# 1 Система Лоренца

Аттрактор Лоренца — **компактное инвариантное множество** L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока.

# 2 Конвекция в замкнутой петле

Трубка, замкнутая в кольцо, наполнена почти несжимаемой жидкостью. Она подогревается снизу и охлаждается сверху, и при достаточно сильном нагреве возможно возникновение конвекционного течения.

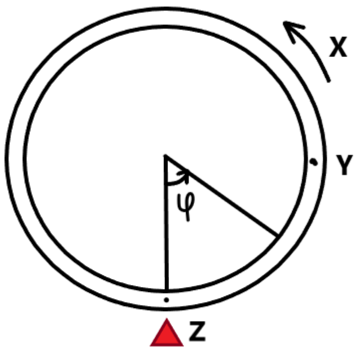


Рис. 1: Кольцо с подогревом.

Заметим, что раз жидкость почти несжимаемая, то ее скорость во всех точках трубки постоянна, она не зависит от $\phi$. Обозначим скорость за $X$.

Температура жидкости в трубке будет зависить от угла $\phi$, который отсчитывается от направленного вниз радиуса до точки против часовой стрелки. $T = T(\phi)-$ периодическая функция (период равен $2\pi$) $\Rightarrow$ ее можно разложить в ряд Фурье.

При разложении основную амплитуду задают первые слагаемые, поэтому рассмотрим только первую гармонику. Уравнение будет иметь вид $T = T_0 \cdot (1 + Y sin\phi + Z cos\phi)$. Исследуем коэффициенты при $sin\phi$ и $cos\phi$.

Отклонение температуры от радиуса, направленного к нагревателю зависит от $cos\phi$, значит $Z$ характеризует отклонение температуры от среднего значения в точке нагрева (нижней точки трубки). Отклонение от крайней правой точки (на 3 часа, то есть $\phi = \frac{\pi}{2}$) зависит от $sin\phi$, и $Y$ его характеризует.

Рассмотрим, что вызывает изменение скорости жидкости. Во-первых, действует сила Архимеда, она пропорциональна $Y$, так как в $\phi = \frac{\pi}{2}$ она направлена вверх. Во-вторых, действует сила вязкости, которая пропорциональна скорости, следовательно, пропорциональна $X$. Тогда

$$\dot{X} = cY - \beta X \tag{1}$$

Пусть течение происходит с постоянной скоростью, то есть угол изменяется на $Xt$. Тогда

$$T = f(\phi - Xt) = T_0(1 + Y sin(\phi - Xt) + Z cos(\phi - Xt)) \tag{2}$$

Пусть $\phi' = \phi - Xt$, тогда

$$\dot{T} = T_0(Y(-X)cos\phi' - Z(-X)sin\phi') = T_0(ZXsin\phi' - YXcos\phi') \tag{3}$$

Вспомним, что за отклонение температуры от нижней точки отвечал $cos\phi \Longrightarrow$ перенос температуры потоком жидкости для $Z$ учитывается членом $-YX$. Аналогично, для $Y$ будет $ZX$.

В точке $Z$ происходит постоянный подогрев, поэтому в уравнении будем его учитывать, добавив константу $A$.

В системе стремится установиться термодинамическое равновесие, следовательно, надо учитывать в уравнениях для $Y$ и $Z$ релаксацию, это будут члены $-DY$ и $-DZ$ соотвественно, где $D-$ постоянная величина.

Таким образом

$$\begin{cases} \dot{X} = cY - \beta X \\ \dot{Y} = XZ - DY \\ \dot{Z} = A - XY - DZ \end{cases}$$

Заменим переменные: $X = Dx, Y = \frac{\beta Dy}{c}, Z = -\frac{\beta Dz}{c}$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где $\sigma = \frac{\beta}{D}, r = \frac{cA}{\beta D^2}, b = 1$.

Таким образом, были получены уравнения Лоренца.

# 3 Другие области применения

Модель Лоренца применима в других физических процессах:

- Конвекция в плоском слое
- Вращение водяного колеса (колесо, на ободе которого укреплены корзины с отверстиями в дне; сверху на колесо симметрично относительно оси вращения льётся сплошной поток воды)
- Одномодовый лазер

При этом в других моделях переменные и параметры будут иметь другой смысл. Так для конвекции в плоском слое $x$ отвечает за скорость вращения водяных валов, $y$ и $z$ – за распределение температуры по горизонтали и вертикали, $\rho$ – нормированное число Рэлея, $\sigma$ – число Прандтля (отношение коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту температуропроводности), $b$ содержит информацию о геометрии конвективной ячейки.

Вращение водяного колеса похоже по поведению на конвецкцию в замкнутой петле с точностью до переворота "вверх ногами поэтому описывается аналогичными уравнениями с заменой температуры на плотность распределения массы воды в корзинах по ободу.

Для одномодового лазера $x$ – амплитуда волн в резонаторе лазера, $y$ – поляризация, $z$ – инверсия населённостей энергетических уровней, $b$ и $\sigma$ – отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, $\rho$ – интенсивность накачки.