

Математический анализ и линейная алгебра

Домашнее задание №2

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 27, 2018

1 Задачи

1.1 Задача 1

а) Согласно определению $O(g(x))$ проверим выполняется ли условие

$$\left| \frac{x^2 + 3}{x - 4} \right| < C|x|, x \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Для чего приведём неравенство в такой вид, чтобы его можно было легко проверить:

$$\frac{x^2 + 3}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 4) + 19}{x - 4} = (x + 4) + \frac{19}{x - 4} \quad (2)$$

Подставим получившееся выражение 2 в неравенство 1.

$$\left| (x + 4) + \frac{19}{x - 4} \right| < C|x| \Rightarrow \left| 1 + \frac{4}{x} + \frac{19}{x(x - 4)} \right| < C, \quad x \rightarrow \infty$$

Левая часть неравенства при $x \rightarrow \infty$ стремится к 1, что меньше константы C , соответственно, исходное утверждение - верное.

б) Согласно определению $O(g(x))$ проверим выполняется ли условие

$$\left| \frac{x^2 + 3}{x - 4} \sin x \right| < C|x^k|, x \rightarrow 0.$$

Воспользуемся выражением 2 и упростим неравенство:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \left(x + 4 + \frac{19}{x - 4} \right) \frac{\sin x}{x^k} \right| < C.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x + 4 + \frac{19}{x - 4} \right| \times \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x^k} \right| < C \Rightarrow \frac{35}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x^k} \right| < C. \quad (3)$$

Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x^k} \right| = 1$, при $k = 1$. Соответственно, при $k = 1$ неравенство 3 - верно, следовательно, при данном k верно и исходное утверждение.

с) Согласно определению $o(g(x))$ проверим чему равен предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{5x^3}{x^2 \sqrt{x}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} |5\sqrt{x}|. \quad (4)$$

Данный предел равен нулю при $x \rightarrow 0^+$, но не при $x \rightarrow 0^-$. Соответственно, исходное утверждение - неверное.

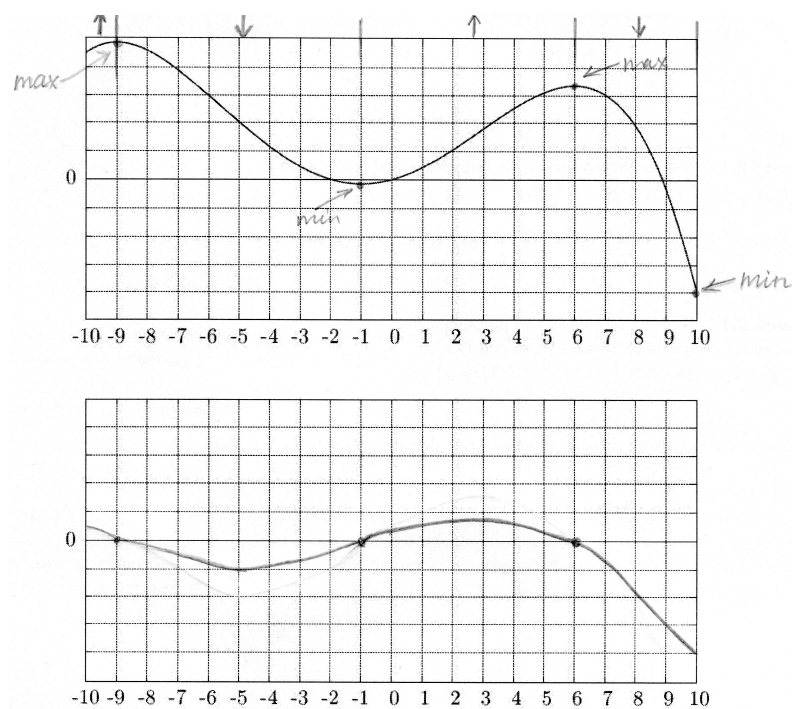


Figure 1: График производной по графику её функции (пункт а)

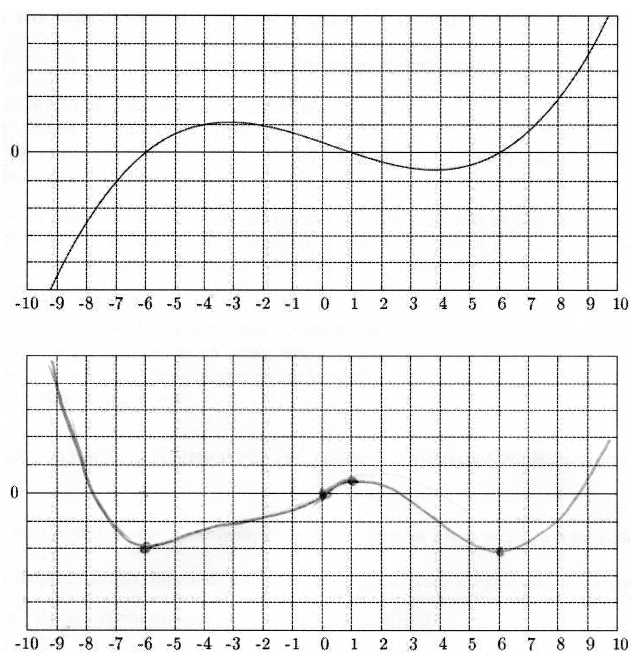


Figure 2: График функции по графику её производной (пункт б)

1.2 Задача 2

См. рис. 1, рис. 2.

1.3 Задача 3

Данная задача была выполнена в задаче 6 домашней работы 1.

1.4 Задача 4

- 1) данный пункт был выполнен в задаче 7 домашней работы 1,
- 2) данный пункт был выполнен в задаче 7 домашней работы 1,
- 3) не выполнен.

1.5 Задача 5

(не выполнена)

1.6 Задача 6

Попробуем оценить сходимость ряда, сравнив его с другим, с известной сходимостью. Обозначим, что заданный ряд - это $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, он состоит из членов $a_n = \frac{1}{n!}$. Тогда, мы можем его сравнить с рядом S_2 с членами $b_n = \frac{1}{2^n}$. Т.к. соблюдается условие, что $b_n > a_n, n \geq 4$, и $(a_1 + a_2 + a_3)$ - конечная сумма, то нам достаточно доказать, что ряд S_2 сходится. Несложно заметить, что b_n - это члены геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{2}$, сумма такого ряда равна $\frac{1}{1-q} = 2$. Т.к. данная сумма - конечна, то S_2 - сходится, соответственно, сходится и исходный ряд тоже сходится.

1.7 Задача 7

Воспользуемся теоремой Тейлора и найдём аппроксимацию значения функции в окрестности указанного значения аргумента функции. Положим x_0 равным нулю, учтём, что все производные любого порядка от e^x равны $[e^x]^{(n)} = e^x$. тогда:

$$e^x = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} + \frac{e^x}{(n+1)!}, |x-0| < 1$$
$$\Rightarrow e^{1/4} = \sum_{i=0}^n \frac{(1/4)^i}{i!} + \frac{e^{1/4}}{(n+1)!}.$$

Для оценки значения n воспользуемся тем соображением, что остаточный член должен быть не больше требуемой погрешности 0.001:

$$\frac{e^{1/4}}{(n+1)!} \leq 0.001.$$

Для разрешения данного неравенства воспользуемся каким-нибудь известным значением, ограничивающее значение в левой части неравенства сверху, при этом связанным с n , например,

$$\frac{e^{1/4}}{(n+1)!} < \frac{e^{1/2}}{(n+1)!} \leq 0.001.$$

Значение $e^{1/2} \approx 1.7$, тогда методом подбора n равно 6, т.е. достаточно вычислить сумму нулевого и остальных шести членов ряда, чтобы определить значение $e^{1/4}$ с точностью, не хуже заданной:

$$e^{1/4} \approx \sum_{i=0}^6 \frac{(1/4)^i}{i!} \approx 1.284.$$

Значение суммы выше было вычислено на компьютере, используя программу, приведенную ниже. Также, были вычислены суммы и для других n , расположенных рядом. Любопытно отметить, что было бы достаточно взять $n = 4$ для достижения требуемой точности.

Listing 1: Python-скрипт для приближенного вычисления $e^{1/4}$

```
import math

y = math.e**(1/4)

print('True:  y = %1.10f' % y)

print()

for n in (3,4,5,6):
    s = 0
    for i in range(n+1):
        s += (1/4)**i/math.factorial(i)
    print('n = %d, s = %1.10f, delta = %0.10f' % (n, s, abs(s - y)))
```

Вывод программы:

```
True:  y = 1.2840254167

n = 3, s = 1.2838541667, delta = 0.0001712500
n = 4, s = 1.2840169271, delta = 0.0000084896
n = 5, s = 1.2840250651, delta = 0.0000003516
n = 6, s = 1.2840254042, delta = 0.0000000125
```

1.8 Задача 8

Представим заданную площадь S на рис. 3.

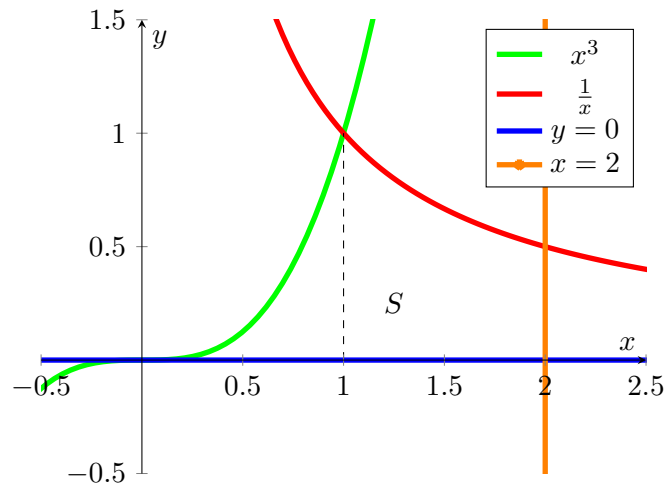


Figure 3: Площадь заданная функциями

Можно заметить, что она состоит из двух частей, разделённых линией $x^3 = \frac{1}{x}, x > 0 \Rightarrow x = 1$, соответственно, исходя из графиков функций, которые ограничивают её сверху, мы можем вычислить значение полной площади:

$$S = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 + \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \ln 2.$$