

# Математический анализ и линейная алгебра

## Домашнее задание №1

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 26, 2018

### 1 Задача 1

Графики заданных функций  $a-f$  отображены на рис. 1.

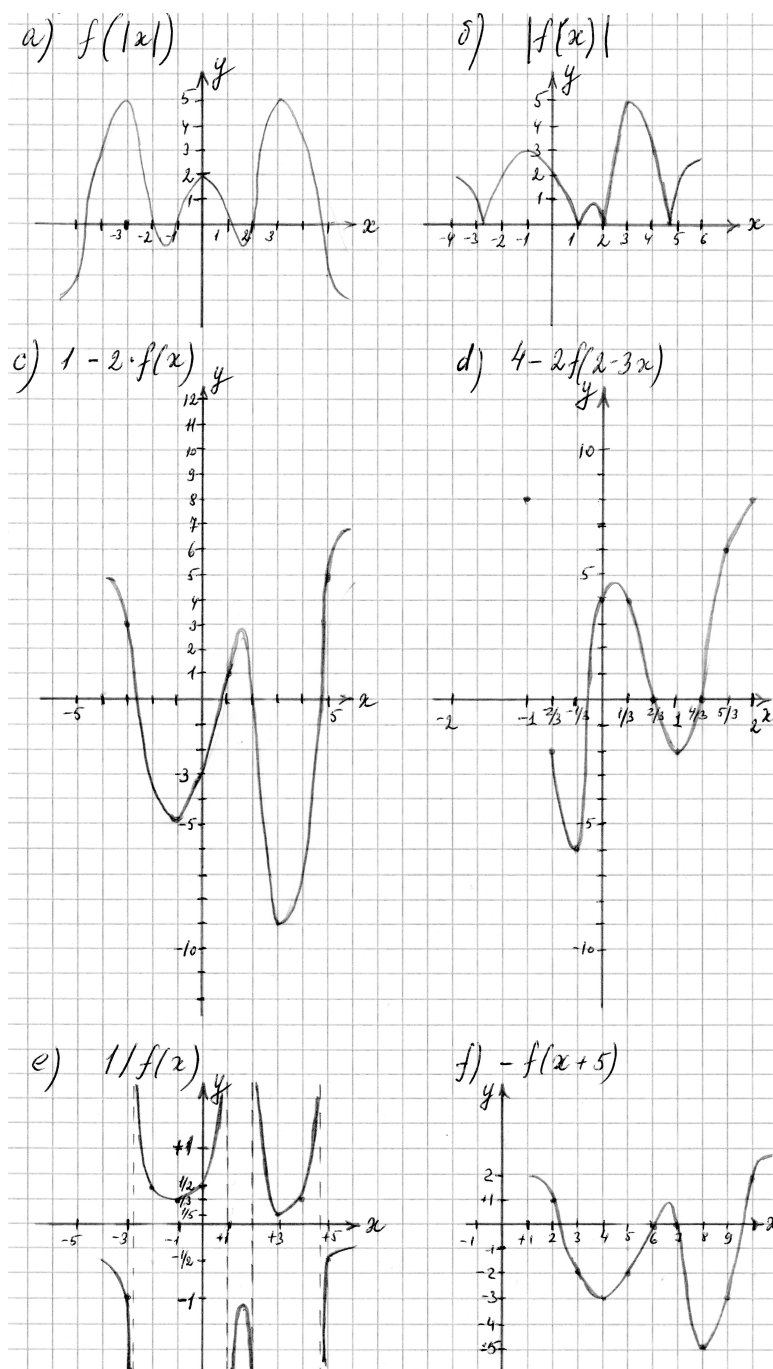


Figure 1: Графики функций (задача 1)

## 2 Задача 2

Заданную функцию можно представить в виде набора интервальных функций:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}, & \text{если } x < 1 \\ \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}, & \text{если } x > 1 \\ \text{не определена,} & \text{если } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} -(x+1), & \text{если } x < 1 \\ x+1, & \text{если } x > 1 \\ \text{не определена,} & \text{если } x = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда, график функции будет выглядеть следующим образом: см. рис. 2.

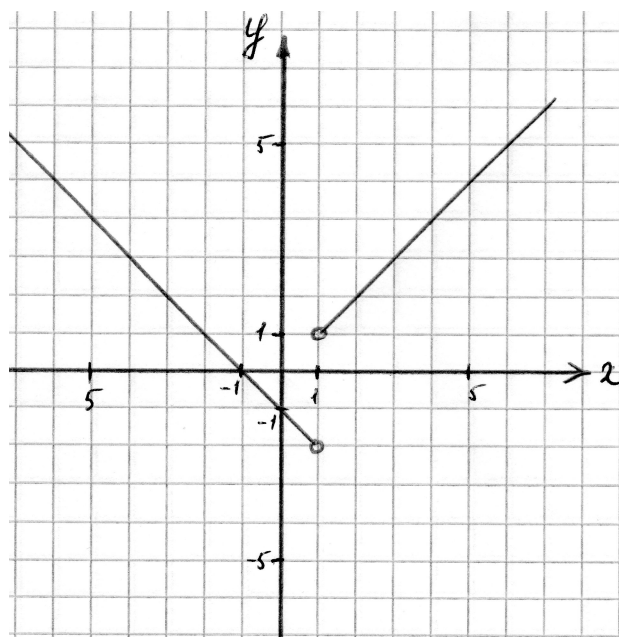


Figure 2: График функции (задача 2)

Искомые пределы согласно выражению 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2. \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &\Rightarrow \text{предел не существует.} \end{aligned}$$

## 3 Задача 3

- Функция  $f^{-1}$  **не существует**, т.к. нет однозначного обратного отображения: из области значений функции  $f$  в область её определения, например, для значения  $f = 4$  нет такого однозначного обратного отображения.
- Функция  $f \circ g = f(g(x))$  **существует**, т.к. для всей области значений функции  $g$  определено отображение в область значений функции  $f$ , таблица для  $f(g(x))$  указана ниже, областью определения для неё являются все указанные значения  $x$ , а областью отражения - все указанные значения  $f(g(x))$ .

$x$	1	2	3	4	5	6	7
$g(x)$	7	6	1	2	3	4	5
$f(g(x))$	0	6	4	8	-1	4	7

- Функция  $g \circ f = g(f(x))$  **не существует**, т.к. не для всей области значений функции  $f$  определено отображение в область значений функции  $g$ .

- Функция  $f \circ f = f(f(x))$  **не существует**, т.к. не для всей области значений функции  $f$  определено отображение в область значений той же самой функции  $f$ .

## 4 Задача 4

Функция  $f(x)$  задана тремя элементарными функциями на трех интервалах, параметры  $a, b$  следует выбрать такими, чтобы функция была непрерывной на всей области определения  $x \in (-\infty, +\infty)$ , включая границы между интервалами. Для заданных интервалов, без рассмотрения границ самих интервал, функция  $f(x)$  уже непрерывна, т.к. заданные элементарные функции непрерывны на них.

Тогда нам следует найти такие значения параметров  $a, b$ , чтобы

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} ax + b = \lim_{x \rightarrow 0} e^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} ax + b = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} ax + b = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} ax + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1 - e^2}{2}, b = e^2.$$

## 5 Задача 5

Данное уравнение можно представить в виде функции  $f(x) = 100e^{-x/100} - 0.01x^2$ . Тогда, для доказательства того, что уравнение имеет хотя бы один вещественный корень, необходимо доказать, что функция  $f(x)$ : а) непрерывна, б) меняет знаки для каких-нибудь двух значений.

Функция непрерывна, т.к. составляющие её элементарные функции непрерывны для всех  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Проверим на случаи смены знаков на примере некоторых значений  $x$ :

$$\begin{aligned} \text{если } x = 100, \text{ то } f(x) &= 100e^{-1} - 100 < 0 \\ \text{если } x = -100, \text{ то } f(x) &= 100e - 100 > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Исходя из выражения 2, согласно теореме о промежуточном значении функция должна принимать значение равным нулю на интервале  $x \in (-100, +100)$ , что означает, что уравнение имеет корень на данном интервале.

## 6 Задача 6

Найдём производную заданной функции:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Тогда согласно уравнению касательной к функции в заданной точке  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ , искомое уравнение касательной:

$$y - f(y_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x + 1).$$

## 7 Задача 7

$$\begin{aligned} (\cos(\sin x^2))' &= (\sin x^2)' \cos'(\sin x^2) = (x^2)' \sin' x^2 \cos'(\sin x^2) \\ &= 2x \cos x^2 (-\sin(\sin x^2)) = -2x \cos x^2 \sin(\sin x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos(\sin^2 x))' &= (\cos(\sin x \sin x))' = (\sin x \sin x)' \cos'(\sin x \sin x) \\ &= (\sin' x \sin x + \sin x \sin' x) \cos'(\sin x \sin x) = -(\cos x \sin x + \sin x \cos x) \sin(\sin^2 x) \\ &= -2 \sin x \cos x \sin(\sin^2 x). \end{aligned}$$

## 8 Задача 8

Найдём первую и вторую производные  $f(x)$ :

$$f'(x) = \cos' x \ln'(\cos x) = -\sin x \frac{1}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$f''(x) = -1 \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = -1 - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2.$$

Первая производная  $f'(x)$  принимает значение ноль при  $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ , вторая производная  $f''(x)$  при данных значениях  $x$  всегда принимает значения меньше нуля. Соответственно, это точки локальных максимумов функции. Точек локальных минимумов у функции нет.

Рассмотрим знаки первой производной  $f'(x)$  на интервале периодичности составляющих её элементарных функций  $x \in [0, 2\pi]$ :

$$f'(x) = \begin{cases} \geq 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ < 0, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ \geq 0, & x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ \leq 0, & x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Обобщая для всего множества  $\mathbb{R}$ , функция  $f(x)$  растёт при  $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{Z}$  и убывает при  $x \in (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi], n \in \mathbb{Z}$ .