1 Система Лоренца

Об объекте можно говорить, как о динамической системе, если можно указать такой набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу.

Хоть и по определению динамической системы всегда можно однозначно предсказать конечное состояние по исходному, но в ней все равно может возникать хаос. В хаотическом режиме любая неточность в задании начального состояния нарастает во времени, так что предсказуемость становится недостижимой на достаточно больших интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени.

Аттрактор Лоренца — **компактное инвариантное множество** L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Эта модель была впервые описана в 1963 году Эдвардом Лоренцом в статье "Детерминированное непериодическое течение". Лоренц получил эту модель как линейную аппроксимацию гидродинамической системы уравнений для задачи о конвекции морской воды в плоском слое; значения параметров и начальные условия были выбраны таким образом: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $b = \frac{8}{3}$; $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Модель Лоренца является реальным физическим примером динамических систем с хаотическим поведением, в отличие от различных искусственно сконструированных отображений.

2 Конвекция в замкнутой петле

Трубка, замкнутая в кольцо, наполнена почти несжимаемой жидкостью. Она подогревается снизу и охлаждается сверху, и при достаточно сильном нагреве возможно возникновение конвекционного течения.

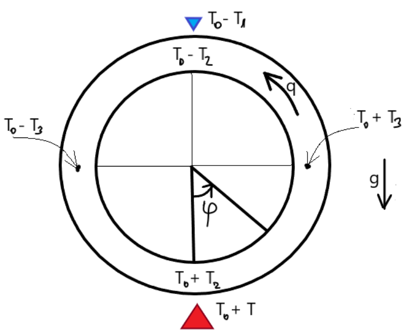

Рис. 1: Кольцо с подогревом.

Пусть a – радиус петли, внутренний радиус много меньше a.

Заметим, что раз жидкость почти несжимаемая, то ее скорость во всех точках трубки постоянна, она не зависит от ϕ. Обозначим скорость за $q = q(t)$.

Температура жидкости в трубке будет зависить от угла ϕ, который отсчитывается от направленного вниз радиуса до точки против часовой стрелки. $T = T(\phi)-$ периодическая функция (период равен 2π) $\Rightarrow$ ее можно разложить в ряд Фурье.

При разложении основную амплитуду задают первые слагаемые, поэтому рассмотрим только первую гармонику. Уравнение будет иметь вид

$$T - T_0 = T_2 \cos\phi + T_1 \sin\phi \tag{1}$$

Исследуем коэффициенты при $\sin\phi$ и $\cos\phi$.

Рассмотрим $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$, тогда $\cos\phi = 1, \sin\phi = 0$. Значит, $2T_2$ показывает разницу температур между нижней точкой (точка нагрева) и верхней точкой (точка охлаждения). Аналогично исследуем при $\phi = \frac{\pi}{2}$ и $\phi = \frac{3\pi}{2}$. Получается, что $2T_3$ отвечает за разницу между боковыми точками петли. T_2 и T_3 зависят от времени.

Уравнение Навье-Стокса в общем виде:

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\nabla} p - \overrightarrow{g} \alpha \Delta T + v \nabla^2 \overrightarrow{u}$$

В наших обозначениях:

- $\overrightarrow{u} \to q$
- так как $q = q(t)$, то можно заменить $\frac{\partial q}{\partial t}$ на $\frac{dq}{dt}$
- жидкость несжимаемая, следовательно $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{u} \to 0$
- при переходе в полярные координаты $\overrightarrow{\nabla} p \to \frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial \phi}$
- действует сила Архимеда, она зависит от $\sin\phi$, следовательно $-\overrightarrow{g}\alpha\Delta T = g\alpha(T - T_0)\sin\phi$
- коэффициент кинематической вязкости Γ зависит от скорости, поэтому $v\nabla^2\overrightarrow{u} \to -\Gamma q$

В итоге, уравнение Навье-Стокса для нашей системы примет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial \phi} + g\alpha(T - T_0)\sin\phi - \Gamma q \tag{2}$$

Подставим уравнение (1) в (2):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial \phi} + g\alpha(T_2\cos\phi + T_1\sin\phi)\sin\phi - \Gamma q$$

Избавимся от части с давлением, проинтегрировав один раз от 0 до 2π. Тогда

$$-\frac{1}{\rho a}\int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \phi}\, d\phi = 0$$

$$g\alpha T_2 \int_0^{2\pi} \cos\phi \sin\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\sin^2\phi\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$g\alpha T_3 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi = g\alpha T_3 \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial q}{\partial t} \, d\phi = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} -\Gamma q \, d\phi = -2\pi \Gamma q$$

Тогда, поделив обе части уравнения на 2π, получим:

$$\frac{dq}{dt} = -\Gamma q + \frac{g\alpha T_3}{2} \tag{3}$$

Таким образом, можно заметить, что скорость изменяется из-за разницы температур в боковых точках, то есть зависит от $2T_3$.

Теперь рассмотрим уравнение распространения теплоты в жидкости:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{u}\overrightarrow{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T$$

где κ – коэффициент температуропроводности.

В условиях задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q}{a}\frac{\partial T}{\partial \phi} = K(T_{external} - T_{internal}) = K(T_E - T) \tag{4}$$

Внешняя температура зависит от высоты:

$$T_E = T_0 + T_1 \cos\phi \tag{5}$$

Внутренняя же температура зависит от T_2 и T_3 (уравнение (1)). Вычтем из (1) (4) и подставим в (3):

$$\frac{dT_2}{dt}\cos\phi + \frac{dT_3}{dt}\sin\phi - \frac{q}{a}T_2\sin\phi + \frac{q}{a}T_3\cos\phi = K(T_1 - T_2)\cos\phi - KT_3\sin\phi$$

Коэффициенты при $\sin\phi$ и $\cos\phi$ должны совпадать в обеих частях, следовательно

$$\frac{dT_3}{dt} - \frac{qT_2}{a} = -KT_3$$

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{qT_3}{a} = K(T_1 - T_2) = KT_4$$

где T_4 показывает разницу внешней и внутренней температуры внизу и вверху трубки.

$$\frac{qT_2}{a} = \frac{qT_1}{a} - \frac{qT_4}{a} \Longrightarrow \frac{dT_3}{dt} = -KT_3 + \frac{qT_1}{a} - \frac{qT_4}{a} \tag{6}$$

T_1 определяется конфигурацией системы и не зависит от времени, следовательно, $\frac{dT_2}{dt} = -\frac{dT_4}{dt} \Longrightarrow$

$$\frac{dT_4}{dt} = -KT_4 + \frac{qT_3}{a} \tag{7}$$

Уравнения (3), (6) и (7) образуют систему дифференциальных уравнений, которую можно привести к виду системы Лоренца. Для этого сделаем следующие замены:

$$q = aKx, \quad T_3 = \frac{2a\Gamma Ky}{g\alpha}, \quad T_4 = \frac{2a\Gamma Kz}{g\alpha}, \quad t \to Kt$$

Тогда

$$aK^2\dot{x} = -\Gamma aKx + a\Gamma Ky \Longrightarrow \dot{x} = \frac{\Gamma}{K}(y - x)$$

$$\frac{2a\Gamma K^2}{g\alpha}\dot{y} = -\frac{2a\Gamma K^2}{g\alpha}y + \frac{aKxT_1}{a} - \frac{aKx \cdot 2a\Gamma Kz}{ag\alpha} \Longrightarrow \dot{y} = -y + \frac{g\alpha T_1}{2a\Gamma K}x - xz$$

$$\frac{2a\Gamma K^2}{g\alpha}\dot{z} = -\frac{K \cdot 2a\Gamma K}{g\alpha} + \frac{aKx \cdot 2a\Gamma Ky}{a} \Longrightarrow \dot{z} = -z + xy$$

Таким образом, была получена система дифференциальных уравнений Лоренца.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где

$$\rho = \frac{g\alpha T_1}{2a\Gamma K} - \text{число Рэлея}$$

$$P = \frac{\Gamma}{K} - \text{число Прандтля}$$

Число Релея определяет поведение жидкости под воздействием градиента температуры. Число Прандтля – один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях, который учитывает флияние физических свойств теплоносителя на теплоотдачу.

В условиях данной задачи x показывает скорость течения, y – отклонение температуры от средней в точке $\phi = \frac{\pi}{2}$, z – то же, но в нижней точке.

3 Другие области применения

Модель Лоренца применима в других физических процессах:

- Конвекция в плоском слое
- Вращение водяного колеса (колесо, на ободе которого укреплены корзины с отверстиями в дне; сверху на колесо симметрично относительно оси вращения льётся сплошной поток воды)
- Одномодовый лазер
- Диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением

При этом в других моделях переменные и параметры будут иметь другой смысл. Так для конвекции в плоском слое x отвечает за скорость вращения водяных валов, y и z – за распределение температуры по горизонтали и вертикали, ρ – нормированное число Рэлея, σ – число Прандтля (отношение коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту температуропроводности), b содержит информацию о геометрии конвективной ячейки.

Вращение водяного колеса похоже по поведению на конвецкцию в замкнутой петле с точностью до переворота "вверх ногами поэтому описывается аналогичными уравнениями с заменой температуры на плотность распределения массы воды в корзинах по ободу.

Для одномодового лазера x – амплитуда волн в резонаторе лазера, y – поляризация, z – инверсия населённостей энергетических уровней, b и σ – отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, ρ – интенсивность накачки.