MIT 18.03 微分方程课程（2006 年春季）
第四讲课堂整理

这份文档是 **MIT 18.03 微分方程课程（2006 年春季）第四讲的课堂整理稿**。

核心逻辑

我们只擅长解两种方程（分离变量法和线性方程）。面对其他复杂的“怪物”，我们的策略是通过**换元**把它们“降维”成我们会解的那两种。

以下是基于文档内容的深度拆解，按照“第一性原理”逻辑进行了重构：

1 尺度变换 (Scaling)：物理学家的“去量纲化”

这是最简单但对工程（特别是像机器人学）极重要的一步。

- **直觉**：物理方程充满了单位（秒、千克、开尔文）。这些单位不仅繁琐，还掩盖了方程的数学本质。
- **操作**：
  - 引入新变量 $T_1 = T/M$，其中 M 是外部常数温度。这样 T_1 就变成了一个没有单位的纯数字（Dimensionless）。
  - **Lumping Constants (常数打包)**：将一堆物理常数（如 kM^3）打包成一个新的常数 k_1。
- **费曼视角**：这样做之后，方程不再依赖具体的测量单位（摄氏度还是华氏度），只剩下纯粹的比例关系。方程变得更“干净”，参数更少。

2 伯努利方程 (Bernoulli Equations)：强行线性化

这是一类“伪装”成非线性的方程。

- **形式**：$y' + p(x)y = q(x)y^n$。
  - 如果 $n = 0$ 或 1，它是线性的或可分离的，很简单。
  - 如果 n 是其他数（比如 $2, -5, 1/2$），原本的线性结构被 y^n 破坏了。

- **破解策略（Hack）**：
  1. **除法攻击**：不要盯着 y^n 发愁，直接全式除以 y^n。方程变为：
  $$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x)$$
  2. **发现规律**：你会发现 $\frac{1}{y^{n-1}}$ 的导数恰好和第一项 $\frac{y'}{y^n}$ 有关（差一个常数倍数）。
  3. **换元**：令 $v = y^{1-n}$（或者 $1/y^{n-1}$）。
- **结果**：方程神奇地变成了一个关于 v 的**线性方程**。
- **讲师建议**：别背公式，记住这个“除法”的操作逻辑。

3 齐次方程 (Homogeneous Equations)：缩放对称性

这里的“齐次”不是指 $Ax = 0$，而是指一种几何上的**对称性**。

- **几何直觉 (Zoom Invariance)**：如果把 x 和 y 轴同时放大 a 倍（Zoom），方程的形式保持不变。这意味着斜率 y' 只取决于 y 和 x 的比值，即 $y' = F(y/x)$。
- **陷阱与技巧**：
  - 直觉上你会想令 $z = y/x$。但是如果你直接算 z'，会非常麻烦。
  - **逆向换元 (Inverse Substitution)**：使用 $y = zx$。
  - 因为我们更擅长处理乘积的导数：$y' = z'x + z$。
- **结果**：方程转化为可分离变量方程：
$$x\frac{dz}{dx} = F(z) - z.$$

4 极坐标：毒贩船与灯塔 (The Drug Boat)

这是一个非常经典的“追踪曲线”问题，很有机器人路径规划的味道。

- **场景**：一艘毒贩船被灯塔照住。为了逃跑，船始终保持与光束成 $45°$ 角航行。
- **建模**：
  - 我们需要求船的轨迹 $y(x)$。
  - 船的航向（斜率 y'）是光束角度 α 加上 $45°$。
  - 利用三角函数公式：$y' = \tan(\alpha + 45°) = (\tan\alpha + 1)/(1 - \tan\alpha)$。
  - 因为 $\tan\alpha = y/x$，所以方程是：$y' = \frac{y/x+1}{1-y/x}$。
- **求解与顿悟**：

- 这是一个典型的齐次方程（右边全是 y/x）。
- 通过繁琐的积分，最后得到隐函数解。
- **结尾**：讲师最后指出，如果在直角坐标系下看这个解简直是“一团糟”(a mess)。但如果转到**极坐标** (Polar Coordinates)，利用 $\tan^{-1}(y/x) = \theta$，解竟然是惊人简洁的**对数螺线 (Logarithmic Spiral)**：

$$r = c_1 e^{\theta}.$$

总结

这篇文档实际上是在教你如何通过**变换视角**来解题：

1. **Scaling:** 消除单位的干扰，看清物理本质。
2. **Bernoulli:** 通过除法暴露隐含的线性结构。
3. **Homogeneous:** 利用几何上的缩放对称性。
4. **Polar Coordinates:** 对于旋转对称的问题（如灯塔），选对坐标系（极坐标）比死算微积分更重要。

5 4 个核心问题的完整题面

5.1 问题 1：高温冷却模型的去量纲化 (Scaling)

背景：描述物体在极高温度下的冷却过程（类似 Stefan-Boltzmann 定律），此时牛顿冷却定律不再适用。

题面：已知高温冷却方程如下：

$$\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4)$$

其中：

- T 是物体内部温度（变量）。
- M 是外部环境恒定温度（常数）。
- k 是物理常数。

任务：通过引入新变量 $T_1 = T/M$ 对该方程进行尺度变换（Scaling），使其去量纲化并简化常数。

5.2 问题 2：伯努利方程求解 (Bernoulli Equation)

背景：作为一个具体的数学练习，展示如何通过换元法解非线性方程。

题面：求解以下一阶微分方程：

$$y' = \frac{y}{x} - y^2$$

（注：该方程也可以写成 $xy' - y = -xy^2$ 的形式）

任务：识别其为伯努利方程（Bernoulli Equation），并求出通解。

5.3 问题 3：毒贩船的追踪轨迹 (The Drug Boat / Pursuit Curve)

背景：这是一个经典的追踪曲线问题。一艘船试图逃离灯塔的光束。

题面：假设灯塔位于原点 $(0, 0)$。一艘毒贩船被灯塔的光束照中。为了逃跑，船的航行方向（切线方向）始终与光束（径向方向）保持 45° 的夹角。

任务：

1. 建立描述船的轨迹 $y(x)$ 的微分方程（提示：利用 $\tan(\alpha + 45^\circ)$ 公式）。推导出的方程应为：

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

2. 求解该轨迹方程（推荐使用极坐标变换）。

5.4 问题 4：非线性旋转动力系统分析 (Phase Portrait)

背景：考察二维动力系统的相图绘制和流的性质。

题面：已知以下常微分方程组（ODE）：

$$\dot{x} = -y(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = x(x^2 + y^2)$$

任务：

1. **Sketch the phase portrait:** 手绘相图。
2. **Find the flow ϕ_t:** 求出该系统的流（即解的解析式）。
3. **Find the orbit $O(x_0)$:** 找出过初始点 x_0 的轨道。
4. **Find the limit set $\omega(x_0)$:** 找出该轨道的极限集。

6 从圆方程到微分方程

6.1 为何 $x^2 + y^2 = R^2$ 在微分方程里不好使

简单直接的回答是：**你是对的。光看圆的方程 $x^2 + y^2 = R^2$，你确实推不出 $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ 这个特定的"速度"。**

圆方程只能告诉你**"路在哪里"**，但没告诉你**"车开多快"**，也没告诉你**"车往哪头开"**。

我们可以从以下三个层次把这个逻辑彻底打通：

1. 静态 vs 动态（轨道 vs 速度）

- **圆方程 ($x^2 + y^2 = R^2$)：**这是一张**地图**。它告诉你："嘿，所有的点都必须在这个圈圈上。"这叫**几何约束**。它没有时间 t 的概念。
- **微分方程 ($\dot{x} = -y, \dot{y} = x$)：**这是**驾驶指南**。它告诉你："现在的水平速度是负的纵坐标，垂直速度是正的横坐标。"

关键点：同一个圆方程 $x^2+y^2=R^2$，可以对应无数种微分方程！

- $\dot{x}=-y,\ \dot{y}=x$（你是这个，逆时针，角速度 1）
- $\dot{x}=-2y,\ \dot{y}=2x$（也是圆，但是转得快两倍）
- $\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-x$（也是圆，但是顺时针转）
- $\dot{x}=-y(x^2+y^2),\ \dot{y}=x(x^2+y^2)$（就是你题目的那个，也是圆，但是离圆心越远转得越快）

所以，**圆方程是"果"，微分方程是"因"**。你不能从唯一的"果"反推唯一的"因"。

2. 它们在哪里"会师"？（切线斜率）

虽然圆方程推不出具体的速度大小，但它能限制速度的**方向**。我们来验证一下它们是否"吻合"。

方法 A：从圆方程出发（隐函数求导）
对 $x^2+y^2=R^2$ 两边求微分：

$$2xdx+2ydy=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

这是几何上**切线的斜率**。

方法 B：从微分方程出发（速度比值）
你有 $\dot{x}=-y$ 和 $\dot{y}=x$。
根据链式法则，轨迹的斜率是纵向速度除以横向速度：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}.$$

结论：你看！$\frac{dy}{dx}$ **是一模一样的**！这说明微分方程 $\dot{x}=-y,\dot{y}=x$ 确实是**贴着**圆的切线在跑的。圆方程虽然没给出速度 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的具体表达式，但它严格规定了 $\dot{y}/\dot{x}$ 必须等于 $-x/y$。

3. 如何从圆方程"凑"出这个微分方程？（参数化）

如果你非要从圆方程推导出这个微分方程，你必须引入**时间参数** t，并做一个**参数化 (Parameterization)** 的假设。

1. **看着圆方程**：$x^2+y^2=R^2$。
2. **引入参数**：我们知道三角函数 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ 是圆的完美描述。所以我们假设：

   $$x(t)=R\cos(t),\quad y(t)=R\sin(t)$$

   （注意：这里我默认了角速度 $\omega=1$，这是我为了凑出你的方程特意选的）
3. **对时间求导**：

   $$\dot{x}=\frac{d}{dt}(R\cos t)=-R\sin t,\quad \dot{y}=\frac{d}{dt}(R\sin t)=R\cos t.$$

4. **代回变量**：你看 $\dot{x}$ 的结果里，$-R\sin t$ 不就是 $-y$ 吗？你看 $\dot{y}$ 的结果里，$R\cos t$ 不就是 x 吗？

$$\implies \dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

真相大白：这一组微分方程，本质上就是“**参数方程 $x = R\cos t, y = R\sin t$ 的微分形式**”。

总结

你觉得“搞不出这个玩意”是因为：

- **圆方程**只描述了**形状**（空间信息）。
- **微分方程**描述了**形状 + 速度**（空间 + 时间信息）。

要把圆方程变成微分方程，你必须**人为地**赋予它一个运动规律（比如：假设它是匀速转动的）。

6.2 矩阵描述圆方程

我们用三种视角来“拆解”它：**几何直觉**、**极坐标推导**和**线性代数视角**。

1. 物理/几何直觉：速度与位置垂直

这是最“费曼”的解释方法。想象你在平面上驾驶一个小车。

- **位置向量**：$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- **速度向量**：$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

我们要问两个问题：1. **我在远离圆心吗？**（看速度是否和半径垂直）2. **我在往哪边转？**（看具体的方向）

2. 数学推导：极坐标验证

证明它是“匀速”且“圆周”。

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$。

证明 r 不变 (圆周)

$$r^2 = x^2 + y^2$$

两边对时间 t 求导：

$$2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

代入 $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$：

$$r\dot{r} = x(-y) + y(x) = 0$$

由于 $r \neq 0$，所以 $\dot{r} = 0$。**半径恒定**。

证明 $\dot{\theta}$ 恒定 (匀速) 利用角度公式 $\tan\theta = \frac{y}{x}$，或者直接用角速度公式：

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}$$

代入方程：

$$\dot{\theta} = \frac{x(x) - y(-y)}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

结论：

- $\dot{\theta} = 1$：角速度是常数 1 (rad/s)，所以是**匀速**。
- 符号为正：按照数学约定，正角速度代表**逆时针**。

3. 线性代数视角：旋转生成元 (Robotics 视角)

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A. 特征值分析 求矩阵 A 的特征值 λ：

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$$

纯虚数特征值对应于**纯振荡（旋转）**。

- 实部为 0 $\to$ 没有衰减（不向内旋），没有增长（不向外旋）。
- 虚部为 1 $\to$ 频率为 1。

B. 矩阵指数 (Matrix Exponential) 这个微分方程的解是：

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$$

回顾泰勒展开或欧拉公式，这个反对称矩阵（Skew-symmetric matrix）的指数就是**旋转矩阵**：

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

这正是将初始向量 $\mathbf{x}(0)$ **逆时针旋转 t 弧度**的操作。

总结

1. **点积为 0**：速度垂直于半径 $\to$ 圆周运动。
2. **角速度为正**：$\dot{\theta} = 1 \to$ 逆时针。
3. **矩阵视角**：矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是二维旋转群 $SO(2)$ 的**李代数生成元**。

7 问题解答

7.1 问题 1：高温冷却模型的去量纲化 (Scaling)

7.2 问题 2：伯努利方程求解 (Bernoulli Equation)

7.3 问题 3：毒贩船的追踪轨迹 (The Drug Boat / Pursuit Curve)

这正是文档结尾讲师提到的那个“极坐标变换”的威力所在。用直角坐标（Cartesian Coordinates）解这个问题是一场噩梦（文档里用了两页纸），但用极坐标（Polar Coordinates）只需要三行。

这是典型的**费曼式简化**：选择正确的坐标系，问题就解决了一半。

1. 物理直觉图景

首先，我们画出极坐标下的速度分解图。在极坐标系 (r, θ) 中，任何运动的微元位移 $d\vec{s}$ 都可以分解为两个垂直的方向：

1. **径向位移 (Radial):** dr（沿着光束方向跑的距离）。
2. **切向位移 (Tangential):** $rd\theta$（垂直于光束方向跑的弧长）。

核心约束条件：题目中说“船始终与光束保持 45° 角”。这意味着，速度矢量 $\vec{v}$ 与径向矢量 $\vec{r}$ 的夹角 $\alpha = 45°$。

2. 推导过程

第一步：列出几何关系 在微小的三角形中，正切值 $\tan(\alpha)$ 等于“对边”（切向位移）除以“邻边”（径向位移）：

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{切向位移}}{\text{径向位移}} = \frac{rd\theta}{dr}$$

第二步：代入物理条件 已知 $\alpha = 45°$，且 $\tan(45°) = 1$。所以方程瞬间简化为：

$$\frac{rd\theta}{dr} = 1$$

第三步：分离变量与积分 这比直角坐标那个复杂的 $y' = \frac{x+y}{x-y}$ 简单太多了。我们要解的是：

$$d\theta = \frac{dr}{r}$$

两边积分：

$$\int d\theta = \int \frac{dr}{r}$$
$$\theta = \ln(r) + C$$

或者写成讲师提到的形式：

$$\ln(r) = \theta - C$$

第四步：整理结果　对两边取指数（Exponentiate）：

$$r = e^{\theta - C} = e^{-C} \cdot e^{\theta}$$

令常数 $c_1 = e^{-C}$，我们要找的轨迹就是：

$$r = c_1 e^{\theta}$$

3. 结论：对数螺线 (Logarithmic Spiral)

这就是著名的**对数螺线**（等角螺线）。

- **直觉含义**：随着角度 θ 线性增加（转圈），半径 r 指数级爆炸增长。这就是为什么毒贩船能逃脱的原因——它离原点越远，横向逃跑的速度（$rd\theta$）就越快，逃离的效率呈指数级上升。
- **自然界的对应**：这种形状在自然界中随处可见，比如**鹦鹉螺的壳**、**台风的云系**、甚至**银河系的旋臂**。它们的共同点和这艘船一样：**生长/扩张的方向始终与径向保持固定角度。**

文档的最后讲师感叹："如果一开始就用极坐标，没人会觉得这是个难题。"这就是坐标系选择的艺术。

7.4 问题 4：非线性旋转动力系统分析 (Phase Portrait)

1. 物理直觉 (Feynman's Intuition)

观察方程组：

$$\dot{x} = -y(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = x(x^2 + y^2)$$

- **看结构**：如果把括号里的 $(x^2 + y^2)$ 遮住，剩下 $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$。这是一个标准的**匀速圆周运动**（逆时针旋转）。
- **看系数**：系数 $(x^2 + y^2)$ 正好是半径的平方 r^2。
- **结论**：这是一个旋转系统。粒子在做圆周运动，**半径 r 不变**，但是旋转的**角速度 ω** 不是常数，它等于 r^2。也就是说，**离原点越远，转得越快**。

2. 严谨推导：极坐标变换

为了证明上述直觉，并求出具体的流（Flow），我们使用极坐标换元：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

我们需要求 $\dot{r}$ 和 $\dot{\theta}$。

第一步：径向变化 $\dot{r}$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

两边对时间 t 求导：

$$2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

代入原方程：

$$r\dot{r} = x[-y(r^2)] + y[x(r^2)] = -xyr^2 + xyr^2 = 0$$

$$r\dot{r} = 0 \implies \dot{r} = 0$$

物理含义： 只要 $r \neq 0$，径向速度为 0。粒子永远在同一个圆上运动，不会向内收缩也不会向外扩散。

第二步：角度变化 $\dot{\theta}$ 利用公式 $\theta = \arctan(y/x)$ 或 $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}$ (角动量形式)。我们用后者：

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}$$

代入原方程：

$$\dot{\theta} = \frac{x[x(r^2)] - y[-y(r^2)]}{r^2} = \frac{r^2(x^2 + y^2)}{r^2} = \frac{r^2 \cdot r^2}{r^2} = r^2$$

最终的简化方程组：

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = r^2 \end{cases}$$

3. 解答四个问题

(1) Sketch the Phase Portrait (手动绘制相图)

- **形状：** 因为 $\dot{r} = 0$，轨迹是无数个**同心圆**。
- **原点：** $(0, 0)$ 是唯一的平衡点（Equilibrium Point），因为此时 $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$。
- **方向：** 因为 $\dot{\theta} = r^2 > 0$，所有轨迹都是**逆时针**旋转。
- **速度分布：** 越靠近原点，转得越慢（$\dot{\theta}$ 小）；越远转得越快。

手绘指南：

1. 画一个中心点（原点）。
2. 画几个同心圆。
3. 在圆上画箭头，指向逆时针方向。

(2) Find the Flow ϕ_t (流) 我们需要解出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$。设初始状态为 x_0，对应极坐标 (r_0, θ_0)。

- 由 $\dot{r} = 0$ 得：$r(t) = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$。
- 由 $\dot{\theta} = r_0^2$ (因为 r 是常数) 得：$\theta(t) = r_0^2 t + \theta_0$。

将其转回笛卡尔坐标：

$$x(t) = r_0 \cos(r_0^2 t + \theta_0)$$
$$y(t) = r_0 \sin(r_0^2 t + \theta_0)$$

这就是流 $\phi_t(x_0, y_0)$ 的解析表达式。如果你想写成矩阵形式（旋转矩阵），那就是：

$$\phi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(r_0^2 t) & -\sin(r_0^2 t) \\ \sin(r_0^2 t) & \cos(r_0^2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

其中 $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$。

(3) The Orbit $O(x_0)$ (轨道) 轨道是指流在相空间中走过的路径集合（不考虑时间，只考虑几何形状）。

- **情况 A**：如果 $x_0 = (0, 0)$，轨道就是一个点 $O(0) = \{(0, 0)\}$。
- **情况 B**：如果 $x_0 \neq 0$，轨道是以原点为圆心，半径为 $r_0 = \|x_0\|$ 的圆。

$$O(x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \|x_0\|^2\}$$

(4) The Limit Set $\omega(x_0)$ (极限集) 极限集是指当 $t \to \infty$ 时，轨迹趋近的集合。由于这是一个周期运动（Periodic Motion），粒子会一遍又一遍地扫过整个圆。它不会收敛到一个点，也不会跑向无穷远。因此，**极限集就是轨道本身**。

$$\omega(x_0) = O(x_0)$$

即半径为 $\|x_0\|$ 的圆（对于非零初始点）。

4. 这里的“陷阱”与思考

这道题虽然简单，但有一个很有趣的性质：**剪切 (Shear)**。虽然大家都在转圈，但外圈转得快，内圈转得慢。这就导致一个有趣的现象：如果你在 $t = 0$ 时刻在 x 轴正半轴画一条线段（一排粒子），过一段时间后，这条线段会卷成蚊香状（螺旋状），因为外面的粒子跑得比里面的快得多。这就是流体力学中常见的**相位混合 (Phase Mixing)** 现象的雏形。