ANALYSE I et II
Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Mardi 17 janvier 2012, 8H15-11H15

# Propédeutique 1

**Exercice 1.**

1.) La suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0, 2\pi]$ ne converge pas ponctuellement et donc pas uniformément.
En effet, si $x = \frac{\pi}{2}$, on a
$$f_1(\frac{\pi}{2}) = 1,\ f_2(\frac{\pi}{2}) = 0,\ f_3(\frac{\pi}{2}) = -1,\ f_4(\frac{\pi}{2}) = 0,$$
et donc $(f_{2n+1})_{n=0}^{\infty} \subset (f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une sous-suite telle que $f_{2n+1}(\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$ et qui diverge. Ainsi la suite $(f_n(\frac{\pi}{2}))_{n=1}^{\infty}$ diverge.

2.) Si $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(\frac{1}{x})$, $x \neq 0, f_n(0) = 0$, alors
$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \quad \text{uniformément (donc ponctuellement).}$$
En effet, si $\epsilon > 0$ est donné et $N > \frac{1}{\epsilon}$, alors pour $n \geq N$, on a
$$|f_n(x)| = \frac{1}{n}\left|\sin(\frac{1}{x})\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon, \qquad \forall x \in ]0, 2\pi]$$
et puisque $f_n(0) = 0$, alors $|f_n(x)| < \epsilon$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in [0, 2\pi]$.

3.) $f_n(x) = \sin(\frac{1}{nx})$, $x \neq 0, f_n(0) = 0$:
On a
$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \quad \text{ponctuellement mais non uniformément.}$$
En effet, si $x \in ]0, 2\pi]$, on a
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0 \quad \text{et sin est continue.}$$
Par contre on n'a pas $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ uniformément car si $x_n = \frac{1}{n}$, alors on a $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \sin 1 = \sin 1$ qui n'est pas nul.

**Exercice 2.**

Calculons
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\ln(\cos^2 x)+x^2}{x^4}.$$
Puisque $\cos 0 = 1$, on développe $\ln y$ autour de $y=1$:
$$\ln y = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + \mathcal{O}(|y-1|^4) \text{ si } y \to 1.$$
On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(|x|^6)$ et donc
$$y = \cos^2 x = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(|x|^6) \text{ si } x \to 0.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\ln\big(\cos^2 x\big) = \ln y &= \Big(-x^2+\frac{x^4}{3}+\mathcal{O}(|x|^6)\Big) - \frac{1}{2}\Big(-x^2+\frac{x^4}{3}+\mathcal{O}(|x|^6)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(-x^2+\frac{x^4}{3}+\mathcal{O}(|x|^6)\Big)^3 \text{ si } x\to 0\\ &= -x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(|x|^6) \text{ si } x \to 0\end{aligned}$$

et donc
$$\ln\big(\cos^2 x\big) + x^2 = -\frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(|x|^6) \text{ si } x \to 0$$

et
$$\frac{\ln\big(\cos^2 x\big)+x^2}{x^4} = -\frac{1}{6} + \mathcal{O}(|x|^2) \text{ si } x \to 0$$

ainsi
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\ln(\cos^2 x)+x^2}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$

**Exercice 3.**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose **uniformément continue** sur $I$.

1.) Donner la définition de l'uniforme continuité de $f$ sur $I$ avec des $\epsilon$ et des $\delta$:
$\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in I$ avec $|x-y| \leq \delta$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

2.) Démontrer à partir de cette définition que si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset I$ est une suite convergente vers $a \in \mathbb{R}$, alors la suite $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ est aussi convergente:
Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset I$ une suite convergente vers $a \in \mathbb{R}$ ($a$ n'est pas nécessairement dans $I$!). Alors $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Ainsi, $\exists N > 0$ tq $|a_n - a_m| \leq \delta, \forall m, n \geq N$. On obtient ainsi $|f(a_n) - f(a_m)| \leq \epsilon, \forall m, n \geq N$, ce qui montre que $\big(f(a_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, donc convergente.

3.) Démontrer que si $I = ]a, b[$ avec $a < b$, alors $f$ peut être prolongée en une fonction continue définie sur $[a, b]$:
Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset I$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Par ce qui précède (part. 2), $\exists \ell_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell_1$. Cette valeur $\ell_1$ est indépendante de la suite $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ choisie. De même, si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset I$ est telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, alors $\exists \ell_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \ell_2$ et $\ell_2$ est indépendante de la suite $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ choisie.
On vérifie aisément que le prolongement $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(a) = \ell_1, g(b) = \ell_2, g(x) = f(x), \forall x \in I$ est une fonction continue.

4.) Démontrer que si $I = ]0, 1[$ et $f(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$, alors $f$ est bien uniformément continue sur $I$. Comment peut-on définir $f(0)$ et $f(1)$ en prolongeant $f$ en zéro et en un?:
Le dénominateur de $f$ s'annule et vaut "$-\infty$" pour $x = 1$ et $x = 0$.

a) Si on développe ln au point $x = 1$, on obtient:
$$\ln x = (x-1) + \mathcal{O}(|x-1|^2) \text{ si } x \to 1.$$
Alors $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{\ln x}{1-x} = -1$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{1-x}{\ln x} = -1$.

b) Si $x$ tend vers 0, on a:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1-x}{\ln x} = 0.$$
Ainsi, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 0, g(1) = -1$ et $g(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$ si $x \in ]0, 1[$ est un prolongement continu de $f$ sur $[0, 1]$. La fonction $g$ est continue sur le compact $[0, 1]$, donc $g$ est uniformément continue et ainsi $f$ et uniformément continue aussi!

**Exercice 4.**

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ une **suite** numérique **bornée**.

1.) Donner la définition de $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

2.) Donner la définition de $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

3.) Si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ est définie par:

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{1+n}, \qquad a_{2n+1} = \ln\big(1 + \frac{1}{1+n}\big), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

calculer $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en utilisant les définitions 1.) et 2.).

Soit $y_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ et $z_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$.
(On remarque que $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ est borné et que ces sup et inf existent).

1.) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. (existe car $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ décroit et est une suite bornée)

2.) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. (existe car $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ croit et est une suite bornée)

3.) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln x < x$, et donc $a_{2n+1} < a_{2n}$.

Ainsi, $y_n = 1 + \frac{1}{1+n/2}$ si $n$ est pair, $y_n = 1 + \frac{1}{1+(n+1)/2}$ si $n$ est impair.

Dans tous les cas on a $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$ et donc $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.

De même, on aura $z_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ et donc $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Exercice 5 .**

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f : [a, \infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.

1.) Démontrer que si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x)$ existe, alors il existe une dérivée de $f$ à droite de $a$ notée $f'_d(a)$ et on a

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x).$$

Si $x \in ]a, \infty[$, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $c = c(x) \in ]a, x[$ tel que

$f(x) = f(a) + f'\big(c(x)\big)\big(x - a\big)$.

Ainsi, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'\big(c(x)\big)$ et, puisque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x)$ existe, on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x) - f(x)}{x - a} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'\big(c(x)\big) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x)$.

2.) Que penser de la réciproque, c'est-à-dire: si $f'_d(a)$ existe, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x)$ existe et on a $f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x)$?

La réciproque est fausse car, si $a = 0, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, pour $x > 0$, et $f(0) = 0$, on a $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ qui n'a pas de limite si $x \underset{>}{\to} 0$. Par contre, $f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

**Exercice 6.**

Montrer le résultat suivant:

**Théorème:** Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite croissante et $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite décroissante qui sont telles que

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Alors, on a:

1.) $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq y_{n-2} \leq \ldots y_0$.

2.) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Puisque $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, alors $\forall \epsilon > 0$ il existe $N$ tel que $|x_n - y_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$. Ainsi, si $n \geq N$, on a $x_n = x_n - y_n + y_n \leq x_n - y_n + y_0 \leq y_0 + |x_n - y_n| \leq y_0 + \epsilon$.

- La suite $\left(x_n\right)_{n=0}^{\infty}$ est majorée, croissante et donc convergente; on a $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$.
- De même la suite $\left(y_n\right)_{n=0}^{\infty}$ est minorée, décroissante et donc convergente; on a $\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$.
- Par l'absurde, supposons maintenant qu'il existe $p \in N$ tel que $x_p > y_p$.
  Puisque $\left(x_n\right)_{n=0}^{\infty}$ est croissante et $\left(y_n\right)_{n=0}^{\infty}$ est décroissante alors

  $$x_n \geq x_p > y_p \geq y_n, \forall n \geq p$$

  et donc $\overline{x} > \overline{y}$.
  Mais on a $|\overline{x} - \overline{y}| \leq |\overline{x} - x_n| + |x_n - y_n| + |y_n - \overline{y}|$ et donc en prenant la limite $n \to \infty$ on obtient $\overline{x} = \overline{y}$ ce qui est une contradiction.
  Ainsi $x_n \leq y_n, \forall n \in N$ et $\overline{x} = \overline{y}$.