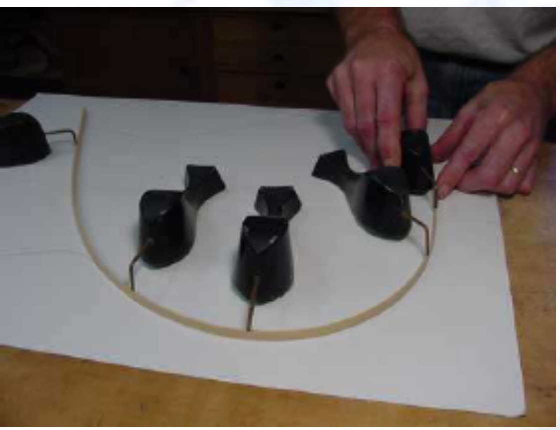
Splines

Profa.: Regina Célia Coelho

Introdução

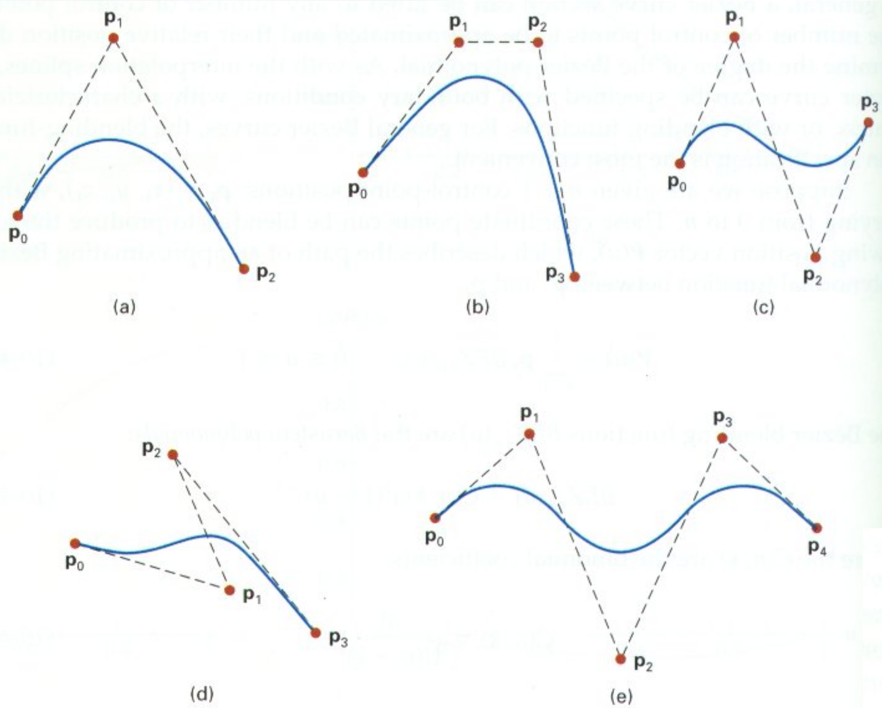
- Atualmente há *hardwares* gráficos que desenham pontos, linhas e polígonos, que em geral se limitam a triângulos, quadriláteros e círculos.
- Curvas suaves e superfícies são desenhadas aproximando-as pelo uso de várias linhas ou polígonos pequenos.
- No entanto, muitas curvas ou superfícies podem ser descritas matematicamente por poucos parâmetros, tais como os **pontos de controle**.

Definição

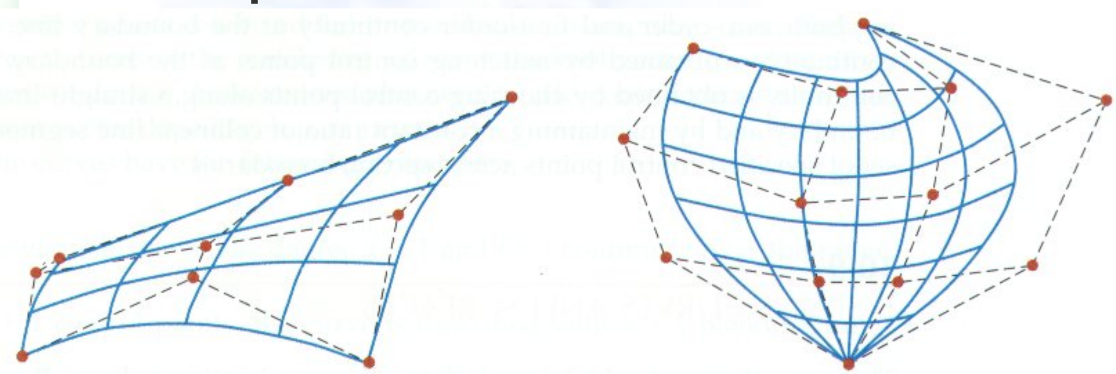


- Tira flexível usada para produzir uma curva suave utilizando um conjunto de pontos, ou seja, uma *spline* é uma curva definida por **pontos de controle**.
  - ✓ O termo *spline* vem da área de desenho em engenharia, em que uma *spline* é um pedaço de madeira ou metal flexível usado para desenhar curvas suaves.
  - ✓ Pontos de controle são ajustados pelo usuário para controlar a forma da curva usando-se pesos.
- *Splines* de madeira passam obrigatoriamente pelos pontos de controle.
- Vários pesos pequenos podem ser usados ao longo da curva para mantê-la na posição desejada.

Definição



- Todos os pontos de controle podem possuir pesos relacionados a eles, usados para ajustar a curva ou superfície



Definição

- Pontos de controle: são pontos que influenciam a forma da curva ou superfície. Eles podem estar sobre a curva (ou superfície) ou não.

- *Splines*: São curvas que passam através ou próximos dos pontos de controle.

Aplicações

- Aplicações típicas incluem projeto do corpo de automóveis, superfícies de aviões e veículos espaciais, casco de navios, etc.

- Usadas em aplicações gráficas para projetar formas de curvas e superfícies, para digitalizar desenhos para armazenamento em computador, etc.

Curvas Bézier

- Desenvolvido pelo engenheiro francês Pierre Bézier para usar no projeto de corpos de automóveis da Renault.

- Possuem propriedades que as tornam altamente usuais e convenientes para projetos de curvas e superfícies, além de serem de fácil implementação.

- Pode ser usado qualquer quantidade de pontos de controle, mas o número de pontos determina o grau do polinômio de Bézier.

Curvas Bézier

- Suponhamos que temos $n+1$ pontos de controle: $p_k=(x_k,y_k,z_k)$, com k variando de 0 a n.

- Estes pontos podem ser combinados para produzir o seguinte vetor de posição $P(u)$, que descreve o caminho de uma aproximação da função polinomial de Bézier entre p_0 e p_n:

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,n}(u) \qquad 0 \leq u \leq 1$$

Curvas Bézier

- As funções de combinação de Bézier são polinômios de Bernstein:

$$B_{k,n}(u) = C(n,k)u^k(1-u)^{n-k}$$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Vamos encontrar a recursividade das funções de combinação de Bézier $B_{k.n}(u)$.

Recursividade das funções $B_{k,n}(u)$

- Primeiramente, vamos encontrar a recursividade dos coeficientes binomiais *C(n,k)*.

$$C(n,1) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$C(n,2) = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)}{2} \cdot C(n,1)$$

$$C(n,3) = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{(n-2)}{3} = \frac{(n-2)}{3} C(n,2)$$

Recursividade das funções $B_{k,n}(u)$

- Primeiramente, vamos encontrar a recursividade dos coeficientes binomiais *C(n,k)*.

$$C(n,1) = n \qquad C(n,2) = \frac{(n-1)}{2} \cdot C(n,1) \qquad C(n,3) = \frac{(n-2)}{3} C(n,2)$$

$$C(n,4) = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{(n-3)}{4} C(n,3)$$

Recursividade das funções $B_{k,n}(u)$

- Sendo assim, a recursividade dos coeficientes binomiais será:

$$\boxed{C(n,k) = \frac{n-k+1}{k} C(n,k-1)}$$

Recursividade das funções $B_{k,n}(u)$

- Agora podemos calcular a recursividade das funções $B_{k,n}(u)$:

$$\boxed{\begin{aligned} B_{k,n}(u) &= C(n,k)u^k(1-u)^{n-k} \\ B_{k-1,n}(u) &= C(n,k-1)u^{k-1}(1-u)^{n-(k-1)} \end{aligned}}$$

$$B_{k,n}(u) = C(n,k)u^k(1-u)^{n-k} = \tfrac{n-k+1}{k}C(n,k-1)u^k(1-u)^{n-k}$$

$$= \tfrac{n-k+1}{k}C(n,k-1)u^{k-1}u(1-u)^{n-k+1}(1-u)^{-1}$$

$$\boxed{B_{k,n}(u) = \frac{(n-k+1)uB_{k-1,n}(u)}{k(u-1)}}$$

Curvas Bézier

- Portanto, podemos definir funções de combinação Bézier com cálculos recursivos:

$$B_{k,n}(u) = \frac{(n-k+1)B_{k-1,n}(u)}{k(1-u)} \cdot u \qquad \text{para } u \neq 1$$

sendo $B_{0,n}(u)=(1-u)^n$ e $B_{n,n}(u)=u^n$.

Curvas Bézier

- A equação *P*(*u*) representa um conjunto de equações paramétricas para as coordenadas:

$$x(u) = \sum_{k=0}^{n} x_k B_{k,n}(u)$$

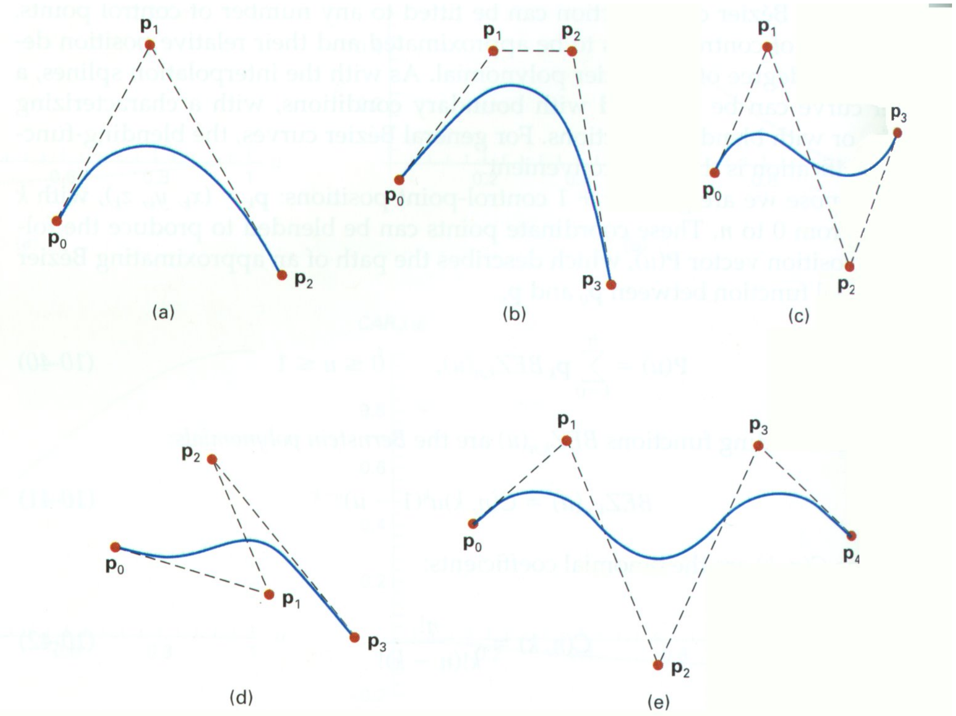
$$y(u) = \sum_{k=0}^{n} y_k B_{k,n}(u)$$

$$z(u) = \sum_{k=0}^{n} z_k B_{k,n}(u)$$

Curvas Bézier

- Como regra, uma curva Bézier é um polinômio de grau um a menos que o número de pontos de controle usados, ou seja, 3 pontos de controle geram uma parábola, 4 pontos, uma curva cúbica, e assim por diante.

- Exemplos de curvas Bézier:



Exercício 1

- Mostre que $B_{k,n}(u) = B_{n-k,n}(1-u)$

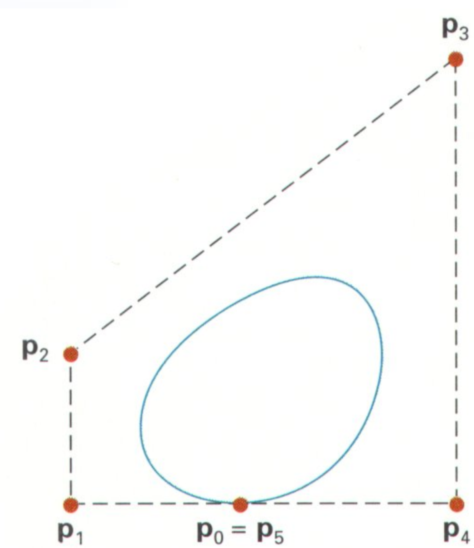
- Calcule os valores de $P(0)$ e $P(1)$, dados os pontos de controle p_0, p_1, p_2 e p_3.

Curvas Bézier

- Propriedades:
  - ✓ A curva sempre passa pelo primeiro e último ponto de controle;
  - ✓ Qualquer curva Bézier está sempre situada dentro do *convex hull* (limite do polígono convexo ou casco convexo) dos pontos de controle;
  - ✓ A soma de todas as funções de combinação é sempre igual a 1, isto é,

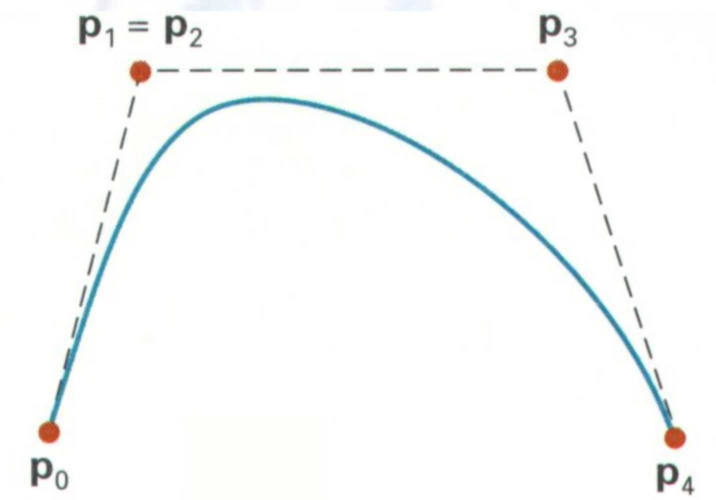
$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(u) = 1$$

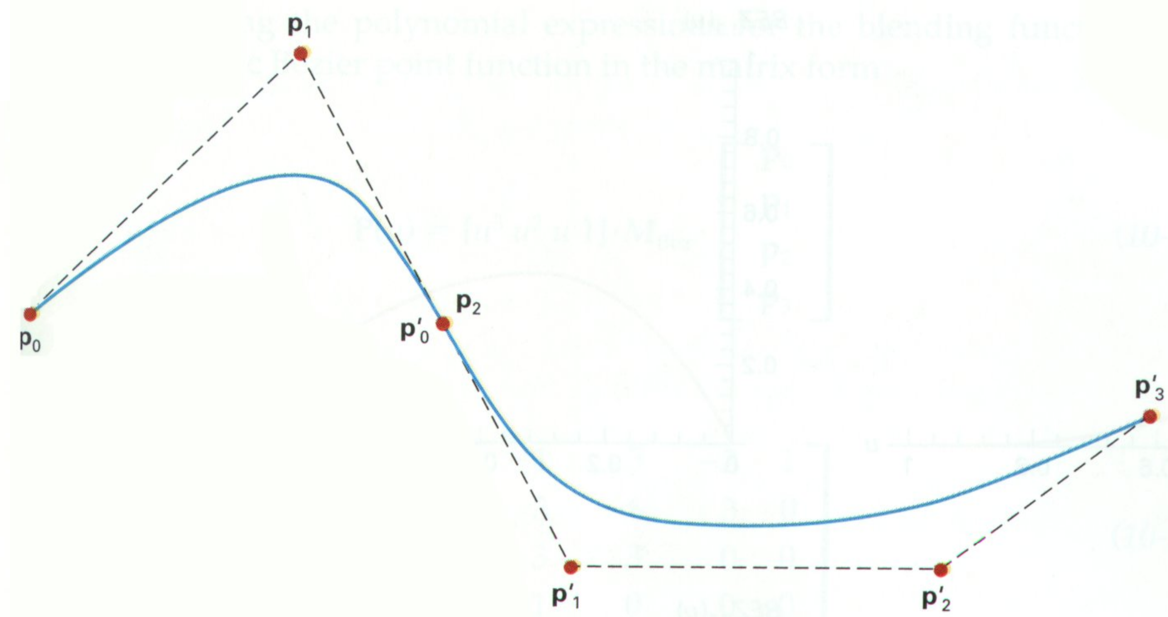
  - ✓ Curvas fechadas são geradas especificando o último ponto igual ao primeiro;



Curvas Bézier

✓ Podemos especificar múltiplos pontos de controle em uma única posição de coordenada para dar um peso maior àquela posição, como no exemplo da figura abaixo:





Curvas Bézier – Características Gerais

- O grau do polinômio é sempre um a menos que o número de pontos de controle.

- Os pontos de controle não exercem controle local. O movimento de qualquer ponto de controle afetará toda a curva.

- O primeiro e o último ponto de controle serão os pontos finais da curva.

- A evolução da *Bézier* é a *B-Spline*, ou seja, *Bézier* é um caso especial de *B-Spline*.

Curvas B-Splines Uniformes

- São as classes mais amplamente usadas.
- Algumas vezes são conhecidas como ***B**asis* ***Splines***.
- *B-Spline* uniforme significa que $|u_{i+1}-u_i|$ entre dois pontos de controle consecutivos u_i e u_{i+1} é constante.
- Possuem duas vantagens sobre as *splines* Bézier:
  - ✓ o grau do polinômio pode ser estabelecido independentemente do número de pontos de controle (com certas limitações);
  - ✓ *B-Splines* permitem controle local sobre a forma de uma curva ou superfície *splines*.
- São mais complexas que as Bézier.

Curvas B-Splines Uniformes

- Expressão geral para o cálculo das coordenadas ao longo de uma curva B-Spline:

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,d}(u)$$

$$u_i = \begin{cases} 0 & se \quad i < d \\ i - d + 1 & se \quad d \le i \le n \\ n - d + 2 & se \quad i > n \end{cases} \qquad i = 0,\ldots,n+d$$

$$2 \le d \le n+1 \qquad 0 \le u \le n - d + 2$$

sendo p_k o conjunto de n+1 pontos de controle e *d* é chamado de parâmetro de grau.

- Para gerar uma curva *spline* basta definir os parâmetros *d* e *n* e as coordenadas dos pontos de controle.

Curvas B-Splines Uniformes

- As funções de combinação $B_{k,d}$ são polinômios de grau *d-1*, sendo que *d* pode ser escolhido como sendo qualquer valor entre 2 e *n+1*.
- O controle local para B-Splines é alcançado definindo funções $B_{k,d}$ em subintervalos de *u*.
- As extremidades dos intervalos são denominados *knots* e compõem um vetor chamado de **vetor de *knots***.
- Assim, para uma dada B-Spline de parâmetros *d* e *n*, temos um vetor de *d+n+1 knots*.

Curvas B-Splines Uniformes

- As funções de combinação de B-Splines são definidas pela fórmula de Cox-deBoor:

$$B_{k,1}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_k \leq u < u_{k+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(u) = \frac{u - u_k}{u_{k+d-1} - u_k} B_{k,d-1}(u) + \frac{u_{k+d} - u}{u_{k+d} - u_{k+1}} B_{k+1,d-1}(u)$$

- Caso o denominador tenha valor 0, o resultado da divisão será zero.

Regina Célia Coelho

Curvas B-Splines Uniformes

- Propriedades:
  - ✓ Natureza local da definição, tal que se movermos um ponto p_i, somente os segmentos da curva associados com este ponto serão afetados.
  - ✓ Uma curva *B-Spline* não necessariamente passa pelos pontos de controle (mesmo os iniciais).

Curvas B-Splines Uniformes

- Propriedades:

  - ✓ Se o ponto de controle inicial é repetido 3 vezes então a curva passará sobre ele. Isto é semelhante para o último ponto de controle também. Assim, uma sequência de pontos de controle $P_0\ P_0\ P_0\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_4\ P_4$ gerará uma curva que passa pelos pontos P_0 e P_4.

  - ✓ Cada função $B_{k,d}$ é definida sobre d subintervalos do limite total de u.

Exercícios

1) Calcule os polinômios obtidos quando queremos traçar um curva *B-Spline* com 6 pontos de controle ($n=5$) e $d=1$.

2) Calcule os polinômios obtidos quando queremos traçar um curva *B-Spline* com 6 pontos de controle ($n=5$), porém agora com $d=2$.

Superfícies B-Splines Uniformes

- Pode ser evoluída para:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j}^{m} p_{ij} B_{i,j}(u,v)$$

sendo p_{ij} uma matriz de pontos de controle e $B_{i,j}(u,v)$ uma função base bivariada. Podemos gerar $B_{i,j}(u,v)$ de:

$$B_{i,j}(u,v) = B_i(u)\ B_j(v)$$

- Assim, teremos o cálculo de superfície *B-Spline* como:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j}^{m} p_{ij} B_i(u) B_j(v)$$

Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)

- *Nonuniform*: os intervalos de *u* não precisam ser iguais.

- *Rational:* as funções paramétricas que definem cada segmento de curva são razões de polinômios do tipo:

$$x(t)=\frac{X(t)}{W(t)},\quad y(t)=\frac{Y(t)}{W(t)},\quad z(t)=\frac{Z(t)}{W(t)}$$

NURBS

- Curvas racionais são invariantes às transformações de rotação, escala, translação e perspectiva dos pontos de controle (curvas não racionais não são preservadas na projeção perspectiva).
  - ✓ Isto significa que podemos transformar pontos de controle e redesenhar a curva usando os pontos transformados.
  - ✓ Se isto não fosse verdade, teríamos que amostrar a curva para vários pontos e transformar cada ponto individualmente.

NURBS

- Considerando que B-Splines são calculadas como:

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,d}(u)$$

representemos vetor coluna de pontos na forma: $\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$

- Se consideramos P como coordenadas homogêneas, podemos multiplicar as coordenadas dos pontos por um número não zero, não mudaremos sua posição. Assim, multiplicando P_i por w_i, teremos:

$$\mathbf{P}_i^w = \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

NURBS

- Note que P_i e P_i^w representam o mesmo ponto em coordenadas homogêneas.

- Desta forma, podemos reescrever os cálculos das coordenadas x, y e z como razão de polinômios na forma:

$$x(t)=\frac{X(t)}{W(t)}, \quad y(t)=\frac{Y(t)}{W(t)}, \quad z(t)=\frac{Z(t)}{W(t)}$$

em que X(t), Y(t), Z(t) e W(t), são curvas polinomiais cúbicas com pontos de controle especificados em coordenadas homogêneas.

NURBS

- Desta observação, uma curva Bézier racional é definida como:

$$P(u) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k w_k B_{k,n}(u)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_{k,n}(u)} \qquad 0 \leq u \leq 1$$

NURBS

- Casos especiais de NURBS:
  - Esferas
  - Cilindros
  - *B-Splines* (quando todos os pesos *w(t)* são iguais a 1)

NURBS

- Uma curva NURBS é definida por sua ordem, um conjunto de pontos de controle com seus respectivos pesos e um vetor *knot* (valores de *u*).
- A ordem de uma curva NURBS define o número de pontos de controle da vizinhança que influenciará um dado ponto de controle. Normalmente é utilizada *spline* cúbica.
- A curva é representada matematicamente por um polinômio de grau um a menos que a ordem da curva.
- Enquanto curvas NURBS envolvem um parâmetro (*u*), superfícies NURBS envolvem dois parâmetros (*u* e *v*).