Математический анализ и линейная алгебра
Домашнее задание №3

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 28, 2018

1 Задачи

1.1 Задача 1

Данная задача была ранее решена, как задача 8 задания 2.

1.2 Задача 2

Параметрическое уравнение касательного вектора: $r'(t) = (1, -2\sin 2t, 2\cos 2t)$.

Точке $(\pi, 1, 0)$ соответствует значение $t = \pi$, касательный вектор в данной точке принимает значение $r'(\pi) = (1, 0, 2)$.

Точке $(\pi/2, -1, 0)$ соответствует значение $t = \pi/2$, касательный вектор в данной точке принимает значение $r'(\pi/2) = (1, 0, -2)$.

Кривая $r(t)$ и касательные вектора отображены на 1. Данную кривую можно представить, как спираль вокруг оси Ox с периодом π.

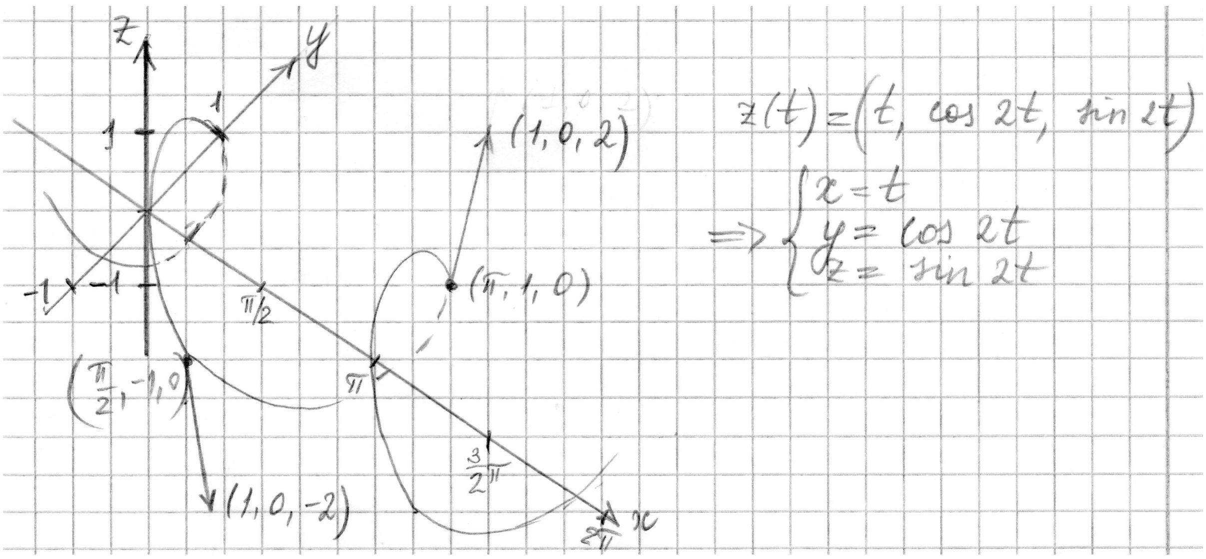

Figure 1: Эскиз кривой $r(t) = (t, \cos 2t, \sin 2t)$ и касательных векторов к ней.

1.3 Задача 3

См. рис. 2. Область определения функции - $\mathbb{R}^2$, область значений - $[4, +\infty)$.

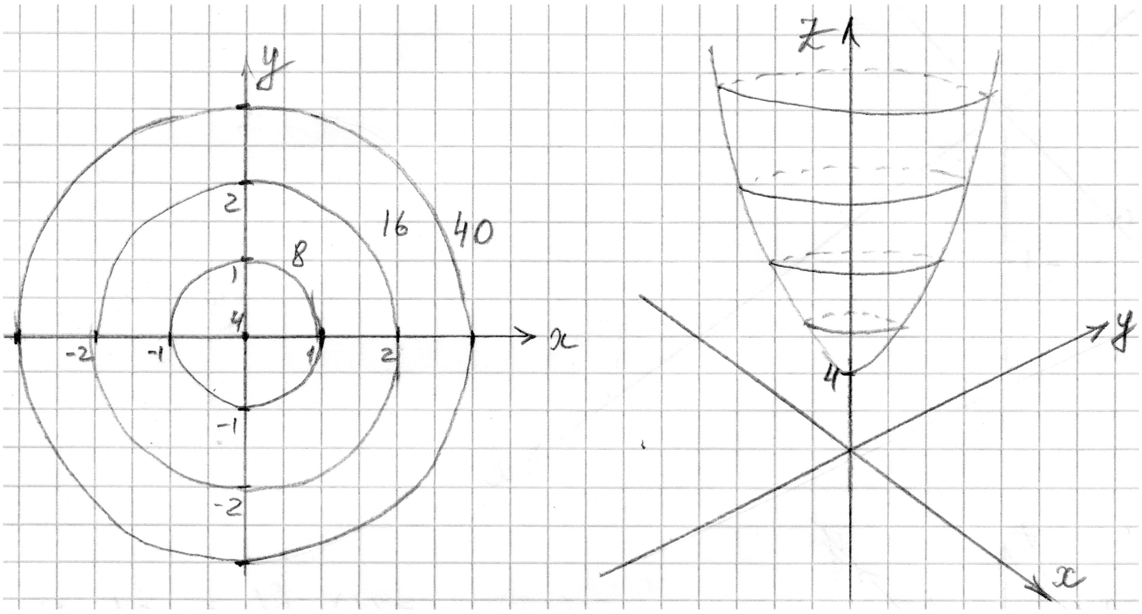

Figure 2: Линии уровня $f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 4$ и эскиз её поверхности.

1.4 Задача 4

Градиент функции $\nabla f(4,6)$ показан на рис. 3. Он направлен в сторону роста значений функций и перпендикулярно линии уровня функции в заданной точке.

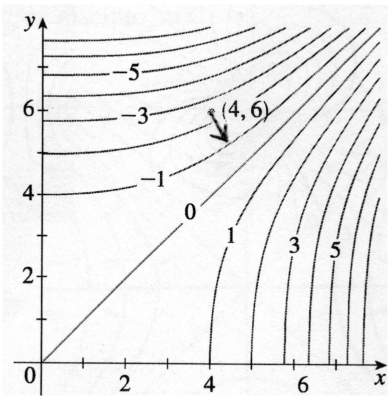

Figure 3: Заданные линии уровня с отмеченным градиентом

1.5 Задача 5

Найдём частные производные функции $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$:

$$f_X = 4x^3 - 4y, \qquad f_{XX} = 12x^2, \qquad f_{XY} = -4,$$
$$f_Y = 4y^3 - 4x, \qquad f_{YY} = 12y^2, \qquad f_{YX} = -4.$$

Определим в каких точках градиент $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$ равен (0, 0):

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0, \\ 4y^3 - 4x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0, \\ y^3 - x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - \sqrt[3]{x} = 0, \\ y^3 - \sqrt[3]{y} = 0. \end{cases}$$

Корнями данной системы уравнений являются точки $A = (0, 0), B = (1, 1)$. Это точки, которые могут быть как точками экстремума, так и седловыми точками. Для определения характера точек воспользуемся достаточным условием экстремума. Вычислим значения вторых частных производных и определителя функции $D = f_{XX}f_{YY} - f_{XY}^2 = 144x^2y^2 - 16$ в данных точках:

Точка	A = (0,0)	B = (1,1)
f_{XX}	0	12
f_{YY}	0	12
f_{XY}	-16	-16
D	-16	128

Исходя из значений детерминанта и вторых частных производных, точка B является точкой минимума. С точкой A возникла неопределенность, т.к. $D = 0$ в данной точке.

Посмотрим значения самой функции в окрестности такой точки. Так, для малых (ε, δ):

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 + 2 > 0,$$
$$f(0, \delta) = \delta^4 + 2 > 0.$$

Т.е. функция в самой точке принимает значение $f(0,0) = 2$, а её окрестностях - значения больше, чем 2, то точка A является точкой минимума.

1.6 Задача 6

Данная задача была ранее решена, как задача 6 задания 2.

1.7 Задача 7

Данная задача была ранее решена, как задача 7 задания 2.