

# 1 Система Лоренца

Аттрактор Лоренца — **компактное инвариантное множество**  $L$  в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока

## 2 Конвекция в замкнутой петле

Трубка, замкнутая в кольцо, наполнена почти несжимаемой жидкостью. Она подогревается снизу и охлаждается сверху, и при достаточно сильном нагреве возможно возникновение конвекционного течения.

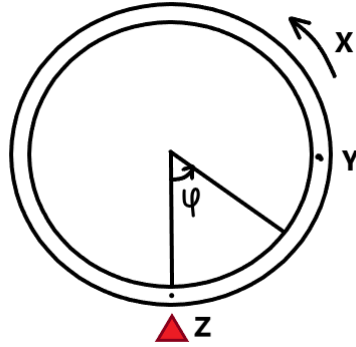


Рис. 1: Кольцо с подогревом.

Заметим, что раз жидкость почти несжимаемая, то ее скорость во всех точках трубки постоянна, она не зависит от  $\phi$ . Обозначим скорость за  $X$ .

Температура жидкости в трубке будет зависеть от угла  $\phi$ , который отсчитывается от направленного вниз радиуса до точки против часовой стрелки.  $T = T(\phi)$  — периодическая функция (период равен  $2\pi$ )  $\Rightarrow$  ее можно разложить в ряд Фурье.

При разложении основную амплитуду задают первые слагаемые, поэтому рассмотрим только первую гармонику. Уравнение будет иметь вид  $T = T_0 \cdot (1 + Y \sin \phi + Z \cos \phi)$ . Исследуем коэффициенты при  $\sin \phi$  и  $\cos \phi$ .

Отклонение температуры от радиуса, направленного к нагревателю зависит от  $\cos \phi$ , значит  $Z$  характеризует отклонение температуры от среднего значения в точке нагрева (нижней точки трубки). Отклонение от крайней правой точки (на 3 часа, то есть  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ) зависит от  $\sin \phi$ , и  $Y$  его характеризует.

Рассмотрим, что вызывает изменение скорости жидкости. Во-первых, действует сила Архимеда, она пропорциональна  $Y$ , так как в  $\phi = \frac{\pi}{2}$  она направлена вверх. Во-вторых, действует сила вязкости, которая пропорциональна скорости, следовательно, пропорциональна  $X$ . Тогда

$$\dot{X} = cY - \beta X \quad (1)$$

Пусть течение происходит с постоянной скоростью, то есть угол изменяется на  $Xt$ . Тогда

$$T = f(\phi - Xt) = T_0(1 + Y \sin(\phi - Xt) + Z \cos(\phi - Xt)) \quad (2)$$

Пусть  $\phi' = \phi - Xt$ , тогда

$$\dot{T} = T_0(Y(-X)\cos\phi' - Z(-X)\sin\phi') = T_0(ZX\sin\phi' - YX\cos\phi') \quad (3)$$

Вспомним, что за отклонение температуры от нижней точки отвечал  $\cos\phi \implies$  перенос температуры потоком жидкости для  $Z$  учитывается членом  $-YX$ . Аналогично, для  $Y$  будет  $ZX$ .

В точке  $Z$  происходит постоянный подогрев, поэтому в уравнении будем его учитывать, добавив константу  $A$ .

В системе стремится установиться термодинамическое равновесие, следовательно, надо учитывать в уравнениях для  $Y$  и  $Z$  релаксацию, это будут члены  $-DY$  и  $-DZ$  соответственно, где  $D$ — постоянная величина.

Таким образом

$$\begin{cases} \dot{X} = cY - \beta X \\ \dot{Y} = XZ - DY \\ \dot{Z} = A - XY - DZ \end{cases}$$

Заменим переменные:  $X = Dx, Y = \frac{\beta Dy}{c}, Z = -\frac{\beta Dz}{c}$ , тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где  $\sigma = \frac{\beta}{D}, r = \frac{cA}{\beta D^2}, b = 1$ .