

Bacharelado em Ciência da Computação

Processamento de Imagens

Morfologia Matemática – Parte 2

Acerto-ou-Erro (Hit-or-Miss)

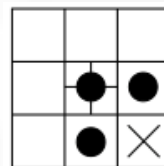
- ✦ É uma operação que permite a identificação de configurações específicas de pixels em uma imagem, tais como cantos ou junções em contornos de objetos, pixels isolados na imagem ou pequenos segmentos de retas.
- ✦ Dada uma imagem A e dois elementos estruturantes disjuntos B_1 e B_2 , podemos definir essa operação como:
 - $A \circledast (B_1, B_2) = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$
 - ✓ Sendo que B_1 é a região procurada e B_2 é o seu fundo local (fora de B_1).

Acerto-ou-Erro (cont.)

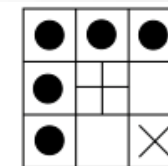
- Assim, o conjunto $A \circledast B$ contém todos os pontos nos quais, simultaneamente, B_1 coincide com um subconjunto de pixels em A , e B_2 em A^c .
- O resultado dessa operação consiste na localização de todos os pixels que coincidem com o conjunto B_1 (*acerto*) e que não coincidem com o conjunto B_2 (*erro*).

Acerto-ou-Erro (cont.)

- Os elementos estruturantes mostrados a seguir podem ser utilizados para identificar cantos superiores esquerdos em objetos:



(a) B_1

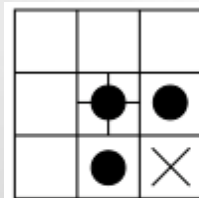


(b) B_2

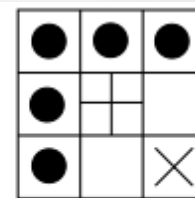
- O elemento estruturante B_1 permite a localização de pixels do objeto que possuam vizinhos ao sul e a leste da origem (**acertos**), enquanto B_2 permite a localização de pixels do objeto que não possuam vizinhos nas posições norte, nordeste, noroeste, oeste e sudoeste da origem (marcada com "+").

Acerto-ou-Erro (cont.)

- ❖ O ponto localizado a sudeste da origem é marcado com x em ambos os elementos estruturantes, indicando que o ponto pode assumir tanto valor 0 quanto 1.



(a) B_1



(b) B_2

Acerto-ou-Erro (cont.)

- A figura abaixo mostra um exemplo de aplicação da transformada acerto-ou-erro para detectar cantos em objetos da imagem.

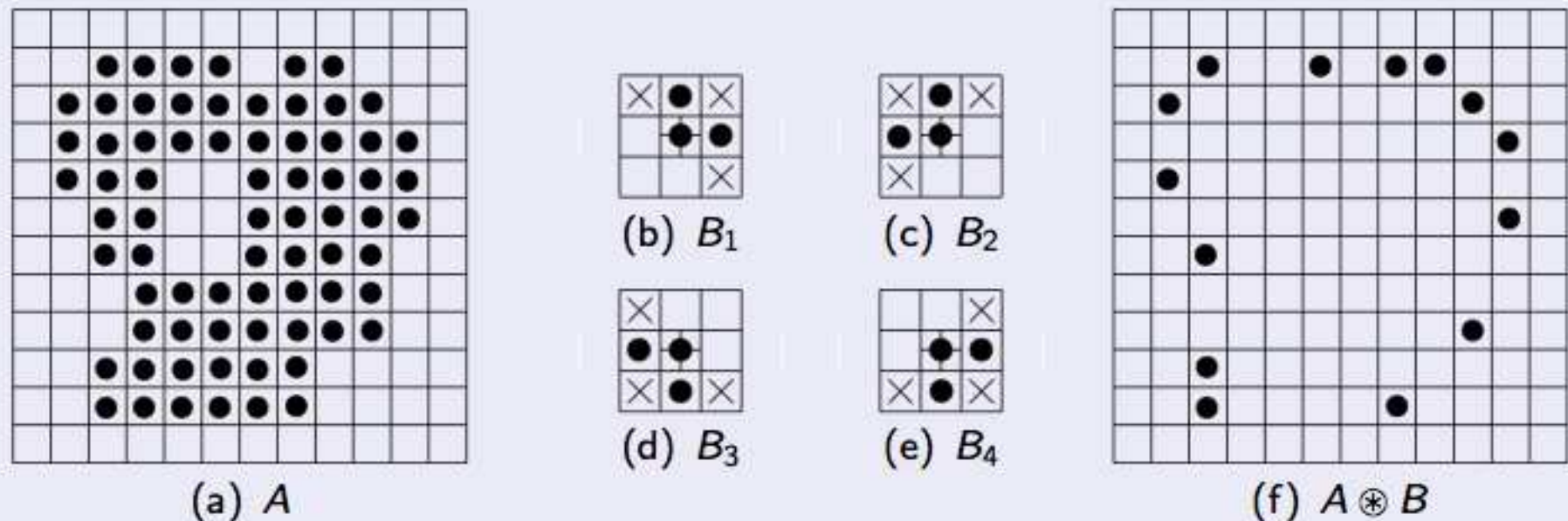
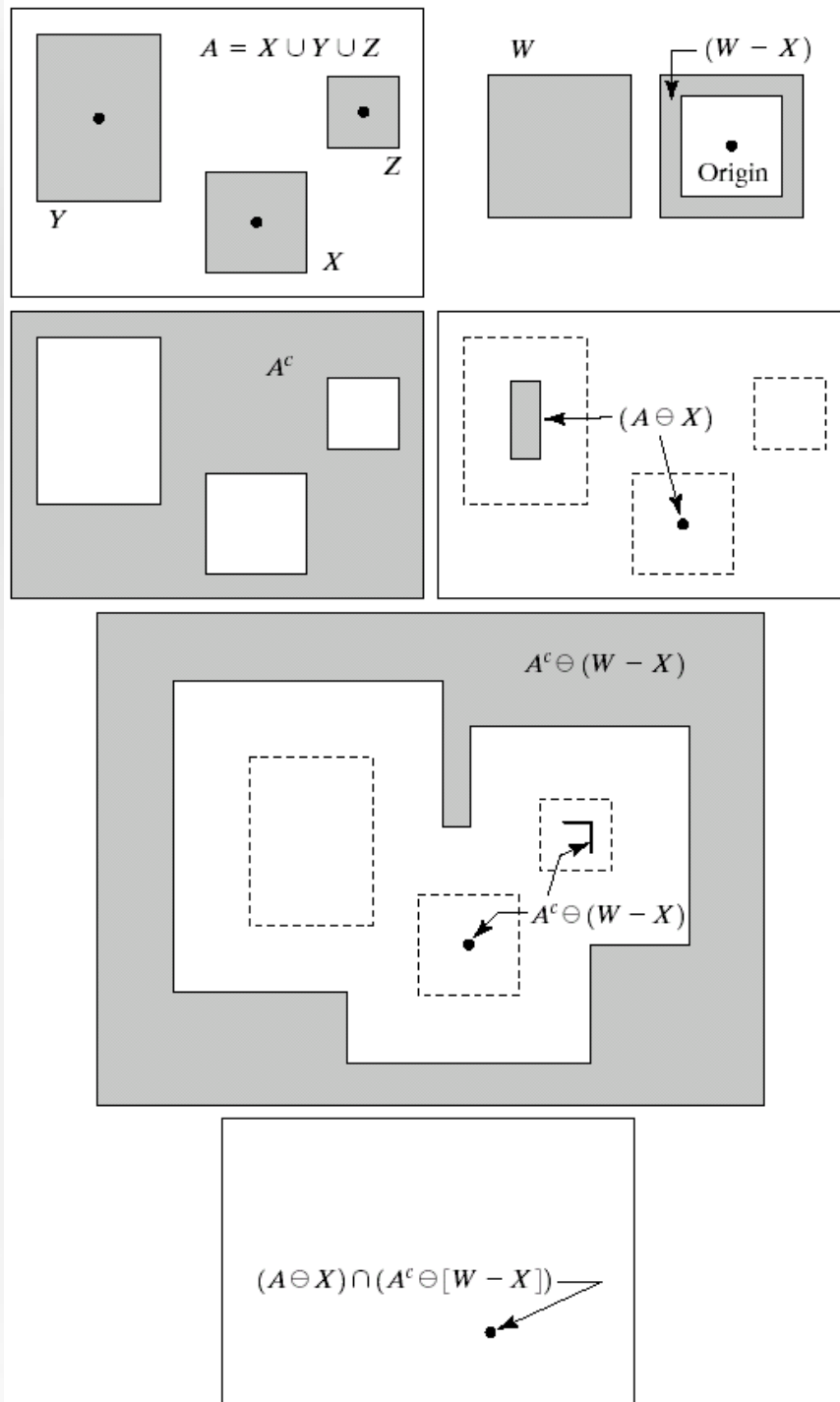


Figura : Transformada acerto-ou-erro. (a) imagem original; (b)-(e) elementos estruturantes; (f) resultado da detecção de cantos na imagem.

Acerto-ou-Erro (cont.)

Explicação do Exemplo anterior:

- Os elementos estruturantes de B_1 a B_4 representam os padrões de acerto da transformada. Quatro outros elementos estruturantes disjuntos devem ser utilizados na aplicação da transformada.
- A transformada é executada quatro vezes sobre a imagem binária utilizando cada um dos elementos estruturantes que representam os cantos dos objetos.
- Nos elementos estruturantes de B_1 a B_4 , as posições marcadas com círculos escuros representam os pixels dos objetos (valor 1), as posições vazias representam o fundo da imagem (valor 0) e as posições marcadas com X representam pontos que podem assumir valor 0 ou 1.
- A origem de B_1 a B_4 localiza-se no centro de cada elemento estruturante.



a	b
c	d
e	
f	

FIGURE 9.12

(a) Set A . (b) A window, W , and the local background of X with respect to W , $(W - X)$. (c) Complement of A . (d) Erosion of A by X . (e) Erosion of A^c by $(W - X)$. (f) Intersection of (d) and (e), showing the location of the origin of X , as desired.

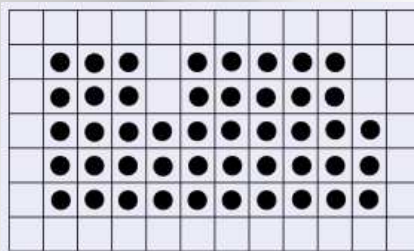
Aplicações da Morfologia Matemática

- ✦ A partir dos conceitos apresentados anteriormente, várias aplicações práticas da morfologia matemática podem ser consideradas para a análise de imagens.
- ✦ Alguns exemplos incluem a extração de componentes conexos em imagens binárias, delimitação do fecho convexo, extração de bordas dos objetos, preenchimento de regiões, extração do esqueleto de um objeto, afinamento e espessamento de contornos, além de vários outros usos na descrição de formas de objetos.
- ✦ A escolha adequada dos elementos estruturantes é de fundamental importância para a construção dos operadores.

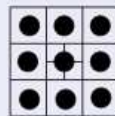
Extração de Bordas

✦ Seja uma região A , sua borda dada por $\beta(A)$.

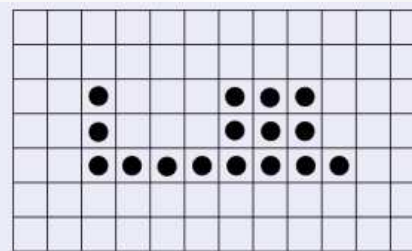
- $\beta(A) = A - (A \ominus B)$
- Esta equação é chamada de **gradiente interno**.



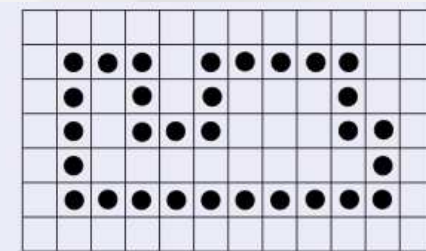
(a) A



(b) B



(c) $A \ominus B$



(d) $E(A) = A - (A \ominus B)$

- Dada a imagem A , aplica-se a erosão em A utilizando o elemento estruturante B de tamanho 3×3 . Em (c) temos o resultado desta erosão. Por último, o resultado da diferença de A pelo resultado da erosão é mostrado em (d).

Extração de Bordas (cont.)



a b

FIGURE 9.14

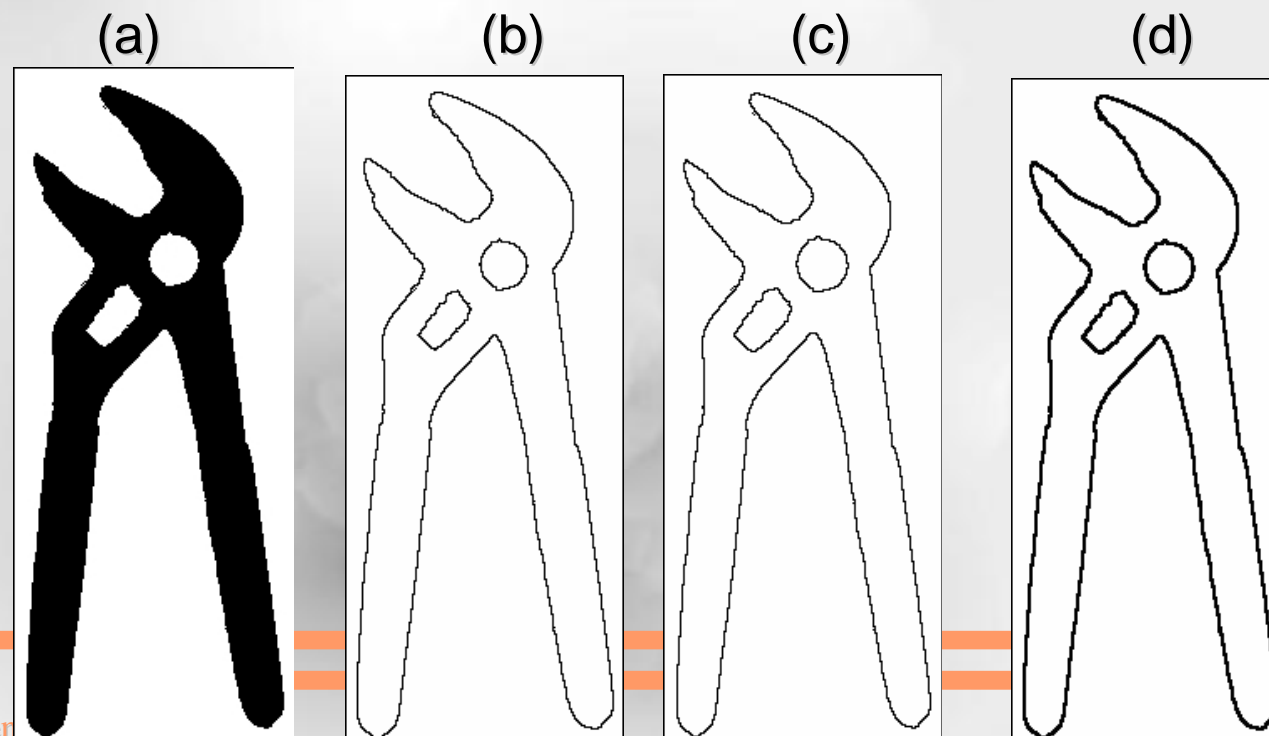
(a) A simple binary image, with 1s represented in white. (b) Result of using Eq. (9.5-1) with the structuring element in Fig. 9.13(b).

Extração de Bordas (cont.)

- ◆ Outra forma de extrair a borda de um objeto é baseada no operador de dilatação:
 - $\beta(A) = (A \oplus B) - A$
 - Esta forma de extração de borda é chamada de **gradiente externo**, cujo resultado é complementar ao gradiente interno.
- ◆ A subtração entre o gradiente externo e interno é chamada de **gradiente morfológico**, dado por:
 - $\beta(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B)$

Extração de Bordas (cont.)

- Ilustração do operador de extração de bordas com o uso de um elemento estruturante de 3×3 pixels, em que todos os valores são iguais a 1 e a origem está localizada no centro do quadrado.
- Os três tipos de gradiente, ou seja, interno, externo e morfológico, são ilustrados nas figuras (b), (c) e (d).



Extração de Bordas (cont.)

- As seguintes operações combinando abertura e erosão também obtém as bordas do objetos ou regiões na imagem (considere o valor absoluto do resultado):

$$\text{Bordas} = X \circ B - X \ominus B$$

- Exemplo: (a) imagem original; (b) imagem com extração de bordas (elemento estruturante $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$)



(a)



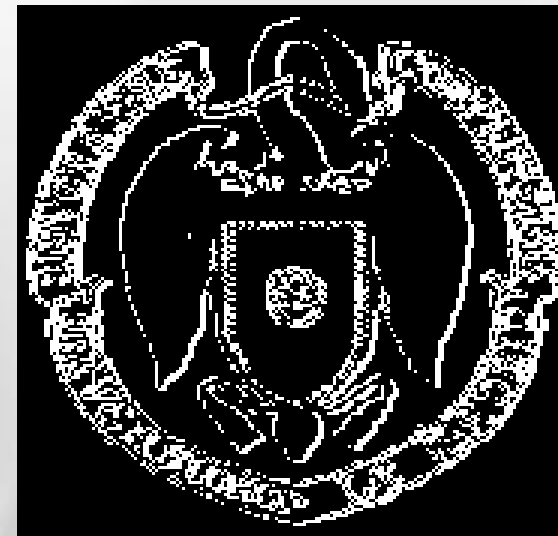
(b)

Extração de Bordas (cont.)

- Outra forma de obtermos contornos é mediante a operação lógica XOR da imagem original com a imagem dilatada (ou erosada). Exemplo: (a) imagem original; (b) imagem com extração de bordas (aqui foi usado o elemento estruturante $\begin{bmatrix} \bullet & 1 & 1 \end{bmatrix}$)



(a)



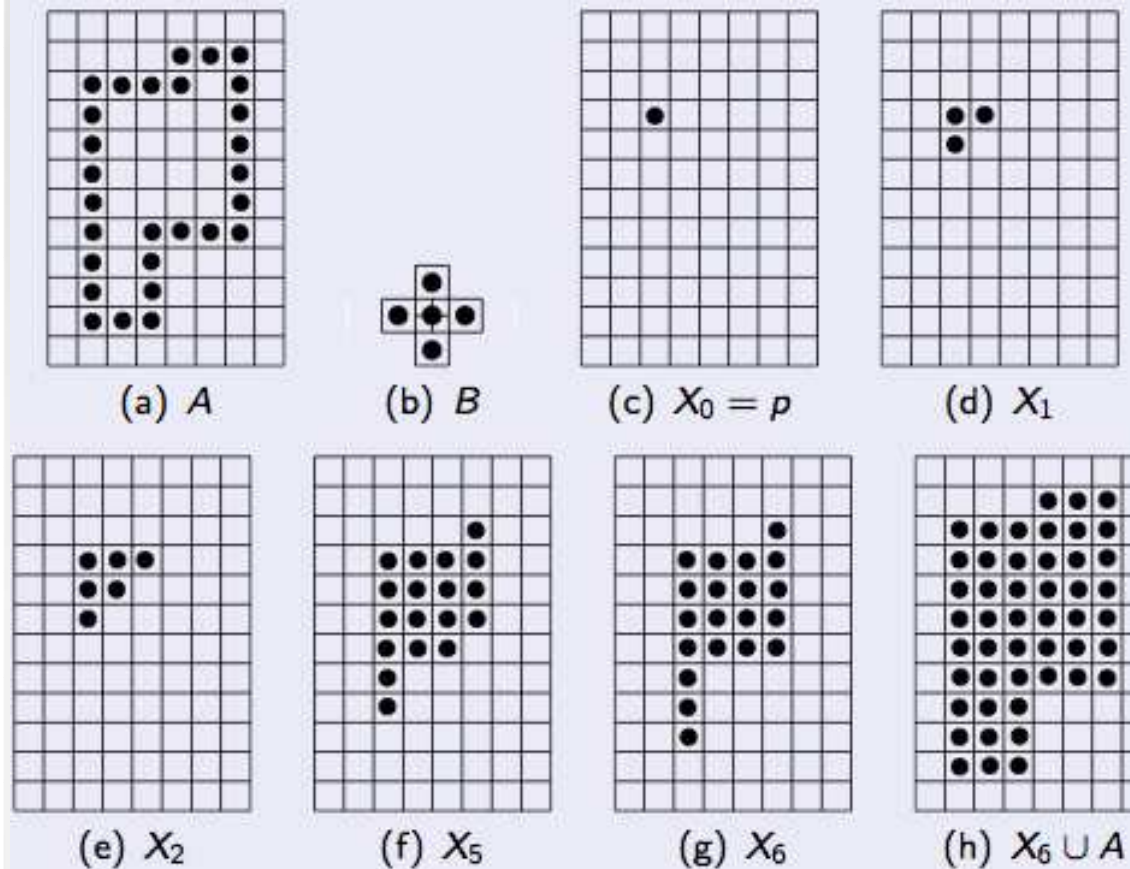
(b)

Preenchimento de furos

- ✦ Um furo é uma região de fundo contornada por pixels de frente.
 - Assuma que existe um conjunto A composto dos pixels das bordas de todos os furos de uma imagem em uma vizinhança-8 e um ponto em cada furo, o objetivo é preenchê-los.
 - Inicia-se o processo por um dos pontos internos a uma borda (ponto p). A região é dilatada, seguida da interseção com o complemento da borda dada por:
✓ $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$, sendo X_0 o ponto inicial p .

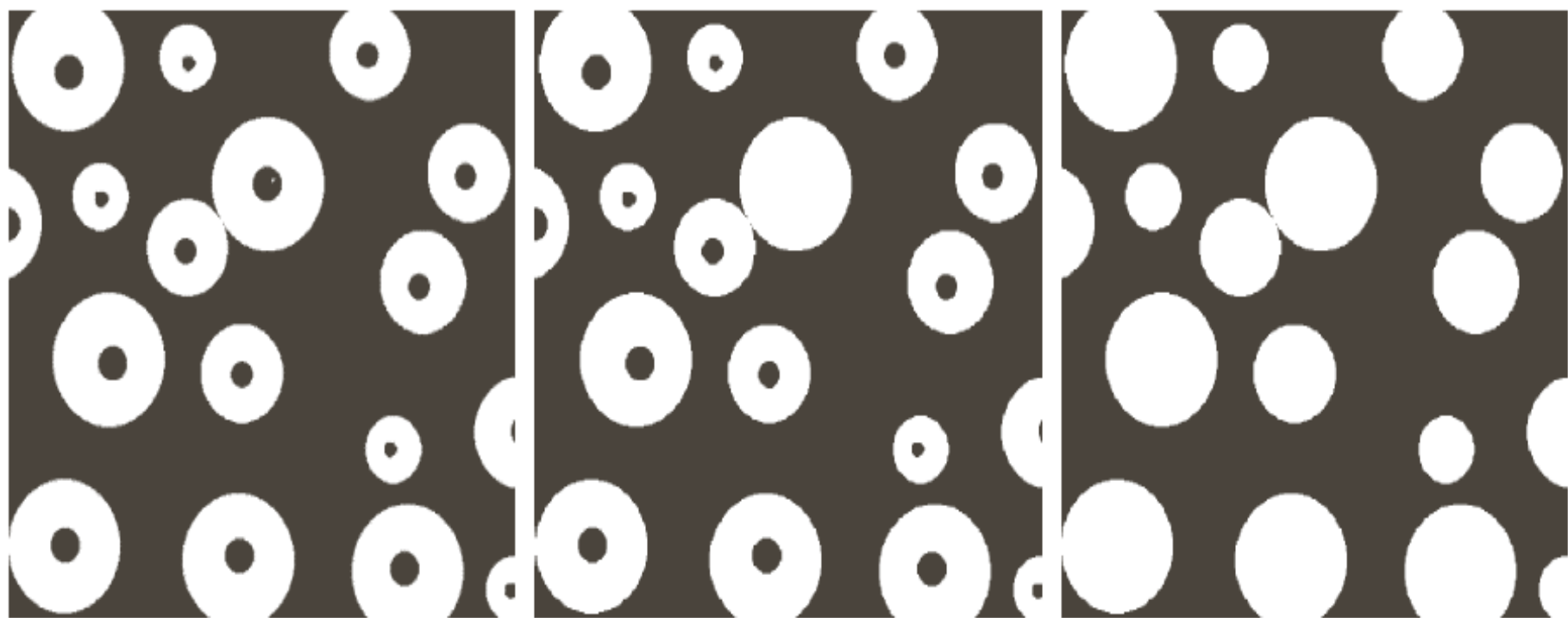
Preenchimento de furos

- A interseção previne que os pontos ultrapassem a borda.
- O processo é repetido até que não haja mudança entre duas iterações consecutivas, ou seja, $X_k = X_{k-1}$.
- Por último, fazer resultado final igual a $X_k \cup A$.



Operador de preenchimento de regiões é aplicado na imagem A , utilizando o elemento estruturante B em cruz (o mais comumente utilizado para o preenchimento de regiões). A partir de um ponto semente interno à região a ser preenchida, o operador dado pela equação anterior iterativamente é aplicado aos pixels da imagem. A figura (c) mostra o ponto inicial utilizado para realizar as iterações. Resultados intermediários do preenchimento da região são apresentados nas figuras (d) a (g), enquanto o resultado final do preenchimento é mostrado em (h).

Preenchimento de furos (cont.)



a b c

FIGURE 9.16 (a) Binary image (the white dot inside one of the regions is the starting point for the hole-filling algorithm). (b) Result of filling that region. (c) Result of filling all holes.

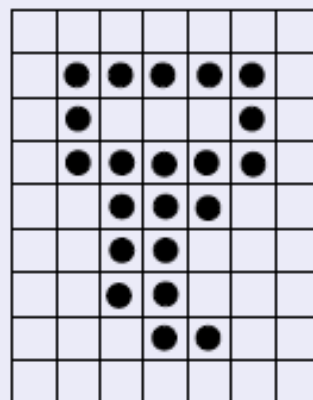
Extração de Componentes Conexos

- ✦ A extração de componentes conexos depende do critério de vizinhança adotado entre os pixels.
- ✦ Assume-se que exista um ponto semente p conhecido pertencente ao componente conexo na imagem A .
- ✦ A extração do componente conexo pode ser realizada por meio de um processo iterativo dado por:
 - $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$,
 - ✓ em que $X_0 = p$ (semente pertencente ao componente conexo na imagem A) e B um elemento estruturante adequado. Se $X_k = X_{k-1}$, então o algoritmo convergiu e o resultado é o conjunto dos pontos conectados.

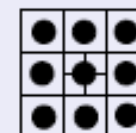
Extração de Componentes Conexos (cont.)

- ✦ A equação para extração de componentes conexos é similar à equação para preenchimento de furos, sendo que a única diferença é a utilização do conjunto A em vez de seu complemento, uma vez que todos os elementos procurados estão rotulados com o valor 1.
- ✦ A interseção do resultado em cada passo iterativo com o conjunto A elimina as dilatações centradas em elementos rotulados com o valor 0.

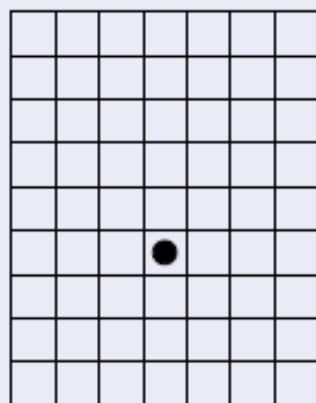
Extração de Componentes Conexas (cont.)



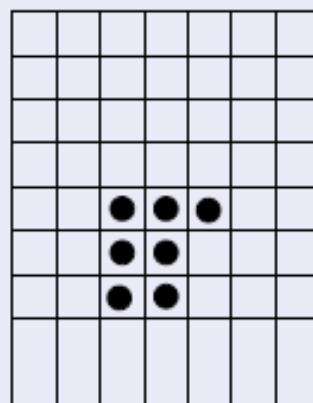
(a) A



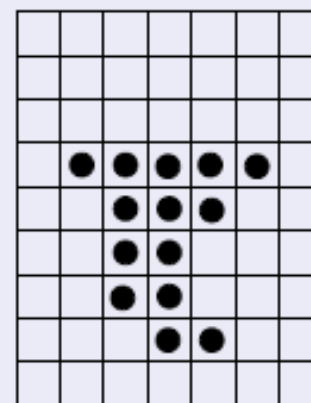
(b) B



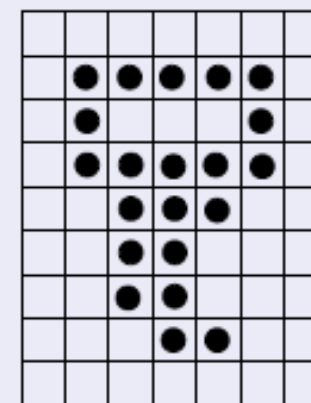
(c) $X_0 = p$



(d) X_1



(e) X_2



(f) X_6

Extração de Componentes Conexos (cont.)

- Dada a imagem *A* (figura do slide anterior) mostrada na figura (a), aplicar o operador de extração de componentes conexos utilizando o elemento estruturante *B* de tamanho 3×3 pixels mostrado em (b).
- A partir de um ponto semente pertencente ao componente conexo, a equação é iterativamente aplicada aos pixels do objeto.
- A forma do elemento estruturante *B* assume que os pixels dos componentes estão conectados por vizinhança-8.
- A figura (c) mostra o ponto inicial utilizado para realizar as iterações.
- Resultados intermediários são apresentados nas figuras (d) e (e), enquanto o resultado final da extração do componente conexo é mostrado em (f).

Extração de Esqueletos

- ✦ O esqueleto de uma região A pode ser expresso em termos de erosão e abertura.
- ✦ Denotando o esqueleto de A por $S(A)$, o esqueleto é obtido como:

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^n S_k(A)$$

em que:

$$S_k(A) = \bigcup_{k=0}^n \{(A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \circ B]\}$$

sendo que B é um elemento estruturante, enquanto $(A \ominus kB)$ indica k sucessivas erosões de A , ou seja,

$$A \ominus kB = ((...(A \ominus B) \ominus B)...) \ominus B$$

Extração de Esqueletos (cont.)

- ✦ O valor de n corresponde ao último passo iterativo antes que a erosão de A se transforme no conjunto vazio.
- ✦ $S(A)$ é obtido pela união dos subconjuntos de esqueletos $S_k(A)$.
- ✦ A pode ser reconstruído a partir dos mesmos subconjuntos como:

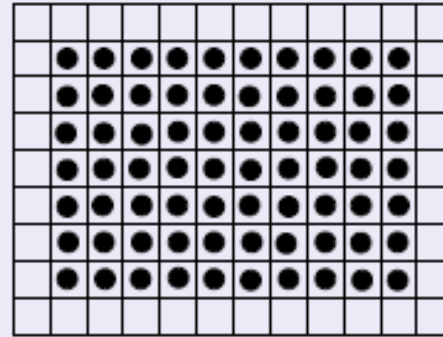
$$A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$$

sendo que $S_k(A) \oplus kB$ denota k dilatações sucessivas de $S_k(A)$, ou seja,

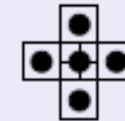
$$S_k(A) \oplus kB = (((S_k(A) \oplus B) \oplus B) \oplus \dots) \oplus B$$

Extração de Esqueletos (cont.)

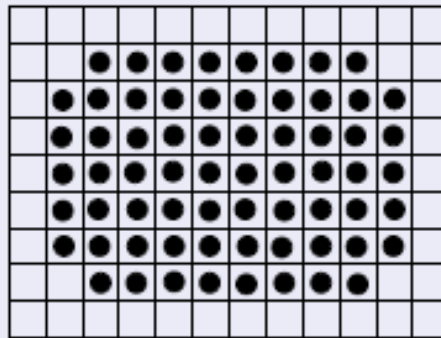
- ✦ Dada a imagem A mostrada na figura (a) (próximo slide), encontrar o esqueleto do objeto utilizando os elementos estruturantes B , com tamanho 3×3 pixels, mostrado em (b).
- ✦ As figuras (c) e (d) mostram os resultados da aplicação do operador definido anteriormente para o cálculo de $S(A)$ e $S_k(A)$, inicialmente com $k = 0$.
- ✦ Como quatro erosões de A resultariam no conjunto vazio, então, nesse caso, $n = 3$.
- ✦ As figuras (e) a (g), (h) a (j) e (k) a (m) ilustram os resultados do operador para as próximas iterações.
- ✦ Os resultados parciais do esqueleto, mostrados nas figuras (d), (g), (j) e (m), dados pelos conjuntos S_0 a S_3 , respectivamente, são unidos para formar o esqueleto final do objeto, mostrado na figura (n).



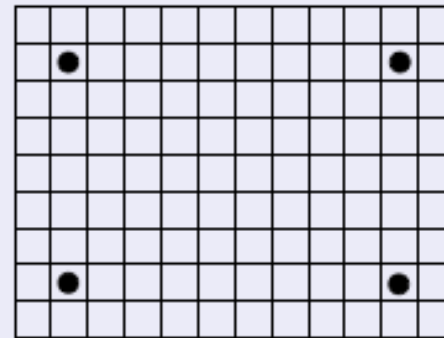
(a) A



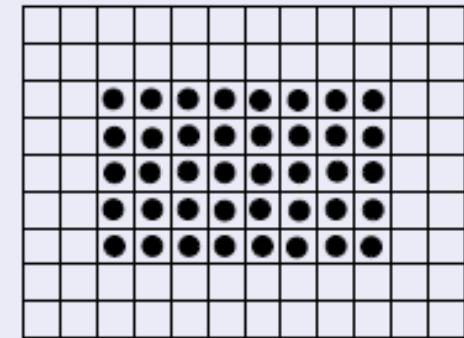
(b) B



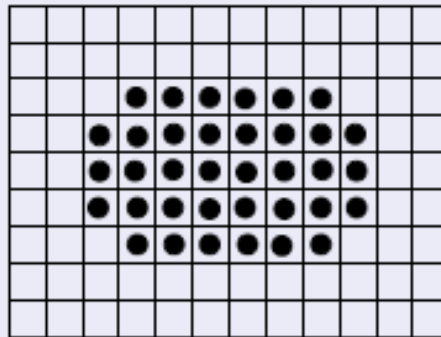
(c) $A \circ B$



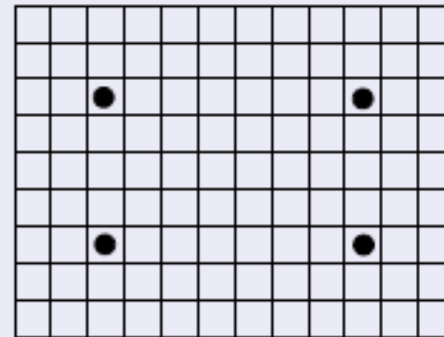
(d) $S_0(A) = A - (A \circ B)$



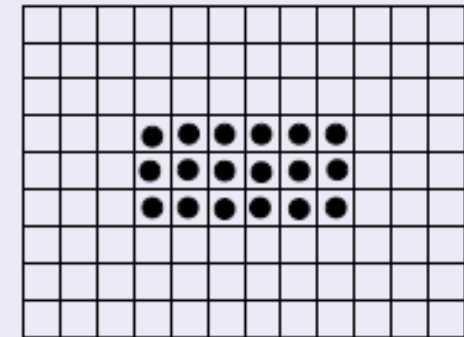
(e) $A \ominus B$



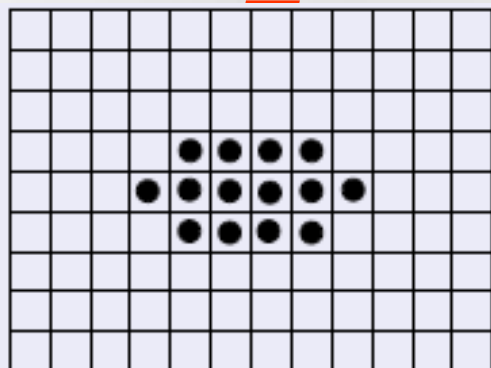
(f) $(A \ominus B) \circ B$



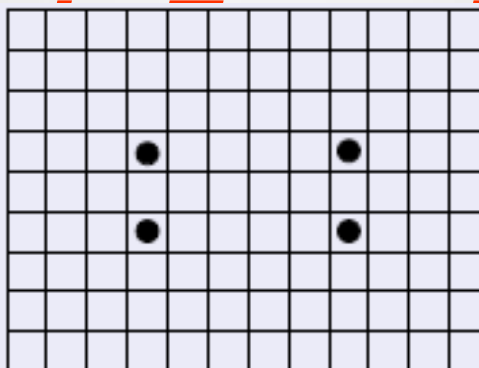
(g) $S_1(A) = (A \ominus B) - ((A \ominus B) \circ B)$



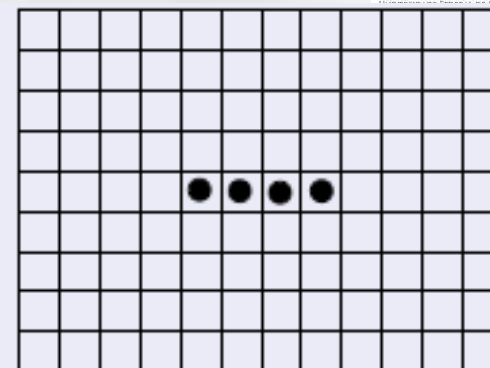
(h) $A \ominus 2B$



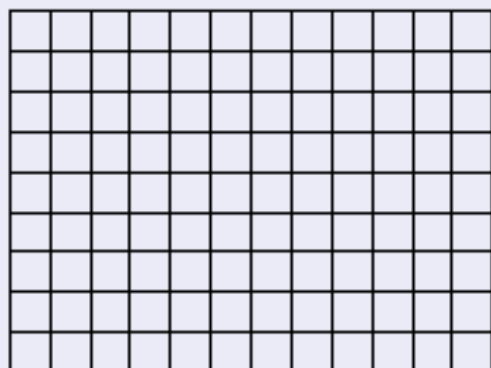
(i) $(A \ominus 2B) \circ B$



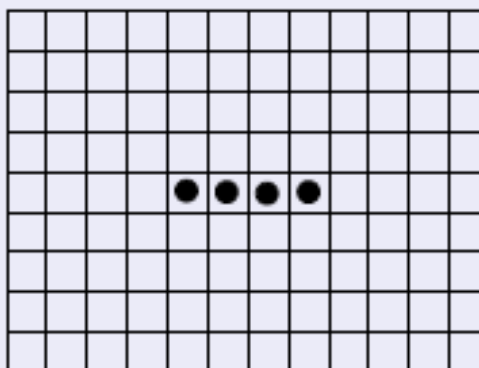
(j) $S_2(A) = (A \ominus 2B) - ((A \ominus 2B) \circ B)$



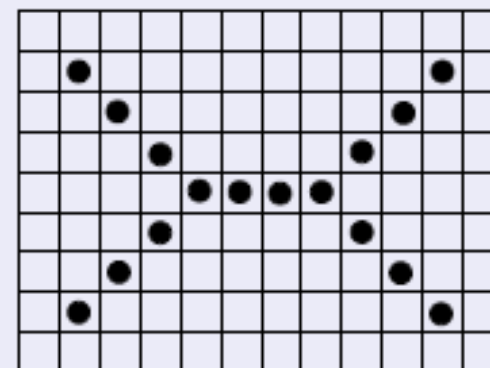
(k) $A \ominus 3B$



(l) $(A \ominus 3B) \circ B$



(m) $S_3(A) = (A \ominus 3B) - ((A \ominus 3B) \circ B)$



(n) $S(A) = S_0(A) \cup S_1(A) \cup S_2(A) \cup S_3(A)$

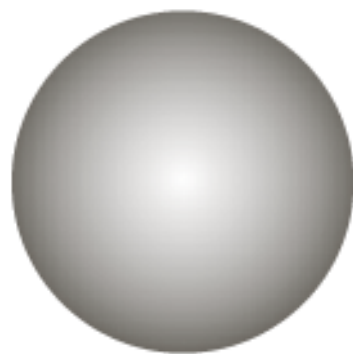
MM em Imagens em Níveis de cinza

- ◆ As operações morfológicas de dilatação, erosão, abertura e fechamento discutidas para imagens binárias possuem extensões para imagens em níveis de cinza.
- ◆ Em vez de apenas valores iguais a 0 ou 1, os pixels podem agora assumir valores em um intervalo $[L_{min}, L_{max}]$.
- ◆ Não apenas a imagem de entrada, mas o elemento estruturante também pode assumir intensidades de níveis de cinza.

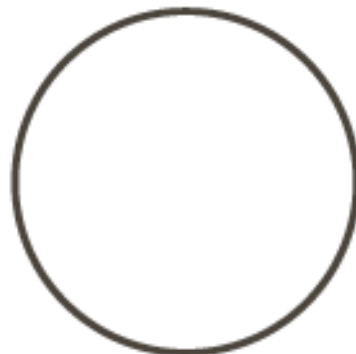
MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- ✦ Nos próximos slides, $f(x,y)$ e $b(m,n)$ são funções digitais que representam imagem e elemento estruturante, respectivamente.
- ✦ Os elementos estruturantes em níveis de cinza podem ser planos ou não planos, apesar de os planos serem os mais utilizados na prática.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



Nonflat SE



Flat SE



Intensity profile



Intensity profile

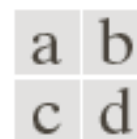


FIGURE 9.34
Nonflat and flat structuring elements, and corresponding horizontal intensity profiles through their center. All examples in this section are based on flat SEs.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- ◆ Dilatação: valor máximo da imagem na região do elemento estruturante.

- $[f \oplus b](x,y) = \max \{f(x-m,y-n) + b(m,n)\}$

em que $(m,n) \in b$, tal que $(m,n) = (0,0)$ é a origem do elemento estruturante b .

- ◆ Na dilatação aplica-se a translação do elemento estruturante sobre todas as posições da imagem e, em cada posição transladada, os valores do elemento estruturante são somados aos valores dos pixels da imagem, tomando-se o valor máximo.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- ◆ Erosão: valor mínimo da imagem na região do elemento estruturante.

- $[f \ominus b](x,y) = \min \{f(x-m,y-n) - b(m,n)\}$

- ◆ De maneira análoga, a erosão consiste na translação do elemento estruturante sobre todas as posições da imagem e, em cada posição translada, os valores do elemento estruturante são subtraídos dos valores dos pixels da imagem, tomando-se o valor mínimo.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- Dada a imagem f mostrada na figura (a), aplicar os operadores de dilatação e erosão com o elemento estruturante mostrado na figura (b). A origem do elemento estruturante é marcada com um quadrado.

20	23	26	28	32	25	25	17
17	19	19	35	28	34	33	28
34	36	27	33	37	44	40	41
32	27	18	16	21	26	28	32
34	27	25	23	24	35	37	29

(a) f

1	2	1
2	3	2
1	2	1

(b) b

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- ✦ Dada a imagem f mostrada na figura (a), aplicar os operadores de dilatação e erosão com o elemento estruturante mostrado na figura (b). A origem do elemento estruturante é marcada com um quadrado.

20	23	26	28	32	25	25	17
17	19	19	35	28	34	33	28
34	36	27	33	37	44	40	41
32	27	18	16	21	26	28	32
34	27	25	23	24	35	37	29

(a) f

1	2	1
2	3	2
1	2	1

(b) b

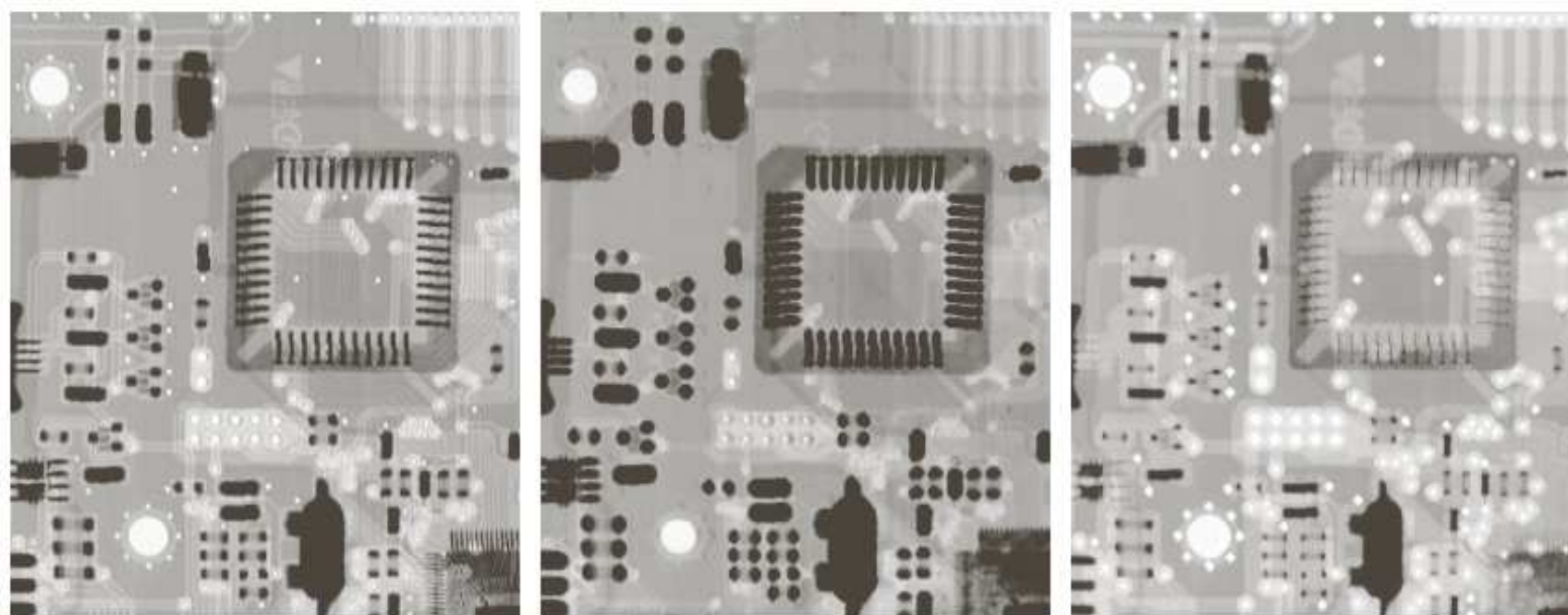
25	28	36	37	36	36	35	34
37	38	37	38	45	46	45	43
38	39	38	39	46	47	46	44
37	38	37	38	45	46	45	43
37	36	29	27	37	39	50	39

(c) $f \oplus b$

15	16	17	18	23	22	15	14
14	15	16	17	24	23	16	15
15	16	15	14	15	20	25	26
25	16	14	13	14	19	24	26
25	17	15	14	19	24	26	26

(d) $f \ominus b$

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



a b c

FIGURE 9.35 (a) A gray-scale X-ray image of size 448×425 pixels. (b) Erosion using a flat disk SE with a radius of two pixels. (c) Dilation using the same SE. (Original image courtesy of Lixi, Inc.)

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

✦ Abertura: $f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$.

✦ Fechamento: $f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

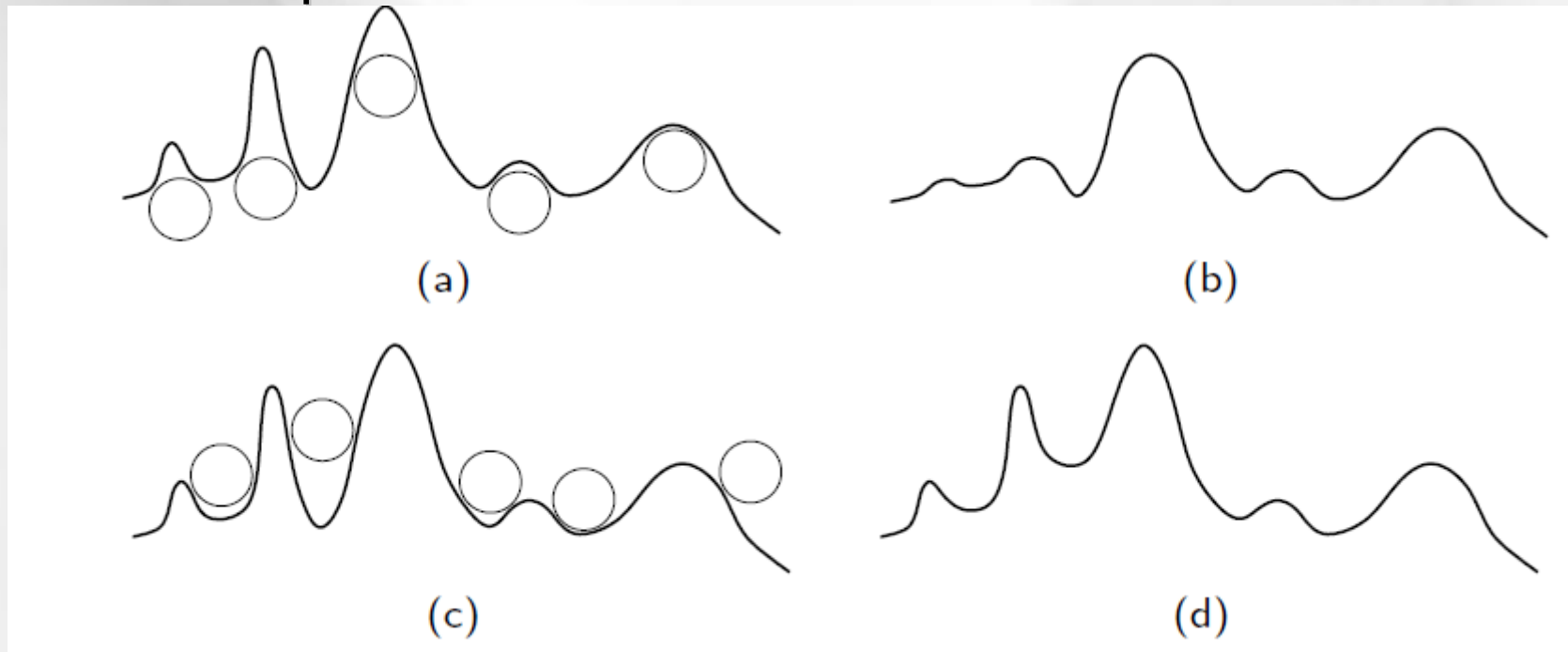
- O efeito dos operadores de abertura e fechamento pode ser observado pelo uso de um modelo geométrico.
- Seja b um elemento estruturante representado por um círculo com origem em seu centro.
- A abertura de f por b pode ser interpretada geometricamente como o deslocamento do elemento b sobre todo o domínio da imagem f .

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

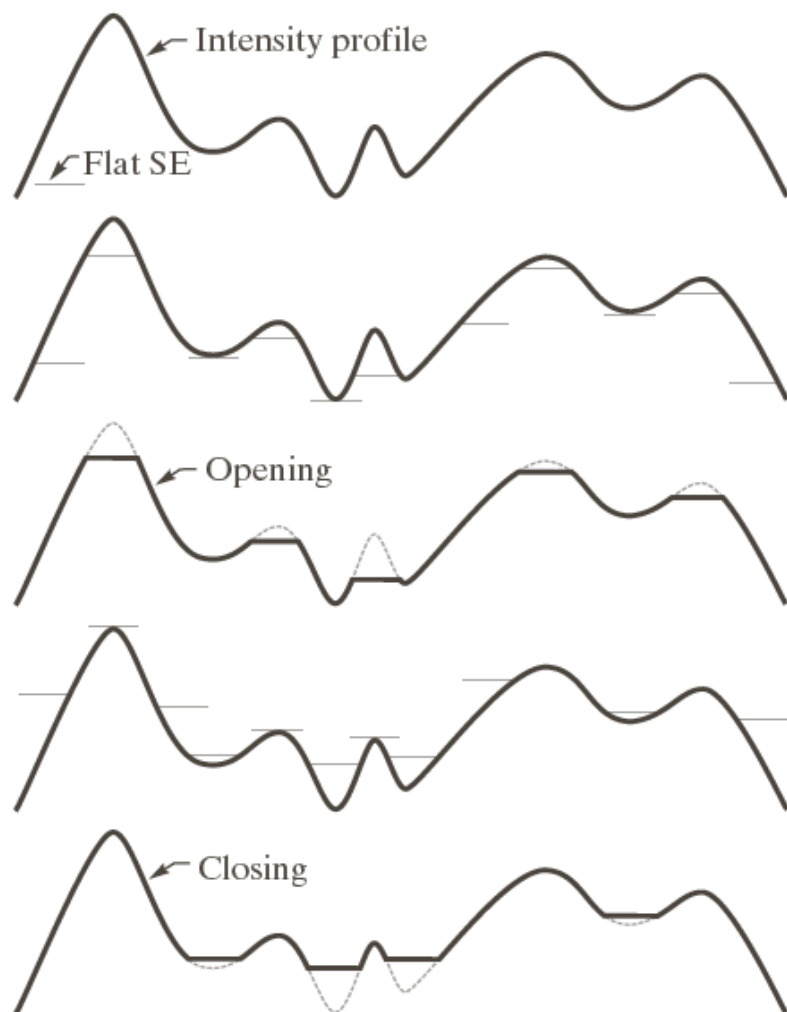
- ✦ Quando o centro do círculo está posicionado abaixo de um pixel da imagem, o valor resultante da operação de abertura é dado pelo ponto mais alto (máximo) alcançado por qualquer ponto do círculo.
- ✦ O fechamento, por sua vez, pode ser modelado pelo deslocamento do elemento estruturante sobre o topo da superfície e tomando-se o ponto mais baixo (mínimo) do círculo.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- ▶ A abertura pode ser vista como um processo de suavização, eliminando pequenos detalhes da imagem, enquanto o fechamento remove detalhes que são menores que o elemento estruturante.



MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



a
b
c
d
e

FIGURE 9.36

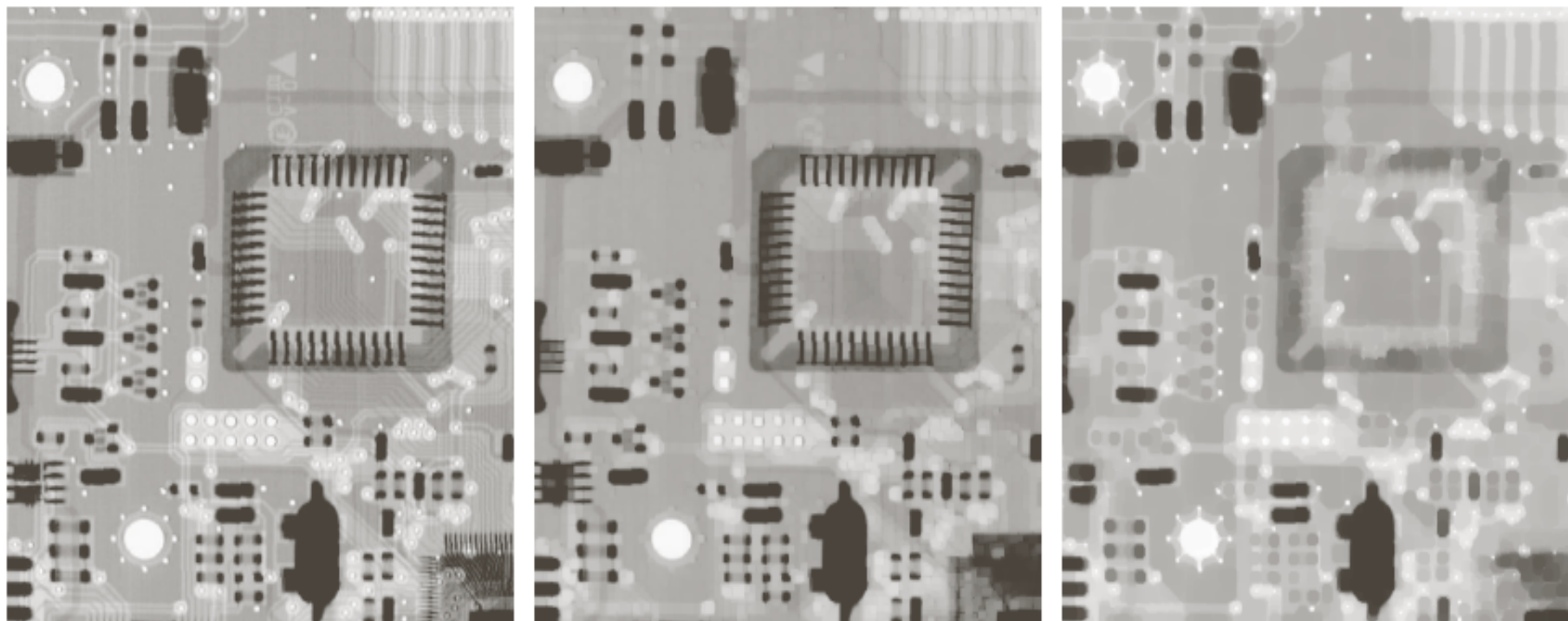
Opening and closing in one dimension. (a) Original 1-D signal. (b) Flat structuring element pushed up underneath the signal.

(c) Opening.

(d) Flat structuring element pushed down along the top of the signal.

(e) Closing.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



a b c

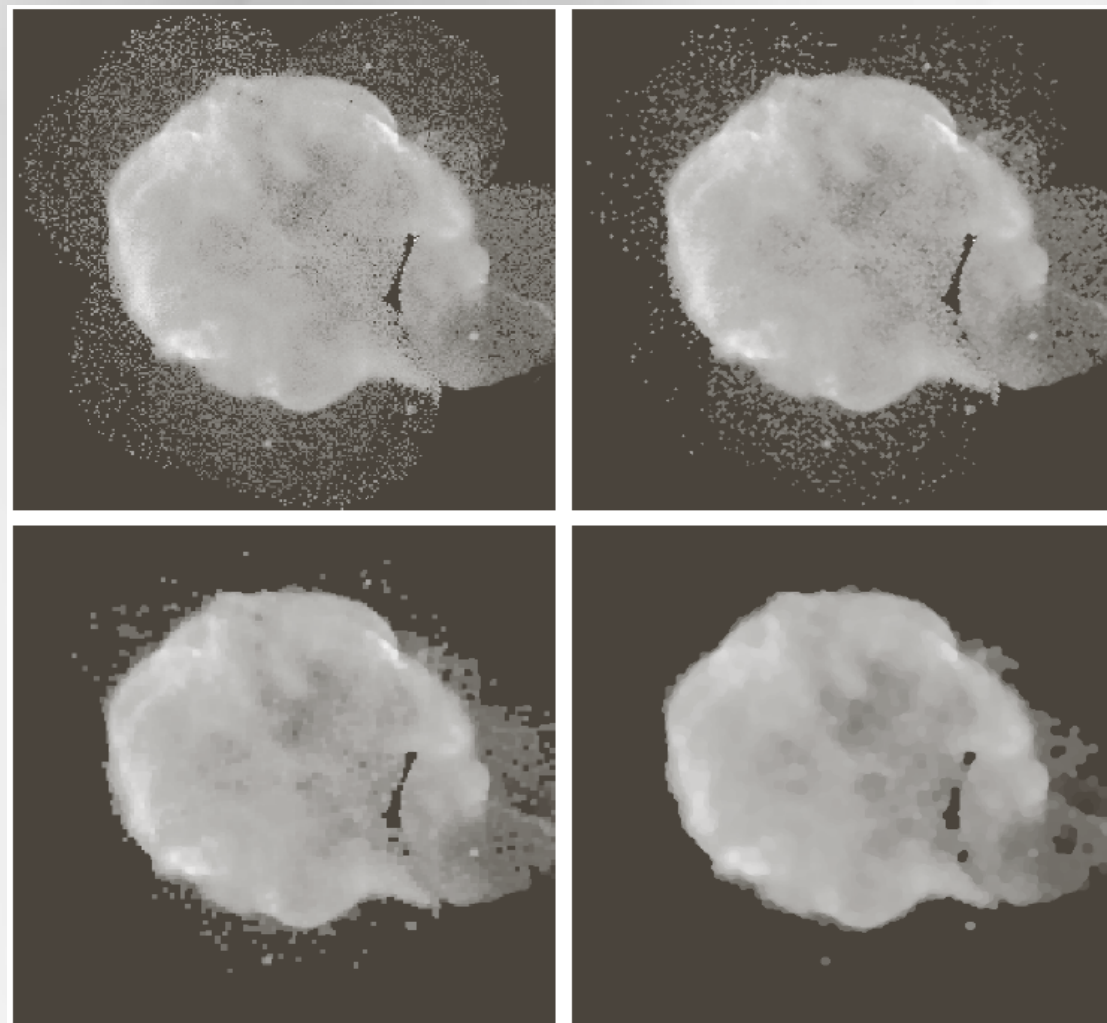
FIGURE 9.37 (a) A gray-scale X-ray image of size 448×425 pixels. (b) Opening using a disk SE with a radius of 3 pixels. (c) Closing using an SE of radius 5.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

◆ Suavização Morfológica:

- Gera uma imagem semelhante aos filtros da média ou mediana.
- Abertura remove domos e fechamento remove bacias.
- As operações podem ser utilizadas em conjunto para eliminar ruídos de imagens.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



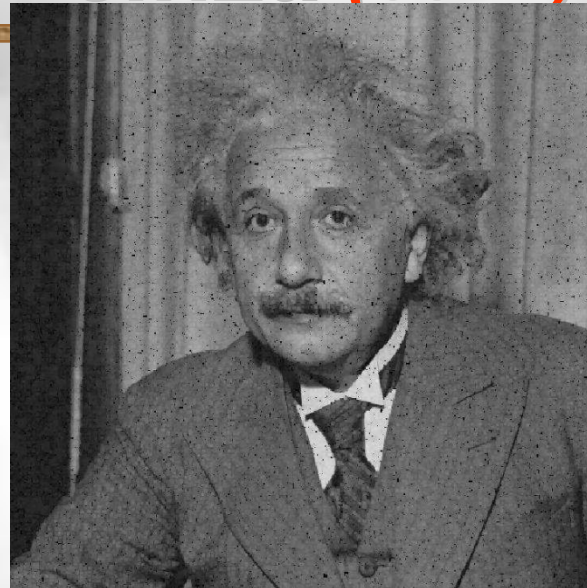
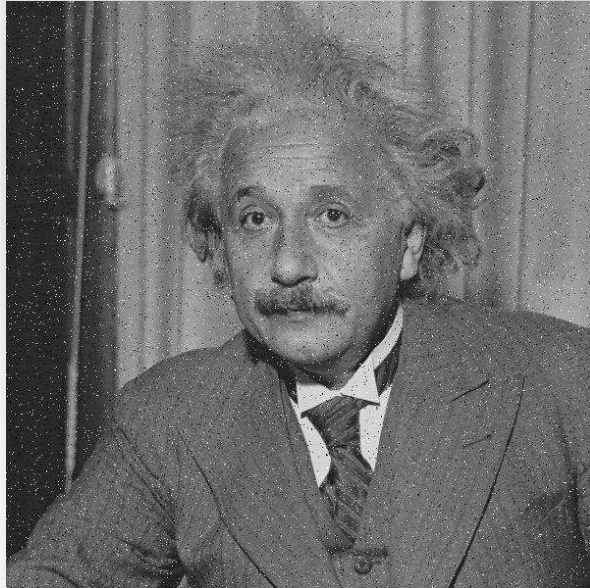
a b
c d

FIGURE 9.38
(a) 566×566 image of the Cygnus Loop supernova, taken in the X-ray band by NASA's Hubble Telescope. (b)–(d) Results of performing opening and closing sequences on the original image with disk structuring elements of radii, 1, 3, and 5, respectively. (Original image courtesy of NASA.)

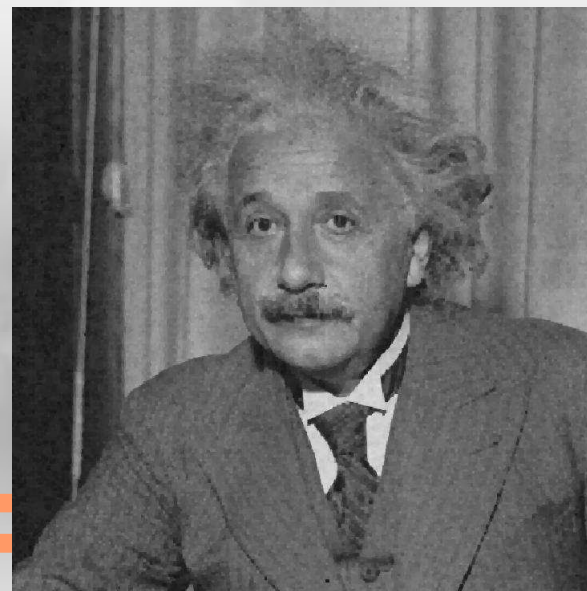
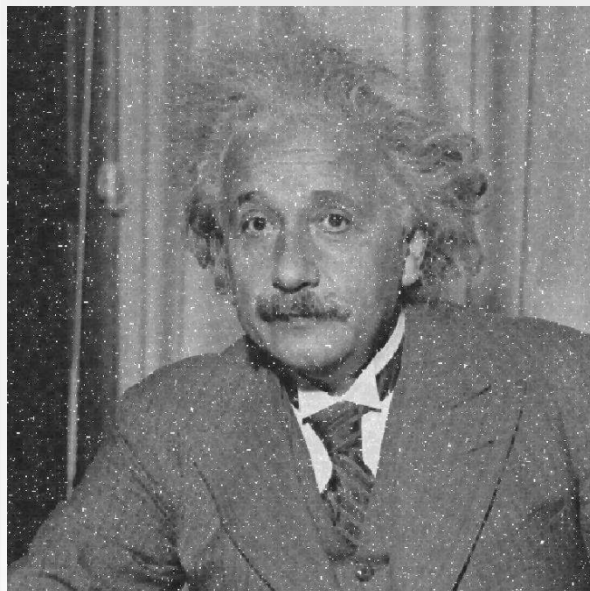
MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- ✦ Suavização Morfológica pela combinação de abertura e fechamento pode reduzir o efeito de ruído sal-e-pimenta em uma imagem.
- ✦ Essas operações podem remover pontos isolados claros e escuros presentes nas imagens, os quais podem ser resultantes de um processo de geração de ruído.
- ✦ Entretanto, pontos importantes de objetos na imagem podem também ser suprimidos por essas operações, causando uma degradação ou suavização da imagem.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



(a) (b)
(c) (d)



Suavização. (a) Figura corrompida por ruído sal-e-pimenta. (b) abertura da imagem A por um elemento B de 3×3 pontos, cuja origem está centro; (c) fechamento com o mesmo elemento estruturante; (d) resultado da combinação de abertura e fechamento.

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- ✦ A diferença entre uma imagem e o resultado de sua abertura é chamada de transformada **top-hat**, dada por:

- $TH(f) = f - (f \circ b)$

- ✦ Uma função similar, conhecida como transformada **bottom-hat**, é definida como a diferença entre o resultado do fechamento e a imagem original, dada por:

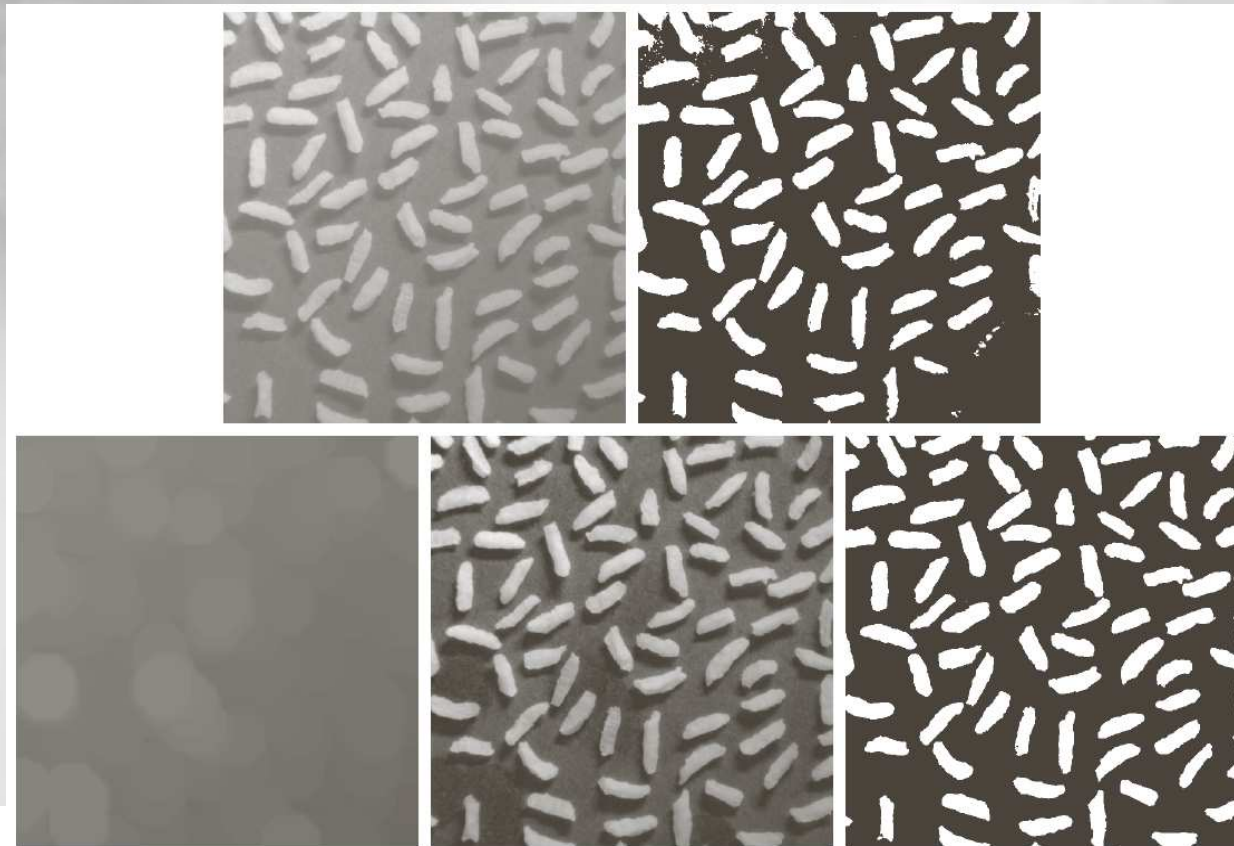
- $BH(f) = (f \bullet b) - f$

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

- As transformadas *top-hat* e *bottom-hat* podem ser combinadas para realçar o contraste por meio da adição do resultado da transformada *top-hat* à imagem original, seguida da subtração do resultado da transformada *bottom-hat*, ou seja:

$$\bullet g = f + TH(f) - BH(f)$$

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



a b
c d e

FIGURE 9.40 Using the top-hat transformation for *shading correction*. (a) Original image of size 600×600 pixels. (b) Thresholded image. (c) Image opened using a disk SE of radius 40. (d) Top-hat transformation (the image minus its opening). (e) Thresholded top-hat image.

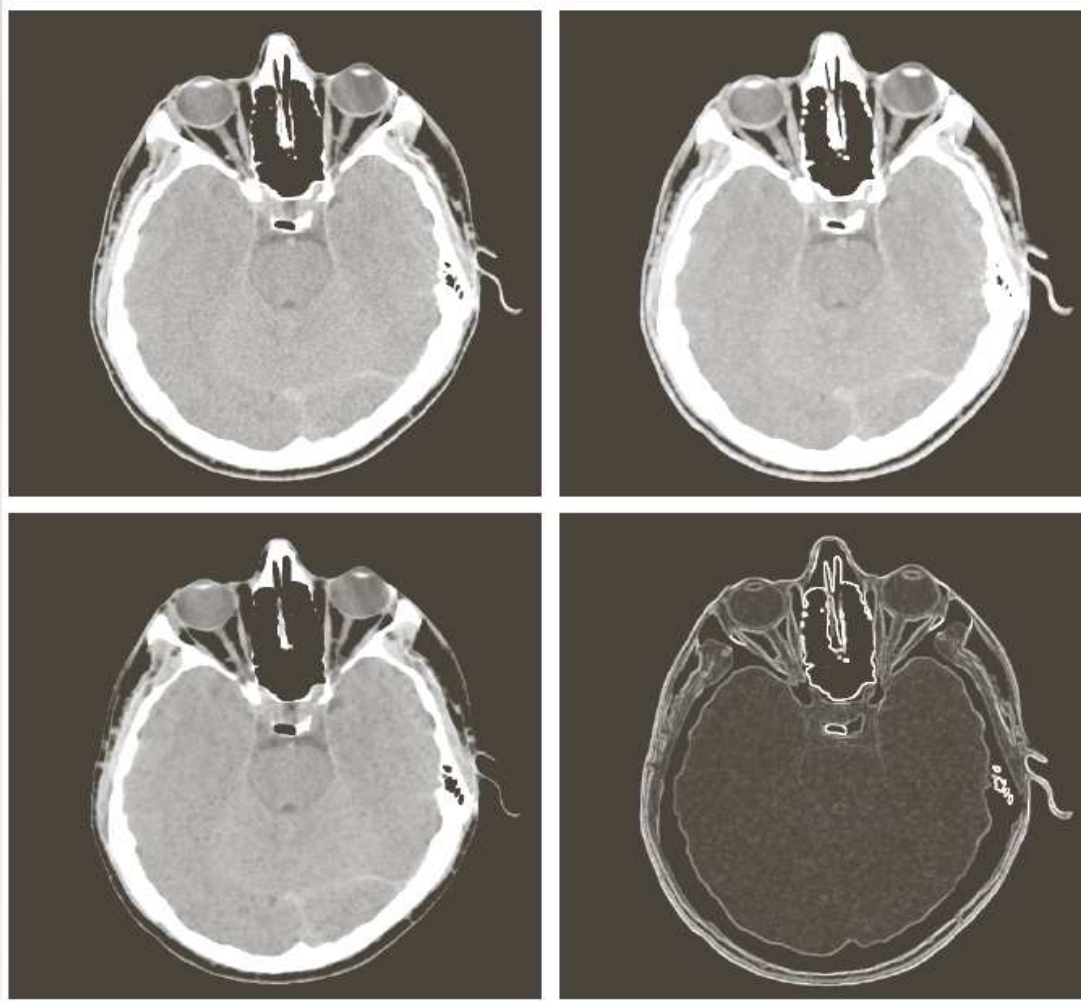
MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)

◆ Gradiente morfológico em imagem em níveis de cinza:

◆ Gera uma imagem semelhante aos filtros Laplaciano ou de Sobel.

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

MM em Imagens em Níveis de cinza (cont.)



a	b
c	d

FIGURE 9.39

(a) 512×512 image of a head CT scan.

(b) Dilation.

(c) Erosion.

(d) Morphological gradient, computed as the difference between (b) and (c). (Original image courtesy of Dr. David R. Pickens, Vanderbilt University.)

Referências

◆ Slides:

- Alguns slides do Prof. Fabio Cappabianco (UNIFESP)
- Alguns slides do Prof. Fabio Faria (UNIFESP)
- Alguns slides do Prof. Hélio Pedrini (IC/UNICAMP)

◆ Livro:

- Gonzalez, R. C.; Woods, R. E. Digital Image Processing, 3rd. ed, Addison Wesley Pub , 2001.
- Pedrini, H.; Schwartz, W. R. Análise de Imagens Digitais – Princípios, Algoritmos e Aplicações, ed. Thomson Learning, 2008.