Universidad Rey Juan Carlos

junio-2007
Matemáticas Financieras
LADE (Móstoles)

Problema 1

En el mercado cotizan los siguientes bonos:
Bono A: Bono Cupón Cero a 1 año y TIR del 10%
Bono B: Bono Cupón Cero a 3 años y TIR del 9%
Bono C: Bono Cupón Explícito a 2 años del 8% anual. Nominal de 1.000 € y precio de 950 €.
Calcular el tipo forward implícito r_{23} existente en el mercado.

<u>Solución</u>

Planteando el Precio del bono C calculado con la ETTI podremos calcular r_{02}:

$$950 = \frac{80}{(1+0{,}1)} + \frac{1.080}{(1+r_{02})^2} \quad \rightarrow \quad r_{02} = 10{,}9544087858412\%$$

Se verifica que:

$$(1+r_{03})^3 = (1+r_{02})^2(1+r_{23}) \rightarrow r_{23} = \frac{(1+r_{03})^3}{(1+r_{02})^2} - 1 = \frac{(1+0{,}09)^3}{(1+0.1095...)^2} - 1 = 5{,}1938539562\%$$

Problema 2

Marcos y Elena se compran una casa de 500.000 € conjuntamente y a partes iguales. La financian es su totalidad a 20 años, mediante un préstamo al 6% nominal anual y pagos mensuales constantes. Acuerdan que Elena se haga cargo de las primeras s mensualidades y Marcos desde la s+1 hasta el final. Y para conseguir que ambos paguen lo mismo en términos financieros, acuerdan que Elena aporte X euros más en el instante s. Al final del mes 100, justo después de haber efectuado Marcos el pago que corresponde en ese momento, deciden disolver su negocio común, de forma que Elena se quedará con la casa y por tanto deberá pagar a Marcos en ese momento cierto importe C, que calculan al mismo tipo de interés que el del préstamo. Calcular C.

<u>Solución</u>

$$500.000 = a\, a_{\overline{240|}0{,}5\%} \quad \rightarrow \quad a = 3.582{,}16\text{ €}$$

$$250.000 = 3.582{,}16\, a_{\overline{s|}0{,}5\%} \quad \rightarrow \quad s = 86{,}04876713 \text{ meses}$$

$$250.000 \cdot 1{,}005^{86} = 3.582{,}16\, S_{\overline{86|}0{,}5\%} + X \quad \rightarrow \quad X = 174.23\text{ €}$$

Para calcular C no es necesario calcular X.
Elena tiene que pagar a Marcos los 14 meses que él abonó. (100-86=14)

$$C = 3.582{,}16\, S_{\overline{14|}0{,}5\%} \quad \rightarrow \quad C = 51.813{,}11\text{ €}$$

Problema 3

En una cuenta bancaria que proporciona el 0,9% mensual se opera con 4 rentas todas ellas de pagos anuales y crecientes un 10,8% anual acumulado, siendo, en cada renta, la cuantía del primer año de 4.000 €. Las rentas se diferencian en que la primera se ingresa en la cuenta a finales de marzo, la segunda se detrae de la cuenta a finales de junio, la tercera se ingresa a finales de septiembre y la cuarta se detrae a finales de diciembre. El primer movimiento de la cuenta se efectúa a finales de marzo de 2007. Calcular el saldo en cuenta transcurridos 10 años.

Solución

Valor a final de año de las cuantías que mueven la cuenta.

$$C = 4.000\, s_{\overline{2}|i_2} (1+i_4) - \quad 4.000\, s_{\overline{2}|i_2} \quad \rightarrow \quad C = 223{,}97\text{ €}$$

Otra forma de calcular C: $C = 4.000\left[(1+i_4)^3 - (1+i_4)^2 + (1+i_4) - 1\right]$

$$\text{Saldo} = S(C;1{,}108)_{\overline{10}|i} = \quad 5.764{,}78\text{ €}$$

Problema 4

Un préstamo se contrató a tipo variable (Euribor+1%) con revisión anual de intereses, duración 25 años y pagos mensuales. El principal es de 500.000 € y el Euribor ha evolucionado en los años sucesivos de la siguiente forma: Comenzó siendo del 2% y creció un punto hasta situarse en el 9%, tasa en la que permaneció constante 3 años más, y luego fue cayendo medio punto porcentual hasta llegar al 2% el último año. Se sabe que el valor a final de año de los intereses abonados durante el año 10 es igual a 40.317,702 € calcular la mensualidad del año 10.

Solución

Podemos trabajar en términos anualizados. Nos dan $\mathrm{I}_{10} = 40.317{,}702\text{ €}$.

Como $I_s = C_{s\text{-}1} \cdot i$, podemos calcular $C_9 = I_{10}/\mathrm{i} = 40.317{,}702/0{,}1 = 403.177{,}02$

Ahora trabajaremos en meses. El final del año 9 es el final del mes 108. Y como 25 años son 300 meses, resulta que los meses que quedan por pagar son 192 (300-108). El tipo de interés vigente es Euribor+1%=9%+1%=10%, y su mensual equivalente es: $i_{12} = (1+0{,}10)^{1/12} - 1$.

Podemos calcular la mensualidad: $403.177{,}02 = a\, a_{\overline{192}|i_{12}} \quad \rightarrow \quad a = 4.109{,}29\text{ €}$

Problema 5

Don Gustavo tiene que hacer frente a un pago a final de año, durante 30 años. El pago crece un 5% anual acumulado y el del primer año es de 12.000 €. Para hacer frente a estos pagos anuales Don Gustavo ahorra cada uno de los 11 meses previos una cantidad que ingresa en una cuenta bancaria que proporciona un 0,3% mensual. El primer año ingresó mensualmente C euros al mes, durante los 11 meses previos, y este importe se fue incrementando también un 5% anual acumulado para hacer frente a los pagos de los futuros años. Dentro de cada año, la última aportación se realiza un mes antes del pago correspondiente a ese año. Calcular C.

Solución

Al final del primer año el saldo en cuenta es cero.

No es necesario trabajar con rentas geométricas durante 30 años ya que los incrementos del 5% son iguales para las aportaciones y para las disposiciones.

$$C\, \ddot{s}_{\overline{11}|0{,}3\%} = 12.000 \quad \rightarrow \quad C = 1.071{,}43\text{ €}$$

Problema 6

De una operación de Leasing sabemos que el capital que se pretende financiar es de un millón de euros, que dura 5 años y que se efectuaran pagos mensuales prepagables constantes (a), siendo el tipo de interés pactado del 9% nominal anual, y el valor residual igual a dos mensualidades (VR=2 a) que se abonarían transcurrido un mes desde que se pagó la ultima mensualidad. Calcular a.

Solución

$$10^6 = a\,\ddot{a}_{\overline{61}|i_{12}} + a(1+i_{12})^{-60} \quad \rightarrow \quad a = 20.075{,}45\text{ €}$$

Otro método: $10^6 = a\,\ddot{a}_{\overline{60}|i_{12}} + 2a(1+i_{12})^{-60}$

Problema 7

El Sr. A compra un bono por 970 €, paga un cupón del 8% nominal anual pagadero por semestres vencidos. El bono se amortizará dentro de 10 años por el nominal (1.000 €) más una prima de amortización de 50 €. Transcurridos 5 años, y justo después de cobrar el cupón, el Sr. A vende el bono en el mercado secundario por un precio P. En ese momento el bono lo compra el Sr. B que lo mantiene hasta su vencimiento obteniendo una rentabilidad del 6% efectivo anual. Los cupones los ingresa el Sr. A en una cuenta bancaria que proporciona un 2% semestral. Calcular la rentabilidad obtenida por el Sr. A durante esos 5 años expresada en tanto efectivo anual.

Solución

$$P = 40\,a_{\overline{10}|1{,}06^{1/2}-1} + 1.050(1+0.6)^{-5} \quad \rightarrow \quad P = 1.126{,}59$$

$$\text{Saldo en Cta.} = 40\,s_{\overline{10}|2\%} = 437{,}99 \qquad \text{Montante}=1.126{,}59+437{,}99=1.564{,}58\text{ €}$$

$$1.564{,}58 = 950(1+r_A)^5 \quad \rightarrow \quad r_A = 10{,}03357\%$$

Problema 8

Una operación de Leasing se contrata para financiar unas máquinas cuyo precio es de 20.000 €, a 14 años, con cuotas anuales prepagables constantes (a) y valor residual igual al de una cuota más (a) que se abonaría un año más tarde de la última anualidad satisfecha. El tanto anual es del 10%. Calcular a.

Solución

$$20.000 = a\,\ddot{a}_{\overline{15}|10\%} \quad \rightarrow \quad a = 2.390{,}43\text{ €}$$

Problema 9

Un inversor compra un bono en el mercado primario por el nominal (1.000 €). La duración del bono es de 10 años, se amortiza por el nominal y proporciona cupones de C € anuales. Al cabo de 5 años, después de cobrar el quinto cupón, vende el bono a un segundo inversor por P €, manteniendo este inversor el bono hasta su vencimiento. Calcúlese el precio de compraventa P y la cuantía de los cupones C en el supuesto de que la rentabilidad del primer inversor haya sido del 7% efectivo anual y la rentabilidad del segundo inversor del 6% efectivo anual.

Solución

$$\left\{\begin{array}{l} 1.000 = C\,a_{\overline{5}|7\%} + P\left(1+0{,}07\right)^{-5} \\ P = C\,a_{\overline{5}|6\%} + 1.000\left(1+0{,}06\right)^{-5} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = 65{,}77 \\ P = 1.024{,}31 \end{array}\right\}$$

Problema 10

Un señor tiene previsto ingresar 3.000 € al final de cada trimestre durante el primer año, aumentando estas aportaciones en un 3% acumulativo anualmente. Si este señor no realizase las aportaciones previstas al final de sexto mes de cada año, ¿cuál sería el montante alcanzado al cabo de 12 años, siendo el tipo de interés ofrecido el 12% nominal anual?

Solución

$$i_4 = \frac{j_4}{4} = 3\% \quad i = (1+0{,}03)^{12} - 1 = 12{,}550881\%$$

$$\text{Montante} = S\left(3.000(1+1{,}03+1{,}03^3);1{,}03\right)_{\overline{12}|i} = \quad 265.471{,}82\ €$$

Problema 11

Un préstamo se contrata a 12 años, al 9% nominal anual, con un principal de 600.000 €. Se pacta que durante los primeros 4 años se abonará una cantidad constante cada mes de *a* €, y que durante los meses restantes será de *b* €, teniéndose que aportar al finalizar el préstamo un pago adicional de 40.000 €. Si b es un 30% menor que a, calcular el importe de ambas: *a* y *b*.

Solución

$$600.000 = a\,a_{\overline{48}|0{,}75\%} + 0{,}70a\,a_{\overline{96}|0{,}75\%} + 40.000(1+0{,}0075)^{-144} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 7.970{,}63 \\ \text{b} = 5.579{,}44 \end{array}\right.$$

Problema 12

En el mercado cotizan los siguientes bonos:
Bono A: Bono cupón cero a 6 meses. TIR del 5%
Bono B: Bono cupón explícito a un año, cupón semestral del 6% nominal anual. TIR del 6%
Bono C: Bono cupón cero a 18 meses. TIR del 7%
Bono D: Bono cupón explícito a dos años, cupón semestral del 8% nominal anual. TIR del 8%.
Calcular el precio del Bono E que es un bono cupón explícito a dos años, cupón semestral del 12% nominal anual y nominal 100.000 €.

Solución

Trabajaremos en semestres y hablaremos de ETTI semestral, así r_{02} será el punto de la ETTI a un año.
Por el bono A sabemos que $r_{01}=1{,}05^{1/2}-1= 2{,}4695\%$

Precio del bono B: $100 = \dfrac{3}{(1+r_{01})} + \dfrac{103}{(1+r_{02})^2} \rightarrow r_{02} = 2{,}9636\%$

Por el bono C sabemos que $r_{03}=1{,}07^{1/2}-1= 3{,}4408\%$
Precio del bono D con la TIR:

$$P_D = \frac{4}{(1+8\%)^{1/2}} + \frac{4}{(1+8\%)^{1}} + \frac{4}{(1+8\%)^{3/2}} + \frac{104}{(1+8\%)^{2}} = 100{,}28$$

Precio del bono D con la ETTI:

$$P_D = \frac{4}{(1+r_{01})} + \frac{4}{(1+r_{02})^2} + \frac{4}{(1+r_{03})^3} + \frac{104}{(1+r_{04})^4} \quad \rightarrow \quad r_{04} = 3{,}9738\%$$

Precio del Bono E:

$$P_E = \frac{6}{(1+r_{01})} + \frac{6}{(1+r_{02})^2} + \frac{6}{(1+r_{03})^3} + \frac{106}{(1+r_{04})^4} = 107.636{,}47 \text{ €}$$

Problema 13

Un préstamo francés de principal Co euros, se amortiza en10 años mediante pagos anuales. Se sabe que los capitales vivos al final de los años 7, 8 y 9 son: C_7= 384.063,45; C_8=265.759,03 y C_9=137.990,27. Calcular la anualidad.

Solución

$$A_s = C_{s-1} - C_s \quad \rightarrow \begin{cases} A_8 = C_7 - C_8 = 384.063{,}45 - 265.759{,}03 = 118.304{,}42 \\ A_9 = C_8 - C_9 = 265.759{,}03 - 137.990{,}27 = 127.768{,}76 \end{cases}$$

$$A_s = A_{s-1}(1+i) \quad \rightarrow \quad i = \frac{127.768{,}76}{118.304{,}42} - 1 = 0{,}08 = 8\% \text{ anual}$$

$$a = C_9(1+0{,}08) = 149.029{,}48 \text{ €}$$

Otro método: $384.063{,}45 = a\, a_{\overline{3}|8\%} \quad \rightarrow \quad a = 149.029{,}48 \text{ €}$