1. Qubits (Quantum bits)

1.1 ket $\rightarrow$ $|a\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

bra $\rightarrow$ $\langle a| = a^{\dagger} = (x^*, y^*)$

$\rightarrow$ a's adjoint

伴随矩阵，A的伴随矩阵为对A^T的所有元素取(复数)共轭 conjugate

(PS: 我们称满足 $H = H^{\dagger}$ 的矩阵H为 Hermitian Matrix 厄米矩阵)

而 $a^{\dagger}$ 与 b 的内积被表示为：$a^{\dagger} \cdot b = \langle a | b \rangle$

$\rightarrow$ barket 名字的由来。

1.2 Basic qubit states:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由线代知识，我们可知，对于两状态 $|\psi\rangle, |\phi\rangle$

$|\psi\rangle\langle\phi| \rightarrow$ 结果为一个矩阵

$\langle\psi|\phi\rangle \rightarrow$ 一个复数.

1.3 并且我们有性质：

$$\langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle \longrightarrow |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle$$

proof: let $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, |\phi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\langle\psi|\phi\rangle^* = (a^*, b^*)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}^* = (a^* c + b^* d)^* = (ac^* + bd^*)$$

$$\langle\phi|\psi\rangle = (c^*, d^*)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

2. Quantum Superposition

量子叠加.

2.1 对于一个任意量子状态:

Arbitrary Qubit State.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

其中: $\alpha, \beta \in C$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

α 与 β 又被称作"振幅"

amplitudes

3. Bloch Sphere
布洛赫球

3.1 对于 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (实际上也可以是其它basis)

α 与 β 的约束进行了变换. ($|\alpha|^2+|\beta|^2=1$) 我们会想到三角换元，有:

$$|\psi\rangle = e^{i\varphi_1}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi_2}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

(这里用 $\frac{\theta}{2}$ 与物理上的应用有关，不细展开了)

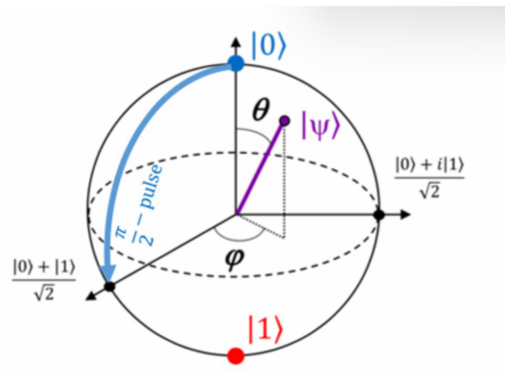
简化为:

$$e^{-i\varphi_1}|\psi\rangle = |\psi'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

3.2 实际上，$|\psi\rangle$ 与 $|\psi'\rangle$ 表示的是相同的量子态. $e^{i\varphi_1}$ 被称作"全局相位" global phase.

why?

因为在实际测量中，我们只能获得 $|\cos\frac{\theta}{2}|^2$ 的信息. ✗



$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

4. Quantum Basis.

4.1 (正交)量子基底: 指满足如下条件的量子态

(Orthonormal) Qubit Basis $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$.

① $\langle\phi_i|\phi_i\rangle = 1$, $i \in \{0, 1\}$.

② $\langle\phi_0|\phi_1\rangle = 0$

③ 构成二维希尔伯特空间的一组完备基，也即:

$$|\phi_0\rangle\langle\phi_0| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. 常用的 basis

① $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

② Hadamard basis:

x- basis : $\{|\pm\rangle\}$, $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$

y - basis : $\{i|\pm\rangle\}$.

5. Measurement

.1 我们无法直接得到量子状态的确切结果，

所以我们需要进行测量 → 检查状态是为 $|0\rangle$ or $|1\rangle$

measurement

5.2

e.g. Schrödinger's cat

$$|cat\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|dead\rangle + |alive\rangle)$$

当我们打开盒子时，这只猫的状态 collapse 为一个确定的状态：

Alive → $|alive\rangle$

Dead → $|dead\rangle$.

5.3

Born's rule

量子状态 $|\psi\rangle$ 系统得到某状态 $|\phi_n\rangle$ 的概率等于

$|\phi_n\rangle$ 在 $|\psi\rangle$ 上投影振幅模的平方，也即：

$$P(\phi_n) = |\langle\phi_n|\psi\rangle|^2$$

e.g. 对于 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

$$P(0) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} = P(1)$$

5.4

我们每次测量时都只能得到一个确切的结果 $(|\phi_n\rangle)$

但当我们大量重复地进行测量，我们便可以通过出现频率估计概率

5.5. 可观测量的测量

5.5.1

在物理上，我们用一个厄米矩阵H来表示物理上可观测的值.

Hermitian Matrix

(详见1.1)

(H的每个特征值 h_i 都是实数 → 测量结果)

3.5.2

我们可以将H分解为谱形式:

Spectral Decomposition

$$H = \sum_i h_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

h_i 为i-th特征值，

$|\phi\rangle$ 为 h_i 对应的特征向量.

而 $\{|\phi_i\rangle\}$ 构成一组 ONB

Orthogonal Normalized Complete Basis

5.5.3

量子态 $|\psi\rangle$ 对于测量H的期望为:

$$E = \langle\psi|H|\psi\rangle$$

而利用谱形式，我们有:

$$E = \sum_i \langle\psi| h_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\psi\rangle$$

$$= \sum_i h_i |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2 = \sum_i h_i p_i$$

p_i 也即在基 $\{|\phi_i\rangle\}$ 下测量 $|\psi\rangle$ 得到 ϕ_i 的概率

$\boxed{4.3}$ 思考题：Q：如下两种 machine 的区别：

①：当你按下时，它有 $\frac{1}{2}$ 概率处于 $|0\rangle$，～ $|1\rangle$

②：当你按下时，它处于 $|+\rangle$.

A：当我们以 basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 视角考虑时，它们两者等价.

当我们以 x-basis 视角考虑时：

① → $\frac{1}{2}$ 概率 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$，

$\frac{1}{2}$ 概率 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$

② → $|+\rangle$

6. Quantum Gate

6.1 一个量子门是一个 $R^2 \to R^2$ 的线性函数

该变换矩阵用酉矩阵来表示：

Unitary Matrix

$$|\psi\rangle \to U|\psi\rangle$$

U满足如下性质：

① $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I$

② 可逆 （也是 Quantum Computer 与传统计算机的区别之一）

Reversibility

$$U^{-1} = U^{\dagger}$$

③ 不可交换

Non-commutativity

$$\exists |\psi\rangle, \ s.t. \quad UV|\psi\rangle \neq VU|\psi\rangle.$$

6.2 定义一个量子门.

你需要：

① 写出它的矩阵形式

bra-ket form

② 描述它作用在基上的变换结果.

e.g. $\begin{cases} \text{Pauli } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\ X: |0\rangle \to |1\rangle,\ |1\rangle \to |0\rangle \end{cases}$

6.3 量子门 → 基变换

量子门的数学本质其实是对基的变换.

对于两组 Quantum Basis: $\{|\psi\rangle, |\psi^{\perp}\rangle\} \to \{|\phi\rangle, |\phi^{\perp}\rangle\}$

我们有: $U = |\phi\rangle\langle\psi| + |\phi^{\perp}\rangle\langle\psi^{\perp}|$

s.t. $U|\psi\rangle = |\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle + |\phi^{\perp}\rangle\langle\psi^{\perp}|\psi\rangle$

$= |\phi\rangle$

同理: $U|\psi^{\perp}\rangle = |\phi^{\perp}\rangle$

6.4 量子门的可视化

任意一个单量子比特门都等价于对 Bloch Sphere 进行一个三维空间中的旋转

我们用 R_x^{α} 表示在 x 轴上旋转 α, 有:

→ 前文3.1中使用 $\frac{\theta}{2}$ 的原因之一

x, Y, Z 为 Pauli Matrix

$$\begin{cases} R_x^{\alpha} = e^{-i\frac{\alpha}{2}X} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2} \\ -i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ R_Y^{\alpha} = e^{-i\frac{\alpha}{2}Y} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ R_Z^{\alpha} = e^{-i\frac{\alpha}{2}Z} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

6.5. 在任意基下的测量

我们如何实现在量子态 $|\psi\rangle$ 上对任意基 $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ 的测量？

注意到 Born's rule：$P(x) = |\langle\phi_x|\psi\rangle|^2$，$x \in \{0,1\}$

我们令 $|\phi_x\rangle = U|x\rangle$，$x \in \{0,1\}$，此时我们有：

$$P(x) = P(x) = |\langle\phi_x|\psi\rangle|^2 = |\langle x|U^\dagger|\psi\rangle|^2$$

$$= |\langle x|\psi_U\rangle|^2$$

其中 $|\psi_U\rangle = U^\dagger|\psi\rangle$

此时我们将对任意基的测量转化为了对标准基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 的测量 → 最简单

6.6. 一些常见的量子门：

① $-\boxed{I}-$

Identity

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|0\rangle \to |0\rangle$

$|1\rangle \to |1\rangle$

$I^{-1} = I$

② $-\boxed{X}-$　$-\boxed{Y}-$　$-\boxed{Z}-$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|0\rangle \to |1\rangle$　　$|0\rangle \to i|1\rangle$　　$|0\rangle \to |0\rangle$

$|1\rangle \to |0\rangle$　　$|1\rangle \to -i|0\rangle$　　$|1\rangle \to -|1\rangle$

$X^{-1} = X$　　$Y^{-1} = Y$　　$Z^{-1} = Z$

几何意义：绕（ ）轴旋转 180°

pauli 门

但是 $R_x(\pi) = -iX$

③ $-\boxed{H}-$

Hadamard 门

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$|0\rangle \to |+\rangle$

$|1\rangle \to |-\rangle$

$\Rightarrow$ 能将计算基态变为叠加态 ※

$H^{-1}=H$

几何意义: 绕直线 $x=z$ 旋转 180°

④ R_x^α R_y^α R_z^α 略.

⑤ $-\boxed{S}-$

S-gate or $\frac{\pi}{2}$-gate.

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

$|0\rangle \to |0\rangle$

$|1\rangle \to i|1\rangle$

$S^2=Z$ $\quad S^\dagger=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

也被称作 $Z^{\frac{1}{2}}$

几何意义: 绕z轴旋转 $\frac{\pi}{2}$

$-\boxed{T}-$

T-gate or $\frac{\pi}{4}$-gate.

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$|0\rangle \to |0\rangle$

$|1\rangle \to e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle$

几何意义: 绕z轴旋转 $\frac{\pi}{4}$

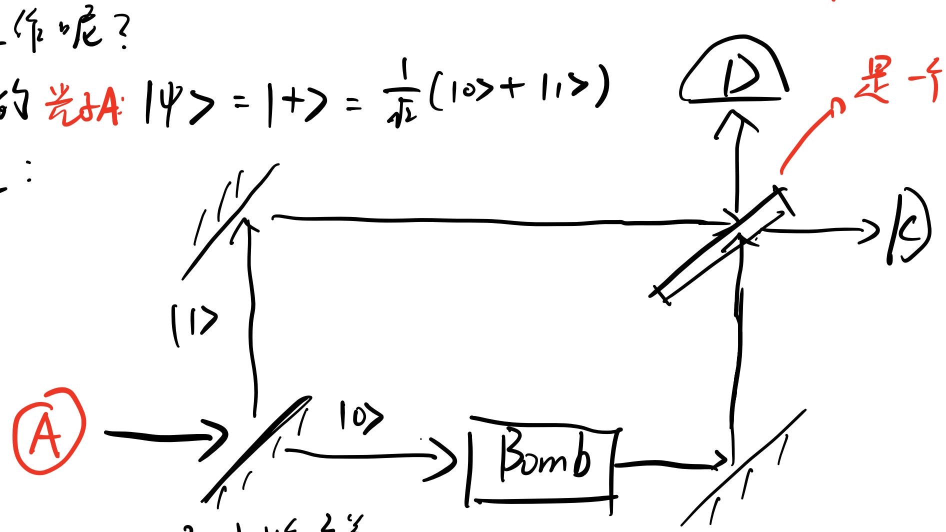
7.

Elitzur-Vaidman bomb tester.

我们有一颗炸弹，它如果遇到光子就会爆炸。我们如何在不引爆炸弹的情况下，确定这颗炸弹是否正常工作呢？

我们考虑如下量子态的光子A: $|\psi\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

与装置：



若 $|\psi\rangle \to |0\rangle$，则通过炸弹

若 $|\psi\rangle \to |1\rangle$，则不经过炸弹

我们对结果收到的光子量子态进行对基 $\{|\pm\rangle\}$ 的测量。

在单次测量中，可能有如下结果：

(1) 炸弹是坏的

只要结果不是 $|+\rangle$，就说明炸弹是好的

此时测量结果均表示为 $|\psi\rangle = |+\rangle$.

(2) 炸弹是好的

① 光子坍缩到 $|0\rangle$ → 炸弹爆炸。 50%

② 光子坍缩到 $|1\rangle$ → 经过测量 → 表现为 $|-\rangle$: $P(-) = |\langle -|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

表现为 $|+\rangle$: $P(+) = |\langle +|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

综上：若结果为 $|-\rangle$，则说明有好炸弹，且我们未曾引爆它。

8. 多量子比特系统。

8.1 张量积 $\otimes$

Tensor Product.

我们设 $V_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

则 $V_1 \otimes V_2 = \begin{pmatrix} a_1 V_2 \\ a_2 V_2 \\ \vdots \\ a_m V_2 \end{pmatrix} \longrightarrow m \times n$ 维向量.

8.2. 张量积的性质:

for $c \in \mathbb{C}$, we have.

① $c(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (c|\psi\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes (c|\phi\rangle)$

② $(|\psi\rangle + |\psi'\rangle) \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle + |\psi'\rangle \otimes |\phi\rangle$

($|\psi\rangle$ 与 $|\psi'\rangle$ 同维)

③ $(\langle\psi| \otimes \langle\psi'|)(|\phi\rangle \otimes |\phi'\rangle) = \langle\psi|\phi\rangle \cdot \langle\psi'|\phi'\rangle$

④ 对于矩阵 A, B.

$(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = A|\psi\rangle \otimes B|\phi\rangle$

$$
\begin{cases}
A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C \\
(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C \\
(kA)\otimes B=A\otimes(kB)=k(A\otimes B) \\
(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C) \\
(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD) \\
(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T \\
\overline{A\otimes B}=\overline{A}\otimes\overline{B} \\
(A\otimes B)^\dagger=A^\dagger\otimes B^\dagger
\end{cases}
$$

8.3. 我们简记 $|xy\rangle=|x\rangle\otimes|y\rangle$，

computational basis of 2-qubit

则一个2维 Qubit 可以被表示为:

$$|\psi\rangle=\alpha_{00}|00\rangle+\alpha_{10}|10\rangle+\alpha_{01}|01\rangle+\alpha_{11}|11\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_{00}\\\alpha_{01}\\\alpha_{10}\\\alpha_{11}\end{pmatrix}$$

其中 $\{|00\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},|01\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},|10\rangle,|11\rangle\}$ 为

2维量子比特的复合基

9. Product or Entangled

9.1. Product States

若一 2-qubits state $|\psi\rangle$ 可被表示为两 1-qubit 张量积，则被称为 product states

i.e. $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$

9.2. Entangled states

纠缠态

若一 2-qubit states 非 product states，则为 Entangled States.

一组经典的纠缠态 basis:

Bell basis:
$$\begin{cases} |B_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ |B_1\rangle = X_1 |B_0\rangle \\ |B_2\rangle = Y_1 |B_0\rangle \\ |B_3\rangle = Z_1 |B_0\rangle \end{cases}$$

同样的，对于 2-qubit 量子门我们有

Product Gate 与 Entangling Gate

10. 回看 Schrödinger's Cat

我们以 2-qubit的角度看.

第一 qubit 表示: $\begin{cases} |0\rangle \to \text{放出毒气} \\ |1\rangle \to \text{不放} \end{cases}$

第二 qubit 表示: $\begin{cases} |0\rangle \to \text{猫死} \\ |1\rangle \to \text{猫活} \end{cases}$

则 $|cat\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |dead\rangle + |1\rangle \otimes |alive\rangle)$

$= |\beta_{00}\rangle$

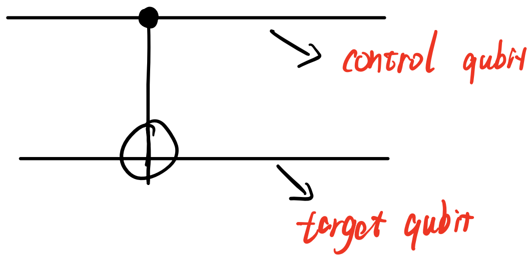
11. Controlled Gates.

对于一个 ~ $C(U)$, 有如下作用:

$$\begin{cases} C(U)\,|0\psi\rangle = |0\rangle \otimes |\psi\rangle \\ C(U)\,|1\psi\rangle = |1\rangle \otimes U|\psi\rangle \end{cases}$$

类似 if-else 结构.

故我们发现:



$$CNOT = CNOT_{1,2}$$
$$= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$$
$$= C(X)$$

进一步的, 我们可以发现:

通过 单qubit gate + CNOT 可以构建任意 $C(U)$

$$SWAT = CNOT_{1,2}\ CNOT_{2,1}\ CNOT_{1,2}.$$

$$\begin{cases} SWAT\,|00\rangle = |00\rangle \\ SWAT\,|01\rangle = |10\rangle \\ SWAT\,|10\rangle = |01\rangle \\ SWAT\,|11\rangle = |11\rangle \end{cases}$$

11. 部分测量

Partial Measurement

有: $P(x) = \langle\psi|(|\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes I)|\psi\rangle$

→ 只关心 $|\psi\rangle$ 中第一个 qubit 的测量

证明: 我们考虑 $P(x,y)$ 是对 $|\psi\rangle$ 两个 qubit 的测量.

$$P(x,y) = \left|(\langle\phi_x| \otimes \langle\phi_y|)|\psi\rangle\right|^2$$

$$= \langle\psi|(|\phi_x\rangle \otimes |\phi_y\rangle)(\langle\phi_x| \otimes \langle\phi_y|)|\psi\rangle$$

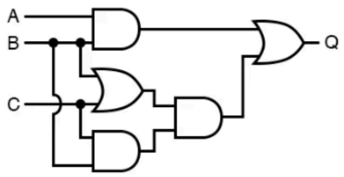
$$= \langle\psi|(|\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes |\phi_y\rangle\langle\phi_y|)|\psi\rangle$$

$$\therefore P(x) = \sum_y P(x,y) = \langle\psi|(|\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes \underbrace{\sum_y |\phi_y\rangle\langle\phi_y|}_{I})|\psi\rangle$$

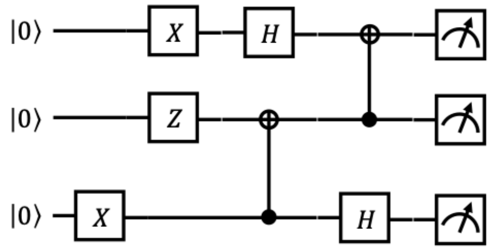
$$= \langle\psi|(|\phi_x\rangle\langle\phi_x| \otimes I)|\psi\rangle$$

13.

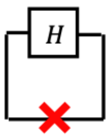
Quantum circuit rules

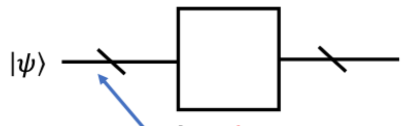


A logical circuit



1. Gates are applied sequentially from left to right:
2. Wires represent identity ("do nothing").
3. Wires (qubits) are preserved and measured at the end.
4. No loop.





A register,
consisting of one or more qubits