Inequação logarítmica

Uma desigualdade cuja incógnita aparece no logaritmando ou na base de ao menos um dos logaritmos é chamada de *inequação logarítmica*. Veja os exemplos:

- $\log_2(x-1) < \log_2 3$
- $\log_3(2x+1) \leq 1$
- $\log_{0,5}(x+1) > -1$
- $\log_{\frac{1}{2}}(x-7) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$

Resolução de inequações logarítmicas

A resolução de uma inequação logarítmica depende de alguns fatores. Siga os passos seguintes:

- ***Condição de existência***: antes de prosseguir com a resolução, procure a (s) condição (ões) de existência (s) dos logaritmos. Lembre-se de que em logaN, a > 0 e a ≠ 1, N > 0. Essas são as condições de existência.

- ***Base***: caso alguma base seja diferente, converta-a a mesma base e em seguida forme uma inequação com logaritmandos.

- ***Função crescente***: se a > 1, mantem-se a direção do sinal inicial.

- ***Função decrescente***: se 0 < a < 1, inverte a direção do sinal inicial.

- ***Solução final***: a solução é dada pela interseção das condições de existência pelo resultado da inequação.

Para praticar os passos anteriores, vamos resolver as inequações exemplificadas no início deste trabalho.

log2(x−1)<log23
Condição de existência:

x – 1 > 0 → **x > 1 (S_1)**

log2(x−1)<log23 → como a > 1 mantem-se a direção inicial do sinal.

$x - 1 < 3$

$\mathbf{x < 4}$ **($\mathbf{S_2}$)**

$S = S_1 \cap S_2 \rightarrow$ a solução final é a interseção das soluções 1 e 2.

$\mathbf{S = \{x \in R \mid 1 < x < 4\}}$

log3(2x+1)≤1
Condição de existência:

$2x + 1 > 0 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x = -12$ **($\mathbf{S_1}$)**

Veja que no 2º membro da desigualdade não temos um logaritmo. Porém, podemos escrever o número 1 em forma de logaritmo, dessa forma igualando as bases: 1=log331. A Base 3 foi escrita intencionalmente, para se igualar a base do logaritmo escrito no 1º membro. Reescrevendo a inequação:

log3(2x+1)≤log331 → como $a > 1$ mantem-se a direção inicial do sinal.

$2x + 1 \leq 3^1 \rightarrow 2x \leq 3 - 1$

$2x \leq 2 \rightarrow x \leq 1.$

$S = S_1 \cap S_2 \rightarrow$ a solução final é a interseção das soluções 1 e 2.

$\mathbf{S = \{x \in R \mid}$ -12 **$\mathbf{< x \leq 1\}}$**

log0,5(x+1)>−1
Condição de existência:

$x + 1 > 0 \rightarrow$ $\mathbf{x > -1}$ **($\mathbf{S_1}$)**

Da mesma forma que na inequação anterior, podemos escrever o – 1 na forma de logaritmo. Mas antes perceba que (0,5) = 12. Desta forma, escreve-se –1 em forma de logaritmo na base 12: −1=log12(12)−1. Reescrevendo a inequação:

log12(x+1)>log12(12)−1 → como $0 < a < 1$, inverte-se a direção inicial do sinal.

x+1<(12)−1 → $x + 1 < 2$

$x < 2 - 1 \rightarrow$ $\mathbf{x < 1}$ **($\mathbf{S_2}$)**

$S = S_1 \cap S_2$ → a solução final é a interseção das soluções 1 e 2.

$S = \{x \in R \mid -1 < x < 1\}$

log12(x−7)>log12(3x+1)
Condições de existência:

$x - 7 > 0$ → **$x > 7$ (S_1)**

$3x + 1 > 0 \rightarrow 3x > -1 \rightarrow x > -13$ **(S_2)**

log12(x−7)>log12(3x+1) → como $0 < a < 1$ inverte-se a direção inicial do sinal.

$x - 7 < 3x + 1 \rightarrow x - 3x < 1 + 7$

$-2x < 8 \rightarrow 2x > -8 \rightarrow$ **$x > -4$ (S_3)**

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ → a solução final é a interseção das soluções 1, 2 e 3.

$S = \{x \in R \mid x > 7\}$