**一．**填空题（每空2分，共20分）

1．设随机变量X服从参数为的泊松分布，则X的特征函数为。

2．设随机过程 其中为正常数，和是相互独立的随机变量，且和服从在区间上的均匀分布，则的数学期望为。

3．强度为λ的泊松过程的点间间距是相互独立的随机变量，且服从均值为的同一指数分布。

4．设是与泊松过程对应的一个等待时间序列，则服从分布。

5．袋中放有一个白球，两个红球，每隔单位时间从袋中任取一球，取后放回，对每一个确定的*t*对应随机变量，则 这个随机过程的状态空间。

6．设马氏链的一步转移概率矩阵，步转移矩阵，二者之间的关系为。

7．设为马氏链，状态空间，初始概率，绝对概率，步转移概率，三者之间的关系为。

8．在马氏链中，记 

，若，称状态为非常返的。

9．非周期的正常返状态称为遍历态。

10．状态常返的充要条件为。

二．证明题（每题6分，共24分）

1.设为三个随机事件，证明条件概率的乘法公式：。

证明：左边==右边

2.设{*X*(*t*),*t*≥0}是独立增量过程, 且*X*(0)=0, 证明{*X*(*t*),*t*≥0}是一个马尔科夫过程。

证明：当时，==

，又因为=

，故=

3.设为马尔科夫链，状态空间为，则对任意整数和，步转移概率 ，称此式为切普曼—科尔莫哥洛夫方程，证明并说明其意义。

证明：=

==，其意义为步转移概率可以用较低步数的转移概率来表示。

4.设是强度为的泊松过程，是一列独立同分布随机变量，且与独立，令，证明：若，则。

证明：由条件期望的性质，而

===，所以。

三．计算题（每题10分，共50分）

1.抛掷一枚硬币的试验，定义一随机过程： ,，设，求（1）的样本函数集合；（2）一维分布函数。

解：（1）样本函数集合为；

（2）当时，，

故；同理

2.设顾客以每分钟2人的速率到达，顾客流为泊松流，求在2分钟内到达的顾客不超过3人的概率。

解：设是顾客到达数的泊松过程，，故，则 3.设明天是否有雨仅与今天的天气有关，而与过去的天气无关。又设今天下雨而明天也下雨的概率为，而今天无雨明天有雨的概率为；规定有雨天气为状态0，无雨天气为状态1。设，求今天有雨且第四天仍有雨的概率。

解：由题设条件，得一步转移概率矩阵为，于是，四步转移概率矩阵为，从而得到今天有雨且第四天仍有雨的概率为。

4.一质点在1,2,3三个点上作随机游动，1和3是两个反射壁，当质点处于2时，下一时刻处于1,2,3是等可能的。写出一步转移概率矩阵，判断此链是否具有遍历性，若有，求出极限分布。

解：一步转移概率矩阵，



5.设有四个状态的马氏链，它的一步转移概率矩阵

（１）画出状态转移图；

（２）对状态进行分类；

（３）对状态空间进行分解。

解：（1）图略；

（2）均为零，所以状态3构成一个闭集，它是吸收态，记；0，1两个状态互通，且它们不能到达其它状态，它们构成一个闭集，记，且它们都是正常返非周期状态；由于状态2可达中的状态，而中的状态不可能达到它，故状态2为非常返态，记。

（3）状态空间可分解为：

四.简答题（6分）简述指数分布的无记忆性与马尔科夫链的无后效性的关系。

答：（略）