Section1

因为大部分与高中内容重合, 所以仅记录一些高中不常用到的内容

Definition1.1 坐标表示方法

1.1.1 Position Vector

我们用从原点出发, 指向某点的向量表示该点的坐标

1.1.2 parametric equation

对于一个 $\mathbb{R}^2$上的点集 (x, y) , 我们可以有如下的表示方式:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

该点集也可以表示为:

$$v(t) = (x, y) = (f(t), g(t))$$

1.1.3 Polar Coordinates

在 $\mathbb{R}^2$ 上, 我们可以用有序二元对 (r, θ) 来表示点 P 的坐标.
其中 r 等于 $||OP||$ 的大小, θ 等于 $\vec{OP}$ 与x坐标轴的夹角.

Proposition 极坐标与笛卡尔坐标的转换

对于点 $P = (x, y)$, 我们有:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

也即

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

1.1.4 Cylindrical Coordinates 圆柱坐标系

在 $\mathbb{R}^3$ 上, 我们可以用有序三元对 (r, θ, z) 来表示点 P 的坐标.
其中 (r, θ) 表示P在xy平面上的投影, z为P的z坐标

1.1.5 Spherical Coordinates 球坐标

在 $\mathbb{R}^3$ 上, 我们可以用有序三元对 (r, ψ, θ) 来表示点 P 的坐标.
其中 (r, θ) 定义同极坐标, ψ为$\vec{OP}$的与z轴的夹角.

Proposition 笛卡尔坐标系与球坐标系的转换

对于点 $P = (x, y, z)$, 我们有:

$$\begin{cases} x = r\sin\psi\cos\theta \\ y = r\sin\psi\sin\theta \\ z = r\cos\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\psi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

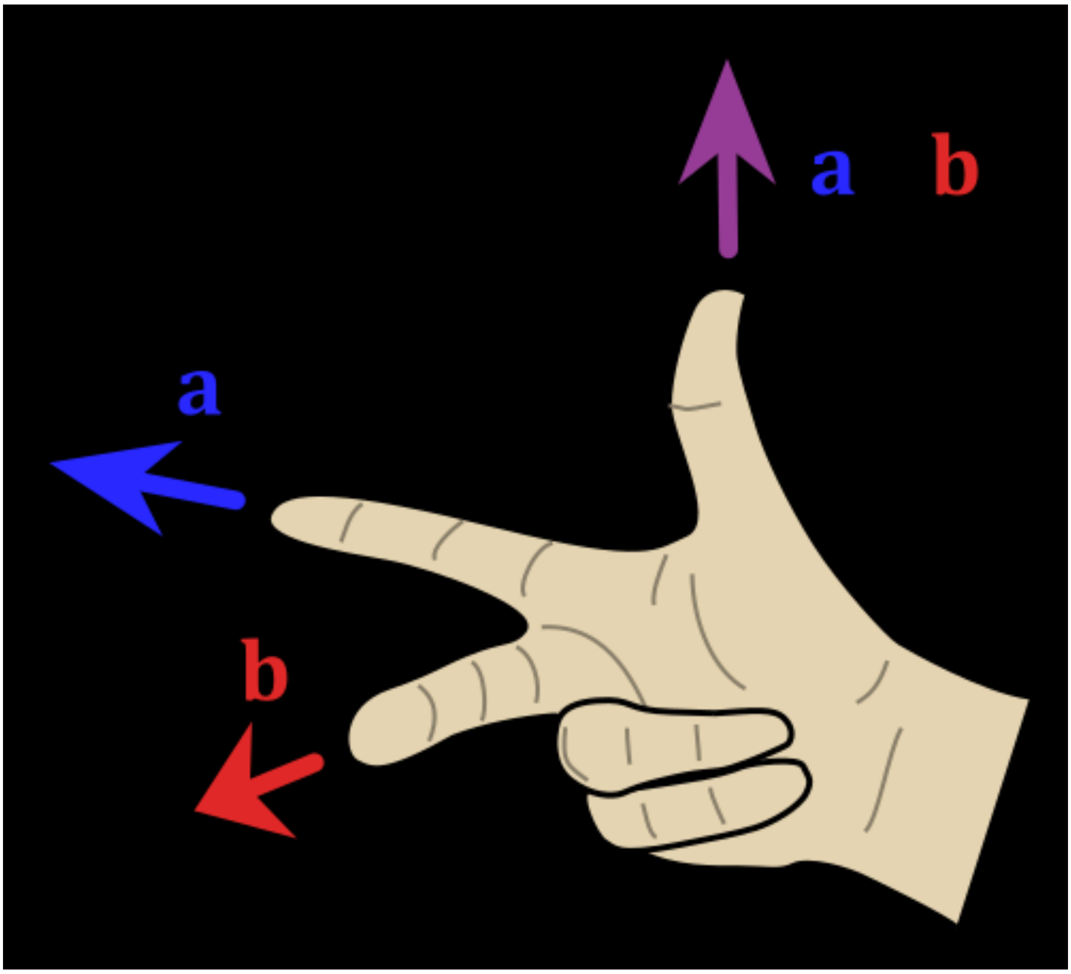
Definition1.2 Cross Product

我们定义两个 $\mathbb{R}^3$ 上的向量 u 与 v 的向量积(叉乘)满足:

- 是一个向量
- $u \times v \perp u, v$
- $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin\theta$, 其中 θ 是 u 与 v 的夹角

Proposition1.1 Right-Hand Rule

向量积的方向满足"右手法则":



Proposition1.2 三维向量的叉乘公式:

设 $u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3)$, 我们有:

$$u\times v=(u_2v_3-u_3v_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

其中 &(i,j,k)$ 是空间向量的一组基底

Proposition1.3 三维向量叉乘的性质

1. (associativity) $(u+v)\times w=u\times w+v\times w$
2. (distributivity) $u\times(v+w)=u\times v+u\times w$
3. (anticommutativity) $u\times v=-v\times u$
4. $(cu)\times v=u\times(cv)=c(u\times v)$

Proposition1.4

三角形OAB的面积及可以表示为:

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\|u\times v\|$$

Proposition1.5 scalar triple product

在空间中, 三个不共面的位置向量: $u=(u_1,u_2,u_3),v=(v_1,v_2,v_3),w=(w_1,w_2,w_3)$,其合成的平行六面体(parallelepiped)的体积可以表示为:

$$V=|(u\times v)\cdot w|$$

而 $(u\times v)\cdot w$ 也被称为 u,v,w 的标量三重积.

Definition1.3 Equations of Planes

我们称一个 $\mathbb{R}^3$ 上的平面可以被表示为:

$$\vec{u}+s\vec{v}+t\vec{w}$$

其中 s,t 为实参数

Definition1.4 normal vector

一个 $\mathbb{R}^3$ 上平面的 **法向量(normal)** 垂直于这个平面上的所有向量

Proposition1.6

我们设在 $\mathbb{R}^3$ 上, 点P的位置向量为(a,b,c) ,那么经过点P法向量为 $n=(A,B,C)$ 的平面的方程可以表示为:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$$

Section2

Definition2.1 injective, surjective and bijective

对于函数$f : X \to Y$, 我们称

(1) injective

f 是 **单射的(injective)/one-to-one** 当 $\forall a \neq b \in X, f(a) \neq f(b)$ 时.

(2) surjective

f 是 **满射的(surjective)/onto** 当 $\forall y \in Y, \exists x \in X, s.t. f(x) = y$ 时.

(3) bijective

f 是 **双射的(bijective)/one-to-one correspondence** 当 f 既是单射又是满射时.

Proposition2.1

所有的双射函数都具有反函数.

Definition2.2 inverse function

对于函数 $f : X \to Y$, 我们称 $g : Y \to X$ 为其反函数, 当且仅当:

$$f \circ g = g \circ f = identity\ function$$

我们通常将 f 的反函数记作 f^{-1}

Definition2.3 vector-valued function

我们考虑一个 **向量值函数(vector-valued, 值为向量)** $f : X \to \mathbb{R}^m$, 其中 $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
我们可以写出:

$$f(\vec{v}) = (f_1(\vec{v}), f_2(\vec{v}), ..., f_m(\vec{v}))$$

其中 $f_i : X \to \mathbb{R}$
我们称 $f_1, f_2, ..., f_m$ 为 f 的**分量函数(component functions)**. 这样我们就只关注那些 **标量值函数(scalar-valued)** 了.

Definition2.4 graph

我们称函数 $f : X \to \mathbb{R}$, 其中 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ 的 **图(graph)** 为点集:

$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in X\}$$

称其在高度 c 的 **轮廓曲线(contour curve)** 为点集:

$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in X, f(x, y) = c\}$$

称其在高度 c 的 **等高线(level curve)** 为点集:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \in X, f(x, y) = c\}$$

Definition2.5 quadric surface

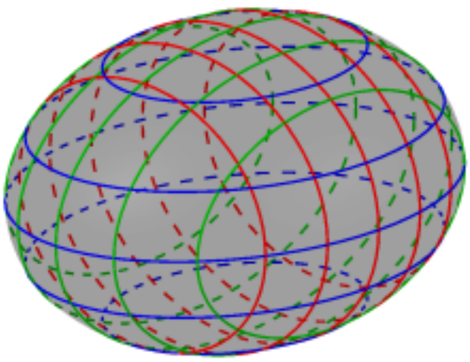
在 $\mathbb{R}^3$, 我们称一个 **二次曲面(quadric surface)** 通过如下公式定义(字典序):

$$Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

以下是常见的二次曲面

椭圆面(ellipsoid):

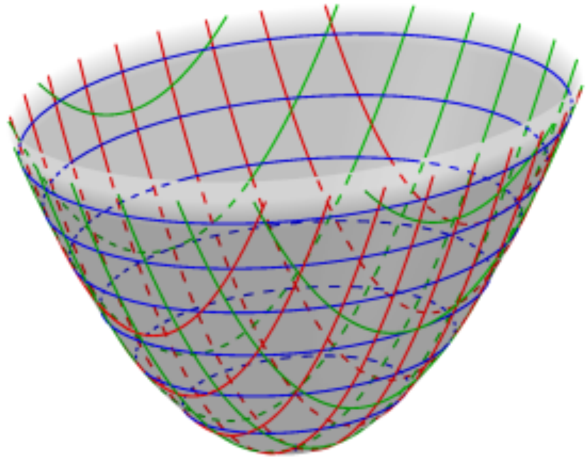
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



当 $a = b = c$ 时, 为一 **球面(sphere)**

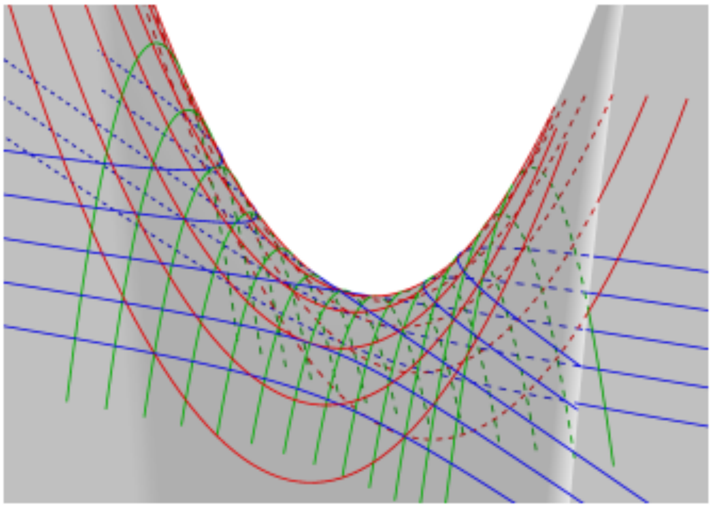
椭圆抛物面(elliptic paraboloid):

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



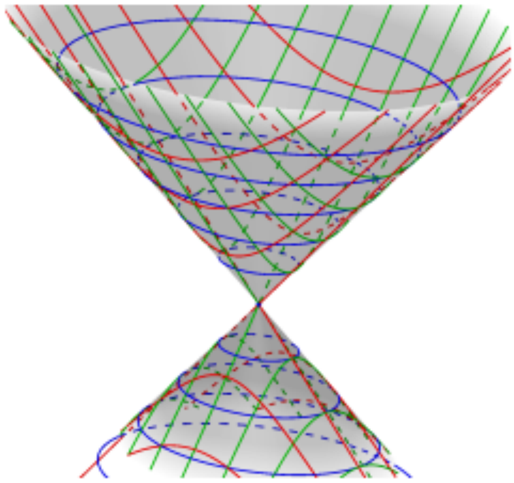
双曲抛物面(hyperbolic paraboloid)

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



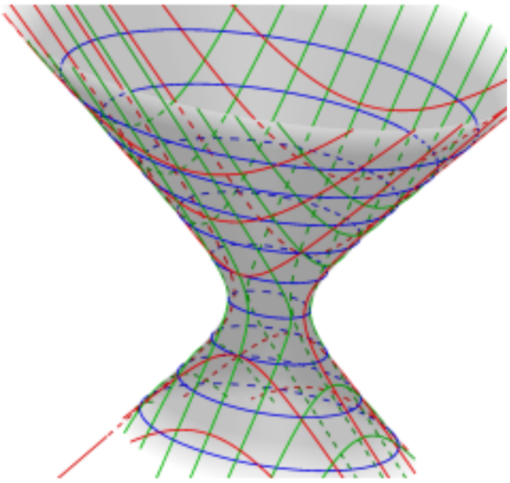
椭圆锥面(elliptic cone)

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



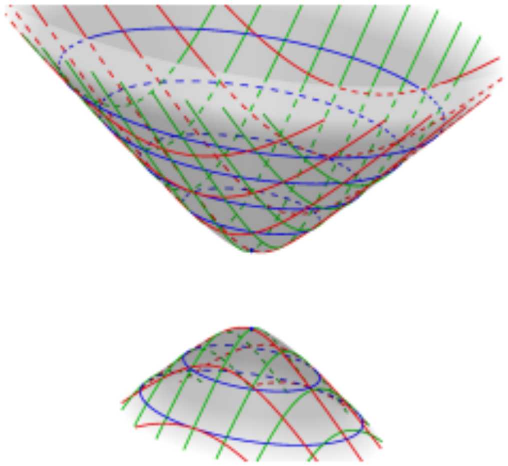
单叶双曲面(hyperboloid of one sheet)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



双叶双曲面(hyperboloid of two sheet)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Definition2.6

对于任意的 $a \in \mathbb{R}^n$ 与 $r > 0$, 我们称;
$\mathbb{R}^n$上以 a 为中心, r 为半径的 **开球(open ball)** 为集合:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - a\| < r\}$$

$\mathbb{R}^n$上以 a 为中心, r 为半径的 **闭球(close ball)** 为集合:

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - a\| \leq r\}$$

Definition2.7

对于 $X \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们称:
X 的**内点(interior point)** 满足:
存在以 a 为中心的开球, 开球上所有点都属于 X
我们记 X 的内点组成的集合为 **内部(interior)**

X 的 **边界点(boundary point)** $a \in \mathbb{R}^n$ 满足:
对所有以 a 为中心的开球, 都同时存在属于 X 的点与不属于 X 的点.
我们记 X 的临界点组成的集合为 **分界线(boundary)**, 记作 ∂X

注意: X 的内点一定属于 X, 临界点不一定属于 X

Definition2.8

我们称集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$的 **开集(open set)** 若 X 中的所有点都是 X 的 **内点(interior point)**
我们称集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$的 **闭集(close set)** 若 $\mathbb{R}^n \setminus X$ 是一个 $\mathbb{R}$ 上的开集

Proposition2.2

对于 $X \subseteq \mathbb{R}^n$, X 是闭集当且仅当 $\partial X \subseteq X$

Definition2.9

对于 $X \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们称:

$a \in \mathbb{R}^n$ 是 X 的 **极限点(limit point or accumulation point)**, 若 a 满足:

$$\forall \delta > 0, \exists x \neq a (x \in X \cap B(a, \delta))$$

$a \in X$ 是 X 的 **孤立点(isolated point)** , 若 a 不是极限点.

Proposition2.3

X 的极限点中不在 X 中的一定是 X 的临界点.

Definition2.10 Lim

对于 $f : X \to \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n$, a 是 X 的一个极限点. 我们称 f 在 a 处的**极限(limit)** 为 $L \in \mathbb{R}^m$, 满足:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. (x \in X \wedge 0 < \|x - a\| < \delta \to \|f(x) - L\| < \epsilon)$$

我们记做:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Proposition2.4

若极限存在, 则在该点处的极限是被 **唯一确定(uniquely determined)** 的

Proposition2.5 极限的性质

对于

$$f, g : X \to \mathbb{R}^m, x \subset \mathbb{R}^n$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \lim_{x \to a} g(x) = M$$

我们有:

(1)

$$\lim_{x \to a}(f \pm g)(x) = L \pm M$$

(2)

$$\forall c \in \mathbb{R}, \lim_{x \to a}(cf)(x) = cL$$

(3)若 $m = 1$,

$$\lim_{x \to a}(fg)(x) = LM$$

(4)若 $m = 1, M \neq 0$,

$$\lim_{x \to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{L}{M}$$

Theorem2.1 夹逼定理/三明治定理 略

Proposition2.6

对于 $f : X \to \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n$, 且有 $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, a 是 X 的极限点, 那么我们有:

$$\lim_{x \to a} f(x) = (l_1, l_2, ..., l_m)$$

其中,

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = l_i \ for \ i = 1, 2, ..., m$$

Definition2.11

对于 $f : X \to \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n$, 我们称 f 在 a 是 **连续的**, 若满足如下条件中任意一个:

$$a\text{是}X\text{中的一个孤立点} \tag{1}$$
$$\lim_{x\to a} f(X) = f(a) \tag{2}$$

否则, 则称 f 在 a 处不连续.

我们称 f 是 **连续函数** , 当它在 X 的每个点处都连续, 反之则称为 **不连续函数** .

Proposition2.7

若 f 与 g 在 a 处连续, 我们有:
(1) $f+g$ 在 a 处连续
(2) $\forall c \in \mathbb{R}, cf$ 在 a 处连续
(3) 若 $m=1$, fg 在 a 处连续
(4) 若 $m=1\text{且}g(a)\neq 0$, $\frac{f}{g}$ 在 a 处连续

Proposition2.8

对于 $f: X \to \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n$, 且有 $f=(f_1, f_2, ..., f_m)$.
f 在 a 处连续当且仅当 f_i 在 a 处连续

Proposition2.9

对于 $f: X \to \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n; g: Y \to \mathbb{R}^k, f(X) \subset T \subset \mathbb{R}^m$, a 是 X 的一个极限点. 若 $\lim_{x\to a} f(x) = L \in Y$ 且g在L处连续, 那么有:

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = g(L)$$

作为推论, 若 f 与 g 是连续的, 那么 $f\circ g$ 也是连续的.

Definition2.12 partial derivative

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的变量 X, 与 $f: X \to \mathbb{R}$, 我们称 f 在 $\vec{a}$ 点处 x_j 分量的偏导数(部分微分)为:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{e_j}) - f(\vec{a})}{h}$$

也被记作 $f_{x_j}(a)$ or $D_{x_j}f(a)$

Definition2.13 Tangent Plane

对于 $f:X\to\mathbb{R}, X\subset\mathbb{R}^2$, (a,b) s是 X 的内点. 我们称 f 的graph S 在 $x=(a,b,f(a,b))$ 的 **切面** 是包含了 x 处 S 的所有切线的平面.

懒得打字了, 转战平板