Математический анализ и линейная алгебра
Домашнее задание №5

Дмитрий Донецков

August 5, 2018

1 Задачи

1.1 Задача 1

Данная задача была решена ранее, как задача 4 задания 4.

1.2 Задача 2

В общем случае, множество многочленов $S = P[n]$ при всех n меньше определённого числа удовлетворяет требованиям к линейному пространству, поэтому оно является линейным пространством, размерностью $n+1$. Примером базиса для них является вектор $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Посмотрим, как на это влияют дополнительные условия:

a) Если каждый многочлен множества S равен нулю в единице, то ...

b) Если каждый многочлен множества S равен пяти в единице, то ... .

1.3 Задача 3

Заданная система линейных уравнений не имеет однозначного решения, т.к. содержит четыре неизвестных переменных при трёх уравнениях. Попробуем прийти к общему решению методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{R_1-3R_2} \\ \xrightarrow{R_1-3R_3} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} -6 & 9 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -2 \\ 0 & -9 & -9 & -7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -2 \\ 0 & -9 & -9 & -7 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_1-R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -12 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -2 \\ 0 & -9 & -9 & -7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -12 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2-\frac{9}{12}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -12 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & -4 & -7/2 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Тогда, бесконечное множество решений заданной системы линейных уравнений определяется значением x_4:

$$\begin{cases} x_1 &= -\frac{1}{2}x_4, \\ x_2 &= \frac{7-8x_4}{18}, \\ x_3 &= \frac{1-2x_4}{6}. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/18 \\ 1/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/9 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_4.$$

1.4 Задача 4

Следующие комбинации векторов будут образовывать базис в $\mathbb{R}^2$, т.к. будут являться линейно-независимыми:

- a_1 и a_2,
- a_1 и любой из векторов a_3, a_4, a_5,
- a_2 и любой из векторов a_3, a_4, a_5.

1.5 Задача 5

Из трех данных векторов посредством составления всех их линейных комбинаций можно получить линейное пространство векторов на множестве $\mathbb{R}^3$. Для линейного пространства на множестве $\mathbb{R}^3$ можно взять базис $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ размерностью 3.

1.6 Задача 6

а) Сумма и произведения существуют и равны:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ -13 & -36 \end{bmatrix}.$$

б) Сумма матриц A, B не определена, т.к. у них разная размерность; произведение - существует и равно:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & -8 \\ 4 & -19 \end{bmatrix}.$$

1.7 Задача 7

$\operatorname{rank} A = 2$, т.к. в результате преобразований по методу Гаусса в ней остаются две ненулевых строки.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -18 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 - 5R_2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -27 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{2}{3}R_1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -27 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.8 Задача 8

$$A^2 = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 1 \\ 0 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} -64 & 48 & -12 \\ 0 & -64 & 48 \\ 0 & 0 & -64 \end{bmatrix} \quad A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 256 & -256 & 96 \\ 0 & 256 & -256 \\ 0 & 0 & 256 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A^n = A^{n-1} A = \begin{bmatrix} (-4)^n & * & * \\ 0 & (-4)^n & * \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{bmatrix}.$$

* - данные элементы не получается выразить сразу же через элементы исходной матрицы A.

1.9 Задача 9

a)

$$(A|E) = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 4/3 R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 21 R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -27 & 21 \\ 0 & -1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\times -3]{\div 3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

b)

$$(A|E) = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - c/a R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - b\,c/a & -c/a & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - \frac{ab}{ad-bc} R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & d - b\,c/a & -c/a & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

c) Не выполнено.

d) Не выполнено.

1.10 Задача 10

Обозначим через A исходную матрицу A, через A' - изменённую матрицу.

a) A' - это матрица A, в которой строки i,j были переставлены местами. Такую операцию перестановки строк в матричном виде можно выразить через операцию умножения:

$$A' = E'A\,,$$

где E' - это единичная матрица I, в которой были переставлены строки i,j.

Тогда для ответа на заданный вопрос нам от данного выражения следует прийти к выражению с обратными матрицами для A, A', чтобы увидеть, как они будут связаны между собой:

$$(A')^{-1} = (E'A)^{-1} = A^{-1}(E')^{-1} = A^{-1}E'. \tag{1}$$

Т.е. выражение 1 показывает, что в обратной матрице для A' местами будут поменяны столбцы i,j относительно обратной матрицы для A, т.к. $A^{-1}E'$ - это формула перестановки столбцов.

N.B. Я не смог доказать выше, что $(E')^{-1} = E'$, но эмпирические вычисления показали справедливость такого перехода.

b) Не выполнено.

1.11 Задача 11

a) $\det A = 4 \times 9 - 8 \times 1 = 28$.

b) $\det B = 12 + 0 + 36 - 8 - 90 - 0 = -50$.

c) Не выполнено.