Asset pricing insights

1. 资产定价理论

   资产定价理论是解释资产价格为什么是这样的理论。理论是给定一些假设，然后推导出关于资产价格的结论。如果结论符合现实，说明该理论目前没被拒绝。如果结论不符合现实，则说明（在推导没问题的情况下）该理论的假设错误；一个理论的假设一般有多个，其中有一些假设是一价定律、无套利或夏普率不能太大；所以如果该理论价格与现实价格不符合，且排出不是其他假设错误，而是一价定律、无套利或夏普率不能太大的假设错误，则我们可以来套利。这是资产定价理论对我们的一个用处。

2. 资产定价理论的统一框架

   基本上，任何一个资产定价理论可以表示成如下形式

$$p_t = E_t\left(m_{t+1}x_{t+1}\right) \tag{1.1}$$

$$m_{t+1} = f\left(data, parameters\right) \tag{1.2}$$

   ，其中，p_t 是资产价格，x_{t+1} 是资产的 payoff，m_{t+1} 是随机折现因子（stochastic discount factor，SDF）。

   不同的资产定价理论，其差异就是(1.2)式关于 SDF 的差异。不同的资产定价理论，假设不同，则导致(1.2)式关于 SDF 的设定不同。对于同一个资产定价理论，其关于价格的结论用(1.1)式表示，而该表示只是一种表示方法，还有其他等价的表示方法，比如期望收益率-beta 表示，均值-方差前沿表示。而这些不同的表示在学术文献中经常见到，这就告诉我们不同的表示方法说的是同一回事。另外，针对这些不同表示，有对应的实证方法。

3. 同一资产定价理论的不同表示

   同一资产定价理论的不同表示见下图。等价关系的详细表述见之前的报告“asset pricing theory”的“一些等价关系”部分。

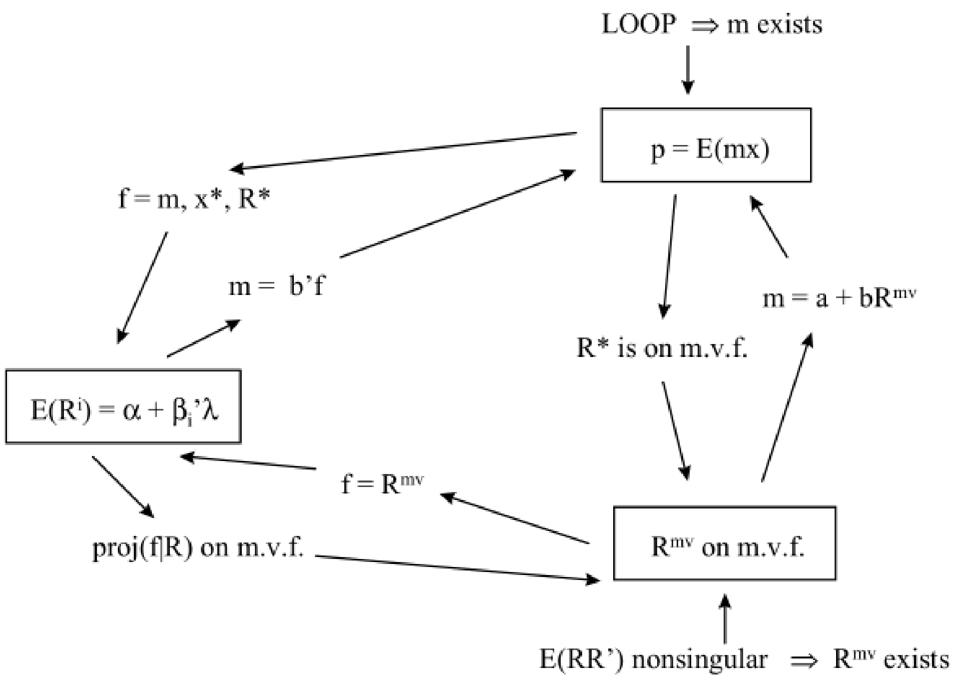

Figure 18. Relation between three views of asset pricing.

4. 等价关系的一些启示

上述等价关系告诉我们，资产定价理论的核心在于(1.2)，设定了 SDF，就相当于指定了期望收益-beta 中的因子，相当于指定了什么组合是均值-方差有效前沿组合。

上述等价关系中的期望也适用于实证概率（即某一样本集表示的概率）。所以我们能找到该样本集均值-方差有效的组合，根据等价关系，该组合可以作为单因子对该样本中的所有资产定价，且定价误差为零。这样做是错误的。因为，如果真实情况是 CAPM 成立，则市场组合或财富组合是定价因子，但是在某一样本集上，我们选出的均值-方差有效组合基本上不会恰巧是市场组合，而是该样本集上均值-方差有效组合，所以该组合在该样本集外不能很好的定价资产。

当前研究，有很多是从一池子因子中进行筛选，看看哪些因子组合能够作为 SDF 使得定价误差在某一样本集上最小。这是 factor fishing。这种操作，如果不加约束，很可能就会得到在样本机上定价误差很小，但是在样本外定价误差较大的模型。这类似于数据挖掘，或机器学习中的过拟合。

为了减小该问题，有两个方向。一是使用经济理论做约束，使得我们不会无限搜索因子池，而是使用新样本来验证理论。使用新样本来验证理论的问题在于，一旦我们用新样本验证某个理论错误，然后对该理论做修正，就没有新数据来验证修正后的理论。而使用经济理论做约束，目前的理论要么没有告诉我们应该用什么因子（目前理论没有告诉我们基本风险因子是什么），要么告诉我们什么因子都可以加（APT，ICAMP）。作者认为研究基本风险因子是应该的方向。

5. 条件信息

注意(1.1)式，其中的期望是条件在t 时刻信息的期望。所以我们要拿数据做检验的话，就得知道t 时刻人们的信息，而我们是不知道这些信息的，或者知道得不如真正的投资决策者（agent）知道的信息多。所以直接用该式子无法检验理论。还有一个不能用该条件形式做检验的原因是，就算我们知道 agent 做决策时的信息，然后将条件期

望表示成这些信息的函数，由于这些信息变量相对于我们的观测数据样本点个数太大，导致我们的统计检验不可靠。

所以，要将条件形式转换成无条件形式。记 z_t 为 t 时刻的一个信息，则根据(1.1)，有

$$z_t p_t = E_t\left(m_{t+1} x_{t+1} z_t\right) \tag{1.3}$$

，所以

$$E\left(z_t p_t\right) = E\left(m_{t+1} x_{t+1} z_t\right) \tag{1.4}$$

。其中，$x_{t+1} z_t$ 称为 managed portfolio 的 payoff。

有证明，(1.1)成立等价于，对于所有的 $z_t \in I_t$ ，(1.4)式成立。这样我们就得到了资产定价理论关于价格的无条件期望形式的结论，这就方便了检验。

另外一个问题。如果 $m_{t+1} = a_t + b_t' f_{t+1}$ ，且对于所有的 $x_{t+1} \in \underline{X}$ （$\underline{X}$ 是 payoff space），$p_t = E_t\left(m_{t+1} x_{t+1}\right)$ ，则该资产定价理论模型称为条件因子定价模型。而如果 $m_{t+1} = a + b' f_{t+1}$ ，且对于所有的 $x_{t+1} \in \underline{X}$ （$\underline{X}$ 是 payoff space，且包含 managed portfolio 的 payoff），$E\left(p_t\right) = E\left(m_{t+1} x_{t+1}\right)$ ，则该资产定价理论模型称为无条件因子定价模型。这里重点强调的是系数 a_t, b_t 在条件因子定价模型中，其是条件信息的函数，而在无条件因子定价模型中，其实常数。这两种模型的关系是，条件因子定价模型不能推出无条件因子定价模型，而无条件因子定价模型能推出条件因子定价模型。类似地，我们有条件期望-beta 模型和无条件期望-beta 模型，条件均值-方差有效前沿组合和无条件均值-方差有效组合，关系都是条件的不能推出无条件的，无条件的能推出条件的。

介绍这些概念的原因是，我们的理论模型经常是条件因子定价模型形式（具体例子见 137 页的例子，比如 CAPM 就是条件形式的），由于条件因子定价模型不能推出无条件因子定价模型，所以我们必须对 a_t, b_t 作为条件信息的函数建模，但是类似前面的，这些信息是投资者使用的信息，我们无法知道投资者做决策是用到的所有信息，所以无法对 a_t, b_t 建模，所以条件因子定价模型是无法检验的。该批评称为 Hansen-Richard critique。

我们退一步，如果我们的模型是条件因子模型，假设我们知道信息 z_t ，且我们假设 a_t, b_t 的形式为线性形式，即，$a_t = a' z_t, b_t = b' z_t$ ，则

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= a(z_t) + b(z_t) f_{t+1} \\ &= a_0 + a_1 z_t + (b_0 + b_1 z_t) f_{t+1} \\ &= a_0 + a_1 z_t + b_0 f_{t+1} + b_1 (z_t f_{t+1}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

，我们可以将该模型看成是以 $(1, z_t, f_{t+1}, z_t f_{t+1})$ 为因子的无条件因子模型。

6. 因子定价模型
   1) Consumption-based model

$$p_t = E_t\left(\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}\right) \tag{1.6}$$

，这里，

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \tag{1.7}$$

。即 SDF 是边际效用增长率。其推导见 Chapter 1。由于该模型实证效果不好，就有改进方向，其中一个方向是因子定价模型。其出发点是 Consumption-based model 实证表现不好的一个可能原因是 consumption 数据不好，我们可以做一些额外的假设，使得能够用一些测量较好的数据 f_{t+1} 代替消费数据 $\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$，且是 f_{t+1} 的线性函数。即

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \approx a + b' f_{t+1} \tag{1.8}$$

。最常见的线性因子定价模型有 CAPM，ICAPM，APT，其推导见 Chapter 9。

   2) CAPM

$$m_{t+1} = a + b R_{t+1}^W \tag{1.9}$$

。即 SDF 是 wealth portfolio 的线性函数。写成期望 return-beta 形式，为

$$E(R^i) = \gamma + \beta_{i,W}\left(E(R^W) - \gamma\right) \tag{1.10}$$

。

   3) ICAMP

$$m_{t+1} = a + b' f_{t+1} \tag{1.11}$$

， f_t 是投资者做最优化选择时的状态变量，比如投资者用来预测资产收益率的变量，其中一个状态变量是 t 时刻的投资者财富 W_t 。写成期望 return-beta 形式，为

$$E_t(R_{t+1}^i) - R_t^f \approx rra_t \operatorname{cov}_t\left(R_{t+1}^i, \Delta W_{t+1} / W_t\right) + \lambda_{zt} \operatorname{cov}_t\left(R_{t+1}^i, \Delta z_{t+1} / z_t\right) \tag{1.12}$$

，其中，

$$rra_t = -\frac{W_t V_{WW}(W_t, z_t)}{V_W(W_t, z_t)} \tag{1.13}$$

$$\lambda_{zt} = -\frac{z_t V_{Wz}\left(W_t, z_t\right)}{V_W\left(W_t, z_t\right)} \tag{1.14}$$

4) APT

如果资产 return 符合线性因子结构，即

$$\begin{gathered} R^i = E\left(R^i\right) + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} \tilde{f}_j + \varepsilon^i \\ E\left(\varepsilon^i\right) = E\left(\varepsilon^i \tilde{f}_j\right) = 0 \end{gathered} \tag{1.15}$$

，则在一些额外假设下，存在一个 SDF m ，使得 $m = a + b'f$ 。APT 的意思是如果资产收益由一些共同因子和特质因子构成，则这些共同因子就是因子定价模型中的因子。

7. 实证资产定价是在干什么？

实证资产定价就是用现实数据验证这些理论对不对。对于一个资产定价理论，首先拿数据估计其中的参数，然后评估该模型好不好。评估该模型好不好，就是检验该模型的定价误差是否为零。如下图。

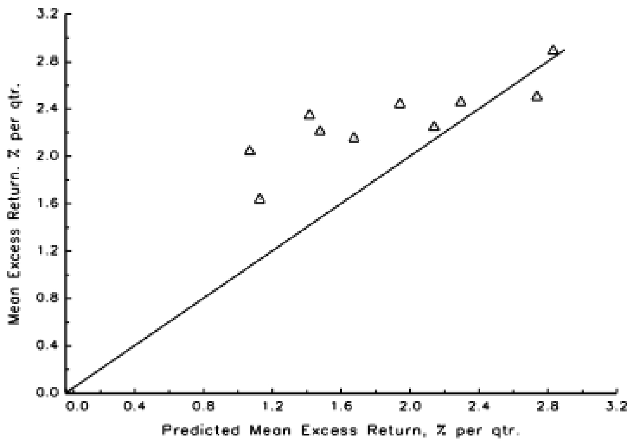

Figure 5. Mean excess returns of 10 CRSP size portfolios vs. predictions of the power utility consumption-based model. The predictions are generated by $-R^f cov(m, R^i)$ with $m = \beta(c_{t+1}/c_t)^{-\gamma}$. $\beta = 0.98$ and $\gamma = 241$ are picked by first-stage GMM to minimize the sum of squared pricing errors (deviation from 45° line). Source: Cochrane (1996).

8. 实证资产定价的方法

1) Time-series regressions

如果我们的定价模型是线性因子模型，且因子是 excess return，用来检验模型的也是 excess return，则我们的模型为（以单因子为例）

$$E\left(R^{ei}\right) = \beta_i E\left(f\right) \tag{1.16}$$

，其中，β_i 为下面时序回归的系数

$$R_t^{ei} = \alpha_i + \beta_i f_t + \varepsilon_t^i \tag{1.17}$$

，上面两式推出可以检验的结论 $\alpha_i = 0$ 。上述模型待估计的参数有 $\alpha_i, \beta_i, E\left(f\right)$ 。上

述模型需要检验原假设$\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, N$ 。

对于α_i, β_i的估计，可以分别对资产i ，以R_t^{ei} 对 f_t做时序回归得到，同时可以得到估计系数的标准差。对于$E(f)$的估计，可以对 f_t的时间序列求平均得到。对于原假设$\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, N$ 的检验，有对应的检验统计量。在ε_t^i在时间序列上是 iid，同方差，且与定价因子独立的情况下，该检验统计量渐进服从卡方分布，即

$$T\left[1+\left(\frac{E_T(f)}{\hat{\sigma}(f)}\right)^2\right]^{-1}\hat{\alpha}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha} \sim \chi_N^2 \tag{1.18}$$

。具体见 Chapter 12。

2) Cross-sectional regressions

如果我们的定价模型是线性因子模型，用来检验模型的是 excess return，则我们的模型为

$$E\left(R^{ei}\right) = \beta_i'\lambda, i = 1, \ldots, N \tag{1.19}$$

，该式子是说资产i 的期望收益率是其因子暴露β_i 的线性函数，所以我们可以$E\left(R^{ei}\right)$作为因变量，以β_i作为自变量做横截面回归，

$$E_T\left(R^{ei}\right) = \beta_i'\lambda + \alpha_i, i = 1, \ldots, N \tag{1.20}$$

，其中，$E_T\left(R^{ei}\right) \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t^{ei}$ 是对因变量$E\left(R^{ei}\right)$的代替，α_i是横截面回归残差，λ是横截面回归系数。自变量β_i来自于如下时序回归估计

$$R_t^{ei} = a_i + \beta_i' f_t + \varepsilon_t^i, t = 1, \ldots, T \ \ for\ each\ i \tag{1.21}$$

。如下图。

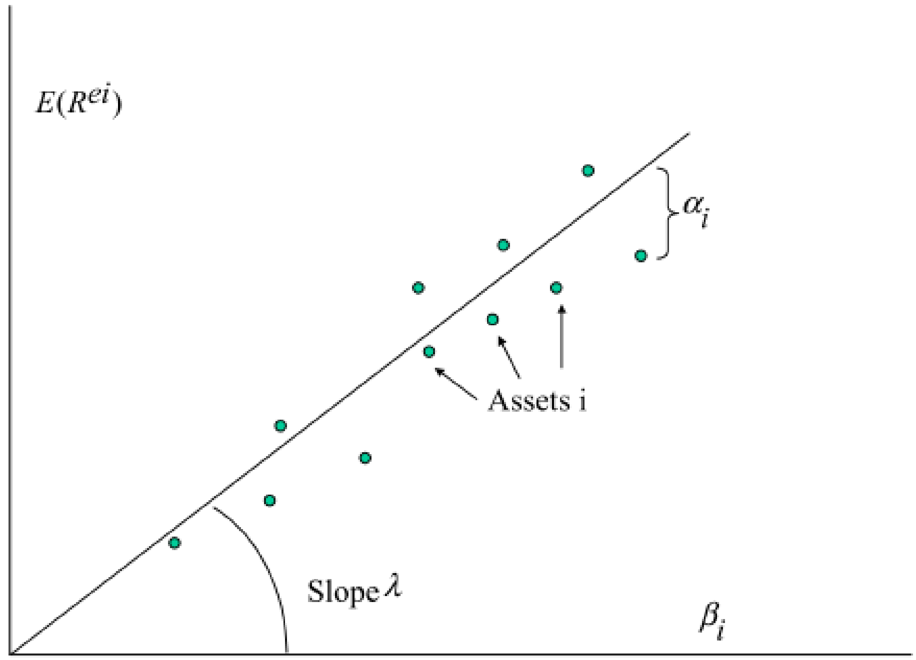

Figure 26. Cross-sectional regression

该模型的参数是$a_i, \beta_i, \lambda, \alpha_i$ ，我们的原假设是$\alpha_i = 0, i = 1, ..., N$ （严格来讲，应该是在T 很大的时候$\alpha_i = 0, i = 1, ..., N$ ）。a_i, β_i 用(1.21)时序回归得到。λ, α_i 用(1.20)式横截面回归得到。对于原假设的检验也有对应的统计量。该估计法也称 two-pass regression。具体见 chapter 12。

3) Fama-Macbeth regressions

模型仍然是(1.19)

第一阶段，同横截面回归的第一阶段，根据(1.21)进行时序回归估计 beta。第二阶段，对于每一期进行如下横截面回归，

$$R_t^{ei} = \beta_i' \lambda_t + \alpha_{it}, i = 1, ..., N \ \ for\ each\ t \tag{1.22}$$

。然后对于λ 和α_i 的估计为，

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\lambda}_t \tag{1.23}$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\alpha}_{it} \tag{1.24}$$

，同样可以得到检验定价误差是否为零的统计量。具体见 chapter 12。

4) GMM

我们的模型是

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= b' f_{t+1} \\ E(p_t) &= E(m_{t+1} x_{t+1}) \end{aligned} \tag{1.25}$$

，所以

$$E\left(x_{t+1}f'_{t+1}b-p_t\right)=0_{N\times1} \tag{1.26}$$

，其中，x, f, b, p 的维度分别是 N, K, K, N 。通常 x_{t+1} 为 return 或者 excess return，或者管理组合的 return， p_t 则为 1，或 0，或者管理组合的价格。该模型中待估计的系数为 b 。GMM 估计的思路是，(1.26)是 $N \ge K$ 条方程，我们可以选取其中的 K 条方程，然后联立方程组解出 b 。由于总体矩不知道，所以将(1.26)的总体矩替换成时间序列的样本矩，即

$$a_T E_T\left(x_{t+1}f'_{t+1}b-p_t\right)=0_{N\times1} \tag{1.27}$$

，其中 a_T 是 $K\times N$ 的权重向量，用来选取 N 个方程中的 K 个，下标 T 表示 a_T 可以是由样本数据决定的。

在 GMM 框架下，我们的原假设显而易见，就是(1.26)，即 N 个资产的定价误差为零，同样针对该原假设，GMM 有对应的检验统计量。具体见 chapter10，11， 13。

5) ML

是 GMM 的一种特例，给出了 GMM 中 a 的一种选择方法。

6) 总结，这些方法的目的都是对于一个资产定价理论，拿一组数据取检验该定价理论是否被拒绝。只不过做检验的中间步骤会涉及到对于该理论中一些参数的估计。这些方法各有优缺点。这些方法在一些条件下是等价的。这些方法使用的时候由于都用到了时间序列数据，尤其是 GMM，而 GMM 的使用要求时间序列数据平稳，要求 m, p, x 平稳，所以我们选择 p, x 的时候选择特殊的 payoff，即 return，excess return，managed portfolio，而不是任意的 payoff。使用组合而不使用个股作为检验资产也是为了提高平稳性，个股随着公司业务等的变化其 return 很可能不平稳。
7) 额外注意的点。文献中检验横截面线性因子资产定价理论的文章基本上是分为三步。第一步，找出一个你认为与资产 average return 相关的资产特征，然后将资产按该特征排序构造组合（一般分成 10 分位组合或 5 分位组合），然后检查这些组合的 average return 是否有差异。第二步，计算这些组合相对于线性定价理论模型的定价因子的 beta，检查这些组合的 average return 的差异是否能被这些 beta 差异所解释，即检验该定价理论应用在这些组合上的定价误差是否为零，如图 5 和图 26，这一步检验主要用上述 time-series regression 或 cross-sectional regression。第三步，如果不能被解释，则这一特征对应的 average return 差异称为异象（anomaly）。然后寻找新的定价理论（定价因子）看是否能解释这异象，即重复上述 3 步骤来验证新的定价理论（定价因子）。第一步的主要目的是找到横截面 average return 有差异的资产，因为如果横截面 average return 没有差异，那么也就不需要横截面资产定价理论来解释其差异。第一步使用组合而不使用个股的原因除了保持时间序列稳定外，还要组合的 beta 估计比个股的 beta 估计误差要小，还有一个原因是由于个股波动率比组合的大，使得个股间 average return 的差异不容易被看见。上述三步骤循环过程的例子如下。最开始的资产定价理论是 CAPM，人们拿市场 beta 作为特征，拿市场收益率作为定价因子，发现按该特征排序构造的组合的 average return 的差异能够被 CAPM 解释。后来按照 size（市值），B/M 排序构造组合，发现按照这些特征排序构造的组合的 average return 贝能被 CAPM 解释。然后人们提出

fama-french 3 因子定价理论。人们按照 size（市值），B/M 排序构造组合，发现按照这些特征排序构造的组合的 average return 能够被 fama-french 3 因子定价理论解释…。

9. 价值因子的经济逻辑

根据(1.6)，某个资产的收益率如果与边际效用增长正相关，即某个资产的收益率如果与消费增长率负相关，则该资产的期望收益率越小。价值股相对于成长股期望收益率各更高，那么价值股应该必成长股更加与边际效用增长率负相关。价值股有个特点，价值股之前已经出现了一连串的负面新闻，使其股价下跌，现在处于或接近财务困境，如果发生信用收缩（credit crunch）事件或其他经济衰退相关的事件，则价值股相对于成长股更加困难，价值股更容易下跌；而发生经济衰退事件的时候正好是人们边际效用较大（饥饿）的时候，所以价值股比成长股更加与边际效用增长负相关，所以价值股比成长股期望收益率高。用(1.6)的术语表示如下。将(1.6)写成期望 return-beta 形式，为

$$\begin{aligned} &E_t\left(R_{t+1}^i\right)-\frac{1}{E_t\left(m_{t+1}\right)}=-\frac{1}{E_t\left(m_{t+1}\right)}Cov_t\left(R_{t+1}^i,m_{t+1}\right)\\ &m_{t+1}=\beta\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)} \end{aligned} \tag{1.28}$$

。$\beta\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)}$与经济衰退或危机变量$z_{t+1}$（$z_{t+1}=0$表示衰退，$z_{t+1}=1$表示不衰退）负相关，而价值股 return R_{t+1}^{value} 比成长股的R_{t+1}^{growth}更加与z_{t+1} 正相关，即$Cov_t\left(R_{t+1}^{value},z_{t+1}\right)>Cov_t\left(R_{t+1}^{growth},z_{t+1}\right)$，所以$Cov_t\left(R_{t+1}^{value},m_{t+1}\right)<Cov_t\left(R_{t+1}^{growth},m_{t+1}\right)$，所以价值股的期望收益率比成长股的期望收益率更高。总结一下，就是价值股下期收益率比成长股的风险大（风险大体现在未来发生危机（饥饿）的时候价值股的表现比成长股更差），所以价值股下期期望收益率更大。

对这一理论的支持。（1）实证上，HML 即价值因子收益率与其他表示表示经济危机的变量没有表现出相关性。虽然这样，但是由于经济危机的数量比较少，所以实证的结论可靠性比较差。（2）Heaton and Lucas（1997b）从另一方面提供了支撑。该文章提出典型的股票持有人一般是小的私营企业的老板，而这些小的私营企业在经济危机时经营一般会变差，从而使得这些小老板边际效用增大即处于饥饿状态，而此时价值股由于本身的财务状况不好遇到经济危机时股价也会表现不好，所以这些股票持有人预见到价值股有这一性质就对价值股需求少一点，从而使得价值股的期望收益率更高。（3）Lettau and Ludvigson（2001a）研究得出虽然 HML 因子收益率与经济危机变量没有无条件相关系，但是具有条件相关性，即条件协方差不为零。（4）Liew and Vassalou（1999）做了如下回归

$$GDP_{t\to t+1}=a+0.065MKT_{t-1\to t}+0.058HML_{t-1\to t}+\varepsilon_{t+1} \tag{1.29}$$

，即当期 HML 因子收益率能够预测下一期 GDP 的增长率，所以 HML 很可能与经济危机变量相关。

我们现在知道价值效应是对一种风险的补偿；而经济直觉上，风险厌恶系数增加，则风险补偿应该增加；所以，风险厌恶系数增加，对价值因子收益率的风险补偿增加，即价值因子的期望收益率增加，所以价值因子的当前价格降低，所以当前价值股相对于

成长股下跌。

风险厌恶系数增加，则风险补偿应该增加。这一逻辑体现在公式上有两种体现。第一种，对于 Consumption-based model(1.28)，我们对$u'\left(c_{t+1}\right)$ 在c_t 处做 Taylor 展开近似，化简，该式变为

$$E_t\left(R_{t+1}^i\right)-R_t^f=R_t^f\beta\frac{-c_tu''\left(c_t\right)}{u'\left(c_t\right)}Cov_t\left(R_{t+1}^i,\frac{\Delta c_{t+1}}{c_t}\right) \tag{1.30}$$

，可见，同一横截面上，不同股票的期望收益率的差异体现在$Cov_t\left(R_{t+1}^i,\frac{\Delta c_{t+1}}{c_t}\right)$的差异上，这一协方差我们称为风险暴露，而单位风险暴露造成的风险补偿（因子$\frac{\Delta c_{t+1}}{c_t}$的风险补偿）为$R_t^f\beta\frac{-c_tu''\left(c_t\right)}{u'\left(c_t\right)}$。所以风险厌恶系数$\frac{-c_tu''\left(c_t\right)}{u'\left(c_t\right)}$越大，风险补偿$E_t\left(R_{t+1}^i\right)-R_t^f$越高。第二种，对于 ICAMP(1.12)(1.13)(1.14)，首先，对于因子状态变量W，该因子的风险补偿为rra_t ，所以风险厌恶系数越大，该因子的风险补偿越大；对于因子z ，其风险补偿为 (1.14)，而(1.14)可以化为

$$\lambda_{zt}=-\frac{z_tV_{Wz}\left(W_t,z_t\right)}{V_W\left(W_t,z_t\right)}=-\frac{c_tu''\left(c_t\right)}{u'\left(c_t\right)}\frac{\partial c_t}{\partial z_t}\frac{z_t}{c_t} \tag{1.31}$$

，$-\frac{c_tu''\left(c_t\right)}{u'\left(c_t\right)}$是风险厌恶系数，$\frac{\partial c_t}{\partial z_t}$是$t$ 期消费随状态变量z_t 的变化，我们状态变量是经济危机变量，所以$\frac{\partial c_t}{\partial z_t}$为正；所以风险厌恶系数越大，对于因子$z$ 的风险补偿越大。

值得注意的是，在该书第 21 章介绍的 habit 模型中，因子z 的风险补偿是个常数，是不随风险厌恶系数而变化的。

10. $p=E\left(mx\right)$ 对期权定价的启示

首先，对于经典的 Black-Sholes 期权定价公式的推导。使用的逻辑是：假设标的资产和无风险资产构成的报酬空间无套利，则根据前面的等价定理，可以推导出一个 SDF m ，有了 SDF ，就使用

$$C=E\left(mx^C\right) \tag{1.32}$$

来给期权定价。其中C 为 call option 的期初价格，x^C为 call option 的期末 payoff。

其次，BS 公式的推导，假设定价时间和 payoff 时间之间可以连续交易，假设期间

每个时间点期权的payoff可以被两个基础资产复制。BS也假设波动率和利率是固定的，如果二者是随机的，则期间每个时间点期权的 payoff 不能可以被两个基础资产复制。而且，许多期权的基础资产不能交易或流动性很差或非连续交易。这些所有的情况，会导致 basis risk，即我们能得到的最好的对冲组合不能完全复制期权。在这种情况下，SDF的框架有用武之地，能够确定期权价格的上下界。在一期情况下，即中间不能交易情况下，该框架为

$$\bar{C} = \max_m E\left(mx^C\right) s.t.\ p = E\left(mx\right), m \ge 0, \sigma^2\left(m\right) \le h / R_f \qquad (1.33)$$

，其含义是找到使得该期权价值最大的 SDF m ，受制于这三个约束：第一个约束表示该 SDF 要能够定价基础资产 x ，即该基础资产符合一价定律，也表示我们要从基础资产的价格中获取 SDF 的信息；第二个约束表示能够保证无套利；第三个约束表示该 SDF 定价的组合夏普率小于 h 。在此框架下对欧式期权得到价格上下界，如下图。

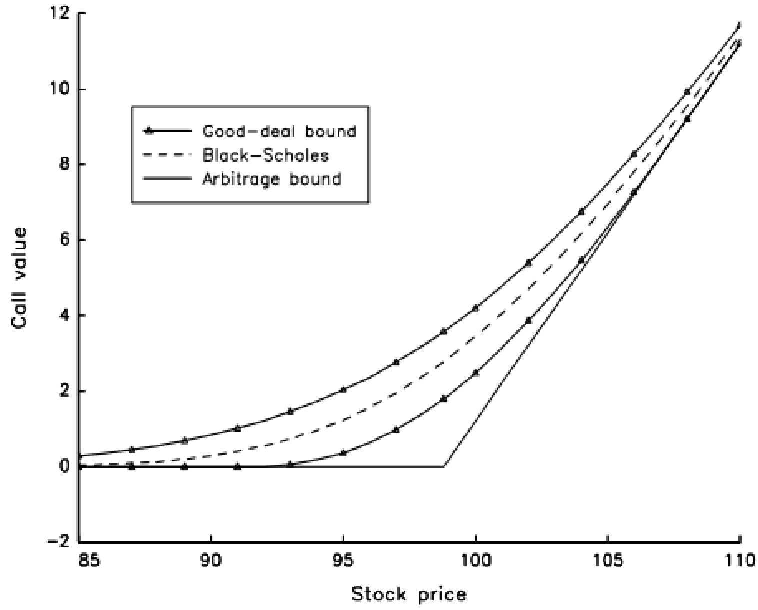

Figure 36. Good deal option price bounds as a function of stock price. Options have three months to expiration and strike price $K = \$100$. The bounds assume no trading until expiration, and a discount factor volatility bound $h = 1.0$ corresponding to twice the market Sharpe ratio. The stock is lognormally distributed with parameters calibrated to an index option.

在期间可以连续交易的假设下，可以用类似的框架来确定上下界。

参考文献：

John H. Cochrane, Asset Pricing, 2000.