

# Математический анализ и линейная алгебра

## Домашнее задание №3

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 30, 2018

### 1 Задачи

#### 1.1 Задача 1

Данная задача была решена ранее, как задача 5 задания 3.

#### 1.2 Задача 2

Найдём частные производные  $f(x, y) = ye^{xy}$ :

$$\begin{aligned}f_x &= y^2 e^{xy} \\f_y &= e^{xy} + y(xe^{xy}) = e^{xy}(1 + xy).\end{aligned}$$

Отсюда, составим уравнение касательной плоскости в точке  $(a, b)$ :

$$\begin{aligned}z &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\&= be^{ab} + b^2 e^{ab}(x - a) + e^{ab}(1 + ab)(y - b) \\&= e^{ab}(b + b^2(x - a) + (1 + ab)(y - b)).\end{aligned}$$

Тогда, мы сможем воспользоваться уравнением данной касательной плоскости в точке  $(a, b)$ , как линейной аппроксимацией значения функции в окрестности данной точки. Так, для заданной точки  $(x, y) = (-0.1, 1.1)$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) \Big|_{(x, y) = (-0.1, 1.1)} &\approx e^{ab}(b + b^2(x - a) + (1 + ab)(y - b)) \Big|_{(a, b) = (0, 1), (x, y) = (-0.1, 1.1)} \\&= 1(1 + 1^2(x - 0) + 1(y - 1)) \Big|_{(x, y) = (-0.1, 1.1)} = 1 - 0.1 + (1.1 - 1) = 1.\end{aligned}$$

Т.е. приближённое значение данной функции в точке  $(x, y) = (-0.1, 1.1)$  равно 1. Справочно, более точное значение функции в заданной точке равно 0.9854175488261812, следовательно, погрешность вычисления составила примерно 1.5%.

#### 1.3 Задача 3

Вычислим требуемые частные производные для  $f(x, y) = \sin(x + y) - \cos(x^2)$ :

$$\begin{aligned}f_x &= \cos(x + y) + 2x \sin(x^2), & f_{xx} &= -\sin(x + y) + 2 \sin(x^2) + 2x2x \cos(x^2), \\f_y &= \cos(x + y), & f_{yy} &= -\sin(x + y), \\& & f_{xy} &= -\sin(x + y).\end{aligned}$$

Тогда ряд Тейлора до второго порядка включительно для указанной функции в точке  $(0, 0)$  будет следующим:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2!}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + R_n \\&= -1 + x + y + \frac{1}{2}(0) + R_n = x + y - 1 + R_n.\end{aligned}$$

#### 1.4 Задача 4

Область  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная  $x = 1, y^2 = 2x$ , - это область с координатами  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \sqrt{2x}]$ .

Тогда заданный двойной интеграл равен:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2: x=1, y^2=2x} xy^2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x}} xy^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} xy^3 \Big|_0^{\sqrt{2x}} dx = \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{5/2} dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{21}. \end{aligned}$$