} =$$

[מהנחת האינדוקציה $\sum_{j=0}^{n} \tilde{A}^{t-1}_{kj} = 1$]

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^{t-1}_{ik} \cdot 1 = 1$$

[מהנחת האינדוקציה $\sum_{k=0}^{n} \tilde{A}^{t-1}_{ik} = 1$]

מכאן נובע שעבור ו״ה אחידה $\vec{p} = \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix}$ מתקיים:

$$(\tilde{A}^t\vec{p})_i = \sum_{j=0}^{n} \tilde{A}^t_{ij} \cdot p_j = \sum_{j=0}^{n} \tilde{A}^t_{ij} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n} A^t_{ij} = \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} = p_i$$

כלומר לכל i מתקיים $(\tilde{A}^t\vec{p})_i = p_i$

אז $\tilde{A}^t\vec{p} = \vec{p}$

ונובע מההגדרה ש$\vec{p}$ ו״ה סטציונרי של

G_t הסוכריה וG_t שרשרת רק יחידה.