Taxas Nominais

Você vai ao banco investir R$ 100.000,00 em uma aplicação financeira e o gerente lhe informa que para a aplicação escolhida a taxa de juros anual é de 24% a.a., com capitalização composta mensal.

Então você terá uma aplicação no regime de capitalização composta, sendo que o acréscimo dos juros ao montante será realizado mensalmente.

Note que o período de formação e acréscimo dos juros ao capital difere do período de tempo da taxa. Temos uma taxa anual, mas os juros são calculados e acrescidos mês a mês. Nestas condições a taxa de juros é denominada taxa nominal.

Sendo a taxa nominal de 24% a.a. e visto que a capitalização é mensal, qual será a taxa de juros ao mês?

Como 1 ano tem 12 meses a taxa será de:

$$24\% \div 12 = 2\%$$

A taxa mensal referente a uma taxa nominal de 24% a.a. é de 2% a.m..

Estas duas taxas são ditas taxas proporcionais, pois utilizando meses como a unidade de tempo, temos a seguinte proporção:

$$\frac{24}{12} = \frac{2}{1}$$

24% está para 12 meses, assim como 2% está 1 mês.

A taxa de 2% a.m. além de ser proporcional à taxa de 24% a.a., é denominada taxa efetiva mensal.

Taxas Efetivas

Segundo o dicionário efetiva significa real, verdadeira, que produz efeito. Isto quer dizer que para efeitos de cálculo utilizamos a taxa efetiva, a taxa nominal não é utilizada para estes fins.

Para continuarmos este estudo, agora que sabemos que a taxa efetiva de juros é 2% a.m. e que o capital é de R$ 100.000,00, vamos calcular qual será o novo capital após um ano de aplicação.

Vamos utilizar a seguinte fórmula para o cálculo do montante composto:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

As variáveis conhecidas são as seguintes:

Substituindo tais variáveis por seus respectivos valores temos:

Como o capital é de R$ 100.000,00, os juros serão de R$ 26.824,18:

$$M - C = 126824{,}18 - 100000 = 26824{,}18$$

Então a taxa efetiva anual será de 26,82418% a.a.

$$\frac{26824{,}18}{100000{,}00} \cdot 100\% = 26{,}82418\%$$

Taxas Equivalentes

A taxa efetiva mensal de 2% a.m. é equivalente à taxa efetiva anual de 26,82418% a.a., isto porque produzem um montante igual, quando aplicadas a um mesmo capital, em um período de tempo de mesma duração.

Para verificarmos a equivalência vamos calcular M_m e M_a, referentes ao montante obtido a partir das taxas efetivas mensal e anual, respectivamente, pelo período de um ano:

Observe que calculamos a taxa efetiva anual de 26,82418% a.a. com 5 casas decimais, apenas para que pudéssemos comparar a equivalência das taxas, na prática podemos utilizar uma ou duas casas decimais como 26,82% a.a., por exemplo, neste caso o montante será ligeiramente menor (R$ 126.820,00).

Acima verificamos que os montantes M_m e M_a, calculados através da fórmula $M = C \cdot (1 + i)^n$, são iguais. Utilizando o índice m e a para identificar também as outras variáveis referentes ao cálculo dos montantes M_m e M_a, respectivamente, generalizando podemos concluir que:

$$\begin{cases} M_m = C \cdot (1 + i_m)^{n_m} \\ M_a = C \cdot (1 + i_a)^{n_a} \end{cases}$$

Veja que nesta fórmula obtemos a taxa efetiva mensal a partir da taxa efetiva anual:

$$i_m = \sqrt[n_m]{(1 + i_a)^{n_a}} - 1$$

Nesta outra fórmula obtemos a taxa efetiva anual a partir da taxa efetiva mensal:

$$i_a = \sqrt[n_a]{(1 + i_m)^{n_m}} - 1$$

Como podemos notar, ambas as fórmulas diferem entre si apenas nos índices das variáveis, então retirando o índice das variáveis referentes à taxa que queremos obter e atribuindo o índice 0 às variáveis referentes à taxa que possuímos, chegamos à seguinte fórmula:

$$i = \sqrt[n]{(1 + i_0)^{n_0}} - 1$$

Ou, se preferirmos eliminar o radical trabalhando apenas com uma potência, temos esta fórmula:

$$i = (1 + i_0)^{\frac{n_0}{n}} - 1$$

Exemplos de Cálculo para a Obtenção de Taxas Efetivas Equivalentes

- **A taxa efetiva de 21% a.a. equivale a qual taxa efetiva mensal?**

Um capital qualquer capitalizado em **21%** após **1 ano** da aplicação, deve produzir o mesmo montante que o mesmo capital sendo capitalizado mensalmente a uma taxa **i** por **12 meses**.

Os dados que possuímos são os seguintes:

Substituindo tais valores na fórmula iremos obter a taxa efetiva ao mês:

Portanto, a taxa efetiva mensal é de aproximadamente **0,016 a.m.** ou **1,6% a.m.**:

$i = 0{,}016 \Rightarrow i = 0{,}016 \cdot 100\% \Rightarrow i = 1{,}6\%$

- **A taxa efetiva de 21% a.a. equivale a uma taxa efetiva mensal de 1,6% a.m.**

- **A taxa efetiva de 1,8% a.b. equivale a qual taxa efetiva semestral?**

Uma certa quantia capitalizada bimestralmente em **1,8%** durante **3 bimestres** de aplicação, deve produzir o mesmo montante se for capitalizada após **1 semestre** a uma taxa **i**.

Então temos os seguintes dados para utilizar com a fórmula:

Os aplicando na fórmula temos:

Temos então uma taxa efetiva semestral de aproximadamente **0,055 a.s.** ou **5,5% a.s.**:

$i = 0{,}055 \Rightarrow i = 0{,}055 \cdot 100\% \Rightarrow i = 5{,}5\%$

- **A taxa efetiva de 1,8% a.b. equivale a uma taxa efetiva semestral de 5,5% a.s.**

Taxas Proporcionais

Vimos acima que as taxas de **24% a.a.** e de **2% a.m.** são **taxas proporcionais**, pois utilizando meses como a unidade de tempo, temos a seguinte proporção:

$\frac{24}{12} = \frac{2}{1}$

É importante observar que no **regime de capitalização composta** taxas proporcionais não são **equivalentes**. Como vimos, uma taxa efetiva de **2% a.m.** equivale a **26,82418% a.a.** e não a **24% a.a.**

Note porém, que no **regime de capitalização simples** taxas proporcionais são **equivalentes**, neste regime elas produzem o mesmo montante quando aplicadas a um mesmo capital e período.

- **A taxa de 24% a.a. equivale à taxa de 2% a.m. em uma aplicação a juros simples?**

Certamente que sim, por exemplo, vamos verificar o rendimento de uma aplicação de **R$ 8.000,00** por **6 meses**.

Para isto utilizaremos esta fórmula:

$j = C \cdot i \cdot n$

À taxa de **24% a.a.** temos:

Como a taxa de juros está em **anos** e o período de aplicação em **meses**, foi preciso convertê-lo de **6 meses** para **0,5 anos**, a fim de que a unidade de tempo sendo a mesma, possamos realizar os cálculos:

À taxa de **2% a.m.** temos:

Portanto:

A aplicação de **R$ 8.000,00** por **6 meses** em qualquer uma das taxas proporcionais, rende juros de **R$ 960,00** no regime de capitalização simples, portanto ambas as aplicações produzem o mesmo montante de **R$ 8.960,00** durante um mesmo período de aplicação e por isto as taxas proporcionais são **taxas equivalentes** neste regime.

- **Sim, a taxa de 24% a.a. equivale à taxa de 2% a.m. no regime de capitalzação simples.**

Cálculo de Financiamento

- A Matemática Financeira está presente em diversas situações do dia a dia, abrangendo investimentos e financiamentos de bens de consumo.
Os financiamentos são usados por pessoas que querem adquirir uma moradia própria, dinheiro, carros novos e usados, entre outros. Sempre que financiamos um valor, pagamos juros que são contabilizados nas prestações estabelecidas. As taxas de juros cobradas variam de acordo com cada instituição financeira.
- A pessoa deve procurar uma instituição financeira a fim de realizar um cadastro, onde irá informar seus dados pessoais e a quantia em dinheiro que precisa. A empresa, ao analisar o cadastro da pessoa, decidirá pela sua aprovação ou não. Caso seja aprovado o crédito, a instituição realiza um cálculo do valor das prestações mensais para a quitação da dívida durante o tempo determinado. Nessas prestações paga-se o valor emprestado acrescido dos juros.
Mas como é calculado o valor das prestações?
- Através de uma fórmula, pode-se demonstrar o cálculo a ser feito em um financiamento. Para desenvolver a expressão é preciso usar uma calculadora científica.

Fórmula do cálculo do coeficiente de financiamento:

- $$CF = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

- Essa fórmula permite calcular o valor da prestação do empréstimo de acordo com a taxa de jutos (i) e o período (n).

Suponha que uma pessoa queira financiar um carro no valor de R$ 10.000,00, financiado à taxa de 1,5% a.m. durante 12 meses. Qual o valor mensal da prestação?

Vamos, através da fórmula, calcular o coeficiente de financiamento:

$$CF = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$CF = \frac{0{,}015}{1-(1+0{,}015)^{-12}}$$

$$CF = \frac{0{,}015}{1-(1{,}015)^{-12}}$$

$$CF = \frac{0{,}015}{1-\left(\frac{1}{1{,}015}\right)^{12}}$$

$$CF = \frac{0{,}015}{1-\left(\frac{1}{1{,}195618171}\right)}$$

$$CF = \frac{0{,}015}{1-0{,}836387422}$$

$$CF = \frac{0{,}015}{0{,}163612578}$$

- $CF = 0{,}091679993$

-

Multiplicando o valor do financiamento, R$10.000,00, pelo coeficiente de financiamento, teremos o valor da prestação.

10.000 x 0,091679993 = 916,80

Logo, o valor da prestação será de R$ 916,80.