Algèbre linéaire avancée II **printemps 2014** **Prof. Donna Testerman**

Série supplémentaire de questions "vrai-faux", 8 mai 2014

Soit K un corps.

Vrai Faux

☐ ☐ Soit $A \in M_n(K)$. Si $f \in K[t]$ de degré n est un polynôme annulateur de A, alors $f(t)$ est un multiple de $c_A(t)$. (Rappel : $c_A(t)$ est le polynôme caractéristique de A.)

☐ ☐ Toute matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale.

☐ ☐ Toute matrice orthogonale dans $M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

☐ ☐ Toute matrice unitaire de $M_n(\mathbb{C})$ est inversible.

☐ ☐ Soit $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique et soit B la matrice de β par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors β est définie positive si et seulement si $\det(B) \neq 0$.

☐ ☐ Soit $B = J_7(\lambda)$ un bloc de Jordan de taille 7 associé à une valeur propre λ. Alors

$$\dim(\operatorname{Ker}(B - \lambda \cdot I)^2) = 2.$$

☐ ☐ Soit $J = J_n(\lambda)$ un bloc de Jordan de taille n associé à une valeur propre λ. Alors J est diagonalisable si et seulement si $n = 1$.

☐ ☐ Soit $\phi : M_{2\times 3}(K) \to M_{2\times 3}(K)$ une transformation linéaire. Supposons que $c_\phi(t) = t^4(t-1)(t-2)$. Si $\dim(\ker(\phi)) = 4$ alors ϕ est diagonalisable.

☐ ☐ Si $A \in M_4(\mathbb{C})$ est telle que le polynôme $t^2(t^2+1)$ est un polynôme annulateur, alors $\operatorname{rg}(A) < 4$.

☐ ☐ Tout espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, possède une base orthonormale par rapport à ce produit scalaire.

☐ ☐ Si $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ est telle que $\mathbb{R}^4 = \ker(\psi - \mathrm{id})^2 \oplus \ker(\psi + \mathrm{id})^2$, alors le polynôme minimal de ψ est $(t-1)^2(t+1)^2$.

☐ ☐ Si $A, B \in M_n(K)$ sont telles que $c_A(t) = c_B(t)$ et $m_A(t) = m_B(t)$, alors A et B sont semblables.

☐ ☐ Si $A, B \in M_n(K)$ sont telles que $c_A(t) = c_B(t)$ et $m_A(t) = m_B(t)$, et $\dim(\ker(A - \lambda \cdot I)) = \dim(\ker(B - \lambda \cdot I))$ pour toute racine λ de $c_A(t)$, alors A et B sont semblables.

☐ ☐ Si β est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un K-espace vectoriel V, et W est un sous-espace de V, alors la restriction $\beta : W \times W \to K$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur W.

☐ ☐ Si β est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un K-espace vectoriel V, et W est un sous-espace de V tel que $W \cap W^\perp = \{0\}$, alors la restriction $\beta : W \times W \to V$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur W.

☐ ☐ Si β est un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, et W est un sous-espace de V, alors la restriction $\beta : W \times W \to V$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur W.

☐ ☐ Si β est un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, et W est un sous-espace de V, alors la restriction $\beta : W \times W \to V$ est un produit scalaire sur W.

☐ ☐ L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de toutes les matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

☐ ☐ Toute transformation linéaire normale sur un espace euclidien ou hermitien est diagonalisable.

☐ ☐ Toute transformation linéaire auto-adjointe sur un espace euclidien ou hermitien est diagonalisable.

☐ ☐ L'application identité et l'application nulle (sur un espace euclidien ou hermitien) sont auto-adjointes.

☐ ☐ Toute transformation unitaire sur un espace hermitien est normale.

☐ ☐ Soit V un espace euclidien ou hermitien sur le corps $K = \mathbb{R}$, respectivement $K = \mathbb{C}$, et soit W un sous-espace de V. Pour $v \in V$, soit $\mathrm{proj}_W(v)$ la projection orthogonale de v sur W. Alors il existe $\lambda \in K$ tel que $v + \lambda \cdot \mathrm{proj}_W(v) \in W^\perp$.

☐ ☐ Soient $A, B \in M_n(K)$ congruentes et supposons que A soit inversible. Alors B est inversible.

☐ ☐ Soit $A \in M_n(K)$ telle que $t^{n-1}(t + \lambda)$ soit un polynôme annulateur pour un certain $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Alors A n'est pas inversible.

☐ ☐ Soit V un espace euclidien ou hermitien et soit E une base de V. Pour $\phi \in \mathcal{L}(V, V)$, avec adjointe ϕ^*, alors $(\phi^*)_E^E = \overline{((\phi)_E^E)^t}$.