临界线算法

问题描述

记n个资产的期望收益率向量为$\mu=\left(\mu_1,\ldots,\mu_n\right)'$，方差矩阵为$C=\left[\sigma_{ij}\right]_{n\times n}$，组合权重为$X=\left(X_1,\ldots,X_n\right)'$，则组合的期望收益率和方差分别为$E=\mu'X$和$V=X'CX$，另外，给定线性约束$L\le X\le U, AX=b$（其中$L$，$U$为$n\times 1$的向量，表示上界和下界，$A$为$m\times n$的矩阵，$b$为$m\times 1$的向量），在这些线性约束下，可得到的$\left(E,V\right)$构成的集合记为$F$，我们的目标是找到有效前沿

$\left\{\left(E,V\right)\in F \middle| \text{不存在}\left(E_1,V_1\right)\in F\text{使得}\left(E_1>E\text{且}V\le V_1\right)\text{或}\left(V_1<V\text{且}E_1\ge E\right)\right\}$。跟有效前沿上$\left(E,V\right)$对应的$X$称为有效组合。

临界线算法（原理部分）

定理 7.1

记

$S=\left\{X:L\le X\le U\right\}$（1），

$La=\dfrac{1}{2}X'CX+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}X_j\right)-\lambda_E\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_jX_j\right)$（2），

对于给定的$\lambda=\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right)'$和$\lambda_E$，如果$X$最小化在$S$中最小化$La$，并且

$AX=b$（3），

$\mu'X=E$（4），

则X在约束（1），（3），（4）下最小化$V=X'CX$，X在约束（1），（3），下最小化$\dfrac{1}{2}V-\lambda_E E$，

并且如果$\lambda_E>0$，则X是一个有效组合。

记

$$\eta_i = \frac{\partial La}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_j + \sum_{k=1}^{m} \lambda_m a_{ki} - \lambda_E \mu_i$$ （5），

写成向量形式，则为

$$\eta = (C, A')\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} - \lambda_E \mu = (C, A', \mu)\begin{pmatrix} X \\ \lambda \\ -\lambda_E \end{pmatrix}$$ （5）。

定理 7.2

对于给定的 $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)'$ 和 λ_E， X_0 在（1）约束下最小化（2）的一个充要条件是

$$\begin{aligned} &\eta_i^0 = 0 \ \ for \text{ every } L_i < X_i < U_i \\ &\eta_i^0 \ge 0 \ \ for \text{ every } X_i = L_i \\ &\eta_i^0 \le 0 \ \ for \text{ every } X_i = U_i \end{aligned}$$ （6）。

其中 η_i^0 为 η_i 在 X_0 处的取值。

临界线

记 IN 为一个集合，是 $\{1, ..., n\}$ 的子集， OUT 为 IN 在 $\{1, ..., n\}$ 的补集， LO 和 UP 也是 $\{1, ..., n\}$ 的子集，且 $OUT = LO \bigcup UP$ ，则有问题

$$\begin{aligned} &Min \frac{1}{2} X'CX - \lambda_E \mu' X \\ &s.t. \ \ AX = b \\ &\qquad X_i = L_i \ \ for\ i \in LO \\ &\qquad X_i = U_i \ \ for\ i \in UP \end{aligned}$$ （7），

记属于集合 IN 的下标对应的 X_i 在前面，属于集合 OUT 的下标对应的 X_i 在后面。则

$$X = (X_I, X_O)',$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{II} & C_{IO} \\ C_{OI} & C_{OO} \end{bmatrix},$$

$$A = [A_I, A_O],$$

记 IN 中元素个数为 n_1 个，OUT 中元素个数为 n_2 个，其中，LO 元素有 n_{21} 个，UP 元素有 n_{22} 个， $lu = \left(L_{i_1}, ..., L_{i_{n_{21}}}, U_{j_1}, ..., U_{j_{n_{22}}}\right), i_k \in LO, j_k \in UP$ ，则（7）式的线性等式约束联合起来，可以写作

$$A_+ X = b_+,$$

$$A_+ = \begin{bmatrix} A_I & A_O \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix},$$

$$b_+ = \begin{bmatrix} b \\ lu \end{bmatrix},$$

而 X 是（7）的解的充分条件是

$$\begin{bmatrix} C & A_+' \\ A_+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \lambda \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_E \mu \\ b \\ lu \end{bmatrix}$$，即

$$\begin{bmatrix} C_{II} & C_{IO} & A_I' & {0_{n_2 \times n_1}}' \\ C_{OI} & C_{OO} & A_O' & I_{n_2 \times n_2} \\ A_I & A_O & & \\ 0_{n_2 \times n_1} & I_{n_2 \times n_2} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_I \\ X_O \\ \lambda \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_E \mu_I \\ \lambda_E \mu_O \\ b \\ lu \end{bmatrix} \quad (8),$$

对于（8）式，其第 1 块行和第 3 块行可以写为

$$\begin{bmatrix} C_{II} & A_I' \\ A_I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_I \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{IO} \\ A_O \end{bmatrix} X_O + \lambda_E \begin{bmatrix} \mu_I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9),$$

记

$$M_{II} = \begin{bmatrix} C_{II} & A_I' \\ A_I & 0 \end{bmatrix},$$

对于（8）式，首先，其第 4 块行直接求得 $X_O = lu$，则如果 M_{II} 可逆，则通过（9）式就可求得，

$$\begin{bmatrix} X_I \\ \lambda \end{bmatrix} = M_{II}^{-1} \bar{b} + M_{II}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_I \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E,$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{IO} \\ A_O \end{bmatrix} X_O \quad (10),$$

再利用（8）式的第 2 块行可以求得 λ_1。

定义：如果 M_{II} 可逆，则

$$\begin{bmatrix} X_I \\ \lambda \end{bmatrix} = M_{II}^{-1} \bar{b} + M_{II}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_I \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_E, \quad (11)$$

$$X_O = lu$$

称为对应于下标集合 LO 和 UP 的临界线。

可以记（11）为

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \alpha + \beta\lambda_E$$（12），

其中，

$\begin{bmatrix} X_I \\ \lambda \end{bmatrix}$对应的$\alpha$为$M_{II}^{-1}\overline{b}$，$\begin{bmatrix} X_I \\ \lambda \end{bmatrix}$对应的$\beta$为$M_{II}^{-1}\begin{bmatrix} \mu_I \\ 0 \end{bmatrix}$，$X_O$对应的$\alpha$为$lu$，$X_O$对应的$\beta$为0。可以看到（12）表达的是$(X',\lambda',\lambda_E)$空间的一条直线。

将（12）式代入（5）式，可以得到

$$\begin{aligned} \eta &= (C,A')\begin{pmatrix} X \\ \lambda \end{pmatrix} - \lambda_E\mu \\ &= (C,A')(\alpha+\beta\lambda_E) - \lambda_E\mu \text{，（13）} \\ &= \gamma + \delta\lambda_E \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned} \gamma &= (C,A')\alpha, \\ \delta &= (C,A')\beta - \mu \end{aligned},$$

另外，根据（9）式，对于$i \in IN$，其$\eta_i = 0$，所以，$\gamma_i = \delta_i = 0$。

将（12）和（13）联合起来，可以看到，它们表达的是$(X',\lambda',\lambda_E,\eta')$空间的一条直线。也可以把（12）和（13）描述的直线称为临界线。

定理 7.3

记$\left(X_0{}',\lambda_0{}',\lambda_E{}^0,\eta_0{}'\right)$为（12）和（13）式描述的临界线上的一点，如果

$$\begin{aligned} &\lambda_E{}^0 > 0, \\ &L \le X_0 \le U, \\ &\eta_i^0 \ge 0 \ \mathit{for}\ \text{every}\ i \in LO \\ &\eta_i^0 \le 0 \ \mathit{for}\ \text{every}\ i \in UP \end{aligned} \text{（14），}$$

则X_0为有效组合。

临界线上的有效部分

定义

$$\lambda_a = \max\begin{pmatrix} \dfrac{L_i - \alpha_i}{\beta_i} & \beta_i > 0, i \in IN \\ \dfrac{U_i - \alpha_i}{\beta_i} & \beta_i < 0, i \in IN, U_i < +\infty \\ -\infty & otherwise \end{pmatrix} \text{（15），}$$

$$\lambda_b = \max\begin{pmatrix} \frac{-\gamma_i}{\delta_i} & \delta_i > 0, i \in LO \\ \frac{-\gamma_i}{\delta_i} & \delta_i < 0, i \in UP \\ -\infty & \text{otherwise} \end{pmatrix}$$（16），

$$\lambda_c = \min\begin{pmatrix} \frac{U_i - \alpha_i}{\beta_i} & \beta_i > 0, i \in IN, U_i < +\infty \\ \frac{L_i - \alpha_i}{\beta_i} & \beta_i < 0, i \in IN \\ +\infty & otherwise \end{pmatrix}$$（17），

$$\lambda_d = \min\begin{pmatrix} \frac{-\gamma_i}{\delta_i} & \delta_i < 0, i \in LO \\ \frac{-\gamma_i}{\delta_i} & \delta_i > 0, i \in UP \\ +\infty & \text{otherwise} \end{pmatrix}$$（18），

$\lambda_{hi} = \min(\lambda_c, \lambda_d)$（19），

$\lambda_{low} = \max(\lambda_a, \lambda_b, 0)$（20）。

定理 7.4

考虑（12）和（13）表示的一条临界线，如果

i. $\lambda_{low} < \lambda_{hi}$，

ii. 不存在 $i \in IN, \beta_i = 0, (\alpha_i > U_i \ or \ \alpha_i < L_i)$，

iii. 不存在 $i \in LO, \delta_i = 0, \gamma_i < 0$，

iv. 不存在 $i \in UP, \delta_i = 0, \gamma_i > 0$。

成立，该临界线上 $\lambda_{low} \le \lambda_E \le \lambda_{hi}$ 部分对应的点为有效组合。

定义：一个组合选择模型是非缩减的（nondegenerate），如果（15），（16），（17），（18）中的不是 $+\infty$，不是 $-\infty$，也不是 0 的项在不同的 i, j 之间不相等。

定理 7.11

在一个可行非缩减组合选择模型（feasible nondegenerate portfolio selection model）中，临界线序列 $l^0, l^1, \ldots$ 会在有限步内抵达一条临界线 l^*，l^* 的 $\lambda_{low}^* = 0$。l^* 上对应于 $\lambda_E^* = 0$ 的 X^* 是

对应于最小方差的有效组合。临界线序列$l^0, l^{-1}, \ldots$会在有限步内抵达一条临界线$\hat{l}$，$\hat{l}$的$\lambda_{hi}^* = +\infty$。如果可行E是有上界的，则X在$\hat{l}$上不变，记该X为$\hat{X}$，则其为最大期望的有效组合。如果可行E是无上界的，则$\hat{l}$提供了所有$E \geq \hat{E}_{low}$的有效组合，其中$\hat{E}_{low}$为$\lambda_E = \hat{\lambda}_{low}$对应的组合的期望收益率。临界线序列$\hat{l}, \ldots, l^{-1}, l^0, l^1, \ldots, l^*$上的有效部分构成了一个完整的，非冗余的，分段线性的有效组合的集合（a complete,nonredundant,piecewise linear set of efficient portfolio）。

(E, V)曲线

根据（12）式，在一条临界线上，$X = \alpha + \beta\lambda_E$，那么在这条线上，对于$\lambda_{low} \leq \lambda_E \leq \lambda_{hi}$，

$E = \mu' X = \mu'\alpha + \mu'\beta\lambda_E$（21），

$V = X'CX = (\alpha' C\alpha) + 2(\beta' C\alpha)\lambda_E + (\beta' C\beta)\lambda_E^2$（22），

如果$\mu'\beta = 0$，则结合引理 7.10（临界线上如果X不变，则E不变），再改临界线上的有效部分，(E, V)是一个固定不变的点。如果$\mu'\beta \neq 0$，则$\lambda_E = \dfrac{E - \mu'\alpha}{\mu'\beta}$，代入（22），得到

$$
\begin{aligned}
V &= (\alpha' C\alpha) + 2(\beta' C\alpha) \cdot \frac{E - \mu'\alpha}{\mu'\beta} + (\beta' C\beta) \cdot \left(\frac{E - \mu'\alpha}{\mu'\beta}\right)^2 \\
&= (\alpha' C\alpha) - 2(\beta' C\alpha) \cdot \frac{\mu'\alpha}{\mu'\beta} + (\beta' C\beta) \cdot \left(\frac{\mu'\alpha}{\mu'\beta}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2(\beta' C\alpha)}{\mu'\beta} - (\beta' C\beta)\frac{2\mu'\alpha}{(\mu'\beta)^2}\right)E \\
&\quad + (\beta' C\beta)\frac{1}{(\mu'\beta)^2}E^2
\end{aligned}
\qquad \text{（23）。}
$$

临界线开始

定理 8.1：记X_0是线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\max \ \mu' X \\
&s.t. \ AX = b \qquad \text{（24）} \\
&\qquad L \leq X \leq U
\end{aligned}
$$

的唯一非缩减最优基解[1]（unique nondegenerate optimal basic solution）。记 IN_0, LO_0, UP_0 是对应 X_0 的 IN, LO, UP 集合，则 X_0 是一个有效组合，对应于 IN_0, LO_0, UP_0 集合的 M_{II} 可逆，

并且，在对应的临界线上，对于某个 $\lambda^* \geq 0$，当 $\lambda_E \geq \lambda^*$ 时，有 $\begin{matrix} L \leq X \leq U, \\ \eta_i \geq 0 \ for \ i \in LO, \\ \eta_i \leq 0 \ for \ i \in UP, \end{matrix}$。因此，

对应的临界线 l^0 满足定理 7.4 的条件，对应的 $\lambda_{low} = \lambda^*, \lambda_{hi} = +\infty$。

注意：

定理 7.11 和定理 8.1 的前提是（a）线性规划问题（24）有唯一解，且该唯一解非缩减，（b）组合选择模型非缩减。原书第 9 章对不满足上述条件的 CLA 做了严密的扩展，但是也提出一个实际操作中可行修正方法。具体为：如果线性规划问题有无穷大解，那么可以加一个线性约束使得组合的均值不超过一个很大的值。如果线性规划问题是缩减的，虽然这会理论上导致无限循环，但是现实很少发生。如果线性规划问题有多个解，则微调期望收益率。如果组合选择模型非缩减，虽然理论上可能会导致无限循环，但实际上很少发生。

临界线算法（实现部分）

算法步骤

1. 根据定理 8.1，先通过单纯形法求解线性规划问题（24），得到下面几种情况
    1) 无解。表明该线性约束为空集。结束。
    2) 有多个解。则微调相应的预期收益率。
    3) 有唯一解。该唯一解是 degenerate 的也没关系，因为前一步的微调会使得定理 8.1 的结论仍然成立。得到 IN_0, LO_0, UP_0，以及 X_0。$\lambda_E = +\infty$ 处的组合为该 X_0。

2. 使用 IN, LO, UP，得到 M_{II}，得到（12）式和（13）式对应的 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，使用（15），（16），（20）得到该临界线的 λ_{low}，根据（12）式计算在该临界线上 $\lambda_E = \lambda_{low}$ 处的 X。

    如果 $\lambda_{low} \geq \lambda_d$（$\lambda_d$ 为我们要计算到的目标 λ，为一个正数，如 0.001），则根据（15）和（16）得到 λ_{low} 对应的 i，以及该 i 的状态切换，从而得到新的 IN, LO, UP，循环第 2 步；如果 $\lambda_{low} < \lambda_d$，则停止结束。

    下面就上述步骤中的细节地方做出描述。

[1] 相关概念见后面线性规划的单纯形法

约束转换

前面我们的约束条件是

$$\begin{aligned} &AX = b \\ &L \le X \le U \end{aligned} \quad （25），$$

其中，有些 X_i 可以没有上界。实际中我们还有其他类型的不等式约束，怎么将其他不等式约束转化成上述形式呢？

1) 如果 $a'X \le c$，则可将其变为

$\begin{aligned} &a'X + X_{n+1} = c, \\ &X_{n+1} \ge 0 \end{aligned}$，同时该 X_{n+1} 对应的 $\mu_{n+1} = 0$，该 X_{n+1} 使得原来的 C 变为 $\begin{bmatrix} C & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 0 \end{bmatrix}$。

2) 如果 $a'X \ge c$，则可将其变为

   $\begin{aligned} &a'X - X_{n+1} = c, \\ &X_{n+1} \ge 0 \end{aligned}$，同时该 X_{n+1} 对应的 $\mu_{n+1} = 0$，该 X_{n+1} 使得原来的 C 变为 $\begin{bmatrix} C & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 0 \end{bmatrix}$。

3) 如果原来一个等式约束也没有。可以加入

   $\begin{aligned} &X_{n+1} = 0, \\ &X_{n+1} \ge 0 \end{aligned}$ 同时该 X_{n+1} 对应的 $\mu_{n+1} = 0$，该 X_{n+1} 使得原来的 C 变为 $\begin{bmatrix} C & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 0 \end{bmatrix}$。

下面的的讨论都假设所有的约束已经转化成了（25）式的样式，X 是 n 维向量。

单纯形法

1. 第一阶段

   原始问题为（24）。现在，引入 m 个人工基变量 Y 将原来的问题做如下修改，得到辅助问题，

   $$\dot{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \dot{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dot{A} = (A, B), \dot{L} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{U} = \begin{pmatrix} U \\ +\infty \end{pmatrix} \quad （26），即$$

   $$\begin{aligned} &\max \dot{\mu}'\dot{X} \\ &s.t. \dot{A}\dot{X} = b \\ &\quad \dot{L} \le \dot{X} \le \dot{U} \end{aligned} \quad （27）。$$

   其中，B 为 $m \times m$ 的矩阵，其元素为

$$B_{i,j}=\begin{cases}0 & i\neq f\\ 1 & (i=j)\ and\ \left(b_i\geq (AL)_i\right)\\ -1 & (i=j)\ and\ \left(b_i<(AL)_i\right)\end{cases}$$ （28）。

然后，对于该辅助问题（27），我们让后 m 个变量作为基变量，前 n 个变量作为非基变量，且都处在下界。即 $IN=\{n+1,...,n+m\}, LO=\{1,...,n\}, UP=\{\ \}$。由（28）式的构造可知该 IN, LO, UP 对应的基解是一个（28）的可行解。

然后，调用单纯形基本算法（后面会介绍到）。调用单纯形基本算法后会得到如下 3 种结果之一：

1) m 个人工基变量都为 OUT，m 个 X 中的变量为 IN，则该 X 对于第二阶段是一个基可行解。使用该 IN, LO, UP 对原始问题开始第二阶段。
2) 超过 1 个人工基变量仍然属于 IN，且大于 0，则原始问题无解，停止。
3) 超过 1 个人工基变量仍然属于 IN，但是都为 0，则保留这些人工基变量。例如，假设 m 个基变量中第 1 个和第 3 个是这样的变量，且 $B_{1,1}=1, B_{3,3}=-1$。则对原始问题（24）以及均值方差问题做修改，得到调整后的原始问题，

   原始的 A, L, U, μ, C 分别变为，

   $$\begin{pmatrix} & 1 & 0\\ & 0 & 0\\ A, & 0 & -1\\ & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}U\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mu\\0\\0\end{pmatrix},\begin{bmatrix}C&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 。我们使用保留这些人工基变量的 IN, LO, UP，对于调整后的原始问题开始第二阶段。

2. 第二阶段

   我们用第一阶段得到的 IN, LO, UP，对于原始问题或调整后的原始问题调用单纯形基本算法。会得到下面 2 种结果中的 1 种：

   1) 得到了原始问题的 1 个最优解。检查该最优解对应 OUT 变量的 $profitability$（后面会看到指什么），如果某个 OUT 变量的 $profitability$ 为 0 且该变量为 LO，则将其 μ_i 减掉一个很小的正数，如果某个 OUT 变量的 $profitability$ 为 0 且该变量为 UP，则将其 μ_i 加上一个很小的正数，作为新的 μ_i。该做法对应于算法步骤部分的 1.2。
   2) 有无穷大解。停止。

3. 单纯形基本算法

1) 决定哪个现在处于 OUT 的变量应该 IN

我们选择现在处于 OUT 的变量中能使 E 提升最大的变量 IN（即 $\max \partial E / \partial X_i \quad for\ i \in LO, or - \partial E / \partial X_i \quad for\ i \in UP$）。下面计算 $\partial E / \partial X_i$。根据现在的 IN, OUT, LO, UP，

$E = \left(\mu_I{}', \mu_O{}'\right)\begin{pmatrix} X_I \\ X_O \end{pmatrix}$（29），

$\left(A_I, A_O\right)\begin{pmatrix} X_I \\ X_O \end{pmatrix} = b$（30），

则

$X_I = A_I^{-1}\left(b - A_O X_O\right)$（31），将其代入（29），得到

$$\begin{aligned} E &= \mu_I{}' A_I^{-1}\left(b - A_O X_O\right) + \mu_O{}' X_O \\ &= \mu_I{}' A_I^{-1}\left(b - A_{O-j} X_{O-j} - A_j X_j\right) + \mu_{O-j}{}' X_{O-j} + \mu_j X_j \end{aligned}$$（32），

则

$\frac{\partial E}{\partial X_j} = -\mu_I{}' A_I^{-1} A_j + \mu_j$（33），

定义

$\pi = -\left(A_I^{-1}\right)' \mu_I$（34），

定义每个变量的 $profitability$ 为

$$\Pi = \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial X_j} = \left(A_j\right)' \pi + \mu_j \quad for\ i \in LO \\ -\frac{\partial E}{\partial X_j} = -\left(A_j\right)' \pi - \mu_j \quad for\ i \in UP \\ \qquad 0 \quad for\ i \in IN \end{cases}$$（35），

选择 $j_{\max}$ 为（35）式中 OUT 变量中 $profitability$ 最大的变量对应的下标。

如果 $\Pi_{j_{\max}} \le 0$，则说明没有现在 OUT 的变量能够使得 E 更大。如果这种情况发生在第一阶段，则要么原问题无解（至少有一个处于 IN 的人工基变量大于 0），停止，要么原问题需要做调整（至少有一个处于 IN 的人工基变量，且都为 0），停止。如果这种情况发生在第二阶段，则我们找到了最优解。执行第二阶段的第（1）种结果对应的操作，结束。

2) 决定哪个变量应该 OUT

首先计算现在处于 IN 的变量对 $j_{\max}$ 变量的变化率 $AdjRate$（即 $\partial X_j / \partial X_{j_{\max}} \ if \ \ j_{\max} \in LO, -\partial X_j / \partial X_{j_{\max}} \ if \ \ j_{\max} \in UP$）。

根据现在的 IN, OUT, LO, UP，

$$\left(A_I, A_{O-j_{\max}}, A_{j_{\max}}\right)\begin{pmatrix} X_I \\ X_{O-j_{\max}} \\ X_{j_{\max}} \end{pmatrix} = b \text{（36），}$$

$$X_I = A_I^{-1}\left(b - A_{O-j_{\max}} X_{O-j_{\max}} - A_{j_{\max}} X_{j_{\max}}\right) \text{（37），}$$

所以，

$$\frac{\partial X_j}{\partial X_{j_{\max}}} = -A_I^{-1} A_{j_{\max}} \text{（38），}$$

所以，

$$AdjRate = \begin{cases} -A_I^{-1} A_{j_{\max}} \ \ if \ \ j_{\max} \in LO \\ A_I^{-1} A_{j_{\max}} \ \ if \ \ j_{\max} \in UP \end{cases} \text{（39），}$$

然后计算 $X_{j_{\max}}$ 可以变化的量 θ，

$$\theta = \min \begin{cases} U_{j_{\max}} - L_{j_{\max}} \\ \left(U_{j(i)} - X_{j(i)}\right) / AdjRate_i \ \ i = 1, \ldots m, AdjRate_i > 0 \\ \left(L_{j(i)} - X_{j(i)}\right) / AdjRate_i \ \ i = 1, \ldots m, AdjRate_i < 0 \end{cases} \text{（40），}$$

其中 $j\left(i\right)$ 表示对应第 i 个 IN 的下标。（40）中产生 θ 的 i 记做 i_{out}，对应的变量下标为 j_{out}。

（40）的前 2 行只适用于 U_j 的情况。如果没有 i_{out} 能提供 θ，即 $X_{j_{\max}}$ 的上限不存在，且 $i = 1, \ldots m, AdjRate_i < 0$ 不存在，且 $i = 1, \ldots m, AdjRate_i > 0$ 对应的 $U_{j(i)}$ 不存在，则原始问题有无穷大解，停止。如果 θ 来自于（40）的第 1 行，则 $X_{j_{\max}}$ 是应该 OUT 的变量，但是 $X_{j_{\max}}$ 同时也是要 IN 的变量，所以 $X_{j_{\max}}$ 从 LO 变为 UP 或从 UP 变为 LO。如果 θ 来自于（40）的第 2 行，则对应的 IN 变量应该 UP，如果 θ 来自于（40）的第 3 行，则对应的 IN 变量应该 LO。

3) 计算处于 IN 状态的变量的新值

对于老的 IN 变量， $X_I = X_I + \theta \cdot AdjRate$ （41）。

而对于即将 IN 的变量，如果是从 OUT 到 OUT，则不存在，如果是从 LO 到 IN，则变为 $L_i + \theta$，如果是从 UP 到 IN，则变为 $U_i - \theta$。

4) 更新 IN, OUT, LO, UP 集合。

从 OUT 和 LO 或 UP 里删除 $j_{\max}$，添加得到 IN。从 IN 删除 j_{out}，添加到 OUT 和 LO 或 UP。

5) A_I^{-1} 的更新。

在 IN 发生变化后，A_I^{-1} 需要重新计算，但是除了求逆，A_I^{-1} 有一种更有效的计算方式。如果是 $X_{j_{\max}}$ 变成 OUT，则 A_I^{-1} 不变，下面说的是其他情况。

假设我们要用向量 V 来替换 A_I 的第 i 列，记更新后的 A_I 和 A_I^{-1} 为 $\dot{A}_I$ 和 $\dot{A}_I^{-1}$，定义 $v = A_I^{-1} V$，定义 $E1$ 为将 $m \times m$ 的单位矩阵的第 i 列替换成 v 的矩阵。例如，$m = 4, i = 3$ 的情况下，

$$E1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 & 0 \\ 0 & 1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & v_4 & 1 \end{bmatrix}$$ （42）。

则

$\dot{A}_I = A_I E1, \dot{A}_I^{-1} = E1^{-1} A_I^{-1}$。而 $E1^{-1}$ 在该例子中为

$$E1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_1 / v_3 & 0 \\ 0 & 1 & -v_2 / v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 / v_3 & 0 \\ 0 & 0 & -v_4 / v_3 & 1 \end{bmatrix}$$ （43）。

而根据（39）式

$$v = A_I^{-1} V = A_I^{-1} A_{j_{\max}} = \begin{cases} -AdjRate \; if \;\; j_{\max} \in LO \\ AdjRate \; if \;\; j_{\max} \in UP \end{cases}$$ （44），所以

$$E1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -AdjRate_1/AdjRate_3 & 0\\ 0 & 1 & -AdjRate_2/AdjRate_3 & 0\\ 0 & 0 & 1/v_3 & 0\\ 0 & 0 & -AdjRate_4/AdjRate_3 & 1\end{bmatrix}$$（45），

其中

$$v_3=\begin{cases}-AdjRate_3\ if\ \ j_{\max}\in LO\\ AdjRate_3\ if\ \ j_{\max}\in UP\end{cases}$$（46）。

所以，$\dot{A}_I$ 的得来只需将原来 A_I 的第 i_{out} 列替换成 $A_{j_{\max}}$，而

$\dot{A}_I^{-1}=E1^{-1}A_I^{-1}$。

上面 5 个步骤执行完后，如果处在第一阶段，则判断是不是所有的人工基变量都处于 OUT，如果是，则返回对应的 IN,OUT,LO,UP，停止。如果不是第一阶段，则使用新的 IN,OUT,LO,UP 重新开始第（1）步。

临界线算法的 M_{II}^{-1} 更新

有了 IN,OUT,LO,UP，可以得到 M_{II}，然后通过求逆得到 M_{II}^{-1}。但是 M_{II}^{-1} 的得到可以使用前一步的信息不通过求逆来计算。我们区分 2 种情况，往 IN 增加一个变量和从 IN 去掉一个变量。

1. 往 IN 增加一个变量

   记更新后的 M_{II} 为 M_{ii}，且设新加的变量下标为 j，且该变量对应的行和列加在 M_{II} 的最后一行和最后一列。则

   $$M_{ii}=\begin{bmatrix}M_{II} & M_{Ij}\\ M_{jI} & M_{jj}\end{bmatrix}$$（47）。

   （47）可以分解为

   $$M_{ii}=\begin{bmatrix}I & 0\\ M_{jI}M_{II}^{-1} & \sqrt{M_{jj}-M_{jI}M_{II}^{-1}M_{Ij}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_{II} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & M_{II}^{-1}M_{Ij}\\ 0 & \sqrt{M_{jj}-M_{jI}M_{II}^{-1}M_{Ij}}\end{bmatrix}$$

   （48），

   记

   $$\xi=M_{II}^{-1}M_{Ij},\xi_j=\sqrt{M_{jj}-M_{jI}M_{II}^{-1}M_{Ij}}$$（49），

   则

$$M_{\dot{I}\dot{I}}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ \xi' & \xi_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{II} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \xi \\ 0 & \xi_j \end{bmatrix}$$ （50），

则

$$M_{\dot{I}\dot{I}}{}^{-1}=\begin{bmatrix} I & \xi \\ 0 & \xi_j \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} M_{II} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ \xi' & \xi_j \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} I & -\xi/\xi_j \\ 0 & 1/\xi_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{II}{}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\xi'/\xi_j & 1/\xi_j \end{bmatrix}$$ （51），

$$=\begin{bmatrix} M_{II}{}^{-1}+\xi\xi'/\xi_j{}^2 & -\xi/\xi_j{}^2 \\ -\xi'/\xi_j{}^2 & 1/\xi_j{}^2 \end{bmatrix}$$

$\bar{b}$ 同样需要更新。

对于新加进来的变量，根据（10）式，

$\bar{b}_j=-C_{j\dot{O}}X_{\dot{O}}$，（52）

对于原来 $\bar{b}$，变为

$$\left(\bar{b}\right)^{new}=\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} C_{I\dot{O}} \\ A_{\dot{O}} \end{bmatrix}X_{\dot{O}}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} C_{I\dot{O}} \\ A_{\dot{O}} \end{bmatrix}X_{\dot{O}}-\begin{bmatrix} C_{Ij} \\ A_j \end{bmatrix}X_j+\begin{bmatrix} C_{Ij} \\ A_j \end{bmatrix}X_j$$

$$=\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} C_{IO} \\ A_O \end{bmatrix}X_O+\begin{bmatrix} C_{Ij} \\ A_j \end{bmatrix}X_j$$ （53）。

$$=\left(\bar{b}\right)^{old}+\begin{bmatrix} C_{Ij} \\ A_j \end{bmatrix}X_j$$

$$=\left(\bar{b}\right)^{old}+M_{Ij}X_j$$

2. 从 IN 删除一个变量

根据（51）式

$M_{\dot{I}\dot{I}}{}^{-1}=\begin{bmatrix} M_{II}{}^{-1}+\xi\xi'/\xi_j{}^2 & -\xi/\xi_j{}^2 \\ -\xi'/\xi_j{}^2 & 1/\xi_j{}^2 \end{bmatrix}$，我们将 $M_{\dot{I}\dot{I}}{}^{-1}$ 作为旧的，将 $M_{II}{}^{-1}$ 作为新的，

记 $M_{\dot{I}\dot{I}}{}^{-1}=\begin{bmatrix} \left(M_{II}{}^{-1}\right)^{old} & M_{Ij}{}^{-1} \\ M_{jI}{}^{-1} & M_{jj}{}^{-1} \end{bmatrix}$

则

$$\begin{bmatrix} \left(M_{II}{}^{-1}\right)^{old} & M_{Ij}{}^{-1} \\ M_{jI}{}^{-1} & M_{jj}{}^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(M_{II}{}^{-1}\right)^{new}+\xi\xi'/\xi_j{}^2 & -\xi/\xi_j{}^2 \\ -\xi'/\xi_j{}^2 & 1/\xi_j{}^2 \end{bmatrix}$$ （54），

则

$\left(M_{II}{}^{-1}\right)^{new}=\left(M_{II}{}^{-1}\right)^{old}-\xi\xi'/\xi_j{}^2=\left(M_{II}{}^{-1}\right)^{old}-M_{Ij}{}^{-1}M_{jI}{}^{-1}/M_{jj}{}^{-1}$（55）。

而根据（53），

$\left(\bar{b}\right)^{new}=\left(\bar{b}\right)^{old}+M_{Ij}X_j$，将新旧调换，则

$\left(\bar{b}\right)^{new}=\left(\bar{b}\right)^{old}-M_{Ij}X_j$（56）。

计算(E,V)曲线的系数

根据（23），在一条临界线上，如果$\mu'\beta\neq 0$

$V=a_0+a_1E+a_2E^2$（57）。

根据 13 章（18.32），在一条临界线上，当$\lambda_{low}\leq\lambda_E\leq\lambda_{hi}$，

$$
\begin{aligned}
a_2&=\frac{1}{\mu'\beta},\\
a_1&=2\lambda_E-2a_2E, \qquad (58)\\
a_0&=V-a_1E-a_2E^2
\end{aligned}
$$

λ_E可取$\lambda_{low}\leq\lambda_E\leq\lambda_{hi}$上任意一点，比如$\lambda_{low}$或$\lambda_{hi}$，则其中$E,V$是与该$\lambda_E$对应的$E,V$。

参考文献

Harry Markowitz and Peter Todd，Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets，2000。

修正：

20190905：当满足约束的自变量只有一个值的时候，单纯型法的阶段 1 解出来原始自变量全部属于 IN，OUT 为空。目前编写的程序中没有对 OUT 为空做处理，所以有 bug。OUT 为空的情况下，单纯形法的阶段 2，直接返回阶段 1 的 IN，OUT，解为 inv(A)*b。CLA 中，当单纯性法的解的 OUT 为空时，不管 lamda 是多少，解为 inv(A)*b，因为只有这一个 x 满足约束。

经常会遇到的一种情况：假设有 10 个自变量，设定每个自变量的其上界为 1/10，同时又有约束自变量之和为 1；这样的话满足这种约束的 x 就只有一个，所以会遇到上述情况。