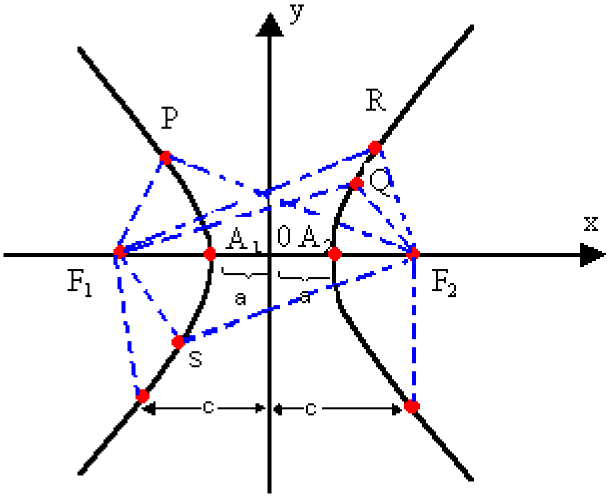
Hipérbole

Considerando, num plano α, dois pontos distintos, **F_1** e **F_2** e, sendo 2a um número real menor que a distância entre **F_1** e **F_2**, chamamos de hipérbole o conjunto dos pontos do plano α tais que o módulo da diferença das distâncias desses pontos a **F_1**e **F_2** seja sempre igual a 2a.

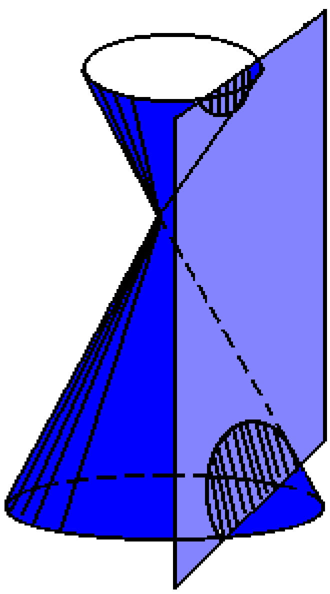
Por exemplo, sendo **P**, **Q**, **R**, **S**, **F1** e **F2**pontos de um mesmo plano e $F_1F_2 = 2c$, temos:



$$\begin{cases} |d_{F_1P} - d_{F_2P}| = 2a \\ |d_{F_1Q} - d_{F_2Q}| = 2a \\ |d_{F_1R} - d_{F_2R}| = 2a \\ \quad \vdots \\ |d_{F_1S} - d_{F_2S}| = 2a \end{cases}$$

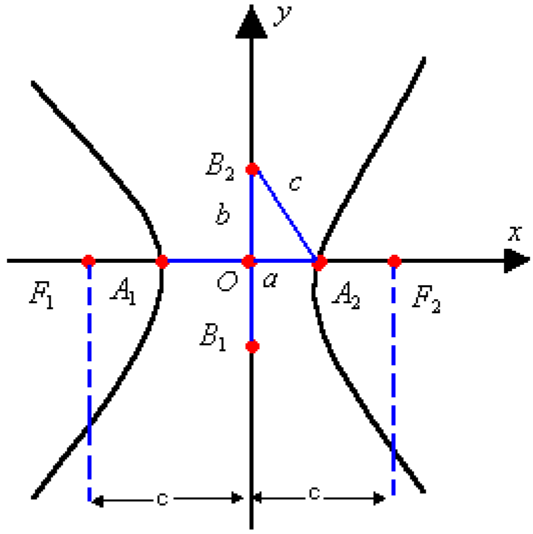
A figura obtida é uma hipérbole.

Observação: os dois ramos da hipérbole são determinados por um plano paralelo ao eixo de simetria de dois cones circulares retos e opostos pelo vértice:



Elementos

Observe a hipérbole representada a seguir. Nela, temos os seguintes elementos:



- focos: os pontos **F_1** e **F_2**
- vértices: os pontos **A_1** e **A_2**
- centro da hipérbole: o ponto **O**, que é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$
- semi-eixo real: **a**
- semi-eixo imaginário: **b**
- semidistância focal: **c**
- distância focal: $|F_1F_2| = 2c$
- eixo real: $|A_1A_2| = 2a(\text{contém os focos})$
- eixo imaginário: $|B_1B_2| = 2b$ (b > 0 e tal que $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ - relação fundamental)

Excentricidade

Chamamos de excentricidade o número real **e** tal que:

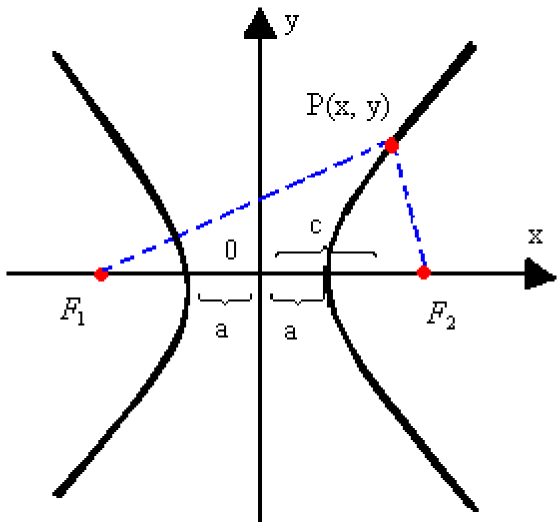
$$e = \frac{c}{a}$$

Como c > a, temos e > 1.

Equações da hipérbole

Vamos considerar os seguintes casos:

a) hipérbole com centro na origem e focos no eixo Ox



F₁ (-c, 0)
F₂ (c, 0)

Aplicando a definição de hipérbole:

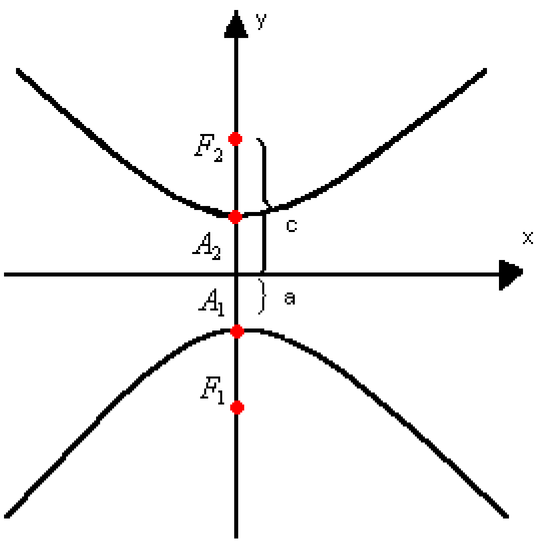
$$\left|d_{F_1P} - d_{F_2P}\right| = 2a \Rightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Obtemos a equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy

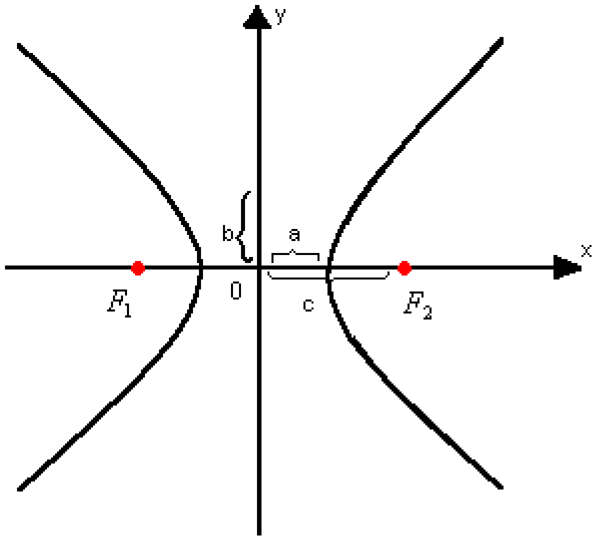
Nessas condições, a equação da hipérbole é:



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Hipérbole equilátera

Uma hipérbole é chamada equilátera quando as medidas dos semi-eixos real e imaginário são iguais:

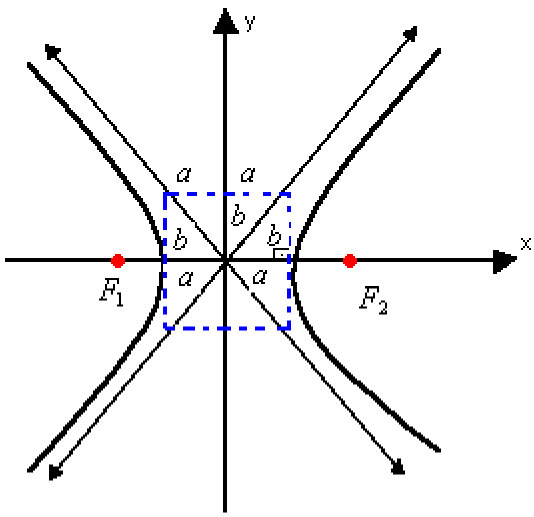


a = b

Assíntotas da hipérbole

Assíntotas são retas que contêm as diagonais do retângulo de lados 2a e 2b.

Quando o eixo real é horizontal, o coeficiente angular dessas retas é $m = \pm \frac{b}{a}$; quando é vertical, o coeficiente é $m = \pm \frac{a}{b}$.



Equação

Vamos considerar os seguintes casos:

a) eixo real horizontal e **C**(0, 0)

As assíntotas passam pela origem e têm coeficiente angular $m = \pm \frac{b}{a}$; logo, suas equações são da forma:

$$y = \pm \frac{b}{a}.x$$

b) eixo vertical e **C**(0, 0)

As assíntotas passam pela origem e têm coeficiente angular $m = \pm \frac{a}{b}$; logo, suas equações são da forma:

$$y = \pm \frac{a}{b}.x$$