Corrigé Série 04 : Problèmes à contraintes

Question conceptuelle

Un point du bord du disque tournant à une vitesse angulaire constante ω a une accélération radiale $a_r = r\omega^2$, où r est le rayon du disque. Si la vitesse angulaire augmente de façon uniforme, un point du bord a une accélération à la fois radiale et tangentielle, notées a_r et a_t respectivement. Puisque la vitesse angulaire augmente uniformément, l'accélération angulaire α est constante et on a :

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0\,, \tag{1}$$

où ω_0 est la vitesse angulaire initiale. Dans ce cas, les normes des accélérations radiale et tangentielle sont les suivantes :

$$a_r(t) = r\omega^2(t) = r(\alpha t + \omega_0)^2\,, \tag{2}$$

et

$$a_t = r\alpha. \tag{3}$$

Ces deux normes ne peuvent être égales qu'à un certain instant satisfaisant à :

$$\omega(t) = \sqrt{\alpha}\,, \tag{4}$$

c'est-à-dire :

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\omega_0}{\alpha}. \tag{5}$$

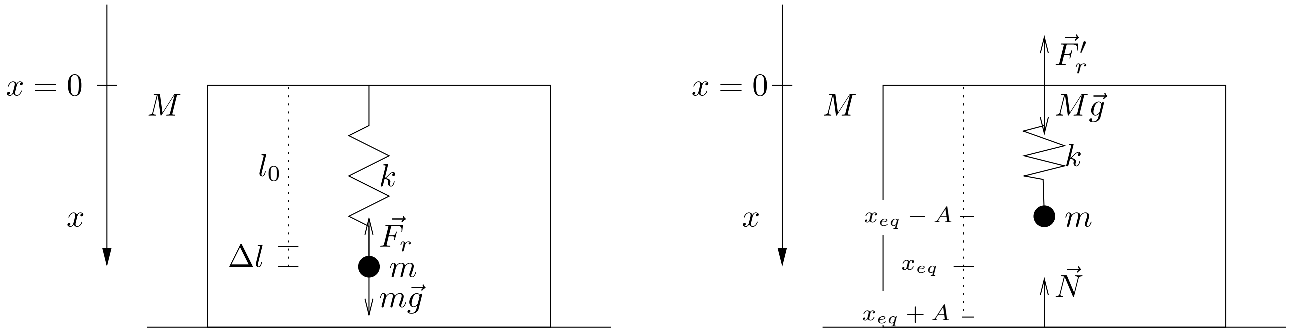
1 Ressort dans une boîte

On choisit un axe x dirigé vers le bas avec son origine au point d'attache du ressort. A l'équilibre, la position de la bille est $x_{eq} = l_0 + \Delta l$. La deuxième loi de Newton appliquée à la bille donne $\vec{F}_r + m\vec{g} = \vec{0}$. En projection sur x, $-k\Delta l + mg = 0$, d'où

$$\Delta l = \frac{mg}{k}. \tag{6}$$

La figure de gauche illustre les forces appliquées à la bille à l'équilibre.

Lorsqu'elle est en mouvement, la bille suit un mouvement oscillatoire harmonique. Elle effectue des oscillations d'amplitude A autour de la position d'équilibre x_{eq}. La figure de droite montre la position d'équilibre et les positions des maxima de l'oscillation à $x_{eq} - A$ et $x_{eq} + A$. Sur cette figure, on montre également les forces appliquées à la boîte, qui est le système physique pour lequel nous allons appliquer la deuxième loi de Newton.



Les forces qui s'appliquent sur la boîte sont

- son poids $M\vec{g}$,
- la force exercée par le ressort $\vec{F}'_r$,
- et la réaction de la table $\vec{N}$ (force de liaison).

Quand la boîte est posée sur la table, la projection N_x de la force de soutient sur l'axe x est strictement negative.
La boîte décolle si la table ne la soutient plus autrement dit si la force de liaison devient nulle : $N_x = 0$.
La condition d'équilibre de la boîte (2ème loi de Newton avec accélération nulle) s'écrit :

$$\vec{F}'_r + M\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}. \tag{7}$$

On a $\vec{F}'_r = -\vec{F}_r$. La composante x de $\vec{F}'_r$ vaut donc l'opposé de la composante x de $\vec{F}_r$ qui est $-k(x - l_0)$. En projetant la condition d'équilibre (7) sur l'axe x on obtient :

$$k(x - l_0) + Mg + N_x = 0. \tag{8}$$

c'est-à-dire

$$N_x = -k(x - l_0) - Mg. \tag{9}$$

La condition $N_x < 0$ pour que la boîte ne décolle pas implique alors

$$x > l_0 - \frac{Mg}{k}. \tag{10}$$

Donc, la boîte décolle si

$$x \leq l_0 - \frac{Mg}{k}. \tag{11}$$

Et comme $x \geq x_{eq} - A$ (la position x est toujours plus grande que la valeur minimale possible $x_{eq} - A$), l'amplitude A doit satisfaire

$$\underbrace{x_{eq}}_{l_0+\Delta l} - A \leq x \leq l_0 - \frac{Mg}{k}, \tag{12}$$

d'où on trouve, en utilisant l'équation (6) :

$$A \geq \Delta l + \frac{Mg}{k} = \frac{(m+M)g}{k}. \tag{13}$$

2 Point sur un cylindre

Marche à suivre

Voici un exemple de marche à suivre pour résoudre ce type de problèmes à contraintes :

— Faire un dessin représentant toutes les informations fournies par la donnée.

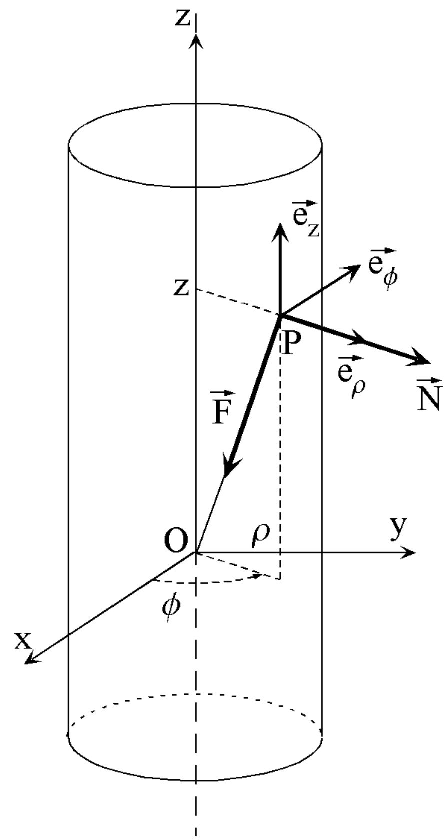
— Choisir un système de coordonnées adapté à la résolution du problème, typiquement des coordonnées cartésiennes (en une, deux ou trois dimensions), polaires (en deux dimensions), cylindriques ou sphériques (en trois dimensions).

— Ecrire les contraintes qui s'appliquent sur le point matériel.

— Ecrire les forces qui s'appliquent sur le point matériel.

— Ecrire les équations du mouvement en partant de l'équation de Newton $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ que l'on projette sur les trois axes.

— Eventuellement résoudre ces équations pour les variables considérées $(x,y,z,\phi,\theta,\rho,\dots)$, si cela est possible ou demandé.



a) — Dessin : voir ci-contre

— Coordonnées : L'objet considéré étant un cylindre, il est logique de choisir un repère $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques

— Contraintes : Le point matériel doit se déplacer sur le cylindre. On a donc $\rho = constante = R$

— Forces : Deux forces s'exercent sur le point matériel :

  — La première est la réaction $\vec{N}$ du cylindre, qui maintient le point matériel sur le cylindre. Elle est perpendiculaire au cylindre, autrement dit colinéaire à $\hat{e}_\rho$. On peut écrire $\vec{N} = N_\rho \hat{e}_\rho$ où N_ρ est la composante radiale de cette réaction. On ne connait pas *a priori* le signe de N_ρ. Sur le dessin, on a choisi arbitrairement $N_\rho > 0$ mais les équations que nous allons dériver ci-dessous sont valables dans tous les cas.

  — La deuxième force est celle qui attire le point P vers un point O sur l'axe du cylindre et qui est proportionelle à la distance entre O et P. Si on définit le vecteur $\vec{r} = \vec{OP}$ on a $\vec{F} = -k\vec{r} = -k(R\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z)$.

b) Equation du mouvement : l'équation de Newton sous forme vectorielle s'écrit

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a} \tag{14}$$

Or, en coordonnées cylindriques, nous savons que l'accélération s'écrit sous forme vectorielle (voir cours) :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \tag{15}$$

En introduisant la contrainte $\rho = R$, l'équation précédente devient :

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \tag{16}$$

Nous projetons l'équation du mouvement (14) sur les axes :
Sur $\hat{e}_\rho$: $\quad -mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - kR,$
Sur $\hat{e}_\phi$: $\quad mR\ddot{\phi} = 0,$
Sur $\hat{e}_z$: $\quad m\ddot{z} = -kz.$

c) Pour décrire le mouvement du point matériel, examinons les équations du mouvement trouvées au point b). Le mouvement du point matériel dans la direction $\hat{e}_z$ est directement interprétable. On a obtenu $m\ddot{z} = -kz$. On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique à une dimension. La position selon z au cours du temps est donc de la forme $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Sur $\hat{e}_\phi$, l'équation est $mR\ddot{\phi} = 0$. Il suffit de l'intégrer une fois pour obtenir $\dot{\phi} = cte$. La vitesse angulaire du point autour de l'axe du cylindre (appelons la ω, qui dépend des conditions initiales) est constante, la projection sur $\hat{e}_\phi$ décrit donc un mouvement circulaire uniforme.

Le mouvement du point est donc la combinaison d'un mouvement oscillatoire harmonique parallèle à l'axe z et d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω autour de l'axe du cylindre.

d) On utilise la projection de l'équation du mouvement sur $\hat{e}_\rho$ pour trouver la valeur de N_ρ. On a trouvé

$$-mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - kR \tag{17}$$

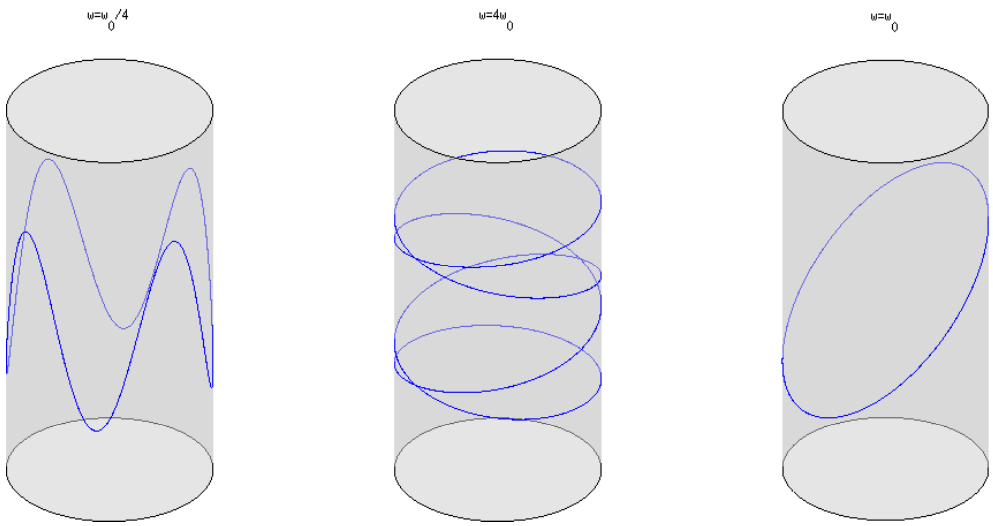
donc

$$N_\rho = kR - mR\omega^2 = mR(\frac{k}{m} - \omega^2) = mR(\omega_0^2 - \omega^2) = cte. \tag{18}$$

La composante radiale (et donc la norme) de la force de liaison qui s'exerce sur le point est donc constante. On rappelle que la force est toujours perpendiculaire au cylindre. Examinons son sens en fonction des conditions initiales, c'est-à-dire des valeurs de ω. On distingue 3 cas, illustrés sur les figures ci-dessous.

— Si $\omega > \omega_0$, on a $N_\rho < 0$. $\vec{N}$ est donc dans le sens opposé à $\hat{e}_\rho$, c'est-à-dire dirigé vers l'intérieur. Dans ce cas, le point tourne vite autour de l'axe du cylindre. Il faut que $\vec{N}$ soit dirigé vers l'intérieur pour éviter que le point ne "s'échappe" (force centripète).
— Si $\omega < \omega_0$, on a $N_\rho > 0$. $\vec{N}$ est donc dans le même sens que $\hat{e}_\rho$, c'est à dire dirigé vers l'extérieur. Dans ce cas, le point tourne lentement autour de l'axe du cylindre. Il faut que $\vec{N}$ soit dirigé dans le sens opposé à $\vec{F}$, sans quoi le point "tomberait" sur le point O.
— Le cas où $\omega = \omega_0$ est le plus intéressant. C'est le cas où le temps que met le point pour faire une fois le tour du cylindre est le même que le temps pour faire une oscillation parallèle à l'axe z. Dans ce cas, on a $N = 0$, aucune force de liaison ne s'applique sur le point. On pourrait donc enlever le cylindre sans que la trajectoire du point soit modifiée. On peut aussi noter que dans ce cas-là, la seule force qui s'applique sur le point est

la force qui attire le point vers le centre du cylindre $\vec{F} = -k\vec{r}$. La trajectoire est alors une ellipse dans un plan contenant l'origine (voir problème 1 de la série 3).



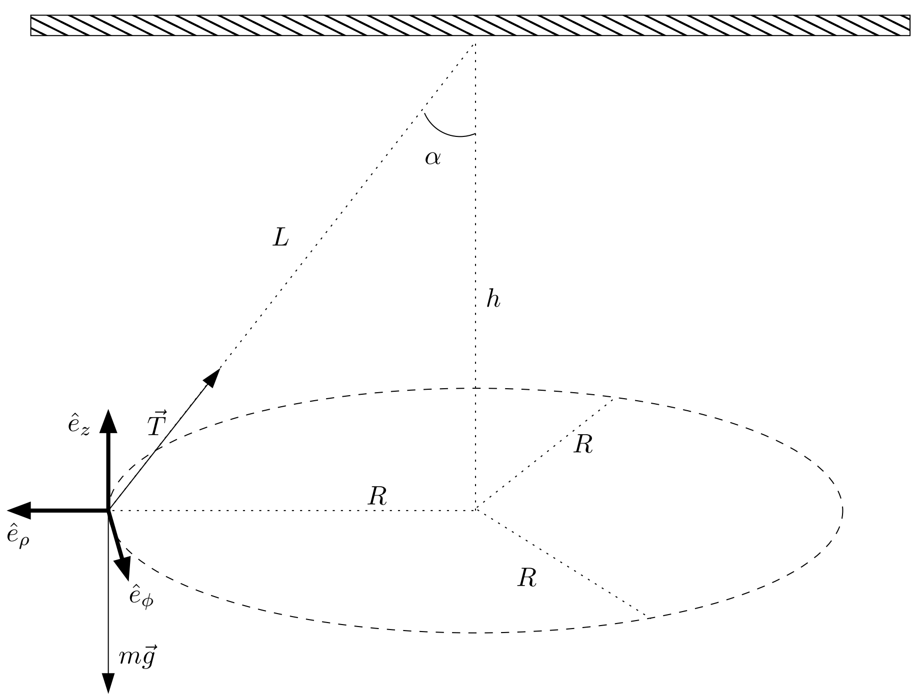
3 La chauve-souris physicienne

On part comme d'habitude de l'équation de Newton sous sa forme vectorielle $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. Les forces qui s'appliquent sur la chauve-souris sont la gravité et la tension du fil $\vec{T}$. On a

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \tag{19}$$

Pour résoudre ce problème, il est pratique d'utiliser un repère $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques. Dans ce cas, l'accélération s'écrit (cf. cours)

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \tag{20}$$



Mais la chauve-souris subit les contraintes suivantes

- Elle tourne en rond à vitesse constante : $\dot{\phi} = cte = \omega$ et $\ddot{\phi} = 0$.
- Elle reste toujours à la même distance du plafond : $\dot{z} = \ddot{z} = 0$.
- Elle reste toujours à la même distance de son axe de rotation : $\rho = R = cte$ donc $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$.

L'accélération devient
$$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{e}_\rho. \tag{21}$$
Remarque : Sachant que $\frac{|\vec{v}|}{R} = |\vec{\omega}|$, cette équation nous redonne la relation bien connue pour un mouvement circulaire uniforme $|\vec{a}| = a_n = \frac{\vec{v}^2}{R}$.

La deuxième équation de Newton projetée sur les axes nous donne :
- Sur $\hat{e}_\rho$: $-T\sin\alpha = -mR\omega^2$.
- Sur $\hat{e}_\phi$: $0 = 0$.
- Sur $\hat{e}_z$: $T\cos\alpha - mg = 0$.

En divisant membre à membre les équations obtenues pour les projections sur $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_z$, on obtient :
$$-\tan\alpha = \frac{-R\omega^2}{g} \Rightarrow R\omega^2 = g\tan\alpha. \tag{22}$$
Finalement, en introduisant le relation trigonométrique $R = h\tan\alpha$, on obtient
$$h\tan\alpha\omega^2 = g\tan\alpha \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{h}\frac{\cancel{\tan\alpha}}{\cancel{\tan\alpha}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}. \tag{23}$$
Si la chauve-souris n'avait pas volé en rond, mais s'était simplement laissée balancer au bout du fil (« pendule mathématique »), on aurait obtenu une pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ et donc une période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ plus grande que $2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, puisque $L > h$.
Remarque : on peut aussi résoudre le problème de manière similaire en utilisant les coordonnées sphériques :
- Contraintes : $r = cte = R$, donc $\ddot{r} = \dot{r} = 0$. $\theta = \pi/2 - \alpha = cte$ et $\dot{\phi} = cte = \omega$.
- L'accélération en coordonées sphériques s'écrit :
$$\vec{a} = (-R\omega^2\sin^2\theta)\hat{e}_r + (-R\omega^2\cos\theta\sin\theta)\hat{e}_\theta + 0\hat{e}_\phi.$$
- La projection de la deuxième loi de Newton donne
  - sur $\hat{e}_r$: $-mR\omega^2\sin^2\theta = -T + mg\sin\theta$
  - sur $\hat{e}_\theta$: $-\cancel{m}R\omega^2\cancel{\cos\theta}\sin\theta = -\cancel{m}g\cancel{\cos\theta}$
- En remarquant que $h = R\sin\theta$, on trouve de suite avec la deuxième équation $\omega^2 = g/h$.