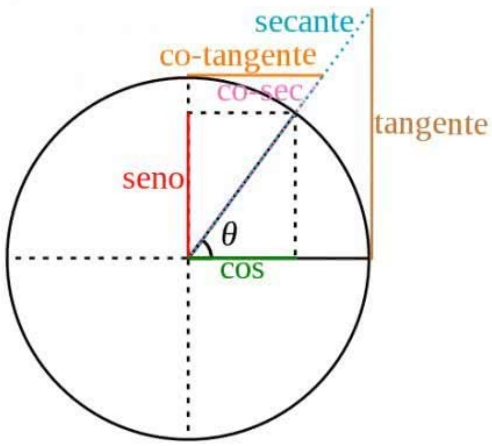
Círculo Trigonométrico

O **Círculo Trigonométrico**, também chamado de Ciclo ou Circunferência Trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas.



De acordo com a simetria do círculo trigonométrico temos que o eixo vertical corresponde ao **seno** e o eixo horizontal ao **cosseno**. Cada ponto dele está associado aos valores dos ângulos.

Ângulos Notáveis

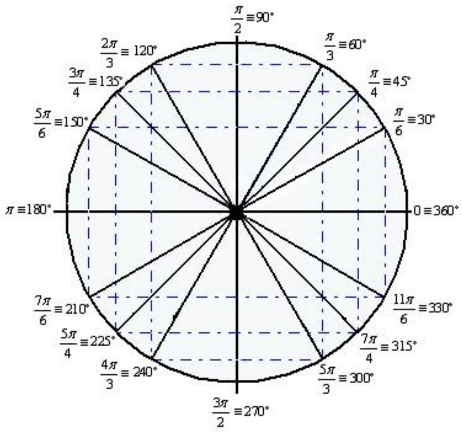
No círculo trigonométrico podemos representar as razões trigonométricas de um ângulo qualquer da circunferência.
Chamamos de **ângulos notáveis** aqueles mais conhecidos (30°, 45° e 60°). As razões trigonométricas mais importantes são seno, cosseno e tangente:

Relações Trigonométricas	30°	45°	60°
Seno	1/2	√2/2	√3/2
Cosseno	√3/2	√2/2	1/2
Tangente	√3/3	1	√3

Radianos do Círculo Trigonométrico

A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser dada em grau (°) ou radiano (rad).

- **1°** corresponde a 1/360 da circunferência. A circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas ao centro, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1°.
- **1 radiano** corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido.



Para auxiliar nas medidas, confira abaixo algumas relações entre graus e radianos:

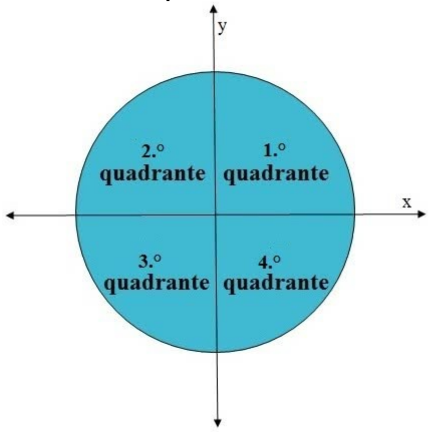
- π rad = 180°
- 2π rad = 360°
- π/2 rad = 90°
- π/3 rad = 60°
- π/4 rad = 45°

Obs: Se quiser converter essas unidades de medidas (grau e radiano) utiliza-se a regra de três.

Exemplo: Qual a medida de um ângulo de 30° em radianos?
π rad -180°
x – 30°
x = 30° . π rad/180°
x = π/6 rad

Quadrantes do Círculo Trigonométrico

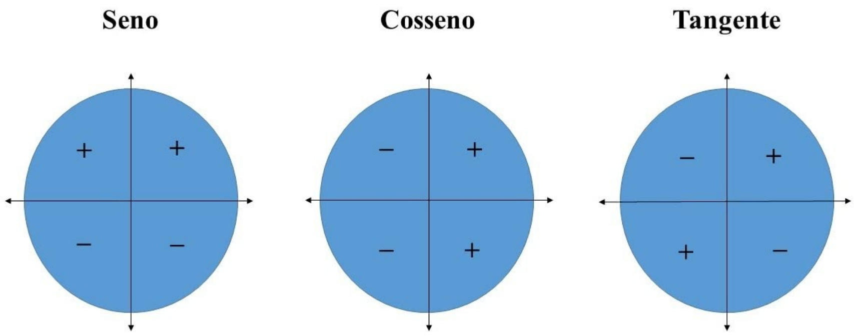
Quando dividimos o círculo trigonométrico em quatro partes iguais, temos os **quatro quadrantes** que o constituem. Para compreender melhor, observe a figura abaixo:



- **1.° Quadrante**: 0º
- **2.° Quadrante**: 90º
- **3.° Quadrante**: 180º
- **4.° Quadrante**: 270º
-

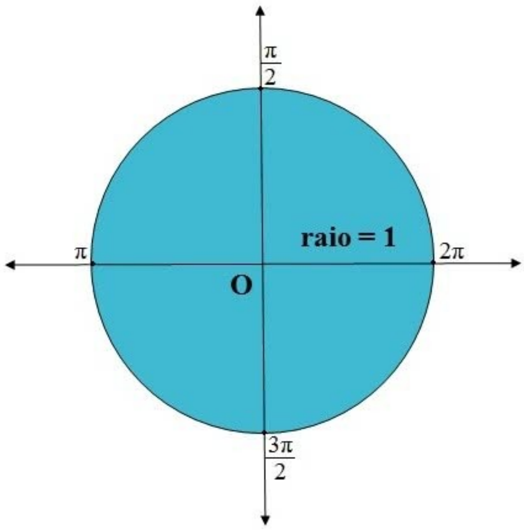
Círculo Trigonométrico e seus Sinais

De acordo com o quadrante em que está inserido, os valores do seno, cosseno e tangente variam.
Ou seja, os ângulos podem apresentar um valor positivo ou negativo.
Para compreender melhor, veja a figura abaixo:



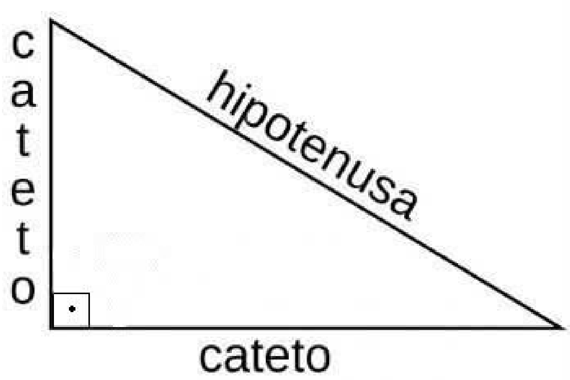
Como Fazer o Círculo Trigonométrico?

Para fazer um círculo trigonométrico, devemos construí-lo sobre o eixo de coordenadas cartesianas com centro em O. Ele apresenta um raio unitário e os quatro quadrantes.



Razões Trigonométricas

As razões trigonométricas estão associadas às medidas dos ângulos de um triângulo retângulo.



Representação do triângulo retângulo com seus catetos e a hipotenusa

Elas são definidas pelas razões de dois lados de um triângulo retângulo e do ângulo que forma, sendo classificadas em **seis maneiras**:

Seno (sen)

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto oposto sobre a hipotenusa.

Cosseno (cos)

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto adjacente sobre a hipotenusa.

Tangente (tan)

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Lê-se cateto oposto sobre cateto adjacente.

Cotangente (cot)

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{cosseno}}{\text{seno}}$$

Lê-se cosseno sobre seno.

Cossecante (csc)

$$\text{Cossecante} = \frac{1}{\text{seno}}$$

Lê-se um sobre seno.

Secante (sec)

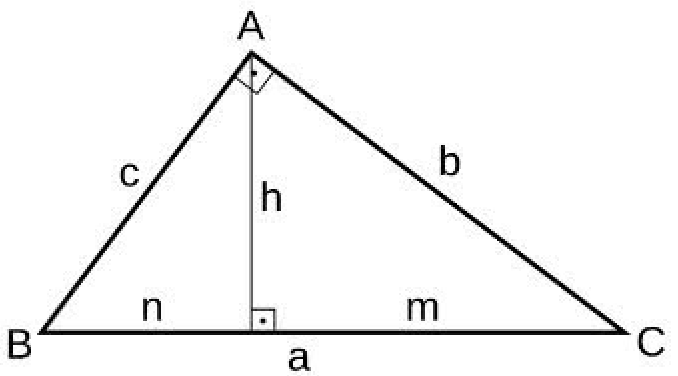
$$\text{Secante} = \frac{1}{\text{cosseno}}$$

Lê-se um sobre cosseno

Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo recebe esse nome, pois apresenta um ângulo chamado de reto, que possui o valor de 90°.

Os outros ângulos do triângulo retângulo são menores que 90°, chamados de ângulos agudos. A soma dos ângulos internos é de 180°.

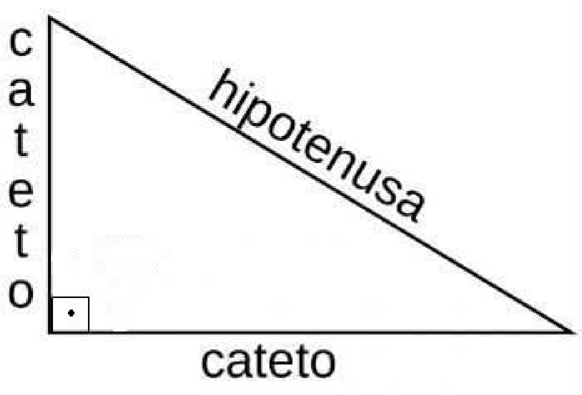


Observe que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são chamados de complementares. Ou seja, se um deles tem medida x, o outro terá a medida (90°- x).

Lados do Triângulo Retângulo: Hipotenusa e Catetos

Antes de mais nada, temos que saber que no triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo. Já os catetos são os lados adjacentes e que formam o ângulo de 90°.

Note que dependendo dos lados de referência ao ângulo, temos o cateto oposto e o cateto adjacente.



Feita essa observação, as **razões trigonométricas no triângulo retângulo** são:

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto oposto sobre a hipotenusa.

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Lê-se cateto adjacente sobre a hipotenusa.

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Lê-se cateto oposto sobre o cateto adjacente.

Vale lembrar que pelo conhecimento de um ângulo agudo e a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, podemos descobrir o valor dos outros dois lados.

Ângulos Notáveis

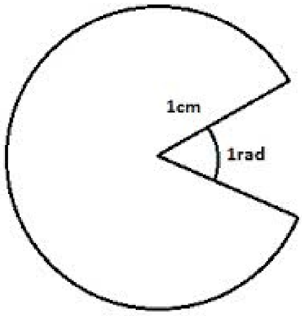
Os chamados ângulos notáveis são os que surgem com maior frequência nos estudos de razões trigonométricas.

Veja a tabela abaixo com o valor dos ângulos de 30°; 45° e 60°:

Relações Trigonométricas	30°	45°	60°
Seno (sen)	1/2	√2/2	√3/2
Cosseno (cos)	√3/2	√2/2	1/2
Tangente (tg)	√3/3	1	√3

Exercícios de Vestibular com Gabarito

1. (Vunesp-SP) Em um jogo eletrônico o “monstro” tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do “monstro”, e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro “do monstro”, em cm, é:
a) π – 1
b) π + 1
c) 2 π – 1
d) 2 π
e) 2 π + 1

2. (PUC-MG) Os moradores de certa cidade costumam fazer caminhada em torno de duas de suas praças. A pista que contorna uma dessas praças é um quadrado de lado L e tem 640 m de extensão; a pista que contorna a outra praça é um círculo de raio R e tem 628 m de extensão. Nessas condições, o valor da razão R/L é aproximadamente igual a:
Use π = 3,14.
a) ½
b) 5/8
c) 5/4
d) 3/2

3. (U.F.Pelotas-RS) Nossa época, marcada pela luz elétrica, por estabelecimentos comerciais abertos 24 horas e prazos apertados de trabalho, que muitas vezes exigem o sacrifício dos períodos de sono, pode muito bem ser considerada a era do bocejo. Estamos dormindo menos. A ciência mostra que isso contribui para a ocorrência de males como diabetes, depressão e obesidade. Por exemplo, quem não segue a recomendação de dormir no mínimo de 8 horas por noite, tem 73% mais risco de se tornar obeso. (*Revista Saúde*, n.º 274, junho de 2006 - adaptado)
Uma pessoa que durma à zero hora e siga a recomendação do texto apresentado, quanto ao número mínimo de horas diárias de sono, acordará às 8 horas da manhã. O ponteiro das horas, que mede 6 cm de comprimento, do despertador dessa pessoa, terá descrito, durante seu período de sono, um arco de circunferência com comprimento igual a:
Use π = 3,14.
a) 6π cm
b) 32π cm
c) 36π cm
d) 8π cm
e) 18π cm

4. (UFRS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte minutos. O menor ângulos entre os ponteiros é:
a) 45°
b) 50°
c) 55°
d) 60°
e) 65°

5. (UF-GO) Por volta de 250 a.C., o matemático grego Erastóstenes, reconhecendo que a Terra era esférica, calculou sua circunferência. Considerando que as cidades egípcias de Alexandria e Syena localizavam-se em um mesmo meridiano, Erastóstenes mostrou que a circunferência da Terra media 50 vezes o arco de circunferência do meridiano ligando essas duas cidades. Sabendo que esse arco entre as cidades media 5000 estádios (unidade de medida utilizada na época), Erastóstenes obteve o comprimento da circunferência da Terra em estádios, o que corresponde a 39 375 km no sistema métrico atual.
De acordo com estas informações, a medida em metros, de um estádio era:
a) 15,75
b) 50,00
c) 157,50
d) 393,75
e) 500,00

GABARITO:

1) Alternativa e) $2\pi + 1$
2) Alternativa b) 5/8
3) Alternativa d) 8π cm
4) Alternativa b) 50°

Alternativa c) 157,50

Lista de exercícios :

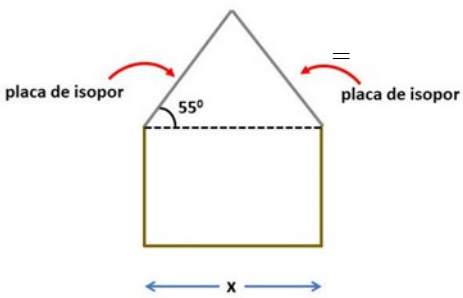
1) A figura abaixo representa um avião que decolou sob um ângulo constante de 40º e percorreu em linha reta 8000 m. Nesta situação, qual a altura que se encontrava o avião ao percorrer essa distância?

Considere:
sen 40º = 0,64
cos 40º = 0,77
tg 40º = 0,84

2) Para uma feira de ciências um grupo de estudantes resolveu construir uma maquete de uma casa, conforme esquema abaixo. O telhado será feito com uma placa de isopor de 1m de comprimento, que será dividida ao meio para fazer as duas partes do telhado. Sabendo que o telhado será feito segundo um ângulo de 55º, calcule a medida **x** da largura casa.

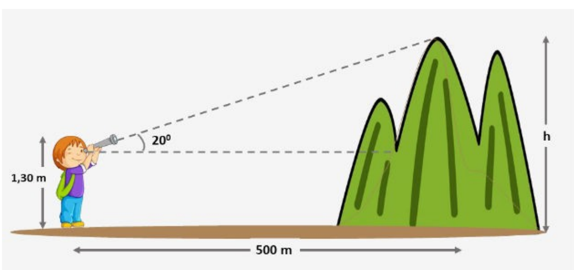
Considere:

sen 55º = 0,82
cos 55º = 0,57
tg 55º = 1,43



3) Um menino avista o ponto mais alto de um morro, conforme figura abaixo. Considerando que ele está a uma distância de 500 m da base do morro, calcule a altura (h) deste ponto.

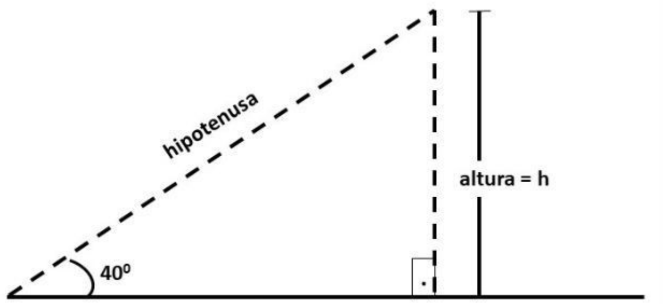
Considere:



sen 20º = 0,34
cos 20º = 0,93
tg 20º = 0,36

Gabarito:

1) Vamos começar o exercício representando na figura a altura do avião. Para isso, basta desenhar uma reta perpendicular à superfície e que passa pelo ponto onde o avião se encontra.



Notamos que o triângulo indicado é retângulo e a distância percorrida representa a medida da hipotenusa deste triângulo e a altura do cateto oposto ao ângulo dado.

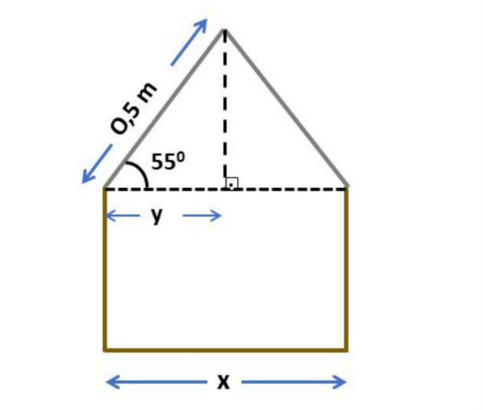
Portanto, usaremos o seno do ângulo para encontrar a medida da altura:

Assim, ao percorrer 8 000 m, o avião se encontra a **5 120 m de altura.**

2) Como o telhado da maquete será feito com uma placa de isopor de 1m de comprimento, ao dividir a placa ao meio, a medida de cada lado do telhado será igual a 0,5 m.

O ângulo de 55º é o ângulo formado entre a reta que representa o telhado e uma reta na direção horizontal. Se unirmos essas retas, formamos um triângulo isósceles (dois lados de mesma medida).

Vamos então traçar a altura deste triângulo. Como o triângulo é isósceles, essa altura divide a sua base em segmentos de mesma medida que chamamos de **y,** conforme figura abaixo:



A medida **y** será igual a metade da medida de **x,** que corresponde a largura da casa.

Desta forma, temos a medida da hipotenusa do triângulo retângulo e procuramos a medida de **y**, que é o cateto adjacente ao ângulo dado.

Assim, podemos usar o cosseno de 55º para calcular esse valor:

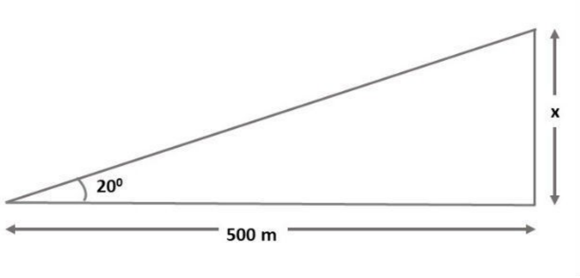
$$\cos 55° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$
$$0{,}57 = \frac{y}{0{,}5}$$
$$y = 0{,}57.0{,}5$$
$$y = 0{,}285$$

Como a largura da casa é igual a duas vezes essa medida, então temos:

largura da casa = 2. 0,285 = 0,57

Assim, a maquete da casa terá uma **largura de 0,57 m** ou **57 cm**.

3) Observando o desenho, notamos que o ângulo visual é de 20º. Para calcular a altura do morro, iremos usar as relações do seguinte triângulo:



Como o triângulo é retângulo, iremos calcular a medida **x** usando a razão trigonométrica tangente.

Escolhemos essa razão, visto que conhecemos o valor do ângulo do cateto adjacente e estamos procurando a medida do cateto oposto (**x**).

Assim, teremos:

$$tg\ 20° = \frac{x}{500}$$

$$0{,}36 = \frac{x}{500}$$

$$x = 500.0{,}36 = 180$$

Como o menino tem 1,30 m, a altura do morro será encontrada somando-se este valor ao valor encontrado para **x**. Assim, teremos:

h = 180 + 1,3 =181,3

Logo, a altura do morro será igual a 181,3 m.

5)