Санкт-Петербургский Государственный университет ИТМО
Факультет програмной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3 по дисциплине "Вычислительная математика"

Численное интегрирование

Вариант №7

Работу выполнила:
Д. А. Карасева
Группа: P3217
Преподаватель:
Т. А. Малышева

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1. Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуе- мой точностью различными численными методами, выполнить программную реализацию *метода прямоугольников, метода трапеций и метода Симпсона.*

Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

2. Описание методов. Расчетные формулы

Метод прямоугольников

Пусть функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; b]. Нам требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Обратимся к понятию определенного интеграла. Разобьем отрезок [a;b] на n частей $[x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, ..., n$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Внутри каждого отрезка $[x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, ..., n$ выберем точку ε. Так как по определению определенный интеграл есть предел интегральных сумм при бесконечном уменьшении длины элементарного отрезка разбиения $\lambda = max(x_i - x_{i-1}) \to 0$, то любая из интегральных сумм является приближенным значением интеграла $\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^n f(\varepsilon) * (x_i - x_{i-1})$.

Суть метода прямоугольников заключается в том, что в качестве приближенного значения определенного интеграла берут интегральную сумму.

Формула метода средних прямоугольников.

Если отрезок интегрирования [a;b] разбить на равные части длины h точками $a = x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, ..., x_n = x_0 + nh = b$ и в качестве точек ε выбрать середины элементарных отрезков $[x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, ..., n$, то приближенное равенство $\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^n f(\varepsilon) * (x_i - x_{i-1}$ можно записать в виде $\int_a^b f(x)\,dx \sim h * \sum_{i=1}^n f(x_{i-1} + h/2)$. Это и есть формула метода прямоугольников. Ее еще называют формулой средних прямоугольников из-за способа выбора точек ε.

Метод левых прямоугольников и метод правых прямоугольников.

Перейдем к модификациям метода прямоугольников.

$\int_a^b f(x)\,dx \sim h * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ - это формула метода левых прямоугольников.

$\int_a^b f(x)\,dx \sim h * \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ - это формула метода правых прямоугольников.

Отличие от метода средних прямоугольников заключается в выборе точек ε не в середине, а на левой и правой границах элементарных отрезков соответственно.

Метод трапеций

Заменим фигуру «под графиком функции» на множество трапеций. Площадь построенной таким образом фигуры равна сумме площадей трапеций, мы знаем, что площадь трапеции находится как произведение полу суммы оснований на высоту. Следовательно, в площадь криволинейной трапеции приближенно равна площади трапеции с основаниями $f(x_{i-1}), f(x_i)$ и высотой h. Таким образом, мы подошли к сути метода трапеций, которая состоит в представлении определенного $\int_a^b f(x)\,dx$ интеграла в виде суммы интегралов вида $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ на каждом элементарном отрезке и в последующей приближенной замене $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \sim \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} * h$. Итоговая формула $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \sim \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} * h = \frac{h}{2} * (f(x_0) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n))$

Метод Симпсона

Этот метод основан на замене фигуры «под графиком функции» множеством криволинейных трапеций. Верхние стороны трапеций представляют собой части парабол, пересекающих график подынтегральной функции в точках x_i. В качестве приближенного значения определенного интеграла $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx$ взять $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (a_i x^2 + b_i x + c_i)\,dx$, который мы можем вычислить по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Вычислительная часть

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\, dx$$

Вычислить интеграл точно

$$F(x) = x^4 - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 7x; F(2) = 2^4 - \frac{5*2^3}{3} + 3*2^2 - 7*2 = \frac{2}{3}; F(0) = 0$$

$$I = F(x) = F(2) - F(0) = \frac{2}{3} = 0.(6)$$

Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n = 6

$$h = \frac{b-a}{6} = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}$$

$\int_a^b f(x)dx \sim c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h) + c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b) = 2*(\frac{41}{840}f(0) + \frac{216}{840}f(\frac{1}{3}) + \frac{27}{840}f(\frac{2}{3}) + \frac{272}{840}f(1) + \frac{27}{840}f(\frac{4}{3}) + \frac{216}{840}f(\frac{5}{3}) + \frac{41}{840}f(2)) = 0.(6)$

R = |0.(6) - 0.(6)| = 0

Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n = 10 .

$$h = \frac{b-a}{10} = \frac{2-0}{10} = \frac{1}{5}$$

Метод средних прямоугольников

$I = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-0.5} = h*(f(a+\frac{h}{2}) + f(a+\frac{3h}{2}) + f(a+\frac{5h}{2}) + f(a+\frac{7h}{2}) + f(a+\frac{9h}{2}) + f(a+\frac{11h}{2}) + f(a+\frac{13h}{2}) + f(a+\frac{15h}{2}) + f(a+\frac{17h}{2}) + f(a+\frac{19h}{2}) = 0.2(f(0+0.1) + f(0+0.3) + f(0+0.5) + f(0+0.7) + f(0+0.9) + f(0+1.1) + f(0+1.3) + f(0+1.5) + f(0+1.7) + f(0+1.9)) = 0.62$

R = |0.(6) - 0.62| = 0.04(6), относительная погрешность $\frac{0.04(6)}{0.(6)} \sim 7.6\%$

Метод трапеций

$$I = h*(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i)$$

$I = 0.2*(\frac{f(0)+f(2)}{2} + f(0+0.2) + f(0+0.4) + f(0+0.6) + f(0+0.8) + f(0+1) + f(0+1.2) + f(0+1.4) + f(0+1.6) + f(0+1.8)) = 0.76$

R = |0.(6) - 0.76| = 0.09(3), относительная погрешность $\frac{0.09(3)}{0.(6)} \sim 15.5\%$

Метод Симпсона

$$I = \frac{h}{3}*(y_0 + 4*\sum_{i=1}^{n-1} y_{i\%2=1} + 2*\sum_{i=2}^{n-2} y_{i\%2=0} + y_n$$

$I = \frac{0.2}{3}*(f(0) + 4*(f(0+0.2) + f(0+0.6) + f(0+1) + f(0+1.4) + f(0+1.8)) + 2*(f(0+0.4) + f(0+0.8) + f(0+1.2) + f(0+1.6)) + f(2)) = 0.(6)$

$R = |0.(6) - 0.(6)| = 0$

4. Листинг программы

Репозиторий на GitHub

Функция, отвечающая за реализацию метода прямоугольников

```
def left_rectangle_rule(f, a, b, n, order = 1):
    h = (b - a) / n
    integral = 0
    for i in range(n):
        integral += f(a + i * h)
    integral *= h
    return integral, order


def right_rectangle_rule(f, a, b, n, order = 1):
    h = (b - a) / n
    integral = 0
    for i in range(1, n + 1):
        integral += f(a + i * h)
    integral *= h
    return integral, order


def mid_rectangle_rule(f, a, b, n, order = 2):
    h = (b - a) / n
    integral = 0
    for i in range(n):
        integral += f(a + (i + 0.5) * h)
    integral *= h
    return integral, order
```

Функция, отвечающая за реализацию метода трапеций

```
def trapezoidal_rule(f, a, b, n, order = 2):
    h = (b - a) / n
    integral = 0.5 * (f(a) + f(b))
    for i in range(1, n):
        integral += f(a + i * h)
    integral *= h
    return integral, order
```

Функция, отвечающая за реализацию метода Симпсона

```
def simpsons_rule(f, a, b, n, order = 4):
    h = (b - a) / n
    integral = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n):
        if i % 2 == 0:
            integral += 2 * f(a + i * h)
        else:
            integral += 4 * f(a + i * h)
    integral *= h / 3
    return integral, order
```

5. Примеры и результаты работы программы

Выберите функцию для интегрирования:
1. $x^2 - x + 5$
2. $8x^7 + 6x^5 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$
3. exp(x) - x
Введите номер выбранной функции: 3
Введите нижний предел интегрирования: 0
Введите верхний предел интегрирования: 2
Введите требуемую точность: 0.01
Введите начальное число разбиения интервала: 6

Метод: Левых прямоугольников
Значение интеграла: 4.383344792848064
Число разбиений: 768
Точность: 0.01

Метод: Правых прямоугольников
Значение интеграла: 4.3947746264390295
Число разбиений: 768
Точность: 0.01

Метод: Средних прямоугольников
Значение интеграла: 4.381667344801099
Число разбиений: 12
Точность: 0.01

Метод: Трапеций
Значение интеграла: 4.3927530414926235
Число разбиений: 24
Точность: 0.01

Метод: Симпсона
Значение интеграла: 4.389083396554605
Число разбиений: 12
Точность: 0.01

6. Вывод

В результате выполнения лабораторной работы я изучила численные методы интегрирования и их точность, смогла программно реализовать некоторые из методов на языке Python.