1.1. Công thức sai phân

Ví dụ 1.1. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính các đạo hàm xấp xỉ tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác:

$f'(x) = e^x - 1, f'(1) = e - 1 = 1,7183.$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng sai phân tiến và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{SPT}}(1) \simeq \frac{f(1,05) - f(1)}{0,05} = 1,7874\ ,$$

$$\delta\overline{f'_{SPT}}(1) = \left|\frac{\overline{f'}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0402.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng sai phân lùi và sai só tương đối:

$$\overline{f'_{SPL}}(1) \simeq \frac{f(1) - f(0,95)}{0,05} = 1,6514,$$

$$\delta\overline{f'_{SPL}}(1) = \left|\frac{\tilde{f}'(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0389.$$

1.2. Công thức ba điểm

Sử dụng kết quả về đa thức nội suy, người ta đưa ra được công thức

Công thức ba điểm cuối:

$$\overline{f'_{3DC}}(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\Big) \quad (4)$$

Công thức ba điểm giữa:

$$\overline{f'_{3DG}}(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)\Big) \quad (5)$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức ba điểm và sai số tương đối:

$$f'(x_0) = \overline{f'_{3DC}}(x_0) + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \quad f'(x_0) = \overline{f'_{3DG}}(x_0) - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\eta) \quad (6)$$

với $\xi \in (x_0, x_0 + 2h)$ và $\eta \in (x_0 - h, x_0 + h)$

1.2. Công thức ba điểm

Ví dụ 1.2. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính các đạo hàm xấp xỉ tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác:

$f'(x) = e^x - 1, f'(1) = e - 1 = 1,7183.$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT ba điểm cuối và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{3DC}}(1) \simeq \frac{-3f(1) + 4f(1,05) - f(1,1)}{2 \cdot 0,05} = 1,7159\ ,$$

$$\delta\overline{f'_{3DC}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{3DC}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0014.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT ba điểm giữa và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{3DG}}(1) \simeq \frac{-f(0,95) + f(1,05)}{2 \cdot 0,05} = 1,7194,$$

$$\delta\overline{f'_{3DG}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{3DG}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0007.$$

1.3. Công thức nam điểm

Sử dụng kết quả về đa thức nội suy, người ta đưa ra được công thức

Công thức nam điểm cuối:

$$\overline{f'_{5DC}}(x_0) = \frac{1}{12h}\Big(-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h \quad (7)$$

Công thức nam điểm giữa:

$$\overline{f'_{5DG}}(x_0) = \frac{1}{12h}\Big(f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\Big) \quad (8)$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng công thức nam điểm và sai só tương đối:

$$f'(x_0) = \overline{f'_{5DC}}(x_0) + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi), \quad f'(x_0) = \overline{f'_{5DG}}(x_0) - \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\eta) \quad (9)$$

với $\xi \in (x_0, x_0 + 4h)$ và $\eta \in (x_0 - 2h, x_0 + 2h)$

1.3. Công thức nam điểm

Ví dụ 1.3. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính các đạo hàm xấp xỉ tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác: $f'(x) = e^x - 1, f'(1) = e - 1 = 1,7183.$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT nam điểm cuối và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{5DC}}(1) \simeq \frac{-25f(1) + 40f(1,05) - 36f(1,1) + 16f(1,15) - 3f(1,2)}{12 \cdot 0,05} = 1,7183\ ,$$

$$\delta\overline{f'_{5DC}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{5DC}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0000.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ bằng CT nam điểm giữa và sai số tương đối:

$$\overline{f'_{5DG}}(1) \simeq \frac{f(0,9) - 8f(0,95) + 8f(1,05) - 8(1,1)}{12 \cdot 0,05} = 1,7183,$$

$$\delta\overline{f'_{5DG}}(1) = \left|\frac{\overline{f'_{5DG}}(1) - f'(1)}{f'(1)}\right| = 0,0000.$$

1.4. Đạo hàm cấp hai

Từ các kết quả của công thức sai phân, ba điểm, nam điểm ta có thể xây dựng đạo hàm cấp kế tiếp. Nhưng đó là một công việc nhàm chán và có sai số khá lớn.

Sử dụng khai triển Taylor cho hàm số khả vi cấp cao, ta tìm được công thức đạo hàm cấp hai

Công thức xấp xỉ đạo hàm cấp hai

$$\overline{f''}(x_0) = \frac{1}{h^2}\Big(f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)\Big) \quad (10)$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ có sai số tương đối:

$$f''(x_0) = \overline{f''}(x_0) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \quad (11)$$

với $\xi \in (x_0 - h, x_0 + 4h)$ và $\eta \in (x_0 - h, x_0 + h)$

1.4. Đạo hàm cấp hai

Ví dụ 1.4. Cho hàm số $f = e^x - x$. Tính đạo hàm xấp xỉ cấp hai tại $x = 1$ với $h = 0,05$ và xác định sai số của chúng.

Giải

Giá trị đạo hàm chính xác:

$$f'(x) = e^x - 1, f''(x) = e^x, f''(1) = e = 2,7183.$$

Giá trị đạo hàm xấp xỉ cấp hai và sai số tương đối:

$$\overline{f''}(1) \simeq \frac{f(0,95) - 2f(1) + f(1,01)}{0,05^2} = 2,7188\ ,$$

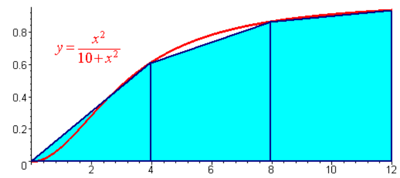
$$\delta\overline{f''}(1) = \left|\frac{\overline{f''}(1) - f''(1)}{f''(1)}\right| = 0,0002.$$

2.1. Tích phân hình thang

Công thức tích phân hình thang

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{x_c - x_d}{2}(y_d + y_c) \qquad (12)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{2}(y_{i-1} + y_i) \qquad (13)$$



2.1. Tích phân hình thang

Ví dụ 2.1. Tính $\int_0^9 f(x)dx$ biết giá trị của $f(x)$ tại một số vị trí sau

x	0	1	2	2,5	4	6	7,3	8,6	9
f	6,142	6,967	7,391	7,386	6,702	6,090	6,870	8,196	8,568

Giải

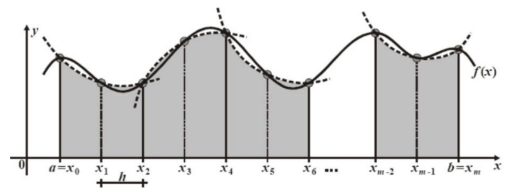
$$\begin{aligned}\int_0^9 f(x)dx &\simeq \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^{2,5} f(x)dx + \int_{2,5}^4 f(x)dx\\ &+ \int_4^6 f(x)dx + \int_6^{7,3} f(x)dx + \int_{7,3}^{8,6} f(x)dx + \int_{8,6}^9 f(x)dx\\ &\simeq 6,554 + 7,179 + 3,694 + 10,566 + 12,792 + 8,424\\ &+ 9,793 + 3,.353\\ &\simeq 62,355\end{aligned}$$

2.2. Tích phân Simpson

Công thức tích phân Simpson 1/3

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{x_c - x_d}{6}(y_d + 4y_g + y_c) \qquad (14)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{6}(y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i) \qquad (15)$$



2.2. Tích phân Simpson

Ví dụ 2.2. Tính $\int_0^9 f(x)dx$ biết giá trị của $f(x)$ tại một số vị trí sau

x	0	1	2	2,5	3	5	7	8	9
f	6,142	6,967	7,391	7,386	7,245	6,178	6,612	7,575	8,568

Giải

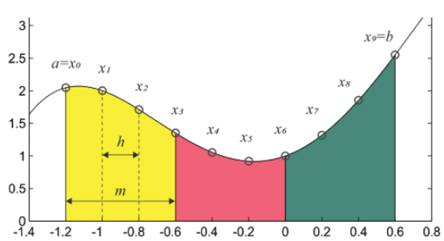
$$\begin{aligned}\int_0^9 f(x)dx &\simeq \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx\\ &\simeq \frac{1}{3}(6,142 + 4\cdot 6,967 + 7,391) + \frac{0,5}{3}(7,391 + 4\cdot 7,386 + 7,245)\\ &= \frac{2}{3}(7,245 + 4\cdot 6,178 + 6,612) + \frac{1}{3}(6,612 + 4\cdot 7,575 + 8,568)\\ &\simeq 13,800 + 7,363 + 25,712 + 15,159\\ &\simeq 62,035\end{aligned}$$

2.2. Tích phân Simpson

Công thức tích phân Simpson 3/8

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq \frac{(x_c - x_d)}{8}(y_d + 3y_t + 3y_p + y_c) \qquad (16)$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - x_{i-1})}{8}(y_{i-1} + 3y_{i-2/3} + 3y_{i-1/3} + y_i) \qquad (17)$$



2.2. Tích phân Simpson

Ví dụ 2.3. Tính $\int_0^9 f(x)dx$ biết giá trị của $f(x)$ tại một số vị trí sau

x	0	1	2	3	5	7	9
f	6,142	6,967	7,391	7,245	6,178	6,612	8,568

Giải

$$\begin{aligned}\int_0^9 f(x)dx &\simeq \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx \\ &\simeq \frac{3\cdot 1}{8}(6,142 + 3\cdot 6,967 + 3\cdot 7,391 + 7,245) \\ &\quad + \frac{3\cdot 2}{8}(7,245 + 3\cdot 6,178 + 3\cdot 6,612 + 8,568) \\ &\simeq 21,173 + 40,636 \\ &\simeq 61,809\end{aligned}$$

2.3. Tích phân Newton-Cotes

Công thức tích phân Newton-Cotes

$$\int_{x_d}^{x_c} f(x)dx \simeq (x_c - x_d)\sum_{k=0}^{n} H_{i,n}y_i \tag{18}$$

trong đó $H_{i,n} = \frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{n\cdot n!}\int_0^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{t-i}dt$

Công thức trên xuất phát từ việc sử dụng đa thức nội suy Lagrange và thực hiện việc đổi biến $x = x_0 + th$. Với t là biến mới và h là độ dài khoảng chia trong phân hoạch $[x_0, x_n]$.

Như vậy ta phải có phân hoạch đều $h_i = h$ với mọi i.

2.3. Tích phân Newton-Cotes

Ví dụ 2.4. : Tính các $H_{i,n}$ trong công thức Newton-Cotes với $n = 3$.

Giải:

$$H_{0,3} = \frac{(-1)^{3-0}C_3^0}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-0}dt = \frac{(-1)\cdot 1}{3\cdot 6}\frac{(-9)}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$H_{1,3} = \frac{(-1)^{3-1}C_3^1}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-1}dt = \frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}\frac{9}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$H_{2,3} = \frac{(-1)^{3-2}C_3^2}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-2}dt = \frac{(-1)\cdot 3}{3\cdot 6}\frac{(-9)}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$H_{3,3} = \frac{(-1)^{3-3}C_3^3}{3\cdot 3!}\int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{t-3}dt = \frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}\frac{9}{4} = \frac{1}{8}.$$

2.3. Tích phân Newton-Cotes

Cho hàm số $f(x) \in C_{[a,b]}^{n+1}$. Đặt $M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, ta có

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|\phi(x)| = \frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_a^b |f(x) - L_n(x)|dx \le \int_a^b \frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|dx$$

Mà $\int_a^b |f(x) - L_n(x)|dx \ge \left|\int_a^b f(x) - L_n(x)dx\right|$

và $\int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)| \le h^{n+2}\int_0^n |t(t-1)...(t-n)|dt.$

Kết quả là

$$\left|\int_a^b f(x) - L_n(x)dx\right| \le h^{n+2}\frac{Mh^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n \left|t(t-1)...(t-n)\right|dt$$

2.4. Tích phân Gauss

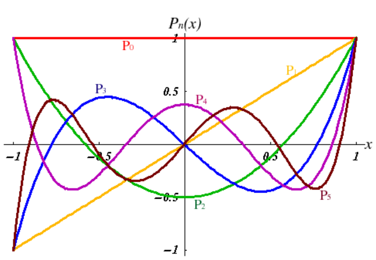
Đa thức Legendre: $W_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$.

Một vài đa thức Legendre đầu tiên ứng với $n = 0, 1, ..., 6$.

$W_0(x) = 1$, $W_1(x) = x$, $W_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$W_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $W_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$.

$W_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$, $W_6(x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$.



2.4. Tích phân Gauss

Ví dụ 2.5. Xây dựng công thức tích phân Gauss với $n = 3$.

Đa thức $W_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ có ba nghiệm $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Thế ba tọa độ này vào nửa trên hệ phương trình 20, ta thu được

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2, \\ -w_1\sqrt{\frac{3}{5}} + w_2 0 + w_3\sqrt{\frac{3}{5}} = 0, \\ w_1(-\sqrt{\frac{3}{5}})^2 + w_2 0^2 + w_3(\sqrt{\frac{3}{5}})^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là $w_1 = \frac{5}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$, $w_3 = \frac{5}{9}$.

Như vậy công thức tích phân Gauss với $n = 3$ là

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

3.1. Phương pháp lặp

Xét bài toán giá trị ban đầu sau

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{21}$$

với $x \in D_x = [x_0 - a, x_0 + a]$ và $y \in D_y = [y_0 - b, y_0 + b]$.
Tích phân phương trình thứ nhất kết hợp với điều kiện thứ hai, ta được

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{22}$$

Ta thiết lập dãy

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds \end{cases} \tag{23}$$

3.1. Phương pháp lặp

Ví dụ 3.1. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.4]$$

Ta lần lượt thực hiện các phép lặp sau:

$y_0(x) = 1.$

$y_1(x) = 1 + \int_0^x s + 1ds = \frac{x^2}{2} + x + 1.$

$y_2(x) = 1 + \int_0^x s + \frac{s^2}{2} + s + 1ds = \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 1.$

$y_3(x) = 1 + \int_0^x s + \frac{s^3}{6} + s^2 + s + 1ds = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 1.$

3.2. Phương pháp Euler

Sử dụng khai triển Taylor đối với hàm số $y(x)$ tại điểm x_0, ta thu được

$$y(x) \simeq \sum_{k=0}^{m} \frac{y^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k \tag{28}$$

Xấp xỉ trên chỉ đúng với những tọa độ x nằm gần x_0. Trường hợp x nằm xa x_0, ta dựa vào xấp xỉ trên để tính $y(x_1)$ với x_1 nằm giữa x_0 và x. Sau đó ta thực hiện lại phép khai triển Taylor vơi điều kiện đầu $y(x_1)$ để tìm xấp xỉ mới. Cứ như thế di chuyển x_k đến gần x.

Trường hợp đơn giản nhất ứng với $m = 1$, ta có

$$y_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k) \tag{29}$$

3.2. Phương pháp lặp

Ví dụ 3.2. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.4]$$

Ta xây dựng phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]. Khi đó

$h_0 = 0.1; y_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1.$

$h_1 = 0.1; y_2 = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.22.$

$h_2 = 0.1; y_3 = 1.22 + 0.1 \cdot (0.2 + 1.22) = 1.362.$

$h_3 = 0.1; y_4 = 1.362 + 0.1 \cdot (0.3 + 1.362) = 1.5282.$

3.3. Phương pháp Euler cải tiến

Ta có

$$y(x + h) = y(x) + \int_0^h y'(x + s)ds \tag{30}$$

Áp dụng công thức hình thang cho tích phân, ta được

$$y(x + h) \simeq y(x) + \frac{h}{2}[y'(x) + y'(x + h)] \tag{31}$$

hay

$$y_{k+1} \simeq y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] \tag{32}$$

Do vế phải vẫn chứa y_{k+1} là ẩn chưa biết, nên ta thay nó bởi (29). Kết quả ta được

$$\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} \simeq y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} \simeq y_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\Big) \end{cases} \tag{33}$$

3.3. Phương pháp Euler cải tiến

Ví dụ 3.3. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.4]$$

Ta xây dựng phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]. Khi đó

$h_0 = 0.1; \tilde{y}_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1.$

$y_1 = 1 + 0.05(0 + 1 + 0.1 + 1.1) = 1.11.$

$h_1 = 0.1; \tilde{y}_2 = 1.11 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.11) = 1.231.$

$y_2 = 1.11 + 0.05(0.1 + 1.11 + 0.2 + 1.231) = 1.2421.$

$h_2 = 0.1; \tilde{y}_3 = 1.2421 + 0.1 \cdot (0.2 + 1.2421) = 1.3863.$

$y_3 = 1.2421 + 0.05(0.2 + 1.2421 + 0.3 + 1.3863) = 1.3985.$

$h_3 = 0.1; \tilde{y}_4 = 1.3985 + 0.1 \cdot (0.3 + 1.3985) = 1.5683.$

$y_4 = 1.3985 + 0.05(0.3 + 1.3985 + 0.4 + 1.5683) = 1.5818.$

3.4. Phương pháp Runge-Kutta

Công thức Runge-Kutta bậc hai

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_{i+1}, y_i + k_1) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \quad (40)$$

Công thức Runge-Kutta bậc ba

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2 = h_i f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h_i f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases} \quad (41)$$

3.4. Phương pháp Runge-Kutta

Ví dụ 3.4. : Giải phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 0.4]$$

Sử dụng Runge-Kutta bậc 2 với phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]:

$h_0 = 0.1; k_1 = 0.1\cdot(0+1) = 0.1; k_2 = 0.1\cdot(0.1+(1+0.1)) = 0.12;$
$y_1 = 1 + (0.1 + 0.12)/2 = 1.11.$

$h_1 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.1 + 1.11) = 0.121;$
$k_2 = 0.1 \cdot (0.2 + (1.21 + 0.121)) = 0.1431;$
$y_2 = 1.11 + (0.121 + 0.1431)/2 = 1.2421.$

$h_2 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.2 + 1.2421) = 0.1442;$
$k_2 = 0.1 \cdot (0.3 + (1.2421 + 0.121)) = 0.1686;$
$y_3 = 1.2421 + (0.1442 + 0.1686)/2 = 1.3985.$

$h_3 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.3 + 1.3985) = 0.1698;$
$k_2 = 0.1 \cdot (0.4 + (1.3985 + 0.1698)) = 0.1968;$
$y_4 = 0.3985 + (0.1698 + 0.1968)/2 = 1.5818.$

3.4. Phương pháp Runge-Kutta

Sử dụng Runge-Kutta bậc 3 với phân hoạch [0 0.1 0.2 0.3 0.4]:

$h_0 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0 + 1) = 0.1;$
$k_2 = 0.1 \cdot ((0 + 0.1/2) + (1 + 0.1/2)) = 0.11;$
$k_3 = 0.1 \cdot ((0 + 0.1) + (1 - 0.1 + 2 \cdot 0.11)) = 0.122;$
$y_1 = 1 + (1/6) \cdot (0.1 + 0.11 + 0.122) = 1.11;$

$h_1 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.1 + 1.11) = 0.121;$
$k_2 = 0.1 \cdot ((0.1 + 0.1/2) + (1.11 + 0.121/2)) = 0.1321;$
$k_3 = 0.1\cdot((0.1+0.1)+(1.11-0.121+2\cdot0.1321)) = 0.1453;$
$y_2 = 1.11 + (1/6) \cdot (0.121 + 0.1321 + 0.1453) = 1.2428;$

$h_2 = 0.1; k_1 = 0.1 \cdot (0.2 + 1.2428) = 0.1443;$
$k_2 = 0.1 \cdot ((0.2 + 0.1/2) + (1.2428 + 0.1443/2)) = 0.1565;$
$k_3 = 0.1 \cdot ((0.2 + 0.1) + (1.2428 - 0.1443 + 2 \cdot 0.1565)) = 0.1711;$
$y_3 = 1.2428+(1/6)\cdot(0.1443+0.1565+0.1711) = 1.3997;$

4.1. Phương pháp Euler

Xét bài toán hệ phương trình vi phân cấp một sau đây:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), & y_0 = y(x_0) \\ z' = g(x, y, z), & z_0 = z(x_0) \end{cases} \quad (42)$$

với $x \in D_x = [x_0 - a, x_0 + a]$, $y \in D_y = [y_0 - b, y_0 + b]$ và $z \in D_z = [z_0 - c, z_0 + c]$.

Phương pháp Euler cho ta hệ nghiệm số sau

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h; \\ y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k, z_k)h; \\ z_{k+1} &= z_k + g(x_k, y_k, z_k)h. \end{aligned} \quad (43)$$

4.2. Phương pháp Euler cải tiến

Phương pháp Euler cải tiến cho ta hệ nghiệm số sau

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h_k; \\ \tilde{y}_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k, z_k)h_k \\ \tilde{z}_{k+1} &= z_k + g(x_k, y_k, z_k)h_k \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{f(x_k, y_k, z_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1})}{2}h_k \\ z_{k+1} &= z_k + \frac{g(x_k, y_k, z_k) + g(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}, \tilde{z}_{k+1})}{2}h_k \end{aligned} \quad (44)$$

4.3. Phương pháp Runge-Kutta

Công thức Runge-Kutta bậc ba cho ta hệ nghiệm số sau

$$\begin{cases} k_1 = h_i f(x_i, y_i, z_i) \\ l_1 = h_i g(x_i, y_i, z_i) \\ k_2 = h_i f(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1) \\ l_2 = h_i g(x_i + \frac{1}{2}h_i, y_i + \frac{1}{2}k_1, z_i + \frac{1}{2}l_1) \\ k_3 = h_i f(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2, z_i - l_1 + 2l_2) \\ l_3 = h_i g(x_i + h_i, y_i - k_1 + 2k_2, z_i - l_1 + 2l_2) \\ y_{i+1} \simeq y_i + \dfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ z_{i+1} \simeq z_i + \dfrac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + l_3) \end{cases} \quad (45)$$

4.3. Phương pháp Runge-Kutta

Ví dụ 4.1. Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y' = -4y/3 + 5z/3 + 3x^2 + 2x, & y_0 = y(0) = 1 \\ z' = -5y/3 + 4z/3 + 3x^2 - 2x, & z_0 = z(0) = 2 \end{cases} \tag{46}$$

có nghiệm chính xác

$$\begin{cases} y(x) = 2\sin x + \cos x + x^2 \\ z(x) = \sin x + 2\cos x - x^2 \end{cases} \tag{47}$$