Теория вероятностей и математическая статистика
Домашнее задание №3

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 23, 2018

1 Вопросы

1.1 Вопрос 1

N.B. Данная задача решена с ошибкой.

Случайным величинам $X \sim U[0,2\pi]$, $Y = g(X)$ соответствуют функции распределения:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x}{2\pi}$$
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)), y \in [-1, 1].$$

Если $g(x) = \sin x$, то $g^{-1}(y) = \operatorname{asin} x$. Для заданного интервала $y \in [-1, 1]$ такая обратная функция не существует в силу многозначности отображений из области определения в область значений. Но, если учитывать только главные значения функции asin, с учётом того, что мера аргументов - вероятностная, то можно записать

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < -1 \\ P(\pi - \operatorname{asin} y \leq X \leq 2\pi + \operatorname{asin} y) = F_X(2\pi + \operatorname{asin} y) - F_X(\pi - \operatorname{asin} y) & , \text{если } y \in [-1, 0] \\ P(\operatorname{asin} y \leq X < \pi - \operatorname{asin} y) = F_X(\pi - \operatorname{asin} y) - F_X(\operatorname{asin} y) & , \text{если } y \in (0, 1] \\ 1 & , y > 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & , y < -1 \\ \frac{1}{2\pi}(2\pi + \operatorname{asin} y - \pi + \operatorname{asin} y) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{asin} y}{\pi} & , \text{если } y \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2\pi}(\pi - \operatorname{asin} y - \operatorname{asin} y) = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{asin} y}{\pi} & , \text{если } y \in (0, 1] \\ 1 & , y > 1. \end{cases}$$

В общем виде. Если известно, что $X \sim F_X(x), Y = g(X)$, то $F_Y(y)$ можно определить через $F_X(x)$ при условии, что существует обратная функция $g^{-1}(y)$. Если функция g необратима в алгебраическом смысле, то следует исследовать как её можно обратить в смысле вероятностной меры. Интуитивно, такое обращение всегда можно подобрать.

1.2 Вопрос 2

В случае $X \sim Bin(n, p)$ можно задать такое малое p, что для подсчёта $P(X = k)$ использование нормального распределения (согласно теореме Муавра-Лапласа) будет *малоприменимым* в силу малого значения np (рекомендуется, чтобы оно было больше 5), а использование же распределения Пуассона будет *применимым*, т.к. теорема Пуассона не накладывает подобных ограничений на нижний порог для λ. Так, например, для серии событий длиною $n = 1000$ с редким успешным событием вероятностью $p = 0.001$: $np = 1$, $\lambda = 1$.

Исходя из вышеизложенного, распределение Пуассона более применимо для работы с редкими событиями, чем нормальное, отсюда, видимо, и такое название.

1.3 Вопрос 3

Для $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) = \Phi_0(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi_0(\frac{a-\mu}{\sigma}).$$

1.4 Вопрос 4

$$\begin{cases} P(|X-\mathbb{E}[X]| < a) = 1 - P(|X-\mathbb{E}[X]| > a), \\ P(|X-\mathbb{E}[X]| > a) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{a^2} \end{cases} \Rightarrow P(|X-\mathbb{E}[X]| < a) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}[X]}{a^2}.$$

2 Задачи

2.1 Задача 1

Обозначим за X время спуска лыжника. По условию задачи $X \sim \mathcal{N}(\mu = 12.3, \sigma^2 = 0.4^2)$. Тогда:

$$\begin{aligned} P(12.1 \leq X \leq 12.5) &= P(\frac{12.1-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{12.5-\mu}{\sigma}) \\ &= P(\frac{12.1-12.3}{0.4} \leq \frac{X-12.3}{0.4} \leq \frac{12.5-12.3}{0.4}) \\ &= P(-0.5 \leq \frac{X-12.3}{0.4} \leq 0.5) = \Phi_0(0.5) - \Phi_0(-0.5) \\ &= 0.69146 - 0.30853 = 0.38293. \end{aligned}$$

2.2 Задача 2

Обозначим за X количество бракованных свечей. По условию задачи $X \sim Bin(p = 0.01)$.

Для нахождения $P(X \leq 1)$ в соответствии с теоремой Пуассона, следует задаться параметром λ, который выражает частоту повторения исследуемого события. Для партии $n = 25$ и $p = 0.01$, частота λ составит $\lambda = pn = 0.25$. Тогда,

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{1} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-0.25}(1 + 0.25) \approx 0.97.$$

Для второго случая, где $n = 1000$, $P(X = 20)$ согласно теореме Муавра-Лапласа ($\mu = 10, \sigma = 9.9$):

$$\begin{aligned} P(X=20) = P(19 < X < 21) &= |\text{переход к нормальному распределению с учётом поправки } \frac{1}{2}| \\ &= P(19.5 \leq X \leq 20.5) = P(\frac{19.5-10}{9.9} < \frac{X-10}{9.9} < \frac{20.5-10}{9.9}) \\ &= \Phi_0(1.06) - \Phi_0(0.96) = 0.85543 - 0.83147 \approx 2.4\%. \end{aligned}$$

2.3 Сложная задача

(не выполнена)