Математический анализ и линейная алгебра
Домашнее задание №1

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 22, 2018

1 Задача 1

Графики заданных функций *a*-*f* отображены на рис. 1.

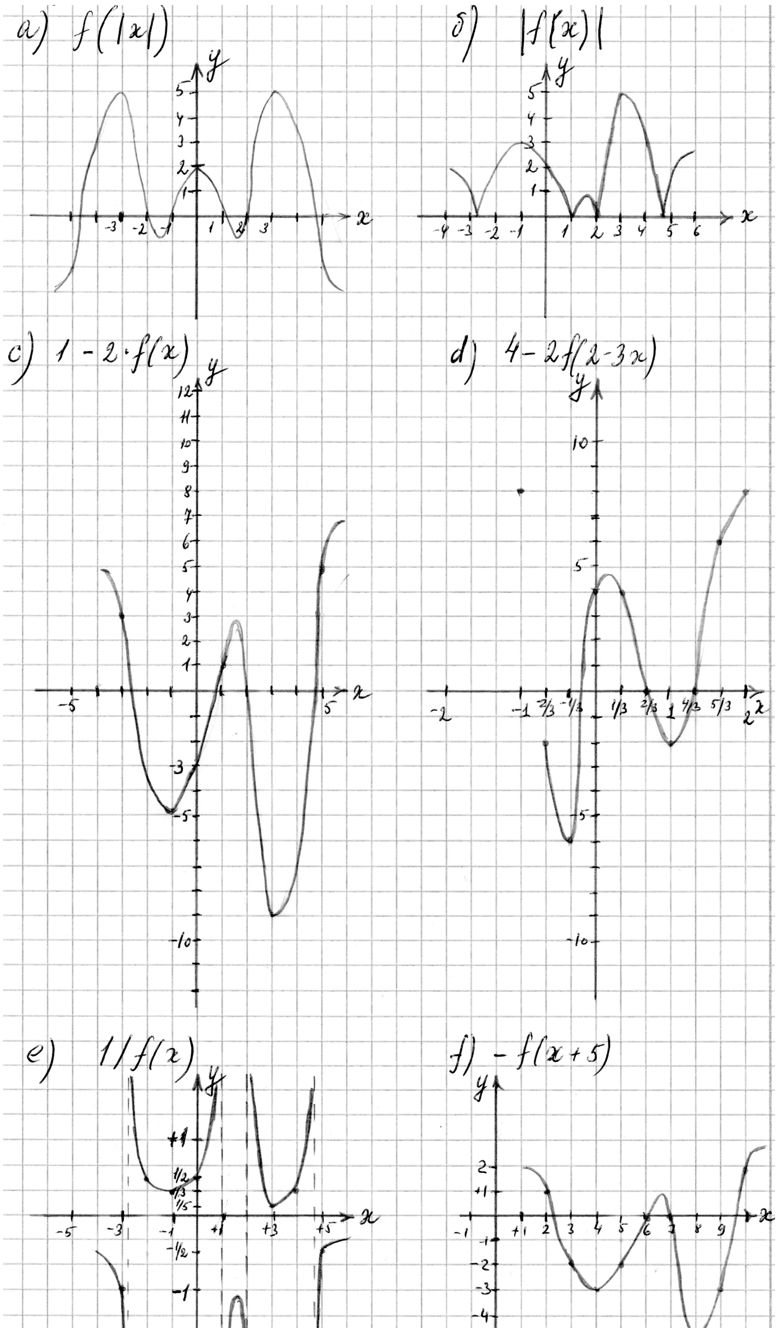

Figure 1: Графики функций (задача 1)

2 Задача 2

Заданную функцию можно представить в виде набора интервальных функций:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}, & \text{если } x < 1 \\ \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}, & \text{если } x > 1 \\ \text{не определена}, & \text{если } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} -(x+1), & \text{если } x < 1 \\ x+1, & \text{если } x > 1 \\ \text{не определена}, & \text{если } x = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда, график функции будет выглядеть следующим образом: см. рис. 2.

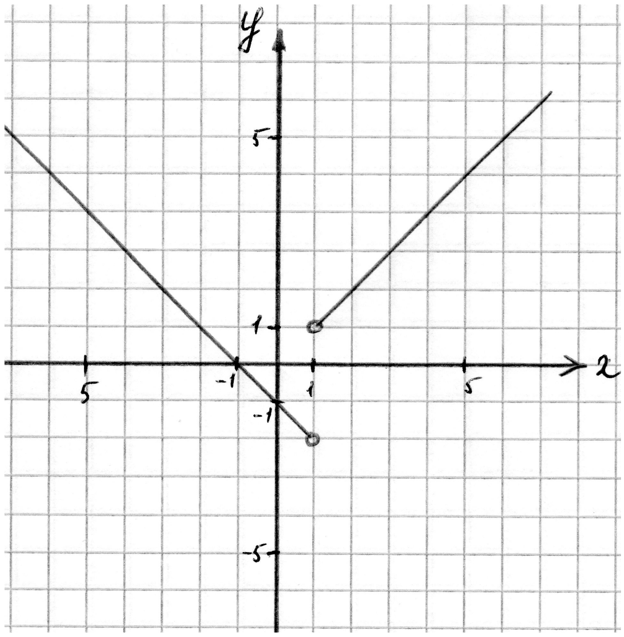

Figure 2: График функции (задача 2)

Искомые пределы согласно выражению 1:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2.$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -2.$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \text{предел не существует}.$$

3 Задача 3

- Функция f^{-1} **не существует**, т.к. нет однозначного обратного отображения: из области значений функции f в область её определения, например, для значения $f = 4$ нет такого однозначного обратного отображения.

- Функция $f \circ g = f(g(x))$ **существует**, т.к. для всей области значений функции g определено отображение в область значений функции f, таблица для $f(g(x))$ указана ниже, областью определения для неё являются все указанные значения x, а областью отражения - все указанные значения $f(g(x))$.

x	1	2	3	4	5	6	7
$g(x)$	7	6	1	2	3	4	5
$f(g(x))$	0	6	4	8	-1	4	7

- Функция $g \circ f = g(f(x))$ **не существует**, т.к. не для всей области значений функции f определено отображение в область значений функции g.

- Функция $f \circ f = f(f(x))$ **не существует**, т.к. не для всей области значений функции f определено отображение в область значений той же самой функции f.

4 Задача 4

Функция $f(x)$ задана тремя элементарными функциями на трех интервалах, параметры a, b следует выбрать такими, чтобы функция была непрерывной на всей области определения $x \in (-\infty, +\infty)$, включая границы между интервалами. Для заданных интервалов, без рассмотрения границ самих интервал, функция $f(x)$ уже непрерывна, т.к. заданные элементарные функции непрерывны на них.

Тогда нам следует найти такие значения параметров a, b, чтобы

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} ax + b & = \lim_{x\to 0} e^2 \\ \lim_{x\to 2} ax + b & = \lim_{x\to 2} x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0} ax + b & = e^2 \\ \lim_{x\to 2} ax + b & = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1-e^2}{2}, b = e^2.$$

5 Задача 5

Данное уравнение можно представить в виде функции $f(x) = 100e^{-x/100} - 0.01x^2$. Тогда, для доказательства того, что уравнение имеет хотя бы один вещественный корень, необходимо доказать, что функция $f(x)$: а) непрерывна, б) меняет знаки для каких-нибудь двух значений.

Функция непрерывна, т.к. составляющие её элементарные функции непрерывны для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Проверим на случаи смены знаков на примере некоторых значений x:

$$\begin{aligned} &\text{если } x = 100, \text{то } f(x) = 100e^{-1} - 100 < 0 \\ &\text{если } x = -100, \text{то } f(x) = 100e - 100 > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Исходя из выражения 2, согласно теореме о промежуточном значении функция должна принимать значение равным нулю на интервале $x \in (-100, +100)$, что означает, что уравнение имеет корень на данном интервале.

6 Задача 6

Найдём производную заданной функции:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Тогда согласно уравнению касательной к функции в заданной точке $(x_0, y_0) = (1, 1)$, искомое уравнение касательной:

$$y - f(y_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x+1).$$

7 Задача 7

$$\begin{aligned} (\cos(\sin x^2))' &= (\sin x^2)' \cos'(\sin x^2) = (x^2)' \sin' x^2 \cos'(\sin x^2) \\ &= 2x \cos x^2 (-\sin(\sin x^2)) = -2x \cos x^2 \sin(\sin x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos(\sin^2 x))' &= (\cos(\sin x \sin x))' = (\sin x \sin x)' \cos'(\sin x \sin x)) \\ &= (\sin' x \sin x + \sin x \sin' x) \cos'(\sin x \sin x)) = -(\cos x \sin x + \sin x \cos x) \sin(\sin^2 x) \\ &= -2 \sin x \cos x \sin(\sin^2 x). \end{aligned}$$

8 Задача 8

Найдём первую и вторую производные $f(x)$:

$$f'(x) = \cos' x \ln'(\cos x) = -\sin x \frac{1}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$f''(x) = -1\frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = -1 - (\frac{\sin x}{\cos x})^2.$$

Первая производная $f'(x)$ принимает значение ноль при $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, вторая производная $f''(x)$ при данных значениях x всегда принимает значения меньше нуля. Соответственно, это точки локальных максимумов функции. Точек локальных минимумов у функции нет.

Рассмотрим знаки первой производной $f'(x)$ на интервале периодичности составляющих её элементарных функций $x \in [0, 2\pi]$:

$$f'(x) = \begin{cases} \geq 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ < 0, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ \geq 0, & x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ \leq 0, & x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Обобщая для всего множества $\mathbb{R}$, функция $f(x)$ растёт при $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{Z}$ и убывает при $x \in (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi], n \in \mathbb{Z}$.