Analyse avancée II
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 20 au 23 septembre 2016

Série 1 du mardi 20 septembre 2016

ATTENTION: les prochaines séries ne seront plus distribuées
Vous devrez les imprimer vous-mêmes

Exercice 1 (à rendre) .

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction (=nombre rationnel) x telle que $x^2 = 2/3$.

Exercice 2.

Considérons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Détailler soigneusement ce qui est correct et ce qui ne l'est pas dans le raisonnement suivant.

D'une part, écrivons $x = -1 - x^2$*. D'autre part, si l'on divise l'équation de départ par* x*, on trouve* $x + 1 + 1/x = 0$ *et donc* $x = -1 - 1/x$*. En comparant les deux expressions obtenues pour* x*, il suit que* $x^2 = 1/x$*. Nous déduisons* $x^3 = 1$ *et donc* $x = 1$.

Exercice 3.

Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \ldots + 2015 \cdot 2^{2015}.$$

"Entre nous, S vaut exactement
15154120099642399862324763473817446094084163842910664351822462792283542326111330711026481269581044957942580332350149427368574960187
33100851194642924384838952798177185881515176240003161814174599551764784467069247795954801336541683154877785639783623798930818092683
35621702427924251099365154597001457204101133256069075890798218630392894195721119089611662866424798557927600568841879144578331785040
49034330167973666929271511962213720707939756274110370191989232099577897156456282596940151971407794132372291169113615704104907261483
054258502772836332690828737878891123648430398321809190248934531205712459474217419669506
mais vous trouverez une expression plus intelligente..."

Indications:

1^o) Montrer que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{2015} (n-1)2^n + \sum_{n=1}^{2015} 2^n$.

2^o) Montrer que $S = 2S - 2 \cdot 2015 \cdot 2^{2015} + \displaystyle\sum_{n=1}^{2015} 2^n$.

3^o) Utiliser la relation $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.