Série 14 (Corrigé)

Exercice 1 - QCM

Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit n un entier positif et K un corps. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(K)$ est diagonalisable, alors toute matrice semblable à A est diagonalisable.

  ○ vrai ○ faux

- Soit n un entier positif. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ est diagonalisable, alors $7A^2 - 2A + 5I_n$ est aussi diagonalisable.

  ○ vrai ○ faux

- Soit n un entier positif et K un corps. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(K)$ est diagonalisable, alors la somme des carrés de ses valeurs propres est égale à $\mathrm{tr}(A^2)$.

  ○ vrai ○ faux

- Soit n un entier positif et K un corps. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(K)$ est diagonalisable, alors elle possède n valeurs propres distinctes.

  ○ vrai ○ faux

- Soit n un entier impair. Toute matrice réelle $n \times n$ a au moins une valeur propre réelle.

  ○ vrai ○ faux

- Soit n un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Im}(a_{ij}) = 0$ pour $i, j = 1, ..., n$. Si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est une valeur propre de A et v un vecteur propre associé, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A et $\bar{v}$ un vecteur propre associé.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soit n un entier positif et K un corps. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(K)$ est diagonalisable, alors toute matrice semblable à A est diagonalisable.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit n un entier positif. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ est diagonalisable, alors $7A^2 - 2A + 5I_n$ est aussi diagonalisable.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit n un entier positif et K un corps. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(K)$ est diagonalisable, alors la somme des carrés de ses valeurs propres est égale à $\mathrm{tr}(A^2)$.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit n un entier positif et K un corps. Si une matrice carrée $A \in M_{n\times n}(K)$ est diagonalisable, alors elle possède n valeurs propres distinctes.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit n un entier impair. Toute matrice réelle $n \times n$ a au moins une valeur propre réelle.*

● *vrai* ○ *faux*

- *Soit n un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Im}(a_{ij}) = 0$ pour $i, j = 1, ..., n$. Si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est une valeur propre de A et v un vecteur propre associé, alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A et $\bar{v}$ un vecteur propre associé.*

● *vrai* ○ *faux*

Exercice 2

1. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

   i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$,

   ii) $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$,

   iii) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

2. Calculer D^{100} pour la matrice $D = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ 2 & -10 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

3. Déterminer pour quelles valeurs du couple (a, b) la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$$

   est diagonalisable.

Sol.:

1.

i) La matrice A est triangulaire supérieure. On sait que les valeurs propres sont les éléments diagonaux, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$. Les valeurs propres sont toutes distinctes les unes des autres, ainsi la matrice A est diagonalisable.

ii) On a que les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme caractéristique,

$$\begin{aligned} p_B(t) = \det(tI_3 - B) &= \det \begin{pmatrix} t-5 & 1 & 1 \\ 1 & t-5 & 1 \\ 1 & 1 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t-5)^3 + 1 + 1 - (t-5)(1+1+1) \\ &= t^3 - 15t^2 + 72t - 108. \end{aligned}$$

Posons $t = 6$, on voit que la matrice $6I_3 - B$ a tous les éléments égaux à 1, donc elle est singulier. Donc, on trouve que 6 est une racine de p_B. On peut alors faire une factorisation et obtenir

$$p_B(t) = (t-6)(t^2 - 9t + 18) = (t-3)(t-6)(t-6).$$

Les valeurs propres de B sont alors $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. On a $m_{\text{alg}}(3) = 1$ et $m_{\text{alg}}(6) = 2$. D'office on a $m_{\text{géom}}(3) = 1$, mais nous devons encore calculer la dimension de $E_6(B)$ afin de savoir si on a $m_{\text{géom}}(6) = 2$ ou $m_{\text{géom}}(6) = 1$. On a

$$E_6(B) = \ker(6\,I_3 - B) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit que $\operatorname{rang}(6\,I_3 - B)$ est 1. Donc la dimension du noyau est 2 ainsi $m_{\text{géom}}(6) = 2$. On obtient que $m_{\text{alg}}(\lambda) = m_{\text{géom}}(\lambda)$ pour toutes les valeurs propres λ et donc B est diagonalisable.

iii) La matrice C a pour polynôme caractéristique

$$p_C(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)(t-1).$$

On obtient $m_{\text{alg}}(-1) = 1 = m_{\text{géom}}(-1)$ et $m_{\text{alg}}(1) = 2$, et

$$E_1(C) = \ker(I - C) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

On voit alors que $\dim E_1(C) = 1$, et on obtient $m_{\text{géom}}(1) = 1$. Comme $m_{\text{géom}}(1) = 1 \neq 2 = m_{\text{alg}}(1)$, la matrice C n'est pas diagonalisable.

2. Comme $D = -2B$, on a que $D = V \begin{pmatrix} -2\cdot 3 & & \\ & -2\cdot 6 & \\ & & -2\cdot 6 \end{pmatrix} V^{-1}$, où V contient des vecteurs propres de B. Il faut encore calculer V :

- *Pour la valeur propre $\lambda = 3$, on résoudre le système $(3I_3 - B)x = 0$ et trouve que un vecteur propre associé est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*
- *Pour la valeur propre $\lambda = 6$, on résoudre le système $(6I_3 - B)x = 0$ et trouve que deux vecteurs propres (indépendantes) associés sont $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.*

Enfin,

$$\begin{aligned} D^{100} &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{100} & & \\ & 12^{100} & \\ & & 12^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^{100} & & \\ & 12^{100} & \\ & & 12^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a

$$\det(X-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & a & b\\ a & -\lambda & b\\ a & b & -\lambda\end{pmatrix} \overset{\substack{G_{21}(-1)\\ G_{23}(-1)}}{=} \det\begin{pmatrix}-\lambda-a & a+\lambda & 0\\ a & -\lambda & b\\ 0 & b+\lambda & -\lambda-b\end{pmatrix}$$
$$= (\lambda+a)(\lambda+b)\det\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ a & -\lambda & b\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$= -(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda-a-b).$$

On a trois valeurs propres $-a$, $-b$ et $a+b$ pas forcément distinctes. Alors on considère plusieurs cas :

(1) Supposons $-a=-b=a+b$. On trouve $a=b=0$ et ceci contredit l'hypothèse : a,b non nuls.

(2) Supposons $-a=-b\neq a+b$. On a donc $a=b$ et deux valeurs propres $-a$ et $2a$ avec multiplicités $m_{\mathrm{alg}}(2a)=1=m_{\text{géom}}(2a)$ et $m_{\mathrm{alg}}(-a)=2$. Vu que

$$X-(-a)I_3 = \begin{pmatrix}a & a & a\\ a & a & a\\ a & a & a\end{pmatrix} \overset{\substack{G_{12}(-1)\\ G_{13}(-1)\\ M_1(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

alors $m_{\text{géom}}(-a)=2=m_{\mathrm{alg}}(-a)$ et A est diagonalisable.

(3) Supposons $-a=a+b\neq -b$. On a donc $b=-2a$ et deux valeurs propres $-a$ et $2a$ avec multiplicités $m_{\mathrm{alg}}(-a)=2$ et $m_{\mathrm{alg}}(2a)=1=m_{\text{géom}}(2a)$. Vue que

$$X-(-a)I_3 = \begin{pmatrix}a & a & -2a\\ a & a & -2a\\ a & -2a & a\end{pmatrix} \overset{\substack{M_1(a^{-1})\\ M_2(a^{-1})\\ M_3(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{G_{12}(-1)\\ G_{13}(-1)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \overset{P_{23}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

alors $m_{\text{géom}}(-a)=1\neq m_{\mathrm{alg}}(-a)$ et A n'est pas diagonalisable.

(4) Supposons $-b=a+b\neq -a$. On a donc $b=-a/2$ et deux valeurs propres $-a$ et $a/2$ avec multiplicités $m_{\mathrm{alg}}(a/2)=2$ et $m_{\mathrm{alg}}(-a)=1=m_{\text{géom}}(-a)$. Vu que

$$X-(a/2)I_3 = \begin{pmatrix}-a/2 & a & -a/2\\ a & -a/2 & -a/2\\ a & -a/2 & -a/2\end{pmatrix} \overset{\substack{M_1(a^{-1})\\ M_2(a^{-1})\\ M_3(a^{-1})}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}-1/2 & 1 & -1/2\\ 1 & -1/2 & -1/2\\ 1 & -1/2 & -1/2\end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{G_{23}(-1)\\ G_{12}(2)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}-1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 3/2 & -3/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

alors $m_{\text{géom}}(a/2)=1\neq m_{\mathrm{alg}}(a/2)$ et X n'est pas diagonalisable.

(5) *Supposons les trois valeurs propres $-a$, $-b$, $a+b$ sont distinctes, alors la matrice X est diagonalisable.*

Exercice 3

i) Déterminer si les applications $p : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ sont linéaires.

a) $p \longmapsto p''$,

b) $p \longmapsto x \cdot p'$,

c) $$p \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x p(s)\,ds & , \ x \neq 0, \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t} \int_0^t p(s)\,ds & , \ x = 0. \end{cases}$$

ii) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'application linéaire du point i). Déterminer si les applications sont diagonalisables.

Indication : Utiliser le Théorème 7.25.

Sol.:

i) Pour $p, q \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

a) $(\alpha p + q)'' = \alpha p'' + q''$,

b) $x \cdot (\alpha p + q)' = \alpha \cdot (x \cdot p') + x \cdot q'$,

c) $\frac{1}{x} \int_0^x \big(\alpha p + q\big)(s)\,ds = \alpha \frac{1}{x} \int_0^x p(s)\,ds + \frac{1}{x} \int_0^x q(s)\,ds \quad (x \neq 0)$,

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \big(\alpha p + q\big)(s)\,ds = \alpha \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t p(s)\,ds + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t q(s)\,ds$,

Les trois applications sont donc linéaires.

Les applications a) et b) sont des applications de $V \to V$. Pour l'application de c), que l'on note h, ce n'est pas clair que l'image de h est un polynôme. L'application h satisfait $h(x^k) = \frac{1}{k+1} x^k$, pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et pour les deux cas $x = 0$, $x \neq 0$. De plus, à casue de la linéarité $h(p) \in V$ pour $p \in V$ et l'application de c) est en effet de $V \to V$.

ii) On dénote les applications de $V \to V$ avec h. Un vecteur propre $p \in V \backslash \{0\}$ de h satisfait $h(p) = \lambda p$ pour une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) L'application $h : V \to V; p \longmapsto p''$ envoye un polynôme p de degré 1 sur le polynôme nul, c'est à dire $h(p) = 0 = 0 \cdot p$ et du coup tous les polynômes p de degré au plus 1 sont vecteurs propres associés au valeur propre $\lambda = 0$. L'espace propre associé est $E_0(h) = \operatorname{span}(1, x)$. Les polynômes p de degré plus grand ou égal à 2 sont envoyés par $h(p) = p''$ sur un polynôme de degré $\deg(p) - 2$, alors la relation $h(p) = \lambda p$ ne peut jamais être remplie pour les polynômes de degré au moins 2. Ainsi h n'est pas diagonalisable.

b) *L'application $h : V \to V; p \longmapsto xp'$ est diagonalisable. On a que $h(x^k) = x \cdot k \cdot x^{k-1} = k \cdot x^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Alors $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ sont les valeurs propres de h avec comme espace propre $E_\lambda = span(x^\lambda)$. La dimension de V est 5 et il y a 5 paires de valeurs propres disctinctes, alors h est diagonalisable.*

c) *L'application $h : V \to V$ est diagonalisable. On a $h(x^k) = \frac{1}{k+1}x^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Alors $\lambda = \frac{1}{k+1}$ (aussi $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$) sont les valeurs propres de h avec comme espace propre $E_{\frac{1}{k+1}}(h) = span(x^k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. La dimension de V est 5 et il y a 5 paires de valeurs propres distinctes, alors h est diagonalisable.*

Exercice 4

Soit $T : V \to V$ une application linéaire d'un K-espace vectoriel V de dimension n. On suppose que T possède aux moins deux valeurs propres distinctes λ et μ, et que la multiplicité géométrique de λ vaut $n - 1$. Montrer que T est diagonalisable.

Sol.: *L'espace propre $E_\lambda(T)$ est de dimension $n-1$ et l'espace propre $E_\mu(T)$ est de dimension au moins 1. De plus, des espaces propres distincts sont toujours en somme directe. Par conséquent $E_\lambda(T) \oplus E_\mu(T)$ est un sous-espace de V de dimension au moins $(n-1)+1 = n$. On doit donc avoir $E_\lambda(T) \oplus E_\mu(T) = V$. Il s'ensuit que V possède une base formée de vecteurs propres, ce qui montre que T est diagonalisable.*

Exercice 5

Soit $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'application de transposition, définie par $T(A) = A^T$.

a) Montrer que 1 et -1 sont des valeurs propres de T.

b) Dans le cas où $n = 2$, déterminer les espaces propres correspondant à chaque valeur propre et trouver une base de chaque espace.

c) Dans le cas où $n = 2$, montrer que T est diagonalisable.

d) Généraliser b) et c) à un entier positif n quelconque.

Sol.:

a) *Si A est une matrice symétrique (c'est-à-dire si $A^T = A$), alors $T(A) = 1 \cdot A$. Si de plus $A \neq 0$, alors A est un vecteur propre de T pour la valeur propre 1.*
Si B est une matrice antisymétrique (c'est-à-dire si $B^T = -B$), alors $T(B) = (-1) \cdot B$. Si de plus $B \neq 0$, alors B est un vecteur propre pour la valeur propre -1.

b) *Soit $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Puisque la transposition laisse fixes E_{11} et E_{22} et échange E_{12} et E_{21}, la matrice de T par rapport à cette base est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'espace propre $E_1(T)$ correspondant à la valeur propre 1 est le sous-espace des matrices symétriques. On a donc $E_1(T) = \text{span}(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21})$, car on vérifie aisément que ces 3 matrices forment une base de $E_1(T)$.

L'espace propre $E_{-1}(T)$ correspondant à la valeur propre -1 est le sous-espace des matrices antisymétriques. On a donc $E_{-1}(T) = \text{span}(E_{12} - E_{21})$ car on vérifie aisément que cette matrice forme une base de $E_{-1}(T)$.

c) *Les 4 matrices obtenues en b) forment une base de $E_1(T) \oplus E_{-1}(T)$ (car des espaces propres distincts sont toujours en somme directe). Il s'ensuit que $E_1(T) \oplus E_{-1}(T) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (sous-espace de dimension 4 dans un espace de dimension 4). Donc $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ possède une base formée de vecteurs propres, si bien que T est diagonalisable.*

d) *L'espace propre $E_1(T)$ correspondant à la valeur propre 1 est le sous-espace des matrices symétriques, ayant pour base $\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. On a déja vu que la dimension du sous-espace des matrices symétriques est $\frac{n(n+1)}{2}$.*

L'espace propre $E_{-1}(T)$ correspondant à la valeur propre -1 est le sous-espace des matrices antisymétriques, ayant pour base $\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Sa dimension est $\frac{n(n-1)}{2}$.

En réunissant les bases obtenues pour $E_1(T)$ et $E_{-1}(T)$, on trouve une base de $E_1(T) \oplus E_{-1}(T)$ (en tenant compte du fait que des espaces propres distincts sont toujours en somme directe). On trouve ainsi n^2 matrices, car $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$. Comme $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, ces n^2 matrices forment une base de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ possède une base formée de vecteurs propres, donc que T est diagonalisable.

Exercice 6

Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé et soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire suivante :

$$T\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de T et trouver ses valeurs propres.

b) Trouver les espaces propres correspondants, ainsi que les multiplicités algébriques et géométriques.

c) Déterminer si T est diagonalisable. Le cas échéant, trouver une base formée de vecteurs propres et expliciter la formule de changement de base.

Sol.:

a) *Soit $E = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Les images des matrices de E sont :*

$$T(E_{11}) = E_{12}, \quad T(E_{12}) = E_{11}, \quad T(E_{21}) = (b+1)E_{21} + E_{22}, \quad T(E_{22}) = -bE_{21}\,.$$

Par conséquent, la matrice de T dans la base canonique est

$$[T]_{EE} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En développant $p_T(t) = \det(A - tI_4)$ on trouve

$$\begin{aligned} p_T(t) &= t^2(t^2 - bt - t + b) - (t^2 - bt - t + b) = (t^2 - 1)(t^2 - bt - t + b) \\ &= (t^2 - 1)(t - b)(t - 1) = (t - 1)^2(t + 1)(t - b). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de T sont donc 1, -1 et b. On considère les trois cas :

(1) Si $b \neq \pm 1$, il y a 3 valeurs propres et les multiplicités algébriques sont $m_{\text{alg}}(1) = 2$, $m_{\text{alg}}(-1) = 1$ et $m_{\text{alg}}(b) = 1$.

(2) Si $b = -1$, il y a 2 valeurs propres et les multiplicités algébriques sont $m_{\text{alg}}(1) = 2$, $m_{\text{alg}}(-1) = 2$.

(3) Si $b = 1$, il y a 2 valeurs propres et les multiplicités algébriques sont $m_{\text{alg}}(1) = 3$, $m_{\text{alg}}(-1) = 1$.

b) On considère les trois cas :

(1) Supposons d'abord que $b \neq \pm 1$. Une matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre $E_1(T)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = (b+1)z - bt \\ t = z \end{cases}$$

Ce système d'équations se ramène à $x = y$ et $z = t$, avec y et t comme variables libres. On obtient une base de l'espace des solutions en prenant d'abord $y = 1$ et $t = 0$, ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $y = 0$ et $t = 1$, ce qui donne la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$E_1(T) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad m_{\text{géom}}(1) = \dim(E_1(T)) = 2.$$

Par ailleurs, une matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre $E_{-1}(T)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x = y \\ -y = x \\ -z = (b+1)z - bt \\ -t = z \end{cases}$$

Ce système d'équations se ramène à $x = -y$, $t = -z$, *et* $-z = (2b+1)z$, *c'est-à-dire* $2(b+1)z = 0$. *Comme on a supposé que* $b \neq -1$, *il résulte que* $z = 0$, *donc aussi* $t = 0$. *On obtient par conséquent*

$$E_{-1}(T) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad et \quad m_{\text{géom}}(-1) = \dim(E_{-1}(T)) = 1.$$

Enfin, une matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *appartient à l'espace propre* $E_b(T)$ *si et seulement si*

$$\begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx & by \\ bz & bt \end{pmatrix} \iff \begin{cases} bx = y \\ by = x \\ bz = (b+1)z - bt \\ bt = z \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $b^2 x = x$, *donc* $x = y = 0$, *car* $b \neq \pm 1$. *Les deux dernières impliquent* $z = bt$ *avec* $z \in \mathbb{R}$ *quelconque. En conclusion*

$$E_b(T) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\right) \quad et \quad m_{\text{géom}}(b) = \dim(E_b(T)) = 1.$$

(2) *Supposons maintenant* $b = -1$. *L'espace propre* $E_1(T)$ *ne change pas, avec* $m_{\text{géom}}(1) = \dim(E_1(T)) = 2$. *Reprenant l'étude de* $E_{-1}(T)$, *on constate que la condition* $-z = (2b+1)z$ *est satisfaite pour tout* $z \in \mathbb{R}$, *donc*

$$E_{-1}(T) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad et \quad m_{\text{géom}}(-1) = \dim(E_{-1}(T)) = 2.$$

(3) *Supposons finalement* $b = 1$. *On vérifie que* $E_1(T)$ *et* $E_{-1}(T)$ *sont les mêmes que dans le cas (1). On a* $m_{\text{géom}}(-1) = \dim(E_1(T)) = -1$ *et* $m_{\text{géom}}(1) = \dim(E_1(T)) = 2$.

c) *et d). On considère les trois cas :*

(1) *Supposons d'abord* $b \neq \pm 1$. *Alors* $p_T(t)$ *est scindé et les multiplicités algébriques et géométriques coïncident pour chaque valeur propre. Par le théorème de diagonalisation, la transformation linéaire* T *est diagonalisable. Soit alors*

$$G = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\right)$$

la nouvelle base formée de vecteurs propres et soit E *la base canonique. Les matrices de passage sont*

$$S = [I]_{G,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad S^{-1} = [I]_{E,G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-b} & \frac{-b}{1-b} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1-b} & \frac{1}{1-b} \end{pmatrix}.$$

(A noter que $b \neq 1$, ce qui est nécessaire pour pouvoir inverser S et obtenir $1-b$ au dénominateur.) La formule de changement de base donne la matrice diagonale

$$[T]_{G,G} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(2) *Supposons maintenant $b=-1$. Alors $p_T(t) = (t-1)^2(t+1)^2$ et on obtient*

$$m_{\text{géom}}(1) = m_{\text{alg}}(1) = 2 \qquad \text{et} \qquad m_{\text{géom}}(-1) = m_{\text{alg}}(-1) = 2\,.$$

Donc T est diagonalisable (par le théorème de diagonalisation). En prenant la même base que dans le cas (1) avec $b=-1$ on trouve

$$S = [I]_{G,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = [I]_{E,G} = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & -\frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac12 & \frac12 \end{pmatrix},$$

$$[T]_{G,G} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) *Finalement, supposons $b=1$. On a $p_T(t) = (t-1)^3(t+1)$ et on obtient $2 = m_{\text{géom}}(1) < m_{\text{alg}}(1) = 3$. Donc T n'est pas diagonalisable (par le théorème de diagonalisation).*

Exercice 7

On définit deux suites de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence comme suit :

$$x_0 = -1,\ y_0 = 2,\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = & -x_n - 6y_n, \\ y_{n+1} = & x_n + 4y_n. \end{cases}$$

Calculer x_n et y_n en fonction de n.

Indication : Transformer le problème en un problème de calcul de puissances d'une matrice.

Sol.: *On exprime la condition sous forme de matrices :*

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Il suffit donc de calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On calcule le polynôme caractéristique de A et on obtient

$$p_A(t) = \det(A - t \cdot I_2) = \det \begin{pmatrix} -1-t & -6 \\ 1 & 4-t \end{pmatrix} = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)\,.$$

Comme A admet deux valeurs propres différentes et qu'on est en dimension 2, A est diagonalisable. Pour diagonaliser cette matrice, on doit trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre, ce qui donnera une base de vecteurs propres.

L'espace propre $E_1(A)$ est par définition le noyau de $A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, *ce qui donne l'équation $x + 3y = 0$. On obtient la solution* $f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, *qui est donc un vecteur propre associée à la valeur propre* 1.

L'espace propre $E_2(A)$ est par définition le noyau de $A - 2 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *ce qui donne l'équation $x + 2y = 0$. On obtient la solution* $f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *qui est donc un vecteur propre associée à la valeur propre* 2.

Si on dénote par $S = (f_1\ f_2) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, donc $A = S \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} S^{-1}$ *et pour tout $n \geq 1$, on obtient*

$$\begin{aligned} A^n &= S \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}^n S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -2^{n+1} \\ 1 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 6 - 3 \cdot 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 6 - 3 \cdot 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 5 \cdot 2^{n+1} \\ -3 + 5 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, pour tout $n \geq 0$,

$$x_n = 9 - 5 \cdot 2^{n+1} \qquad \textit{et} \qquad y_n = -3 + 5 \cdot 2^n\,.$$

Exercice 8

Soit n un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Supposons que le rayon spectral de A est $\rho(A) = 1$ et que toutes les valeurs propres λ telles que $|\lambda| = 1$ sont égales à 1.

i) Montrer que si A est diagonalisable, alors la séquence $A^k, k \to \infty$, converge.

ii) Donner un exemple de matrice non diagonalisable de taille 2, avec les propriétés d'au-dessus, telle que la séquence $A^k, k \to \infty$, diverge.

Sol.:

i) *Si A est diagonalisable et $k \in \mathbb{N}$, donc on a que $A^k = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)^k V^{-1}$, où V est la matrice qui contient des vecteurs propres (qui forment une base de $\mathbb{C}^n$) de A et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (mutiples inclus). Donc il sufit montrer que $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)^k$ converge, pour $k \to \infty$. Comme $\rho(A) = 1$ et toutes les valeurs propres λ telles que $|\lambda| = 1$ sont égales à 1, on a*

$$1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m > \lambda_{m+1} \geq \cdots \lambda_n,$$

où m est la multiplicité de valeur propre $\lambda = 1$. Donc,

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)^k &= \operatorname{diag}(1^k, \dots, 1^k, \lambda_{m+1}^k, \dots, \lambda_n^k) \\ &\underset{k \to \infty}{\to} \operatorname{diag}(1, \dots 1, 0, \dots 0), \end{aligned}$$

car $|\lambda_i| < 1, i = m+1, \dots, n$.

ii) *Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a les propriétés mentionnées, mais $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, la séquence $A^k, k \to \infty$, diverge.*