1 Система Лоренца

Об объекте можно говорить, как о динамической системе, если можно указать такой набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу.

Хоть и по определению динамической системы всегда можно однозначно предсказать конечное состояние по исходному, но в ней все равно может возникать хаос. В хаотическом режиме любая неточность в задании начального состояния нарастает во времени, так что предсказуемость становится недостижимой на достаточно больших интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени.

Аттрактор Лоренца — **компактное инвариантное множество** L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Эта модель была впервые описана в 1963 году Эдвардом Лоренцом в статье "Детерминированное непериодическое течение". Лоренц получил эту модель как линейную аппроксимацию гидродинамической системы уравнений для задачи о конвекции морской воды в плоском слое; значения параметров и начальные условия были выбраны таким образом: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $b = \frac{8}{3}$; $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Модель Лоренца является реальным физическим примером динамических систем с хаотическим поведением, в отличие от различных искусственно сконструированных отображений.

2 Конвекция в замкнутой петле

Трубка, замкнутая в кольцо, наполнена почти несжимаемой жидкостью. Она подогревается снизу и охлаждается сверху, и при достаточно сильном нагреве возможно возникновение конвекционного течения.

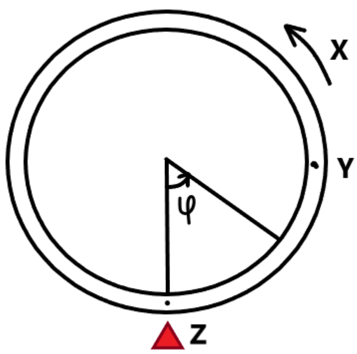

Рис. 1: Кольцо с подогревом.

Заметим, что раз жидкость почти несжимаемая, то ее скорость во всех точках трубки постоянна, она не зависит от ϕ. Обозначим скорость за X.

Температура жидкости в трубке будет зависить от угла ϕ, который отсчитывается от направленного вниз радиуса до точки против часовой стрелки. $T = T(\phi)-$ периодическая функция (период равен 2π) $\Rightarrow$ ее можно разложить в ряд Фурье.

При разложении основную амплитуду задают первые слагаемые, поэтому рассмотрим только первую гармонику. Уравнение будет иметь вид $T = T_0 \cdot (1+Y sin\phi + Z cos\phi)$. Исследуем коэффициенты при $sin\phi$ и $cos\phi$.

Отклонение температуры от радиуса, направленного к нагревателю зависит от $cos\phi$, значит Z характеризует отклонение температуры от среднего значения в точке нагрева (нижней точки трубки). Отклонение от крайней правой точки (на 3 часа, то есть $\phi = \frac{\pi}{2}$) зависит от $sin\phi$, и Y его характеризует.

Рассмотрим, что вызывает изменение скорости жидкости. Во-первых, действует сила Архимеда, она пропорциональна Y, так как в $\phi = \frac{\pi}{2}$ она направлена вверх. Во-вторых, действует сила вязкости, которая пропорциональна скорости, следовательно, пропорциональна X. Тогда

$$\dot{X} = cY - \beta X \tag{1}$$

Пусть течение происходит с постоянной скоростью, то есть угол изменяется на Xt. Тогда

$$T = f(\phi - Xt) = T_0(1 + Y sin(\phi - Xt) + Z cos(\phi - Xt)) \tag{2}$$

Пусть $\phi' = \phi - Xt$, тогда

$$\dot{T} = T_0(Y(-X)cos\phi' - Z(-X)sin\phi') = T_0(ZX sin\phi' - YX cos\phi') \tag{3}$$

Вспомним, что за отклонение температуры от нижней точки отвечал $cos\phi \Longrightarrow$ перенос температуры потоком жидкости для Z учитывается членом $-YX$. Аналогично, для Y будет ZX.

В точке Z происходит постоянный подогрев, поэтому в уравнении будем его учитывать, добавив константу A.

В системе стремится установиться термодинамическое равновесие, следовательно, надо учитывать в уравнениях для Y и Z релаксацию, это будут члены $-DY$ и $-DZ$ соотвественно, где $D-$ постоянная величина.

Таким образом

$$\begin{cases} \dot{X} = cY - \beta X \\ \dot{Y} = XZ - DY \\ \dot{Z} = A - XY - DZ \end{cases}$$

Заменим переменные: $X = Dx, Y = \frac{\beta D y}{c}, Z = -\frac{\beta D z}{c}$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где $\sigma = \frac{\beta}{D}, \rho = \frac{cA}{\beta D^2}, b = 1.$

Таким образом, были получены уравнения Лоренца.

3 Другие области применения

Модель Лоренца применима в других физических процессах:

- Конвекция в плоском слое
- Вращение водяного колеса (колесо, на ободе которого укреплены корзины с отверстиями в дне; сверху на колесо симметрично относительно оси вращения льётся сплошной поток воды)
- Одномодовый лазер
- Диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением

При этом в других моделях переменные и параметры будут иметь другой смысл. Так для конвекции в плоском слое x отвечает за скорость вращения водяных валов, y и z – за распределение температуры по горизонтали и вертикали, ρ – нормированное число Рэлея, σ – число Прандтля (отношение коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту температуропроводности), b содержит информацию о геометрии конвективной ячейки.

Вращение водяного колеса похоже по поведению на конвецкцию в замкнутой петле с точностью до переворота "вверх ногами поэтому описывается аналогичными уравнениями с заменой температуры на плотность распределения массы воды в корзинах по ободу.

Для одномодового лазера x – амплитуда волн в резонаторе лазера, y – поляризация, z – инверсия населённостей энергетических уровней, b и σ – отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, ρ – интенсивность накачки.