Теория вероятностей и математическая статистика
Домашнее задание №6

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 26, 2018

1 Задачи

1.1 Задача 1

Точное значение указанной площади, как четверти площади внутри единичной окружности, составляет $\frac{\pi}{4}$. Данное значение можно вычислить и аналитически:

$$\int_0^1 \sqrt{1^2 - x^2}dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{4}.$$

Для вычисления интеграла функции $\hat{I}_n$ по методу Монте-Карла есть следующая оценка погрешности приближения к истинному значению I (с вероятностью ≈ 0.997):

$$|\hat{I}_n - I| \le \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \le \left[\frac{3\sigma}{|\hat{I}_n - I|}\right]^2.$$

Значение σ^2 (дисперсия случайной величины оценку математического ожидания, которой и проводится) обычно неизвестно. На практике, её часто вычисляют из полученных значений случайной величины в ходе работы алгоритма Монте-Карло. Можно воспользоваться тем соображением, что оцениваемая случайная величина Y распределена с дисперсией не больше, чем равномерно распределённая случайная величина на заданном интервале области отображения, т.е. $\mathbb{D}[Y] \le \mathbb{D}[U[0,1]] = \frac{1}{12}$. Тогда, для достижения требуемой точности при заданной вероятности n ограниченно сверху:

$$n \le \left[\frac{3\sqrt{\frac{1}{12}}}{0.001}\right]^2 \Rightarrow \boxed{n \le\approx 750000}.$$

Т.е. согласно данной оценке n должно быть равным $\approx$750000, чтобы в долгосрочной серии экспериментов по вычислению интеграла заданной функции по методу Монте-Карла получить истинное значение с точностью 0.001 и с вероятностью 0.997.

Попробуем уточнить оценку. Для этого аналитически вычислим σ для $Y = \sqrt{1-X^2}$, где $X \sim U[0,1], \mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}, \mathbb{D}[X] = \frac{1}{12}$:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathbb{D}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - [\mathbb{E}[Y]^2] &= \mathbb{E}[1 - X^2] - (\frac{\pi}{4})^2 \\ &= 1 - \mathbb{E}[X^2] - \frac{\pi^2}{16} = 1 - (\mathbb{D}[X] + (\mathbb{E}[X]^2) - \frac{\pi^2}{16} \\ &= 1 - (\frac{1}{12} + \frac{1}{4}) - \frac{\pi^2}{16} = \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

Тогда, для достижения требуемой точности при заданной вероятности n ограниченно сверху:

$$n \le \left[\frac{2 - \frac{3\pi^2}{16}}{0.001}\right]^2 \Rightarrow \boxed{n \le\approx 22335}.$$

Т.е. согласно данной оценке n должно быть равным $\approx$22335, чтобы в долгосрочной серии экспериментов по вычислению интеграла заданной функции по методу Монте-Карла получить истинное значение с точностью 0.001 и с вероятностью 0.997.