Digital Combinational Circuit 1 (with K-map)

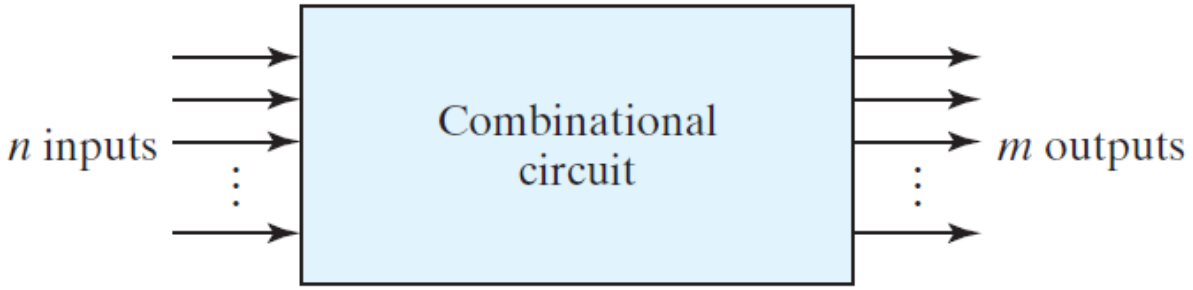
Shinwoong Kim

목표

- **조합 논리 회로(Combinational logic circuit) 시스템을 설계할 수 있다.**
  - ✓ 진리표를 사용하여 주어진 문제를 나타내는 논리를 표현할 수 있다.
  - ✓ 진리표를 해석하여 필요한 조합회로를 구성할 수 있다.
- **Karnaugh Map (K-map)을 사용하여 로직을 단순화할 수 있다.**
  - ✓ 단순화 된 로직으로 조합 논리 회로를 구성하여 시스템 설계를 할 수 있다.

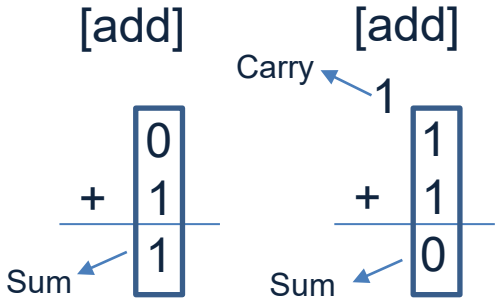
Combinational Logic System

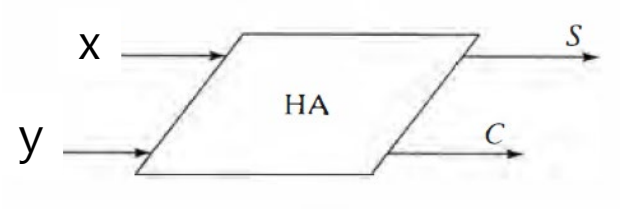
- **Combinational circuit**
  - ✓ It consists of an interconnection of logic gates
  - ✓ Outputs are determined at any time from only the present combination of inputs
  - ✓ It performs an operation that can be specified logically by a set of Boolean function
  - ✓ No feedback path or memory elements
  - ✓ No operating clock



Half Adder (1bit Adder)

- **Basic combinational system**
- **2-input and 2-output**
  - ✓ Two binary input, sum and carry

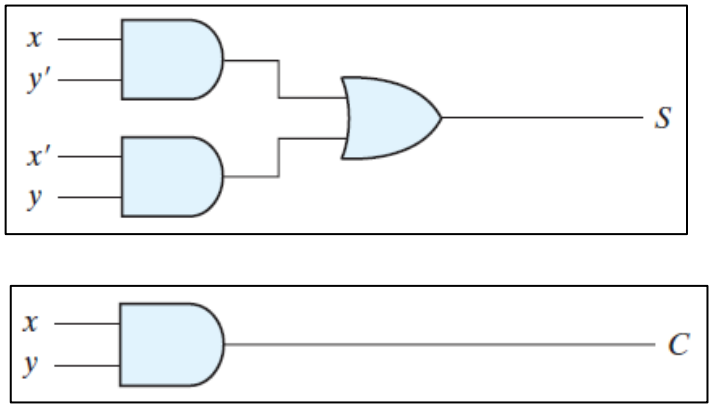


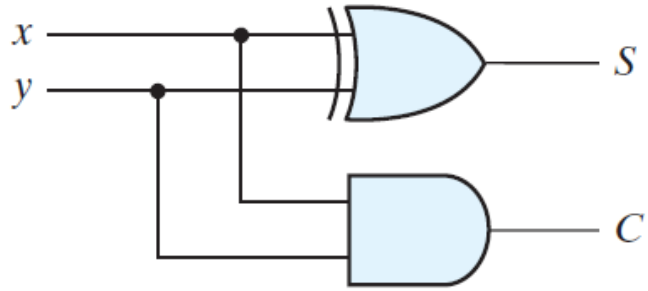


Half Adder

x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$S = x'y + xy'$$
$$C = xy$$





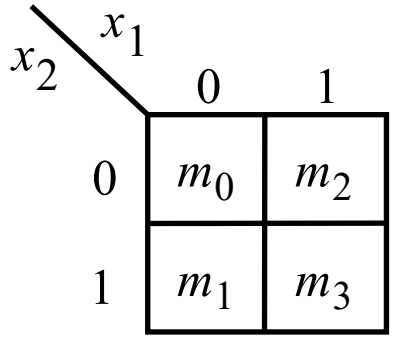
$$S = x \oplus y$$
$$C = xy$$

Karnaugh Map

- **Refer to as 'K-map'**
  - ✓ Graphical approach to find minimum logic expression
  - ✓ 2-dimensional truth table
  - ✓ K-map consists of each square for each possible minterm in a function.

x_1	x_2	minterm
0	0	m_0
0	1	m_1
1	0	m_2
1	1	m_3

(a) Truth table



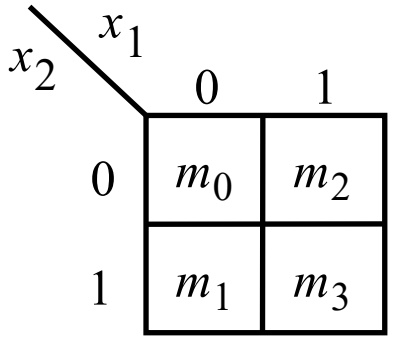
(b) Karnaugh map

Karnaugh Map

- **2-variable K-map**

x_1	x_2	minterm
0	0	m_0
0	1	m_1
1	0	m_2
1	1	m_3

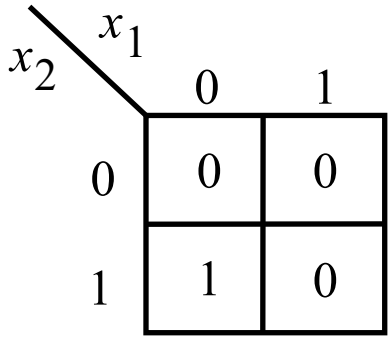
(a) Truth table



(b) Karnaugh map

e.g.,

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0



Karnaugh Map

- **3-variable K-map**

x_1	x_2	x_3	minterm
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

(a) Truth table

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

(b) Karnaugh map

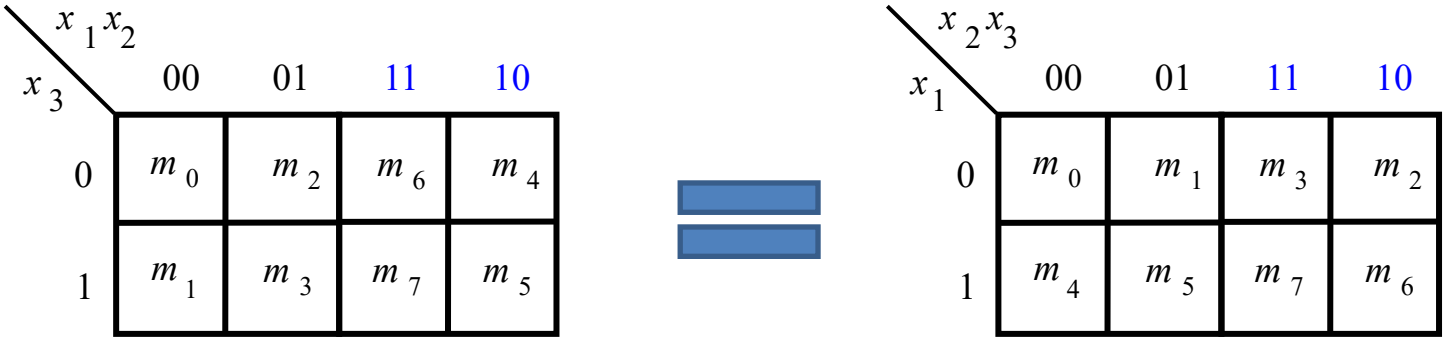
e.g.,

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Karnaugh Map

- **3-variable K-map**
  - ✓ Row of the map with first variable has the same results



  - ✓ **Last two columns are not in numeric order**
    - This is the key idea that makes the map work
    - The minterms in adjacent square can always be combined using the adjacency property

$$\textbf{P9a.} \qquad ab + ab' = a$$

Karnaugh Map

- **4-variable K-map**

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

Karnaugh map

e.g.

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**0**
1	1	1	1	**1**

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	*0*	*1*	*0*	*0*
01	*1*	*1*	*1*	*1*
11	*0*	*1*	*1*	*0*
10	*0*	*1*	*0*	*0*

Minimum SOP using K-map

- **Square grouping in K-map**
  - ✓ Adjacent squares differ only by one literal in minterm expression
  - ✓ If the value of adjacent squares is '1', they can be combined and reduced
  - ✓ Using the property **P9a.** $ab + ab' = a$

b \ a	0	1
0	a'b' (m0)	ab' (m2)
1	a'b (m1)	ab (m3)

K-map for f (a,b)

e.g.

a b	f
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

f = m1+m2+m3
= Σm(1,2,3)
= a'b+ab'+ab (SOP)
→ a+b (min. SOP)

b \ a	0	1
0	0	1
1	1	1

ab+ab'
→ a

a'b + ab
→ b

How to Group?

- **Principles of K-map grouping**
  - ✓ Grouping only logic '1' squares
  - ✓ Grouping only rectangles
    - # of square in each rectangle: 1, 2, 4, 8, 16, or 32
  - ✓ Groups can be overlapped
  - ✓ Grouping around boundary is OK

- **To get an optimal grouping?**
  - ✓ Minimize the # of groups
  - ✓ Make each group as big as possible

Example #1 : 2-variable K-map

e.g., 1

b \ a	**0**	**1**
0	**1**	0
1	**1**	**1**

f(a,b) = a' + b

e.g., 2

b \ a	**0**	**1**
0	1	0
1	1	0

f(a,b) = a'

e.g., 3

b \ a	**0**	**1**
0	1	0
1	0	1

f(a,b) = a'b' + ab

Example #2 : 3-variable K-map

e.g., 1

c \ a b	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1

$f(a,b,c) = \Sigma m(0,2,4,5,6)$
$= c' + ab'$

a \ b c	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

$f(a,b,c) = \Sigma m(0,2,4,5,6)$
$= c' + ab'$

b c \ a	0	1
00	1	1
01	0	1
11	0	0
10	1	1

$f(a,b,c) = \Sigma m(0,2,4,5,6)$
$= c' + ab'$

Example #2 : 3-variable K-map

e.g., 2

c \ a b	00	01	11	10
0	0	0	**1**	**1**
1	**1**	0	0	**1**

f(a,b,c) = ac' + b'c

e.g., 3

c \ a b	00	01	11	10
0	0	**1**	0	**1**
1	0	0	**1**	**1**

f(a,b,c) = a'bc' + ac + ab'

Example #3 : 4-variable K-map

e.g., 1

c d \ a b	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

f(a,b,c,d) = ac'd + b'c

e.g., 2

c d \ a b	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

f(a,b,c,d) = ad + c

e.g., 3

c d \ a b	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	1	1	1	0
10	1	1	0	1

f(a,b,c,d) = b'd' + a'c + bcd

e.g., 4

c d \ a b	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

f(a,b,c,d) = a'c' + ab + ac

실습

- **자판기 설계 (Vending machine)**
  - ✓ **문제정의**
    - 음료수 선택: 500원, 600원 음료수 2가지 종류가 있음 (1bit, S)
    - 금액 입력: 500원 단위 (1bit, N_2), 100원 단위 (2bits, N_1N_0) 입력
    - 출력: 음료수 출력 표시 (G_1, G_0), 100원 단위 거스름돈(2bits, C_1C_0)
    - 즉, 입력은 총 4btis (S N_2 N_1 N_0), 출력 총 4bits (G_1 G_0, C_1 C_0)

S: 제품선택

S	제품
0	500원
1	600원

G1: 600원 제품 출력
G0: 500원 제품 출력

N2N1N0: 투입금

N2	금액
0	0원
1	500원

N1N0	금액
00	0원
01	100원
10	200원
11	300원

C1C0	잔돈 출력
00	0원
01	100원
10	200원
11	300원

실습

- **자판기 설계 (Vending machine)**
  - ✓ 진리표

		입력				출력			
제품	금액	S	N2	N1	N0	G1	G0	C1	C0
500원 제품 선택	0원	0	0	0	0	0	0	0	0
	100원	0	0	0	1	0	0	0	0
	200원	0	0	1	0	0	0	0	0
	300원	0	0	1	1	0	0	0	0
	500원	0	1	0	0	0	1	0	0
	600원	0	1	0	1	0	1	0	1
	700원	0	1	1	0	0	1	1	0
	800원	0	1	1	1	0	1	1	1
600원 제품 선택	0원	1	0	0	0	0	0	0	0
	100원	1	0	0	1	0	0	0	0
	200원	1	0	1	0	0	0	0	0
	300원	1	0	1	1	0	0	0	0
	500원	1	1	0	0	0	0	0	0
	600원	1	1	0	1	1	0	0	0
	700원	1	1	1	0	1	0	0	1
	800원	1	1	1	1	1	0	1	0

✓ **S: 제품 선택**
- 1'b0=500원 음료
- 1'b1=600원 음료

✓ **N2: 금액 입력 (500원 단위)**
- 1'b0=0원
- 1'b1=500원

✓ **N1N0: 금액 입력 (100원 단위)**
- 2'b00=0원
- 2'b01=100원
- 2'b10=200원
- 2'b11=300원

✓ **G1G0: 음료 출력 구분**
- If G1
  - 1'b0= 600원 음료 미출력
  - 1'b1= 600원 음료 출력
- If G0
  - 1'b0= 500원 음료 미출력
  - 1'b1= 500원 음료 출력

✓ **C1C0: 거스름돈 구분**
- 2'b00=0원
- 2'b01=100원
- 2'b10=200원
- 2'b11=300원

실습

- **(1) Boolean 수식 유도 (K-map 사용)**
  - ✓ G1, G0

➢ **G1**

S N2 / N1 N0	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

G1 =

➢ **G0**

S N2 / N1 N0	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

G0 =

실습

- **(1) Boolean 수식 유도 (K-map 사용)**
  - ✓ C1, C0

➢ **C1**

S N2 / N1 N0	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	1	1	0
10	0	1	0	0

C1 =

➢ **C0**

S N2 / N1 N0	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	0	0	1	0

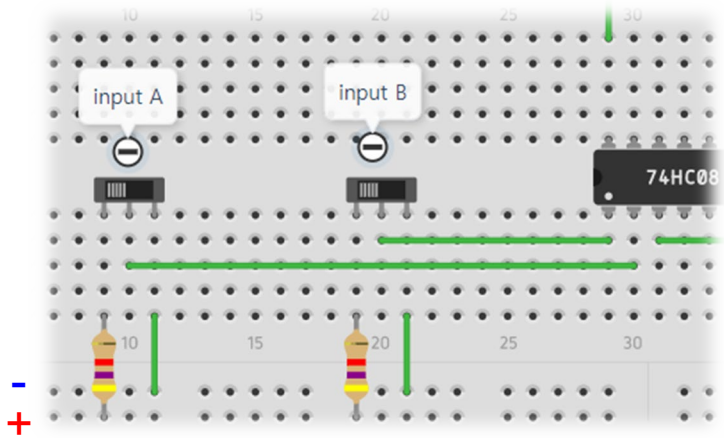
C0 =

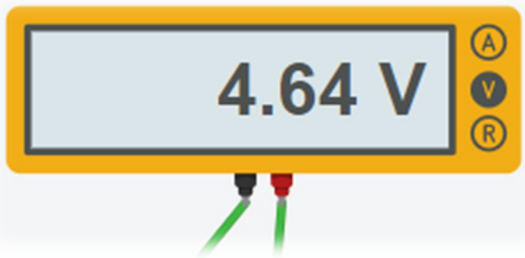
실습

- **(1) Boolean 수식 유도 (K-map 사용)**
  - ✓ **[참고]** K-map을 minterm을 이용하여 구하면, 즉 logic 1을 기준으로 묶어서 구하면 SOP type으로만 표현이 됨
  - ✓ 즉, Y = ABC + ABD의 형태를 가짐
    - 이 경우 실제 회로로 구현하는 경우, 현재 2-input 로직 게이트만 사용 가능하므로, AND gate 3개, OR gate 1개가 필요함
  - ✓ 그러나 추가로 Distributive 성질을 이용하여 Boolean 수식을 줄이게 되면,
    - Y = AB(C+D)가 되므로, AND gate 2개, OR gate 1개만 사용하면 됨
    - 따라서, K-map 사용 이후, 수식의 형태를 조금 더 바꾸면 회로 구현하기 그나마 쉬워 짐

실습

- **(2) TinkerCAD 활용하여 Vending machine 구현**
  - ✓ TinkerCAD에서 Breadboard는 2개만 사용 (EEBoard 사이즈 고려)
    - 특별히 입력 제어로는 '슬라이드 스위치' 사용 → 조교 확인을 위해 TinkerCAD simulation 수행 중 입력 변경이 용이함
    - TinkerCAD에서 회로 출력은 LED 연결할 필요 없으며 멀티미터 출력만 연결해 놓으면 됨





  - ✓ 사전에 해당 내용을 미리 수행해도 되며, 이 경우 실험 당일 날에는 조교 검사만 받고 바로 퇴실 가능 ☺