ANALYSE I et II — Mercredi 7 juillet 2010, 14H15-18H15
Math. et Phys. 1ère année
Prof. J. Rappaz

Solutions de l'Examen Propédeutique d'été 2010

Exercice 1 [10 points].

Soit $D = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \ln x$.

1) (3 points) On calcule successivement les dérivées de f:

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 2x\ln x + x, & f''(x) = 2\ln x + 3, & f'''(x) = 2x^{-1}, \\ f^{IV}(x) = -2x^{-2}, & f^{V}(x) = 2.2x^{-3}, & f^{VI}(x) = -2.3!x^{-4} \\ f^{VII}(x) = 2.4!x^{-5}, & \dots, & f^{n}(x) = (-1)^{n+1}.2.(n-3)!x^{-(n-2)} \quad \text{si } n \geq 3. \end{array}$$

Ainsi la série de Taylor de f en $x = 1$ devient

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1) + \frac{1}{2!}3(x-1)^2 + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^{n+1}(n-3)!(x-1)^n \\ &= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n-1)(n-2)}(x-1)^n. \end{aligned}$$

2) (3 points) Cette série entière converge absolument si $|x-1| < 1$ car par le critère de d'Alembert, on a, si $|x-1| < 1$:

$$\frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)n(n-1)} . \frac{n(n-1)(n-2)}{|x-1|^n} = \frac{n-2}{n+1} \cdot |x-1|$$

et ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)n(n-1)} . \frac{n(n-1)(n-2)}{|x-1|^n} = |x-1| < 1.$$

Le rayon de convergence de la série de Taylor de f est $R = 1$ et si $x \in]0, 2[$, la série converge vers $f(x)$ car f est analytique.

3) (2 points) Pour expliciter un polynône p_1 tel que $f(x) - p_1(x) = \mathcal{O}\big(|x-1|^4\big)$ si $x \to 1$, on peut prendre

$$p_1(x) = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

4) (2 points) Pour expliciter un polynône p_2 tel que $f(x) - p_2(x) = o\big(|x-1|^4\big)$ si $x \to 1$, on peut prendre

$$p_2(x) = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4.$$

Exercice 2 [5 points].

Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin x\big)^n \big(\cos x\big)^3\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Il suffit de faire le changement de variables $u = \sin x$, $du = \cos x \ dx$ et de remarquer que $\big(\cos x\big)^3 = \big(\cos x\big)^2 \cos x = \big(1 - \sin^2 x\big) \cos x$ pour obtenir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin x\big)^n \big(\cos x\big)^3 \, dx = \int_0^1 (u^n - u^{n+2}) du = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+3)} \, .$$

Exercice 3 [10 points].

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_2x_3 + x_1x_2$.

a) (3 points) Montrons que f admet un miminum en $\mathbf{x} = 0$.
On peut écrire f sous forme de somme de carrés. Il vient immédiatement

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_3^2.$$

Ainsi, on obtient que $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ pour tout (x_1, x_2, x_3) et que $f(0, 0, 0) = 0$. Le point $(0, 0, 0)$ est bien un minimum local.
On pourrait aussi vérifier que $(0, 0, 0)$ est un point stationnaire de f et calculer la matrice hessienne de f en ce point. On trouvera ce calcul au point c).

b) (3 points) Cherchons le minimum de f sous la contrainte: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
On peut procéder de deux manières:

1) En éliminant une variable au moyen de la contrainte: Cette méthode a l'avantage qu'on peut prouver que le point trouvé est un minimum.
On a de la relation de contrainte, $x_3 = 1 - x_2 - x_1$. Définissons alors la fonction h par $h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, 1 - x_2 - x_1)$. Le problème de minimisation sous contrainte, revient alors à trouver un minimum de h sans contrainte. On a

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2, 1 - x_2 - x_1) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2(1 - x_2 - x_1)^2 + x_2(1 - x_2 - x_1) + x_1x_2 \\ &= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 - 3x_2 + 2 \end{aligned}$$

Le gradient de h donne:

$$\nabla h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4x_2 - 4 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3 \end{pmatrix}$$

Le point stationnaire de h est donné par $(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4})$ et la matrice hessienne de h s'écrit:

$$H_h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathbf{y}^T H_h \mathbf{y} = 6y_1^2 + 8y_1y_2 + 4y_2^2 = 2y_1^2 + (2y_1 + 2y_2)^2 \geq 0$ ce qui prouve que H_h est définie positive. Le minimum de f sous contrainte est donc $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{5}{8}$.

2) En utilisant la théorie des multiplicateurs de Lagrange:
Posons donc

$$L(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

et recherchons les points stationnaires de L. On obtient le système d'équations:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ &(2) \qquad \lambda + 2x_1 + x_2 &= 0 \\ &(3) \qquad \lambda + x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ &(4) \qquad \lambda + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De (2),(3) et (4) on tire $-\lambda - x_2 = 2x_1 = 4x_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$ d'où $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{4}$ et donc $x_2 = \frac{1}{4}$ et $\lambda = -\frac{5}{4}$. Le Lagrangien ne possède donc qu'un seul point stationnaire. Si on montre que f admet un minimum sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, ce point stationnaire sera le minimum sous contrainte de f et on aura $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

c) (4 points) Montrons que la matrice hessienne de f est indépendante du point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et vérifions que c'est une matrice symétrique définie positive.
La gradient de f au point $\mathbf{x}$ est donné par

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

d'où on tire que la matrice hessienne $S(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x}$ est:

$$S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est constante (on pose $S = S(\mathbf{x})$), symétrique et définie positive. En effet, $\mathbf{y}^t S\mathbf{y} = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_2y_3 = y_1^2 + (y_1+y_2)^2 + 3y_3^2 + (y_2+y_3)^2$, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Remarque: Le point (c) permet de démontrer le point (a) car $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$ et $S(0)$ est symétrique définie positive.

Exercice 4 [10 points].

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $g''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1) (2.5 points) Montrons que $\forall x \in]a,b[$, il existe $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{R}$ qui satisfait $\alpha_x < \beta_x$ et

$$g(x) - g(a) = \alpha_x\,(x-a), \qquad g(b) - g(x) = \beta_x\,(b-x).$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in]a,x[$ tel que

$$g(x) = g(a) + g'(\xi_x)(x-a).$$

De même, par le théorème des accroissements finis, il existe $\eta_x \in]x,b[$ tel que

$$g(b) = g(x) + g'(\eta_x)(b-x).$$

Puisque g'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(\xi_x) < g'(\eta_x)$. Il suffit alors de poser $\alpha_x = g'(\xi_x)$ et $\beta_x = g'(\eta_x)$.

2) (2.5 points) Si $x \in]a,b[$ on pose $\lambda = \frac{b-x}{b-a}$. Montrons que

$$\lambda g(a) + (1-\lambda)g(b) = g(x) + (\beta_x - \alpha_x)\frac{(x-a)(b-x)}{b-a}$$

où α_x, β_x sont obtenus sous (1).
On a, du point précédent $g(a) = g(x) - \alpha_x\,(x-a)$ ainsi que $g(b) = g(x) + \beta_x\,(b-x)$ et donc

$$\lambda g(a) + (1-\lambda)g(b) = g(x) - \alpha_x(x-a)\frac{b-x}{b-a} + \beta_x(b-x)\frac{x-a}{b-a}.$$

3) (2.5 points) On tire alors de la relation ci-dessus, en remarquant que $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, que $\forall \lambda \in]0,1[$, on a

$$g(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda g(a) + (1-\lambda)g(b).$$

La fonction g est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

4) (2.5 points) Posons $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b})$ et calculons $g''(\lambda)$, $\lambda \in]0,1[$. On a, si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$:

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b})(a_k - b_k), \\ g''(\lambda) &= \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_p}(\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b})(a_k - b_k)(a_p - b_p) \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})^T H_f(\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \end{aligned}$$

où $H_f(\mathbf{x})$ dénote la matrice hessienne de f au point $\mathbf{x}$.

Ainsi, on a montré que, si la matrice hessienne de f est définie positive en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ et $\forall \lambda \in]0,1[$, $g''(\lambda) > 0$, en remarquant que la fonction g dépend du choix des points $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. On a donc, la relation remandée.

Exercice 5 [5 points] (Ex. 1, Série 17 du me 10 mars 2010).

Trouver les intégrales de l'équation différentielle $(t-3)\dot{u}(t) - 3u(t) = t+5, \quad t \in]3, \infty[$.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$\dot{u}(t) - \frac{3}{t-3}\,u(t) = \frac{t+5}{t-3}, \quad t \in]3, +\infty[.$$

L'équation sans second membre s'écrit

$$\dot{w}(t) - \frac{3}{t-3}\,w(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{3}{t-3},$$

ce qui implique en intégrant

$$\begin{aligned} \ln w(t) &= 3\ln(t-3) + C, \quad t > 3, \\ \Leftrightarrow \quad w(t) &= e^C (t-3)^3 = \alpha(t-3)^3, \quad \text{où } \alpha = e^C. \end{aligned}$$

En faisant varier la constante α, on pose $u(t) = \alpha(t)(t-3)^3$ et ainsi

$$\dot{u}(t) - \frac{3}{t-3}u(t) = \dot{\alpha}(t)(t-3)^3 = \frac{t+5}{t-3} \;\Leftrightarrow\; \dot{\alpha}(t) = \frac{t+5}{(t-3)^4}$$

Mais

$$\frac{t+5}{(t-3)^4} = \frac{t-3+8}{(t-3)^4} = \frac{1}{(t-3)^3} + \frac{8}{(t-3)^4}.$$

Ainsi

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(t-3)^2} - \frac{8}{3}\frac{1}{(t-3)^3} + \tilde{C}.$$

On obtient finalement les solutions

$$u(t) = \tilde{C}\cdot(t-3)^3 - \frac{1}{6}\,(3t+7)\,, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 [5 points] (Ex. 2, Série 8 du me 4 nov. 2009).

Soit $f_n : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n + \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)$. On constate que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, autrement dit la suite de fonctions converge ponctuellement vers $f \equiv 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. De plus, on a

$$0 \le f_n(x) \le x^n + \frac{x}{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2(n+1)}, \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Si ε est donné, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^N + \frac{1}{2(N+1)} \le \varepsilon$ et ainsi pour $n \ge N$ on a

$$|f_n(x)| \le \varepsilon, \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}].$$

La suite $(f_n)_{n\ge 0}$ converge donc uniformément vers $f \equiv 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Remarque: On aurait tout aussi bien pu constater que la suite $(f_n)_{n=0}^\infty$ est décroissante et qu'elle converge ponctuellement vers une fonction continue. Par le théorème de Dini, la convergence est donc uniforme.

Exercice 7 [10 points].

Soit $(x_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ une suite numérique bornée. Posons $y = \limsup_{n\to\infty} x_n$ et $z = \liminf_{n\to\infty} x_n$. Montrons que cette suite converge si et seulement si $y = z$.

Rappelons que y est défini comme $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, avec $y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ et $z = \lim_{n\to\infty} z_n$, avec $z_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, la suite $(y_n)_{n=0}^\infty$ étant décroissante bornée, la suite $(z_n)_{n=0}^\infty$ croissante bornée.

On utilise le résultat suivant: il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers y et une sous-suite $(x_{m_k})_{k=0}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers z.

Montrons alors les deux sens de cette équivalence:

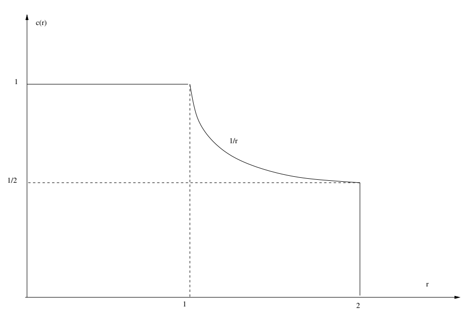
- Si la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge, toutes ses sous-suites convergent vers la même limite, et donc $y = z$.

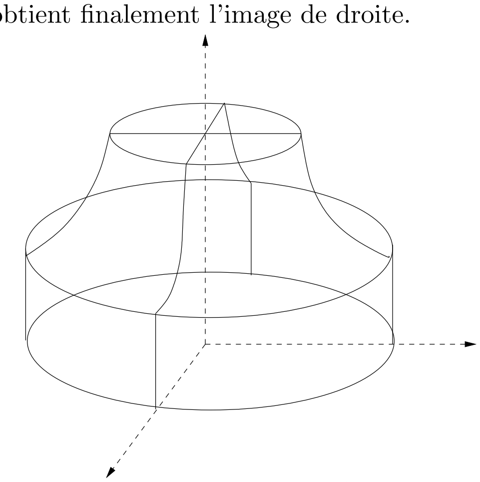
- Supposons que $y = z$ et montrons que $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ converge vers $x = y = z$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|y_N - y| < \epsilon$ et $|z_N - z| < \epsilon$. Par définition de y_N et de z_N, on a $x_k \leq x_N < y + \epsilon$ et $x_k \geq x_N > z - \epsilon$, $\forall k \geq N$. Ainsi, puisque $y = z = x$, on a que $\forall k \geq N$: $|x_k - x| < \epsilon$, ce qui montre que la suite converge vers x.

Exercice 8 [10 points].

Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ le domaine donné par $E = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

1) (4 points) Le domaine E est le volume engendré en faisant tourner autour de l'axe Oz la courbe qui est le graphe d'une hyperbole (c.f. figure de gauche); on obtient finalement l'image de droite.





Il comporte deux parties: E_1, le volume compris entre les plans $z = 1/2$ et $z = 1$ et E_2 le volume compris entre les plans $z = 0$ et $z = 1/2$ qui est un tronc de cylindre.

2) (4 points) Une paramétrisation de E_1 est donnée par

$$\begin{pmatrix} x(u,v,w) = u\cos(v), \\ y(u,v,w) = u\sin(v), \\ z(u,v,w) = w, \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u \in [0, 1/w], \\ v \in [0, 2\pi[, \\ w \in [1/2, 1], \end{pmatrix}, \qquad J_1(u,v,w) = u.$$

Une paramétrisation de E_2 est donnée par

$$\begin{pmatrix} x(u,v,w) = u\cos(v), \\ y(u,v,w) = u\sin(v), \\ z(u,v,w) = w, \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \in [0, 2], \\ v \in [0, 2\pi[, \\ w \in [0, 1/2], \end{pmatrix}, \qquad J_2(u,v,w) = u.$$

On a alors:

$$Vol(E_1) = \iiint_{E_1} dxdydz = \int_0^{2\pi} dv \int_{1/2}^{1} dw \int_0^{1/w} u\, du = \pi \int_{1/2}^{1} \frac{1}{w^2}\, dw = \pi \frac{-1}{w}\Big|_{1/2}^{1} = \pi$$

ainsi que:

$$Vol(E_2) = \iiint_{E_2} dxdydz = \frac{1}{2} \cdot (4\pi) = 2\pi$$

et donc finalement $vol(E) = 3\pi$.

3) (2 points) Calculons $\iiint_E \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$. En utilisant les mêmes paramétrisations que ci-dessus, on a

$$\iiint_{E_1} (x^2 + y^2)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} dv \int_{1/2}^{1} dw \int_0^{1/w} u^3\, du = \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^{1} \frac{1}{w^4}\, dw = \frac{\pi}{6} \frac{-1}{w^3}\bigg|_{1/2}^{1} = \frac{7\pi}{6}$$

ainsi que:

$$\iiint_{E_2} (x^2 + y^2)\, dxdydz = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{1/2} dw \int_0^{2} u^3\, du = \frac{\pi}{4} u^4\bigg|_0^2 = 4\pi$$

et donc

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dxdydz = \frac{\pi}{6} + 5\pi.$$