Barra 风险模型(USE3,USE4)

1. 为什么使用 Barra 模型

1.1 从一堆资产中选择一个资产组合，一般来说，选定的资产组合要满足，在同样的期望收益率下，方差最小。

用i 表示第i 个资产，$i=1,2,...,N$

r_{it} 表示第i 个资产在第t 期的收益率，即t时刻 到$t+1$时刻的收益率，

记$\mathbf{r}_t=(r_{1t},r_{2t},...,r_{Nt})'$ ，

记

$$Var_t(\mathbf{r}_t)=\begin{bmatrix} Var_t(r_{1t}) & Cov_t(r_{1t},r_{2t}) & \cdots & Cov_t(r_{1t},r_{Nt}) \\ Cov_t(r_{2t},r_{1t}) & Var_t(r_{2t}) & \cdots & Cov_t(r_{2t},r_{Nt}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov_t(r_{Nt},r_{1t}) & Cov_t(r_{Nt},r_{2t}) & \cdots & Var_t(r_{Nt}) \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

，$Var_t(\mathbf{r}_t)$表示$\mathbf{r}_t$条件在t 时刻信息的方差协方差(variance-covariance)矩阵，其中$Var_t(r_{it})$表示r_{it}条件在t 时刻信息的方差，$Cov_t(r_{it},r_{jt})$表示r_{it}和r_{jt}条件在t 时刻信息的协方差。

记

$$\mathbf{E_t(r_t)}=(E_t(r_{1t}),E_t(r_{1t}),...,E_t(r_{Nt}))' \tag{1.2}$$

，表示 $\mathbf{r}_t$条件在t 时刻信息的期望，其中，$E_t(r_{it})$表示r_{it}条件在t 时刻信息的期望。

问题：

$$\begin{aligned} &\max E_t(\mathbf{a}'\mathbf{r}_t) \\ &s.t. Var_t(\mathbf{a}'\mathbf{r}_t)=c \\ &and \sum_{i=1}^{N} a_i=1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中，$\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_N)'$，$c$为一个给定的常数，且$\sum_{i=1}^{N} a_i=1$.

要解决上面的问题，必须知道$Var_t(\mathbf{r}_t)$，其他金融相关的问题，也必须知道$Var_t(\mathbf{r}_t)$。

假设

$$\mathbf{E_t}(\mathbf{r_t}) = \mathbf{E}(\mathbf{r_t}) \tag{1.4}$$

$$Var_t(\mathbf{r}_t) = Var(\mathbf{r}_t) \tag{1.5}$$

即条件期望等于无条件期望，条件方差等于无条件方差。

当N 相对于T 很小，可以用如下公式(1.7)和(1.8)来估计无条件方差

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it} \tag{1.6}$$

$$Var(r_{it}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \bar{r}_i)^2 \tag{1.7}$$

$$Cov(r_{it}, r_{jt}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j) \tag{1.8}$$

,其中$\hat{}$ 符号表示估计量，以表示与总体值得区别。但是，当N很大时，首先，上面上面的估计会不准，其次，计算量也大，比如，如果有N个资产，由于$Var(\mathbf{r}_t)$是对称矩阵，所以需要计算$0.5N(N+1)$ 个该矩阵的元素。当$N = 2000$ 时，大约需要计算 200 万个元素。所以得另想办法计算$Var(\mathbf{r}_t)$。

1.2 1.2.1 CAPM

任一资产t 期超额回报率 $r_{it} - r_{ft}$ 可以表示成

$$r_{it} - r_{ft} = \beta_t(r_{mt} - r_{ft}) + u_{it} \tag{1.9}$$

其中r_{ft}为无风险资产在t期的回报率，r_{mt}为市场加权资产的回报率，u_{it}为与$r_{mt} - r_{ft}$不相关的残差项。值得注意的是u_{it}只是与$r_{mt} - r_{ft}$不相关，但是不同资产的u_{it}是可以相关的。

CAPM 表示$E_t(u_{it}) = 0$ 。

1.2.2 多因子模型（MFM）

Rosenberg 将u_{it}进一步拆分成多个因子，认为某个资产的超额回报率是由多个共同因子（common factor）和特质因子（specific factor）驱动的：

$$r_{it}-r_{ft}=x_{i1t}f_{1t}+x_{i2t}f_{2t}+\ldots+x_{iKt}f_{Kt}+\varepsilon_{it} \qquad (1.10)$$

其中，$f_{kt},k=1,2,\ldots,K$ 称为第k 个共同因子在t 期的回报率，因为该理论认为同一时期上，每个资产的超额回报率都受到这些因子的驱动，$x_{ikt},k=1,2,\ldots,K$ 分别为该资产在对应因子上的暴露（exposure）。注意在 t 时刻，x_{ikt}是已知的，而f_{kt}和ε_{it}是未知的。ε_{it}称为特质因子，是因为该理论认为，不能再从ε_{it}中分解出共同因子，也就是说，ε_{it}和ε_{jt}里面不再包含共同的成分，ε_{it}和ε_{jt}不相关，即

$$E_t(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt})=0 \qquad (1.11)$$

。另外，ε_{it}是与f_{kt}不相关的,即

$E_t(\varepsilon_{it}f_{kt})=0$ (1.12)。

1.3 Barra

受多因子模型启发，计算(1.1)中的$Var_t(\mathbf{r}_t)$有了新的方法。如下：

根据(1.10)，对于某一时期t ，写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r_{1t}-r_{ft} \\ r_{2t}-r_{ft} \\ \vdots \\ r_{Nt}-r_{ft} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11t} & x_{12t} & \cdots & x_{1Kt} \\ x_{21t} & x_{22t} & \cdots & x_{2Kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1t} & x_{N2t} & \cdots & x_{NKt} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{1t} \\ f_{2t} \\ \vdots \\ f_{Kt} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Nt} \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

即

$$\mathbf{r}_\mathbf{t}^\mathbf{e}=\mathbf{X}_\mathbf{t}\mathbf{f}_\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t} \qquad (1.14)$$

其中，

$$\mathbf{r}_\mathbf{t}^\mathbf{e}=\begin{bmatrix} r_{1t}-r_{ft} \\ r_{2t}-r_{ft} \\ \vdots \\ r_{Nt}-r_{ft} \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}_\mathbf{t}=\begin{bmatrix} x_{11t} & x_{12t} & \cdots & x_{1Kt} \\ x_{21t} & x_{22t} & \cdots & x_{2Kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1t} & x_{N2t} & \cdots & x_{NKt} \end{bmatrix},\quad \mathbf{f}_\mathbf{t}=\begin{bmatrix} f_{1t} \\ f_{2t} \\ \vdots \\ f_{Kt} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Nt} \end{bmatrix}$$

。

在t 时刻，如果知道

$$\mathbf{Var_t(\varepsilon_t)} = \begin{bmatrix} Var_t(\varepsilon_{1t}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Var_t(\varepsilon_{2t}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & Var_t(\varepsilon_{Nt}) \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

，且知道

$$\mathbf{Var_t(f_t)} = \begin{bmatrix} Var_t(f_{1t}) & Cov_t(f_{1t}, f_{2t}) & \cdots & Cov_t(f_{1t}, f_{Nt}) \\ Cov_t(f_{2t}, f_{1t}) & Var_t(f_{2t}) & \cdots & Cov_t(f_{2t}, f_{Nt}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov_t(f_{Nt}, f_{1t}) & Cov_t(f_{Nt}, f_{2t}) & \cdots & Var_t(f_{Nt}) \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

,则

$$\mathbf{Var_t(r_t) = Var_t(r_t^e) = X_t Var_t(f_t) X_t' + Var_t(\varepsilon_t)} \tag{1.17}$$

之前，在 1.1 中说过，在N 很大的情况下，用历史的$\mathbf{r}_t$，直接用公式(1.7)和(1.8)估计$Var(\mathbf{r}_t)$，会有各种问题。但是如果用了多因子模型，我们需要估计$\mathbf{Var_t(f_t)}$和$\mathbf{Var_t(\varepsilon_t)}$，同样假设条件方差等于无条件方差，则需要估计$\mathbf{Var(f_t)}$和$\mathbf{Var(\varepsilon_t)}$。$\mathbf{Var(f_t)}$是$K$ 维对称矩阵，$\mathbf{Var(\varepsilon_t)}$是$N$ 维对角矩阵，所以总共需要估计$0.5K(K+1)+N$ 个参数，相比以前的 $0.5N(N+1)$,少了很多。

对于某一资产组合$\mathbf{a'r}_t$，其方差为

$$\mathbf{Var_t(a'r_t) = a'Var_t(r_t)a = a'(X_t Var_t(f_t) X_t' + Var_t(\varepsilon_t))a} \tag{1.18}$$

那么，怎么知道$\mathbf{Var(f_t)}$和$\mathbf{Var(\varepsilon_t)}$。对于第$t$ 期，根据(1.13)，用这一期所有i 的数据做截面线性回归，就可以得到这一期的因子收益率的估计，记做$\mathbf{f_t} = (f_{1t}, f_{2t}, \ldots, f_{Kt})'$ 也可以得到对特质因子的估计ε_{it} .

这里有个问题值得研究，多因子模型假设，对于任意t ，(1.12)成立，即对于资产i ，t 期的特质收益率与共同因子收益率是正交的。而对于(1.13)做 OLS 回归，想要得到对$\mathbf{f_t}$一致的估计，则需要假设

$$E(\varepsilon_{it} x_{ikt}) = 0 \tag{1.19}$$

但是从(1.13)不能推出(1.19)。

另外，如果我们加入模型的共同因子少于实际的共同因子，会导致什么后果，也有待研究。

有了$\mathbf{f_t}, t=1,2,...,T$，假设这些变量的时间序列是协方差稳定的，则用1 类似(1.7)和(1.8)方法，估计$\mathbf{Var(f_t)}$，即：

$$\overline{f_k} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f_{kt} \tag{1.20}$$

$$Var(f_{kt}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(f_{kt} - \overline{f_k})^2 \tag{1.21}$$

$$Cov(f_{kt}, f_{lt}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(f_{kt} - \overline{f_k})(f_{lt} - \overline{f_l}) \tag{1.22}$$

。

如果该时间序列不是协方差稳定的，则可以在假设是协方差稳定的估计下做调整，具体调整办法见第 2 部分。

有了$\varepsilon_{it}, t=1,2,...,T$，假设该变量的时间序列是协方差稳定的，则用类似(1.7)的估计公式就可以估计$Var(\varepsilon_{it})$，即：

$$\overline{\varepsilon_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it} \tag{1.23}$$

$$Var(\varepsilon_{it}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_{it} - \overline{\varepsilon_i})^2 \tag{1.24}$$

。如果不是协方差稳定的，则可以做调整，调整方法见第 2 部分。

2. Barra 模型操作步骤

2.1 获取数据。因变量：每个资产在每期的回报率。自变量：每个资产在每期期初对应的各种属性，主要是市场属性和基本面属性。

2.2 行业指定。某个资产是否属于某个行业是多要素模型中的一些 x。如果总共有 5 个行业，那么设定 4 个虚拟变量，分别记做 x1,x2,…,x4.如果某个资产属于行业 1，则 x1=1,x2=x3=x4=x5=0.

多行业：判断某个资产属于什么行业，可以使用该资产的资产负债表的一些信息来判断，如该公司资产或销售收入在各行业的占比。如：某公司资产负债表里的总资产 20%用于行业 1，80%用于行业 2，则 x1=0.2，x2=0.8,x3=x4=0.

2.3 其他待选自变量标准化。对行业信息之外的打算用作因子的数据进行标准化，即$\widetilde{x_{itk}}=\frac{x_{itk}-\overline{x_{tk}}}{\sigma_{x_{tk}}}$, $\overline{x_{tk}}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_{itk}}{N}$。

2.4 用多因子模型做回归，具体使用哪一期的数据待研究。因变量为超额收益率r_i-r_f,自变量包含行业因子，延续上面的例子，即 x1,x2,x3,x4，然后再加一个待选自变量，做线性回归，对该待选自变量的系数做显著性检验，如 t 检验，显著则该因子进入下一步考察，不显著，则放弃该因子。然后对下一个待选因子做同样的回归和检验。应该用异方差稳健的 t 检验。

2.5 对 2.4 中的因子做进一步筛选。用多因子模型做回归，具体使用哪一期数据待研究。因变量为差额收益率r_i-r_f，自变量包含行业因子延续上面的例子，即 x1,x2,x3,x4，然后加入 2.4 中筛选出的感觉最有把握的几个因子，然后加入一个剩余的 2.4 的到的待选因子，做回归，看解释力（待考察）跟不加该因子相比有无增加，有增加，则该因子通过，无增加，则该因子不通过。对于下一个因子在刚才的自变量的基础上重复上述步骤。

2.6 根据前面的确定的自变量，对每一时期分别做截面回归。可选 OLS 或 GLS。建议的 GLS 是，对于 i，将自变量和因变量分别除以该资产占全市场总资产比例的平方根，然后做 OLS。然后就可以得到f_{1t}, f_{2t},…f_{Kt}和ε_{it}，t=1,…,T.

2.7 因子方差-协方差矩阵$\mathbf{Var(f_t)}$的估计

1.3 部分的(1.20)，(1.21)和(1.22)列出了在$\mathbf{f_t}$是协方差稳定的时间序列的情况下的$\mathbf{Var(f_t)}$的估计。

如果不稳定，则要进行调整。调整方法有 2 种。

2.7.1 指数加权法

(1.20)，(1.21)和(1.22)是对每个时间t上的观测取权重$\frac{1}{T}$，为等权重。指数加权为

$$\overline{f_i}=\sum_{t=1}^{T}w_t f_{it} \tag{1.25}$$

$$Cov(f_{it},f_{jt})=\sum_{t=1}^{T}w_t(f_{it}-\overline{f_i})(f_{jt}-\overline{f_j}) \tag{1.26}$$

$$w_t=\frac{\delta^{T-t}}{\sum_{t=1}^{T}\delta^{T-t}} \tag{1.27}$$

$$\delta = 0.5^{\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.28}$$

其中，τ_1 是权重的半衰期，即距离T期 间隔为τ_1期的权重是T的 1/2。不同国家有不同的τ_1。

2.7.2 GARCH 法

利用 GARCH 可以预测下一期市场组合的方差，记做

$$\sigma_m^2 \tag{1.29}$$

，用(1.20)，(1.21)和(1.22)计算得到的因子方差协方差矩阵和残差项矩阵，也可以预测出该市场组合下一期的方差，记做

$$\sigma_{m0}^2 = \mathbf{a_m}'(\mathbf{X_t Var_t(f_t) X_t}' + \mathbf{Var_t(\varepsilon_t)})\mathbf{a_m} \tag{1.30}$$

寻找一个调整常数a 使得$\sigma_m^2 = \mathbf{a_m}'(\mathbf{X_t}a\mathbf{Var_t(f_t) X_t}' + \mathbf{Var_t(\varepsilon_t)})\mathbf{a_m}$ ，该常数为

$$a = \frac{(\sigma_m^2 - \mathbf{a_m}'\mathbf{Var_t(\varepsilon_t)a_m})}{\mathbf{a_m}'\mathbf{X_t}a\mathbf{Var_t(f_t)X_t}'\mathbf{a_m}} \tag{1.31}$$

调整后的因子协方差矩阵为$a\mathbf{Var_t(f_t)}$。

GARCH 模型的设定为

$$r_{mt} = E_t(r_{mt}) + u_t \tag{1.32}$$

$$u_t = \sqrt{h_t}v_t \tag{1.33}$$

$$h_t = \rho_0 + \rho_1 u_{t-1}^2 + \alpha_1 h_{t-1} + \theta u_{t-1} \tag{1.34}$$

其中$v_t \sim N(0,1), i.i.d$ ，(1.34)意味着$Var_t(u_t) = \rho_0 + \rho_1 u_{t-1}^2 + \alpha_1 h_{t-1} + \theta u_{t-1}$ 。

2.8 残差项对角矩阵对角元素$Var(\varepsilon_{it})$估计

2.8.1

在残差项的时间序列为稳定的情况下，第 i 个资产的残差项的方差的估计为(1.23)和(1.24)。

根据 Barra USE3 的说法，似乎认为残差项的时间序列是不稳定的。所以它使用另外一种方法的预测该残差项方差。

$$\varepsilon_{it}^{\ 2} = S_t(1+v_{it}) \tag{1.35}$$

其中，$\varepsilon_{it}^{\ 2}$ 为第 i 个资产在 t 时期的残差项的平方，

$$S_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{it}^{\ 2} \tag{1.36}$$

，表示 t 时期，所有资产的残差项的平方的均值，称为平均残差风险；

v_{it} 表示资产 i 相对同一时期平均残差风险的风险。

然后对 S_t，v_{it} 分别建模。

2.8.2

对于 S_t，认为 S_t 与它自己的滞后项以及市场组合收益率的滞后项有关，具体模型如下

$$S_t = \alpha + \sum_{i=1}^{k}\beta_i S_{t-i} + \beta_{k+1} r_{m,t-1} + z_t \tag{1.37}$$

上式意义上跟 ARCH 相似，都是说某个残差项的平方与它的滞后项有关。该式用 OLS 回归。关于上式中的滞后项应该滞后几阶，通过比较不同阶设定下，上式的预测值与实现值之间的相关系数（使用的数据是上式估计数据的样本外数据）的大小来决定。

2.8.3

对于 v_{it}，认为 v_{it} 与多因子模型中的各种因子有关，具体如下

$$v_{it} = \sum_{j=1}^{J}\beta_j x_{ijt} + \omega_{it} \tag{1.38}$$

其中，x_{ijt} 是多因子模型中第 i 个资产对第 j 个因子在 t 时期的暴露。该式采用 OLS 混同回归（将 i，t 当成当成一样的观测对待）。

2.8.4 调整系数

将所有资产按照市值大小的 10 分位数排列。对每一分位数里的资产的残差项的方差按照上述方法预测，然后将同一分位数里的残差项的方差求均值，将该值与该分位数里实际的残差项的平方的平均值作比较，使得二者相等的常数即为调整系数 $scale_{it}$ 。$scale_{it}$ 对于同一分位数的资产是相同的。

最终残差项方差的估计为

$$Var(\varepsilon_{it}) = scale_{it} S_t（1+v_{it}） \tag{1.39}$$

3. 方差预测更新（USE4）

USE4 与 USE3 相比，使用的是日收益率，即每个横截面回归使用的是期限长度为 1 日。有个大前提，第 2 部分提到对于时间序列不稳定的情况下，因子方差-协方差矩阵有 2 种调整方法，指数加权法和 Garch 法，特质因子对角矩阵元素的方差同样推荐了另外的方法，但是 USE4 对因子方差-协方差矩阵的估计是以指数加权法为基础的，特质因子对角矩阵的方差的估计也是以指数加权法为基础的。

3.1 因子方差-协方差矩阵 $\mathbf{Var(f_t)}$ 的估计

对于因子方差-协方差矩阵的估计，分成 2 部分估计，第 1 部分是该矩阵对应的相关系数矩阵，第 2 部分是该矩阵每个因子的方差，然后因子方差-协方差矩阵，就可以用

$$\mathrm{Cov}(f_{it}, f_{jt}) = \rho_{ij}\sqrt{Var(f_{it})}\sqrt{Var(f_{jt})} \tag{1.40}$$

计算出来。至于为什么要将协方差矩阵的估计拆成相关系数矩阵的估计和单个因子方差的估计，原因是，相关系数矩阵相对于单个因子的方差在时间上更加稳定，相关系数矩阵使用更短的半衰期。

我们每期横截面回归的长度是 1 日，所以得到的 $\mathbf{f_t}$ 是 1 日尺度上的因子收益率的估计，如果直接用(1.20)，(1.21)和(1.22)，我们将得到尺度为 1 日的因子方差协方差矩阵的估计，而如果我们要预测未来 D 日的因子方差协方差矩阵，且日与日之间存在自相关，则在从日的因子方差协方差矩阵转化为月的因子方差协方差矩阵时，不是简单的平方根法则，而是如下。

具体地，$\mathbf{f_t}, t = 1, 2, \ldots T$ 为 K 维的 1 日的因子收益率的估计值，假设，其为协方差稳定的时间序列。记 $\mathbf{f_t}^{(D)}$ 为长度为 D 日的因子收益率的估计值，即

$$\mathbf{f_t}^{(D)} = \sum_{d=0}^{D-1} \mathbf{f_{t+d}} \tag{1.41}$$

则，$\mathbf{f_t}^{(D)}$ 的方差协方差矩阵为（具体推导见 Hamilton 时间序列分析的第 10 章第 5 节，类似 Newey-West）

$$Var(\mathbf{f_t}^{(D)}) = Var(\sum_{d=0}^{D-1}\mathbf{f_{t+d}}) = D\mathbf{\Gamma_0} + \sum_{v=1}^{D-1}(D-v)(\mathbf{\Gamma_v}+\mathbf{\Gamma_v}') \quad (1.42)$$

其中，$\mathbf{\Gamma}_j = Cov(\mathbf{f_t},\mathbf{f_{t-j}})$，即$\mathbf{f_t}$与其滞后 j 阶的$\mathbf{f_{t-j}}$的自协方差。而

$$\mathbf{\Gamma}_j = Cov(\mathbf{f_t},\mathbf{f_{t-j}}) = \begin{bmatrix} Cov(f_{1t},f_{1,t-j}) & Cov(f_{1t},f_{2,t-j}) & \cdots & Cov(f_{1t},f_{K,t-j}) \\ Cov(f_{2t},f_{1,t-j}) & Var(f_{2,t-j}) & \cdots & Cov(f_{2t},f_{K,t-j}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(f_{Kt},f_{1,t-j}) & Cov(f_{Kt},f_{2,t-j}) & \cdots & Var(f_{K,t-j}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{Var(f_{1t})} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{Var(f_{2t})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{Var(f_{Kt})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11}^j & \rho_{12}^j & \cdots & \rho_{1K}^j \\ \rho_{21}^j & \rho_{22}^j & \cdots & \rho_{2K}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K1}^j & \rho_{K2}^j & \cdots & \rho_{KK}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{Var(f_{1t})} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{Var(f_{2t})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{Var(f_{Kt})} \end{bmatrix}$$

(1.43)

其中，

$$\rho_{kl}^j = \frac{Cov(f_{kt},f_{l,t-j})}{\sqrt{Var(f_{kt})}\sqrt{Var(f_{l,t-j})}} = \frac{Cov(f_{kt},f_{l,t-j})}{\sqrt{Var(f_{kt})}\sqrt{Var(f_{l,t})}} \quad (1.44)$$

式子(1.44)第 2 个等号来自于时间序列平稳。

记

$$\mathbf{V^{dial}} = \begin{bmatrix} \sqrt{Var(f_{1t})} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{Var(f_{2t})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{Var(f_{Kt})} \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{P}^j = \begin{bmatrix} \rho_{11}^j & \rho_{12}^j & \cdots & \rho_{1K}^j \\ \rho_{21}^j & \rho_{22}^j & \cdots & \rho_{2K}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K1}^j & \rho_{K2}^j & \cdots & \rho_{KK}^j \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

则，(1.42)变为

$$
\begin{aligned}
Var(\mathbf{f_t}^{(D)}) &= D\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{0} + \sum_{v=1}^{D-1}(D-v)(\boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{v} + \boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{v}{}') \\
&= \mathbf{V}^{\mathbf{dial}}\left(D\mathbf{P}^0 + \sum_{v=1}^{D-1}(D-v)(\mathbf{P}^v + \mathbf{P}^{v\prime}) \right)\mathbf{V}^{\mathbf{dial}}
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

所以，估计D 日的因子方差协方差矩阵，需要估计$\mathbf{V}^{\mathbf{dial}}$和$\mathbf{P}^j, j=0,2,...,D-1$。对于$\mathbf{P}^j, j=0,2,...,D-1$，一般会事先确定自相关的阶数，记为$L_1$ ，如果$L_1 < D-1$，则$\mathbf{P}^j$只需计算到L_1阶，更高阶的为 0.

对于$\mathbf{V}^{\mathbf{dial}}$的估计，为了应对不平稳性，采用指数加权法，半衰期记为τ_1 ，则其对角线元素的估计为

$$
Var(f_{kt}) = \sum_{t=1}^{T} w_t (f_{kt} - \overline{f_k})^2 \tag{1.48}
$$

其中，

$$
\overline{f_k} = \sum_{t=1}^{T} w_t f_{kt} \tag{1.49}
$$

$$
w_t = \frac{\delta^{T-t}}{\sum_{t=1}^{T}\delta^{T-t}} \tag{1.50}
$$

$$
\delta = 0.5^{\frac{1}{\tau_1}} \tag{1.51}
$$

。

对于$\mathbf{P}^j$的元素的估计，，为了应对不平稳性，采用指数加权法，半衰期记为τ_2 ，则其(k,l)元素的估计为

$$
\rho_{kl}^j = \frac{\sum_{t=j+1}^{T} w_t (f_{kt} - \overline{f_k})(f_{l,t-j} - \overline{f_l})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} w_t (f_{kt} - \overline{f_k})^2}\sqrt{\sum_{t=1}^{T} w_t (f_{lt} - \overline{f_l})^2}} \tag{1.52}
$$

其中，$\overline{f_k}$，w_t，δ定义同(1.49)，(1.50)，(1.51)，只不过(1.51)中用τ_2。

得到了$\mathbf{V}^{\mathbf{dial}}$和$\mathbf{P}^j$的估计，利用(1.47)就可以得到$Var(\mathbf{f_t}^{(D)})$的估计，记为$\mathbf{F}_0$ 。

3.2 对 3.1 结果的偏误的调整

3.2.1 特征因子调整（Eigenfactor risk adjustment）

Shepard(2009)证明用上述方法得到的因子方差-协方差矩阵会导致使用其做出来的资产组合的方差的预测偏低。原因：假设有 2 个资产的真实波动率都是 10%，而我们通过历史数据估计得到他们的波动率分别为 9%和 11%，由于我们做资产组合最优化的时候同等期望收益率下总会选较小波动率的，所以，相比只固定选择某一个资产的策略来说，我们低估了波动率。

经过前述步骤，得到了因子方差-协方差矩阵的一个估计$\mathbf{F_0}$，将$\mathbf{F_0}$对角化，得

$$\mathbf{D_0} = \mathbf{U_0^T F_0 U_0} \tag{1.53}$$

其中$\mathbf{F_0}$是用$\mathbf{f_t}, t = 1, 2, ..., T$，使用 3.1 的方法估计而来，记

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_T) \tag{1.54}$$

令

$$\mathbf{b} = \mathbf{U_0^T f} \tag{1.55}$$

则$\mathbf{b}$是一组正交的因子，称为特征因子，代表一些最优化的资产组合的收益率，其方差协方差矩阵为$\mathbf{D_0}$。

总共模拟M 次。在第m 次，从分布为$\mathbf{N(0, D_0)}$ 的分布中抽取$\mathbf{b_m}$的样本T 个，则可以得到对应的风险因子的的样本

$$\mathbf{f_m} = \mathbf{U_0 b_m} \tag{1.56}$$

然后，用 3.1 的方法得到

$$\mathbf{F_m} = \mathbf{Cov(f_m, f_m)} \tag{1.57}$$

将$\mathbf{F_m}$进行对角化，

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{U}_m^{\mathbf{T}} \mathbf{F}_m \mathbf{U}_m \tag{1.58}$$

此为该次模拟得到的对特征因子的方差协方差的估计，而该特征因子真实的方差协方差为

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{U}_m^{\mathbf{T}} \mathbf{F}_0 \mathbf{U}_m \tag{1.59}$$

然后，计算偏误系数

$$v(k)=\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{D_m(k)}{D_m(k)}} \tag{1.60}$$

然后，用该偏误系数得到纠正偏误的$\mathbf{D}_0$，即

$$\mathbf{D}_0=\mathbf{v}^2\mathbf{D}_0 \tag{1.61}$$

，其中，$\mathbf{v}^2$是$v^2(k)$构成的对角矩阵。然后，得到纠正偏误的$\mathbf{F}_0$，即

$$\mathbf{F}_0=\mathbf{U}_0\mathbf{D}_0\mathbf{U}_0^{\mathrm{T}} \tag{1.62}$$

注意：式子（1.57）的具体计算过程是使用 3.1 部分的计算还是简单的等权重计算（相当于τ_1和τ_2取值无穷大）？（1）由于（1.57）使用的是抽样的到的 D 日收益率，而 3.1 部分使用的是 1 日收益率，如果 D 大于 1，τ_1和τ_2取多少才能跟 3.1 部分的 1 日收益率对应无法知道。（2）由于（1.57）受用的 D 日收益率是独立同分布抽样得到的，所以从这个角度看，（1.57）中的半衰期也应该使用无穷大。

3.2.2 VRA（Volatility Regime Adjustment）

基本原理：其他因子的方差预测的准确性能够帮助我们改善所关注因子的方差的预测的准确性。

定义，因子横截面偏误统计量

$$B_t^F=\sqrt{\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{f_{kt}}{\sigma_{kt}}\right)^2} \tag{1.63}$$

，其中，σ_{kt}为对第k个因子在第t 期的长度为 1 日的方差的预测，用(1.48)得到。若预测偏小，则B_t^F大于 1，预测偏大，则B_t^F小于 1。

定义，因子波动率乘子

$$\lambda_F=\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(B_t^F)^2 w_t} \tag{1.64}$$

其中，w_t为指数加权权重，半衰期为τ_3。w_t定义同(1.50)，(1.51)，只不过(1.51)中用τ_3 。注意：(1.64)的计算需要$t=1,2,\dots T$ 的B_t^F，而B_t^F需要σ_{kt}，σ_{kt}需要$t-T,t-T+1,\dots,t-1$ 的 f_k，所以总共需要$t=-T+1,\dots,0,1,\dots T$ 的数据。

VRA 调整后的第 k 个因子的风险（标准差）估计为

$$\sigma_k=\lambda_F\sigma_k \tag{1.65}$$

其中，σ_k 为(1.48)中得到的第 k 个因子的标准差的估计，即 $\sigma_k = \sqrt{Var(f_{kt})}$ 。

3.3.3 汇总

根据(1.65)，VRA 只是对所有因子的标准差统一乘以一个常数 λ_F ，所以最终对因子方差-协方差的矩阵的估计为

$$\lambda_F{}^2 \mathbf{F_0} \tag{1.66}$$

，其中 $\mathbf{F_0}$ 为(1.62)中的结果。

4. 特质对角矩阵对角元素估计更新

USE4 对于特质对角矩阵对角元素的估计同样只使用指数加权法，然后在其基础上做调整。

4.1 指数加权法和 NEWEY-WEST 调整以及结构模型调整

该部分论述与 3.1 部分及其类似，只不过将向量 $\mathbf{f_t}$ 换成了单个 ε_{it} 。

具体地，对于资产 i 的特质收益率的估计，我们每期横截面回归的长度是 1 日，所以得到的 ε_{it} 是 1 日尺度上的特质收益率的估计，如果直接用(1.23)和(1.24)估计，我们将得到尺度为 1 日的因子方差协方差矩阵的估计，而如果我们要预测未来 D 日的特质收益率的方差，且日与日之间存在自相关，则在从日的特质收益率方差转化为月的特质收益率方差时，不是简单的平方根法则，而是如下。

具体地，$\varepsilon_{it}, t = 1, 2, ...T$ 为的 1 日的特质收益率的估计值，假设，其为协方差稳定的时间序列。记 $\varepsilon_{it}^{(D)}$ 为长度为 D 日的特质收益率的估计值，即

$$\varepsilon_{it}^{(D)} = \sum_{d=0}^{D-1} \varepsilon_{i,t+d} \tag{1.67}$$

则，$\varepsilon_{it}^{(D)}$ 的方差为（具体推导见 Hamilton 时间序列分析的第 10 章第 5 节）

$$Var(\varepsilon_{it}^{(D)}) = Var(\sum_{d=0}^{D-1} \varepsilon_{i,t+d}) = D\gamma_{i0} + \sum_{v=1}^{D-1} (D-v)(\gamma_{iv} + \gamma_{iv}{}') \tag{1.68}$$

其中，$\gamma_{iv} = Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{i,t-v})$ ，即 ε_{it} 与其滞后 v 阶的 $\varepsilon_{i,t-v}$ 的自协方差。而

$$\gamma_{iv} = Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{i,t-v}) = \sqrt{Var(\varepsilon_{it})}\rho_{ii}^{v}\sqrt{Var(\varepsilon_{i,t-v})} = \rho_{ii}^{v} Var(\varepsilon_{it}) \tag{1.69}$$

其中，

$$\rho_{ii}^{v}=\frac{Cov(\varepsilon_{it},\varepsilon_{i,t-v})}{\sqrt{Var(\varepsilon_{it})}\sqrt{Var(\varepsilon_{i,t-v})}}=\frac{Cov(\varepsilon_{it},\varepsilon_{i,t-v})}{Var(\varepsilon_{it})} \tag{1.70}$$

式子(1.70)第 2 个等号来自于时间序列平稳。

所以(1.68)变为

$$\begin{aligned} Var(\varepsilon_{it}^{(D)}) &= D\gamma_{i0}+\sum_{v=1}^{D-1}(D-v)(\gamma_{iv}+\gamma_{iv}{}') \\ &= Var(\varepsilon_{it})\left(D\rho_{ii}^{0}+\sum_{v=1}^{D-1}(D-v)(\rho_{ii}^{v}+\rho_{ii}^{v})\right) \end{aligned} \tag{1.71}$$

所以，估计 D 日的特质收益率方差，需要估计 $Var(\varepsilon_{it})$ 和 $\rho_{ii}^{v}, v=0,2,...,D-1$。对于 $\rho_{ii}^{v}, v=0,2,...,D-1$，一般会事先确定自相关的阶数，记为 L_2 ，如果 $L_2<D-1$,则 ρ_{ii}^{v} 只需计算到 L_2 阶，更高阶的为 0.

对于 $Var(\varepsilon_{it})$ 的估计，为了应对不平稳性，采用指数加权法，半衰期记为 τ_4 ，则其对角线元素的估计为

$$Var(\varepsilon_{it})=\sum_{t=1}^{T}w_t(\varepsilon_{it}-\overline{\varepsilon_i})^2 \tag{1.72}$$

其中，

$$\overline{\varepsilon_i}=\sum_{t=1}^{T}w_t\varepsilon_{it} \tag{1.73}$$

$$w_t=\frac{\delta^{T-t}}{\sum_{t=1}^{T}\delta^{T-t}} \tag{1.74}$$

$$\delta=0.5^{\frac{1}{\tau_4}} \tag{1.75}$$

。

对于 ρ_{ii}^{v} 的估计，为了应对不平稳性，采用指数加权法，半衰期记为 τ_5 ，则

$$\rho_{ii}^{v}=\frac{\sum_{t=v+1}^{T}w_t(\varepsilon_{it}-\overline{\varepsilon_i})(\varepsilon_{i,t-v}-\overline{\varepsilon_i})}{\sum_{t=1}^{T}w_t(\varepsilon_{it}-\overline{\varepsilon_i})^2} \tag{1.76}$$

其中，$\overline{\varepsilon_i}$ ，w_t ，δ 定义同(1.73)，(1.74)，(1.75)，只不过(1.75)中用 τ_5。

得到了$Var(\varepsilon_{it})$和ρ_{ii}^{v}的估计，利用(1.71)就可以得到$Var(\varepsilon_{it}^{(D)})$的估计，对其开根号，得到标准差，记为

$$\sigma_i^{TS} \qquad (1.77)。$$

用上述步骤得到σ_i^{TS}，得有充足的ε_{it}数据，但是有些资产的ε_{it}数据很少，比如最近 IPO 的股票，或者交易量很少（thinly traded）的股票，其收益率都有些异常，导致用上述方法得到的σ_i^{TS}不具有代表性。为了解决该问题，我们用一个变量$\lambda_i, i=1,2,...,N$ 来来标识这些异常的股票，当这些股票属于我们认为的异常股票，则$\lambda_i=0$，否则，$\lambda_i=1$。广义情况下，对于介于 2 者之间的，λ_i可以取 0~1 之间的数。为了简便，这里建议只取 0,1.

我们对于$\lambda_i=1$的股票，建立结构模型，即：

$$\ln(\sigma_i^{TS}) = \sum_{k=1}^{K} x_{ik} b_k + \varepsilon_i \qquad (1.78)$$

USE4 没有说明用哪一期的数据，这里推测应该用第T期的数据，因为 σ_i^{TS}是D 日特质收益率的标准差。上式用 OLS 回归估计系数。

然后对于每个资产，不管是$\lambda_i=1$的，还是$\lambda_i \neq 1$，我们用(1.78)来预测，即

$$\sigma_i^{STR} = E_0 \exp(\sum_{k=1}^{K} x_{ik} b_k) \qquad (1.79)$$

，其中E_0是一个稍微大于 1 的数，用来纠正(1.78)对残差项取指数造成的误差，这里简单起见，建议取 1。然后，每只股票的特质收益率为

$$\sigma_i = \lambda_i \sigma_i^{TS} + (1-\lambda_i)\sigma_i^{STR} \qquad (1.80)$$

4.2 贝叶斯收缩（bayesian shrinkage）

基本原理：用时间序列预测的特质收益率的标准差，有向均值回归的趋势，即预测标准差相对较大的特质收益率，其实际标准差相对较小，预测标准差相对较小的特质收益率，其实际标准差相对较大。为了解决该问题，决定将标准差向其附近的位置调整。具体如下：

将所有股票的特质收益率按照(1.80)得到的标准差的大小分成 10 分位数。每个分位数里按照每只股票的市值将标准差加权平均，该均值就是出于该分位数里的某只股票的标准差要调整到的目标，公式如下：

$$\sigma_i^{SH} = v_i \bar{\sigma}(s_i) + (1 - v_i)\sigma_i \tag{1.81}$$

其中，

$$\bar{\sigma}(s_i) = \sum_{i \in s_i} w_i \sigma_i \tag{1.82}$$

s_i 表示股票 i 所处的分位数区间，w_i 是股票 i 的市值占处于区间 s_i 的所有股票市值之和的比例。v_i 称为收缩权重，表示多少权重给贝叶斯先验 $\bar{\sigma}(s_i)$，具体公式如下

$$v_i = \frac{q\left|\sigma_i - \bar{\sigma}(s_i)\right|}{\Delta_\sigma(s_i) + q\left|\sigma_i - \bar{\sigma}(s_i)\right|} \tag{1.83}$$

其中，q 是由实证决定的一个参数，

$$\Delta_\sigma(s_i) = \sqrt{\frac{1}{N(s_i)} \sum_{i \in s_i} (\sigma_i - \bar{\sigma}(s_i))^2} \tag{1.84}$$

。

4.3 VRA

类似于 3.2 的思路，基本原理：其他资产的特质收益率方差预测的准确性能够帮助我们改善所关注资产特质收益率的方差的预测的准确性。

定义，资产特质收益率横截面偏误统计量

$$B_t^S = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_{it} (\frac{\varepsilon_{it}}{\sigma_{it}})^2} \tag{1.85}$$

，其中，σ_{it} 为对第 i 个资产在第 t 期的长度为 1 日的特质收益率标准差的预测，用(1.72)得到。若预测偏小，则 B_t^F 大于 1，预测偏大，则 B_t^F 小于 1。

定义，特质收益率波动率乘子

$$\lambda_S = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} (B_t^S)^2 w_t} \tag{1.86}$$

其中，w_t 为指数加权权重，半衰期为 τ_6。w_t 定义同(1.50)，(1.51)，只不过(1.51)中用 τ_6。注意：(1.86)的计算需要 $t = 1, 2, \ldots T$ 的 B_t^S，而 B_t^S 需要 σ_{it}，σ_{it} 需要 $t - T, t - T + 1, \ldots, t - 1$ 的 ε_{it}，所以总共需要 $t = -T + 1, \ldots, 0, 1, \ldots T$ 的数据。

VRA 调整后的第 i 个资产的风险（标准差）估计为

$$\sigma_i = \lambda_S \sigma_i^{SH} \tag{1.87}$$

。

5.半衰期等参数的选取

5.1 参数选取思路

假设模型是用来预测某个量 y 的，模型的设定包含模型的结构设定，模型的参数选取。比如，我们每天要预测某只股票的价格 p_t ，我们可以设定模型结构 $p_t = a x_t^2$ ，或者 $p_t = a x_t$，其中 a 为参数，关于模型取哪一种，参数取多少，我们怎么决定。现在知道的方法是，给定一个模型设定（即选定模型结构，选定某个参数的值），看在该模型设定下的输出的预测值与真实值的差异，最优的模型设定，就是使得预测值与真实值差异最小的设定。

预测值与真实值差异的衡量，有好多种函数形式，称为损失函数，比如，线性回归用的损失函数是$(y_t - \hat{y}_t)^2$,其中y_t是第 t 个观测的真实值，$\hat{y}_t$是第 t 个观测的预测值。对于方差的预测，我们选择$Q_{nt} = {z_{nt}}^2 - \ln({z_{nt}}^2)$作为第 n 个资产在第 t 期的损失函数。其中，$z_{nt} = \frac{{r_{nt}}^2}{{\sigma_{nt}}^2}$，其中，$r_{nt}$是第 n 个资产在第 t 期的收益率，${\sigma_{nt}}^2$为对第 n 个资产在第 t 期收益率方差的预测，这里用${r_{nt}}^2$来表示第 n 个资产在第 t 期的收益率的方差的真实值。

5.2 半衰期的选取

假设我们总共有 $t = 1, \ldots T$ 日的 K 个共同因子的收益率， 和 N 个资产的特质收益率。我们的模型每天预测接下来一个月（或接下来 D 日）的收益率的方差需要过去 S 日的收益率数据。即，预测第 $S+1$ 日到 $S+D$ 日之间收益率的方差（记为 $\sigma_{n,S+1}^2$ ，下标 n 表示第 n 个资产组合），需要第 1 日到第 S 日的收益率数据；预测第 $S+2$ 日到 $S+D+1$ 日之间收益率的方差（记为 $\sigma_{n,S+2}^2$），需要第 2 日到第 $S+1$ 日的收益率数据。则我们会得到我们的模型对方差的预测值 $\sigma_{n,t}^2, t = S+1, S+2, \ldots, T, n = 1, 2, \ldots, N$ （这里假设第 T 日之后还有 $D-1$ 日的收益率数据）。同样，我们也可以得到跟这些预测值对应的收益率方差的实现值 $r_{n,t}^2, t = S+1, S+2, \ldots, T, n = 1, 2, \ldots, N$ ， $r_{n,t}^2$ 为第 n 个资产组合在第 t 日到第 $t+D-1$ 日之间的收益率的平方，用其来代表方差的真实值。于是，我们模型的预测损失的平均值为

$$\frac{1}{N(T-S)} \sum_{\substack{t=S+1,\ldots,T \\ n=1,\ldots,N}} \left((\frac{r_{n,t}}{\sigma_{n,t}})^2 - \ln((\frac{r_{n,t}}{\sigma_{n,t}})^2) \right)$$

所以，我们模型中，还没有确定的参数（主要是半衰期$\tau_1,\ldots,\tau_6$ 和公式（1.83）中的q 值），可以通过一组一组试验，使得上式取得最小值来确定。

由于我们有 2005 到 2017 年的日收益率数据，所以建议1到S对应 2005 年 1 月 1 日到 2010 年 12 月 31 日，$S+1$到T对应 2011 年 1 月 1 日到 2017 年 12 月 1 日（该日期可以随着时间的推移增加）。

5.3 减少计算量

半衰期的取值范围是 1 到正无穷的整数，我们假设是 1 到 1000 的正整数，q 的取值假设是 0 到 10 之间间隔为 0.1 的数，则 q 有 100 个可能的取值。如果我们同时选取半衰期$\tau_1,\ldots,\tau_5$ 和公式（1.83）中的q 值，使得 5.2 中的损失函数最小，则要试验 1000^6*100 次，假设一次为 0.5s，计算时间太大。

为了减少计算量，我们将待确定的参数分为 3 组，分别是τ_1 和τ_3 为一组，τ_2 为一组，τ_4,τ_6 为一组，τ_5 和q 为一组。

对于τ_1 和τ_3 ，5.2 中损失函数的N=K ,即我们用 K 个因子的波动率的预测误差来确定该组待定系数。5.2 中损失函数里的波动率的预测值为某个因子经过(1.48)和(1.65)的预测值。

在已经得到τ_1 和τ_3后，我们估计τ_2。对于τ_2，5.2 中损失函数用到的资产组合的选择，我们选择由 K 个因子随机权重组成的 1000 个资产组合，所以 N=1000，其中波动率的预测值是经过第 3 部分 3 步骤得到的。具体地，第 3 部分 3 步骤得到了 K 个因子 D 日的方差矩阵F ，对于任何一个由这 K 个因子组成的组合，假设其权重为$(w_1,w_2,\ldots,w_K)$，则该组合的方差为$(w_1,w_2,\ldots,w_K)^T F(w_1,w_2,\ldots,w_K)$，该组合 D 日方差的实现值为这 K 个因子收益率的加权平均的平方，权重为$(w_1,w_2,\ldots,w_K)$。注意：由于特征因子调整步骤增加的计算量比较大，我们有认为特征因子调整这一步骤的作用比较独立，所以在估计τ_2时，第 3 部分的 3 步骤中的第 2 步骤可以略过。

对于τ_4,τ_6 的估计，5.2 中损失函数用到的资产组合的选择，我们选择 N 个资产的 1 日特质收益率，其中波动率的预测是经过第 4 部分的(1.72)和(1.87)得到的预测，只不过(1.87)公式的右侧用到的波动率是（1.72）得到的波动率，而不是σ_i^{SH}。波动率的实现值是这 N 个资产的 1 日特质收益率的平方。

在已经得到τ_4,τ_6 的估计后，我们估计τ_5 和q 。5.2 中损失函数用到的资产组合，我们选择 N 个资产的 D 日特质收益率，其中波动率的预测是经过整个第 4 部分得到的预测。波动率的实现值是这 N 个资产的 D 日特质收益率的平方。