問題1

I (1) 運動エネルギー $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)$ より

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2) - \frac{\alpha}{r}$$

オイラー・ラグランジュ方程式は一般化座標 q を用いて.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

より. <u>r について</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

<u>θ について</u>

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)}_{mr^2\dot{\theta}} - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - 0 = 0$$

(2)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = r\cdot mr\dot{\theta} = L \text{ より } \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r^2} \longrightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{m}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$= \cancel{r}\cdot\frac{L}{mr^{\cancel{2}}}\cdot\frac{L}{mr^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{1}{r^2}$$

$$= \left(\frac{L}{m}\right)^2 u^3 + \frac{\alpha}{m}u^2$$

また、$\ddot{r} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$ より

$$-\left(\frac{L}{m}\right)^2 \cancel{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \left(\frac{L}{m}\right)^2 u^{\cancel{3}} + \frac{\alpha}{m}\cancel{u^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{\alpha m}{L^2} \quad \cdots ①$$

さらに $X = u + \frac{\alpha m}{L^2}$ とおくと. ①式は. $\frac{d^2X}{d\theta^2} = -X$ となり

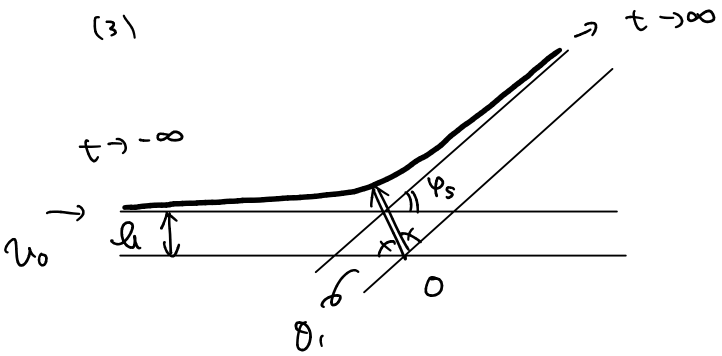
この微分方程式の解は $X(\theta) = A\cos(\theta-\theta_0)$ と表せる.
これを r で書くと.

$$u + \frac{\alpha m}{L^2} = A\cos(\theta-\theta_0)$$

$$u = A\cos(\theta-\theta_0) - \frac{m\alpha}{L^2} \qquad \therefore\ r = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) - \frac{m\alpha}{L^2}}$$

//

(3)



角運動量は保存するので初速時を考えると、

$$L = l m v_0$$

(4) $t \to \pm\infty$ のとき r は十分遠方であるといえる。

このことから、 $A\cos\theta_1 - \frac{m\alpha}{L^2} = 0$ がいえて、 $\cos\theta_1 = \frac{m\alpha}{AL^2}$

(5) 式(4)を t で微分すると、

$$\dot{r} = -\left(A\cos\theta - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^{-2} \cdot (-A\sin\theta \cdot \dot{\theta})$$

また、 $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ より $\dot{r} = \frac{\frac{AL}{mr^2}\sin\theta}{\boxed{\left(A\cos\theta - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2} = \frac{1}{r^2}} = \frac{AL}{mr^2} \cdot r^2 \sin\theta$

よって、 $T \to -\infty$ のとき

$$v_0 = \frac{AL}{m\cancel{r^2}} \cdot \cancel{r^2} \cdot \sin\theta_1 \quad \therefore \sin\theta_1 = \frac{mv_0}{AL}$$

(6) $\cos\left(\frac{\varphi_s}{2} + \theta_1\right) = \cos\frac{\varphi_s}{2}\cos\theta_1 - \sin\frac{\varphi_s}{2}\sin\theta_1 = 0$ より

$$\tan\frac{\varphi_s}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_s}{2}}{\cos\frac{\varphi_s}{2}} = \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = \frac{\frac{\cancel{m}\alpha}{\cancel{A}L^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{m}v_0}{\cancel{A}\cancel{L}}} = \frac{\alpha}{Lv_0}$$

II

(7) 同様にして

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) + \frac{\beta}{r^n}$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

rについて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + n\frac{\beta}{r^{n+1}} = 0$$

θについて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = 0$$

(8) 動径方向に注目すると、

$$m\cdot 0 - mr_0\omega_0^2 + n\frac{\beta}{r_0^{n+1}} = 0$$

よって $$mr_0\omega_0^2 = \frac{n\beta}{r_0^{n+1}}$$ //

(9) $$m(\ddot{r_0}+\ddot{\rho}) - m(r_0+\rho)\dot{\theta}^2 + n\frac{\beta}{(r_0+\rho)^{n+1}} = 0$$

$$\therefore\ m\ddot{\rho} - m(r_0+\rho)\left(\frac{L}{m(r_0+\rho)^2}\right)^2 + \frac{n\beta}{(r_0+\rho)^{n+1}} = 0$$

$$m(r_0+\rho)^2\dot{\theta} = L$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m(r_0+\rho)^2}$$

$$n\beta(r_0+\rho)^{-(n+1)} = n\beta r_0^{-(n+1)}\left(1+\frac{\rho}{r_0}\right)^{-(n+1)}$$

$$= n\beta r_0^{-(n+1)}\left(1-(n+1)\frac{\rho}{r_0}\right)$$

$$= \frac{n\beta}{r_0^{n+1}} - \frac{n(n+1)\rho}{r_0^{n+2}}$$

$$m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\boxed{(r_0+\rho)^3}} + \frac{n\beta}{r_0^{n+1}} - \frac{n(n+1)\rho}{r_0^{n+2}} = 0$$

$$r_0^{-3}\left(1+\frac{\rho}{r_0}\right)^{-3} = r_0^{-3}\left(1-\frac{3\rho}{r_0}\right)$$

$$= \frac{1}{r_0^3} - \frac{3\rho}{r_0^4}$$

$$\therefore\ m\ddot{\rho} = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{3L^2}{mr_0^4}\rho - \frac{n\beta}{r_0^{n+1}} + \frac{n\beta(n+1)\rho}{r_0^{n+2}}$$

また、 $$mr_0\omega_0^2 = mr_0\left(\frac{L}{mr_0^2}\right)^2 = \frac{L^2}{mr_0^3} = \frac{n\beta}{r_0^{n+1}}$$ なので

$$m\ddot{\rho} = \cancel{\frac{L^2}{mr_0^3}} - \frac{3L^2}{mr_0^4}\rho - \cancel{\frac{L^2}{mr_0^3}} + \frac{(n+1)L^2}{mr_0^4}\rho$$

$$\therefore\ m\ddot{\rho} = \frac{(n-2)L^2}{mr_0^4}\rho$$

$n-2<0$ より $n<2$ $\therefore\ n=1$ //