

1 Система Лоренца

Хаотическое поведение системы — такое поведение нелинейной системы, которое выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется конечным числом законов.

Об объекте можно говорить, как о динамической системе, если можно указать такой набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу, называемым эволюцией системы.

Хоть и по определению динамической системы всегда можно однозначно предсказать конечное состояние по исходному, но в ней все равно может возникать хаос. В хаотическом режиме любая неточность в задании начального состояния нарастает во времени, так что предсказуемость становится недостижимой на достаточно больших интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени.

Точки, представляющие состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции, образуют кривую в фазовом пространстве. Эта кривая называется фазовой траекторией.

Модель Лоренца является реальным физическим примером динамических систем с хаотическим поведением, в отличие от различных искусственно сконструированных отображений.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Эта модель была впервые описана в 1963 году Эдвардом Лоренцом в статье "Детерминированное непериодическое течение". Лоренц получил эту модель как линейную аппроксимацию гидродинамической системы уравнений для задачи о конвекции морской воды в плоском слое; значения параметров и начальные условия были выбраны таким образом: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $b = \frac{8}{3}$; $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Для любого решения системы Лоренца существует такой момент времени, когда соответствующая фазовая траектория навсегда погружается в эллипс фиксированного размера (про это в параграфе 3). Поэтому существует предельное множество, к которому притягиваются все траектории динамической системы при $t \rightarrow \inf$. Поэтому можно говорить, что аттрактор Лоренца — **компактное инвариантное множество** (сфера — компакт) L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока. Таким образом, аттрактор определяет поведение решений системы Лоренца на больших отрезках времени.

2 Конвекция в замкнутой петле

Трубка, замкнутая в кольцо, наполнена почти несжимаемой жидкостью. Она подогревается снизу и охлаждается сверху, и при достаточно сильном нагреве возможно возникновение конвекционного течения.

Пусть a — радиус петли, внутренний радиус много меньше a .

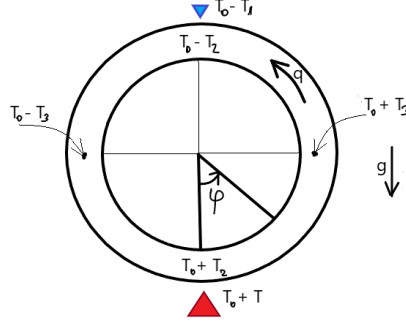


Рис. 1: Кольцо с подогревом.

Заметим, что раз жидкость почти несжимаемая, то ее скорость во всех точках трубки постоянна, она не зависит от ϕ . Обозначим скорость за $q = q(t)$.

Температура жидкости в трубке будет зависеть от угла ϕ , который отсчитывается от направленного вниз радиуса до точки против часовой стрелки. $T = T(\phi)$ — периодическая функция (период равен 2π) \Rightarrow ее можно разложить в ряд Фурье.

При разложении основную амплитуду задают первые слагаемые, поэтому рассмотрим только первую гармонику. Уравнение будет иметь вид

$$T - T_0 = T_2 \cos \phi + T_1 \sin \phi \quad (1)$$

Исследуем коэффициенты при $\sin \phi$ и $\cos \phi$.

Рассмотрим $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$, тогда $\cos \phi = 1, \sin \phi = 0$. Значит, $2T_2$ показывает разницу температур между нижней точкой (точка нагрева) и верхней точкой (точка охлаждения). Аналогично исследуем при $\phi = \frac{\pi}{2}$ и $\phi = \frac{3\pi}{2}$. Получается, что $2T_3$ отвечает за разницу между боковыми точками петли. T_2 и T_3 зависят от времени.

Уравнение Навье-Стокса в общем виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} \alpha \Delta T + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

В наших обозначениях:

- $\vec{u} \rightarrow q$
- так как $q = q(t)$, то можно заменить $\frac{\partial q}{\partial t}$ на $\frac{dq}{dt}$
- жидкость несжимаемая, следовательно $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \rightarrow 0$
- при переходе в полярные координаты $\vec{\nabla} p \rightarrow \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \phi}$
- коэффициент кинематической вязкости Γ зависит от скорости, поэтому $\nu \nabla^2 \vec{u} \rightarrow -\Gamma q$

В каждой точке кольца действует сила Архимеда, она состоит из нормальной и тангенциальной составляющей. Нормальная составляющая компенсируется стенками, поэтому рассмотрим тангенциальную (понятно, что численно $F_\theta = F \sin \phi$).

Рассмотрим на глубине h слой толщиной dh . Объем, а значит и плотность, зависят от температуры, то есть зависят от глубины

$$-\vec{g}\alpha\Delta T = g\alpha(T - T_0)\sin\phi$$

В итоге, уравнение Навье-Стокса для нашей системы примет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + g\alpha(T - T_0)\sin\phi - \Gamma q \quad (2)$$

Подставим уравнение (1) в (2):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + g\alpha(T_2 \cos\phi + T_1 \sin\phi)\sin\phi - \Gamma q$$

Избавимся от части с давлением, проинтегрировав один раз от 0 до 2π . Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho a} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \phi} d\phi &= 0 \\ g\alpha T_2 \int_0^{2\pi} \cos\phi \sin\phi d\phi &= \frac{1}{2} \sin^2\phi \Big|_0^{2\pi} = 0 \\ g\alpha T_3 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi &= g\alpha T_3 \pi \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial q}{\partial t} d\phi &= 2\pi \\ \int_0^{2\pi} -\Gamma q d\phi &= -2\pi\Gamma q \end{aligned}$$

Тогда, поделив обе части уравнения на 2π , получим:

$$\frac{dq}{dt} = -\Gamma q + \frac{g\alpha T_3}{2} \quad (3)$$

Таким образом, можно заметить, что скорость изменяется из-за разницы температур в боковых точках, то есть зависит от $2T_3$.

Теперь рассмотрим уравнение распространения теплоты в жидкости:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} T = \kappa \nabla^2 T$$

где κ – коэффициент температуропроводности.

В условиях задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q}{a} \frac{\partial T}{\partial \phi} = K(T_{\text{external}} - T_{\text{internal}}) = K(T_E - T) \quad (4)$$

Внешняя температура зависит от высоты:

$$T_E = T_0 + T_1 \cos\phi \quad (5)$$

Внутренняя же температура зависит от T_2 и T_3 (уравнение (1)). Вычтем из (1) (4) и подставим в (3):

$$\frac{dT_2}{dt} \cos \phi + \frac{dT_3}{dt} \sin \phi - \frac{q}{a} T_2 \sin \phi + \frac{q}{a} T_3 \cos \phi = K(T_1 - T_2) \cos \phi - KT_3 \sin \phi$$

Коэффициенты при $\sin \phi$ и $\cos \phi$ должны совпадать в обеих частях, следовательно

$$\frac{dT_3}{dt} - \frac{qT_2}{a} = -KT_3$$

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{qT_3}{a} = K(T_1 - T_2) = KT_4$$

где T_4 показывает разницу внешней и внутренней температуры внизу иверху трубки.

$$\frac{qT_2}{a} = \frac{qT_1}{a} - \frac{qT_4}{a} \implies \frac{dT_3}{dt} = -KT_3 + \frac{qT_1}{a} - \frac{qT_4}{a} \quad (6)$$

T_1 определяется конфигурацией системы и не зависит от времени, следовательно, $\frac{dT_2}{dt} = -\frac{dT_4}{dt} \implies$

$$\frac{dT_4}{dt} = -KT_4 + \frac{qT_3}{a} \quad (7)$$

Уравнения (3), (6) и (7) образуют систему дифференциальных уравнений, которую можно привести к виду системы Лоренца. Для этого сделаем следующие замены:

$$q = aKx, \quad T_3 = \frac{2a\Gamma Ky}{g\alpha}, \quad T_4 = \frac{2a\Gamma Kz}{g\alpha}, \quad t \rightarrow Kt$$

Тогда

$$aK^2\dot{x} = -\Gamma aKx + a\Gamma Ky \implies \dot{x} = \frac{\Gamma}{K}(y - x)$$

$$\frac{2a\Gamma K^2}{g\alpha}\dot{y} = -\frac{2a\Gamma K^2}{g\alpha}y + \frac{aKxT_1}{a} - \frac{aKx \cdot 2a\Gamma Kz}{ag\alpha} \implies \dot{y} = -y + \frac{g\alpha T_1}{2a\Gamma K}x - xz$$

$$\frac{2a\Gamma K^2}{g\alpha}\dot{z} = -\frac{K \cdot 2a\Gamma K}{g\alpha} + \frac{aKx \cdot 2a\Gamma Ky}{a} \implies \dot{z} = -z + xy$$

Таким образом, была получена система дифференциальных уравнений Лоренца.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где

$$\rho = \frac{g\alpha T_1}{2a\Gamma K} - \text{число Рэлея}$$

$$P = \frac{\Gamma}{K} - \text{число Прандтля}$$

$b = 1$, так как рассматриваем кольцо

Число Релея определяет поведение жидкости под воздействием градиента температуры. Число Прандтля – один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях, который учитывает влияние физических свойств теплоносителя на теплоотдачу.

В условиях данной задачи x показывает скорость течения, y – отклонение температуры от средней в точке $\phi = \frac{\pi}{2}$, z – то же, но в нижней точке.

3 Аналитическое исследование

1. Заменяем одновременно знак у x и y :

$$\begin{aligned}(\dot{-x}) &= \sigma(-y - (-x)) \Leftrightarrow -\dot{x} = -\sigma(y - x) \Leftrightarrow \dot{x} = \sigma(y - x) \\ (-\dot{y}) &= -x(\rho - z) - (-y) \Leftrightarrow -\dot{y} = -(x(\rho - z) - y) \Leftrightarrow \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= -bz + (-x)(-y) \Leftrightarrow \dot{z} = -bz + xy\end{aligned}$$

Заметно, что система уравнений *симметрична*. Это значит, что любое образование в фазовом пространстве обладает той же симметрией, то есть превращается само в себя при замене переменных.

2. Пусть $w = \rho - z$, тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = xw - y \\ \dot{w} = -bw + b\rho - xy \end{cases}$$

Домножим \dot{x} на $\frac{x}{\sigma}$, \dot{y} на y , \dot{w} на w и сложим:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sigma} \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + w \frac{dw}{dt} &= xy - x^2 - y^2 + xyw - bw^2 - xyw + b\rho w \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2/\sigma + y^2 + w^2}{2} \right) &= - \left(x - \frac{1}{2}y \right)^2 - \frac{3}{4}y^2 - b \left(w - \frac{1}{2}\rho \right)^2 + \frac{1}{4}b\rho^2\end{aligned}$$

В трехмерном пространстве (x, y, w) область, заданная неравенством $RHS \geq 0$, ограничена поверхностью параллелепипеда, смещенного относительно начала координат. А значит вне этой области $RHS < 0$. Определим множество эллипсоидов в этом же пространстве, заданных уравнением $x^2/\sigma + y^2 + w^2 = const$, и возьмем такую константу, чтобы полученный эллипсоид полностью содержал в себе область, описанную выше. Тогда на поверхности эллипсоида всюду $\frac{d}{dt}(x^2/\sigma + y^2 + w^2) < 0$, то есть величина $x^2/\sigma + y^2 + w^2$ убывает. Значит, все траектории, пересекающие поверхность эллипса, ведут только внутрь ограниченной им области. То есть в какой-то момент времени любая фазовая траектория погружается в эллипс с фиксированными параметрами.

3. Система имеет *неподвижные точки* (состояния равновесия). Это такие состояния, которые не меняются во времени, то есть $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ обращаются в нуль.

$$\begin{cases} 0 = \sigma(x - y) \\ 0 = \rho x - y - xz \\ 0 = -bz + xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x(\rho - 1 - z) = 0 \\ x = \pm\sqrt{bz} \end{cases}$$

1 случай: $x = 0$, тогда $z = 0$. 2 случай: $z = \rho - 1$, тогда $x = \pm\sqrt{\rho - 1}$, понятно, что 2 случай возможен только при $\rho \geq 1$.

Значит, при $r < 1$ возможно только одно состояние равновесия:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

При $r \geq 1$ будет три состояния равновесия (первое см. выше):

$$x = \sqrt{\rho - 1}, \quad y = \sqrt{\rho - 1}, \quad z = r - 1$$

$$x = -\sqrt{\rho - 1}, \quad y = -\sqrt{\rho - 1}, \quad z = r - 1$$

Физический смысл точки $(0, 0, 0)$ – отсутствие конвекционных потоков. Другие две точки соответствуют наличию конвекционного потока против часовой стрелки для второй точки и против – для третьей. Стоит отметить, что вторая и третья точки являются симметричными, что является примером к первой рассмотренной особенности системы Лоренца.

4 Другие области применения

Модель Лоренца применима в других физических процессах:

- Конвекция в плоском слое
- Вращение водяного колеса (колесо, на ободе которого укреплены корзины с отверстиями в дне; сверху на колесо симметрично относительно оси вращения льётся сплошной поток воды)
- Одномодовый лазер
- Диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением

При этом в других моделях переменные и параметры будут иметь другой смысл. Так для конвекции в плоском слое x отвечает за скорость вращения водяных валов, y и z – за распределение температуры по горизонтали и вертикали, ρ – нормированное число Рэлея, σ – число Прандтля (отношение коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту температуропроводности), b содержит информацию о геометрии конвективной ячейки.

Вращение водяного колеса похоже по поведению на конвекцию в замкнутой петле с точностью до переворота "вверх ногами", поэтому описывается аналогичными уравнениями с заменой температуры на плотность распределения массы воды в корзинах по ободу.

Для одномодового лазера x – амплитуда волн в резонаторе лазера, y – поляризация, z – инверсия населённости энергетических уровней, b и σ – отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации, ρ – интенсивность накачки.