Inequação Exponencial

O avanço comercial do século XVII fez surgirem o cálculo exponencial e os logaritmos. A partir daí, durante os três séculos que se seguiram, essas ferramentas foram utilizadas como meios sofisticados de resolução de cálculos. À medida que os estudos nesses campos foram evoluindo, os cálculos exponenciais e logarítmicos foram se tornando decisivos para a evolução da matemática e, consequentemente, das várias outras ciências que dela dependem.

Inequações exponenciais

Assim como as equações exponenciais, as inequações exponenciais são aquelas que apresentam a incógnita no expoente. Confira alguns exemplos:

- $2^x \geq 128$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$
- $4^x + 4 > 5 \cdot 2^x$
- $\begin{cases} 2^x \leq 8 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$

Resolução de inequações exponenciais

A resolução de uma inequação exponencial poderá ser dada através das propriedades da potenciação. Mas lembre-se de que *f(x)* = a^x somente é crescente quanto a > 1. Caso 0 < a < 1, *f(x)* = a^x é decrescente.

Antes de resolver uma inequação exponencial, deve-se observar a situação das bases nos dois membros, caso as bases sejam diferentes, reduza-as a uma mesma base e, em seguida, forme uma inequação com os expoentes. Atente-se as regras dos sinais:

- Caso a > 1, mantenha o sinal original.
- Caso 0 < a < 1, inverta o sinal.

Essas regras serão mais bem visualizadas nas resoluções que se seguem. Vamos resolver os exemplos das inequações anteriores.

$2^x \geq 128$

Por fatoração, $128 = 2^7$. Portanto:

$2^x \geq 2^7$ → como as bases são iguais e a > 1, basta formar uma inequação com os expoentes.

$x \geq 7$

$S = \{x \in R \mid x \geq 7\}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Neste exemplo as bases já são iguais. Porém, é necessário observar que $0 < a < 1$. Diante dessa condição, inverte-se o sinal.

$x > 2$.

S = {x ∈ R | x > 2}

$4^x + 4 > 5 . 2^x$

Perceba que, por fatoração, $4^x = 2^{2x}$ e 2^{2x} é o mesmo que **$(2^x)^2$**. Reescrevendo a inequação, temos:

$(2^x)^2 + 4 > 5 . 2^x$

Chamando 2^x de t, para facilitar a resolução, ficamos com:

$t^2 + 4 > 5t$

$t^2 - 5t + 4 > 0$

Aqui temos uma inequação de 2º grau, onde deve ser feito o estudo dos sinais. Não vamos mostrar o processo de resolução da inequação de 2º grau, visto que o texto trata das exponenciais. Fica como sugestão de exercícios para os leitores.

Ao resolver, você encontrará $D = 9$, $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$. Como $a > 0$, a concavidade da parábola ficará para cima. Isso significa que, como estamos procurando valores que tornem a inequação positiva, ficamos com:

$t < 1$ ou $t > 4$.

Retornando à variável inicial:

$t = 2^x$

$2^x < 1 \rightarrow$ **$x < 0$** $\rightarrow$

Lembre-se que todo número elevado a 1 é igual ao próprio número, e que todo número elevado a zero é igual a 1.

$2^x > 4 \rightarrow 2^x > 2^2 \rightarrow$ **$x > 2$**.

S = {x ∈ R | x < 0 ou **x > 2}**

$$\begin{cases} 2^x \leq 8 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$$

$2^x \leq 8 \quad \rightarrow \quad 2^x \leq 2^3 \quad \rightarrow \quad$ **$x \leq 3$ (S_1)**

$3x - 6 > 0 \rightarrow \quad 3x > 6 \rightarrow \quad$ **$x > 2$ (S_2)**

A solução final é dada pela interseção das duas soluções encontradas.

$S = S_1 \cap S_2$

$$\mathbf{S = \{x \in R \mid 2 < x \leq 3\}}$$