Теория вероятностей и математическая статистика
Домашнее задание №2

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 15, 2018

1 Вопросы

1.1 Вопрос 1

Плотность распределения случайной величины определяется такой функцией (называемой функцией плотности распределения), которая удовлетворяет следующим условиям:

- $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1.2 Вопрос 2

Функция $F(x)$ не является функцией распределения, так как она не растёт монотонно на области определения, что противоречит её определению. Так, для данной функции $P(X \leq 0) > P(X \leq 1)$, что некорректно.

1.3 Вопрос 3

Да, могут, теория вероятностей не накладывает ограничения по уникальности распределений для случайных величин. Пример: случайные величины X, Y - выпавшие значения кубиков 1 и 2, соответственно. У них будут одинаковые распределения (таблицы распределений), при этом это две разные случайные величины.

2 Задачи

2.1 Задача 1

Воспользуемся свойством функции плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{C}{x^4}dx = 1 \Rightarrow \lim_{x' \to +\infty} \int_{1}^{x'} Cx^{-4}dx = 1.$$

Первообразная для подынтегральной функции $F(x) = -C\frac{1}{3}x^{-3} + 1$. Тогда

$$\lim_{x' \to +\infty} \int_{1}^{x'} Cx^{-4}dx = 1 \Rightarrow \lim_{x' \to +\infty} F(x') - F(1) = 1 \Rightarrow -C\frac{1}{3} \lim_{x \to +\infty} x^{-3} - -C\frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{C = 3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{if } x < 1 \\ 3x^{-4} & ,\text{if } x \geq 1 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{if } x < 1 \\ 1 - x^{-3} & ,\text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

$$P(X < 3) = P(1 < X < 3) = \int_{1}^{3} f(x)dx = F(x)|_1^3 = -x^{-3}|_1^3 = -\frac{1}{3^3} - -1 = \boxed{\frac{26}{27}}.$$

$$P(X > 7) = \int_{7}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \Rightarrow +\infty} F(x) - F(7) = 0 - -\frac{1}{7^3} = \boxed{\frac{1}{343}}.$$

2.2 Задача 2

Обозначим:

- X - количество страховых случаев,
- $n = 40000$ - количество договоров,
- $p = 0.02$ - вероятность страхового случая.

При заданных условиях $X \sim Bin(n, p)$ (X распределена согласно биномиальному распределению).

Воспользуемся теоремой Муавра-Лапласа для подсчёта $P(X \le 870)$, т.к. для подсчёта по биномиальным коэффициентам придётся считать очень большой ряд, а заданные параметры (большое n) позволяют воспользоваться теоремой. Тогда:

$$\mathbb{E}[X] = np \Rightarrow \mu = 800,$$
$$\mathbb{D}[X] = npq \Rightarrow \sigma^2 = 784.$$

Искомая вероятность:

$$P(X \le 870) = P(\frac{X - 800}{\sqrt{784}} \le \frac{870 - 800}{\sqrt{784}}) = P(\frac{X - 800}{28} \le 2.5) = F_0(2.5) = .99379.$$

2.3 Задача 3

A и B встречаются на интервале одного часа, который можно представить геометрически в виде рис. 1:

- оси представляют время появления A и B, соответственно,
- область S, окрашенная светло-жёлтым, обозначает то множество временных точек, когда A и B могут встретиться: данная область сформирована, исходя из условия, что разница времён прихода A и B не может превышать 20 минут для того, чтобы встреча состоялась,
- остальные две области за пределами S обозначает то множество временных точек, когда A и B разминутся.

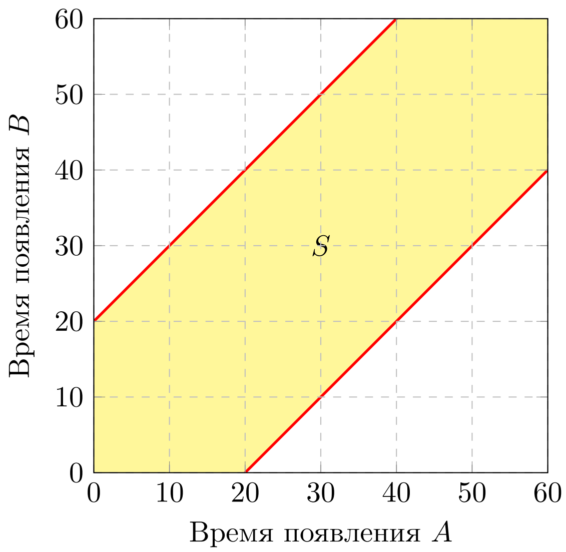

Figure 1: Интервалы встречи A и B

Соответственно, отношение площади области S к общей площади (площади полной вероятности) и даст искомую вероятность встречи.

Для удобства счёта примем стороны квадрата за 6, тогда площади областей за пределами S - это будут площади двух прямоугольных треугольников с катетами, равными 4.

$$p = \frac{\text{Площадь фигуры } S}{\text{Полная площадь}} = \frac{6 \times 6 - 2\frac{1}{2}4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

2.4 Сложная задача

(не выполнена)