# Coniques passant par l’origine, définies par ses points focaux et l’angle entre les rayons vecteurs

## Une définition unitaire quel que soit le type de la conique

On considère la conique tangente à l’axe des abscisses à l’origine, telle que les rayons issus des foyers soient symétriques par rapport la tangente sous un angle θ. Dans le repère lié la tangente et à la normale les coordonnées des foyers sont

p et q sont les distances de l’origine au points P et Q sur la droite orientée déduite de l’axe Ox par rotation d’un angle -θ pour le point P et +θ pour le point Q. Ces distances peuvent être positives si le foyer est « à droite » de la normale, ou négative si le foyer est « à gauche » de la normale.

Si le produit pq < 0, les deux foyers sont de part et d’autre de (ou sur) la normale et on définit une ellipse (un cercle si θ=±p/2 et p=-q). Si le produit pq>0, les deux foyers sont d’un même côté de la normale et on définit une hyperbole dont on utilise la nappe qui entoure le foyer le plus proche. Si pq=0, on définit une parabole.

Le signe de θ est utilisé pour définir la convexité ou la concavité de la surface en faisant l’hypothèse que l’extérieur de la surface pointe dans la direction des Y positifs. Si θ>0 la surface est concave (le ou les foyers internes à la nappe utilisée sont « au-dessus » de la surface). Si θ<0 la surface est convexe (le ou les foyers internes à la nappe utilisée sont « au-dessous » de la surface).

## Paramètres géométriques de la conique

#### Axe de la conique

C’est la droite PQ joignant les foyers et sa direction est donné par l’angle ϕ par rapport la tangente à l’origine (axe Ox) :

(1)

#### Centre de la conique

C’est le milieu du segment PQ :

(2)

## Paramètres des demi-axes et expression de la conique sur ses axes propres

Le demi-axe principal a pour longueur quelle que soit la forme de la conique, ellipse(pq<0) ou hyperbole (pq>0).

La distance entre foyers est généralement notée par 2 c. Avec les paramètres adoptés, nous avons

(3)

L’expression du demi-petit axe dépend du type de conique suivant qu’il s’agit   
d’une ellipse : pq <0 et , on a alors

d’une hyperbole : pq >0 et , on a alors

Dans les deux cas la matrice de la conique rapportée à ses axes propres a exactement la même forme à savoir ; =0 avec :

(4)

## Expression de la conique dans le repère de définition

On passe du repère de définition au repère des axes propres de la conique en appliquant successivement une translation de vecteur -C :

, (5)  
et une rotation de d’angle -ϕ :

= . (6)

Dans le repère dedéfinition l’équation de la conique est donc

(7)

La matrice de la transformation de coordonnées globale est :

et on montre facilement que

(8)

## Non unicité de la représentation matricielle

Il convient de remarquer que la représentation d’une conique par une matrice symétrique réelle telle que n’est pas unique. Toute matrice dont les coefficients sont proportionnels à ceux de représente la même conique.

On doit noter aussi qu’avec les définitions choisies, l’origine des coordonnées appartient à la conique. On a donc nécessairement

Enfin la représentation de l’équation (7) ne permet pas de passer continument d’une ellipse à une hyperbole en passant par la parabole quand une des distances focales change de signe en passant par l’infini. En effet les deux premiers termes diagonaux de la matrice tendent ensemble vers 0 quand p ou q tendent vers l’infini. Compte tenu de la remarque précédente , cela signifie que la matrice tend vers la matrice nulle.

Pour éviter cette difficulté on peut multiplier la matrice par une expression du premier degré dans les variables p et q. Nous choisissons de multiplier par le facteur (q-p). L’équation (4) devient alors :

(9)

Nous allons monter que cette transformation résout le problème de divergence quand p ou q tendent vers l’infini, bien le terme 33 de cette matrice soit maintenant divergent et que le point C parte également vers l’infini avec l’un des foyers.

## Convergence quand p ou q tendent vers l’infini

Pour montrer la convergence de la nouvelle représentation il suffit d’établir celle de la matrice définie par :

(10)

En effet l’angle de rotation ϕ tend vers une limite finie égale à±θ lorsque p ou q tendent vers l’infini

Nous noterons le vecteur transformé . Celui-ci s’évalue comme :

(11)

Et en utilisant (1)

En rappelant que (équation 5), on voit que

(12)

(13)

(14)

## Représentation unitaire des coniques passant par l’origine

Le paramétrage par les distances au foyer a permis de poser simplement les équations mais présente l’inconvénient que les paraboles ne peuvent représentée qu’en faisant tendre p ou q vers l’infini.

Pour obtenir une représentation totalement unitaire il suffit de passer aux distances focales réciproques et

En fonction de ces nouveaux paramètres, la matrice s’écrit de la façon suivante :

(15)

Et la matrice , l’angle ϕ étant défini par

Finalement, un changement de l’angle θ d’une valeur positive à une valeur négative devrait faire passer d’une surface concave à une surface concave en passant par le plan pour .

La formule précédente ne le permet pas, sauf à multiplier tous les termes de par , auquel cas on retrouve bien la conique dégénérée . Ceci conduit à dans la programmation la forme finale ci-dessous :

(16)

Singularités

Le calcul de peut poser une difficulté numérique quand . Si cette difficulté est facilement résolue en utilisant la fonction atan2, . La conique tend alors vers une ellipse d’axe vertical, .Si , atan2 n’est pas définie. Ce cas correspond à un cercle et la valeur de , importe peu puisque la rotation ramènera dans tous les cas le centre du cercle sur l’axe OY. On pourra donc choisir, par simplicité, dans ce cas singulier. Il pourrait se produire au cours d’une optimisation ou d’un fit.

Reste la singularité p1=q1. Si on se réfère à la définition cela signifie que les foyers de l’hyperbole sont disposés symétriquement par rapport à l’axe Ox. On a donc a=0, et j=±p/2. a=0 implique que l’hyperbole est dégénérée en la droite double y=0. Les foyers sont les points , ,. L’origine n’appartient à la conique que si p1=h ou sinθ=0. On ne devrait pas rencontrer ce cas au cours d’une optimisation et en tout état de cause il faut prévoir de lever une exception pour p1≈q1.

NB- Si P et Q tendent simultanément vers un point de l’axe Ox, on définit une hyperbole qui tend vers une forme dégénérée en deux droites. Si cette configuration est étendue à une quadrique de révolution celle-ci tend vers un cône. Ces formes dégénérées sont des figures sans foyers qui ne rentrent pas dans la représentation ci-dessus.

Note sur la position des foyers à « droite » ou à « gauche » de la normale

Effectuant un développement limité de l’équation ramenée aux axes propres il est facile de montrer que le rayon de courbure aux extrémités du grand axe est . A ce point, la normale à la conique passe par les foyers, mais dans son voisinage elle tourne autour du centre de courbure qui, pour une ellipse, se trouve à la distance du centre de celle-ci. Or c < a, donc la normale passe entre le centre de l’ellipse et le foyer le plus proche.

Même chose avec l’hyperbole mais avec un centre de courbure à du centre de l’hyperbole et c > a donc la normale passe à l’extérieur du foyer le proche.

**NB :** Dans le programme OptiX, la section elliptique est décrite dans le plan XZ. Dans l’espace 3D, la rotation d’angle ϕ de X vers Z est une rotation d’angle ϕ et de vecteur .

## Intercept par la droite x=x0

(Utile pour effectuer un fit elliptique)

La matrice M ramenée sur les axes est

L’ordonnée y est solution de l’équation du second degré :

Il est plus simple d’exprimer cet intercept dans le repère tourné de

Les coordonnées du point d’intersection sont données par ou **U** et sont les vecteurs orthogonaux homogènes : et

L’équation de l’intercept est alors

En introduisant les vecteurs unitaires orthogonaux et , tous deux orthogonaux à **,** on réécrit l’équation comme :

Or le produit , on voit qu’on peut revenir aux coordonnées naturelles,

et, et, en notant **,** la sous-matrice des 2 premières lignes et colonnes de l’équation de l’intercept devient :

## Normale au point d’abscisse x=x0

La direction de la tangente est la limite du vecteur **X-X0**, **X** et **X0** appartenant à la conique, quand X tend vers **X0**. En écrivant **X**= **X0**+t **S** on voit que la limite de **S** quand t tend vers 0 est telle que **SMX0**=0. La normale est donc colinéaire au vecteur **MX0**. Par analogie avec ce qui précède nous réécrivons la matrice **M** après division par cos2ϕ sous la forme

Et

Notons que seule la direction de la normale à un sens. Il est donc inutile de garder la troisième composante du vecteur S