

Теория вероятностей и математическая статистика

Домашнее задание №5

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 26, 2018

1 Задачи

Дано: $X \sim U[0,2]$, $Y \sim U[1,3]$, $X \perp\!\!\!\perp Y$. Укажем функции распределения X , Y и функции плотности распределения X , Y :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 1, & x > 2. \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ \frac{1}{2}, & x \in [0,2]. \end{cases}$$
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \frac{y-1}{2}, & y \in [1,3], \\ 1, & y > 3. \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [1,3], \\ \frac{1}{2}, & y \in [1,3]. \end{cases}$$

1

1.1 Задача 1

Т.к. X , Y - независимые случайные величины, то функция их совместного распределения - это произведение их функций распределения

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y)$$
$$\Rightarrow F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, y < 1, \\ \frac{x(y-1)}{4}, & x, y \in [0,2] \times [1,3], \\ \frac{y-1}{2}, & x > 2, y \in [1,3], \\ \frac{x}{2}, & x \in [0,2], y > 3, \\ 1, & x > 2, y > 3. \end{cases}$$

1.2 Задача 2

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{x(y-1)}{4} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y-1}{4} = \frac{1}{4}.$$

1.3 Задача 3

$$F_{X+Y}(t) = P(X + Y \leq t) = \iint_{x+y \leq t} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \left[\int_{-\infty}^{t-y} f_X(x) dx \right] dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y) f_Y(y) dy$$
$$= 1$$