# Теория вероятностей и математическая статистика
# Домашнее задание №4

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 22, 2018

## 1 Задачи

### 1.1 Задача 1

Рассмотрим $X \sim Bin(n,p)$, как сумму случайных величин Бернулли $X_i, i \in [1,n]$. Тогда производящая функция моментов для $X$:

$$\begin{cases} M_X(t) &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}] = (\mathbb{E}[e^{tX_1}])^n, \\ E[e^{tX_1}] &= e^{t\times 0}q + e^{t\times 1}p = q + pe^t, \\ q &= 1-p. \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_X(t) = (q+pe^t)^n}.$$

Третий момент $\mu_3 = M_X^{(3)}(t)$:

$$\begin{aligned} M_X^{(1)}(t) &= [(q+pe^t)^n]' = pe^t n(q+pe^t)^{n-1}, \\ &\Rightarrow \mu_1 = M_X^{(1)}(0) = p1^n n(q+p1)^{n-1} = \boxed{pn}, \\ M_X^{(2)}(t) &= [M_X^{(1)}(t)]' = [pe^t n(q+pe^t)^{n-1}]' = pe^t n(q+pe^t)^{n-1} + pe^t n(n-1)pe^t(q+pe^t)^{n-2} \\ &= npe^t(q+pe^t)^{n-1} + n(n-1)[pe^t]^2((q+pe^t)^{n-2} \\ &\Rightarrow \mu_2 = M_X^{(2)}(0) = np(1+p(n-1)) = \boxed{np(q+np)}. \end{aligned}$$

Нахождение $M_X^{(3)}(t)$ уже представляется делом громоздким, поэтому введём вспомогательную функцию:

$$z_t(k) = pe^t(q+pe^t)^k, k \in [0 \cup \mathbb{N}].$$

Тогда,

$$\begin{aligned} M_X^{(2)}(t) &= nz_t(k-1) + n(n-1)pe^t z_t(k-2), \\ M_X^{(3)}(t) &= nz'_t(k-1) + n(n-1)[pe^t z_t(k-2) + pe^t z'_t(k-2)] \\ &= nz'_t(k-1) + n(n-1)pe^t[z_t(k-2) + z'_t(k-2)]. \end{aligned}$$

Так как для вычисления $\mu_3$ нам понадобится значение производящей функции в точке 0, то найдём значения $z_t(k-2)$, $z'_t(k-1)$, $z'_t(k-2)$ в нуле:

$$
\begin{aligned}
z_t(k)|_{t=0} &= p(q+p) = p, k \in [0 \cup \mathbb{N}]. \\
z'_t(k) &= \frac{dz}{dt}[pe^t(q+pe^t)^k] = pe^t(q+pe^t)^k + [pe^t]^2 k(q+pe^t)^{k-1} \\
&= pe^t(q+pe^t)^{k-1}(q+pe^t+pe^t k) = pe^t(q+pe^t)^{k-1}(q+(k+1)pe^t) \\
&= z_t(k)(q+(k+1)pe^t), \\
z'_t(k-1)|_{t=0} &= z_t(k-1)(q+(k-1+1)pe^t)|_{t=0} = p(q+kp), \\
z'_t(k-2)|_{t=0} &= z_t(k-2)(q+(k-2+1)pe^t)|_{t=0} = p(q+(k-1)p) = p(q+kp-p).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\mu_3 = M_X^{(3)}(0) &= [nz'_t(k-1) + n(n-1)pe^t[z_t(k-2) + z'_t(k-2)]]|_{t=0} \\
&= n(p(q+np)) + n(n-1)p[p + p(q+np-p)] \\
&= np(q+np+(n-1)p(1+q+np-p)) \\
&= np(1-p+np+p(n-1)(2+np-2p)) \\
&= np(1-p+np+2np+n^2p^2-2np^2-2p-np^2+2p^2) \\
&= \boxed{np(1-3p+3np+n^2p^2-3np^2+2p^2)}.
\end{aligned}
$$

## 1.2 Задача 2

Пусть $X_1$ - появление 5 или 6 при одном выбросе кубика, тогда

- $X_1 \sim Bern(\frac{1}{3})$,
- сумму реализаций $X_1$ при повторении эксперимента $n$ раз можно представить, как случайную величину $X$: $X \sim Bin(n, p)$, где $n = 120$, $p = \frac{1}{3}$,
- $\mathbb{E}[X] = np = 120\frac{1}{3} = 40$,
- $\mathbb{D}[X] = npq = 120\frac{1}{3}\frac{2}{3} \approx 26.6$,
- интервал от 30 до 50 для реализации $X$ в серии выбросов даёт нам возможность определить максимальную разность, как $|X - \mathbb{E}[X]| = 10$.

Согласно неравенству Чебышева:

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mathbb{E}[X]| \le 10) &= 1 - P(|X-\mathbb{E}[X]| > 10), \\
P(|X-\mathbb{E}[X]| > 10) &\le \frac{\mathbb{D}[X]}{10^2} = \frac{26.6}{100} \approx 0.26 \\
\Rightarrow P(|X-\mathbb{E}[X]| \le 10) &> 1 - 0.26 = \boxed{0.74}.
\end{aligned}
$$

Обозначим через $S_n$ сумму реализаций $X_1$. Тогда, согласно центральной предельной теореме (ЦПТ):

$$
S_n - n\mu \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathcal{N}(0,1), n\mu = 40, \sigma = \sqrt{pq} = \frac{\sqrt{2}}{3}.
$$

$$
\begin{aligned}
P(30 \le S_n \le 50) &= \Phi_0\left(\frac{50-40}{\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{120}}\right) - \Phi_0\left(\frac{30-40}{\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{120}}\right) \\
&= \Phi_0(1.94) - \Phi_0(-1.94) = 0.97381 - 0.02619 \approx \boxed{0.95}.
\end{aligned}
$$

Здесь, стоит отметить, что вычисления по сути получаются такими же, как и при применении теоремы Муавра-Лапласа, т.к. последняя является частным случаем ЦПТ. Другими словами, для решения задачи мы могли бы перейти от рассмотрения применения ЦПТ для $X_1$ к рассмотрению применения теоремы Муавра-Лапласа для $X$.

### 1.3 Задача 3

Т.к. веса и их стандартные отклонения случайно выбранных арбуза и дыни - независимые случайные величины, то общий вес $X$ арбуза и дыни будет иметь среднее значение $\mathbb{E}[X] = 4 + 10 = 14$ (кг), а его стандартное отклонение будет $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}[X]} \approx 4.12$ (кг), где $\mathbb{D}[X] = 1^2 + 4^2 = 17$ (кг).

### 1.4 Задача 4

Обозначим: $X$ - вес яблока, $X \sim \mathcal{N}(\mu = 95, \sigma^2 = 15^2)$, $S_n$ - общий вес $n$ яблок, $n = 10$. Необходимо найти $P(S_n > 1000) = 1 - P(S_n < 1000)$. Тогда, согласно центральной предельной теореме:

$$
\begin{aligned}
&P(S_n < 1000) = P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{1000 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) = \Phi_0(\frac{1000 - 10 * 95}{15\sqrt{10}}) \approx 0.85314 \\
&\Rightarrow P(S_n > 1000) = 1 - 0.85314 = \boxed{0.14686}.
\end{aligned}
$$

### 1.5 Сложная задача

(не выполнена)