最优化与股指期货对冲

股指期货收益率

指数组合的回报率为

$$R_I = \frac{I_T - I_0 + D_I}{I_0} \quad (1),$$

其中，T 为持有期，I_0 为指数在 0 时刻的价格，I_T 为指数在 T 时刻的价格，D_I 为该指数在 0 到 T 时刻之间产生的分红按照无风险利率投资到 T 的总额。

股指期货期货的回报率为

$$R_F = \frac{F_T - F_0}{I_0} \quad (2),$$

注意股指期货的回报率不是一个完美定义的概念，因为股指期货投资额为 0（不考虑保证金），为了方便，分母为一单位现货（指数）的价格。

然后可以得到

$$\begin{aligned} R_F &= \frac{I_T - I_0 + D_I}{I_0} - \frac{D_I}{I_0} + \frac{(F_T - I_T) - (F_0 - I_0)}{I_0} \\ &= R_I - \frac{D_I}{I_0} + \frac{B_T - B_0}{I_0} \end{aligned} \quad (3)。$$

即股指期货收益率由 3 部分构成，分别是指数组合收益率，指数分红部分，基差变化部分。

其中一种特殊情况为，D_I 为 0，持有到期货交割日，则 B_T 为 0，而在无套利情况下 $\frac{B_0}{I_0}$ 为 r_f，

所以该情况下 $R_F = R_I - r_f$ （4）。

最优化

我们有 N 只股票的预期收益率， N 只股票收益率的方差矩阵。如果我们做均值方差最优化的时候不考虑股指期货，则上面的信息足够了。如果我们考虑估股指期货，把股指期货当成一个资产，记股指期货的收益率为 R_F，则我们必须知道其预期收益率，其收益率方差以及其与 N 只股票的协方差。

设股票收益率符合多因子模型

$$r_i = x^{ind}{}_{i1} f_1 + \ldots + x^{ind}{}_{iH} f_H + x^{sty}{}_{i1} f_M + \ldots + x^{sty}{}_{iS} f_M + \varepsilon_i$$

1) 简单做法。

根据（3）式，如果我们忽略掉分红部分和基差部分，则 R_F 为 $R_I - r_f$，其均值方差以及与 N 只股票的协方差很好计算，只需知道组成 R_I 的股票成分比例（构成指数的股票包含在 N 只股票里）。所以最优化为

$$
\begin{aligned}
&\max\ w'\overline{r} - \lambda_1 w'Vw - \lambda_2 TC(w) \\
&s.t.\ w'x_1^{ind} = 0 \\
&\ldots \\
&w'x_H^{ind} = 0 \\
&w'x_1^{sty} = 0 \qquad\qquad (5) \\
&\ldots \\
&w'x_S^{sty} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\
&other\ constrains
\end{aligned}
$$

其中，$w = \left(w_1, \ldots, w_N, w_I\right)'$ 的前 N 个元素为每只股票的权重，w_I 为股指期货的权重。$\overline{r} = \left(\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_N, \overline{R}_I - r_f\right)$，前 N 个元素为每只股票的预期收益率，$\overline{R}_I - r_f$ 为股指期货的预期收益率，$\overline{R}_I$ 可以用 N 只股票的预期收益率计算。$V = \begin{bmatrix} V_N & \mathrm{cov}(r_N, R_F) \\ \mathrm{cov}(r_N, R_F)' & V_{R_F} \end{bmatrix}$，其中，$V_N$ 为 N 只股票的协方差矩阵，$\mathrm{cov}(r_N, R_F)$ 为 N 只股票与 $R_F = R_I - r_f$ 的协方差向量，V_{R_F} 为 $R_F = R_I - r_f$ 的方差，这都可以用 N 只股票的协方差矩阵计算，但是先不用计算，稍后会化简。

从（5）式的约束可以看到，组合在每个行业因子的暴露为 0，所以 $w'\left(x_1^{ind} + \ldots + x_H^{ind}\right) = 0$，而 $x_1^{ind} + \ldots + x_H^{ind} = \left(1_N{}', \sum_{j=1}^{H} x_{Ij}^{ind}\right)'$，所以 $w'\left(x_1^{ind} + \ldots + x_H^{ind}\right) = \sum_{i=1}^{N} w_i + w_I \cdot \sum_{j=1}^{H} x_{Ij}^{ind} = 0$，又因约束中 $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$，所以 $w_I = \dfrac{-1}{\sum_{j=1}^{H} x_{Ij}^{ind}}$，即股指期货的权重为指数组合在各行业暴露度之和的倒数的相反数，如果指数组合在各行业暴露之和为 1，则 $w_I = -1$。

由于约束中在行业和其他风险因子上的暴露都为 0，所以，$w'\bar{r}=\sum_{i=1}^{N}w_i\bar{\varepsilon}_i+w_I\bar{\varepsilon}_I-w_I r_f$，$\varepsilon$ 为残差收益率，$w'Vw=w'\begin{bmatrix}V_{\varepsilon_N} & \mathrm{cov}(\varepsilon_N,\varepsilon_I) \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_N,\varepsilon_I)' & {\varepsilon_I}^2\end{bmatrix}w$，其中，$V_{\varepsilon_N}$ 为 N 只股票的残差收益率方差率对角矩阵，$\mathrm{cov}(\varepsilon_N,\varepsilon_I)$ 为 N 只股票的残差收益率与 R_I 的残差收益率的协方差向量，${\varepsilon_I}^2$ 为 R_I 的残差收益率的的方差。

2) 理论上最完整的做法是对（3）式中的分红部分和基差部分我们也做预测，得到其期望收益率和其与 N 只股票的协方差。

扩展

1.

上述最优化没有考虑买卖期货需要保证金。如果考虑保证金，记保证金比率为 m（保证金占期货总价的比例）。记 $w_1,\ldots w_N$ 为买多 N 只股票分别花的钱，$|w_{N+1}|$ 为卖空股指期货对应的保证金，w_{N+1} 为负数，表示卖空股指期货，w_{N+1} 为正数，表示买多股指期货；另外假设这么多保证金不会被用光，则组合收益率为，

$$\begin{aligned} r_p &= w_1r_1+\ldots+w_Nr_N+\frac{w_F}{m}\cdot\frac{F_1-F_0}{F_0} \\ &= w_1r_1+\ldots+w_Nr_N+\frac{w_F}{m}\cdot\frac{I_0}{F_0}\frac{F_1-F_0}{I_0} \qquad (6) \\ &= w_1r_1+\ldots+w_Nr_N+\frac{w_F}{m}\cdot\frac{I_0}{F_0}\left(R_I-\frac{D_I}{I_0}+\frac{B_1-B_0}{I_0}\right) \end{aligned}$$

如果忽略基差部分和分红部分，再假设 $\frac{I_0}{F_0}=1$，则组合收益率变为

批注 [A1]: 该假设可以去掉，因为 $\frac{I_0}{F_0}$ 在 0 时刻已知

$$r_p=w_1r_1+\ldots+w_Nr_N+w_F\frac{R_I}{m} \quad (7),$$

则，我们的目标变为最大化该组合的均值方差效用函数，所受约束为

$$w_1+\ldots w_N+|w_F|=1 \quad (8)。$$

所以最终问题为

$$
\begin{aligned}
&\max\ (w_1,...,w_N,w_F)' Er-\lambda(w_1,...,w_N,w_F)' V(w_1,...,w_N,w_F) \\
&s.t\quad w_1+...+w_N+|w_F|=1 \\
&\qquad w_i \ge 0 \quad for\ i=1,...,N
\end{aligned}
$$（9）。

其中 Er 是 $\left(r_1,...,r_N,\frac{R_I}{m}\right)$ 的预期收益率，V 是其对应方差矩阵。

2.

类似的，如果有 L 个股指期货，则问题变为

$$
\begin{aligned}
&\max\ (w_1,...,w_N,w_{F1},...,w_{F1})' Er- \\
&\lambda(w_1,...,w_N,w_{F1},...,w_{F1})' V(w_1,...,w_N,w_{F1},...,w_{F1}) \\
&s.t\quad w_1+...+w_N+|w_{F1}|+,...,|w_{FL}|=1 \\
&\qquad w_i \ge 0 \quad for\ i=1,...,N
\end{aligned}
$$（10）

其中 Er 是 $\left(r_1,...,r_N,\frac{R_{I1}}{m_1},...,\frac{R_{IL}}{m_L}\right)$ 的预期收益率，V 是其对应方差矩阵。

3.

进一步扩展，如果可以卖空个股，卖空个股得来的现金不能用来买股票，但是多头的股票可以按一定的折算比例用来做卖空个股的保证金。则组合收益率变为

$$
\begin{aligned}
&r_p=w_1r_1+...+w_Nr_N \\
&+w_{S1}\cdot(r_{S1}+c_{S1})+,...,+w_{SJ}\cdot(r_{SJ}+c_{SJ})+w_S\cdot 0 \\
&+\frac{w_{F1}}{m_{F1}}\cdot\frac{F_{11}-F_{10}}{F_{10}}+,...,+\frac{w_{FL}}{m_{FL}}\cdot\frac{F_{L1}-F_{L0}}{F_{L0}} \\
&\approx w_1r_1+...+w_Nr_N \\
&+w_{S1}\cdot(r_{S1}+c_{S1})+,...,+w_{SJ}\cdot(r_{SJ}+c_{SJ})+w_S\cdot 0 \\
&+\frac{w_{F1}}{m_{F1}}\cdot R_{I1}+,...,+\frac{w_{FL}}{m_{FL}}\cdot R_{IL}
\end{aligned}
$$（11），

其中，$w_{S1},...,w_{SJ}$ 为卖空的个股的价值，为负数；$c_{S1},...,c_{SJ}$ 为卖空个股对应的利息成本（扣除卖空得到的资金用来买货币基金等得到的收益）；w_S 为卖空个股所缴纳的总保证金现金，为非负数；$r_{S1},...,r_{SJ}$ 为卖空的个股的收益率，$m_{S1},...,m_{SJ}$ 为卖空的个股的保证金率。

最终问题变为

$$
\begin{aligned}
&\max\ \left(w_1,\dots,w_N,w_{S1},\dots,w_{SJ},w_S,w_{F1},\dots,w_{FL}\right)' Er-\\
&\lambda\left(w_1,\dots,w_N,w_{S1},\dots,w_{SJ},w_{F1},\dots,w_{FL}\right)' V\left(w_1,\dots,w_N,w_{S1},\dots,w_{SJ},w_S,w_{F1},\dots,w_{FL}\right)\\
&s.t\quad w_1+\dots+w_N+w_S+\left|w_{F1}\right|+,\dots,\left|w_{FL}\right|=1\left(\text{投资总额约束}\right)\\
&\qquad w_1d_1+\dots+w_Nd_N+w_S\ge-\left(w_{S1}m_{S1}+\dots+w_{S_J}m_{SJ}\right)\left(\text{保证金约束}\right)\\
&\qquad 1\ge w_i\ge 0\quad for\ i=1,\dots,N\\
&\qquad w_j\le 0\quad for\ j=1,\dots,J\\
&\qquad 1\ge w_S\ge 0,\\
&\qquad 1\ge\left|w_{Fj}\right|\ge 0,\ j=1,\dots L
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中，Er 是$\left(r_1,\dots,r_N,r_{S1}+c_{S1},\dots,r_{SJ}+c_{SJ},0,\frac{R_{I1}}{m_{F1}},\dots,\frac{R_{IL}}{m_{FL}}\right)$的预期收益率，$V$ 是其对应方差矩阵。$d_1,\dots,d_N$ 为 N 只股票可作为保证金的折算率。

4. （不确定）假设卖空个股得来的现金可以用来买股票。记卖空得来的现金中用来购买股票的金额为 w_{SL}，为非负数。则

$$
\begin{aligned}
&r_p=w_1r_1+\dots+w_Nr_N\\
&+w_{S1}\cdot\left(r_{S1}+c_{S1}\right)+,\dots,+w_{SJ}\cdot\left(r_{SJ}+c_{SJ}\right)+w_Sr_f-\left(w_{S1}+\dots+w_{SJ}+w_{SL}\right)r_f\\
&+\frac{w_{F1}}{m_{F1}}\cdot\frac{F_{11}-F_{10}}{F_{10}}+,\dots,+\frac{w_{FL}}{m_{FL}}\cdot\frac{F_{L1}-F_{L0}}{F_{L0}}\\
&\approx w_1r_1+\dots+w_Nr_N\\
&+w_{S1}\cdot\left(r_{S1}+c_{S1}-r_f\right)+,\dots,+w_{SJ}\cdot\left(r_{SJ}+c_{SJ}-r_f\right)+w_Sr_f-w_{SL}r_f\\
&+\frac{w_{F1}}{m_{F1}}\cdot R_{I1}+,\dots,+\frac{w_{FL}}{m_{FL}}\cdot R_{IL}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

最终问题变为

$$
\begin{aligned}
&\max\ \left(w_1,\dots,w_N,w_{S1},\dots,w_{SJ},w_S,w_{SL},w_{F1},\dots,w_{FL}\right)' Er-\\
&\lambda\left(w_1,\dots,w_N,w_{S1},\dots,w_{SJ},w_{F1},\dots,w_{FL}\right)' V\left(w_1,\dots,w_N,w_{S1},\dots,w_{SJ},w_S,w_{SL},w_{F1},\dots,w_{FL}\right)\\
&s.t\quad w_1+\dots+w_N-w_{SL}+w_S+\left|w_{F1}\right|+,\dots,+\left|w_{FL}\right|=1\left(\text{投资总额约束}\right)\\
&\qquad -\left(w_{S1}+\dots+w_{SJ}\right)\ge w_{SL}\\
&\qquad w_1d_1+\dots+w_Nd_N+w_S-\left(w_{S1}+\dots+w_{SJ}+w_{SL}\right)\ge-w_{S1}\left(m_{S1}+1\right)-\dots-w_{S_J}\left(m_{SJ}+1\right)\left(\text{保证金约束}\right)\\
&\qquad w_i\ge 0\quad for\ i=1,\dots,N\\
&\qquad w_j\le 0\quad for\ j=1,\dots,J\\
&\qquad 1\ge w_S\ge 0\\
&\qquad w_{SL}\ge 0
\end{aligned}
$$

（14）。

其中，Er 是$\left(r_1,...,r_N,r_{S1}+c_{S1}-r_f,...,r_{SJ}+c_{SJ}-r_f,r_f,-r_f,\frac{R_{I1}}{m_{F1}},...,\frac{R_{IL}}{m_{FL}}\right)$的预期收益率，$V$ 是其对应方差矩阵。$d_1,...,d_N$ 为 N 只股票可作为保证金的折算率。（14）式中的保证金约束的含义是，多头股票+现金保证金+卖空个股得到的金额中没有用来购买股票的部分这三部分之和要大于等于卖空金额需要的担保额度，卖空金额需要的担保额度等于各卖空股票的卖空金额乘以担保比例之和。可以看到，如果 $w_{SL}=0$，即卖空金额中用来购买股票的金额为 0，则（14）式化简为（12）式，（13）式也化简为（11）式。

实现

基于现实情况，我们实现 2 种情况，第 1 种情况为卖空标的只有股指期货，第 2 种情况为卖空标的只有 ETF。

情况 1

根据（10）式，

$$
\begin{aligned}
&\max\ \left(w_1,...,w_N,w_{F1},...,w_{FL}\right)' Er - \\
&\lambda\left(w_1,...,w_N,w_{F1},...,w_{FL}\right)' V\left(w_1,...,w_N,w_{F1},...,w_{FL}\right), \quad (14) \\
&s.t \quad w_1+...+w_N+\left|w_{F1}\right|+,...,\left|w_{FL}\right|=1 \\
&\qquad\ w_i \ge 0 \quad for\ i=1,...,N
\end{aligned}
$$

其中 Er 是$\left(r_1,...,r_N,\frac{R_{I1}}{m_1},...,\frac{R_{IL}}{m_L}\right)$的预期收益率，$V$ 是其对应方差矩阵。

如果我们加入上下界约束，即

$lb_i\left(w_1+...+w_N\right)\le w_i\le ub_i\left(w_1+...+w_N\right)\ for\ i=1,...,N$（15）。上下界约束需要引入新的变量，即

$$
\begin{aligned}
&lb_i w_1+...+(lb_i-1)w_i+...+lb_i w_N \le 0 \\
&ub_i w_1+...+(ub_i-1)w_i+...+ub_i w_N \ge 0,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&(lb_1-1)w_1+\ldots+\ldots+lb_1w_N-w_{a1}=0\\
&lb_2w_1+(lb_2-1)w_2\ldots+\ldots+lb_2w_N-w_{a2}=0\\
&\ldots\\
&lb_Nw_1+lb_Nw_2\ldots+\ldots+(lb_N-1)w_N-w_{aN}=0\\
\\
&(ub_1-1)w_1+\ldots+\ldots+ub_1w_N-w_{aN+1}=0 \qquad (16)\\
&ub_2w_1+(ub_2-1)w_2\ldots+\ldots+ub_2w_N-w_{aN+2}=0\\
&\ldots\\
&ub_Nw_1+ub_Nw_2\ldots+\ldots+(ub_N-1)w_N-w_{aN+N}=0\\
&w_{a1},\ldots,w_{aN}\le 0\\
&w_{aN+1},\ldots,w_{aN+N}\ge 0
\end{aligned}
$$

注意，（14）的等式约束中有绝对值，由于绝对值出现在股指期货上，我们要么尝试分情况去绝对值（需要每种情况下求最优解，然后这些最优解中选取最优解），要么事先规定股指期货的多空方向来去绝对值，我们采用第 2 种方式，事先规定股指期货在我们的组合中是卖空的，所以（14）的等式约束变为

$w_1+\ldots+w_N-w_{F1}-,\ldots,-w_{FL}=1$（17）

将（16）和（17）结合起来，我们的等式约束为

$Ax=b$，

其中

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix}\underbrace{1 \quad \ldots \quad 1}_{N\times 1} & \underbrace{-1 \quad \ldots \quad -1}_{L\times 1}\end{bmatrix},$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix}\underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{2N\times 1}\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}
lb_1-1 & lb_1 & \cdots & lb_1 & \\
lb_2 & lb_2-1 & \cdots & lb_2 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
lb_N & lb_N & \cdots & lb_N-1 & 0_{2N\times L}\\
ub_1-1 & ub_1 & \cdots & ub_1 & \\
ub_2 & ub_2-1 & \cdots & ub_2 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
ub_N & ub_N & \cdots & ub_N-1 &
\end{bmatrix},$$

$A_{22}=-I_{2N\times 2N}$，

$$b=\begin{bmatrix}1\\0_{2N\times 2N}\end{bmatrix},$$

$$x=\left(w_1,...,w_N,w_{F1},...,w_{FL},w_{a1},...,w_{a2N}\right)'。$$

同样，目标函数变为

$x'e-\lambda x'V_+x$，其中

$$e=\left(Er',0_{1\times 2N}\right)',$$

$$V_+=\begin{bmatrix}V & 0_{(N+L)\times 2N}\\0_{2N\times(N+L)} & 0_{2N\times 2N}\end{bmatrix}。$$

如果要加 38 因子暴露为 0 的约束，则等式约束变为

$Ax=b$，

其中，x 不变，A 变为

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\\ & A_3 & \end{bmatrix}$$，其中 A_{11} 到 A_{22} 不变，

$$A_3=\begin{bmatrix}X' & \frac{1}{m_{F1}}x_{F1}' & \cdots & \frac{1}{m_{FL}}x_{FL}' & 0_{38\times 2N}\end{bmatrix}$$，其中，

$x_{F1},...,x_{FL}$ 为各股指在 38 因子上的暴露。b 变为

$$b=\begin{bmatrix}1\\0_{2N\times 2N}\\0_{38\times 1}\end{bmatrix}。$$

所以最终问题为

$$\begin{aligned}&\max\ \ x'e-\lambda x'V_+x\\&s.t.\ \ Ax=b\\&\quad lb_+\le x\le ub_+\end{aligned}$$，其中

$$lb_+=\begin{bmatrix}0_{N\times 1}\\-1_{L\times 1}\\-1_{N\times 1}\\0_{N\times 1}\end{bmatrix},\quad ub_+=\begin{bmatrix}1_{N\times 1}\\0_{L\times 1}\\0_{N\times 1}\\1_{N\times 1}\end{bmatrix}$$。调用 CLA 就可以计算。

情况 2

根据（12）式，去掉其中股指期货部分，得到

$$\max\ \left(w_1,...,w_N,w_{S1},...,w_{SJ},w_S\right)' Er -$$
$$\lambda\left(w_1,...,w_N,w_{S1},...,w_{SJ},w_S\right)' V\left(w_1,...,w_N,w_{S1},...,w_{SJ},w_S\right)$$
$$\begin{aligned} s.t\quad & w_1+...+w_N+w_S=1\left(\text{投资总额约束}\right) \\ & w_1d_1+...+w_Nd_N+w_S \ge -\left(w_{S1}m_{S1}+...+w_{S_J}m_{SJ}\right)\left(\text{保证金约束}\right) \\ & 1\ge w_i \ge 0\quad for\ i=1,...,N \\ & w_{Sj}\le 0\quad for\ j=1,...,J \\ & 1\ge w_S\ge 0 \end{aligned} \quad (17)$$

其中，Er 是 $\left(r_1,...,r_N,r_{S1}+c_{S1},...,r_{SJ}+c_{SJ},0\right)$ 的预期收益率，V 是其对应方差矩阵。

$d_1,...,d_N$ 为 N 只股票可作为保证金的折算率。

（17）式中的保证金约束可以表示为

$$\begin{aligned} & w_1d_1+...+w_Nd_N+w_S+m_{S1}w_{S1}+...+m_{SJ}w_{S_J}-w_{a2N+1}=0, \\ & w_{a2N+1}\ge 0 \end{aligned} \quad (18),$$

对于多头的上下界约束，同样有（16）式成立。所以

等式约束最终为

$Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix},$$

$$A_1=\left[1_{1\times N},0_{1\times J},1,0_{1\times 2N},0\right],$$

$$A_2=\left[\begin{matrix} lb_1-1 & lb_1 & \cdots & lb_1 \\ lb_2 & lb_2-1 & \cdots & lb_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ lb_N & lb_N & \cdots & lb_N-1 \\ ub_1-1 & ub_1 & \cdots & ub_1 \\ ub_2 & ub_2-1 & \cdots & ub_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ub_N & ub_N & \cdots & ub_N-1 \end{matrix} \quad 0_{2N\times J} \quad 0_{2N\times 1} \quad -I_{2N\times 2N} \quad 0_{2N\times 1}\right],$$

$$A_3=\left[d_1,...,d_N,m_{S1},...,m_{SJ},1,0_{1\times 2N},-1\right],$$

$$x=\left(w_1,...,w_N,w_{S1},...,w_{SJ},w_S,w_{a1},...,w_{a2N},w_{a2N+1}\right)',$$

$b=\left(1,0_{1\times 2N},0\right)'$。

同样，目标函数变为

$x'e-\lambda x'V_+x$，其中

$e=\left(Er',0_{1\times 2N},0\right)'$，

$$V_+=\begin{bmatrix} V & 0_{(N+J+1)\times(2N+1)} \\ 0_{(2N+1)\times(N+J+1)} & 0_{(2N+1)\times(2N+1)} \end{bmatrix}。$$

如果加入 38 因子暴露为 0 的约束，则只需在原来的 A 下面并上矩阵

$$A_{38}=\begin{bmatrix} X' & x_{S1}' & \cdots & x_{SJ}' & 0_{38\times 1} & 0_{38\times 2N} & 0_{38\times 1} \end{bmatrix},$$

且在原来的 b 下面并上向量

$b_{38}=0_{38\times 1}$。

所以最终问题为

$$\begin{aligned} &\max\ x'e-\lambda x'V_+x \\ &s.t.\ Ax=b \qquad ，其中 \\ &\quad lb_+\le x\le ub_+ \end{aligned}$$

$$lb_+=\begin{bmatrix} \\ \\ \\ 0_{N\times 1} \\ -100_{J\times 1} \\ 0 \\ -1_{N\times 1} \\ 0_{N\times 1} \\ 0 \end{bmatrix},\quad ub_+=\begin{bmatrix} \\ \\ \\ 1_{N\times 1} \\ 0_{J\times 1} \\ 1 \\ 0_{N\times 1} \\ 1_{N\times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$。调用 CLA 就可以计算。

情况 1 简化版(算法 6)

情况 1 下多头每只股票的上限为每只股票占多头总金额的比例上限，但是这会导致展开后的约束很多，严重影响计算速度，所以我们将多头每只股票的上限改为占总金额的比例而不是多头总金额的比例。

根据（10）式，

$$\begin{aligned} &\max\ \left(w_1,\ldots,w_N,w_{I1},\ldots,w_{IL}\right)'Er- \\ &\lambda\left(w_1,\ldots,w_N,w_{I1},\ldots,w_{IL}\right)'V\left(w_1,\ldots,w_N,w_{I1},\ldots,w_{IL}\right) \\ &s.t\quad w_1+\ldots+w_N-w_{I1}-,\ldots,w_{IL}=1 \qquad ，（19） \\ &\qquad w_i\ge 0\ \ for\ i=1,\ldots,N \\ &\qquad w_{Ij}\le 0\ for\ j=1,\ldots,L \end{aligned}$$

其中 Er 是 $\left(r_1,\ldots,r_N,\frac{R_{I1}}{m_1},\ldots,\frac{R_{IL}}{m_L}\right)$ 的预期收益率，V 是其对应方差矩阵。

其中，记 N 只股票的期望收益率为 α，则

$E\left(\frac{R_{Ij}}{m_1}\right)=\frac{w_{Ij}'\alpha}{m_1}, j=1,\ldots,L$（20），其中 w_{Ij} 为第 j 个指数的成分构成。所以

$$Er=\left(\alpha,\frac{w_{I1}'\alpha}{m_1},\ldots,\frac{w_{IL}'\alpha}{m_L}\right)'$$，（21）。

记 N 只股票的方差矩阵为 V_N，则

$$V=\begin{bmatrix} V_N & \frac{1}{m_1}V_N w_{I1} & \cdots & \frac{1}{m_L}V_N w_{IL} \\ \frac{1}{m_1}w_{I1}'V_N & \frac{1}{m_1 m_1}w_{I1}'V_N w_{I1} & \cdots & \frac{1}{m_1 m_L}w_{I1}'V_N w_{IL} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m_L}w_{IL}'V_N & \frac{1}{m_L m_1}w_{IL}'V_N w_{I1} & \cdots & \frac{1}{m_L m_L}w_{IL}'V_N w_{IL} \end{bmatrix}$$（22）。

记 N 只股票的在 K 个因子的暴露矩阵为 X，是 $N\times K$ 的，则 $\frac{R_{I1}}{m_1}$ 在 K 个因子的暴露向量为 $\frac{1}{m_j}X'w_{Ij}, j=1,\ldots,L$，所以 K 个因子上暴露为 0 的约束条件为

$$\begin{bmatrix} X' & \frac{1}{m_1}X'w_{I1} & \cdots & \frac{1}{m_L}X'w_{IL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ w_{I1} \\ \vdots \\ w_{IL} \end{bmatrix}=0_{K\times 1}$$（23）。

所以（23）式结合（19）式中的等式约束，最终的等式约束为
$Aw=b$，
其中，

$$w=\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \\ w_{I1} \\ \vdots \\ w_{IL} \end{bmatrix}，\quad A=\begin{bmatrix} X' & \frac{1}{m_1}X'w_{I1} & \cdots & \frac{1}{m_L}X'w_{IL} \\ 1_{1\times N} & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}，\quad b=\begin{bmatrix} 0_{K\times 1} \\ 1 \end{bmatrix}。$$

我们再给（19）式中的变量加入一般化的上下限，则最终问题为

$$\begin{aligned} &\max \ \ Er'w-\lambda w'Vw \\ &s.t. \ \ Aw=b \\ &\quad\ \ lb\le w\le ub \end{aligned}$$

，其中

$lb=\begin{bmatrix} 0_{N\times 1} \\ -1_{L\times 1} \end{bmatrix}$，$ub=\begin{bmatrix} 0.05_{N\times 1} \\ 0_{L\times 1} \end{bmatrix}$。调用 CLA 就可以计算。