Математический анализ и линейная алгебра
Домашнее задание №2

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 27, 2018

1 Задачи

1.1 Задача 1

а) Согласно определению $O(g(x))$ проверим выполняется ли условие

$$\left|\frac{x^2+3}{x-4}\right| < C|x|, x \to \infty. \tag{1}$$

Для чего приведём неравенство в такой вид, чтобы его можно было легко проверить:

$$\frac{x^2+3}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)+19}{x-4} = (x+4) + \frac{19}{x-4} \tag{2}$$

Подставим получившееся выражение 2 в неравенство 1.

$$|(x+4) + \frac{19}{x-4}| < C|x| \quad \Rightarrow \quad |1 + \frac{4}{x} + \frac{19}{x(x-4)}| < C, \quad x \to \infty$$

Левая часть неравенства при $x \to \infty$ стремится к 1, что меньше константы C, соответственно, исходное утверждение - верное.

б) Согласно определению $O(g(x))$ проверим выполняется ли условие

$$\left|\frac{x^2+3}{x-4}\sin x\right| < C|x^k|, x \to 0.$$

Воспользуемся выражением 2 и упростим неравенство:

$$\lim_{x\to 0}\left|(x+4+\frac{19}{x-4})\frac{\sin x}{x^k}\right| < C.$$

$$\lim_{x\to 0}\left|x+4+\frac{19}{x-4}\right| \times \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x^k}\right| < C \quad \Rightarrow \quad \frac{35}{4}\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x^k}\right| < C. \tag{3}$$

Предел $\lim\limits_{x\to 0}|\frac{\sin x}{x^k}| = 1$, при $k=1$. Соответственно, при $k=1$ неравенство 3 - верно, следовательно, при данном k верно и исходное утверждение.

с) Согласно определению $o(g(x))$ проверим чему равен предел

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{5x^3}{x^2\sqrt{x}}\right| = \lim_{x\to 0}|5\sqrt{x}|. \tag{4}$$

Данный предел равен нулю при $x \to 0^+$, но не при $x \to 0^-$. Соответственно, исходное утверждение - неверное.

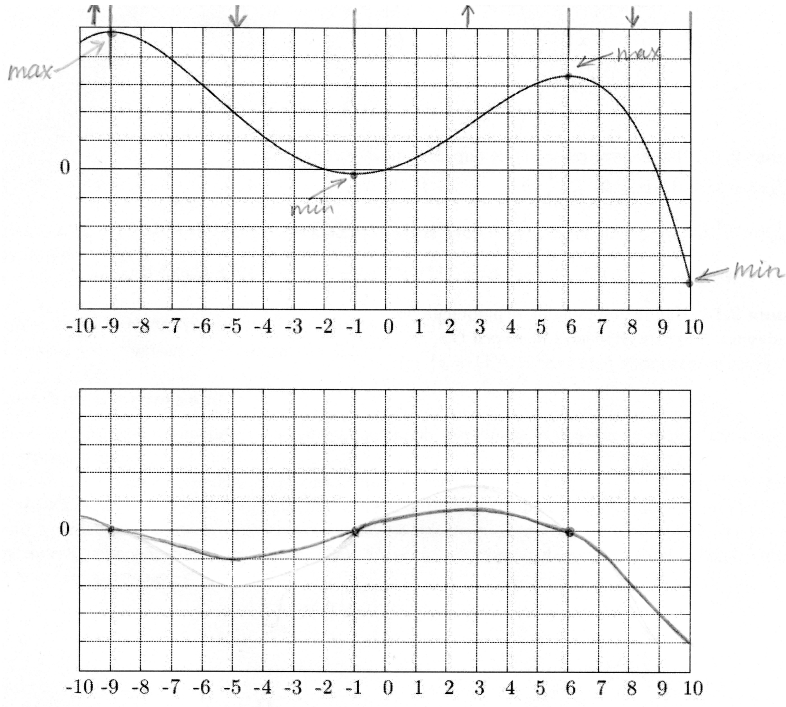

Figure 1: График производной по графику её функции (пункт а)

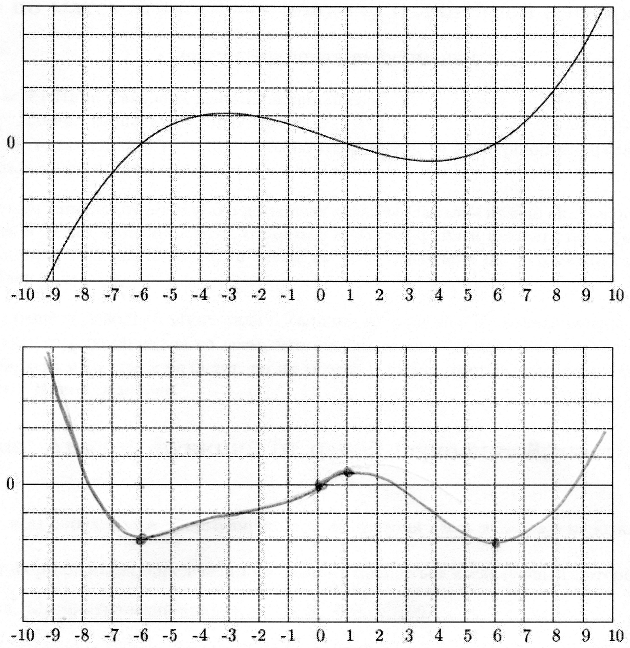

Figure 2: График функции по графику её производной (пункт б)

1.2 Задача 2

См. рис. 1, рис. 2.

1.3 Задача 3

Данная задача была выполнена в задаче 6 домашней работы 1.

1.4 Задача 4

1) данный пункт был выполнен в задаче 7 домашней работы 1,
2) данный пункт был выполнен в задаче 7 домашней работы 1,
3) не выполнен.

1.5 Задача 5

(не выполнена)

1.6 Задача 6

Попробуем оценить сходимость ряда, сравнив его с другим, с известной сходимостью. Обозначим, что заданный ряд - это $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, он состоит из членов $a_n = \frac{1}{n!}$. Тогда, мы может его сравнить с рядом S_2 с членами $b_n = \frac{1}{2^n}$. Т.к. соблюдается условие, что $b_n > a_n, n \geq 4$, и $(a_1 + a_2 + a_3)$ - конечная сумма, то нам достаточно доказать, что ряд S_2 сходится. Несложно заметить, что b_n - это члены геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{2}$, сумма такого ряда равна $\frac{1}{1-q} = 2$. Т.к. данная сумма - конечна, то S_2 - сходится, соответственно, сходится и исходный ряд тоже сходится.

1.7 Задача 7

Воспользуемся теоремой Тейлора и найдём аппроксимацию значения функции в окрестности указанного значения аргумента функции. Положим x_0 равным нулю, учтём, что все производные любого порядка от e^x равны $[e^x]^{(n)} = e^x$. тогда:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \quad + \quad \frac{e^x}{(n+1)!}, |x-0| < 1 \\ \Rightarrow e^{1//4} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(1/4)^i}{i!} \quad + \quad \frac{e^{1/4}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Для оценки значения n воспользуемся тем соображением, что остаточный член должен быть не больше требуемой погрешности 0.001:

$$\frac{e^{1/4}}{(n+1)!} \leq 0.001.$$

Для разрешения данного неравенства воспользуемся каким-нибудь известным значением, ограничивающее значение в левой части неравенства сверху, при этом связанным с n, например,

$$\frac{e^{1/4}}{(n+1)!} < \frac{e^{1/2}}{(n+1)!} \leq 0.001.$$

Значение $e^{1/2} \approx 1.7$, тогда методом подбора n равно 6, т.е. достаточно вычислить сумму нулевого и остальных шести членов ряда, чтобы определить значение $e^{1/4}$ с точностью, не хуже заданной:

$$e^{1/4} \approx \sum_{i=0}^{6} \frac{(1/4)^i}{i!} \approx 1.284.$$

Значение суммы выше было вычислено на компьютере, используя программу, приведенную ниже. Также, были вычислены суммы и для других n, расположенных рядом. Любопытно отметить, что было бы достаточным взять $n = 3$ для достижения требуемой точности.

Listing 1: Python-скрипт для приближенного вычисления $e^{1/4}$

```
import math

y = math.e**(1/4)

print('True:  y = %1.10f' % y)

print()

for n in (3,4,5,6):
    s = 0
    for i in range(n+1):
        s += (1/4)**i/math.factorial(i)
    print('n = %d, s = %1.10f, delta = %0.10f' % (n, s, abs(s - y)))
```

Вывод программы:

```
True:  y = 1.2840254167

n = 3, s = 1.2838541667, delta = 0.0001712500
n = 4, s = 1.2840169271, delta = 0.0000084896
n = 5, s = 1.2840250651, delta = 0.0000003516
n = 6, s = 1.2840254042, delta = 0.0000000125
```

1.8 Задача 8

Представим заданную площадь S на рис. 3.

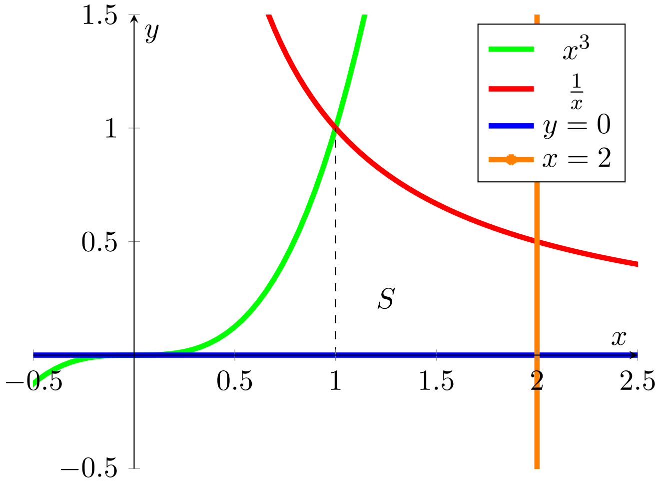

Figure 3: Площадь заданная функциями

Можно заметить, что она состоит из двух частей, разделённых линией $x^3 = \frac{1}{x}, x > 0 \Rightarrow x = 1$, соответственно, исходя из графиков функций, которые ограничивают её сверху, мы можем вычислить значение полной площади:

$$S = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 \quad + \quad \ln|x|\Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \ln 2.$$