

Table des matières

Introduction	2
Théories et équations	3
Équations du mouvement à résoudre	3
Équations utilisées pour identifier une collision	5
Conditions utilisées pour déterminer l'arrêt de la simulation	5
Équations à résoudre après une collision	6
Une fois la collision détectée, on calcule les vitesses finales des blocs telles que :	6
Résolution des équations du mouvement	8
Présentation et analyse des résultats	9
Présentation des résultats	9
Analyse des résultats	11
Conclusion	11

Introduction

Le thème abordé dans notre devoir est celui de la collision entre deux autos A et B glissant sur une surface (glace). Le conducteur de l'auto A qui roule initialement à une certaine vitesse décide subitement de mettre les freins. L'auto A effectue alors un mouvement de translation jumelé à un mouvement de rotation constante autour de son centre de masse. Le conducteur de l'auto B arrivant à une certaine vitesse réalise que l'auto A est hors de contrôle et appuie également sur les freins. L'auto B à son tour effectue également un mouvement de translation accompagné d'un mouvement de rotation autour de son centre de masse. La seule force de frottement qui agit sur les autos est celle entre l'auto et la glace.

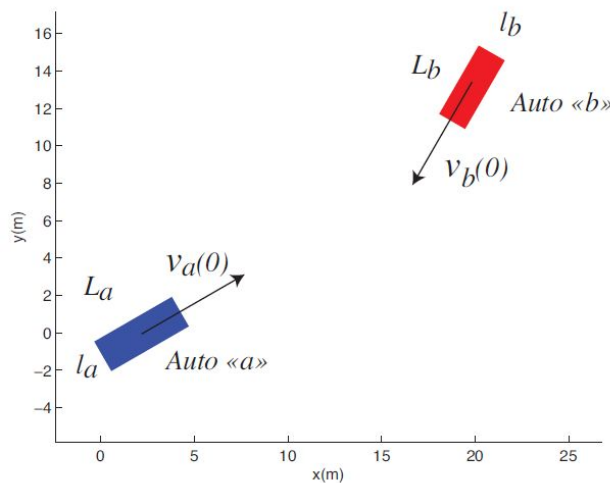


Figure 1 : Dimensions et positions initiales des deux autos

Notre but est de pouvoir établir une fonction Matlab qui nous permettra de :

- Déterminer un programme qui nous permettra de connaître les différentes positions occupées par les autos au cours de leur mouvement
- Détecter la collision entre les deux autos, au cas il y en aurait, et calculer leurs différentes vitesses après le choc.
- Faire en sorte que la simulation prend fin au moment de la collision ou lorsque les autos auront atteint une vitesse de 1m/s

Dans un premier temps, nous allons présenter les équations du mouvement qui nous ont permis d'aboutir aux résultats que nous présenterons sous formes de tableaux. Et ensuite dans un second temps, nous présenterons les graphiques et les fonctions de simulation obtenus qui seront envoyés en pièces jointes. Nous reviendrons également sur les difficultés que nous avons rencontrées lors de l'élaboration de ce devoir.

Théories et équations

Équations du mouvement à résoudre

Pour modéliser le mouvement d'un bloc, nous suivons la trajectoire de son centre de masse en utilisant l'équation suivante :

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

Figure 2.1.1 : Équation de l'accélération

Où :

- m est la masse de l'objet et
- F est la force de frottement entre la glace et les autos quand elles glissent dessus, telle que

$$\vec{F}_{f,a/b} = -\mu(|\vec{v}_{a/b}|)m_{a/b}g \frac{\vec{v}_{a/b}}{|\vec{v}_{a/b}|}$$
$$\mu(|\vec{v}_{a/b}|) = \begin{cases} 0.15 \left(1 - \frac{|\vec{v}_{a/b}|}{100}\right) & \text{si } |\vec{v}_{a/b}| < 50 \\ 0.075 & \text{sinon} \end{cases}$$

Figure 2.1.2 : Équation de la force de frottement

Ainsi que :

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$$

Figure 2.1.3 : Équation de la vitesse du centre de masse

$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t)$$

Figure 2.1.4 : Équation de la vitesse angulaire

Finalement, pour modéliser le mouvement de rotation des blocs, nous allons précéder de la manière suivante :

Comme il n'y a qu'une force de frottement sec distribuée uniformément entre l'auto et la glace, nous allons calculer le moment de force tel que :

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_c^f &= \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times d\vec{F}^f \\ &= \int_S \left[(\vec{r} - \vec{r}_c) \times \frac{\vec{F}^f}{|\vec{F}^f|} \right] \mu p d^2 r\end{aligned}$$

Figure 2.1.5 : Équation du moment de force

(Nous nous sommes rendu compte que nos résultats étaient erronés car ils étaient de l'ordre de 10^{-14} mais nous n'avons pas pu trouver le problème)

Puis nous avons calculer l'accélération angulaire telle que :

$$\tau = I\alpha$$

Figure 2.1.6 : Équation du moment de force

avec I le moment d'inertie du centre de masse du bloc.

Finalement, nous pouvons trouver la vitesse angulaire avec :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Figure 2.1.7 : Équation de la vitesse angulaire

Équations utilisées pour identifier une collision

Pour identifier une collision, nous allons procéder aux étapes suivantes :

- 1- Représenter le bloc A comme 4 points (ses coins) et le bloc B comme 4 arêtes et vérifier si un des points de A touche ou a dépassé une des arêtes de B
- 2- Faire de même en inversant les blocs A et B

Pour trouver la nouvelle position des 4 coins de chaque bloc, on le calcule par rapport à son centre de masse, qui est situé au centre, soit (longueur / 2, largeur / 2).

Puis on applique une rotation sur chacun de ces points selon un angle β tel que :

$$\begin{aligned}x_2 &= \cos \beta x_1 - \sin \beta y_1 \\y_2 &= \sin \beta x_1 + \cos \beta y_1\end{aligned}$$

Figure 2.2.1 : Équations pour faire tourner les points

Par ailleurs, pour déterminer si un point est dans un polygone, nous avons utilisé la fonction *inpolygon* d'Octave qui prend en paramètre les coordonnées du points et les sommets du polygone.

Conditions utilisées pour déterminer l'arrêt de la simulation

Pour pouvoir déterminer le résultat de la simulation et bien signaler sa fin, on doit pouvoir déterminer quand une collision entre les 2 blocs se produit. Pour faire cela, on exécute une fonction de détection de collision chaque fois qu'on incrémente le Δt et on recalcule la position du centre de masse de la balle. Cette fonction vérifie les conditions suivantes dans l'ordre respectif, si aucune condition n'est remplie elle retourne -1 pour indiquer de continuer le déroulement de la simulation :

- Il y a une collision entre les blocs A et B
- La vitesse des autos est inférieure à 1 cm/s.

Équations à résoudre après une collision

Une fois la collision détectée, on calcule les vitesses finales des blocs telles que :

$$\begin{aligned}\vec{v}_a(t_f) &= \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{J}}{m_a} \\ \vec{v}_b(t_f) &= \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{J}}{m_b}\end{aligned}$$

Figure 2.4.1 : Équations des vitesses linéaires finales

avec :

- m la masse du bloc
- \vec{n} le vecteur normal au bloc lorsqu'une collision se produit tel que :

$$\begin{aligned}\vec{p}_{k,1} &= \vec{q}_{k,1} - \vec{q}_{k,2} \\ \hat{n}_k &= \frac{z(\vec{p}_{k,1,y}, -\vec{p}_{k,1,x})}{|z(\vec{p}_{k,1,y}, -\vec{p}_{k,1,x})|}\end{aligned}$$

Figure 2.4.2 : Calcul de la normale dans une surface 2D

où q_1 et q_2 sont les sommets de l'arête où il y a une collision et z peut prendre les valeurs 1 et -1 pour s'assurer que les points sont choisis dans un sens antihoraire pour un observateur à l'extérieur du solide.

- j est un coefficient d'équation :

$$\begin{aligned}j &= -\alpha(1 + \epsilon) v_-^r \\ \alpha &= \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_a + G_b}\end{aligned}$$

Figure 2.4.3 : Équation du coefficient j

avec:

$$G_a = \hat{n} \cdot [(\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{a,p}]$$

$$G_b = \hat{n} \cdot [(\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{b,p}]$$

Figure 2.4.4: Calcul de G_a et G_b

où le coefficient de restitution $\epsilon = 0.8$ et v_r^- est la vitesse relative finale telle que :

$$v_r^- = \hat{n} \cdot \vec{v}_{a-b}(t_i) = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i))$$

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t))$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t))$$

Figure 2.4.5 : Calcul de la vitesse relative finale

Et pour ce qui concerne les vitesses angulaires finales nous aurons:

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + \mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \vec{J})$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - \mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \vec{J})$$

Figure 2.4.6 : Équations des vitesses angulaires finales

Ici:

$$\vec{J} = \hat{n} j + \hat{t} j_t$$

Figure 2.4.7: Equation du moment d'inertie

avec :

$$j_t = \begin{cases} \alpha_t \mu_c (1 + \epsilon) v_r^- & \text{si } \mu_s (1 + \epsilon) |v_r^-| < |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ -\alpha_t |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| & \text{sinon} \end{cases}$$

Figure 2.4.8: Calcul de j_t

avec:

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_{a,t} + G_{b,t}}$$

$$G_{a,t} = \hat{t} \cdot [(\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{t})) \times \vec{r}_{a,p}]$$

$$G_{b,t} = \hat{t} \cdot [(\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{t})) \times \vec{r}_{b,p}]$$

Figure 2.4.9: calcul du coefficient α_t

Résolution des équations du mouvement

Pour simuler un mouvement réaliste d'un bloc, nous avons calculé et mis à jour la position de son centre de masse à chaque instant t_i .

À chaque instant $t_i = t_{i-1} + t$ où $t = 0.05s$ du mouvement, on vérifie les conditions d'arrêt de la simulation avec la position courante du bloc.

La position de la balle $r_i = r_{i-1} + v_i * t$ (avec v_i la vitesse de la balle à l'instant t_i) nous permet d'obtenir la nouvelle position de la balle jusqu'à ce que l'une des conditions d'arrêt de simulation soit réalisée.

Présentation et analyse des résultats

Présentation des résultats

Tir	Coll	tf (s)	raf	vaf	rbf	vbf
1	1	5.9900	98.03422 0.00000	12.577232 -0.074591 -10.875583	100.0000 1.8921	0.090957 -12.535993 15.662572
2	1	3.4300	96.72629 0.00000	25.72973 -0.41624 12.21156	100.0000 3.2375	0.99197 -25.75647 81.48253
3	1	6.0500	98.78974 0.00000	11.8154 -1.4721 1.5685	100.0000 2.9191	1.1351 -1.6717 52.9765
4	0	9.6900	52.896 52.896	0.70670 0.70670 1.00000	61.530 10.000	0.011786 0.000000 0.000000
5	0	14.500	157.01602 0.00000	0.99593 0.00000 2.00000	100.000 13.448	0.0000000 0.0025882 0.0000000
6	0	14.590	157.935 15.793	0.983575 0.098357 2.000000	146.448 10.000	-0.00265 0.00000 5.00000

Tableau 1 : Présentation des résultats de la simulation

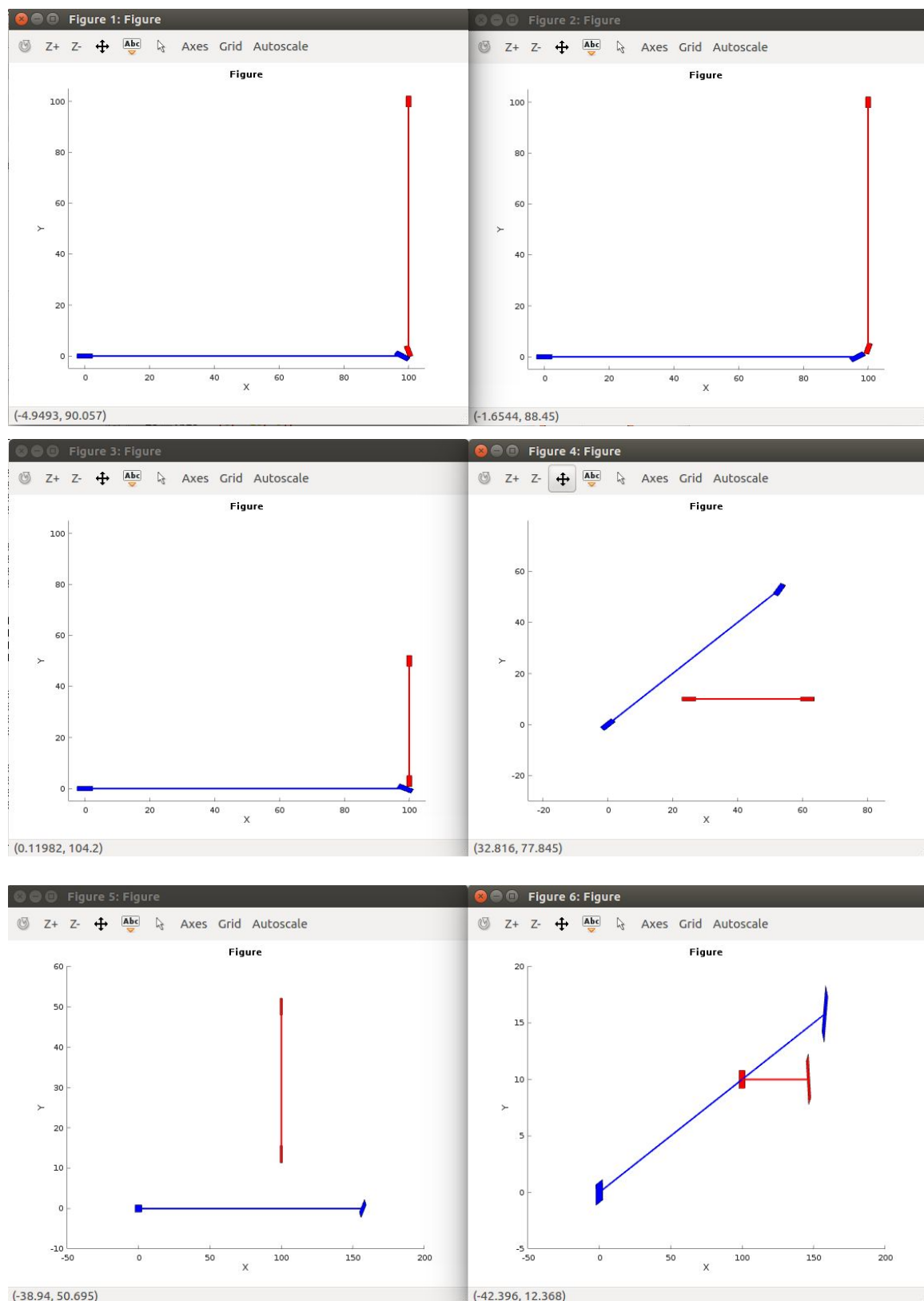


Figure 3.1 : Résultats graphiques des simulations

Analyse des résultats

Au vu des résultats présentés ci-dessus, nous pouvons constater que les composantes de la vitesse diminuent à cause de la présence d'une force de frottement entre la glace et l'auto. Dans les essais, nous avons des collisions qui se produisent et entraînent directement un changement de direction des deux autos car ces derniers auront acquis de nouvelles vitesses linéaires et angulaires. Après la collision, on peut voir que les composantes x et y des vitesses linéaires des deux solides ont diminuée. En effet, cette diminution est due aux frottements avec la glace et aussi car la collision n'est pas parfaitement élastique ($e=0.8$). Alors que quand les deux véhicules ne font pas de collision, on constate simplement une perte de vitesse due aux frottements sur la glace.

Conclusion

Grâce à ce TP nous avons pu observer le phénomène de collision. La difficulté majeure était de choisir la formule de la vitesse de collision que nous devons utiliser étant donné que nous avons plusieurs formules dans le cours. L'interprétation du phénomène physique requiert beaucoup de pratique dans la mesure où il n'est pas souvent évident de tenir compte de tous les paramètres influençant notre mouvement. Malgré ces difficultés, nous sommes parvenus à des résultats tels que présentés plus haut et un programme de simulation que nous avons envoyé en pièce jointe.