Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 10 au 14 octobre 2016

Série 4 du mardi 11 octobre 2016

Exercice 1.

1.) Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_0 = 0, x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$ est de Cauchy.

2.) Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ n'est pas de Cauchy.

3.) Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée récursivement par $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$ est de Cauchy et calculer sa limite.

4.) On considère la suite donnée par $8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, \ldots$. Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite? Justifier votre réponse.

Exercice 2.

On considère la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par

$$x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Exercice 3.

On considère la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par

$$x_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right), \text{ si } n \text{ est pair, } n > 0,$$
$$x_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right), \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Exercice 4 (* A rendre) .

Soit $x_n = \sqrt[n]{n}, n = 1, 2, \ldots,$ et $x_0 = 0$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Indication: Démontrer que $\forall \delta > 0$, on a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{(1+\delta)^n} = 0$ et conclure.