Série 03 : Oscillations, systèmes de coordonnées

Questions conceptuelles

a) Soit O le centre d'une montre. On définit un axe x selon l'aiguille des minutes et un axe z selon l'aiguille des heures. Ou est l'axe y qui forme un repère orthonormé droit $Oxyz$ quand il est 9h ? ou bien 15h ?

b) Sachant que le soleil se lève à l'est et se couche à l'ouest, le vecteur de vitesse angulaire de rotation de la Terre est-il orienté du pôle nord au pôle sud, ou bien du pôle sud au pôle nord ?

1 Trajectoire elliptique

Un point matériel de masse m se déplace dans le plan défini par le repère orthonormé Oxy de façon à ce que son vecteur position soit donné par

$$\vec{r} = A\cos(\omega t)\,\hat{i} + B\sin(\omega t)\,\hat{j}$$

où A, B et ω sont des constantes positives et $\hat{i}$ et $\hat{j}$ sont les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy.

a) Montrer que le point matériel parcourt une ellipse. Esquissez les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ au long de la trajectoire. Montrer que si $A \neq B$, les vecteurs $\vec{r}(t)$ et $\vec{v}(t)$ ne sont en général pas orthogonaux.

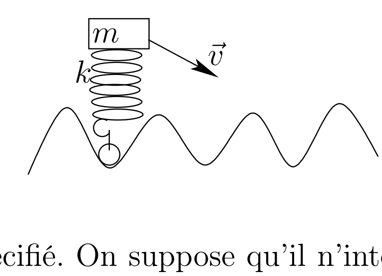
b) Donnez l'expression de la force déterminant ce mouvement.

c) De quel type de force s'agit-il ? Quelle est la différence avec la force gravitationnelle ?

2 Champ de bosses

(Exercice à terminer à la maison)

On modélise le passage d'une voiture sur un champ de bosses (route en « tôle ondulée ») de la façon suivante : un point matériel de masse m, avance avec une vitesse horizontale v_x constante. La masse est reliée à un dispositif comportant un ressort de constante élastique k et de longueur au repos l_0. Au bout du ressort, une roue sans masse, de rayon négligeable suit le profil du sol.



Le dispositif qui maintient le ressort vertical n'est pas spécifié. On suppose qu'il n'intervient pas dans le mouvement de la masse. Les valeurs des paramètres du problème sont telles que la roue ne décolle pas et que la voiture ne tape jamais la roue. Le profil du parcours (la tôle ondulée) a une forme sinusoïdale. La hauteur des bosses est H et leur longueur L.

a) Exprimer la position verticale de la roue $h(t)$ en fonction du temps.

b) En utilisant $h(t)$, déduire l'équation du mouvement de la voiture dans la direction verticale z.

c) Mettre l'équation du mouvement vertical sous la forme $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \alpha_0 \sin(\omega t)$ à l'aide d'un changement de variable $z \to u$ (une redéfinition de l'origine du temps peut aussi être nécessaire).

d) Considérer une solution stationnaire du type $u(t) = \rho \sin(\omega t - \varphi)$, où $\varphi = 0$, et trouver l'amplitude ρ des oscillations verticales de la voiture. Que peut-on dire de la vitesse de la voiture pour que le confort soit optimal ?

3 Lance-pierre

(Exercice non traité pendant la séance)

Bart Simpson joue avec un lance-pierre formé d'un élastique sans masse de longueur à vide nulle tendu entre les deux extrémités A et B d'une branche fourchue rigide. Il prend une pierre, la place au milieu de l'élastique (à mi-distance entre A et B), la tire en arrière sur une distance d perpendiculairement à AB avec une force maximale $\vec{F}_{\text{max}}$, puis la lâche avec une vitesse nulle. La pierre est alors propulsée hors du lance-pierre avec une vitesse $\vec{v}_0$.

a) Ecrire la condition d'équilibre avant que la pierre ne soit relâchée. Projeter cette relation suivant l'axe x et en déduire la raideur k en fonction de F_{max} et d.

b) Ecrire l'équation différentielle pour la position $x(t)$ de la pierre pendant la phase de propulsion. A quel type de mouvement correspond-elle ? Donner la solution générale de cette équation.

c) Utiliser les conditions initiales (la vitesse de la pierre est nulle au moment où elle est lâchée en $x = -d$) pour déterminer la solution particulière.

d) Déterminer la vitesse de la pierre à la position x=0 à partir de la solution $x(t)$. Sachant que la pierre quitte le lance-pierre à la position x=0, exprimer la masse m en fonction de F_{max}, V_0 et d.

Marche à suivre pour la résolution

Définir un axe x perpendiculaire à AB, dans le sens de $\vec{v}_0$, ayant son origine sur la droite AB (voir figure). Noter λ la longueur de chaque moitié de l'élastique et α l'angle que fait chaque moitié de l'élastique avec l'axe x durant la propulsion de la pierre ; λ et α dépendent de x, où x est la position de la pierre ($-d \leq x \leq 0$). Négliger les effets de pesanteur et de frottement de l'air.