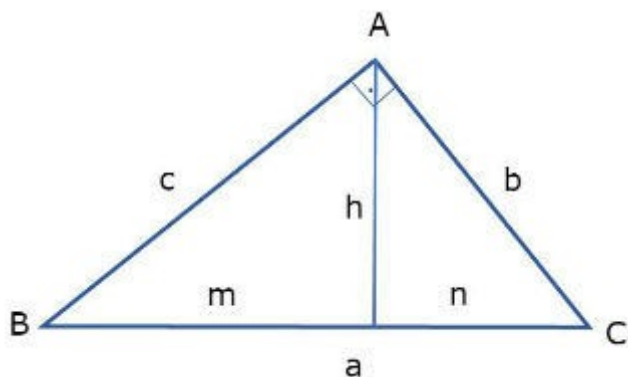


Relações Métricas no Triângulo Retângulo

As relações métricas relacionam as medidas dos elementos de um triângulo retângulo (triângulo com um ângulo de 90°). Os elementos de um triângulo retângulo estão apresentados abaixo:



Sendo:

a: medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90°)

b: cateto

c: cateto

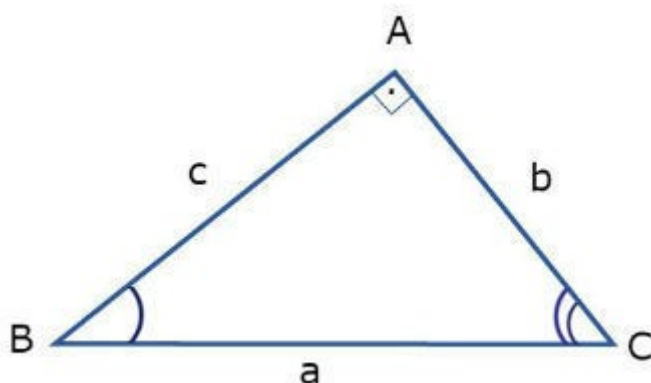
h: altura relativa à hipotenusa

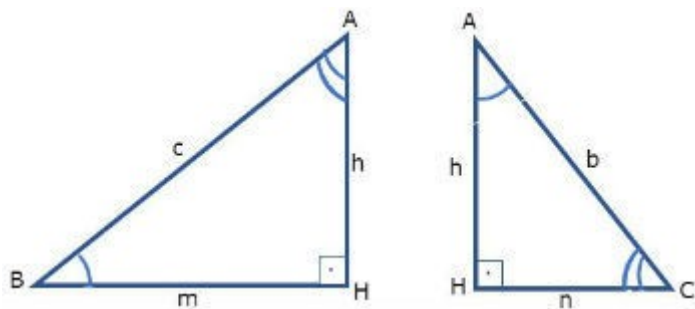
m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa

n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa

Semelhança e relações métricas

Para encontrar as relações métricas, utilizaremos **semelhança de triângulos**. Considere os triângulos semelhantes ABC, HBA e HAC, representados nas imagens:





Como os triângulos ABC e HBA são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle HBA$), temos as seguintes proporções:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

$$\frac{c}{a} = \frac{h}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$$

Usando que $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ encontramos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$$

Da semelhança entre os triângulos HBA e HAC encontramos a proporção:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Temos ainda que a soma das projeções m e n é igual a hipotenusa, ou seja:

$$a = m + n$$

Teorema de Pitágoras

A mais importante das relações métricas é o Teorema de Pitágoras.

Podemos demonstrar o teorema usando a soma de duas relações encontradas anteriormente.

Vamos somar a relação $b^2 = a \cdot n$ com $c^2 = a \cdot m$, conforme mostrado abaixo:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$$

Como $a = m + n$, substituindo na expressão anterior, temos:

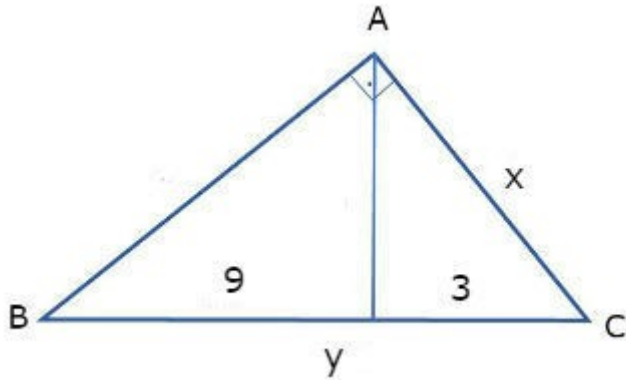
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Assim, o Teorema de Pitágoras pode ser enunciado como:

A hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Exemplos

1) Encontre o valor de x e de y na figura abaixo:



Primeiro calcularemos o valor da hipotenusa, que na figura está representado por y.

Usando a relação: $a = m + n$

$$y = 9 + 3$$

$$y = 12$$

Para encontrar o valor de x, usaremos a relação $b^2 = a \cdot n$, assim:

$$x^2 = 12 \cdot 3 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

2) A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e uma das projeções mede 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo.

Primeiro vamos encontrar o valor da outra projeção usando a relação: $h^2 = m \cdot n$

$$12^2 = 9 \cdot n \Rightarrow 144 = 9 \cdot n$$

$$n = \frac{144}{9} = 16$$

Vamos encontrar o valor da hipotenusa, usando a relação $a = m + n$

$$a = 16 + 9 = 25$$

Agora é possível calcular o valor dos catetos usando as relações $b^2 = a \cdot n$ e

$$c^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = 25 \cdot 16 = 400$$

$$b = \sqrt{400} = 20$$

$$c^2 = 25 \cdot 9 = 225$$

$$c = \sqrt{225} = 15$$

Fórmulas

Na tabela abaixo, reunimos as relações métricas no triângulo retângulo.

Relações Métricas
$a \cdot h = b \cdot c$
$b^2 = a \cdot n$
$c^2 = a \cdot m$
$h^2 = m \cdot n$
$a = m + n$
$a^2 = b^2 + c^2$