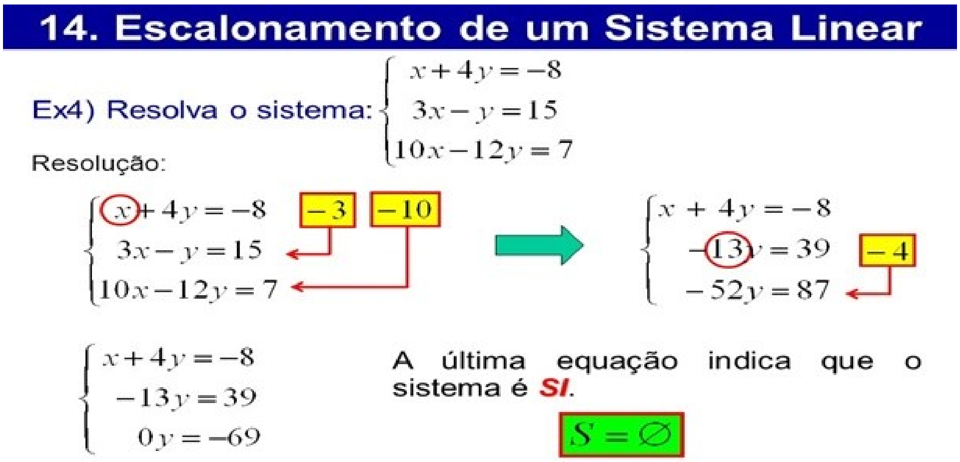
Escalonamento de um Sistema Linear

Existem sistemas lineares que apresentam o mesmo conjunto – solução. Observe os dois sistemas lineares formados por três equações e três incógnitas. Observe que os dois sistemas lineares exemplificados são equivalentes. Dessa forma, para obter o conjunto-solução desses sistemas, bastaria resolver um deles. Mas qual deles possui a resolução mais simples?



É fácil verificar que o sistema (II) não precisa ser resolvido pela regra de Cramer.
3x + y – z = 4 2y-z = 1 2z = 10
Substituindo na 1a equação:
Considerando a 3a equação:
Substituindo na 2a equação:

Veja um exemplo de como escalonar um sistema linear! Esse processo de resolução, entretanto, fica imediato quando o sistema está escalonado. Um sistema linear é escalonado se, e somente se, o número de coeficientes nulos aumenta de equação para equação.

Exemplo:
Resolver, por escalonamento, o sistema linear:
x + y+ z = 7
2x + 3y – z = 13
3x – y + 2z = 12
Resolução:

- multiplicamos a 1 ? equação por -2 e adicionamos à 2? equação:

Í
x + y+ z = 7 2x + 3y – z = 13 3x-y + 2z=12
I
x + y + z = 7 y-3z = -1 3x – y + 2z = 12

• multiplicamos a 1 ? equação por -3 e adicionamos à 3?
equação:
3y-z + t = 1 6y – 3z + 2t = -7
fx + y + z = 10 (2)J2y-3z=15 6z=18

Escalonar um sistema linear é eliminar as incógnitas a partir da segunda equação.

Para escalonar um sistema, podemos:

(1?) trocar duas equações entre si;

(2?) multiplicar uma equação por um número diferente de zero e adicionar o resultado a outra equação;

(3?) dividir uma equação por um número diferente de zero.

x+y+z=7 y – 3z = -1 -4y-z = -9

• para eliminar a incógnita y da 3? equação, multiplicamos a 2? por 4 e adicionamos à 3?

x + y + z = 7 y – 3z = -1 –4y- z = -9 +*-
Resolvendo o sistema a partir da 3? equação, da for- Exemplo 2: ma escalonada, temos
z = 1
Resolver o sistema:

x + 2y = 7 2x + 4y = 14

Portanto, o conjunto-solução do sistema é:

Classificação de um Sistema

Até agora os sistemas lineares apresentados possuíam apenas uma solução. Isso, porém, nem sempre ocorre. Vamos considerar três sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.
Exemplo 1:
[x + 2y = 7 Resolver o sistema <
[2x-y = 4
Resolução:
Por escalonamento:
.(-2)
x + 2y = 7 ~
2x – y = 4 + «-
x + 2y = 7 -5y = -10

Resolvendo a 2a equação:

2x + 4y = 14 + <«— i x + 2y = 7 0. y = 0 i { x + 2y = 7 Obtemos um sistema linear escalonado onde há mais incógnitas do que equações. Para encontrar soluções, devemos atribuir valores reais às incógnitas que não aparecem no início da equação resultante. No nosso exemplo, atribuímos valores à incógnita y. Assim: x = 7 – 2y • y = 0=>x = 7-2. 0=>x = 7 (7; 0) é solução

- y = -1=>X = 7-2.(-1)=>x = 9 (9; -1) é solução
- y = 3=>x = 7-3 .2=>x = 1 (1; 3) é solução

Substituindo na 1a equação: x+2.2=7

Existe uma infinidade de soluções que são da forma (7 – 2y; y) ou seja:
= {(7-2y;y),

Exemplo 3:
Logo, o sistema apresenta uma solução e o conjunto-solução é:
S = {(3; 2)}

Resolver o sistema:

x + 2y = 7
x + 2y = 10

Resolução:
Por escalonamento:
x + 2y = 7 x + 2y = 10 +
x + 2y = 7 0. y = 3

Nesse sistema, não existe par ordenado que satisfaça às duas equações lineares. Logo, o sistema não possui solução. Existem três possibilidades quanto à solução de um sistema linear. Observe o resumo:

Resumo:
(1) Quando um sistema linear apresenta uma única solução, é dito possível e determinado.
(2) Quando um sistema linear apresenta infinitas soluções, é dito possível e indeterminado.
(3) Quando um sistema linear não apresenta solução, é dito impossível.

Observação:
Num sistema linear, escrito na forma escalonada, possível e indeterminado, a diferença entre o número de incógnitas e o número de equações é dito grau de inde-terminação do sistema.