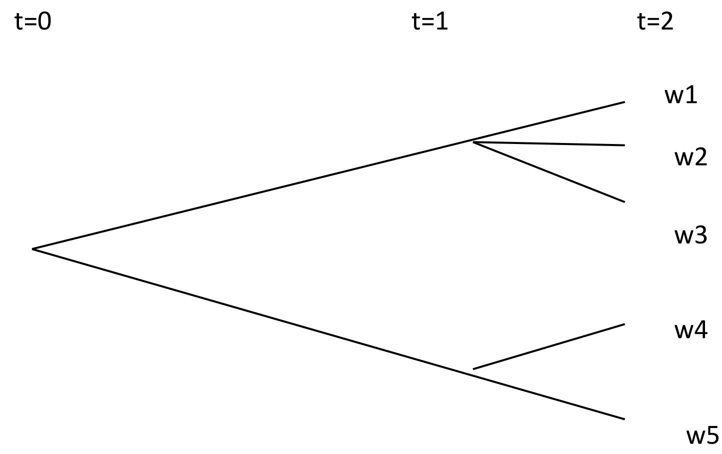
可转债定价与策略

1. 衍生品定价原理



图表 1 信息结构

假设一个经济体中有$T+1$个交易日期，记为$t=0,1,...,T$。每个交易日期有一个即时消费品（perishable consumption good）可供消费。从时刻0到时刻T任何一个可能的外生不确定环境的完整历史就是一个自然状态（any possible complete history of the exogenous uncertain environment from time 0 to time T is a state of nature），记为ω。将所有的自然状态构成的集合记为Ω。假设真实的自然状态是随着时间部分显示给个人，在T时刻全部显示给个人。真实自然状态的显示可以用事件树（event tree）来表示，如图 1，也称作信息结构（information structure）。图 1 中，总共有 3 个交易日期，5 个自然状态，分别为$\omega_1,...,\omega_5$。在时刻 0，拥有的信息是真实自然状态是这 5 个状态中的 1 个。在时刻 1，个人学习到真实状态要么是$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$中的 1 个或者是$\{\omega_4,\omega_5\}$中的 1 个。在时刻 2，真实状态完全显示。例如，假设真实状态是ω_3，则，在时刻 0，个人只知道真实状态是 5 个状态中的 1 个，在时刻 1，个人知道真实状态是$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$中的 1 个，在时刻 2，个人知道真实状态是$\omega_3$。

一个事件是Ω的子集。例如$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$是一个事件。记$\{A_1,...,A_n\}$为$\Omega$的一个分割（partition），其中$A_i, i=1,...,n$为事件，且$A_i \bigcap A_j=\varnothing, i\neq j$，且$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$。一个分割比另一个分割精细如果后者中的任何一个事件都是有前者中的时间并集得到。图 1 中，

$\{\Omega\},\{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\{\omega_4,\omega_5\}\},\{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\},\{\omega_5\}\}$都是分割，分别对应于时刻 0，时刻 1 和时刻 2，而且越来越精细。我们用$\mathbf{F}=\{F_t;t=0,1,...,T\}$来表示信息结构，其中$F_t$是一个分割，且如果$t\geq s$，则$F_t$比$F_s$精细。我们假设$F_0=\{\Omega\}$，$F_T=\{\{\omega_1\},...,\{\omega_{total}\}\}$，$total$为所有状态的个数，该假设的意思是时刻 0 个人只知道真实状态是Ω中的一个，时刻T则完全知道真实状态是哪一个。

假设有$N+1$个证券，下标记做$j=0,1,...,N$。证券j的分红过程（dividend process）记为$x_j=\{x_j(t);t=0,1,2,...,T\}$，其中$x_j(t)$表示在时刻$t$的分红为$x_j(t)$单位的消费品。简单起见，假设第 0 个证券其他时刻都不分红，只有在T时刻分红，且分红为 1 单位消费品。记第 0 个证券在 t 时刻的除息后价格为$B(t)$，第j（$j>0$）个证券在 t 时刻的除息后价格为$S_j(t)$。则，$S_j(T)=0$，$B(T)=0$。上述分红过程和价格过程都是适应于信息结构$\mathbf{F}$的（一个随机过程$x(t),t=0,1,...,T$适应于$\mathbf{F}$是指$x(t)$相对于分割F_t是可测的）。

个人的效用函数为

$$u_{i0}\left(z_0^i\right)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{a_t\in F_t}\pi_{a_t}^i u_{it}\left(z_{a_t}^i\right) \quad (1),$$

其中，z_0^i为个人i在 0 时刻的消费，$z_{a_t}^i$为个人i在 t 时刻a_t事件下（情况下）的消费，$\pi_{a_t}^i$为个人i在 0 时刻认为a_t事件发生的概率。u_{it}为 von-Neumann-Morgenstern 效用函数，是增函数，strictly concave 且 differentiable。个人在 0 时刻拥有的这 N+1 个证券的份额记为$\left(\bar{\alpha}^i(0),\bar{\theta}^i(0)\right)$。

一个交易策略（trading strategy）记做$\left\{\alpha(t),\theta(t)=\left(\theta_j(t)\right)_{j=1}^N\right\}$，其中，$\alpha(t)$和$\theta_j(t)$分别表示，在$t$时刻交易前，从$t-1$时刻到$t$时刻持有的第 0 个证券和第$j$个证券的份额。一个消费计划（consumption plan）$c=\{c(t);t=0,1,...,T\}$是一个适应于$\mathbf{F}$的过程。一个交易策略称为允许的（admissible）如果存在一个消费计划c，使得 ，

$$\begin{aligned}&\forall t<T,\alpha(t+1)B(t)+\theta(t+1)'S(t)=\alpha(t)B(t)+\theta(t)'\left(S(t)+X(t)\right)-c(t)\\&t=T,\alpha(T)+\theta(T)'X(T)=c(T)\end{aligned} \quad (2),$$

其中，$S(t)=\left(S_1(t),...,S_N(t)\right)',X(t)=\left(X_1(t),...,X_N(t)\right)',\theta(t)=\left(\theta_1(t),...,\theta_N(t)\right)'$。符合（2）式的消费计划也称为被交易策略$(\alpha,\theta)$融资（financed）。

衍生品的报酬（payoff）依赖于其他证券的价格过程。许多情况下，衍生品的价格可以通过无套利理论来确定，即如果证券市场不存在套利，则衍生品的价格完全有其他证券的价格过程决定。当我们使用无套利定价理论时，我们一般会把其他证券的价格过程当做给定的，然后去定价衍生品。问题是我们怎么知道给定的其他证券的价格过程是无套利的。

首先定义无套利。一个由交易策略(α,θ)融资的消费计划c满足下列条件：c是非负的，且至少存在一个t和一个事件$a_t\in F_t$使得$c(a_t,t)$严格为正，且$\alpha(0)B(0)+\theta(0)'(S(0)+X(0))\le 0$，则这是一个套利机会。上述定义是说套利机会是消费总是非负，且有个事件下严格为正，且初始成本非正的消费计划。一个价格系统(B,S)无套利是说该价格系统不存在上面定义的套利机会。

定理 1

一个价格系统(B,S)如果是无套利的，则存在一个 martingale measure π^*，使得

$$\begin{aligned}S_j^*(t)+D_j^*(t)&=E^*\left[S_j^*(s)+D_j^*(s)\middle|F_t\right]\quad \forall s\ge t\\&=E^*\left[D_j^*(T)\middle|F_t\right]\end{aligned}\quad（3），$$

其中，

$$S_j^*(t)\equiv\begin{cases}\dfrac{S_j(t)}{B(t)} & if\ t\ne T\\ 0 & if\ t=T\end{cases},$$

$$B_j^*(t)\equiv\begin{cases}1 & if\ t\ne T\\ 0 & if\ t=T\end{cases},$$

$$x_j^*(t)\equiv\begin{cases}\dfrac{x_j(t)}{B(t)} & if\ t\ne T\\ x_j(t) & if\ t=T\end{cases},$$

$$D_j^*(t)\equiv\sum_{s=0}^{t}x_j^*(s)。$$

相反，如果$B(t)>0\ for\ all\ t<T$，且存在一个 martingale measure π^*，使得（3）式成立，则价格系统(B,S)是无套利。

上面的π^*与π^i不同，不管个人与个人之间的π^i式相同还是不同，在无套利的情况下都存在π^*使得（3）式成立。

另外，（3）式可以写成

$$\begin{aligned} S_j^*(t) &= E^*\left[S_j^*(s) + \sum_{k=t+1}^{s} x_j^*(k) \middle| F_t\right] \quad \forall s \ge t \\ &= E^*\left[\sum_{k=t+1}^{T} x_j^*(k) \middle| F_t\right] \end{aligned} \quad (4)$$

另一种形式

上面的推导是假设第 0 个证券其他时刻都不分红，只有在T时刻分红，且分红为 1 单位消费品。也可以对第 0 个证券做另外一种假设，即，假设该证券其他时刻都不分红，只有在T时刻分红，且T时刻的分红$x_0(T)$是F_{T-1}可测的，且$x_0(T)$，且$\forall t<T, B(t)$是F_{t-1}可测的。即，假设第 0 个证券是在t到$t+1$时刻之间是无风险资产。则同样有（3）式成立（此时的π^*与之前的π^*也不一样），不过，此时

$$x_j^*(t) \equiv \begin{cases} \dfrac{x_j(t)}{B(t)} & if\ t \ne T \\ \dfrac{x_j(t)}{x_0(T)} & if\ t = T \end{cases} \quad (5),$$

对于$s=t+1$，（4）式为

$$S_j^*(t) = E^*\left[S_j^*(t+1) + x_j^*(t+1) \middle| F_t\right] \quad (6),$$

根据$S_j^*(t)$， $x_j^*(t+1)$的定义，

$$\frac{S_j(t)}{B(t)} = \begin{cases} E^*\left[\dfrac{S_j(t+1)}{B(t+1)} + \dfrac{x_j(t+1)}{B(t+1)} \middle| F_t\right] & if\ t < T-1 \\ E^*\left[\dfrac{S_j(t+1)}{B(t+1)} + \dfrac{x_j(t+1)}{x_0(t+1)} \middle| F_t\right] & if\ t = T-1 \end{cases} \quad (7),$$

由于T时刻的分红$x_0(T)$是F_{T-1}可测的，且$x_0(T)$，且$\forall t<T, B(t)$是F_{t-1}可测的，所以

$$S_j(t) = \begin{cases} \dfrac{B(t)}{B(t+1)} E^*\left[S_j(t+1) + x_j(t+1) \middle| F_t\right] & if\ t < T-1 \\ \dfrac{B(t)}{x_0(t+1)} E^*\left[S_j(t+1) + x_j(t+1) \middle| F_t\right] & if\ t = T-1 \end{cases} \quad (8),$$

定义

$$\frac{1}{1+r(t)} \equiv \begin{cases} \dfrac{B(t)}{B(t+1)} & if\ t<T-1 \\ \dfrac{B(t)}{x_0(t+1)} & if\ t=T-1 \end{cases} \quad (9),$$

则

$$S_j(t)=\frac{1}{1+r(t)}E^*\left[S_j(t+1)+x_j(t+1)\middle|F_t\right] \quad (10)。$$

（10）式是我们最常用的式子。

定理 2

如果一个价格系统(B,S)如果是无套利的，如果一个衍生品对应于一个由交易策略(α,θ)融资的消费计划c，则该衍生品的价格也服从（3），（7）或（10）式。

2. 可转债定价

1) 可转债常见条款

可转债是一种债券，该债权包含债权持有人可以将该债券转换一定事先约定好的数量的股票该公司的权利。我们记该债券的面值为N，每期支付的券息（coupon）为C，转换数量记为C_r，表示该面值的债券能转换成多少股股票。

通常，可转债还包含其他嵌入选项，包括债务人赎回条款，债权人回售条款。

债务人赎回条款是指债务人在一定条件下可以按照事先约定的价格P_c将该债权赎回。该一定条件通常包括：可以赎回的起始和截止时间；股价在过去多长时间内超过某一阈值多少次，这些条件也称为 call trigger。

债权人回售条款，是指债权人在一定条件下可以将该债券按照事先约定的价格P_p回售给债务人。该一定条件通常包括可以回售的起始和截止时间。

有些可转债还会包含 refix 条款。即当股价在一定时间内低于某一阈值多少次，则将转换数量C_r上调到事先约定好的数量。

2) 对股价建模

假设每期的无风险利率是恒定的$r(t)=r$，并且使用连续利率，即投资 1 元到无风险资产上

Δt 时间，则资产值为 $\exp\left(r\Delta t\right)$，假设股票不分红，假设股票的波动率为恒定，不确定的只有股票价格 S_t，则对股票价格建模，

$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW$ （11），

其中 dW 是标准维纳过程,即 $W\left(t\right)-W\left(s\right) \sim N(0,\sqrt{t-s}),\ for\ t>s$,且对于 $t_1>t_2, t_3>t_4$, $[t_2,t_1]$ 与 $[t_4,t_3]$ 不重叠，有 $W\left(t_1\right)-W\left(t_2\right)$ 与 $W\left(t_3\right)-W\left(t_4\right)$ 独立。

3) （11）式的合理性

根据伊藤引理，

$d\ln\left(S_t\right)=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dW$ （12），

所以

$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \sim N\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$ （13），

所以

$E\left[\left(S_{t+\Delta t}\right)\middle|S_t\right]=S_t\exp\left(r\Delta t\right)$ （14）。

可以看到（14）式满足（10）式。

4) 二叉树模型（晶格模型）

（11）式或者（12）式是连续过程，我们要把它离散化。

一种离散化方法是让 dW 在 Δt 时间内只能取 2 个值，相应地，Δt 时间内，$S_{t+\Delta t}$ 也只能取 2 个值，我们记这两个值分别为 $S_t u$ 和 $S_t d$，记 $S_{t+\Delta t}=S_t u$ 的条件概率为 p，则有三个未知数 u,d,p 需要确定。（14）式可以作为一个条件。再加上，

$Var\left[\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)\middle|S_t\right]=\sigma^2\Delta t$ （15），

再加上

$u=\frac{1}{d}$ （16），

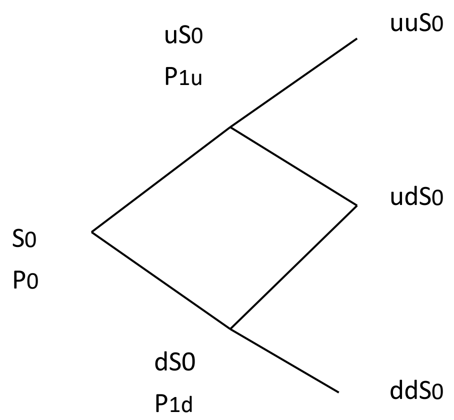
总共 3 个条件就可以确定这三个未知数，它们的值分别为

$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right),$

$d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\Delta t}\right),$（16）。

$p = \dfrac{\exp\left(r\Delta t\right) - d}{u - d}$

这只是一种离散化方式，该方式大多数教科书都会介绍，还有其他离散化方式（三叉树，五叉树，七叉树），不做介绍。



图表 2 股价二叉树

在这种情况下，可转债的价格很好计算，例如，图 2 中，

S_0 对应的节点处，在该节点继续持有的价值为

$P_{0,con} = \exp\left(-r\Delta t\right)\left(p\left(P_{1u} + C_1\right) + \left(1 - p\right)\left(P_{1d} + C_1\right)\right)$，（17）

其中，$P_{0,con}, P_{1u}, P_{1d}$ 分别为衍生品在 0 时刻继续持有的价格，在 1 时刻上节点的不包含票息价格，在 1 时刻下节点的不包含票息的价格。C_1 为 1 时刻的券息（coupon）。

而在该节点，可转债的发行人可能有赎回（call）债权的选项，记赎回价格为 P_c，可转债持有人可能有赎回（put）债权的选项，记赎回价格为 P_p，可转债持有人可能有将债权转换成 C_r 股股票的权利，假设可转债发行人的目的是使得可转债价值最小，持有人的目的是使得可转债价值最大，则 0 时刻的可转债价值为

$$P_0 = \begin{cases} \max\left(P_p, P_c, C_r S_0\right) if\ P_{0,con} \ge P_c \\ \max\left(P_p, P_{0,con}, C_r S_0\right) if\ P_{0,con} < P_c \end{cases}$$（18）。

而（17）式中的 P_{1u}, P_{1d} 可以用同样的方式用后面的数据计算。

股息率

一种考虑股息率的方式是引入连续股息率 q ，类似于 r ，是个增长率的概念，则（11）式和（12）式分别变为

$$dS_t = S_t\left(r-q\right)dt + S_t\sigma dW$$（19），

$$d\ln\left(S_t\right) = \left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW$$（20）。

（16）式中的 u,d 不变， p 发生变化

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right), \\ d &= \exp\left(-\sigma\sqrt{\Delta t}\right), \\ p &= \frac{\exp\left(\left(r-q\right)\Delta t\right)-d}{u-d} \end{aligned}$$（21）。

注意，这时 S_t 不复权价格， σ 为复权价格对应的波动率。

这是一种最简单的考虑股息率的方式，还有更复杂的，以后再调研。

违约率

引入违约强度（default intensity，hazard rate）λ（参数违约强度的估计需要调研），则（19）式和（20）式分别变为

$$dS_t = S_t\left(r+\lambda-q\right)dt + S_t\sigma dW$$（22），

$$d\ln\left(S_t\right) = \left(r+\lambda-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW$$（23）。

（21）式中的 u,d 不变， p 发生变化

$$u=\exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right),$$
$$d=\exp\left(-\sigma\sqrt{\Delta t}\right), \qquad (24)。$$
$$p=\frac{\exp\left(\left(r+\lambda-q\right)\Delta t\right)-d}{u-d}$$

此时的 p 为条件在 t 到 $t+1$ 时刻间不违约，取上节点的概率，而从 t 到 $t+1$ 时刻间违约的概率为

$$p_{def}=1-\exp\left(-\lambda\Delta t\right) \quad (25),$$

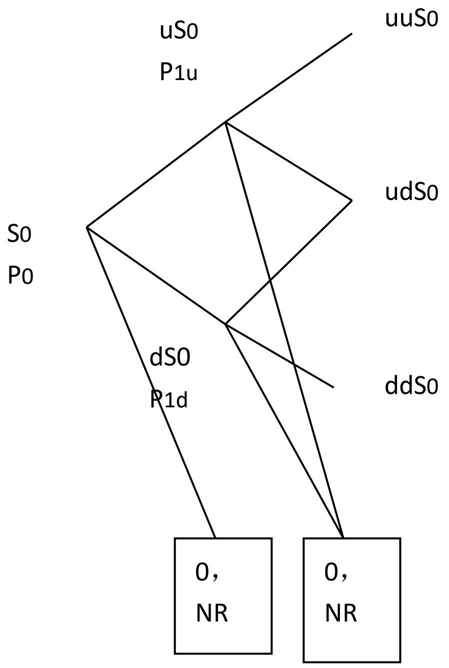
所以，t 到 $t+1$ 时刻间取上节点，取下节点，取违约节点的概率分别为

$$p_u=\left(1-p_{def}\right)p, p_d=\left(1-p_{def}\right)\left(1-p\right), p_{def} \quad (26)。$$

此时二叉树如图 3。其中 N 表示可转债的本金面值，R 表示违约后的恢复率（recovery rate）。在这种情况下，衍生品的价格很好计算，例如，图 3 中，

S_0 对应的节点处，在该节点继续持有的价值为

$$P_{0,con}=\exp\left(-r\Delta t\right)\left(p_u\left(P_{1u}+C_1\right)+p_d\left(P_{1d}+C_1\right)+p_{def}NR\right), \quad (27)$$



图表 3 违约二叉树

而（18）式不变。

5) 蒙特卡罗法

二叉树的缺点

二叉树方法（晶格方法）一个特点是为了减少计算量，二叉树具有 recombine 的性质。即 t 时刻的股票价格由 0 时刻到 t 时刻出现的 up 数决定，且是相乘关系，即

$S_t = u^a d^{t/\Delta t - a} S_0$（28）。

这样做的好处是随着期数的增加，最终的节点个数线性增加，而不是指数增加。recombine 表现在图 2 中，对于时刻 2 的中间节点，有 2 条路径都可以到达它。
可转债的债务人赎回条款，经常会包含当股票价格在最近几个月之内几次超越某一阈值才可以赎回的条款（soft call）。对于这种条款的处理，需要将这 2 条历史路径分开，因为有一条可能符合该条款有一条不符合，从而两条路径在时刻 2 中间节点上债务人是否可以赎回的判断结果是不一样的。

另外，二叉树中不确定的变量（需要一个随机过程来模拟）只有股票价格这一个变量，而现实中不确定的变量有很多，比如波动率，短期利率。处理这样的问题，二叉树就困难了。

蒙特卡罗原理

对于（10）式，假设利率是恒定的，则有

$S(t) = E^*\left[\sum_{k=t+1}^{T} \frac{x(k)}{(1+r)^{k-t}} \middle| F_t\right]$（28），

如果对这几个不确定变量的随机过程建模，然后根据该模型抽取 N 次历史序列（path），然后对每一次历史序列下的资产的现金流做折现，然后求这 N 个折现值的平均值就得到了该资产的价格。可以看到蒙特卡罗是能处理二叉树方法的两个缺点的。

具体原理

假设不确定的只有股票价格，我们对股票价格用（12）式建模。我们将时间分为 $t_0, t_1, \ldots, t_K$，相邻两个时间点间隔 Δt。则

$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon, \varepsilon \sim N(0,1)$（29）。

我们每次模拟独立抽取 K 次 ε，则就可以得到该次的股票价格路径。我们总共模拟 N 次。可转债的价格在 t_0 时刻等于（18）式，（18）式中在 t_0 时刻未知的是 $P_{0,con}$，即在 t_0 时刻继续持有的价值。该价值可以通过计算每条路径的在 $t_1, \ldots, t_K$ 时刻的现金流，将这些现金流折现，然后 N 条路径求均值。对于路径 i，$t_1, \ldots, t_K$ 的现金流怎么得到？如果我们知道该条路

径上，t_1时刻的继续持有价值$P^i{}_{1,con}$，根据（18）式，如果$P^i{}_{t_1,con} \ge C_r S^i_{t_1}$（为了叙述方便，忽略赎回选项），则在$t_1$最优选择是转化成股票，所以路径$i$的现金流为

t_1	t_2	$\cdots$	t_K
$C_r S^i_{t_1}$	0	$\cdots$	0

；如果$P^i{}_{t_1,con} < C_r S^i_{t_1}$，则在$t_1$时刻继续持有，所以$t_1$时刻的现金流为 0，但是还需要确定$t_2,\ldots,t_K$时刻的现金流。如何确定$t_2,\ldots,t_K$的现金流，类似的，如果我们知道$t_2$时刻的继续持有价值$P^i{}_{1,con}$，则可以根据上面的方式类推。…直到倒数第二个时刻$t_{K-1}$，如果$P^i{}_{t_{K-1},con} \ge C_r S^i_{K-1}$，则在$t_{K-1}$最优选择是转化成股票，所以路径$i$的现金流为

t_1	$\cdots$	t_{K-1}	t_K
0	0	$C_r S^i_{K-1}$	0

；如果$P^i{}_{t_{K-1},con} < C_r S^i_{t_{K-1}}$，则在$t_{K-1}$时刻继续持有，此时路径$i$的现金流为

t_1	$\cdots$	t_{K-1}	t_K
0	0	0	$\max\left(N + C_{t_K}, C_r S^i_{t_K}\right)$

。

这样就确定了从$t_1,\ldots,t_K$的现金流。

上面的说法假设我们知道每个时刻的继续持有价值$P^i{}_{t,con}$，但是现实情况是我们不知道。这就是蒙特卡罗方法面对美式期权时的问题。解决该问题最常用的方法是 Longstaff and Schwarts（2001）提出的最小二乘算法（LSM，Least Square Monte Carlo）。

LSM 的做法的原理是（28）式，由于t时刻继续持有可转债也是一个资产，所以将（28）式的左边可以看做继续持有可转债的价值，如果记

$Y_t = \sum_{k=t+1}^{T} \frac{x(k)}{(1+r)^{k-t}}$（30），

则（28）式为

$P_{t,con} = E^*\left[Y_t \middle| F_t\right] = f\left(F_t\right)$（31），

则

$Y_t = f\left(F_t\right) + u_t$（32），其中 $E\left(u_t \middle| F_t\right) = 0$，如果我们的系统中的不确定的来源只有股价，则

$Y_t = f\left(S_t\right) + u_t$（33），用多项式近似可得

$Y_t \approx a_0 + a_1 S_t + a_2 S_t^{\ 2} + a_3 S_t^{\ 3} + u_t$（34）。

从倒数第二期开始，我们对每条路径计算 t_{K-1} 继续持有的现值

$Y^i_{\ t_{K-1}} = \exp\left(-r\Delta t\right)\max\left(N + C_{t_K}, C_r S^i_{t_K}\right)$（35），

然后用 $Y^i_{\ t_{K-1}}$ 对 $S^i_{\ t_{K-1}}$ 根据（34）式做回归，估计系数 a_0, a_1, a_2, a_3。

这样我们就得到了

$P^i_{\ t_{K-1},con} = a_0 + a_1 S^i_{\ t_{K-1}} + a_2 S^i_{\ t_{K-1}}{}^2 + a_3 S^i_{\ t_{K-1}}{}^3$（36）。

根据 $P^i_{\ t_{K-1},con}$ 与 $C_r S^i_{t_{K-1}}$ 的大小关系，我们就知道路径 i 上 t_{K-1} 时刻最优是转化还是继续持有。 从而我们就可以得到对于路径 i，如果在 t_{K-2} 时刻选择继续持有，则其在 t_{K-1}, t_K 时刻的现金流。 如果 $P^i_{\ t_{K-1},con} \geq C_r S^i_{t_{K-1}}$，$t_{K-1}, t_K$ 时刻的现金流 $CF^i_{\ t_{K-1}}, CF^i_{\ t_K}$ 分别为 $0, \max\left(N + C_{t_K}, C_r S^i_{t_K}\right)$；反之，$t_{K-1}, t_K$ 时刻的现金流 $CF^i_{\ t_{K-1}}, CF^i_{\ t_K}$ 分别为 $C_r S^i_{t_{K-1}}, 0$。

有了 t_{K-1}, t_K 时刻的现金流，我们就可以计算 t_{K-2} 时刻继续持有的现值 $Y^i_{\ t_{K-2}} = \sum_{h=1}^{2} \exp\left(-r\Delta t\right) CF_{t_{K-2+h}}$（37），用 $Y^i_{\ t_{K-2}}$ 对 $S^i_{\ t_{K-2}}$ 根据（34）式做回归估计系数 a_0, a_1, a_2, a_3。这样我们就得到了

$P^i_{\ t_{K-2},con} = a_0 + a_1 S^i_{\ t_{K-2}} + a_2 S^i_{\ t_{K-2}}{}^2 + a_3 S^i_{\ t_{K-2}}{}^3$（37）。

根据 $P^i_{\ t_{K-2},con}$ 与 $C_r S^i_{t_{K-2}}$ 的大小关系，我们就知道路径 i 上 t_{K-2} 时刻最优是转化还是继续持有。 从而我们就可以得到对于路径 i，如果在 t_{K-3} 时刻选择继续持有，则其在 t_{K-2}, t_{K-1}, t_K 时刻的现金流。如果 $P^i_{\ t_{K-2},con} \geq C_r S^i_{t_{K-2}}$，$t_{K-2}, t_{K-1}, t_K$ 时刻的现金流 $CF^i_{\ t_{K-2}}, CF^i_{\ t_{K-1}}, CF^i_{\ t_K}$ 分别为 $0, CF^i_{\ t_{K-1}}\left(prev\right), CF^i_{\ t_K}\left(prev\right)$，$prev$ 表示前一步确定的值；反之，t_{K-1}, t_K 时刻的现金流 $CF^i_{\ t_{K-2}}, CF^i_{\ t_{K-1}}, CF^i_{\ t_K}$ 分别为 $C_r S^i_{t_{K-2}}, 0, 0$。

以此类推，就可以得到路径 i 上如果在 t_0 时刻选择继续持有，则其在 $t_1, \ldots, t_K$ 时刻的现

金流$CF^i_{t_1},...,CF^i_{t_K}$。从而得到

在t_0时刻选择继续持有的价值

$$P_{0,con}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{t=t_1}^{t_K}\exp\left(-rt\right)CF_t^i\right)\text{（38）。}$$

从而，t_0时刻的可转债价值为（18）式。

违约情况

我们只考虑违约率恒定的情况，违约率变化的情况目前调研的文献讲得不够清楚。

对于（23）式根据（29）式的方式抽取 N 条路径（path），即根据

$$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)=\left(r+\lambda-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon,\varepsilon\sim N\left(0,1\right)\text{（39）}$$

抽样。

从倒数第二期开始，我们对每条路径计算t_{K-1}继续持有的现值，

$$Y^i_{t_{K-1}}=\exp\left(-r\Delta t\right)\left(\exp\left(-\lambda\Delta t\right)\max\left(N+C_{t_K},C_rS^i_{t_K}\right)+\left(1-\exp\left(-\lambda\Delta t\right)\right)NR\right)\text{（40），}$$

该式与（35）式的区别是先对t_K时刻的现金流按违约率加权再折现，其中$\exp\left(-\lambda\Delta t\right)$是$t_{K-1}$到$t_K$期间不违约的概率。

然后用$Y^i_{t_{K-1}}$对$S^i_{t_{K-1}}$根据（34）式做回归，估计系数a_0,a_1,a_2,a_3。

这样我们就得到了$P^i_{t_{K-1},con}$。

根据$P^i_{t_{K-1},con}$与 $C_rS^i_{t_{K-1}}$的大小关系，我们就知道路径i上t_{K-1}时刻最优是转化还是继续持有。

从而我们就可以得到对于路径i，如果在t_{K-2}时刻选择继续持有，其在t_{K-1},t_K不违约，则其在t_{K-1},t_K时刻的现金流。 如果$P^i_{t_{K-1},con}\geq C_rS^i_{t_{K-1}}$， t_{K-1},t_K时刻的现金流$CF^i_{t_{K-1}},CF^i_{t_K}$分别为$0,\max\left(N+C_{t_K},C_rS^i_{t_K}\right)$；反之， t_{K-1},t_K时刻的现金流$CF^i_{t_{K-1}},CF^i_{t_K}$分别为$C_rS^i_{t_{K-1}},0$。

有了在t_{K-1},t_K不违约的情况下t_{K-1},t_K时刻的现金流，我们就可以计算t_{K-2}时刻继续持有的现值

$$\begin{aligned}Y^i_{t_{K-2}} = & p_{def,t_{K-2},t_{K-1}} \exp(-r\Delta t) NR + \\ & p_{def,t_{K-2},t_K} \left(\exp(-r\Delta t) CF^i_{t_{K-1}} + \exp(-r2\Delta t) NR\right) + \\ & \left(1 - p_{def,t_{K-2},t_{K-1}} - p_{def,t_{K-2},t_K}\right)\left(\exp(-r\Delta t) CF^i_{t_{K-1}} + \exp(-r2\Delta t) CF^i_{t_K}\right)\end{aligned} \quad (41),$$

（41）式与（37）式的区别是考虑了的在 t_{K-1}, t_K 违约的情况，其中 $p_{def,t_{K-2},t_{K-1}}$ 表示在 t_{K-2} 到 t_{K-1} 之间违约的概率，为 $1-\exp(-\lambda\Delta t)$，p_{def,t_{K-2},t_K} 示在 t_{K-2} 到 t_{K-1} 之间不违约，在 t_{K-1} 到 t_K 之间违约的概率，为 $\exp(-\lambda\Delta t)(1-\exp(-\lambda\Delta t))$。

用 $Y^i_{t_{K-2}}$ 对 $S^i_{t_{K-2}}$ 根据（34）式做回归估计系数 a_0, a_1, a_2, a_3。这样我们就得到了 $P^i_{t_{K-2},con}$。

根据 $P^i_{t_{K-2},con}$ 与 $C_r S^i_{t_{K-2}}$ 的大小关系，我们就知道路径 i 上 t_{K-2} 时刻最优是转化还是继续持有。 从而我们就可以得到对于路径 i，如果在 t_{K-3} 时刻选择继续持有，且在 t_{K-2}, t_{K-1}, t_K 不违约，其在 t_{K-2}, t_{K-1}, t_K 时刻的现金流。 如果 $P^i_{t_{K-2},con} \ge C_r S^i_{t_{K-2}}$，$t_{K-2}, t_{K-1}, t_K$ 时刻的现金流 $CF^i_{t_{K-2}}, CF^i_{t_{K-1}}, CF^i_{t_K}$ 分别为 $0, CF^i_{t_{K-1}}(prev), CF^i_{t_K}(prev)$，$prev$ 表示前一步确定的值；反之，t_{K-1}, t_K 时刻的现金流 $CF^i_{t_{K-2}}, CF^i_{t_{K-1}}, CF^i_{t_K}$ 分别为 $C_r S^i_{t_{K-2}}, 0, 0$。

以此类推，就可以得到路径 i 上如果在 t_0 时刻选择继续持有，且在 $t_1, ..., t_K$ 不违约，其在 $t_1, ..., t_K$ 时刻的现金流 $CF^i_{t_1}, ..., CF^i_{t_K}$。从而得到

在 t_0 时刻选择继续持有的价值

$$P_{0,con} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\begin{array}{l} p_{def,t_0,t_1} \exp(-r\Delta t) NR + \\ p_{def,t_0,t_2}\left(\exp(-r\Delta t) CF^i_{t_1} + \exp(-r2\Delta t) NR\right) + \\ p_{def,t_0,t_3}\left(\exp(-r\Delta t) CF^i_{t_1} + \exp(-r2\Delta t) CF^i_{t_2} + \exp(-r3\Delta t) NR\right) + \\ \cdots \\ + \\ \left(1 - \sum_{h=1}^{K-1} p_{def,t_0,t_h}\right)\sum_{t=t_1}^{t_K} \exp(-rt) CF^i_t \end{array}\right) \quad (42)。$$

其中，p_{def,t_0,t_h} 表示在 0 到 t_{h-1} 期间不违约，在 t_{h-1} 到 t_h 间违约的概率，为 $\exp(-\lambda\Delta t)^{h-1}(1-\exp(-\lambda\Delta t))$。

从而，t_0 时刻的可转债价值为（18）式。

考虑赎回（call）和回售（put）

上面为了，描述简单，只考虑了在某个时刻只有转化的选项，现实中还可能存在可转债发行人赎回和持有人回售的选项。考虑这两种选项，需要作出的调整很简单，在每个时间点判断该点的最优决策时，类似于（18）式，有

$$\begin{cases} \max\left(P_p, P_c, C_r S_t\right) if\ P_{t,con} \geq P_c \\ \max\left(P_p, P_{t,con}, C_r S_t\right) if\ P_{t,con} < P_c \end{cases}$$（43），

即，如果该点$P_{t,con} \geq P_c$，则发行人最优选择是赎回，而持有人会在回售，赎回和转股 3 个选项中选择最优的；如果$P_{t,con} < P_c$，则发行人最优选择是不赎回，而持有人会在回售，继续持有和转股之间选择最优的。只要该点的选项不是继续持有，则从该点起往后的现金流为：该点为该最优选项对应的现金流，往后为 0；如果该点的选项是继续持有，则该点起往后的现金流为：该点的现金流为 0，往后的现金流为前一步确定的现金流。

考虑多个随机过程

前面假设状态变量只有股票价格，LSM 很容易扩展到多个状态变量的情况。例如额外增加一个状态变量，如股票波动率，则除了对股价的随机过程建模，还需对波动率的随机过程建模，例如

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t r dt + S_t \sqrt{v_t} dW_S \\ dv_t &= \alpha\left(b - v_t\right) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_v \end{aligned}$$（44）

然后通过（44）式抽取 N 个路径。每条路径的计算方式同上所述，唯一的差别是，这时候状态变量不只有S_t，还有v_t，所以，（33）式变为

$Y_t = f\left(S_t, v_t\right) + u_t$（45），用多项式近似可得

$Y_t \approx a_0 + a_1 S_t + a_2 {S_t}^2 + a_3 {S_t}^3 + b_1 v_t + b_2 {v_t}^2 + b_3 {v_t}^3 + c_1 v_t S_t + c_2 v_t {S^2}_t + c_3 {v^2}_t S_t + u_t$（46）。

上述（44）中的α, b, η这些参数需要用股票期权数据去估计，需要调研。

以此类推，如果还有其他状态变量，如短期无风险利率，都可以按照上面的方式操作。

借助上面的框架，还有一种考虑违约的框架是

$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW - dN$（47），

其中，dN是一个泊松过程，$dN = 1$的概率是λdt，通过（47）式抽取路径，得到价格就是已经包含违约情况的路径；而之前的考虑违约的方法抽取的路径是不违约情况的路径，再对于该路径考虑违约和不违约的情况，显然前一种在概念上是更清晰的，但是具体的操作细节没有讲到，需要对用泊松过程表示违约该建模方式做调研。

3. 可转债策略

投机与对冲（speculate and hedge）

我们假设现实世界不确定的变量有股票价格，短期利率，股票波动率，违约率，则可转债的价格为

$P_t = f\left(S_t, r_t, \sigma_t, \lambda_t\right)$（48），

我们在 t 到 $t+1$ 时刻之间持有一份该可转债的绝对收益为

$P_{t+1} - P_t = f\left(S_{t+1}, r_{t+1}, \sigma_{t+1}, \lambda_{t+1}\right) - f\left(S_t, r_t, \sigma_t, \lambda_t\right)$（49），

将 $f\left(S_{t+1}, r_{t+1}, \sigma_{t+1}, \lambda_{t+1}\right)$ 在 $\left(S_t, r_t, \sigma_t, \lambda_t\right)$ 处做二阶泰勒展开（简单起见忽略二阶导数的交叉项），

$$
\begin{aligned}
P_{t+1} - P_t \approx & \frac{\delta P}{\delta S}\left(S_{t+1} - S_t\right) + \frac{\delta P}{\delta r}\left(r_{t+1} - r_t\right) + \frac{\delta P}{\delta \sigma}\left(\sigma_{t+1} - \sigma_t\right) + \frac{\delta P}{\delta \lambda}\left(\lambda_{t+1} - \lambda_t\right) \\
& + \frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta S^2}\left(S_{t+1} - S_t\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta r^2}\left(r_{t+1} - r_t\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta \sigma^2}\left(\sigma_{t+1} - \sigma_t\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta \lambda^2}\left(\lambda_{t+1} - \lambda_t\right)^2
\end{aligned}
$$

（50）。

站在 t 时刻，$\frac{\delta P}{\delta S}, \frac{\delta P}{\delta r}, \frac{\delta P}{\delta \sigma}, \frac{\delta P}{\delta \lambda}, \frac{\delta P}{\delta S^2}, \frac{\delta P}{\delta r^2}, \frac{\delta P}{\delta \sigma^2}, \frac{\delta P}{\delta \lambda^2}$ 是已知的，该笔投资的的风险有 $\left(S_{t+1} - S_t\right), \left(r_{t+1} - r_t\right), \left(\sigma_{t+1} - \sigma_t\right), \left(\lambda_{t+1} - \lambda_t\right)$，如果我们对这 4 项任何一项有预测，则可构造组合，使得在有预测的项上做暴露，在没有预测的向上面不做暴露，比如，我们对 $S_{t+1} - S_t$ 有正的预测（speculate），在其他 3 项上没有预测，则买多可转债，其他三项上的暴露可以分别通过利率期货，该股票的期权，该公司的 CDS 来对冲掉（hedge）。如果不考虑二次项，则我们的组合的利润为

$\left(P_{t+1} - P_t\right) - \frac{\delta P}{\delta r}\left(r_{t+1} - r_t\right) - \frac{\delta P}{\delta \sigma}\left(\sigma_{t+1} - \sigma_t\right) - \frac{\delta P}{\delta \lambda}\left(\lambda_{t+1} - \lambda_t\right) = \frac{\delta P}{\delta S}\left(S_{t+1} - S_t\right)$（51）。

delta 对冲与 gamma trading

假设（50）式的不确定只有股价，则（50）简化为

$P_{t+1} - P_t \approx \frac{\delta P}{\delta S}\left(S_{t+1} - S_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta S^2}\left(S_{t+1} - S_t\right)^2$（52），

可以看到，就算我们对 $\left(S_{t+1} - S_t\right)$ 没有预测，我们也可以构造组合只对 $\left(S_{t+1} - S_t\right)^2$ 做暴露来

赚钱，$\left(S_{t+1}-S_t\right)^2$ 虽然也是个随机变量，但是它的符号始终为非负。所以，如果我们买多一只可转债，卖空 $\frac{\delta P}{\delta S}$ 只股票（delta hedge），如果 $\frac{\delta P}{\delta S^2}$（gamma）为正，那我们的组合在 t 到 $t+1$ 期间的利润为

$$\left(P_{t+1}-P_t\right)-\frac{\delta P}{\delta S}\left(S_{t+1}-S_t\right)=\frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta S^2}\left(S_{t+1}-S_t\right)^2 \quad (53)。$$

对（53）两边求期望，得到

$$E\left[\left(P_{t+1}-P_t\right)-\frac{\delta P}{\delta S}\left(S_{t+1}-S_t\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta S^2}E\left(S_{t+1}-S_t\right)^2 \quad (54)，$$

而 $E\left(S_{t+1}-S_t\right)^2$ 可以近似看做股票的波动率的平方，所以如果 $\frac{\delta P}{\delta S^2}$ 为正，则下期股票波动率越大，该组合的期望利润越大。

组合 delta 对冲？

现实交易的可转债对应的股票可能不能卖空。有一种方式是做多一个可转债组合，做空该可转债对应股票的一个组合。我们看看该操作的数学推导。

对于（52）式，两边除以 P_t 转化成收益率形式，

$$\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}\approx\frac{\delta P}{\delta S}\frac{S_t}{P_t}\frac{\left(S_{t+1}-S_t\right)}{S_t}+\frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta S^2}\frac{S_t^2}{P_t}\frac{\left(S_{t+1}-S_t\right)^2}{S_t^2}+\frac{\delta P}{\delta\sigma}\frac{\sigma_t}{P_t}\frac{\left(\sigma_{t+1}-\sigma_t\right)}{\sigma_t} \quad (55)$$

定义

$a=\frac{\delta P}{\delta S}\frac{S_t}{P_t},b=\frac{1}{2}\frac{\delta P}{\delta S^2}\frac{S_t^2}{P_t},d=\frac{\delta P}{\delta\sigma}\frac{\sigma_t}{P_t},r_c=\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t},r=\frac{\left(S_{t+1}-S_t\right)}{S_t},v=\frac{\left(\sigma_{t+1}-\sigma_t\right)}{\sigma_t}$，加入下标 i 表示第 i 个股票或第 i 个可转债，则

$$r_{ic}=a_ir_i+b_ir_i^2+d_iv_i \quad (56)，$$

而我们假设股票收益率 r_i 可以写成

$r_i=\left(1-\beta_i\right)r_f+\beta_ir_M+u_i$（57），代入（56）式，得到

$$\begin{aligned}r_{ic}&=a_i\left(\left(1-\beta_i\right)r_f+\beta_ir_M+u_i\right)+b_i\left(\left(1-\beta_i\right)r_f+\beta_ir_M+u_i\right)^2+d_iv_i\\&=a_i\left(1-\beta_i\right)r_f+b_i\left(1-\beta_i\right)^2r_f^{\,2}+a_i\beta_ir_M+b_i\beta^2{}_ir^2{}_M+a_iu_i+b_iu_i^2\\&\quad+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\beta_ir_M+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_fu_i+2b_i\beta_ir_Mu_i\\&\quad+d_iv_i\end{aligned} \quad (58)$$

根据（58）式，假设 a_i,b_i（正常情况下是正的）为正，假设我们有 N 个可转债，假设我们构造的多头可转债的权重为

$$w_1,...,w_N,\sum_{i=1}^{N}w_i=1,w_i>0,$$

则我们的多头组合收益率为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}w_ir_{ic}=&\left(\sum_{i=1}^{N}w_ia_i\left(1-\beta_i\right)\right)r_f+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\left(1-\beta_i\right)^2\right)r_f^{\ 2}+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ia_i\beta_i\right)r_M+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\beta^2{}_i\right)r^2{}_M\\&+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ia_iu_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_iu_i^{\ 2}\right)\\&+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\beta_ir_M\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i2b_i\left(1-\beta_i\right)r_fu_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i2b_i\beta_ir_Mu_i\right)\\&+\left(\sum_{i=1}^{N}w_id_iv_i\right)\\=&\left(\sum_{i=1}^{N}w_ia_i\left(1-\beta_i\right)\right)r_f+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\left(1-\beta_i\right)^2\right)r_f^{\ 2}+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\left(a_i\beta_i+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\beta_i\right)\right)r_M+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\beta^2{}_i\right)r^2{}_M\\&+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\left(a_i+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\right)u_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_iu_i^{\ 2}\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i2b_i\beta_ir_Mu_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}w_id_iv_i\right)\end{aligned}\tag{59}$$

如果我们的目标是期望收益率最大，

$$\begin{aligned}E\sum_{i=1}^{N}w_ir_{ic}=&\left(\sum_{i=1}^{N}w_ia_i\left(1-\beta_i\right)\right)r_f+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\left(1-\beta_i\right)^2\right)r_f^{\ 2}+\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\left(a_i\beta_i+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\beta_i\right)\right)Er_M\\&+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\beta^2{}_i\right)Er^2{}_M+E\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\left(a_i+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\right)u_i\right)+E\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_iu_i^{\ 2}\right)+E\left(\sum_{i=1}^{N}w_i2b_i\beta_ir_Mu_i\right)\\&+\left(\sum_{i=1}^{N}w_id_iEv_i\right)\end{aligned}\tag{60}$$

我 们 对 Er_M 没 有 预 测 ， 这 部 分 暴 露 可 以 用 股 指 期 货 对 冲 ， 而 对 于 $E\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\left(a_i+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\right)u_i\right)$，我们预期残差收益率为 0，则其也为 0，我们也假设 $E\left(r_Mu_i\right)=0$，所以我们的目标是

$$\begin{aligned}&\max\left(\sum_{i=1}^{N}w_ia_i\left(1-\beta_i\right)\right)r_f+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\left(1-\beta_i\right)^2\right)r_f^{\ 2}+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_i\beta^2{}_i\right)Er^2{}_M+\left(\sum_{i=1}^{N}w_ib_iEu_i^{\ 2}\right)\\&s.t\ \ w_i>0,\\&\quad\sum_{i=1}^{N}w_i=1,\\&\quad Var\left(\sum_{i=1}^{N}w_i\left(a_i+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\right)u_i\right)\le\sigma_{cr}^{\ 2}\end{aligned}$$

（61），

其中第 3 个约束的目的是使得 $\sum_{i=1}^{N}w_i\left(a_i+2b_i\left(1-\beta_i\right)r_f\right)u_i$ 的方差尽量小。

从（61）式可以看出，组合 delta 对冲能够使我们做多市场的波动率和个股残差的波动率。市场波动率可以通过股指的期权来做多，但是个股残差的波动率，由于目前可能不存在个股的期权，所以通过这种方式做多个股的（残差）波动率，确实是一个好途径。