

1 Система Лоренца

Аттрактор Лоренца — **компактное инвариантное множество** L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока

2 Конвекция в замкнутой петле

Трубка, замкнутая в кольцо, наполнена почти несжимаемой жидкостью. Она подогревается снизу и охлаждается сверху, и при достаточно сильном нагреве возможно возникновение конвекционного течения.

– рисунок –

Заметим, что раз жидкость почти несжимаемая, то ее скорость во всех точках трубки постоянна, она не зависит от ϕ . Обозначим скорость за X .

Температура жидкости в трубке будет зависеть от угла ϕ , который отсчитывается от направленного вниз радиуса до точки против часовой стрелки. $T = T(\phi)$ — периодическая функция (период равен 2π) \Rightarrow ее можно разложить в ряд Фурье.

При разложении основную амплитуду задают первые слагаемые, поэтому рассмотрим только первую гармонику. Уравнение будет иметь вид $T = T_0 \cdot (1 + Y \sin \phi + Z \cos \phi)$. Исследуем коэффициенты при $\sin \phi$ и $\cos \phi$.

Отклонение температуры от радиуса, направленного к нагревателю зависит от $\cos \phi$, значит Z характеризует отклонение температуры от среднего значения в точке нагрева (нижней точки трубки). Отклонение от крайней правой точки (на 3 часа, то есть $\phi = \frac{\pi}{2}$) зависит от $\sin \phi$, и Y его характеризует.

Рассмотрим, что вызывает изменение скорости жидкости. Во-первых, действует сила Архимеда, она пропорциональна Y , так как в $\phi = \frac{\pi}{2}$ она направлена вверх. Во-вторых, действует сила вязкости, которая пропорциональна скорости, следовательно, пропорциональна X . Тогда

$$\dot{X} = cY - \beta X \quad (1)$$

Пусть течение происходит с постоянной скоростью, то есть угол изменяется на Xt . Тогда

$$T = f(\phi - Xt) = T_0(1 + Y \sin(\phi - Xt) + Z \cos(\phi - Xt)) \quad (2)$$

Пусть $\phi' = \phi - Xt$, тогда

$$\dot{T} = T_0(Y(-X) \cos \phi' - Z(-X) \sin \phi') = T_0(ZX \sin \phi' - YX \cos \phi') \quad (3)$$

Вспомним, что за отклонение температуры от нижней точки отвечал $\cos \phi \Rightarrow$ перенос температуры потоком жидкости для Z учитывается членом $-YX$. Аналогично, для Y будет ZX .

В точке Z происходит постоянный подогрев, поэтому в уравнении будем его учитывать, добавив константу A .

В системе стремится установиться термодинамическое равновесие, следовательно, надо учитывать в уравнениях для Y и Z релаксацию, это будут члены $-DY$ и $-DZ$ соответственно, где D — постоянная величина.

Таким образом

$$\begin{cases} \dot{X} = cY - \beta X \\ \dot{Y} = XZ - DY \\ \dot{Z} = A - XY - DZ \end{cases}$$

Заменим переменные: $X = Dx, Y = \frac{\beta Dy}{c}, Z = -\frac{\beta Dz}{c}$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где $\sigma = \frac{\beta}{D}, r = \frac{cA}{\beta D^2}, b = 1$.