Математический анализ и линейная алгебра
Домашнее задание №3

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

August 1, 2018

1 Задачи

1.1 Задача 1

Данная задача была решена ранее, как задача 5 задания 3.

1.2 Задача 2

Найдём частные производные $f(x,y) = y\mathrm{e}^{xy}$:

$$\begin{aligned} f_x &= y^2\mathrm{e}^{xy} \\ f_y &= \mathrm{e}^{xy} + y(x\mathrm{e}^{xy}) = \mathrm{e}^{xy}(1 + xy). \end{aligned}$$

Отсюда, составим уравнение касательной плоскости в точке (a,b):

$$\begin{aligned} z &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ &= b\mathrm{e}^{ab} + b^2\mathrm{e}^{ab}(x-a) + \mathrm{e}^{ab}(1+ab)(y-b) \\ &= \mathrm{e}^{ab}(b + b^2(x-a) + (1+ab)(y-b)). \end{aligned}$$

Тогда, мы сможем воспользоваться уравнением данной касательной плоскости в точке (a,b), как линейной аппроксимацией значения функции в окрестности данной точки. Так, для заданной точки $(x,y) = (-0.1, 1.1)$:

$$\begin{aligned} f(x,y)\Big|_{(x,y)=(-0.1,1.1)} &\approx \mathrm{e}^{ab}(b + b^2(x-a) + (1+ab)(y-b))\Big|_{(a,b)=(0,1),(x,y)=(-0.1,1.1)} \\ &= 1(1 + 1^2(x-0) + 1(y-1))|_{(x,y)=(-0.1,1.1)} = 1 - 0.1 + (1.1-1) = 1. \end{aligned}$$

Т.е. приближённое значение данной функции в точке $(x,y) = (-0.1, 1.1)$ равно 1. Справочно, более точное значение функции в заданной точке равно 0.9854175488261812, следовательно, погрешность вычисления составила примерно 1.5%.

1.3 Задача 3

Вычислим требуемые частные производные для $f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x^2)$:

$$\begin{aligned} f_x &= \cos(x+y) + 2x\sin(x^2), \\ f_y &= \cos(x+y), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_{xx} &= -\sin(x+y) + 2\sin(x^2) + 2x2x\cos(x^2), \\ f_{yy} &= -\sin(x+y), \\ f_{xy} &= -\sin(x+y). \end{aligned}$$

Тогда ряд Тейлора до второго порядка включительно для указанной функции в точке (0, 0) будет следующим:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2!}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) + R_n \\ &= -1 + x + y + \frac{1}{2}(0) + R_n = x + y - 1 + R_n. \end{aligned}$$

1.4 Задача 4

Область $\mathbb{R}^2$, ограниченная $x = 1, y^2 = 2x$, - это область с координатами $(x, y) \in [0, 1] \times [-\sqrt{2x}, \sqrt{2x}]$.

Тогда заданный двойной интеграл равен:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathbb{R}^2:\ x=1, y^2=2x} xy^2\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} xy^2\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}xy^3\Big|_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\,dx = \int_0^1 \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{5/2}\,dx \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{2}{7}x^{7/2}\Big|_0^1 = \frac{8\sqrt{2}}{21}. \end{aligned}$$