Proyecto SenecaLibre

Entrega 3 – Modelado

Integrantes (Grupo 4 - Sección 2)

Daniel Felipe Diaz Moreno – 202210773

Sara Sofía Cárdenas Rodríguez - 202214907

Universidad de Los Andes

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación

Modelado, Optimización y Simulación - ISIS 3302

Bogotá D.C., Colombia

2024

Tabla de contenido

1. Propuesta de la solución

El modelo matemático que proponemos para SenecaLibre se basa en la implementación de múltiples centros de distribución y en la introducción de una flota mixta de vehículos. La eficiencia de esta estrategia está respaldada por el informe del especialista financiero.

Nuestra propuesta parte del análisis realizado por el especialista en distribución, quien identificó que el centro de distribución actual sufre de alta congestión vehicular y prolongados tiempos de carga, debido a que ha superado su capacidad máxima. Estos factores no solo incrementan los costos operativos de la empresa, sino que también afectan negativamente su reputación, ya que los clientes perciben las demoras en el servicio.

En este contexto, resulta crucial la construcción de nuevos centros de distribución. Aunque aumentar la capacidad del depósito actual podría mitigar el problema de las sobrecargas, el tráfico continuaría siendo un obstáculo importante, lo que demuestra que no sería la solución óptima. De igual forma, las mejoras en los tiempos de carga por mejora tecnológica son solo del 33,3% en el centro original, mientras que con la solución de centros distribuidos se tiene una mejora en tiempo del 75%, por lo que se prefirieron las mejoras cuantificadas para varios centros.

La generación de nuevos centros de distribución no solo aliviaría la congestión, sino que también facilitaría el uso de una flota mixta de vehículos, ya que las distancias más cortas entre los centros harían viable su implementación. Este enfoque está fundamentado en el informe del especialista en transporte. La adopción de estos vehículos permitiría una reducción significativa en los costos relacionados con el mantenimiento, la distancia recorrida y el rango ilimitado. Además, disminuiría sustancialmente las multas por contaminación que actualmente enfrenta SenecaLibre, alineándose con su objetivo de ser una empresa más sostenible y respetuosa con el medio ambiente.

2. Modelo matemático

2.1. Enfoque de la solución

La solución se basa en una variante del **Problema del Viajero (TSP),** en el cual un viajero parte desde una ubicación inicial, visita una serie de destinos sin repetir ninguno y regresa a su punto de origen. En nuestro modelo propuesto, introducimos **múltiples puntos de partida**, que representan los almacenes. Cada almacén dispondrá de varios vehículos, que actuarán como los viajeros, y cada uno deberá recorrer una serie de destinos, es decir, los clientes, asegurándose de que ningún cliente sea atendido por más de un vehículo.

Siendo más concretos, esta es una generalización del TSP, ya que como se cuenta con vehículos en vez de personas, hay nuevos desafíos. Esta variación es el **problema de enrutamiento de vehículos (VRP),** donde se tiene un problema de optimización combinatoria. De esta forma, nos preguntamos sobre las rutas que debe tomar una flota de vehículos para satisfacer la demanda de un grupo de clientes.

Este modelo se enfoca en la gestión de **múltiples almacenes**, una flota mixta de vehículos, y un conjunto de clientes. Las distancias y tiempos se modelarán entre clientes, depósitos y almacenes.

Es importante destacar que la propuesta presentada asume la disponibilidad futura de un recurso para estimar tiempos y distancias entre diferentes coordenadas. Además, este modelo tiene como objetivo minimizar los costos, considerando una cantidad determinada de vehículos, y parte de la premisa de que los almacenes ya están ubicados en puntos específicos, ya sea uno por localidad, lo más alejados posible, entre otras opciones. En futuras comunicaciones con la compañía, presentaremos los parámetros del modelo ajustados a las capacidades de SenecaLibre, para garantizar que se cumplan sus objetivos.

2.2. Conjuntos e índices

1. N: Nodos de clientes, almacenes y estaciones de recarga.

$$N = \{1,2,3,4,\dots,n\}, \qquad n, g \in N$$

2. C: Clientes a ser atendidos.

$$C = \{1,2,3,4,\dots,c\}, \qquad C \subseteq N, \qquad i, j, i', j' \in C$$

3. A: Almacenes de SenecaLibre.

$$A = \{1,2,3,4,\dots,a\}, \qquad A \subseteq N, \qquad a \in A$$

4. E: Estaciones de recarga

$$E = \{1,2,3,4,\dots,d\}, \qquad E \subseteq N, \qquad e, f, e', f' \in E$$

5. V: Vehículos de SenecaLibre.

$$V = \{1,2,3,4,\dots,v\}, \qquad v \in V$$

6. T: Tipos de vehículos

$$T = \{1,2,3,4, \dots, t\}, \qquad t \in T$$

Por el momento, tenemos $T = \{1,2,3\}$ para vehículos a combustión interna, drones de alto alcance y vehículos eléctricos con paneles solares respectivamente. Este es el orden propuesto en la documentación brindada

Cabe resaltar que para $t = 1\ y\ t = 3$, se usan distancias y tiempos de ruta (reales en vía terrestre), mientras que para $t = 2$ se tienen distancias y tiempos haversianos (para trayectos aéreos)

7. P: Tipos de productos

$$P = \{1,2,3,4, \dots, p\}, \qquad p \in P$$

Para el caso 4 de múltiples productos, tenemos $P = \{1,2,3\}$ para el producto tipo A, B y C respectivamente. Para el resto de los casos, $P = \{1\}$

2.3. Parámetros

2.3.1. Parámetros de los clientes (puntos de entrega)

Demanda de un cliente:

$Dema_{p,i}\ (kg)$

Cantidad de producto solicitada por el cliente, expresada en kilogramos (kg). Ahora se manejan varios tipos de producto con el subíndice respectivo

Longitud:

$Lo_i\ (Grados\ decimales)$

Longitud del cliente expresada como coordenadas geográficas en grados decimales

Latitud:

$La_i\ (Grados\ decimales)$

Latitud del cliente expresada como coordenadas geográficas en grados decimales

2.3.2. Parámetros de los almacenes (centros de distribución)

Capacidad de un producto:

$Ca_{producto,p,a}\ (kg)$

Cantidad de producto máxima que puede tener un almacén, expresada en kilogramos (kg). Ahora se manejan varios tipos de producto con el subíndice respectivo

Longitud:

Lo_a $(Grados\ decimales)$

Longitud del almacén expresada como coordenadas geográficas en grados decimales

Latitud:

La_a $(Grados\ decimales)$

Latitud del almacén expresada como coordenadas geográficas en grados decimales

2.3.3. Parámetros de las estaciones o nodos de recarga

De acuerdo con los datos brindados, es factible asumir que todo punto de recarga puede proveer electricidad y gasolina, es decir, puede abastecer a cualquier tipo de vehículo. Adicionalmente, todos cuentan con las mismas tarifas y tiempos de carga descritos posteriormente

Longitud:

Lo_e $(Grados\ decimales)$

Longitud de la estación de carga expresada como coordenadas geográficas en grados decimales

Latitud:

La_e $(Grados\ decimales)$

Latitud de la estación de carga expresada como coordenadas geográficas en grados decimales

2.3.4. Parámetros de los vehículos

Tipo de vehículo:

Se tiene un parámetro binario bidimensional respecto al tipo de vehículo seleccionado para la cantidad de vehículos disponibles

$$k_{v,t} \in \{0,1\}$$

$$k_{v,t} = \begin{cases} 1 \; si \; el \; vehículo \; v \text{ es del tipo t} \\ 0 \; de \; lo \; contrario \end{cases}$$

Capacidad:

$Ca_{kg,v} \; (kg)$

Capacidad máxima de carga de productos que puede soportar un vehículo en kg.

Rango:

$R_{km,v} \; (km)$

Rango de un vehículo en km. También se denomina la autonomía, es decir, cuánta distancia puede recorrer con una carga completa

Con estos parámetros se reflejará que los vehículos a combustión tienen un rango extenso, los eléctricos tienen un rango ilimitado y que los drones tienen aproximadamente un rango del 25% que los vehículos estándar

Tiempo de recarga completa:

$$T_{recargaCompleta,t} \; \left(\frac{min}{carga \; del \; 100\%}\right) = [10 * 0.1, \;\; 10 * 2, \;\; 0] = [1, 20, 0]$$

Tiempo de recarga para una recarga completa según tipo de vehículo en minutos. Se multiplica por 10 ya que los datos brindados son para un aumento de la carga en un 10%

Velocidad promedio:

$$V_{promedio,t} \; \left(\frac{km}{h}\right) = [N.A, \;\; 40, \;\; N.A]$$

Velocidad promedio de llegada de un tipo de vehículo en km/h. Refleja el tiempo de movilización promedio que depende de factores internos y externos al tipo de vehículo.

Con estos parámetros se reflejará que los vehículos eléctricos tienen un mayor tiempo de llegada (50% más alto que los estándares) y que los drones tienen una alta velocidad de entrega

Eficiencia de combustible o energética:

$$E_{energia,t} \; \left(\frac{km}{gal} \; o \; \frac{km}{kWh}\right) = \left[10, \frac{1}{0.15}, \frac{1}{0.15}\right] = [10, 6.666, 6.666]$$

Sí es un vehículo a gasolina, representa la eficiencia del vehículo en cuanto a consumo de gasolina, expresada en kilómetros por galón (km/gal).

Si es un vehículo eléctrico o dron, representa la eficiencia en consumo de electricidad, expresada en kilómetro por kilovatios hora (km/kWh)

Es importante resaltar que los datos del consumo eléctrico fueron dados como kilovatios hora por kilómetro (kWh/km), por lo que se le debe sacar la inversa a estos valores. Esto es para que cuando se use en el modelo sea coherente en medidas físicas y conversiones

Tiempo de carga de productos según peso:

$$T_{cargaMinuto}\left(\frac{min}{kg}\right) = \frac{1}{5}$$

Tiempo promedio de carga de productos según el peso a transportar. No depende del tipo de vehículo de acuerdo con el informe financiero.

Refleja que por cada minuto se puede cargar 5 kg de carga en promedio

Este valor puede ser multiplicado por la carga variable, en kilogramos, y el costo por minuto de carga

2.3.5. Parámetros de los costos vehiculares

El sistema propuesto sugiere una inversión para SenecaLibre tanto en la adquisición de nuevos almacenes como en una flota de vehículos. Sin embargo, es importante destacar que la solución presentada es altamente escalable, lo que permite abordar el proceso de adquisición de manera progresiva. Esto significa que se puede implementar por fases, adquiriendo los almacenes o vehículos conforme se vayan necesitando, sin necesidad de una implementación total desde el principio.

De estos costos, podemos asumir las siguientes variables como parámetros al tener un comportamiento casi constante que puede ser conocido por el negocio:

Tarifa de flete:

$$C_{km,t}\left(\frac{COP}{km}\right) = [5000,\ 500,\ 4000]$$

Costo por kilómetro recorrido según tipo de vehículo. Incluye consumo de combustible o energía y desgaste de componentes

Tarifa de tiempo:

$$C_{minuto,t}\left(\frac{COP}{min}\right) = [500,\ 500,\ 500]$$

Costo por minuto de operación del vehículo según tipo de vehículo. Incluye costos de personal, energía y pérdida de eficiencia operativa.

Costo de mantenimiento diario:

$$C_{mantenimiento,t}\left(\frac{COP}{dia}\right) = [30000,\ 3000,\ 21000]$$

Costo diario de mantenimiento según tipo de vehículo. Refleja el costo de mantenimiento de cada sesión diaria

Costo de recarga / combustible por unidad de energía:

$$C_{energiaUnidad,t}\ \left(\frac{COP}{gal}\ o\ \frac{COP}{kWh}\right) = [16000,\ 220.73,\ 0]$$

Costo por unidad de combustible (litro) o energía (kWh) según tipo de vehículo

Costo por minuto de carga:

$$C_{cargaMinuto}\ \left(\frac{COP}{min}\right) = 500$$

Costo por minuto de carga de productos para un vehículo. No depende del tipo de vehículo ya que se asume que todos tienen el mismo costo de ser cargados de acuerdo con el informe financiero.

Refleja que hay un costo de 500 COP por cada minuto de carga

Este valor puede ser multiplicado por la carga variable, en kilogramos, y el tiempo utilizado para la carga de productos según peso

2.3.6. Parámetros de las rutas entre almacenes, clientes y estaciones

2.3.6.1. Distancias (de ruta y haversianas)

Estas distancias dependen del subíndice $t \in T$, para indicar si se tratan de distancias de ruta terrestres para vehículos a gasolina y eléctricos, o haversianas para drones. Por ello, para $t = 1\ y\ t = 3$ se tienen los mismos valores

Adicionalmente, encontramos que las distancias no son simétricas, es decir, dependen del sentido, por lo que los parámetros reflejan esta situación más cercana a la vida real

Almacén - Cliente:

$Dai_{a,i,t}$: Distancia entre un almacén a y un cliente i en km

$Dia_{i,a,t}$: Distancia entre un cliente i y un almacén a en km

Cliente - Cliente:

$Dij_{i,j,t}$: Distancia entre el cliente i y el cliente j en km

Para evitar autociclos, es decir, que un vehículo quede atascado en un mismo lugar, se establece que cuando $i = j$, la distancia $Dij_{i,j,t}$ es infinita. Estas vías nunca serán seleccionadas porque se desea minimizar distancia y costos

Cliente - Estación:

$Die_{i,e,t}$: Distancia entre un cliente i y una estación de carga e en km

$Dei_{e,i,t}$: Distancia entre una estación de carga e y un cliente i en km

Estación - Estación:

$Def_{e,f,t}$: Distancia entre la estación de carga e y la estación de carga f en km

Para evitar autociclos, es decir, que un vehículo quede atascado en un mismo lugar, se establece que cuando $e = f$, la distancia $Def_{e,f,t}$ es infinita. Estas vías nunca serán seleccionadas porque se desea minimizar distancia y costos

Estación - Almacén:

$Dea_{e,a,t}$: Distancia entre una estación de carga e y un almacén a en km

$Dae_{a,e,t}$: Distancia entre un almacén a y una estación de carga e en km

2.3.6.2. Tiempos (de ruta y haversianos)

Estos tiempos dependen del subíndice $t \in T$, ya que hay tiempos de ruta terrestres para vehículos a gasolina y eléctricos. Por ello, para $t = 1\ y\ t = 3$ se tienen los mismos valores

Por otro lado, hay tiempos haversianos para drones ($t = 2$) al aprovechar la física clásica en el cálculo de este tiempo, dada la distancia y la velocidad promedio

$$T = D/V_{promedio,2}$$

De igual forma, encontramos que los tiempos tampoco son simétricos, es decir, dependen del sentido, por lo que los parámetros reflejan esta situación más cercana a la vida real

Almacén - Cliente:

$Tai_{a,i,t}$: Tiempo entre un almacén a y un cliente i en km

$Tia_{i,a,t}$: Tiempo entre un cliente i y un almacén a en km

Cliente - Cliente:

$Tij_{i,j,t}$: Tiempo entre el cliente i y el cliente j en km

Para evitar autociclos, es decir, que un vehículo quede atascado en un mismo lugar, se establece que cuando $i = j$, el tiempo $Tij_{i,j,t}$ es infinito. Estas vías nunca serán seleccionadas porque se desea minimizar tiempo y costos

Cliente - Estación:

$Tie_{i,e,t}$: Tiempo entre un cliente i y una estación de carga e en km

$Tei_{e,i,t}$: Tiempo entre una estación de carga e y un cliente i en km

Estación - Estación:

$Tef_{e,f,t}$: Tiempo entre la estación de carga e y la estación de carga f en km

Para evitar autociclos, es decir, que un vehículo quede atascado en un mismo lugar, se establece que cuando $e = f$, el tiempo $Tef_{e,f,t}$ es infinito. Estas vías nunca serán seleccionadas porque se desea minimizar tiempo y costos

Estación - Almacén:

$Tea_{e,a,t}$: Tiempo entre una estación de carga e y un almacén a en km

$Tae_{a,e,t}$: Tiempo entre un almacén a y una estación de carga e en km

2.4. Variables de decisión

Se tienen 8 variables de decisión binarias tridimensionales respecto a los trayectos que toman los vehículos pasando por almacenes, clientes y estaciones de carga

$$x_{a,i}^v, y_{i,a}^v, z_{i,j}^v, w_{i,e}^v, u_{e,i}^v, m_{e,f}^v, l_{e,a}^v, h_{a,e}^v \in \{0,1\}$$

Almacén - Cliente:

$$x_{a,i}^v = \begin{cases} 1 \; si \; el \; vehículo \; v \; visita \; al \; cliente \; i \; partiendo \; del \; almacen \; a \\ 0 \; de \; lo \; contrario \end{cases}$$

$$y_{i,a}^v = \begin{cases} 1 \; si \; el \; vehículo \; v \; llega \; al \; almacen \; a \; partiendo \; desde \; el \; cliente \; i \\ 0 \; de \; lo \; contrario \end{cases}$$

Cliente - Cliente:

$$z_{i,j}^v = \begin{cases} 1 \; si \; el \; vehículo \; v \; visita \; al \; cliente \; j \; partiendo \; desde \; el \; cliente \; i \\ 0 \; de \; lo \; contrario \end{cases}$$

Cliente - Estación:

$$w_{i,e}^v = \begin{cases} 1 \; si \; el \; vehículo \; v \; visita \; la \; estación \; e \; partiendo \; desde \; el \; cliente \; i \\ 0 \; de \; lo \; contrario \end{cases}$$

$$u_{e,i}^v = \begin{cases} 1 \; si \; el \; vehículo \; v \; visita \; al \; cliente \; i \; partiendo \; desde \; la \; estacion \; e \\ 0 \; de \; lo \; contrario \end{cases}$$

Estación - Estación:

$$m_{e,f}^v = \begin{cases} 1 \; si \; el \; vehículo \; v \; visita \; la \; estacion \; f \; partiendo \; desde \; la \; estación \; e \\ 0 \; de \; lo \; contrario \end{cases}$$

Estación - Almacén:

$$l_{e,a}^{v} = \begin{cases} 1\ si\ el\ vehículo\ v\ visita\ el\ almacen\ a\ partiendo\ desde\ la\ estación\ e \\ 0\ de\ lo\ contrario \end{cases}$$

$$h_{a,e}^{v} = \begin{cases} 1\ si\ el\ vehículo\ v\ visita\ la\ estación\ e\ partiendo\ desde\ el\ almacen\ a \\ 0\ de\ lo\ contrario \end{cases}$$

Un resumen de la utilización de estas variables binarias es el siguiente

Origen / Destino	Almacén	Cliente	Estación
Almacén	No permitido	$x_{a,i}^{v}$	$h_{a,e}^{v}$
Cliente	$y_{i,a}^{v}$	$z_{i,j}^{v}$	$w_{i,e}^{v}$
Estación	$l_{e,a}^{v}$	$u_{e,i}^{v}$	$m_{e,f}^{v}$

Tenemos otra variable no binaria bidimensional:

$s_{v,n}$: Variable auxiliar para la eliminación de sub-tours entre nodos $s_{v,n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Cabe notar que un sub-tour ocurre cuando un vehículo no hace un recorrido circular coherente desde y hacia el almacén que le corresponde, pasando por los clientes asignados, sino que comienza a hacer saltos y a crear recorridos de menor tamaño. Por ello, estas variables representan la secuencia en la que cada nodo es visitado, lo que permitirá plantear la restricción Miller-Tucker-Zemlin que imposibilita este comportamiento alejado de la realidad. Generalizando esto a cada vehículo, se garantiza que cada vehículo efectúe el ciclo esperado

2.5. Variables dependientes

2.5.1. Costos vehiculares de operación diaria

A continuación, se presentan los costos vehiculares de la operación diaria otorgados en el análisis financiero

1. Carga de productos en la flota de vehículos

$$C_{cargaDiario} = C_{cargaMinuto} * T_{kg \times vDiario}$$

2. Distancia viajada por la flota de vehículos

$$C_{distanciaDiario} = C_{km,t} * D_{viajeDiario,t}$$

3. Tiempo viajado por la flota de vehículos

$$C_{tiempoDiario} = C_{minuto,t} * T_{viajeDiario,t}$$

4. Recarga de baterías o combustible (energía) de la flota de vehículos

$$C_{recargaDiario} = C_{energiaDiario} + C_{tiempoEnergiaDiario}$$

$$C_{energiaDiario} = C_{energiaUnidad,t} * Q_{energiaDiaria,t}$$

$$C_{tiempoEnergiaDiario} = C_{minuto,t} * T_{recargaDiario,t}$$

5. Mantenimiento de la flota de vehículos

$$C_{mantenimientoDiario} = C_{mantenimiento,t} * N_{vehiculos,t}$$

$N_{vehiculos,t}$ hace referencia a la cantidad de vehículos para cada tipo de vehículo. Se relaciona con la cardinalidad de V, es decir, v

2.5.2. Variables dependientes de los costos vehiculares

Asimismo, se puede deducir que ciertos términos hacen referencia a variables dependientes que deben ser calculadas:

Tiempo diario de carga de productos: $T_{kg\times vDiario}$ (min)

Tiempo total diario empleado en cargar de productos la flota de vehículos en minutos

El tiempo diario depende del tiempo de carga de productos según peso y la 2 en peso de los clientes

Adicionalmente, se contabiliza el tiempo según las variables que indican entrar a un cliente. Por ello, se tiene para los paquetes que son entregados apenas salen del almacén ($x_{a,i}^{v}$), los que son entregados después al pasar por otros clientes ($z_{i,j}^{v}$) y los que se entregan después de pasar por una estación ($u_{e,i}^{v}$)

$$T_{kg\times vDiario} = \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{p\in P} x_{a,i}^{v} * Dema_{p,i} \; * T_{cargaMinuto} + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{j\in C}\sum_{p\in P} z_{i,j}^{v} * Dema_{p,j} \; * T_{cargaMinuto} + \sum_{v\in V}\sum_{e\in E}\sum_{i\in C}\sum_{p\in P} u_{e,i}^{v} * Dema_{p,i} \; * T_{cargaMinuto}$$

Distancia diaria recorrida: $D_{viajeDiario,t}\ (km)$

Distancia diaria recorrida por la flota en kilómetros

La distancia depende del tipo de vehículo y la toma de rutas. También depende de los 10 tipos de distancia contemplados ($Dai_{a,i,t}$, $Dia_{i,a,t}$, $Dij_{i,j,t}$, $Dji_{j,i,t}$, $D\mathrm{ie}_{i,e,t}$, $D\mathrm{ei}_{e,i,t}$, $Def_{e,f,t}$, $Dfe_{f,e,t}$, $Dea_{e,a,t}$, $Dae_{a,e,t}$)

$$\begin{aligned} D_{viaje\mathrm{Diario},t} = & \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (x_{a,i}^{v} * Dai_{a,i,t} + y_{i,a}^{v} * Dia_{i,a,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{j\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (z_{i,j}^{v} * Dij_{i,j,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (w_{i,e}^{v} * D\mathrm{ie}_{i,e,t} + u_{e,i}^{v} * D\mathrm{ei}_{e,i,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{e\in E}\sum_{f\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (m_{e,f}^{v} * Def_{e,f,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (l_{e,a}^{v} * Dea_{e,a,t} + h_{a,e}^{v} * Dae_{a,e,t}) \end{aligned}$$

Tiempo diario de viaje: $T_{viajeDiario,t}\ (min)$

Tiempo total diario que los vehículos pasan viajando en minutos

El tiempo depende del tipo de vehículo y la toma de rutas. También depende de los 10 tipos de tiempos contemplados ($Tai_{a,i,t}$, $Tia_{i,a,t}$, $Tij_{i,j,t}$, $Tji_{j,i,t}$, $T\mathrm{ie}_{i,e,t}$, $T\mathrm{ei}_{e,i,t}$, $Tef_{e,f,t}$, $Tfe_{f,e,t}$, $Tea_{e,a,t}$, $Tae_{a,e,t}$)

$$\begin{aligned} T_{viaje\mathrm{Diario},t} = & \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (x_{a,i}^{v} * Tai_{a,i,t} + y_{i,a}^{v} * Tia_{i,a,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{j\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (z_{i,j}^{v} * Tij_{i,j,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (w_{i,e}^{v} * T\mathrm{ie}_{i,e,t} + u_{e,i}^{v} * T\mathrm{ei}_{e,i,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{e\in E}\sum_{f\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (m_{e,f}^{v} * Tef_{e,f,t}) \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * (l_{e,a}^{v} * Tea_{e,a,t} + h_{a,e}^{v} * Tae_{a,e,t}) \end{aligned}$$

Cantidad de energía diaria: $Q_{energiaDiaria,t}$ $(gal\ o\ kWh)$

Cantidad total diaria de energía necesaria para recargar la flota

La cantidad de energía depende del tipo de vehículo, su rango y eficiencia energética.

Para simplificar el problema, cada recarga (sin importar dónde se efectúe) carga toda la capacidad del vehículo

Entonces, la cantidad de energía o combustible para una recarga completa según tipo de vehículo (o la capacidad energética de un tipo de vehículo) se calcula como el rango sobre la eficiencia energética, es decir, $\frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}}$

Las recargas se efectúan en los almacenes y en las estaciones de carga, por lo que necesitamos conocer las rutas de los vehículos involucrados. Esta contabilización se realizará entonces sobre todas las variables que indican salir de un punto de carga, ya sea estación o almacén ($x_{a,i}^{v}$, $u_{e,i}^{v}$, $m_{e,f}^{v}$, $l_{e,a}^{v}$ y $h_{a,e}^{v}$)

Entonces, cada vez que un vehículo salga de un almacén o una estación, tendrá una carga completa

$$
\begin{aligned}
Q_{energiaDiaria,t} & \\
= & \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{t\in T} x_{a,i}^{v} * k_{v,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}} \\
& + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} u_{e,i}^{v} * k_{v,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}} \\
& + \sum_{v\in V}\sum_{e\in E}\sum_{f\in E}\sum_{t\in T} m_{e,f}^{v} * k_{v,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}} \\
& + \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} (l_{e,a}^{v} + h_{a,e}^{v}) * k_{v,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}}
\end{aligned}
$$

Tiempo de recarga diario: $T_{recargaDiario,t}$ (min)

Tiempo total diario requerido para recargar los vehículos en minutos

Se asumen las condiciones del anterior punto

Entonces, cada vez que un vehículo salga de un almacén o una estación, requerirá de un tiempo de carga completa según el tipo de vehículo ($T_{recargaCompleta,t}$)

$$T_{recargaDiario,t} = \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{i \in C} \sum_{t \in T} x_{a,i}^{v} * k_{v,t} * T_{recargaCompleta,t} + \sum_{v \in V} \sum_{i \in C} \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} u_{e,i}^{v} * k_{v,t} * T_{recargaCompleta,t} + \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} \sum_{f \in E} \sum_{t \in T} m_{e,f}^{v} * k_{v,t} * T_{recargaCompleta,t} + \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} (l_{e,a}^{v} + h_{a,e}^{v}) * k_{v,t} * T_{recargaCompleta,t}$$

2.6. Función objetivo

Se desean minimizar todos los costos operativos, los cuales son de 5 tipos

$$\min(z)$$

$$z = C_{cargaDiario} + C_{distanciaDiario} + C_{tiempoDiario} + C_{recargaDiario} + C_{mantenimientoDiario}$$

Definiendo los submodelos con la información anterior, tenemos:

$$C_{cargaDiario} = \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{i \in C} \sum_{p \in P} x_{a,i}^{v} * Dema_{p,i} * T_{cargaMinuto} * C_{cargaMinuto} + \sum_{v \in V} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} \sum_{p \in P} z_{i,j}^{v} * Dema_{p,j} * T_{cargaMinuto} * C_{cargaMinuto} + \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} \sum_{i \in C} \sum_{p \in P} u_{e,i}^{v} * Dema_{p,i} * T_{cargaMinuto} * C_{cargaMinuto}$$

$$C_{distanciaDiario} = \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{i \in C} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{km,t} * (x_{a,i}^{v} * Dai_{a,i,t} + y_{i,a}^{v} * Dia_{i,a,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{km,t} * (z_{i,j}^{v} * Dij_{i,j,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{i \in C} \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{km,t} * (w_{i,e}^{v} * \mathrm{Die}_{i,e,t} + u_{e,i}^{v} * D\mathrm{ei}_{e,i,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} \sum_{f \in E} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{km,t} * (m_{e,f}^{v} * Def_{e,f,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{km,t} * (l_{e,a}^{v} * Dea_{e,a,t} + h_{a,e}^{v} * Dae_{a,e,t})$$

$$C_{tiempoDiario} = \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{i \in C} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{minuto,t} * (x_{a,i}^{v} * Tai_{a,i,t} + y_{i,a}^{v} * Tia_{i,a,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{i \in C} \sum_{j \in C} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{minuto,t} * (z_{i,j}^{v} * Tij_{i,j,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{i \in C} \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{minuto,t} * (w_{i,e}^{v} * T\mathrm{ie}_{i,e,t} + u_{e,i}^{v} * T\mathrm{ei}_{e,i,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} \sum_{f \in E} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{minuto,t} * (m_{e,f}^{v} * Tef_{e,f,t}) + \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} k_{v,t} * C_{minuto,t} * (l_{e,a}^{v} * Tea_{e,a,t} + h_{a,e}^{v} * Tae_{a,e,t})$$

$$C_{recargaDiario} = C_{energiaDiario} + C_{tiempoEnergiaDiario}$$

$$\begin{aligned} C_{energiaDiario} = & \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{t\in T} x_{a,i}^{v} * k_{v,t} * C_{energiaUnidad,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}} \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} u_{e,i}^{v} * k_{v,t} * C_{energiaUnidad,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}} \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{e\in E}\sum_{f\in E}\sum_{t\in T} m_{e,f}^{v} * k_{v,t} * C_{energiaUnidad,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}} \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} (l_{e,a}^{v} + h_{a,e}^{v}) * k_{v,t} * C_{energiaUnidad,t} * \frac{R_{km,v}}{\mathrm{E}_{\mathrm{energia,t}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_{tiempoEnergiaDiario} \\ & = \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{t\in T} x_{a,i}^{v} * k_{v,t} * C_{minuto,t} * T_{recargaCompleta,t} \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{i\in C}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} u_{e,i}^{v} * k_{v,t} * C_{minuto,t} * T_{recargaCompleta,t} \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{e\in E}\sum_{f\in E}\sum_{t\in T} m_{e,f}^{v} * k_{v,t} * C_{minuto,t} * T_{recargaCompleta,t} \\ & + \sum_{v\in V}\sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} (l_{e,a}^{v} + h_{a,e}^{v}) * k_{v,t} * C_{minuto,t} * T_{recargaCompleta,t} \end{aligned}$$

$$C_{mantenimientoDiario} = \sum_{v\in V}\sum_{t\in T} k_{v,t} * C_{mantenimiento,t}$$

2.7. Restricciones

2.7.1. Restricciones propias de clientes, almacenes y vehículos

Abastecimiento único al cliente (entrada): Cada cliente debe ser accedido (o suplido) por un único vehículo. Esta entrada solo puede ser de una manera. De esta forma, nos aseguramos de que exactamente un tour de un vehículo entre a cada cliente

$$\sum_{a\in A}\sum_{v\in V} x_{a,i}^{v} + \sum_{j\in C}\sum_{v\in V} z_{j,i}^{v} + \sum_{e\in E}\sum_{v\in V} u_{e,i}^{v} = 1, \qquad \forall i \in C$$

Abastecimiento único al cliente (salida): Cada cliente debe ser dejado por (o ser salida de) un único vehículo. Esta salida solo puede ser de una manera. De esta forma, nos aseguramos de que exactamente un tour de un vehículo salga de cada cliente

$$\sum_{a\in A}\sum_{v\in V} y_{i,a}^{v} + \sum_{j\in C}\sum_{v\in V} z_{i,j}^{v} + \sum_{e\in E}\sum_{v\in V} w_{i,e}^{v} = 1, \qquad \forall i \in C$$

Capacidad de los almacenes: El peso de los pedidos de los clientes asignados a un almacén debe ser menor a su capacidad para el producto en cuestión

Se usa una variable auxiliar $Ca_{producto,p,a,v}$ para determinar la carga que lleva un vehículo para un tipo de producto, teniendo en cuenta el almacén del que salió

Esta restricción es no lineal, ya que multiplica la variable auxiliar por las que identifican la salida de cada vehículo del almacén en cuestión

$$Ca_{producto,p,a,v} = \sum_{i\in C} x_{a,i}^{v} * Dema_{p,i} + \sum_{i\in C}\sum_{j\in C} z_{i,j}^{v} * Dema_{p,j} + \sum_{e\in E}\sum_{i\in C} u_{e,i}^{v} * Dema_{p,i}\ , \qquad \forall p \in P, \qquad \forall a \in A, \qquad \forall v \in V$$

$$\sum_{v\in V}\left(\left(\sum_{i\in C} x_{a,i}^{v} + \sum_{e\in E} h_{a,e}^{v}\right) * Ca_{producto,p,a,v}\right) \leq Ca_{producto,p,a}, \quad \forall a \in A, \forall p \in P$$

Capacidad de los vehículos: El peso de los pedidos de los clientes asignados a un vehículo no debe superar el peso máximo soportado según su tipo. En otras palabras, se debe respetar la capacidad de los vehículos

$$\sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{p\in P} x_{a,i}^{v} * Dema_{p,i} + \sum_{i\in C}\sum_{j\in C}\sum_{p\in P} z_{i,j}^{v} * Dema_{p,j} + \sum_{e\in E}\sum_{i\in C}\sum_{p\in P} u_{e,i}^{v} * Dema_{p,i} \leq \sum_{t\in T} k_{v,t} * Ca_{kg,v}\ , \quad \forall v \in V$$

Tipo de los vehículos: Un vehículo debe tener un solo tipo asignado

$$\sum_{t\in T} k_{v,t} = 1, \qquad \forall v \in V$$

Rango del vehículo sin tener en cuenta las recargas intermedias: Un vehículo debe tener el suficiente rango para poder cubrir todas las distancias estipuladas en su recorrido

Se usa una variable auxiliar, $D_{distanciaDiaria,v}$

$$
\begin{aligned}
&D_{distanciaDiaria,v} \\
&\quad = \sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(x_{a,i}^{v} * Dai_{a,i,t} \; + \; y_{i,a}^{v} * Dia_{i,a,t}\right) \\
&\quad + \sum_{i\in C}\sum_{j\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(z_{i,j}^{v} * Dij_{i,j,t}\right) \\
&\quad + \sum_{i\in C}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(w_{i,e}^{v} * \mathrm{Die}_{i,e,t} \; + \; u_{e,i}^{v} * \mathrm{Dei}_{e,i,t}\right) \\
&\quad + \sum_{e\in E}\sum_{f\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(m_{e,f}^{v} * Def_{e,f,t}\right) \\
&\quad + \sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(l_{e,a}^{v} * Dea_{e,a,t} \; + \; h_{a,e}^{v} * Dae_{a,e,t}\right)
\end{aligned}
$$

$$
D_{distanciaDiaria,v} \leq R_{km,v}, \qquad \forall v \in V
$$

Rango del vehículo con recargas intermedias: Un vehículo debe tener el suficiente rango para poder cubrir todas las distancias estipuladas en su recorrido. De esta forma, la distancia recorrida por un vehículo debe ser menor a la distancia que le permiten sus cargas, es decir, el rango multiplicado por la cantidad de cargas

Se usan dos variables auxiliares, $D_{distanciaDiaria,v}$ y $C_{vecesCarga,v}$

$$
\begin{aligned}
&D_{distanciaDiaria,v} \\
&\quad = \sum_{a\in A}\sum_{i\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(x_{a,i}^{v} * Dai_{a,i,t} \; + \; y_{i,a}^{v} * Dia_{i,a,t}\right) \\
&\quad + \sum_{i\in C}\sum_{j\in C}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(z_{i,j}^{v} * Dij_{i,j,t}\right) \\
&\quad + \sum_{i\in C}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(w_{i,e}^{v} * \mathrm{Die}_{i,e,t} \; + \; u_{e,i}^{v} * \mathrm{Dei}_{e,i,t}\right) \\
&\quad + \sum_{e\in E}\sum_{f\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(m_{e,f}^{v} * Def_{e,f,t}\right) \\
&\quad + \sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\sum_{t\in T} k_{v,t} * \left(l_{e,a}^{v} * Dea_{e,a,t} \; + \; h_{a,e}^{v} * Dae_{a,e,t}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{vecesRecarga,v} = &\sum_{a\in A}\sum_{i\in C} x_{a,i}^{v} + \sum_{i\in C}\sum_{e\in E} u_{e,i}^{v} + \sum_{e\in E}\sum_{f\in E} m_{e,f}^{v} \\
&+ \sum_{a\in A}\sum_{e\in E}\left(l_{e,a}^{v} + h_{a,e}^{v}\right)
\end{aligned}
$$

$$
D_{distanciaDiaria,v} \leq R_{km,v} * \; C_{vecesRecarga,v} \quad \forall v \in V
$$

2.7.2. Restricciones del grafo

Tipo de nodo: Un nodo no puede ser de más de un tipo

En términos matemáticos, como $N = \; C \cup \; A \; \cup E$, necesitamos que $E \cap A = \{\}$, $A \cap C = \{\}$ y $E \cap C = \{\}$.

Entonces se tiene:

$$|C| + |A| + |E| = |N|$$

Con las cardinalidades anteriormente definidas en los conjuntos, también puede reescribirse como:

$$c + a + d = n$$

Prohibición de subtoures: Se deben impedir los sub-toures para cada vehículo

Se define una variable auxiliar $N_{vehiculosUsados}$ para hacer más limpio el cálculo

$$N_{vehiculosUsados} = \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{i \in C} x_{a,i}^{v} + \sum_{v \in V} \sum_{a \in A} \sum_{e \in E} h_{a,e}^{v}$$

Se definen las siguientes restricciones por trayecto, asegurándose de recorrer todos los nodos intermedios sin importar su tipo

$$s_{v,n} - s_{v,g} + z_{i,j}^{v} * N_{vehiculosUsados} \leq N_{vehiculosUsados} - 1,$$
$$\forall v \in V,\ \forall n, g \in N \mid n \neq g, \quad \forall i, j \in C \mid C_i = N_n \wedge C_j = N_g$$

$$s_{v,n} - s_{v,g} + w_{i,e}^{v} * N_{vehiculosUsados} \leq N_{vehiculosUsados} - 1,$$
$$\forall v \in V,\ \forall n, g \in N \mid n \neq g, \quad \forall i \in C,$$
$$\forall e \in E \mid C_i = N_n \wedge E_e = N_g$$

$$s_{v,n} - s_{v,g} + u_{e,i}^{v} * N_{vehiculosUsados} \leq N_{vehiculosUsados} - 1,$$
$$\forall v \in V,\ \forall n, g \in N \mid n \neq g, \quad \forall i \in C,$$
$$\forall e \in E \mid C_i = N_g \wedge E_e = N_n$$

$$s_{v,n} - s_{v,g} + m_{e,f}^{v} * N_{vehiculosUsados} \leq N_{vehiculosUsados} - 1,$$
$$\forall v \in V,\ \forall n, g \in N \mid n \neq g, \quad \forall e, f \in E \mid E_i = N_n \wedge E_j = N_g$$

2.7.3. Restricciones de los vehículos y los almacenes

Salida única del almacén (nodo de origen): Un vehículo solo puede salir a suplir un cliente o a abastecerse de combustible en una estación, si es que sale de un almacén. Esta salida solo puede ser de una manera. Solo puede salir de un único almacén

$$\sum_{a \in A} \sum_{i \in C} x_{a,i}^{v} + \sum_{a \in A} \sum_{e \in E} h_{a,e}^{v} \leq 1, \qquad \forall v \in V$$

Entrada única al almacén (nodo de destino): Un vehículo solo puede volver de un cliente o una estación, si es que vuelve de un almacén. Esta entrada solo puede ser de una manera. Solo puede entrar a un único almacén

$$\sum_{i\in C}\sum_{a\in A} y_{i,a}^{v} + \sum_{e\in E}\sum_{a\in A} l_{e,a}^{v} \leq 1, \qquad \forall v \in V$$

Salida y vuelta a un almacén de un vehículo: Si un vehículo sale de un almacén, debe volver a un almacén. Si no salió, tampoco debe entrar y viceversa.

$$\left(\sum_{a\in A}\sum_{i\in C} x_{a,i}^{v} + \sum_{a\in A}\sum_{e\in E} h_{a,e}^{v}\right) - \left(\sum_{i\in C}\sum_{a\in A} y_{i,a}^{v} + \sum_{e\in E}\sum_{a\in A} l_{e,a}^{v}\right) = 0, \quad \forall v \in V$$

2.7.4. Restricciones de los vehículos y los clientes

Entrada única al cliente: Un vehículo puede entrar a suplir a un cliente. Esta entrada solo puede ser de una manera. De esta forma, nos aseguramos de que como máximo un tour de un vehículo entre a cada cliente

$$\sum_{a\in A} x_{a,i}^{v} + \sum_{j\in C} z_{j,i}^{v} + \sum_{f\in E} u_{e,i}^{v} \leq 1, \qquad \forall v \in V, \quad \forall i \in C$$

Salida única del cliente: Un vehículo puede salir suplir a un cliente de combustible en una estación. Esta salida solo puede ser de una manera. De esta forma, nos aseguramos de que como máximo un tour de un vehículo salga de cada cliente

$$\sum_{a\in A} y_{i,a}^{v} + \sum_{j\in C} z_{i,j}^{v} + \sum_{f\in E} w_{i,e}^{v} \leq 1, \qquad \forall v \in V, \quad \forall i \in C$$

Entrada y salida del cliente: Un vehículo debe salir y entrar por cada cliente asignado. Si no entró, tampoco debe salir y viceversa.

$$\left(\sum_{a\in A} x_{a,i}^{v} + \sum_{j\in C} z_{j,i}^{v} + \sum_{e\in E} u_{e,i}^{v}\right) - \left(\sum_{a\in A} y_{i,a}^{v} + \sum_{j\in C} z_{i,j}^{v} + \sum_{e\in E} w_{i,e}^{v}\right) = 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall i \in C$$

Visita de clientes intermedios (salida del almacén): Si un vehículo visitó a un cliente intermedio, es porque salió de un almacén. Si un vehículo no salió de un almacén, entonces no puede visitar clientes intermedios.

$$z_{i',j'}^{v} \leq \sum_{a\in A}\sum_{i\in C} x_{a,i}^{v} + \sum_{a\in A}\sum_{e\in E} h_{a,e}^{v}, \qquad \forall v \in V, \ \forall i', j' \in C$$

Visita de clientes intermedios (entrada al almacén): Si un vehículo visitó a un cliente intermedio, es porque entró a un almacén. Si un vehículo no entró un almacén, entonces no puede visitar clientes intermedios.

$$z_{i',j'}^{v} \leq \sum_{i\in C} \sum_{a\in A} y_{i,a}^{v} + \sum_{e\in E} \sum_{a\in A} l_{e,a}^{v}, \qquad \forall v \in V,\ \forall i',j' \in C$$

2.7.5. Restricciones de los vehículos y las estaciones de carga

Entrada única a la estación: Un vehículo puede entrar a abastecerse de combustible en una estación. Esta entrada solo puede ser de una manera. De esta forma, nos aseguramos de que como máximo un tour de un vehículo entre a cada estación

$$\sum_{a\in A} h_{a,e}^{v} + \sum_{i\in C} w_{i,e}^{v} + \sum_{f\in E} m_{f,e}^{v} \leq 1, \qquad \forall v \in V,\ \ \forall e \in E$$

Salida única de la estación: Un vehículo puede salir de abastecerse de combustible en una estación. Esta salida solo puede ser de una manera. De esta forma, nos aseguramos de que como máximo un tour de un vehículo salga de cada estación

$$\sum_{a\in A} l_{e,a}^{v} + \sum_{i\in C} u_{e,i}^{v} + \sum_{f\in E} m_{e,f}^{v} \leq 1, \qquad \forall v \in V,\ \ \forall e \in E$$

Entrada y salida de la estación de recarga: Un vehículo debe salir y entrar por cada estación de carga asignada. Si no entró, tampoco debe salir y viceversa.

$$\left(\sum_{a\in A} h_{a,e}^{v} + \sum_{i\in C} w_{i,e}^{v} + \sum_{f\in E} m_{f,e}^{v}\right) - \left(\sum_{a\in A} l_{e,a}^{v} + \sum_{i\in C} u_{e,i}^{v} + \sum_{f\in E} m_{e,f}^{v}\right) = 0, \quad \forall v \in V,\ \ \forall e \in E$$

Visita de estaciones intermedias (salida del almacén): Si un vehículo visitó a una estación intermedia, es porque salió de un almacén. Si un vehículo no salió de un almacén, entonces no puede visitar estaciones intermedias.

$$m_{e',f'}^{v} \leq \sum_{a\in A} \sum_{i\in C} x_{a,i}^{v} + \sum_{a\in A} \sum_{e\in E} h_{a,e}^{v}, \qquad \forall v \in V,\ \forall e',f' \in E$$

Visita de estaciones intermedias (entrada al almacén): Si un vehículo visitó a una estación intermedia, es porque entró a un almacén. Si un vehículo no entró un almacén, entonces no puede visitar estaciones intermedias.

$$m_{e',f'}^{v} \leq \sum_{i \in C} \sum_{a \in A} y_{i,a}^{v} + \sum_{e \in E} \sum_{a \in A} l_{e,a}^{v}, \qquad \forall v \in V, \ \ \forall e', f' \in E$$

3. Consideraciones finales del modelado

Con la implementación del modelo matemático propuesto, la empresa podrá optimizar de manera considerable su eficiencia logística y reducir sus costos operativos a largo plazo. Además, este enfoque no solo contribuirá a fortalecer la reputación de la empresa entre sus clientes, sino que también permitirá disminuir su impacto ambiental, en línea con los objetivos estratégicos de sostenibilidad. Nos mantenemos a disposición para realizar ajustes adicionales al modelo según sea necesario y brindar soporte en las siguientes fases de implementación, con el propósito de fomentar una mejora continua en sus procesos operativos.