# Bacharelado em Ciência da Computação

## *Processamento de Imagens*

## Wavelets Unidimensionais

# Conceitos básicos

- Pode-se projetar *wavelets* otimizadas para realizar análises especiais, em que as *wavelets* tenham características semelhantes aos sinais sob análise: uma espécie de Homeopatia Matemática - a cura pelos semelhantes.

- *Wavelets* que são utilizadas para compressão de dados, podem ser péssimas para aplicações de análises de sinais biológicos, ou síntese de música. Da mesma forma, *wavelets* para síntese de sons podem não ser úteis em aplicações para compressão de dados.

- *Wavelets* podem ter caráter fractal e terem padrões que se repetem em escalas diferentes.

# Histórico

- Em 1909, a primeira menção: tese de doutorado de **Alfred Haar**, análise escalonada.
  - As Wavelets de Haar, embora de suporte compacto não são continuamente diferenciáveis.
- Década de 80, **Alex Grossmann** (*Université de Marseille*) e **Jean P. Morlet** (*Elf Acquitaine*) introduziram o conceito de *wavelets.*
  - Morlet recebeu o prêmio *Reginald Fessenden Award* 1997.
- Em 1985, **Stéphane Mallat** (França) estabeleceu a ligação desta teoria com o processamento digital de sinais.
- **Yves Meyer** (França) construiu uma das primeiras *wavelets* não triviais, continuamente diferenciáveis.
- **Ingrid Daubechies** (Bélgica) construiu o mais usado conjunto de *wavelets* ortogonais de suporte compacto (tempo-limitada).

*Por que wavelets?*

Em que esta ferramenta pode ser mais potente que a análise espectral clássica de Fourier?

*De onde surgiram as wavelets?*

# Análise Espectral para Sinais Não Estacionários

- Os sinais devem ser tratados não no domínio t ou domínio f, mas em ambos (espaço conjunto tempo-frequência)!

- Há vantagens no uso da análise *wavelet* ao invés da análise de Fourier, por exemplo, em situações em que os sinais contém descontinuidades e/ou variações abruptas e curtas.

- Uma das características centrais é ser bem adaptada a sinais de curta duração e com variações muito rápidas, tais como sinais transitórios, sísmicos, de voz, etc.

# Conceito de Estacionaridade

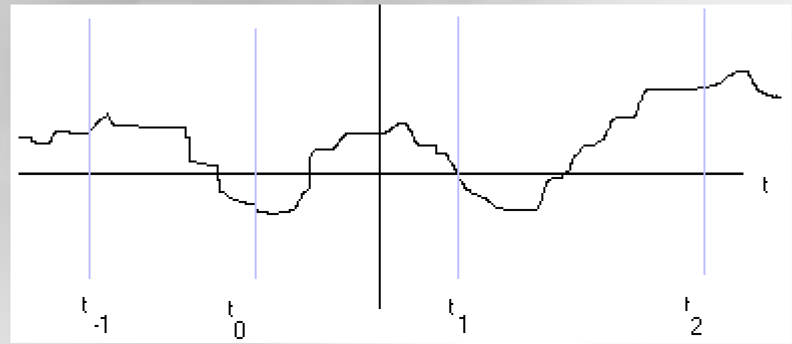



Ilustração de um trecho de um sinal (possivelmente) estacionário.

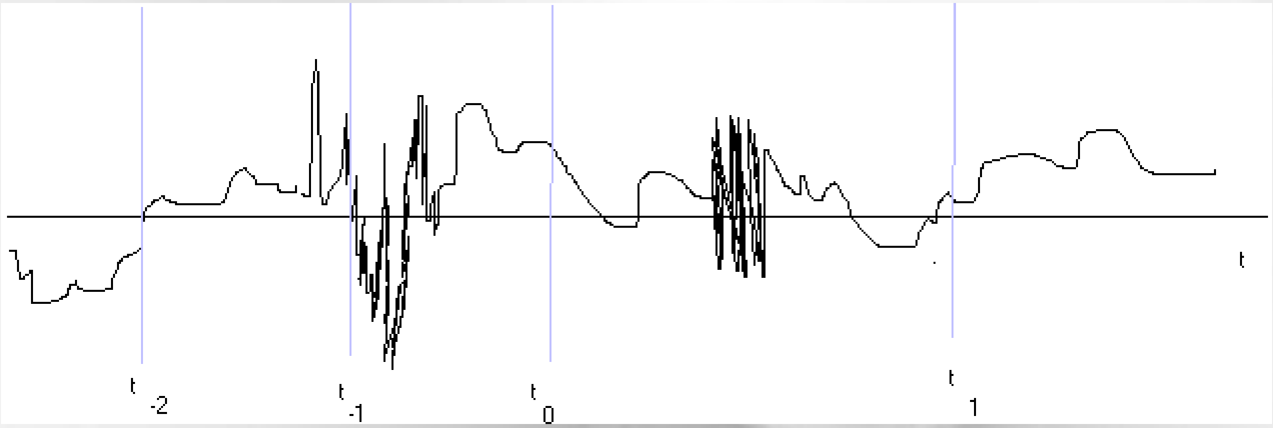



Ilustração de um trecho de um possível sinal não estacionário.

- A Transformada de Fourier analisa a contribuição de cada componente harmônica no sinal como um todo.

# Conceito de Estacionaridade *(cont.)*

- O sinal estacionário apresenta um comportamento "mais ou menos" semelhante em qualquer trecho analisado.

- Abordagem pouco formal, mas suficiente.

- Primeiro passo na direção das *wavelets*: a introdução de um caráter local, que tem relação com o parâmetro *b*, deslocamento.

- Tudo se passa como se o sinal fosse "fatiado" em vários trechos, e em cada trecho, a contribuição espectral fosse analisada, resultando em um espectro local.

# Conceito de Estacionaridade *(cont.)*

- Agora tem-se uma sequência de "fotos" do espectro

$$\ldots\ F(w,t\text{-}1),\ F(w,\ t0),\ F(w,t1),\ F(w,t2)\ \ldots.$$

evoluindo temporalmente.

- Sinais práticos "bem comportados" com relação à estacionaridade: sinais periódicos.

# Exemplo

- Imagine que para representar o rosto de uma pessoa dispõe-se de 6 fotos tiradas a cada 5 anos (exemplo: aos 5 anos, 10 anos, 15, 20, 25 e 30 anos).
- Com o auxílio de técnicas de processamento de imagens, procura-se obter uma única foto representativa do indivíduo, por exemplo, tomando uma "foto média".
- A maior parte das características do indivíduo são "relativamente" mantidas com o passar do tempo.
- Essa foto média representa o espectro de Fourier. Se você deseja um caráter local (no tempo), deve trabalhar com as seis fotos, o que exige maior complexidade, maior capacidade de armazenamento e processamento. Imagine armazenar um banco com fotos de 100 milhões de pessoas!!!

# Conceito de Estacionaridade *(cont.)*

- A classe de sinais, cujo espectro permanece relativamente independente no tempo, são referidos como sinais estacionários.

- Os não-estacionários trazem variações substanciais e significativas de padrão e comportamento, dependendo do instante de tempo considerado.
  - É como se, "de repente", no meio de uma sequência de fotos 3x4 de fotos humanas semelhantes, surgisse uma foto de algum animal completamente diferente (por exemplo, de uma girafa).

# Conceito de Estacionaridade *(cont.)*

- Diferentes níveis de estacionaridade:
  - Sequência de fotos sempre de uma mesma pessoa em diferentes tempos;
  - Sequência de fotos de pessoas diferentes em tempos diferentes, porém de uma mesma raça (origem);
  - Sequência de fotos de pessoas diferentes em tempos diferentes, porém de origens diferentes;
  - Sequência de fotos de diferentes animais em tempos diferentes (levando em conta algum aspecto da classificação);
  - Sequência de fotos arbitrárias diferentes em tempos diferentes, incluindo objetos, paisagens etc.
- Quando o espectro de Fourier passa a não ter sentido?. A resposta não é fechada.
- Depende do que se deseja e quanto se pode "pagar".

# Transformada de Gabor

- Uma das grandes desvantagens da análise de Fourier: apresenta apenas resolução na frequência e não no tempo.
  - Embora capaz de determinar o conteúdo de frequências presentes em um sinal, não há noção de quando (em que intervalo de tempo) elas ocorrem.
- A teoria por trás da análise de Fourier diz que um sinal pode ser representado por uma soma infinita de termos em seno e cossenos, mais conhecida como a expansão de Fourier.
- Maior vantagem da Transf. de Fourier: poder determinar todas as frequências presentes no sinal.
- Desvantagem: sua relação com o domínio temporal é inexistente.
  - Não fornece uma análise temporal, apenas frequencial.

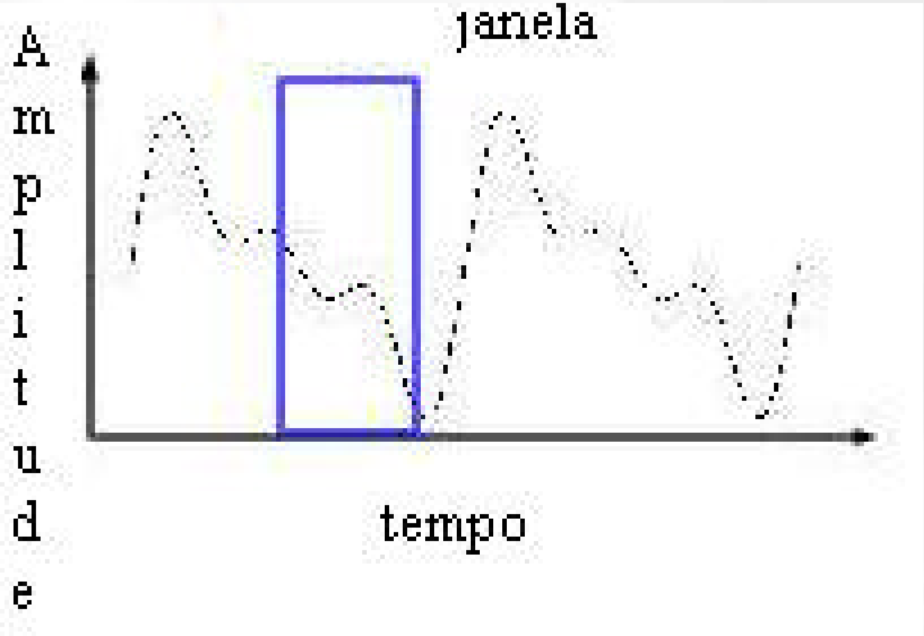
# Transformada de Gabor (cont.)

- Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT – *Short Time Fourier Transform*) também conhecida como a **Transformada de Gabor**.

- A ideia da STFT é introduzir um parâmetro de frequência local (local no tempo) como se a "Transformada de Fourier Local" observasse o sinal através de uma curta "janela" dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário.

# Transformada de Gabor *(cont.)*

- A transformada local observa *f(t)* "através" de uma janela *W(t)* centrada no instante de tempo $\tau$ e de extensão "limitada", antes do cálculo do espectro.



# Transformada de Gabor (cont.)

- Formalmente,

$$STFT(w,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) W^{*}(t-\tau) e^{-jwt} dt$$

- É necessária uma representação bidimensional *F(w,* $\tau$*)* do sinal *f(t)*, composta por características espectrais dependentes do tempo.

- Várias escolhas possíveis para a janela, mas a mais comum é a Gaussiana.

# Próximas perguntas

- Por que a STFT não é suficiente?
- O que seria mais apropriado, além de um transformada local (*wavelets* também são locais)?

# Próximas perguntas

- Por que a STFT não é suficiente?
- O que seria mais apropriado, além de um transformada local (*wavelets* também são locais)?
- A necessidade da segunda operação básica das *wavelets*, o escalonamento, também pode ser entendida neste contexto.
- Isto conduz a ideia de realizar a análise utilizando "Filtros Idênticos" e de "Banda Passante Relativa" constante.
- Especificando o formato de um deles (por exemplo, um filtro Gaussiano), todos os demais são instantaneamente especificados (são também Gaussianos).
- Assim, emerge a noção de *wavelet*-mãe - todas as outras são simplesmente versões escalonadas dela, e o fator de escala depende da frequência.

# Análise de wavelets

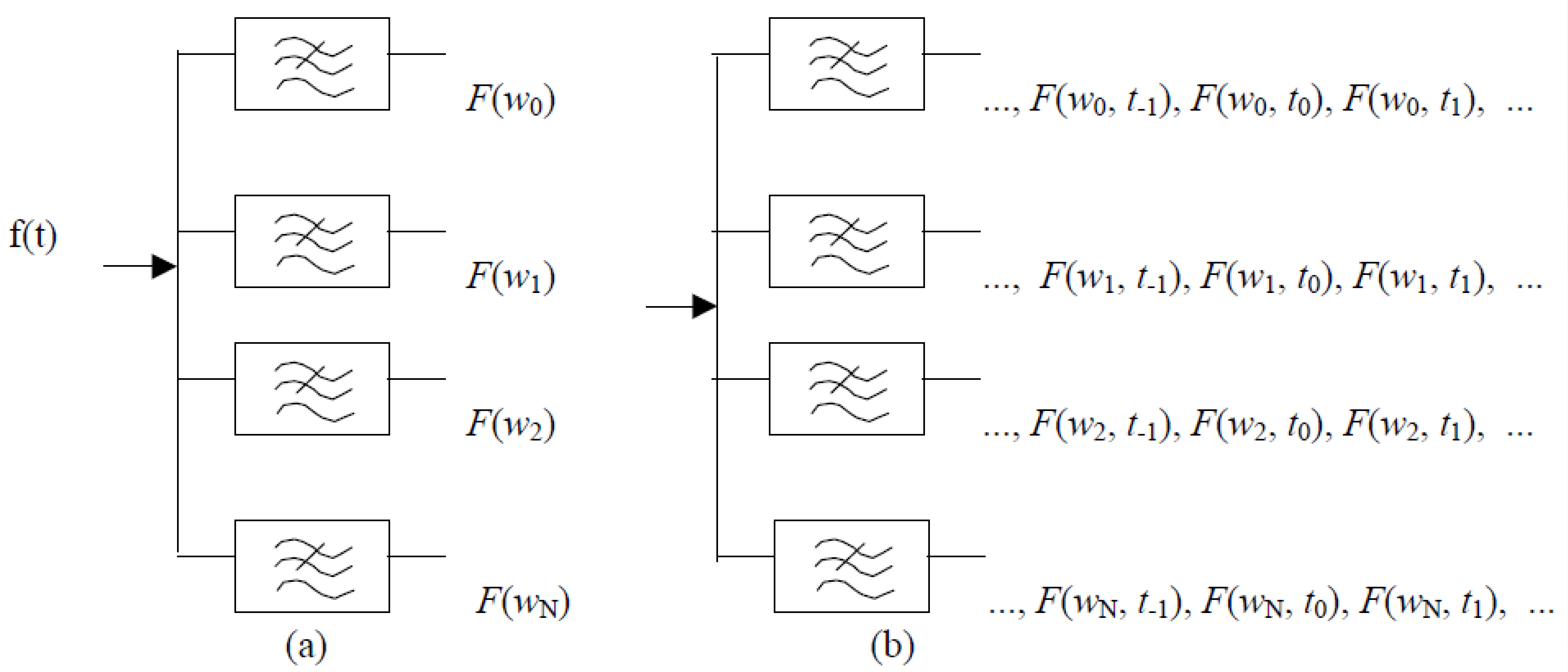
- Alternativa para abordar o plano conjunto tempo-frequência:
  - A análise visualizada como um banco de filtros.
  - Resolução no tempo deveria aumentar com o aumento da frequência central dos filtros.
  - A resolução no tempo torna-se arbitrariamente boa para altas frequências, enquanto que a resolução em frequência torna-se arbitrariamente boa em baixas frequências.

# Retomando o exemplo das fotos

- Deve-se usar uma representação para um indivíduo de meia-idade com uma meia dúzia de fotos (0 ano, 5 anos, 10 anos 15 anos, 20 anos, 25 anos).
- Ao invés de tomar-se uma foto a cada 5 anos, talvez seja mais interessante considerar um conjunto de seis fotos tomadas a 1 ano, 2 anos, 4 anos, 8 anos, 16 anos e 32 anos, uma vez que nos 10 primeiros anos há mudanças mais significativas.
- Isto leva em conta que as diferenças entre as fotografias aos 20 e 25 anos são pequenas, pouco adicionando ao conhecimento.

# *Análise de wavelets* (cont.)

- As *wavelets* podem ser interpretadas como as transformadas lineares locais geradas por um banco de filtros.




Análise em escala linear: (a) Fourier e (b) STFT

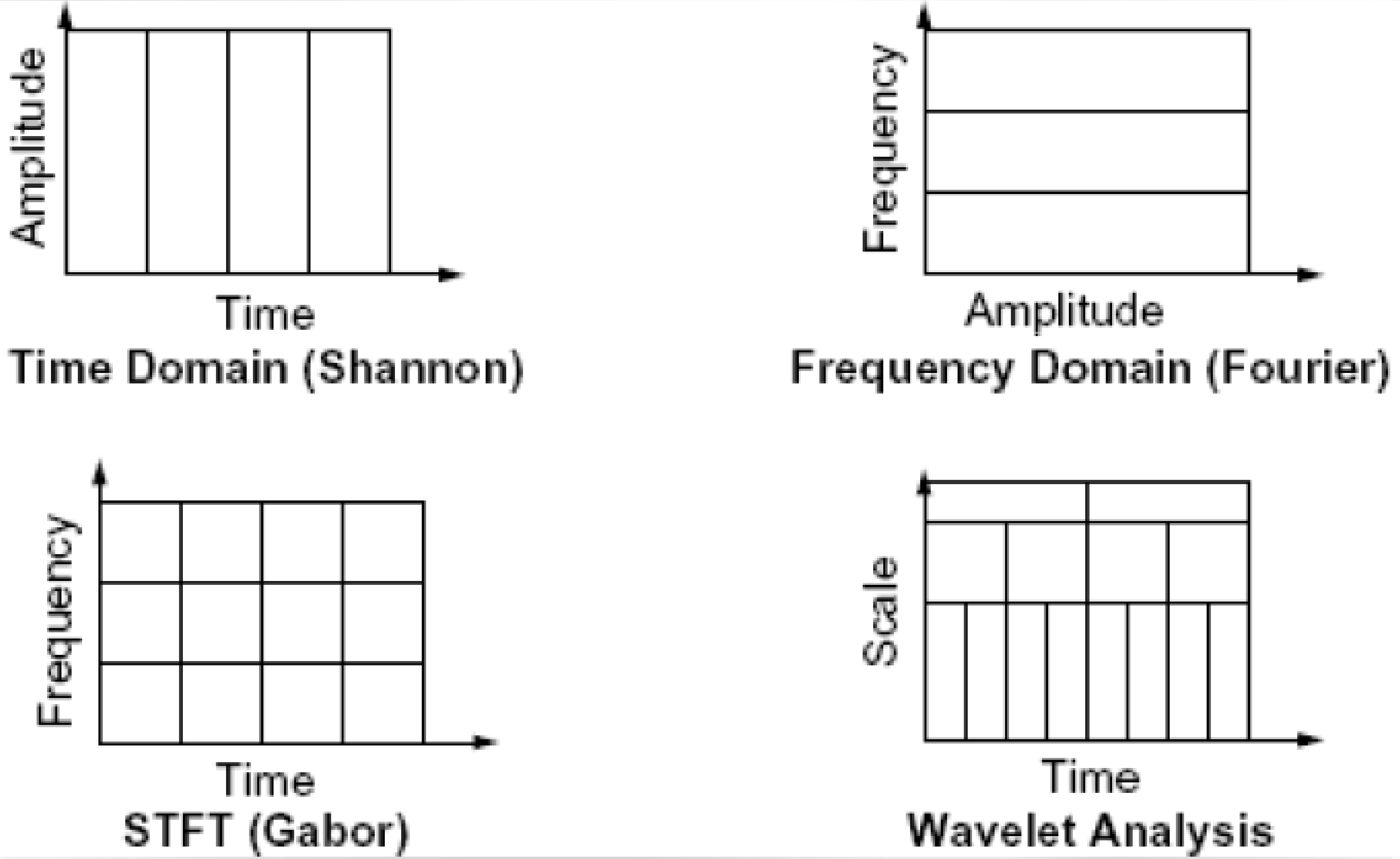
# Análise de wavelets (cont.)

- Ao invés de interpretar os parâmetros nos domínios tempo e frequência ($f$ x $t$), costuma-se utilizar os domínios escala e deslocamento ($a$ x $b$).
- Uma interpretação interessante está associada a lidar com imagens tipo "mapas".
- Uma mudança de escala pode permitir, numa escala maior, ter uma visão mais global, mas com menor precisão.
- Já em uma escala menor, vê-se detalhes, mas perde-se em estudar o comportamento global.

# Exemplo: mapa do Brasil

- O parâmetro de deslocamento permite deslocar o foco da atenção para uma outra parte do mapa.
  - Numa escala 1:15.000.000: ideia do Brasil como um todo
  - Numa escala 1:3.500.000, pode-se analisar globalmente o estado de São Paulo, perdendo-se a noção do Brasil como um todo.
- O que é melhor? Quem já usou mapas sabe que depende fundamentalmente do que se quer investigar!
- A análise via *wavelets* permite visualizar tanto a floresta quanto as árvores.

# Análise de wavelets (cont.)



# Análise de wavelets (cont.)

- Objetivo da Transformada *Wavelet*:
  - Análise local de sinais não estacionários com transitórios e informação de longa duração.
    - ✓ Janelas pequenas para analisar as altas frequências.
    - ✓ Janelas grandes para análise de baixas frequências.

# *Análise de wavelets (cont.)*

- Na **Transformada *Wavelet* Contínua** (CWT), todas as respostas ao impulso no banco de filtros são versões (expandidas ou comprimidas) da mesma *ψ(t)* chamada de ***wavelet* básica**.

- Transformada *Wavelet* Contínua: $CWT(a,\tau) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^{*}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$

$\tau \rightarrow$ parâmetro de translação (localização da *wavelet*)

$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \rightarrow$ fator de normalização da energia (todas as wavelets escaladas têm a mesma energia)

$\psi(t) \rightarrow$ *wavelet* mãe $\qquad \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \rightarrow$ *wavelets* (funções de base)

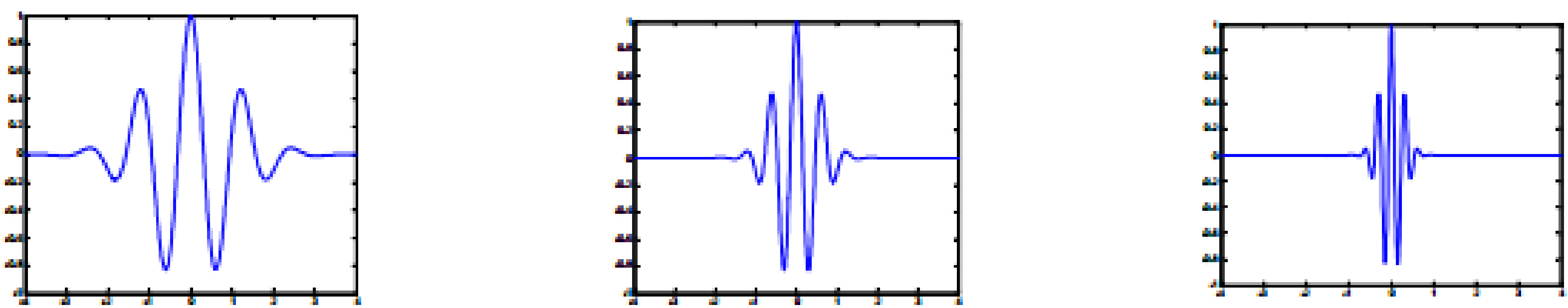
(o * significa conjudado complexo)

$a > 0 \rightarrow$ escala (largura) da *wavelet*

# Análise de wavelets (cont.)

$a > 1 \longrightarrow$ *Wavelet* dilatada

$0 < a < 1 \longrightarrow$ *Wavelet* contraída



# Análise de wavelets (cont.)

- **A função $\psi(t)$ é conhecida como *wavelet mãe.***
  - *Wavelet* mãe: função que analisa o sinal.
  - Todas as janelas são suas versões expandidas ou comprimidas (escaladas) e descoladas.

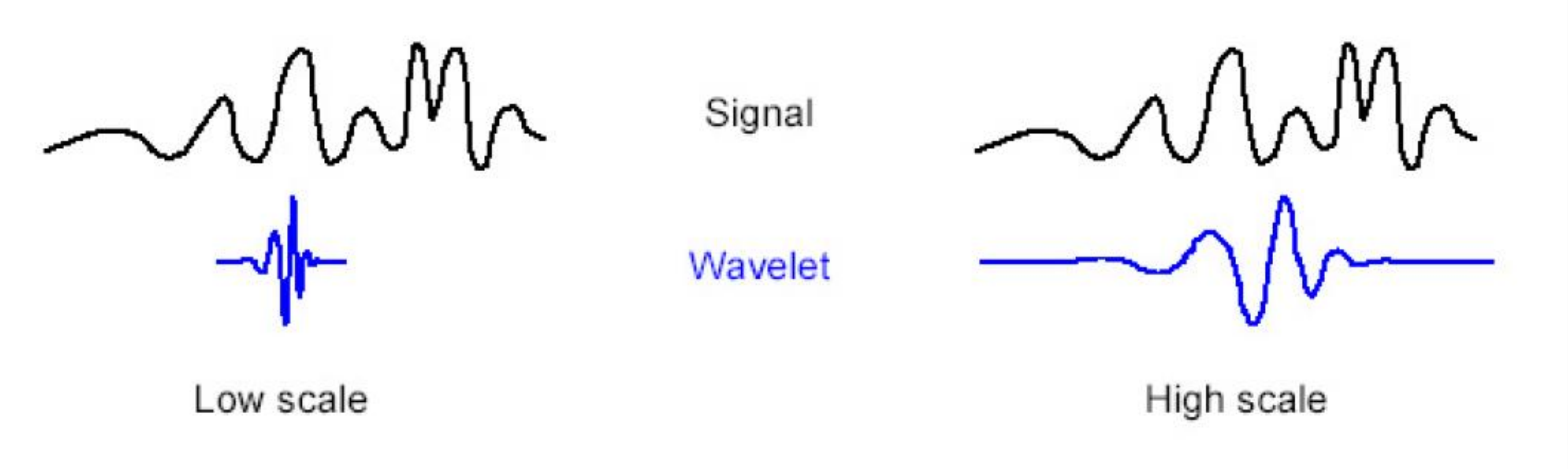
- Uma *wavelet* é uma função com média zero, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$$

- A partir dela geram-se versões modificas no decorrer da transformada.

- Ela é um protótipo para a geração de outras funções janela: versões dilatadas e comprimidas da mesma "*wavelet* mãe".

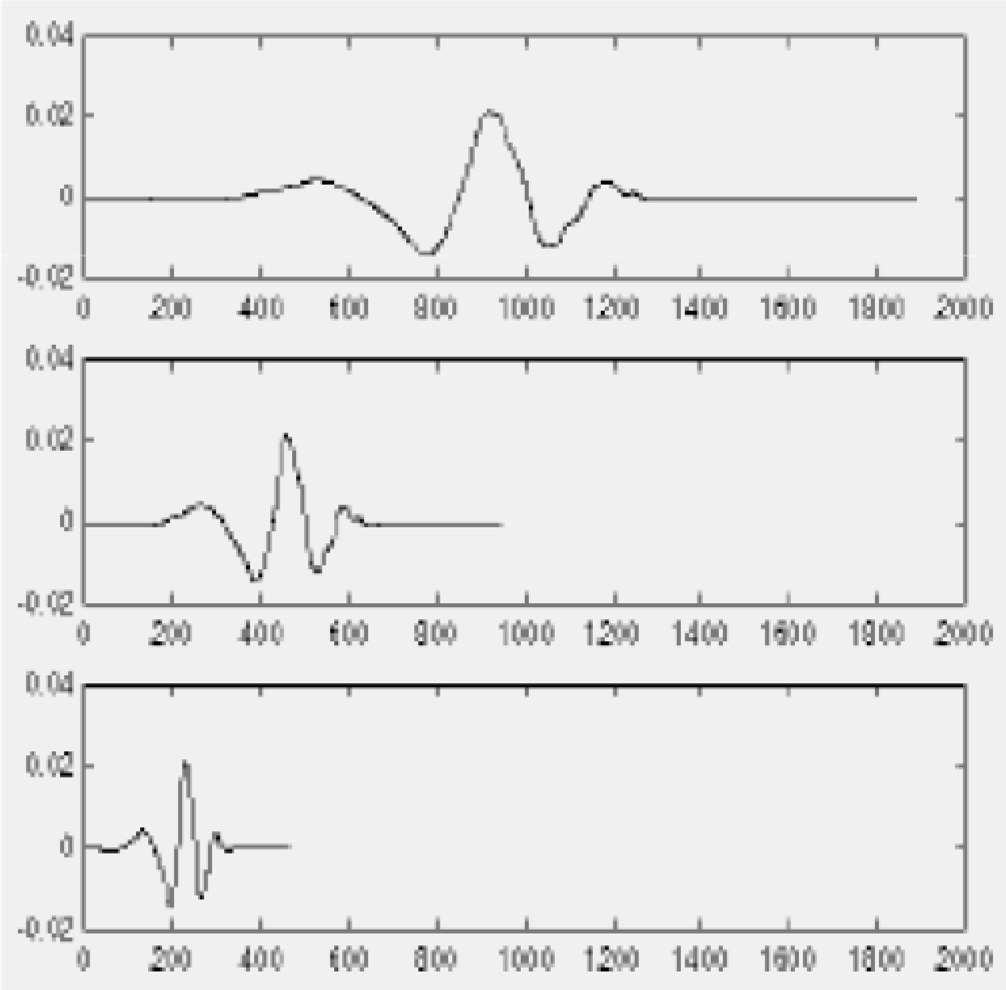
# Escala e Frequência




- Baixo valor de escala *a* ➔ *wavelet* comprimida ➔ detalhes sobre mudanças rápidas no sinal (visão detalhada do sinal) ➔ frequências alta.
- Alto valor de escala *a* ➔ *wavelet* esticada ➔ mudanças lentas, características grosseiras, visão global não detalhada do sinal ➔ frequências baixas.

# Escala e Frequência

- Influência da escala



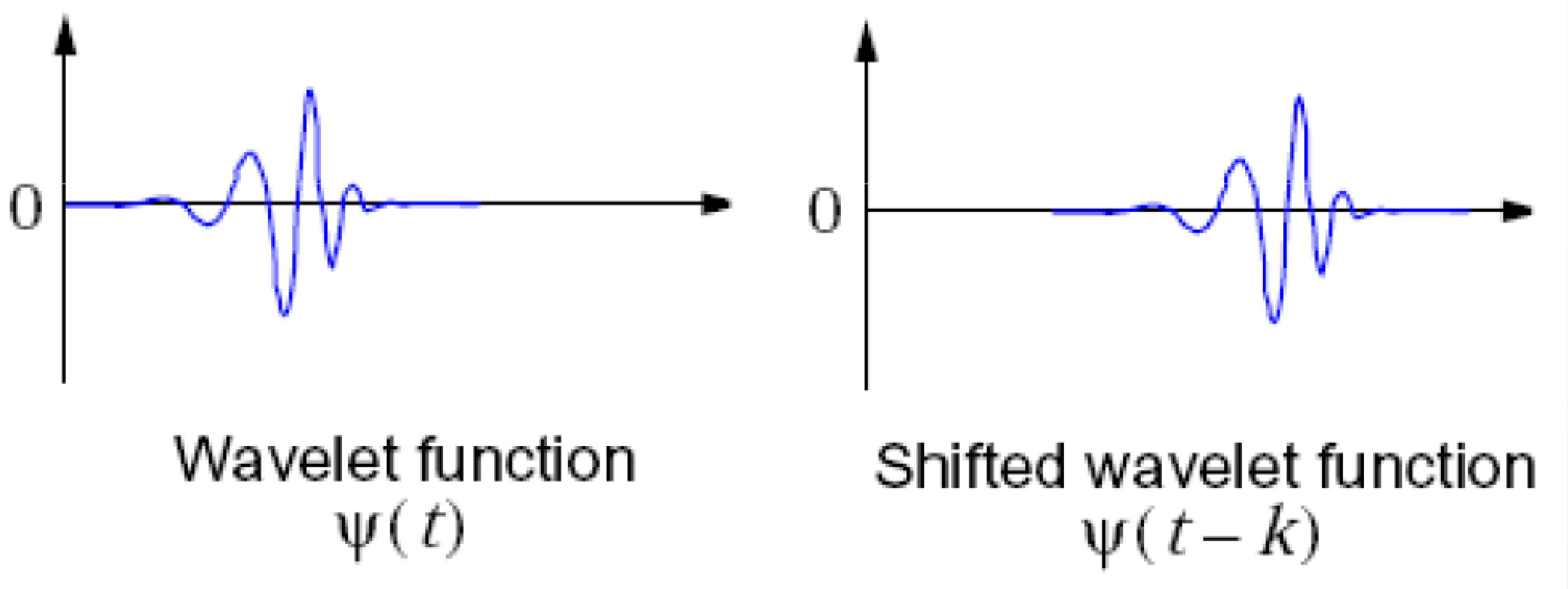

$$f(t) = \psi(t) \quad ; \quad a = 1$$

$$f(t) = \psi(2t) \; ; \quad a = \frac{1}{2}$$

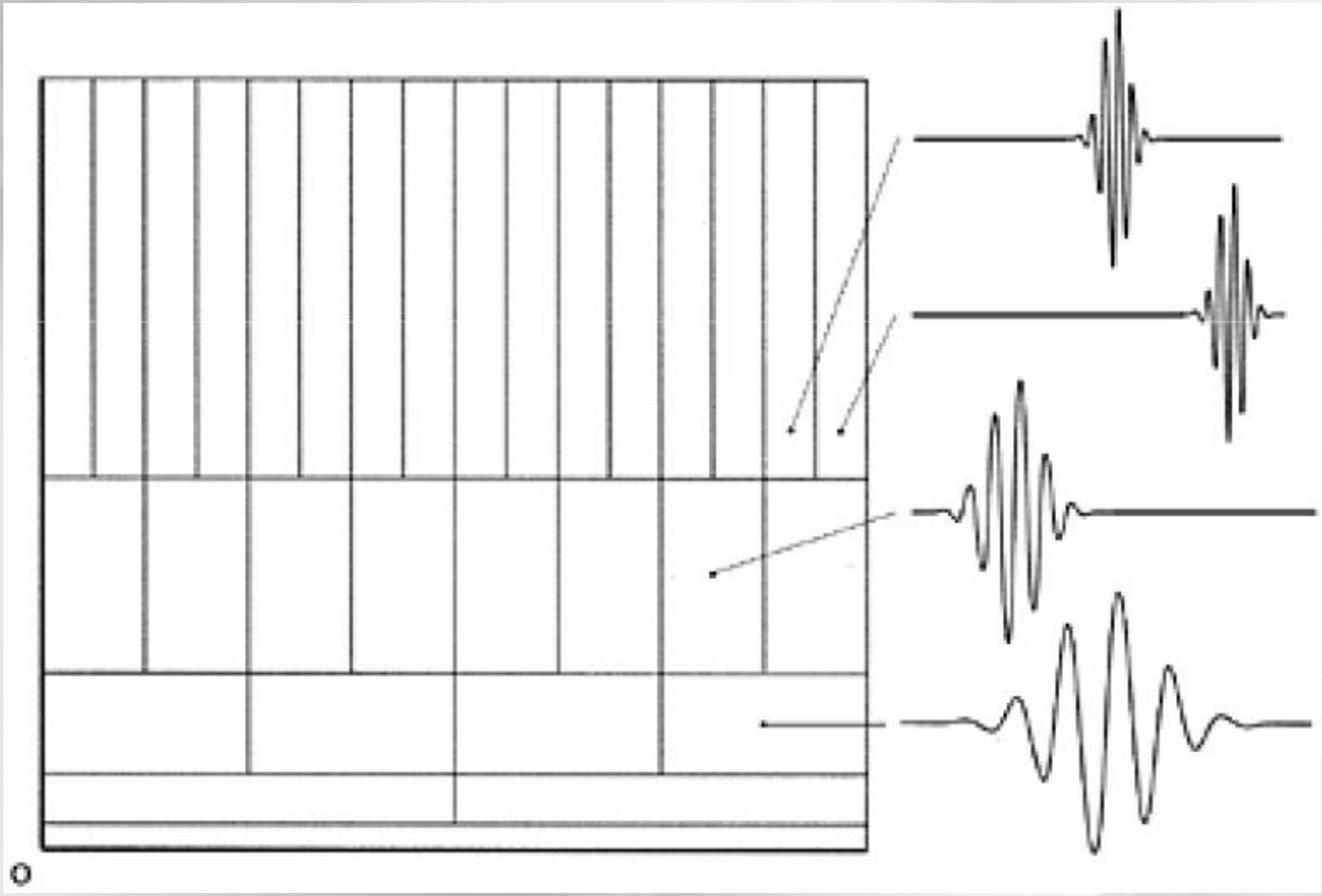
$$f(t) = \psi(4t) \; ; \quad a = \frac{1}{4}$$

# Escala e Frequência

- Influência do deslocamento

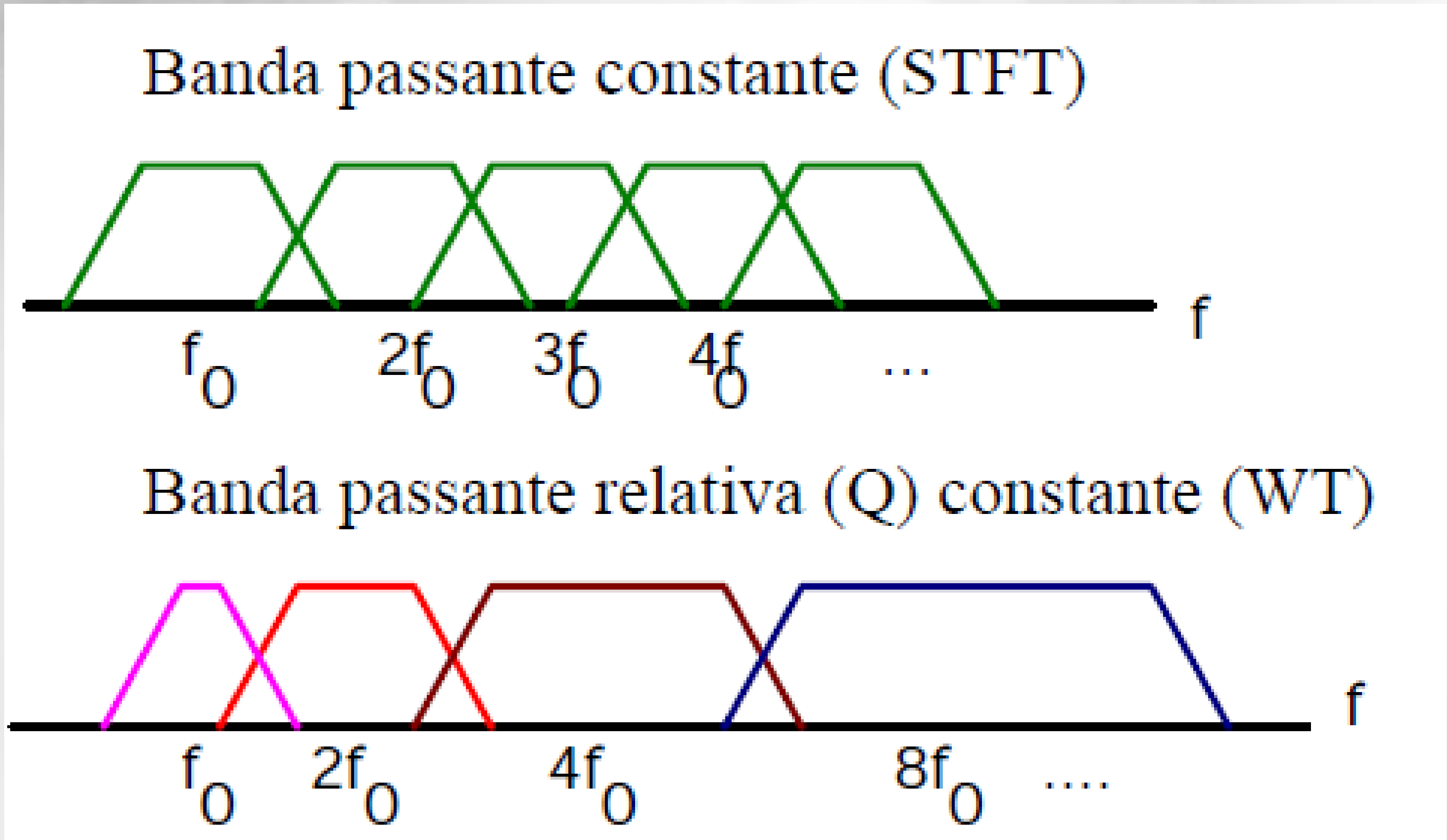


# Escala e Frequência



# Análise de wavelets (cont.)

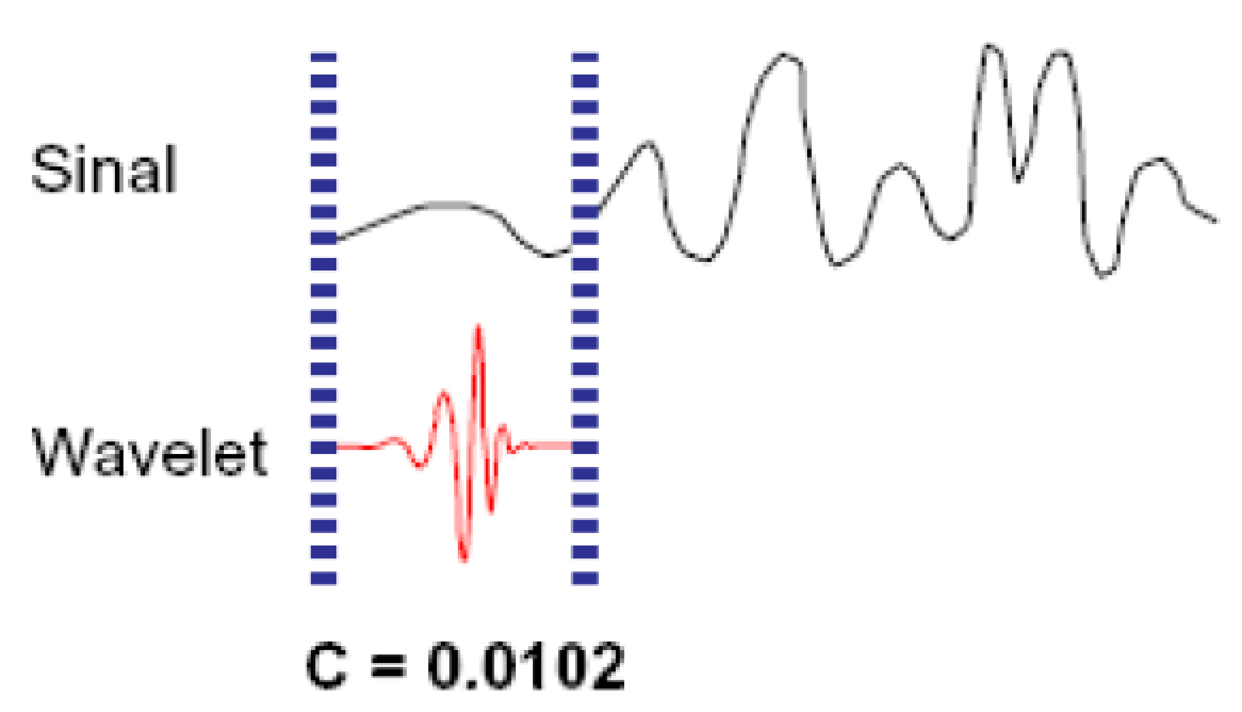
Transformada localizada de Fourier utiliza janelas com dimensão fixa.




Transformada de *Wavelet* utiliza janelas com dimensão variável.

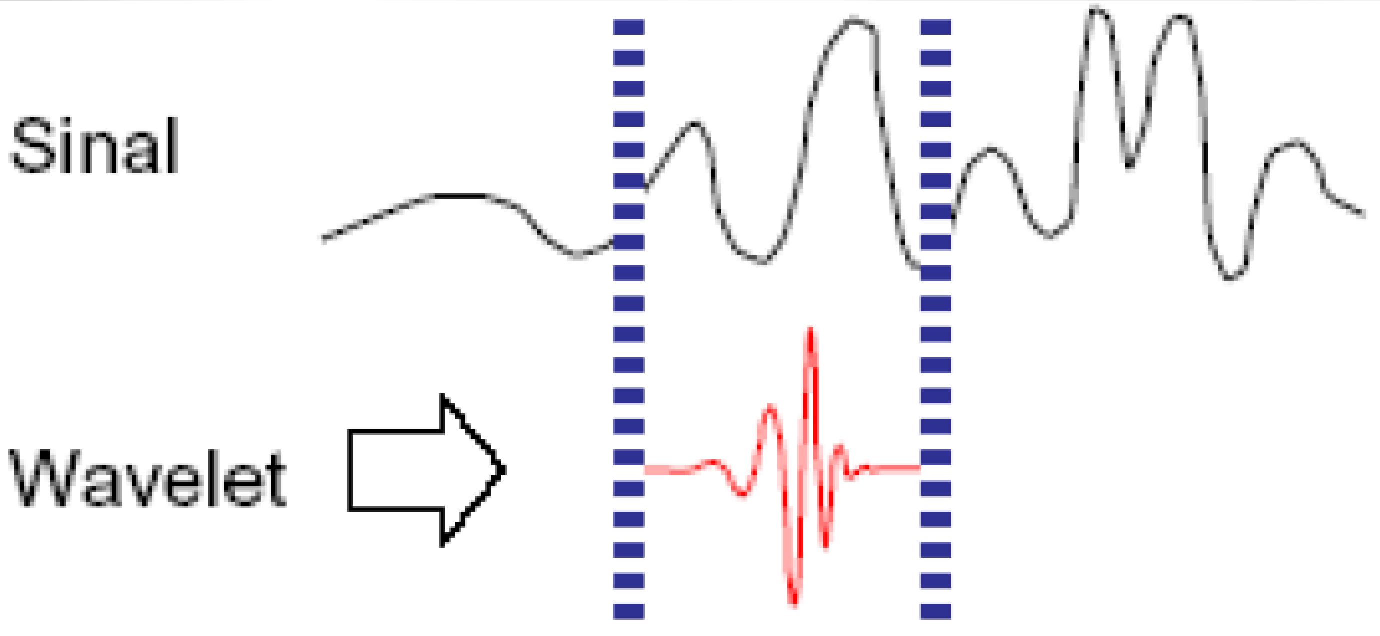
# Transformada Wavelet

1. Escolha uma *wavelet* e compare-a com uma região no início do sinal.
2. Calcule o número *C* que representa quão proximamente correlacionada a *wavelet* está com esta seção do sinal.



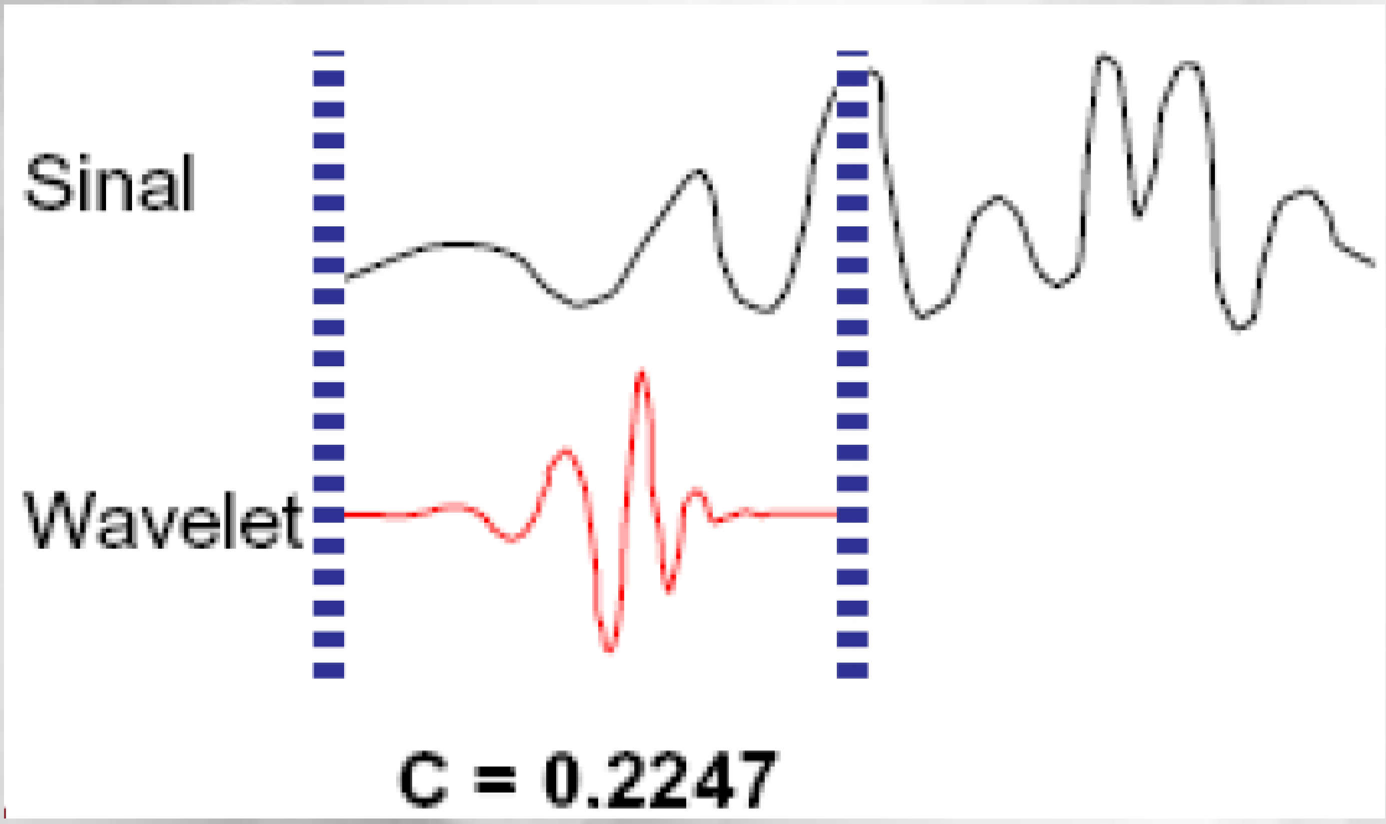
# Transformada Wavelet (cont.)

3. Desloque a *wavelet* para a direita e repita os passos 1 e 2 até que todo o sinal tenha sido coberto.



# Transformada Wavelet (cont.)

4. Escale (estique) a *wavelet* e repita os passos de 1 a 3




5. Repita as etapas de 1 a 4 para todas as escalas desejadas.

# Transformada Wavelet (cont.)

- Quando for concluído, você terá todos os coeficientes produzidos em diferentes escalas e diferentes seções do sinal.

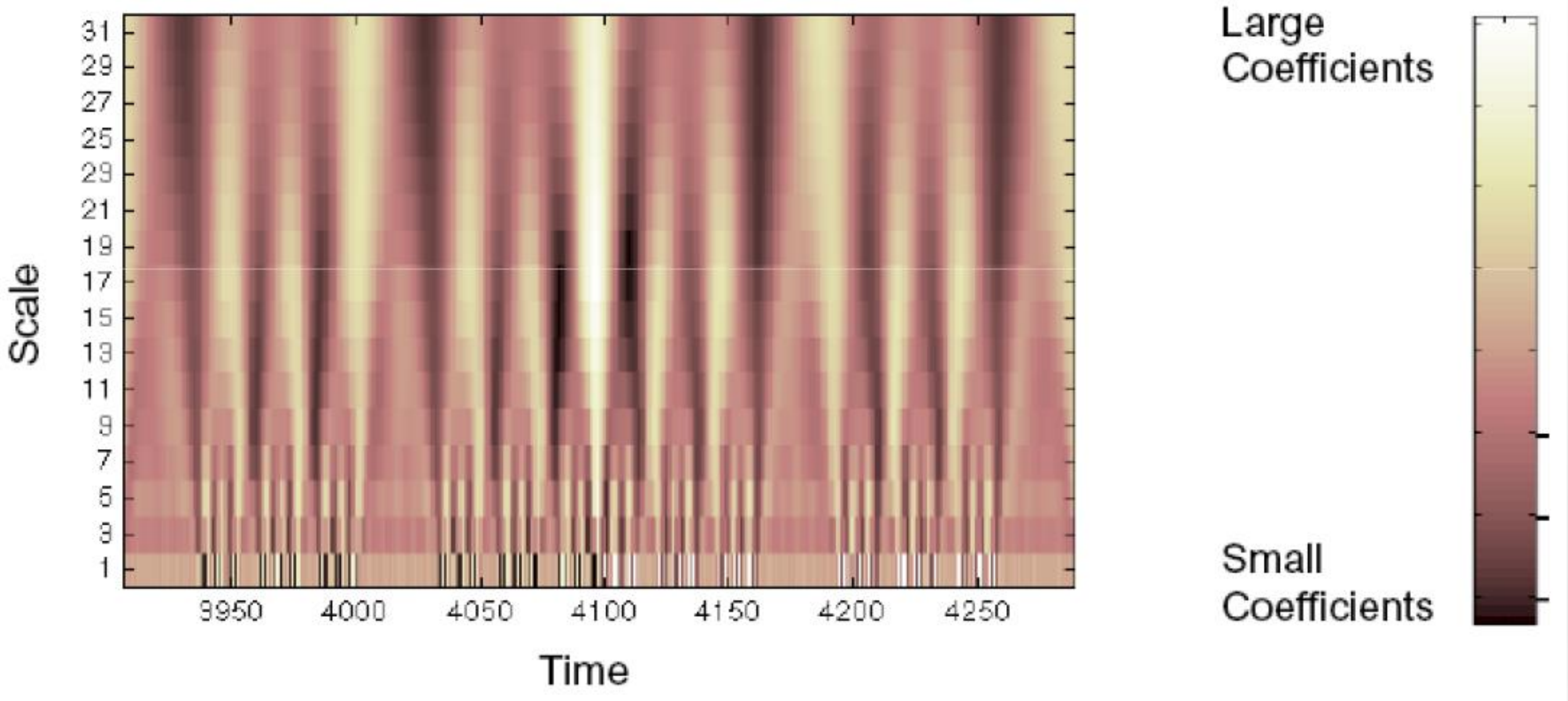
- O que fazer com essas informações?

# Transformada Wavelet (cont.)

- Quando for concluído, você terá todos os coeficientes produzidos em diferentes escalas e diferentes seções do sinal.
- O que fazer com essas informações?
- Podemos avaliar qual escala de *wavelet* apresenta maior coeficiente de correlação para cada parte do sinal indicando qual a melhor escala a ser utilizada para avaliar as frequências em cada parte do sinal.

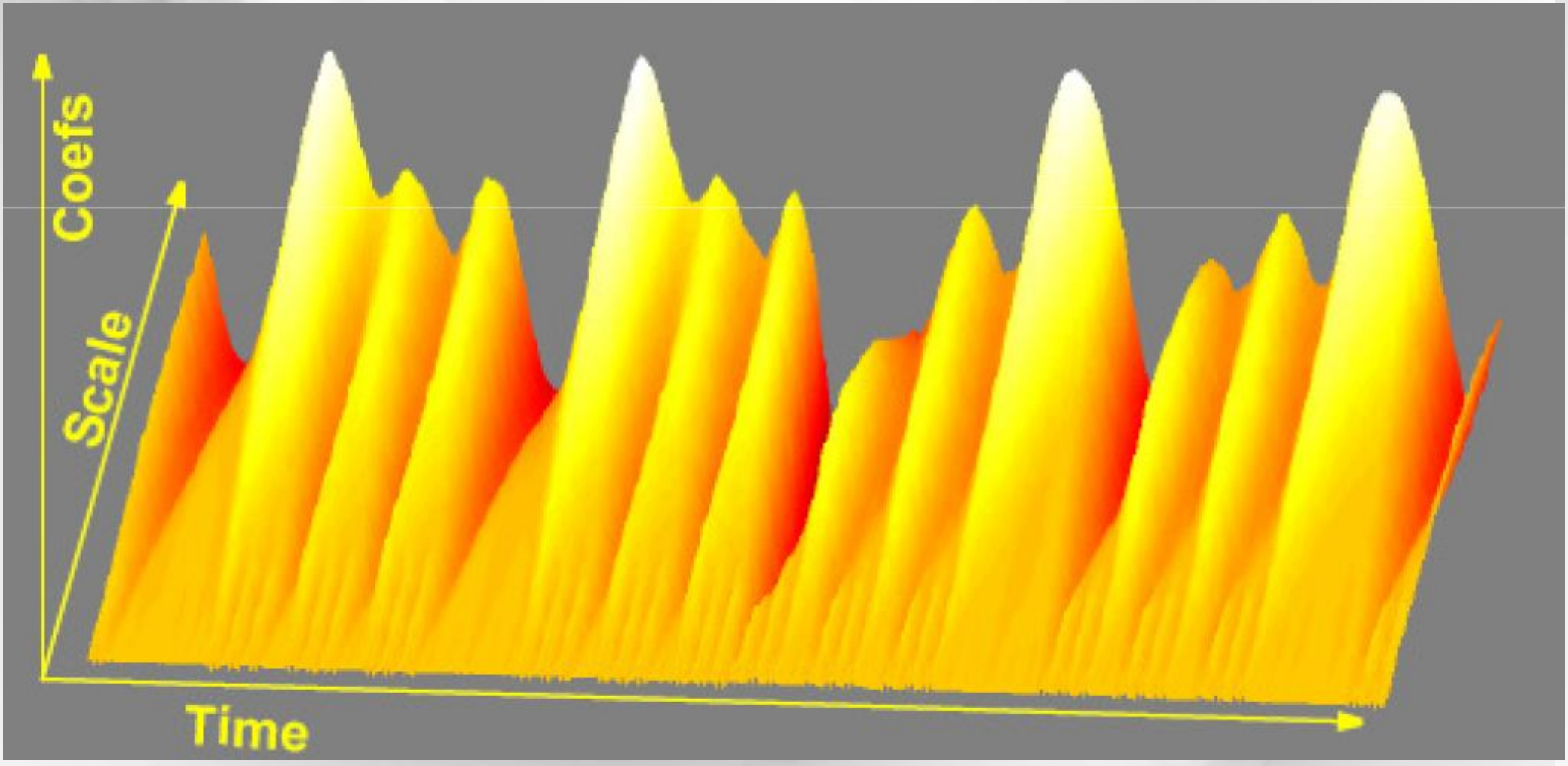
# Transformada Wavelet (cont.)

- Um gráfico é plotado em que *x* representa a posição ao longo do sinal (tempo), *y* representa a escala e a cor em cada ponto (*x*,*y*) representa a magnitude do coeficiente da *wavelet*.



# Transformada Wavelet (cont.)

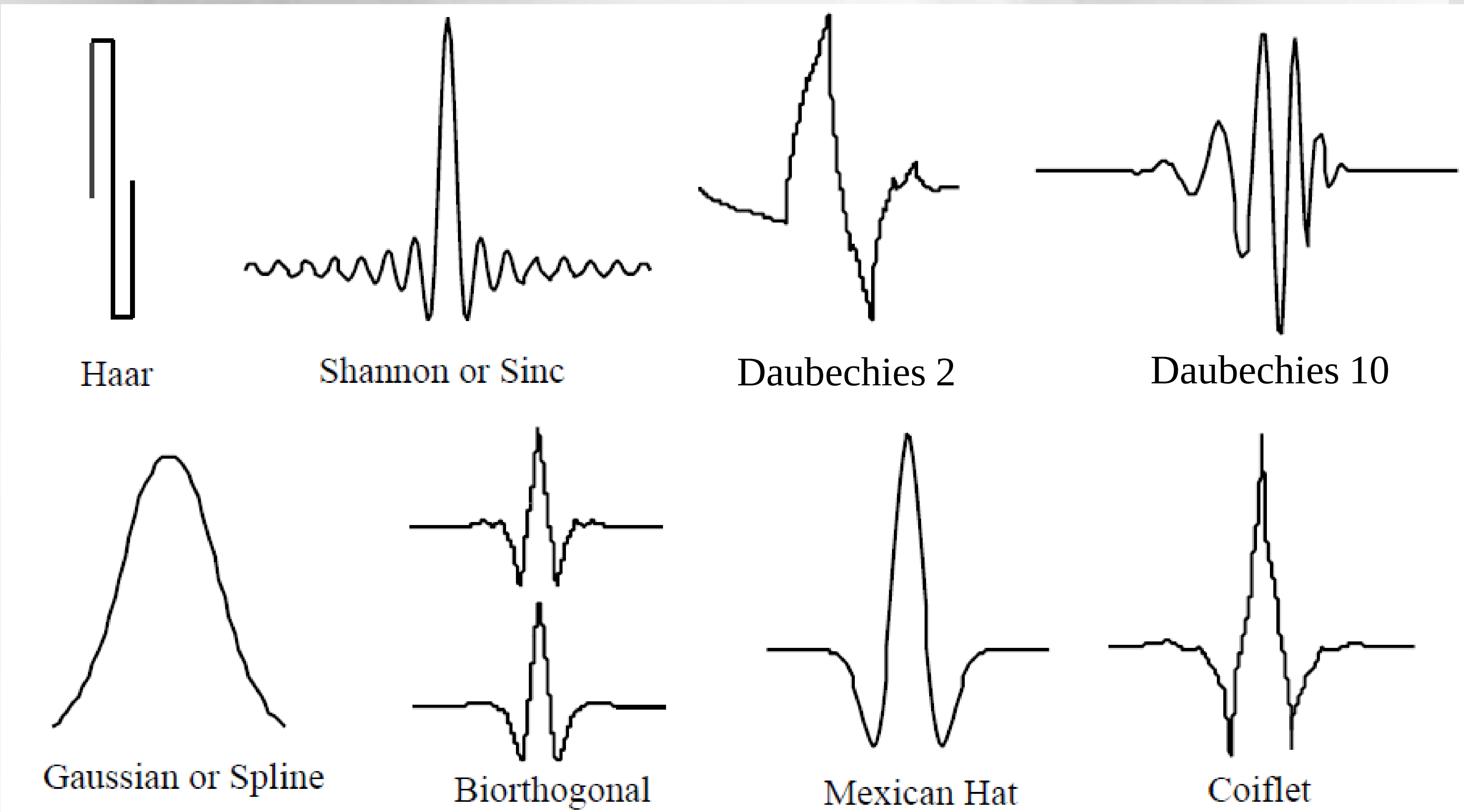
- De uma visão em perspectiva teríamos:



# Funções wavelets mãe

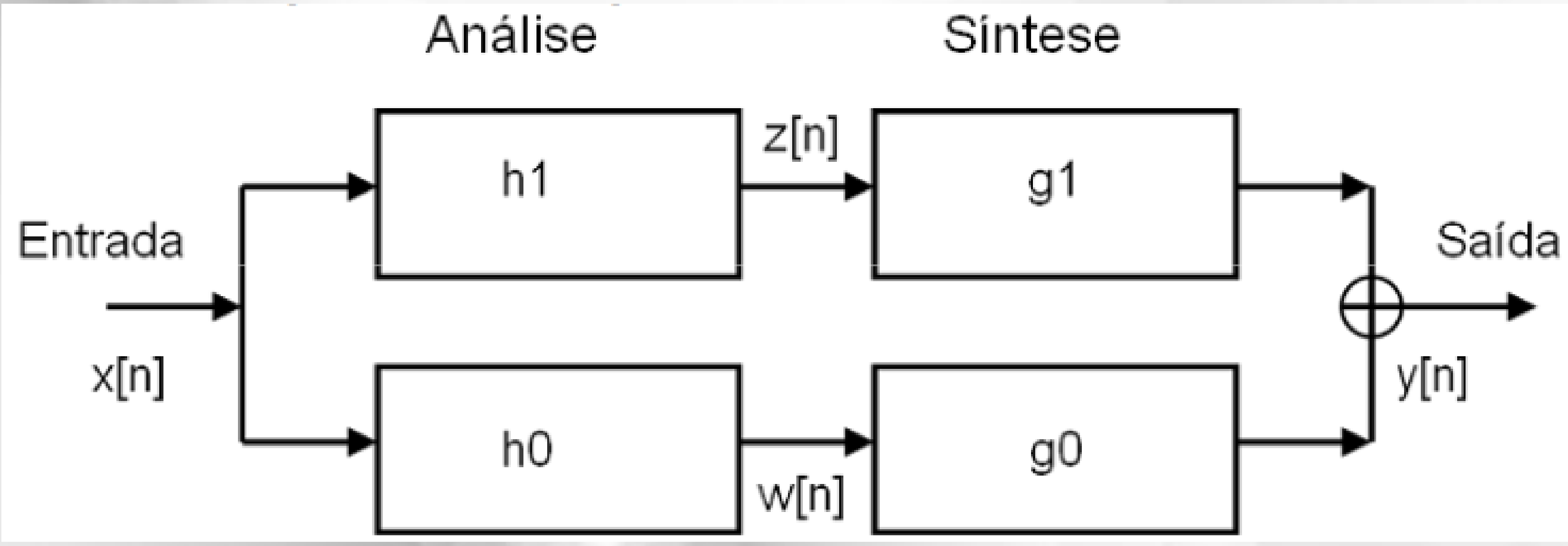
- Ex. de funções que podem ser eleitas como *wavelets* mãe.
  - 'haar‘ Haar wavelet.
  - 'db' Daubechies wavelets.
  - 'sym' Symlets.
  - 'coif‘ Coiflets.
  - 'bior' Biorthogonal wavelets.
  - 'meyr' Meyer wavelet.
  - 'gaus' Gaussian wavelets.
  - 'mexh‘ Mexican hat wavelet.
  - 'morl' Morlet wavelet.
  - 'cgau' Complex Gaussian wavelets.
  - 'fbsp' Frequency B-Spline wavelets.
  - 'rbio' Reverse biorthogonal wavelets.
  - 'dmey' Discrete approximation of Meyer wavelet.
  - 'shan‘ Shannon wavelets.
  - 'deO' de Oliveira wavelets.
  - 'legd‘ Legendre wavelets.
  - 'mth‘ Mathieu wavelets.
  - 'cmor' Complex Morlet wavelets.

# Funções wavelets mãe (cont.)



# Sobre os Coeficientes das wavelets

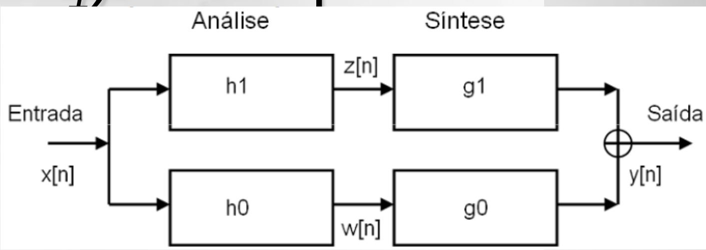
- Para demonstrar uma transformada geral, vamos usar o esquema apresentado abaixo:




- Nela, um sinal de entrada alimenta dois canais, cada qual com um par de filtro. Tal estrutura é chamada de **two-channel filter banks.**

# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

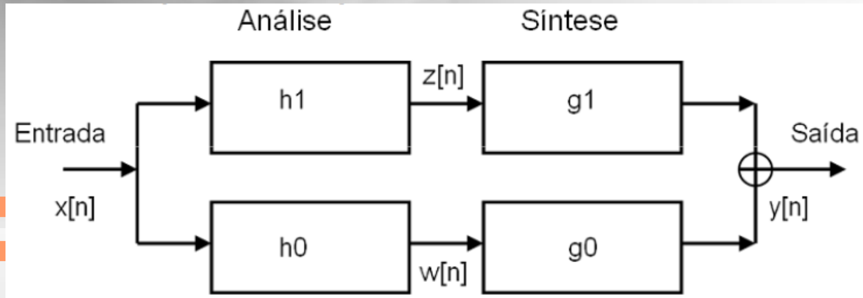
- A metade da esquerda da figura (filtros $h_0$ e $h_1$) corresponde à transformada direta
  - Análise




- A metade da direita é a transformada inversa
  - Síntese
- É esperado que a síntese gere um sinal de saída igual ou muito próximo ao sinal de entrada.
- Os filtros complementares de banco de filtros ($h_0$ para $h_1$ e $g_0$ para $g_1$) dividem o sinal em sub-sinais de baixa e alta frequência
- Isso é chamado de *subband coding*.

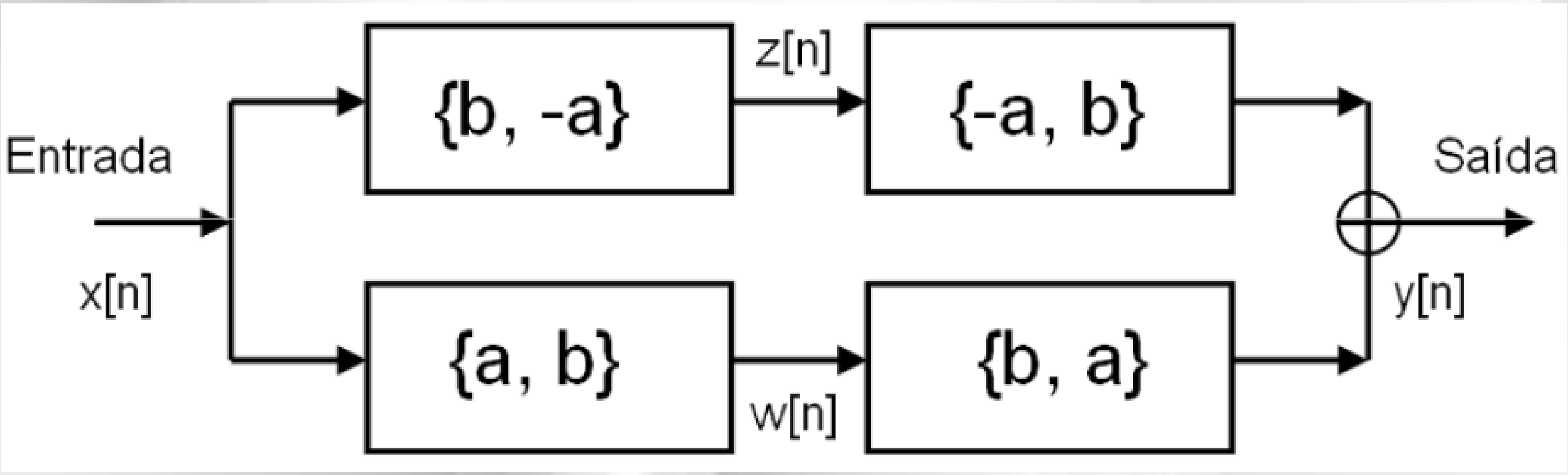
# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

- Para a transformada inversa, as saídas dos filtros da parte de análise (*z[n]* e *w[n]*) passam por outros filtros e, em seguida, são combinadas para gerar a saída *y[n]*.
- A ideia é que *w[n]* e *z[n]* sejam versões transformadas de x[n] e que *y[n]* seja o sinal após a transformada inversa.
- Como dito anteriormente, espera-se que *y[n]* seja igual a *x[n]*.



# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

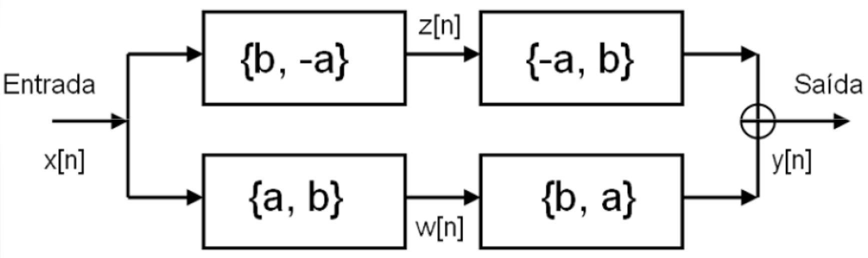
- Vamos considerar o *filter bank* da figura abaixo e vamos ver como se comportam *w[n]* e *z[n]*:




- Na parte da análise, *w[n]* e *z[n]* são definidos por:
  - $w[n] = a.x[n] + b.x[n-1]$
  - $z[n] = b.x[n] - a.x[n-1]$

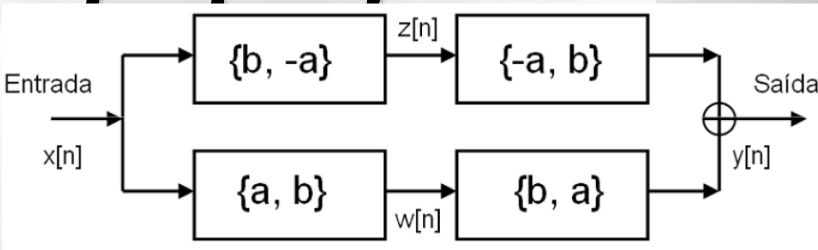
# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

- Precisamos saber também quem são *w[n – 1]* e *z[n – 1]*:
  - *w[n - 1] = a.x[n - 1] + b.x[n – 2]*
  - *z[n - 1] = b.x[n - 1] – a.x[n – 2]*



# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

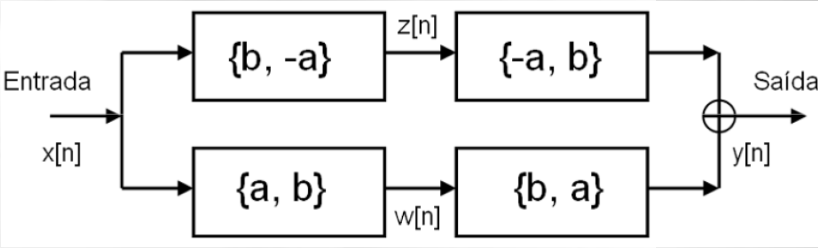
- Precisamos saber também quem são *w[n – 1]* e *z[n – 1]*:
  - $w[n-1] = a.x[n-1] + b.x[n-2]$
  - $z[n-1] = b.x[n-1] - a.x[n-2]$




- Assim, *y[n]* será:
  - $y[n] = -a.z[n] + b.z[n-1] + b.w[n] + a.w[n-1]$

# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

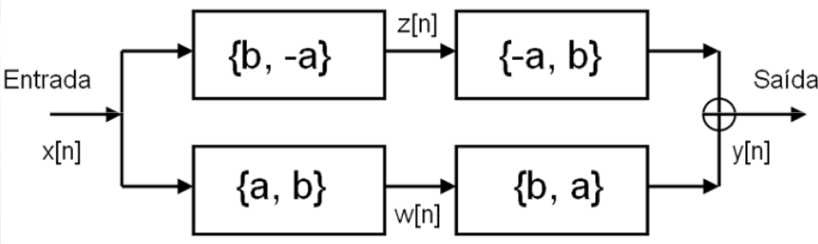
- Precisamos saber também quem são $w[n-1]$ e $z[n-1]$:
  - $w[n-1] = a.x[n-1] + b.x[n-2]$
  - $z[n-1] = b.x[n-1] - a.x[n-2]$




- Assim, $y[n]$ será:
  - $y[n] = -a.z[n] + b.z[n-1] + b.w[n] + a.w[n-1]$
- E, em relação ao sinal original:
  - $y[n] = -a.(b.x[n] - a.x[n-1]) + b.(b.x[n-1] - a.x[n-2]) + b.(a.x[n] + b.x[n-1]) + a.(a.x[n-1] + b.x[n-2])$

# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

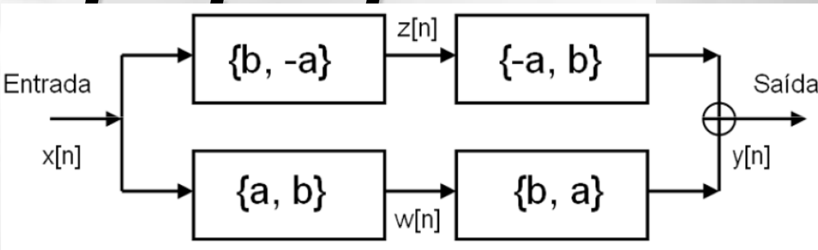
- Precisamos saber também quem são w[n – 1] e *z[n – 1]*:
  - *w[n - 1] = a.x[n - 1] + b.x[n – 2]*
  - *z[n - 1] = b.x[n - 1] – a.x[n – 2]*




- Assim, *y[n]* será:
  - *y[n] = -a.z[n] + b.z[n – 1] + b.w[n] + a.w[n – 1]*
- E, em relação ao sinal original:
  - *y[n] = -a.(b.x[n] – a.x[n – 1]) + b.(b.x[n - 1] – a.x[n – 2]) + b.( a.x[n] + b.x[n – 1]) + a.(a.x[n - 1] + b.x[n – 2])*
  - *y[n] = -a.b.x[n] + a.a.x[n – 1] + b.b.x[n - 1] – ba.x[n – 2] + b.a.x[n] + b.b.x[n – 1] + a.a.x[n - 1] + a.b.x[n – 2]*

# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

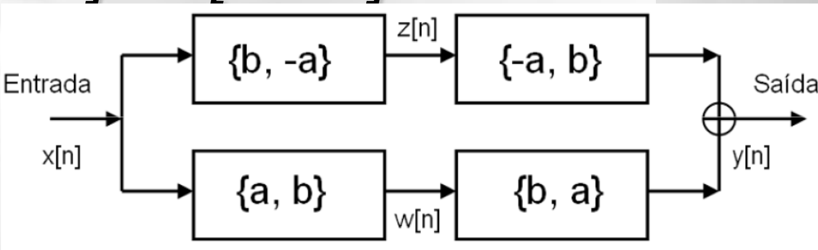
- Precisamos saber também quem *são* $w[n-1]$ e $z[n-1]$:
  - $w[n - 1] = a.x[n - 1] + b.x[n - 2]$
  - $z[n - 1] = b.x[n - 1] - a.x[n - 2]$




- Assim, *y[n]* será:
  - $y[n] = -a.z[n] + b.z[n-1] + b.w[n] + a.w[n-1]$
- E, em relação ao sinal original:
  - $y[n] = -a.(b.x[n] - a.x[n-1]) + b.(b.x[n - 1] - a.x[n-2]) + b.( a.x[n] + b.x[n-1]) + a.(a.x[n - 1] + b.x[n-2])$
  - $y[n] = -a.b.x[n] + a.a.x[n-1] + b.b.x[n - 1] - ba.x[n-2] + b.a.x[n] + b.b.x[n-1] + a.a.x[n - 1] + a.b.x[n-2]$
  - $y[n] = aa.x[n-1] + bb.x[n-1] + bb.x[n-1] + aa.x[n-1]$

# Sobre os Coeficientes das wavelets (cont.)

- Precisamos saber também quem são *w[n – 1]* e *z[n – 1]*:
  - $w[n - 1] = a.x[n - 1] + b.x[n – 2]$
  - $z[n - 1] = b.x[n - 1] – a.x[n – 2]$




- Assim, *y[n]* será:
  - $y[n] = -a.z[n] + b.z[n – 1] + b.w[n] + a.w[n – 1]$
- E, em relação ao sinal original:
  - $y[n] = -a.(b.x[n] – a.x[n – 1]) + b.(b.x[n - 1] – a.x[n – 2]) + b.( a.x[n] + b.x[n – 1]) + a.(a.x[n - 1] + b.x[n – 2])$
  - $y[n] = -a.b.x[n] + a.a.x[n – 1] + b.b.x[n - 1] – ba.x[n – 2] + b.a.x[n] + b.b.x[n – 1] + a.a.x[n - 1] + a.b.x[n – 2]$
  - $y[n] = aa.x[n–1] + bb.x[n–1] + bb.x[n–1] + aa.x[n–1]$
  - $y[n] = (2aa + 2bb).x[n–1]$

# Sobre os Coeficientes das *wavelets* (cont.)

- Essas operações retratam o processamento da wavelet de Haar.
- Essa é a mais simples das *wavelets.*
- Se escolhermos com cuidado os coeficientes, teremos a transformada de Haar.
- Por exemplo, se:

$$2aa + 2bb = 1$$

então

$$y[n] = x[n - 1]$$

ou seja, a saída é a entrada com um retardo de 1.

# Sobre os Coeficientes das *wavelets* (cont.)

- Se procurarmos *a* e *b* tal que:

$$aa + bb = 1$$

podemos ter $aa = ½$ e $bb = ½$

- Assim, se $a = b = 1/\sqrt{2}$ , teremos os coeficientes da transformada de Haar.

# *Wavelet de Haar*

- *Wavelets* correspondentes às bases caixas é dada por:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

sendo que a *wavelet* mãe é escalada no ponto (0,0) como:

$$\psi_{0,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad 0 \le t < 1/2 \\ -1 & \text{para} \quad 1/2 \le t < 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

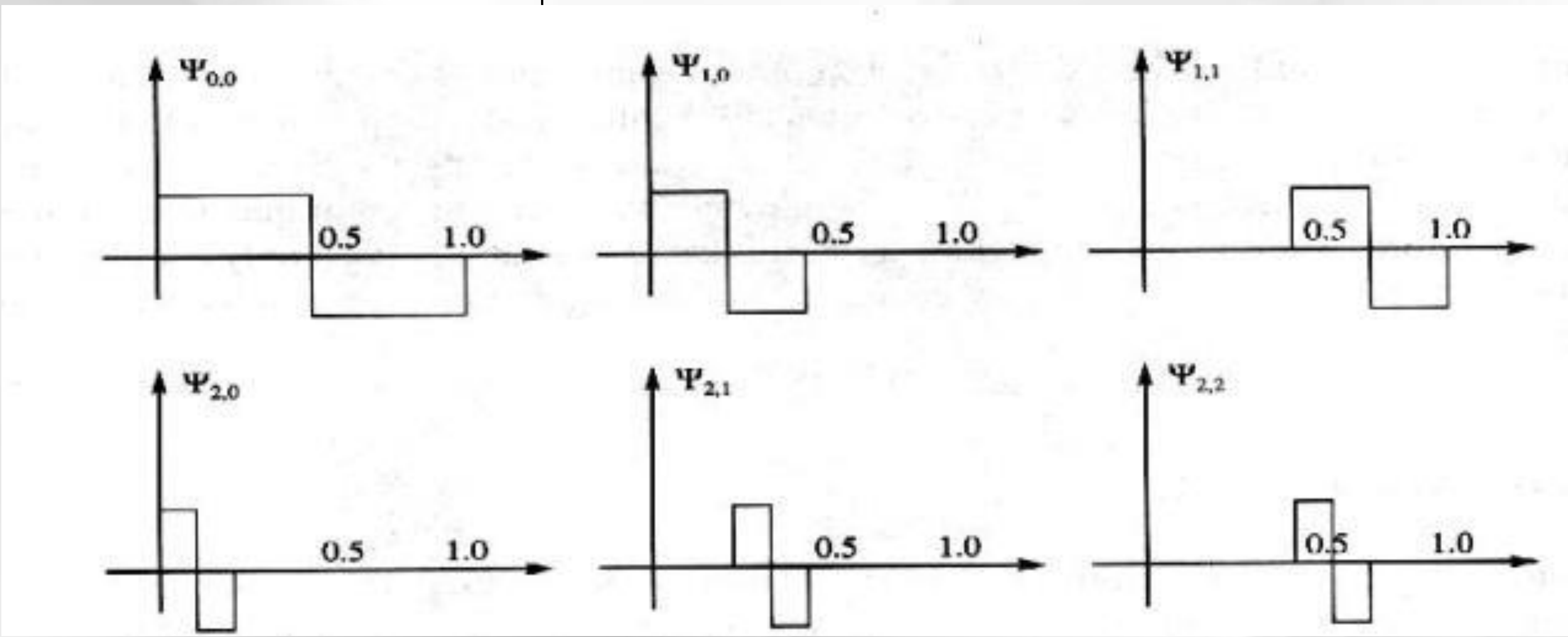
e suas *wavelets*-filhas, decompostas como:

$$\psi_{j,k}(t) = \psi_{0,0}(2^j t - k) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad k2^{-j} \le t < (k + 1/2) \\ -1 & \text{para} \quad (k + 1/2)2^{-j} \le t < (k+1)2^{-j} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

# Wavelet de Haar

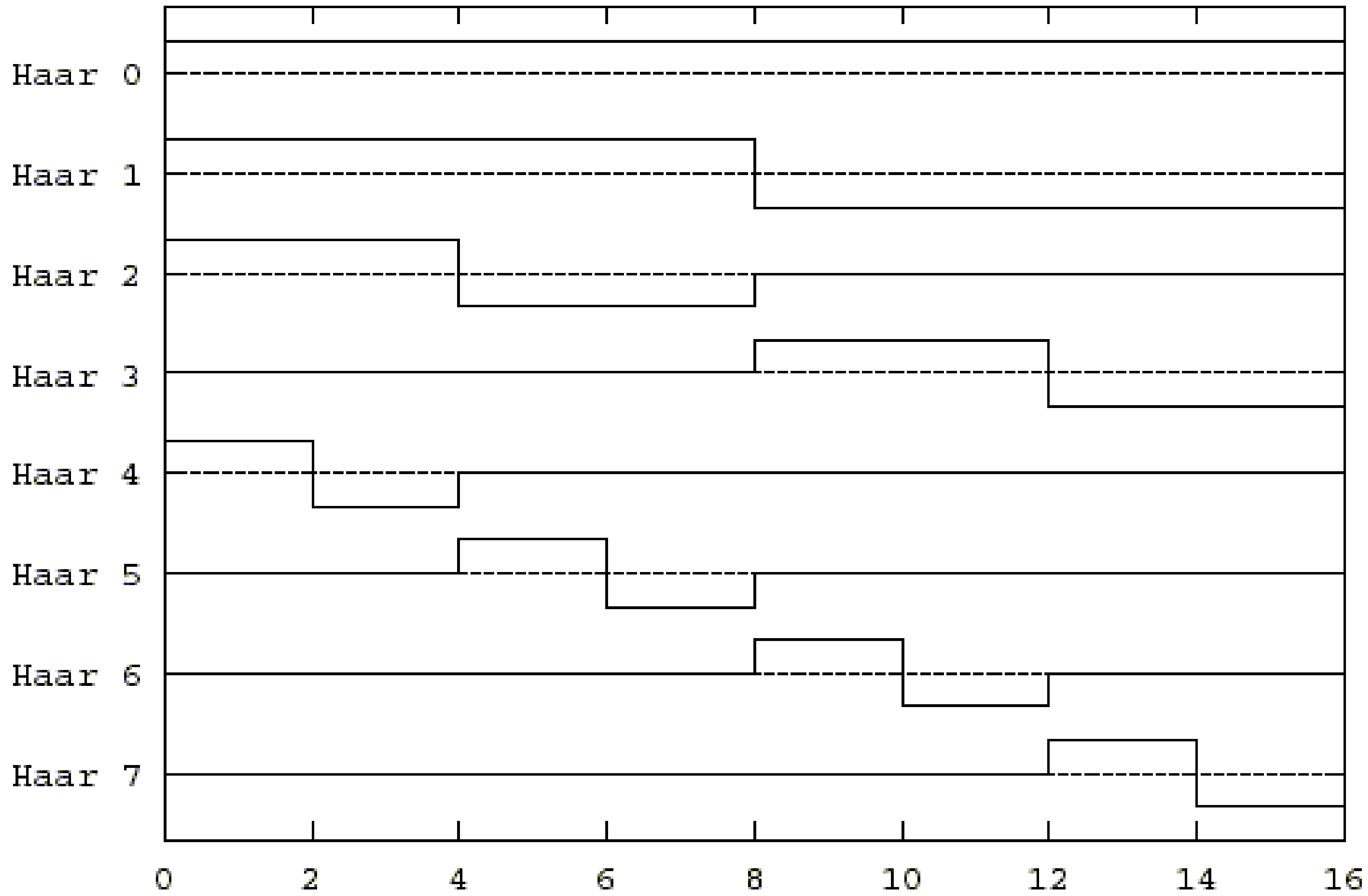
- Efeito dos índices: a figura abaixo mostra como ocorre a variação dos índices de escala e localização para a wavelet Haar.

$$\Psi_{j,k}(t) = \Psi_{0,0}(2^j t - k) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad k2^{-j} \le t < (k+\tfrac{1}{2})2^{-j} \\ -1 & \text{para} \quad (k+\tfrac{1}{2})2^{-j} \le t < (k+1)2^{-j} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$




- Índice j varia entre 1 e 2, apresentando a variação da largura da onda (efeito da escala), enquanto o índice k altera a posição da onda no eixo x (efeito de translação).

# Wavelet de Haar (cont.)



# Exemplo de Haar 1-D

- Sinal unidimensional:

  7 5 2 8 9 5 3 3

- Faz-se um sinal com menor resolução pela aplicação de uma média par a par sobre o sinal anterior. Sinal resultante:

  6 5 7 3

- Observa-se uma excessiva perda de informações nesta operação de média.

# Exemplo de Haar 1-D

- Essas informações perdidas são fundamentais para uma posterior recuperação do sinal original.

- Para essa recuperação faz-se necessário o armazenamento dos *coeficientes de detalhes* originários do processo de média.
  - Os *coeficientes* são obtidos armazenando-se os valores das diferenças entre o valor médio e os valores dos pixels envolvidos nesse cálculo.
  - Ex. para o 1º. par do exemplo anterior: 7 e 5 (média = 6).
  - 6 + 1 = 7 e 6 - 1 = 5.
    - ✓ Portanto o **coeficiente de detalhe** necessário para a recuperação dos dados originais (primeiro par) tem o valor 1.
  - Segundo par: 2 e 8 (média 5)
    - ✓ **Coeficiente de detalhe** (-3) pois 5 + (-3) = 2 e 5 - (-3) = 8.

# Exemplo de Haar 1-D (cont.)

| Resolução | Médias | Coeficientes de detalhes |
|---|---|---|
| 8 | 7 5 2 8 9 5 3 3 | |
| 4 | 6 5 7 3 | 1 -3 2 0 |
| 2 | 5,5 5 | 0,5 2 |
| 1 | 5,25 | 0,25 |

Processo de decomposição por Wavelets em várias resoluções

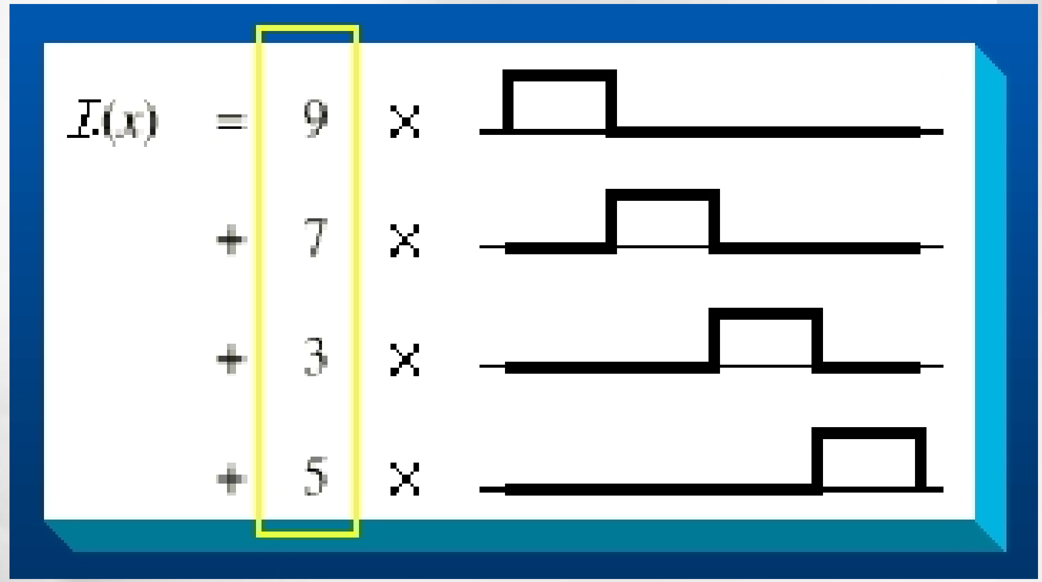
- A Transformada *Wavelet* (decomposição *Wavelet*) do sinal 7 5 2 8 9 5 3 3 baseada na *wavelet* de Haar é dada pela sequência de números reais:

  5.25 0.25 0.5 2 1 -3 2 0.

- Aqui, para facilitar o entendimento, não consideramos a normalização da energia. Na aplicação da TW, ela deve ser considerado.

# Exemplo de Haar 1-D *(cont.)*

- Uma representação mais gráfica para o vetor [9 7 3 5]:




Transf. Haar nível 1: cada linha na matriz representa um sinal na figura ao lado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Médias ponderadas (tendência do sinal)

Flutuações do sinal

# Exemplo de Haar 1-D *(cont.)*

- Nível 2:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}8\\ 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}6\\ 2\end{pmatrix}$$

- Assim, a TW final para Haar 1-D ficará

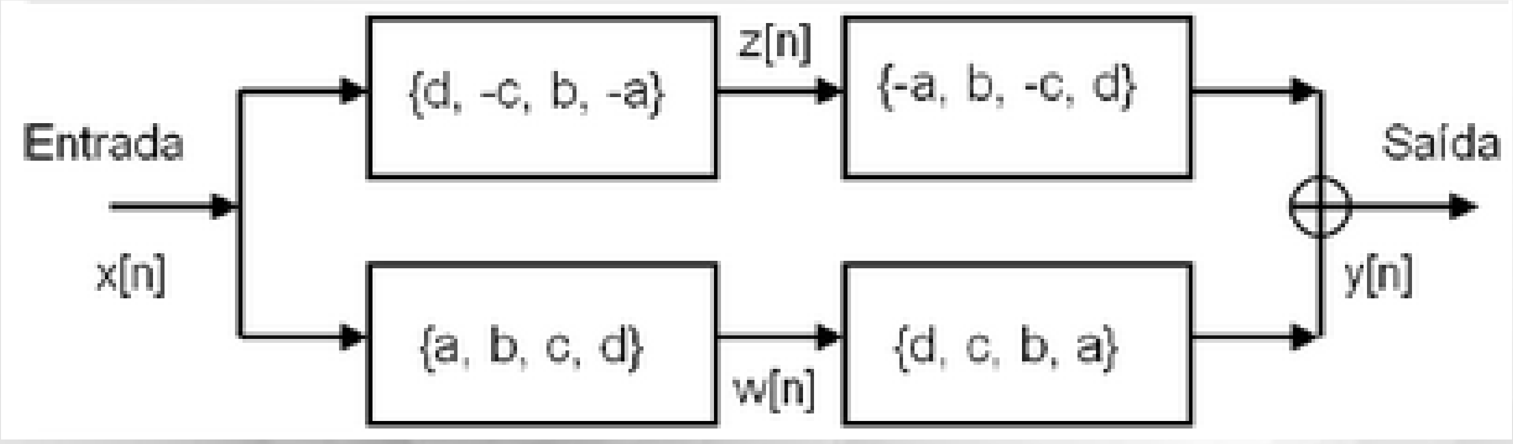
$$[6*2 \quad 2*2 \quad 1*\sqrt{2} \quad -1*\sqrt{2}]=[12 \quad 4 \quad \sqrt{2} \quad -\sqrt{2}]$$

# Implementando Wavelet Haar Multiresolução

- O procedimento descrito anteriormente para transformada Haar de nível 1 pode ser repetido múltiplas vezes.
- Aplica-se recursivamente a transformada ao sinal resultante da transformada anterior para obter transformadas em níveis maiores.
- As flutuações não devem ser alteradas e continuam a dividir a média ponderada apenas.

# *Exercício*

- Faça o processamento de um sinal usando uma *wavelet* de 4 coeficientes e o filtro conforme mostrado na figura abaixo. Considere que a.c = - b.d



# Wavelet de Daubechies

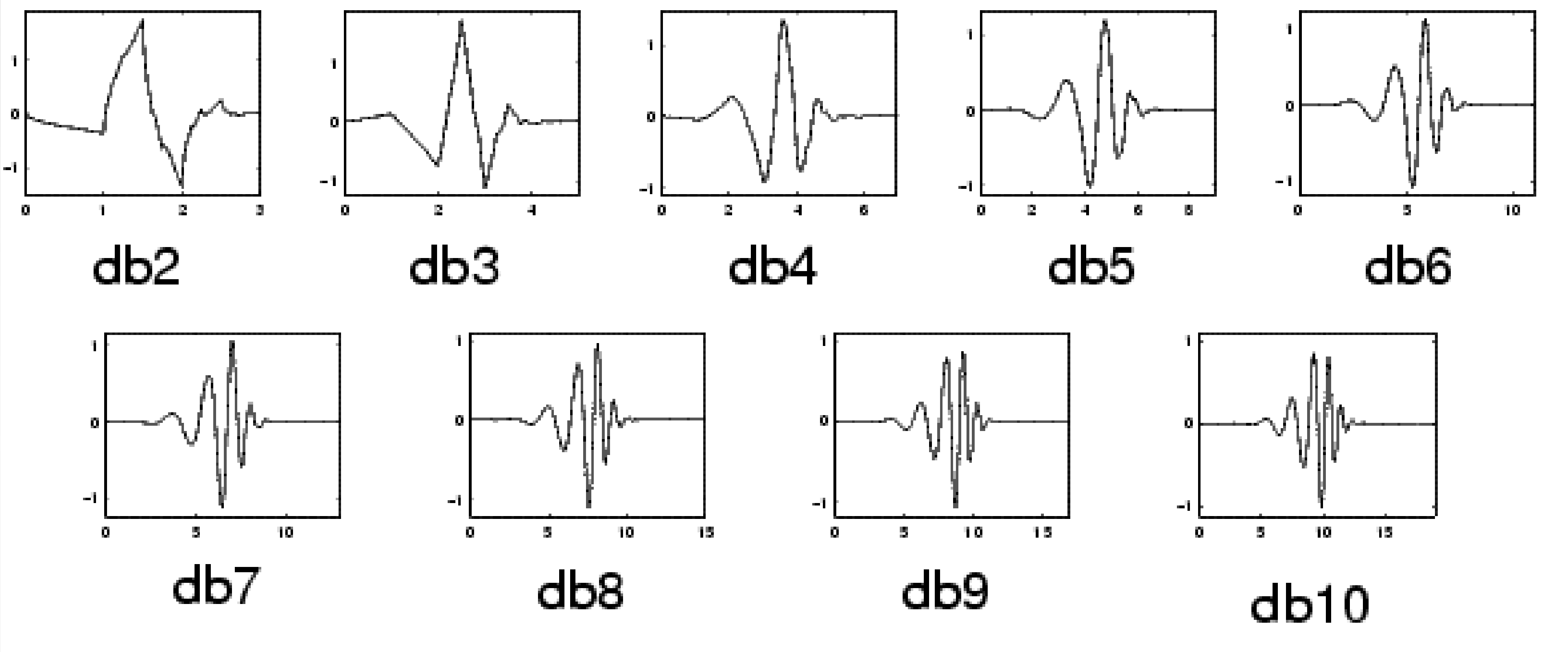
- *Wavelets* de Haar são de suporte compacto, porém não são diferenciáveis (não apresentam suavidade).
- Um dos maiores desafios da teoria de *wavelets* foi a construção de uma família de *wavelets* de suporte compacto.
- Um das famílias de *wavelets* mais utilizadas é a família das *Daubechies*.
- Criada por Ingrid Daubechies, a família das *wavelets* Daubechies (ou db) é a única família de *wavelets* que tem suporte compacto e decaimento suave.
  - Suporte compacto impede que a *wavelet* se espalhe por todo o espectro.
  - Decaimento suave impede que a *wavelet* introduza artefatos de altas frequências.

# *Wavelet de Daubechies*

- A regularidade das wavelets de Daubechies aumenta linearmente com N, porém a preço de aumentar o comprimento do suporte.

- Família Daubechies - várias *wavelets* diferentes; Não existe uma expressão explicita para defini-las, exceto para a primeira (DB1) que é a *wavelet* de Haar.

# Wavelet de Daubechies *(cont.)*




- Interessante observar que a *wavelet*-mãe db2 exibe um formato característico de "*cauda de tubarão*".

# *Wavelet* de Daubechies *(cont.)*

- São utilizadas duas *wavelets*: *ϕ(x)* e *ψ(x)*, denominadas, respectivamente de *wavelets* pai e *wavelet* mãe.

- As *wavelets* mãe são utilizadas para determinar os detalhes de um sinal e a informação de tendência é armazenada nos coeficientes obtidos pelas *wavelets* pai.

# Wavelet de Daubechies (cont.)

- A análise de multiresolução da tendência e flutuação de uma função é implementada mediante sua convolução com um filtro passa-baixa e um filtro passa-alta.

- As TW de Daubechies preservam mais a informação de tendência nos sinais quando considerados apenas a parte do filtro passa-baixa.

# *Wavelet de Daubechies (cont.)*

- Exemplo de *wavelet* de Daubechies-4:

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right\} \Rightarrow$$ filtro passa-baixa

$$\left\{ \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right\} \Rightarrow$$ filtro passa-alta

# Análise em Multiresolução

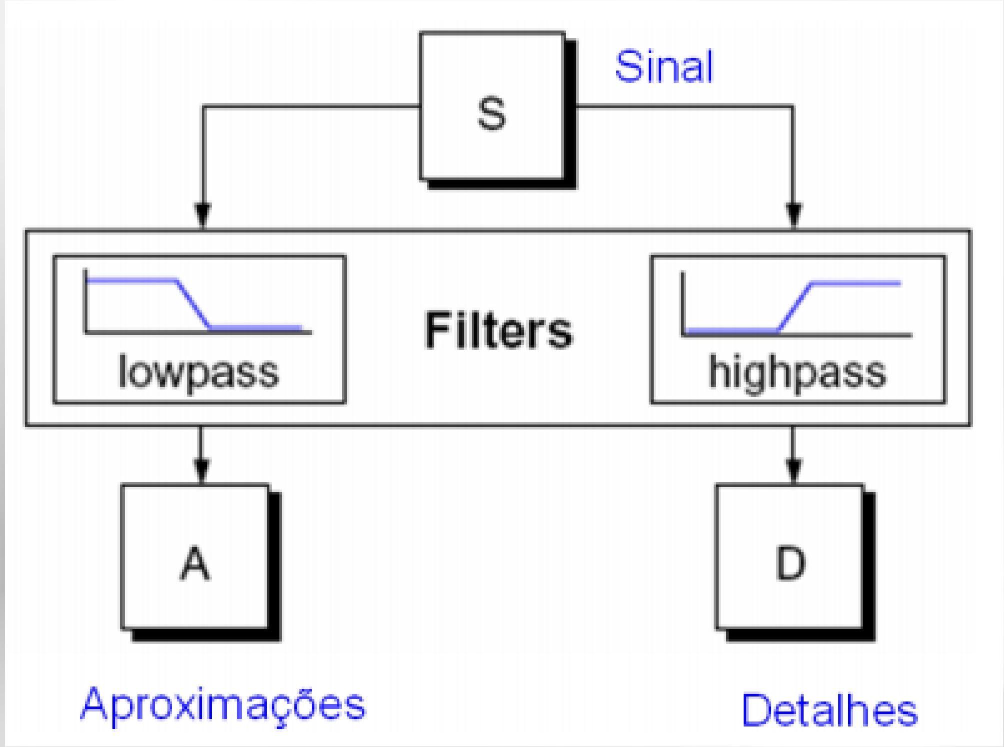
- A intenção inicial da transformada *wavelet* é poder observar um sinal em suas diferentes frequências.

- Na maioria dos casos, as informações de baixa frequência são as mais importantes.

- Sendo assim, um sinal pode ser dividido em duas partes:
  - Aproximações: componentes de alta escala e baixa frequência do sinal.
  - Detalhes: componentes de pequena escala e alta frequência do sinal.

# Análise em Multiresolução (cont.)

- Esta divisão nada mais é do que a divisão de um sinal em baixas e altas frequências, o que pode ser facilmente conseguido com o uso de filtros passa-baixa e passa-alta.



# Fontes

- Slides
  - Prof. Hélio Magalhães de Oliveira – UFPE
  - Prof. Carlos Alexandre Mello – UFPE

- Referências

  - de Oliveira, H. M. *Wavelets – Entrando na Onda*, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE, 2002.
  - Van Dorngelen, W. *Signal Processing for Neuroscientists*, Elsevier, 2007.