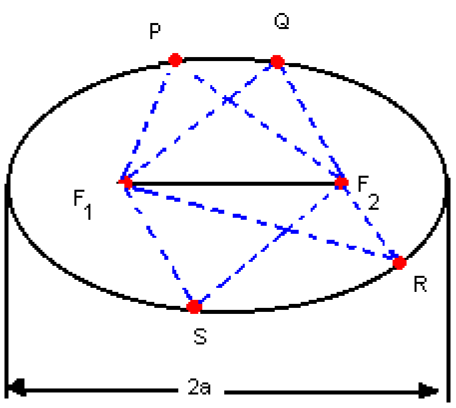
Elipse

Considerando, num plano α, dois pontos distintos, $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ e, sendo 2a um número real maior que a distância entre $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, chamamos de *elipse* o conjunto dos pontos do plano α tais que a soma das distâncias desses pontos a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ seja sempre igual a **2a**.

Por exemplo, sendo **P**, **Q**, **R**, **S**, $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ pontos de um mesmo plano e $F_1F_2 < 2a$, temos:



$$\begin{cases} d_{F_1P} + d_{F_2P} = 2a \\ d_{F_1Q} + d_{F_2Q} = 2a \\ d_{F_1R} + d_{F_2R} = 2a \\ \quad \vdots \\ d_{F_1S} + d_{F_2S} = 2a \end{cases}$$

A figura obtida é uma elipse. Observações:

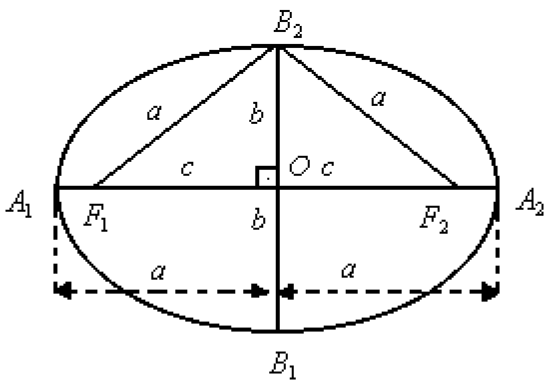
1ª) A Terra descreve uma trajetória elíptica em torno do sol, que é um dos focos dessa trajetória. A lua em torno da terra e os demais satélites em relação a seus respectivos planetas também apresentam esse comportamento.

2ª) O cometa de Halley segue uma órbita elíptica, tendo o Sol como um dos focos.

3ª) As elipses são chamadas cônicas porque ficam configuradas pelo corte feito em um cone circular reto por um plano oblíquo em relação à sua base.

Elementos

Observe a elipse a seguir. Nela, consideramos os seguintes elementos:



- *focos :* os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$
- *centro*: o ponto **O**, que é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$
- *semi-eixo maior*: **a**

- *semi-eixo menor*: **b**
- *semidistância focal*: **c**
- *vértices*: os pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$
- *eixo maior*: $|A_1A_2| = 2a$
- *eixo menor*: $|B_1B_2| = 2b$
- *distância focal*: $|F_1F_2| = 2c$

Relação fundamental

Na figura acima, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo OF_2B_2 , retângulo em **O**, podemos escrever a seguinte relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidade

Chamamos de *excentricidade* o número real e tal que:

$$e = \frac{c}{a}$$

Pela definição de elipse, $2c < 2a$, então $c < a$ e, consequentemente, $0 < e < 1$.

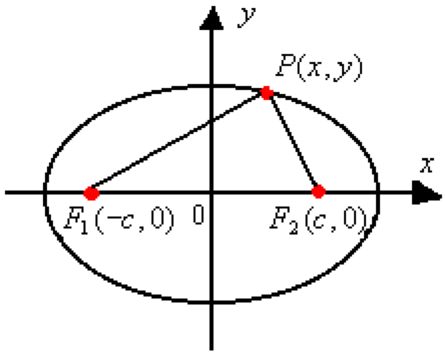
Observação: quando os focos são muito próximos, ou seja, c é muito pequeno, a elipse se aproxima de uma circunferência.

Equações da elipse

Vamos considerar os seguintes casos:

a) elip se com centro na origem e eixo maior horizontal

Sendo **c** a semidistância focal, os focos da elipse são $\mathbf{F_1}(-c, 0)$ e $\mathbf{F_2}(c, 0)$:

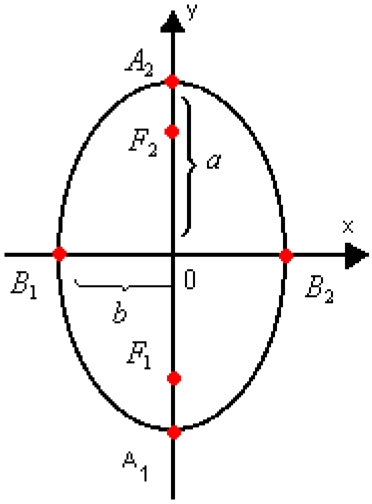


Aplicando a definição de elipse $\left(d_{F_1P} + d_{F_2P} = 2a\right)$, obtemos a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) elipse com centro na origem e eixo maior vertical

Nessas condições, a equação da elipse é:



$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$