

Теория вероятностей и математическая статистика

Домашнее задание №3

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 18, 2018

1 Вопросы

1.1 Вопрос 1

N.B. Данная задача решена с ошибкой.

Случайным величинам $X \sim U[0, 2\pi]$, $Y = g(X)$ соответствуют функции распределения:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x}{2\pi}$$
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)), y \in [-1, 1].$$

Если $g(x) = \sin x$, то $g^{-1}(y) = \arcsin y$. Для заданного интервала $y \in [-1, 1]$ такая обратная функция не существует в силу многозначности отображений из области определения в область значений. Но, если учитывать только главные значения функции \arcsin , с учётом того, что мера аргументов - вероятностная, то можно записать

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < -1 \\ P(\pi - \arcsin y \leq X \leq 2\pi + \arcsin y) = F_X(2\pi + \arcsin y) - F_X(\pi - \arcsin y) & , \text{если } y \in [-1, 0] \\ P(\arcsin y \leq X < \pi - \arcsin y) = F_X(\pi - \arcsin y) - F_X(\arcsin y) & , \text{если } y \in (0, 1] \\ 1 & , y > 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & , y < -1 \\ \frac{1}{2\pi}(2\pi + \arcsin y - \pi + \arcsin y) = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin y}{\pi} & , \text{если } y \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2\pi}(\pi - \arcsin y - \arcsin y) = \frac{1}{2} - \frac{\arcsin y}{\pi} & , \text{если } y \in (0, 1] \\ 1 & , y > 1. \end{cases}$$

В общем виде. Если известно, что $X \sim F_X(x)$, $Y = g(X)$, то $F_Y(y)$ можно определить через $F_X(x)$ при условии, что существует обратная функция $g^{-1}(y)$. Если функция g необратима в алгебраическом смысле, то следует исследовать как её можно обратить в смысле вероятностной меры. Интуитивно, такое обращение всегда можно подобрать.

1.2 Вопрос 2

В случае $X \sim \text{Bin}(n, p)$ можно задать такое малое p , что для подсчёта $P(X = k)$ использование нормального распределения (согласно теореме Муавра-Лапласа) будет *малоприменимым* в силу малого значения np (рекомендуется, чтобы оно было больше 5), а использование же распределения Пуассона будет *применимым*, т.к. теорема Пуассона не накладывает подобных ограничений на нижний порог для λ . Так, например, для серии событий длиной $n = 1000$ с редким успешным событием вероятностью $p = 0.001$: $np = 1$, $\lambda = 1$.

Исходя из вышеизложенного, распределение Пуассона более применимо для работы с редкими событиями, чем нормальное, отсюда, видимо, и такое название.

1.3 Вопрос 3

Для $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

1.4 Вопрос 4

$$\begin{cases} P(|X - \mathbb{E}[X]| < a) = 1 - P(|X - \mathbb{E}[X]| > a), \\ P(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{a^2} \end{cases} \Rightarrow P(|X - \mathbb{E}[X]| < a) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}[X]}{a^2}.$$

2 Задачи

2.1 Задача 1

Обозначим за X время спуска лыжника. По условию задачи $X \sim \mathcal{N}(\mu = 12.3, \sigma^2 = 0.4^2)$. Тогда:

$$\begin{aligned} P(12.1 \leq X \leq 12.5) &= P\left(\frac{12.1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{12.5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{12.1 - 12.3}{0.4} \leq \frac{X - 12.3}{0.4} \leq \frac{12.5 - 12.3}{0.4}\right) \\ &= P\left(-0.5 \leq \frac{X - 12.3}{0.4} \leq 0.5\right) = \Phi_0(0.5) - \Phi_0(-0.5) \\ &= 0.69146 - 0.30853 = 0.38293. \end{aligned}$$

2.2 Задача 2

Обозначим за X количество бракованных свечей. По условию задачи $X \sim \text{Bin}(p = 0.01)$.

Для нахождения $P(X \leq 1)$ в соответствии с теоремой Пуассона, следует задаться параметром λ , который выражает частоту повторения исследуемого события. Для партии $n = 25$ и $p = 0.01$, частота λ составит $\lambda = pn = 0.25$. Тогда,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \sum_{k=0}^1 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^1 \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-0.25}(1 + 0.25) \approx 0.58.$$

Для второго случая, где $n = 1000$, $P(X = 20)$ согласно теореме Муавра-Лапласа ($\mu = 10, \sigma = 9.9$):

$$\begin{aligned} P(X = 20) &= P(19 < X < 21) = \left| \text{переход к нормальному распределению с учётом поправки } \frac{1}{2} \right| \\ &= P(19.5 \leq X \leq 20.5) = P\left(\frac{19.5 - 10}{9.9} < \frac{X - 10}{9.9} < \frac{20.5 - 10}{9.9}\right) \\ &= \Phi_0(1.06) - \Phi_0(0.96) = 0.85543 - 0.83147 \approx 2.4\%. \end{aligned}$$

2.3 Сложная задача

(не выполнена)