

Equações logarítmicas

Existem quatro tipos básicos de equações logarítmicas. Iremos resolver um exemplo de cada tipo.

Tipo 1. Equação que envolve a igualdade entre dois logaritmos de mesma base.

$$\log_a x = \log_a y$$

A solução é dada fazendo $x = y > 0$

Exemplo: Resolva a equação

$$\log_5 2x + 4 = \log_5 3x + 1.$$

Solução: temos que

$$2x + 4 = 3x + 1$$

$$2x - 3x = 1 - 4$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Portanto, $S = \{ 3 \}$

Tipo 2. Equação que envolve a igualdade entre um logaritmo e um número.

$$\log_a x = c$$

A solução é dada por $x = a^c$.

Exemplo: Encontre a solução da equação

$$\log_3 5x + 2 = 3.$$

Solução: Pela definição de logaritmo temos:

$$5x + 2 = 3^3$$

$$5x + 2 = 27$$

$$5x = 27 - 2$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

Portanto $S = \{5\}$.

Tipo 3. Equação que é necessário fazer uma mudança de incógnita.

Exemplo: Resolva a equação

$$(\log_4 x)^2 - 3 \cdot \log_4 x = 4$$

Solução: Vamos fazer a seguinte mudança de incógnita

$$\log_4 x = y.$$

Substituindo na equação inicial, ficaremos com:

$$y^2 - 3y = 4$$

ou

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$y = 4 \text{ ou } y = -1$$

Como $\log_4 x = y$, então:

$$\log_4 x = 4 \rightarrow x = 4^4 \rightarrow x = 256$$

Ou

$$\log_4 x = -1 \rightarrow x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Portanto, } S = \{\frac{1}{4}, 256\}$$

Tipo 4. Equações que utilizam as propriedades do logaritmo ou de mudança de base.

Exemplo: Resolva a equação

$$\log(2x + 3) + \log(x + 2) = 2 \log x$$

Solução: usando as propriedades do logaritmo, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\log[(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

Note que para isso utilizamos as seguintes propriedades:

$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$

$$\log x^n = n \cdot \log x$$

Vamos retornar à equação:

$$\log[(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

Como ficamos com uma igualdade entre dois logaritmos, segue que:

$$(2x + 3)(x + 2) = x^2$$

ou

$$2x^2 + 4x + 3x + 6 = x^2$$

$$2x^2 - x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

$$x = -1 \text{ ou } x = -6$$