Теория вероятностей и математическая статистика
Домашнее задание №6

Дмитрий Донецков (ddonetskov@gmail.com)

July 26, 2018

1 Задачи

1.1 Задача 1

Точное значение указанной площади, как четверти площади внутри единичной окружности, составляет $\frac{\pi}{4}$. Данное значение можно вычислить аналитически:

$$\int_0^1 \sqrt{1^2 - x^2}dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{1}{4}\pi.$$

Для вычисления интеграла $\hat{I}_n$ заданной площади по методу Монте-Карла введём случайную величину "попадание в область под графиком" - B:

$$B = \begin{cases} 1 & \text{, если для пары случайных чисел } (x_i, y_i) \in U[0,1] \times U[0,1] \text{ верно, что } x_i^2 + y_i^2 \leq 1, \\ 0 & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Выбранная случайная величина B обладает свойствами:

$$p = \frac{1}{4}\pi,\ q = 1 - \frac{3}{4}\pi,\ \mathbb{E}[B] = \frac{1}{4}\pi,\ \mathbb{D}[B] = pq = \frac{\pi(4-\pi)}{16}.$$

Оценка математического ожидания B и будет оценочным значением искомого интеграла - $\hat{I}_n$. Для оценки приближения $\hat{I}_n$ к истинному значению I (с вероятностью $p_{|x| \leq 3\sigma} \approx 0.997$) воспользуемся выводом из ЦПТ:

$$|\hat{I}_n - I| \leq \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \leq \left[\frac{3\sigma}{|\hat{I}_n - I|}\right]^2.$$

Тогда, для приближения к требуемой точности (снизу) при заданной вероятности n ограниченно сверху:

$$n \leq \left[\frac{3\sqrt{\frac{\pi(4-\pi)}{16}}}{0.001}\right]^2 \approx 1516931.$$

Т.е. согласно данной оценке n должно быть равным ≈1516931, чтобы в долгосрочной серии экспериментов по вычислению интеграла заданной функции по методу Монте-Карла получить истинное значение с точностью 0.001 и с вероятностью 0.997.