Curso: Bacharelado em Ciência da Computação

Disciplina: Processamento de Imagens

Jean Baptiste Joseph **Fourier** (1768-1830), francês.

Conteúdo dos Slides:

- Conceitos básicos sobre Transformada de Fourier (FT), Transformada rápida de Fourier (FFT) e FFT em imagens

Profa. Regina Célia Coelho

Definição de Transformada de Fourier

- É uma transformada integral que expressa uma função em termos de funções de base senoidais, i.e., como soma ou integral de funções senoidais multiplicadas por coeficientes ("amplitudes").

- É basicamente a representação do sinal pela sua decomposição em termos senoidais

- Para sinais periódicos essa decomposição é chamada de **Série de Fourier**.

Definição *(cont.)*

- Para sinais não periódicos, essa decomposição é chamada de **Transformada de Fourier**.

- Desta forma, dizemos que o sinal está representado no domínio da frequência.

- Utilidade da Transformada de Fourier:

  - Remover frequências indesejáveis;

  - Melhorar o desempenho de algumas operações sobre sinais.

Transformada Discreta de Fourier

- O fato de utilizar um número infinito de amostras no domínio do tempo e, consequentemente, um número infinito de pontos no domínio da frequência, representa um problema para implementação da TF na prática.

- A Transformada de Fourier Discreta (DFT) utiliza um número finito de pontos no domínio do tempo e define uma representação discreta do sinal no domínio da frequência.

Transformada Discreta de Fourier

- A Transformada Discreta de Fourier (DTF) foi desenvolvida tentando aproximar o máximo possível da FT contínua, porém não são idênticas, uma vez que a DFT utiliza apenas somatórios finitos em suas evoluções.

- Alguns algoritmos para calcular a DFT são muito eficientes.
  - Um algoritmo importante é chamado de FFT porque calcula a DFT quando o tamanho N da sequência é uma potência de 2.

Transformada Rápida de Fourier

- É uma extensão da DFT, porém seu cálculo é muito mais rápido.

- Embora a DFT tenha considerável vantagem sobre a FT, ela requer multiplicações complexas (número de multiplicações igual ao quadrado do número de amostras).

- Para reduzir significantemente os requisitos computacionais da DFT é que surgiu a FFT (*Fast Fourier Transform*).

FFT (cont.)

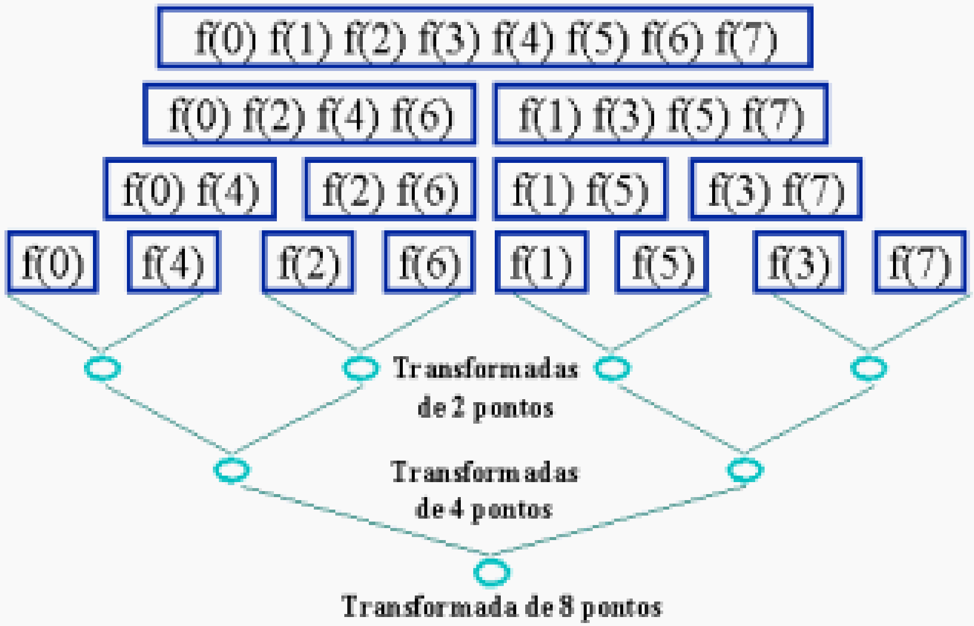
- O nome FFT origina-se do método de calcular uma transformada de dois pontos a partir de duas transformadas de um ponto, uma transformada de quatro pontos a partir de duas transformadas de dois pontos, e assim sucessivamente, para qualquer *N* que seja uma potência inteira de dois.

FFT (cont.)

- O ponto principal a ser considerado é que os dados de entrada têm que ser arranjados na ordem requerida para aplicações sucessivas das equações F_{par} e $F_{ímpar}$.

FFT (cont.)

- Exemplo
  - Vamos analisar uma FFT de 8 pontos f(0), f(1), f(2) , f(3) , f(4) , f(5) , f(6) , f(7).
  - Para calcular as partes par e ímpar precisamos primeiro separar os pontos de entrada em dois grupos
    - f(0), f(2), f(4), f(6) (par) e f(1), f(3), f(5), f(7) (ímpar)
  - Estes por sua vez devem ser separados também em suas partes par e ímpar.
  - A seqüência completa é a seguinte



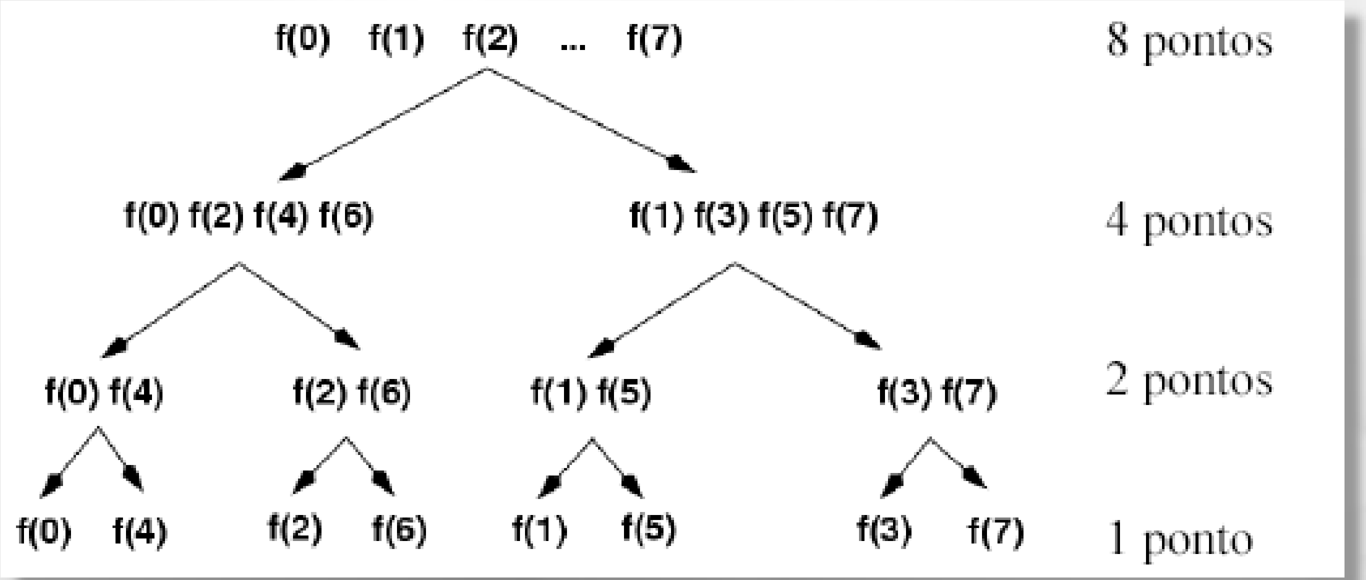
Para executar o algoritmo, os pontos de f(x) devem ser **reordenados** antes do cálculo. A reordenação é trivial se notarmos que a nova posição pode ser obtida da antiga expressando x em modo binário e refletindo os bits.

f(0) => 0 0 0 => 0 0 0 => f(0)
f(1) => 0 0 1 => 1 0 0 => f(4)
f(2) => 0 1 0 => 0 1 0 => f(2)
f(3) => 0 1 1 => 1 1 0 => f(6)
f(4) => 1 0 0 => 0 0 1 => f(1)
f(5) => 1 0 1 => 1 0 1 => f(5)
f(6) => 1 1 0 => 0 1 1 => f(3)
f(7) => 1 1 1 => 1 1 1 => f(7)

FFT (cont.)

- Assim, uma transformada de *N* pontos pode ser calculada usando duas transformadas de *N/2* pontos.

- De forma similar, cada transformada de *N/2* pontos pode ser calculada usando duas transformadas de *N/4* pontos e assim por diante.



FFT (cont.)

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

- A FFT é mais vantajosa que a DFT por seu cálculo ser muito mais rápido .
- No entanto, a FFT só pode ser usada em vetores (ou matrizes) de tamanho 2^n.
- Quando o sinal ou imagem não obedece esta regra usamos a DFT.

FFT *(cont.)*

- <u>Série de Fourier</u>: utilizada para representar funções periódicas ou partes de uma função em que é garantida a periodicidade.
- <u>Transformada de Fourier</u>: utilizada para definir funções não periódicas no intervalo infinito e é derivada da série de Fourier.
- <u>Transformada Discreta de Fourier</u>: é um caso especial da FT contínua em que permite o cálculo computacional; portanto é derivada da FT.
- <u>Transformada Rápida de Fourier</u>: foi desenvolvida para implementar a DFT de forma mais rápida.

Por que utilizar uma transformada?

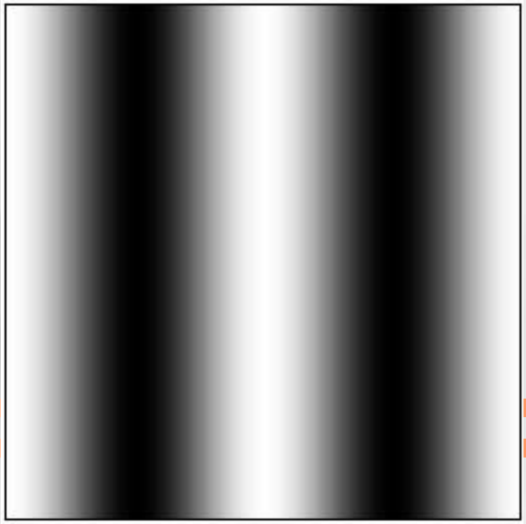
- Alguns problemas são difíceis de solucionar diretamente. Pode ser mais fácil resolver o problema com o sinal na frequência e aplicar a transformada inversa na solução.

- Deve-se levar em consideração a dificuldade envolvida em aplicar a transformada ao problema original e em aplicar a transformada inversa na solução do problema transformado.

Transformada de Fourier 2D

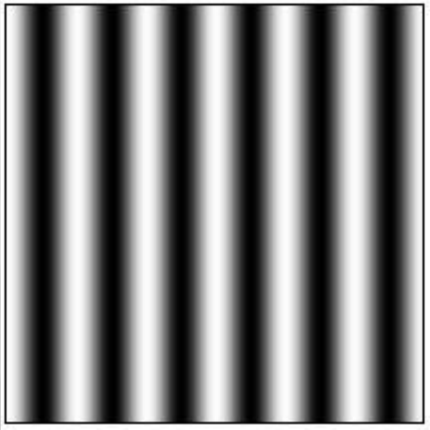
- No caso de imagens, a TF corresponde à variações senoidais do brilho na imagem.

- Por exemplo, o seguinte padrão senóide pode ser capturado por um único termo de Fourier com a seguintes informações: 1) a frequência espacial, 2) a magnitude (positiva ou negativa), 3) a fase.



Transformada de Fourier 2D

- Esses três valores capturam toda a informação sobre a imagem senoidal.
  - Frequência espacial: é a frequência através do espaço (eixo x neste caso) em que o brilho modula.
- A seguinte imagem apresenta uma frequência maior:



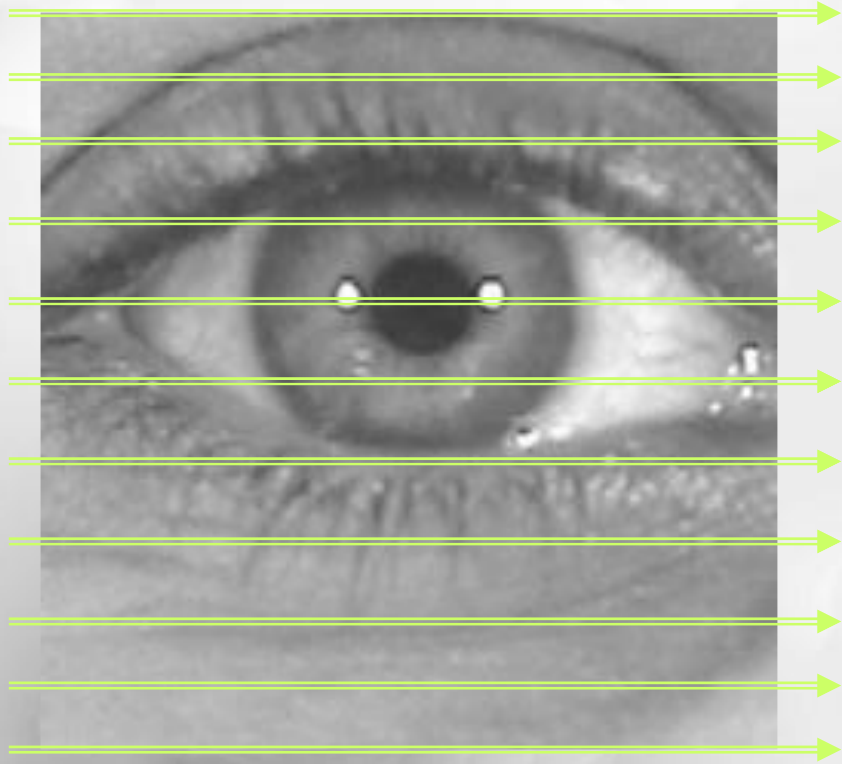
Transformada de Fourier 2D

- A magnitude corresponde ao contraste (diferenças entre valores escuros e claros).

- A fase representa a forma como a onda é transladada.

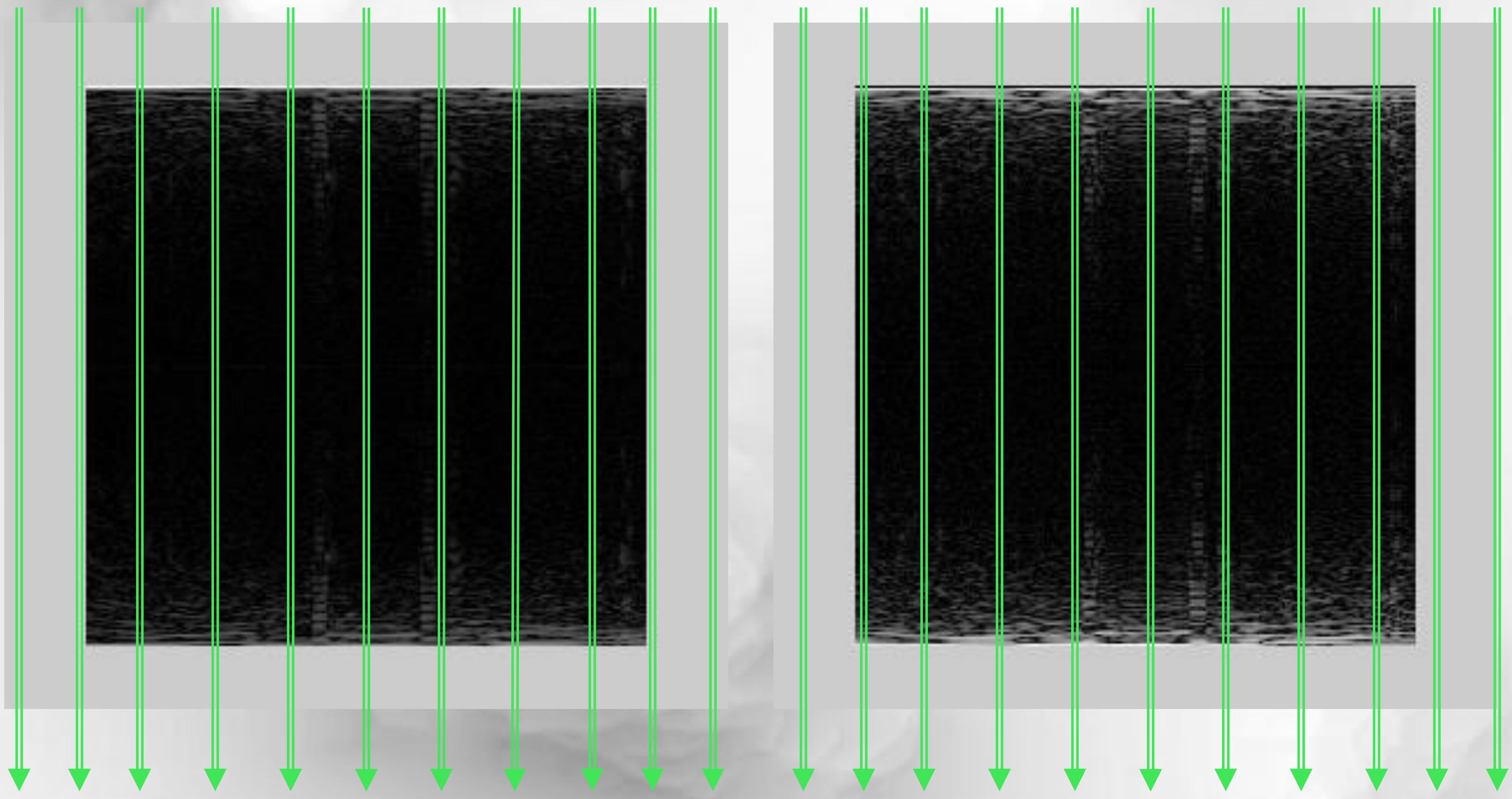
Transformada de Fourier 2D

- Sucessivas FFT-1D
  - uma para cada linha (o resultado possui uma parte real e uma imaginária)



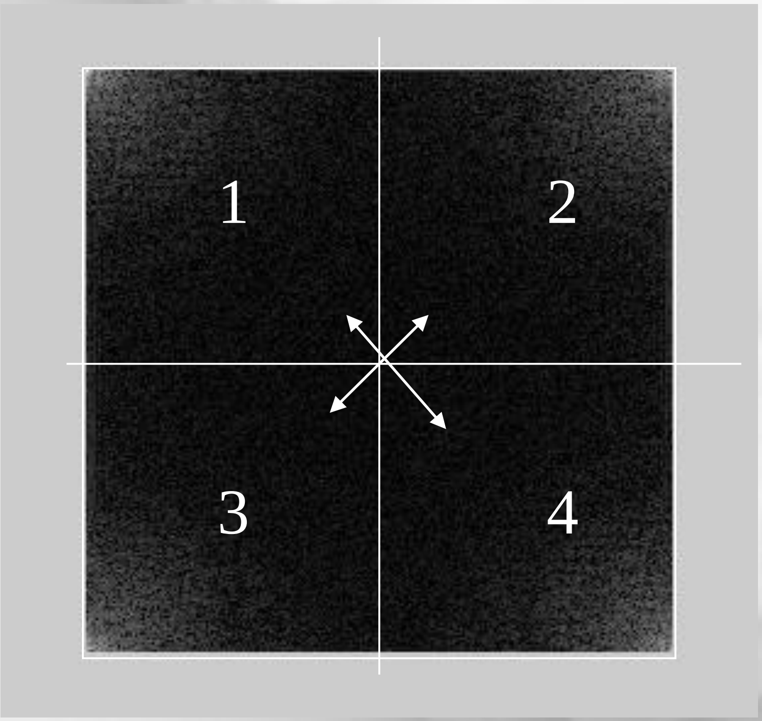
Transformada de Fourier 2D

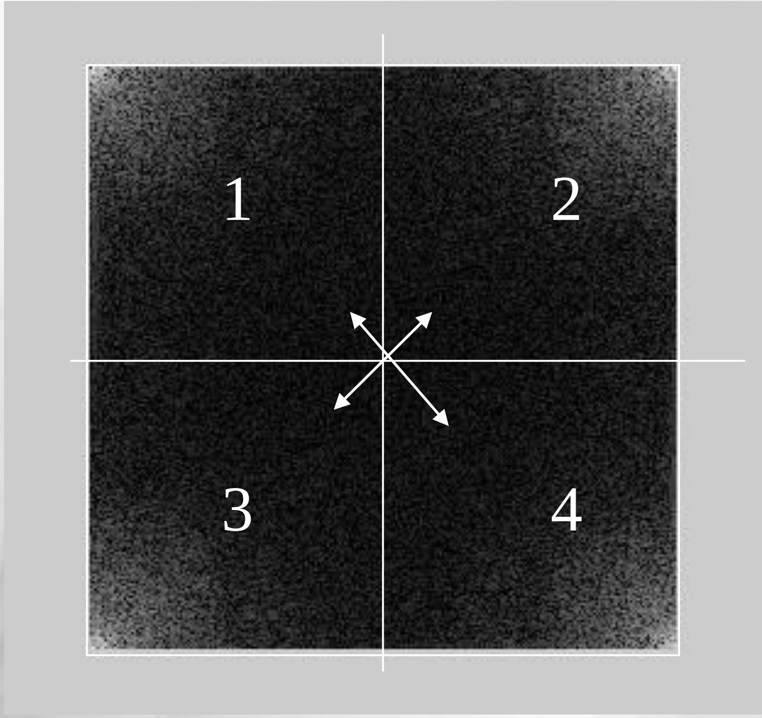
- Sucessivas FFT-1D
  - uma para cada coluna (real e imaginária)



Transformada de Fourier 2D

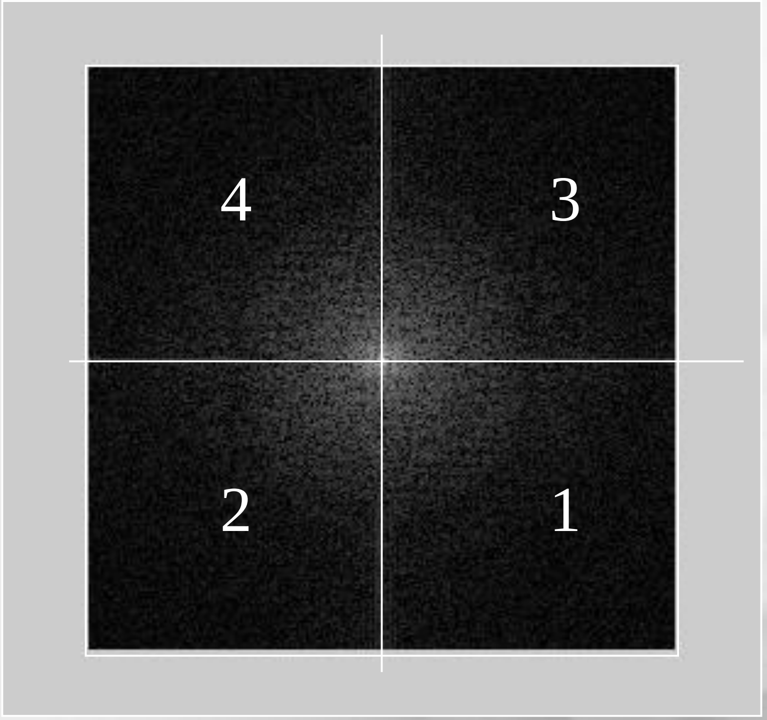
- Deslocamento
  - fftshift

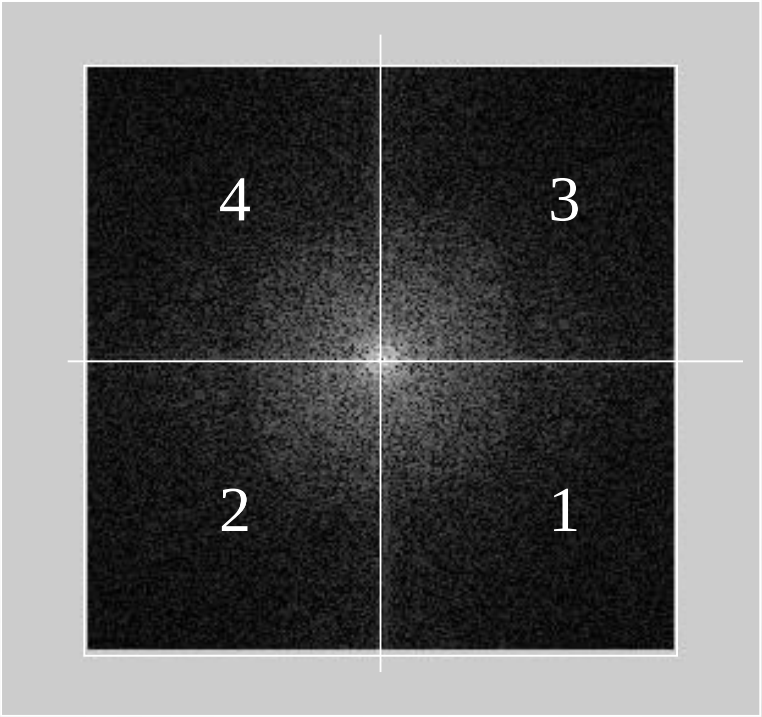




Transformada de Fourier 2D

- Deslocamento
  - fftshift





Transformada de Fourier

- Na transformada de Fourier, não deve haver perda significativa de informação durante a mudança de domínios, pois o que ocorre é apenas a representação da informação visual da imagem representada de uma outra forma, ou seja, no domínio da frequência.

Transformada de Fourier *(cont.)*

- No entanto, na prática, a transformação da transformada de Fourier e sua inversão não transformam a imagem sem perder informações.

- Isto só ocorre em algumas poucas exceções, em que a imagem apresenta um padrão de repetição bem comportado e com frequências bem definidas.

- Mesmo assim, é possível atingir resultados com boas aproximações.

Transformada de Fourier (cont.)

- Em processamento de imagens o objetivo normalmente está na obtenção de informações sobre quais frequências espaciais estão presentes na imagem ou em qual orientação ocorrem as maiores variações de intensidade de tons de cinza.

- Após a determinação desses dados, pode-se, por exemplo, aplicar um filtro no domínio de frequência visando eliminar os componentes que apresentam frequências indesejadas.

Transformada Discreta de Fourier de Imagens

- Dada uma imagem 2D f(x,y) de tamanho MxN, a transformada de Fourier Discreta 2D F(u,v) de f(x,y) é dada por:

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(ux/M+vy/N\right)}$$

sendo $u = 0, 1, 2, \ldots, M - 1$ e $v = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$.

- A transformada inversa é dada por:

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\frac{1}{MN}F(u,v)e^{j2\pi\left(ux/M+vy/N\right)}$$

Transformada Discreta de Fourier de Imagens

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

- Note que a transformada *F* é uma função de *u* e *v*, que são descritores da frequência das intensidades de *f*.

- *f*, por sua vez, não depende de *u* e *v*, mas apenas de *x* e *y*.

- Assim, dizemos que a transformada de Fourier descreve a imagem no domínio da frequência.

Transformada de Fourier

- No espectro de Fourier bidimensional, um número pequeno de variações de tons de cinza em um determinado espaço indica a presença de regiões de baixa frequência espacial, enquanto um número maior de variações indica a presença de regiões de frequência espacial alta na imagem.

Regina Célia Coelho

Transformada de Fourier *(cont.)*

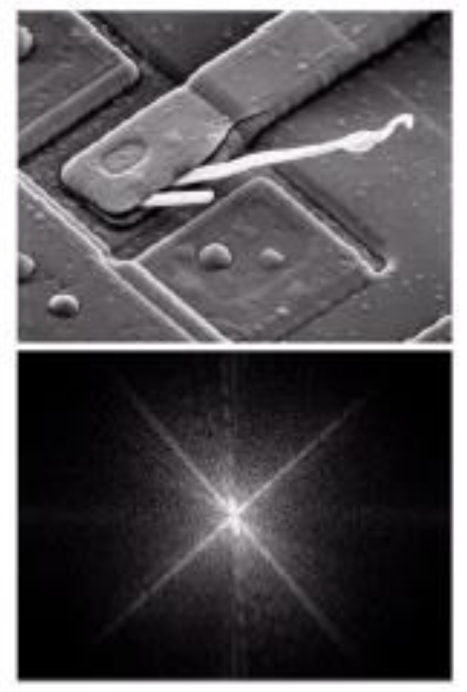
- Em resumo, a presença de componentes em regiões mais homogêneas indica a existência de frequência espacial baixa na imagem de entrada, enquanto a presença de componentes em regiões de variações mais abruptas indica a presença de frequência espacial alta.

- Coeficientes de baixos índices (frequências) correspondem a componentes da imagem que variam pouco.

- Coeficientes de alta frequência são associados com variações bruscas de intensidade.

FFT

- **Transformada de Fourier em termos de características da imagem**

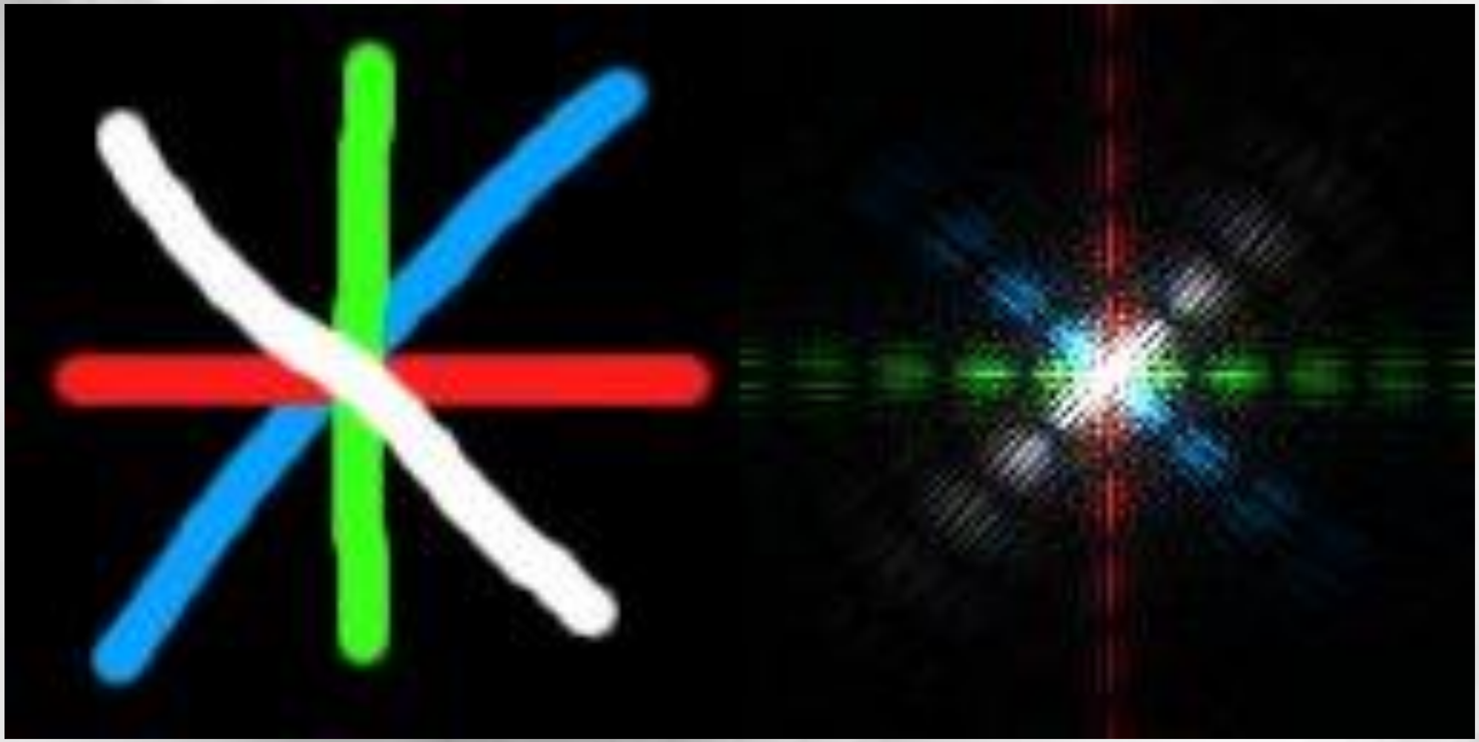


Espectro de Fourier

- Note como as bordas diagonais da imagem geram linhas diagonais na transformada de Fourier.

FFT

- Linhas em uma imagem geralmente geram linhas **perpendiculares** no espectro.

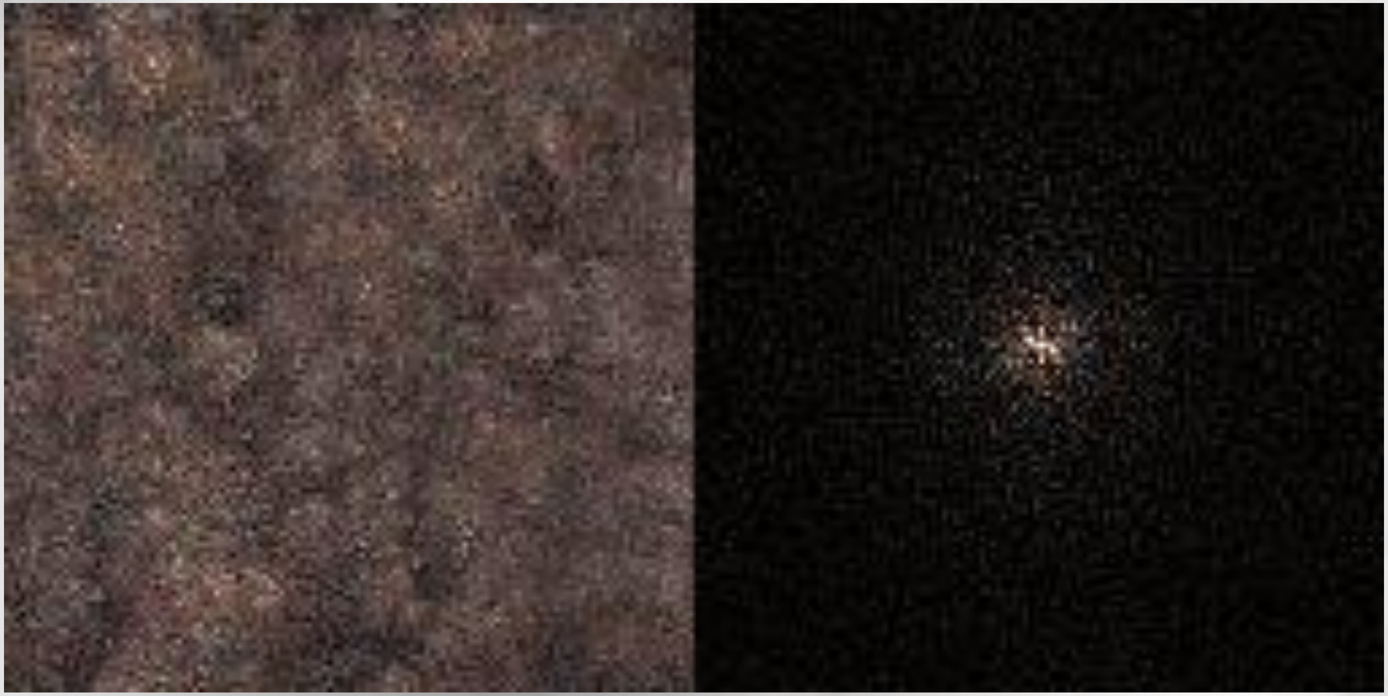


FFT

- As linhas inclinadas no espectro são devido à transição aguda do céu para a montanha.

FFT

- TF de um textura sem mudanças abruptas ou direção bem definida horizontal ou vertical, logo não há linhas horizontais e verticais no espectro.

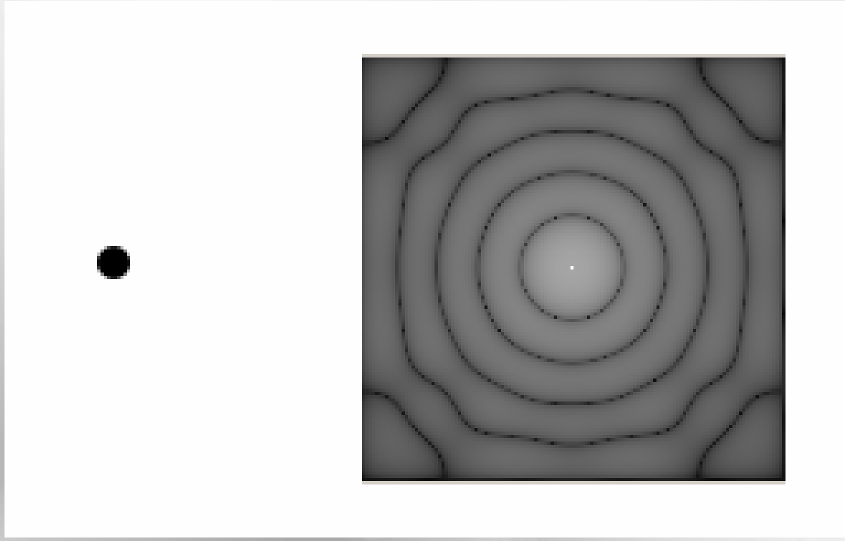


FFT

- O espectro de Fourier é melhor visualizado utilizando a função $\log(1+(a^2+b^2)^{1/2})$, sendo *a* e *b* a parte real e a imaginária, respectivamente, do resultado da transformada de Fourier.

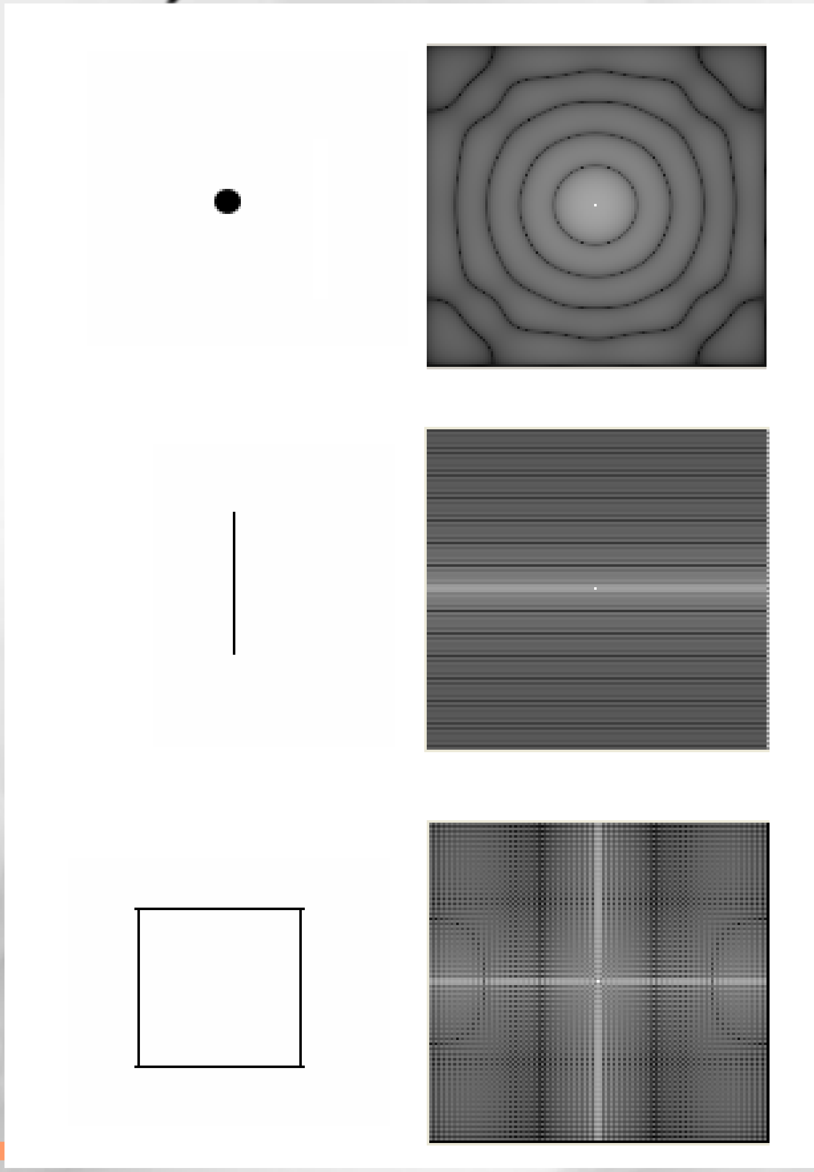
FFT

- A princípio parece difícil entender a visualização da imagem, pois, um ponto de uma imagem representada no domínio Fourier (ou da frequência) pode conter informações sobre toda a imagem no domínio espacial, indicando quanto desta frequência há na imagem.



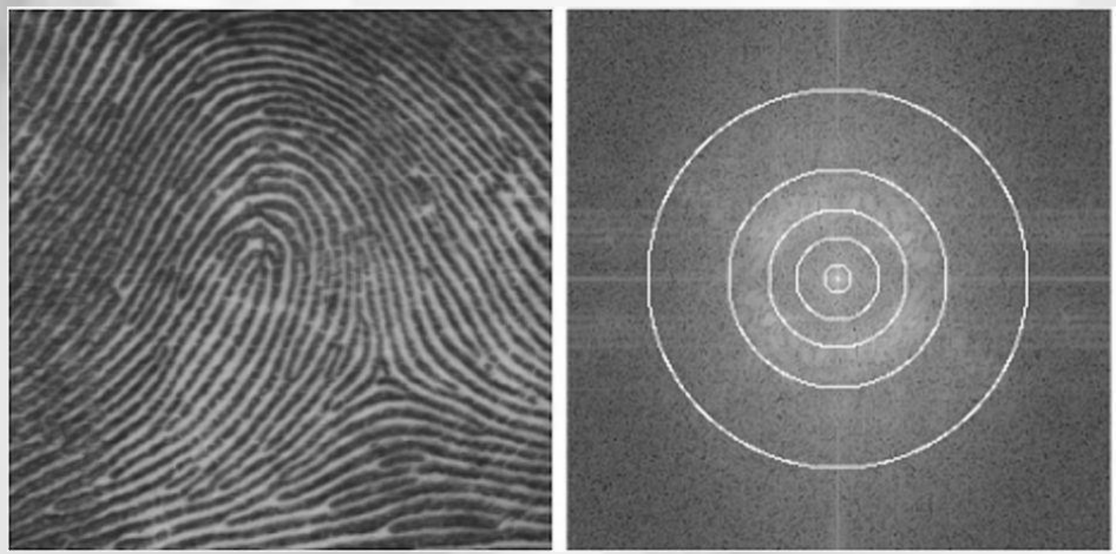
FFT (cont.)

- Algumas imagens representadas como funções bidimensionais e seus espectros de Fourier (espectros vistos utilizando a função *log*).



FFT (cont.)

- A maior parte da informação de uma imagem normal se concentra em baixas frequências



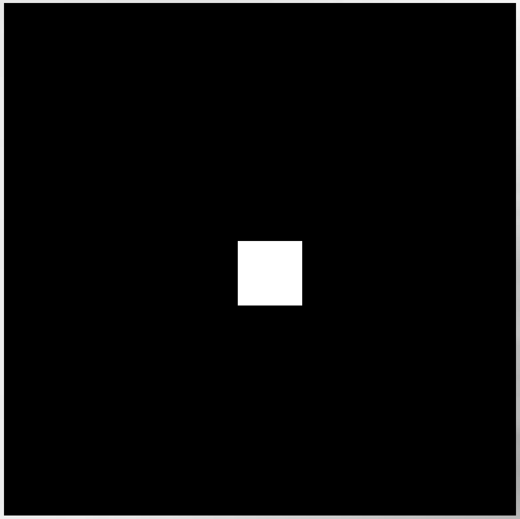
Raio	Energia
5	94.18%
15	94.70%
25	96.09%
40	99.62%
70	99.95%

Exemplo de uma imagem e seu espectro de Fourier. Os círculos são falsamente incluídos para se ter uma ideia em que frequência se concentram.

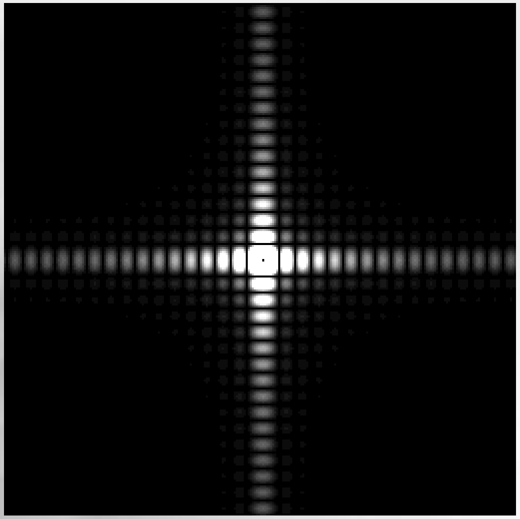
FFT (cont.)

- Exemplo de imagem representada como funções bidimensionais e seus espectros de Fourier.

Pulso quadrado



log da sua transformada



Propriedades da Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier possui propriedades que facilitam a sua utilização em aplicações computacionais, tais como:
  - amostragem,
  - translação,
  - rotação,
  - convolução,
  - correlação,
  - etc.
- Dentre essas, a propriedade da **convolução** é de fundamental importância para a compreensão das técnicas de processamento de imagens e filtragem.

Amostragem

- Se a imagem *f(x,y)* for amostrada em intervalos *Δx* e *Δy*, teremos os intervalos no domínio da frequência da transformada *F(u,v)*:

$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta x} \qquad \Delta v = \frac{1}{N \Delta y}$$

- Assim, os intervalos na frequência são inversamente proporcionais aos intervalos no espaço.

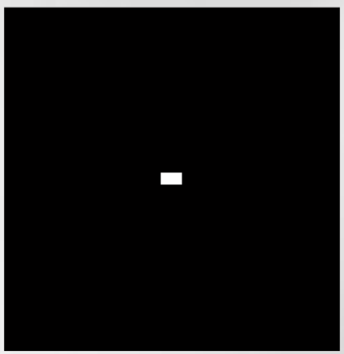
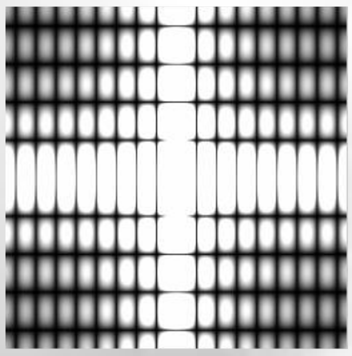
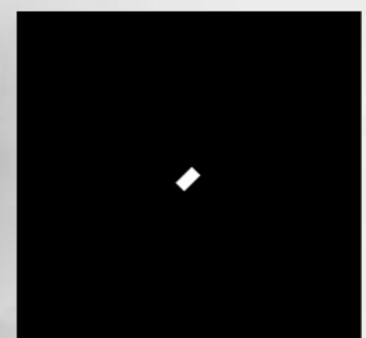
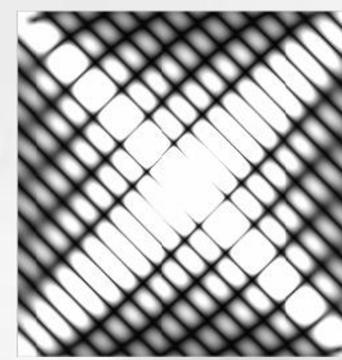
Translação

- De acordo com essa propriedade se um sinal é transladado no tempo, a magnitude de sua TF não é alterada.

- Exemplos intuitivos:
  - Se você escuta uma música hoje ou amanhã, sua frequência não muda.
  - Se você desloca o ponto (0,0) de uma imagem para (10,10), sua transformada não muda!

Rotação

- A propriedade da rotação estabelece que, se uma imagem *f(x,y)* for rotacionada de um certo ângulo θ , sua transformada, *F(u,v)*, será rotacionada do mesmo ângulo.

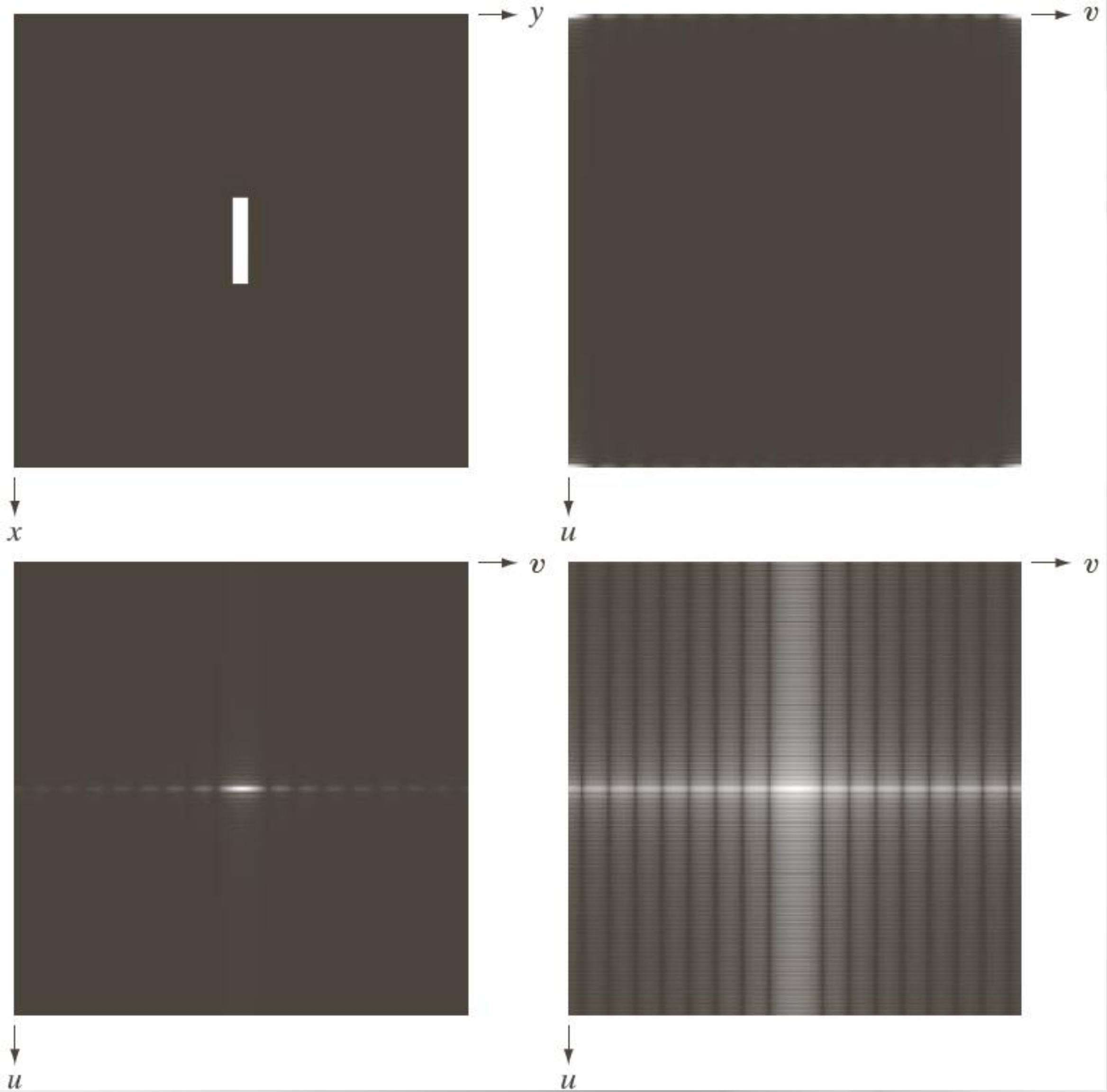
Espectro e ângulo

- Dado que $F(u,v) = |F(u,v)|e^{j\Phi(u,v)}$, temos:
  - $|F(u,v)| = (R^2(u,v) + I^2(u,v))^{1/2}$, e que
  - $\Phi(u,v) = \tan^{-1}(I(u,v)/R(u,v))$ ➔ ângulo de fase
  - $|F(u,v)|$ é chamada de espectro da frequência ou energia de *f(x,y)* e $\Phi(u,v)$ é denominado ângulo de fase.
  - $P(u,v) = |F(u,v)|^2$ é chamado de espectro de potência.

Espectro e ângulo

- A TF é representada pela magnitude e a fase.
- A magnitude diz “ quanto ” de um certo componente de frequência está presente.
-
- A fase diz “onde” o componente está presente.
- Estas medidas são utilizadas para compreender e realizar transformações no espectro de frequência de modo a filtrar a imagem no seu domínio original.

Espectro e ângulo



a b
c d

FIGURE 4.24 (a) Image. (b) Spectrum showing bright spots in the four corners. (c) Centered spectrum. (d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

Convolução

- Dada a convolução da imagem *f(x,y)* pela máscara *h(x,y)*:

$$f(x,y) \bullet h(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) h(x-m, y-n)$$

- Temos que:

$$f(x,y) \bullet h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) H(u,v)$$

$$f(x,y) h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \bullet H(u,v)$$

- Isto indica que uma convolução no espaço da imagem é traduzida por uma simples multiplicação de imagens no espaço da frequência.

Correlação

- A correlação é calculada de forma semelhante à convolução:

$$f(x,y) \circ h(x,y) \Leftrightarrow F^*(u,v)H(u,v)$$

$$f^*(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \circ H(u,v)$$

sendo $F^*(u,v)$ o conjugado complexo da TF de $f(x,y)$ e $f^*(x,y)$ é o conjugado complexo do sinal $f(x,y)$.

Referências

- Alguns slides do Prof. Cappabianco (UNIFESP)
- Alguns slides do Prof. Luiz A. Consularo (UNIMEP)