Corrigé Série 02 : Oscillateurs harmoniques

Questions conceptuelles

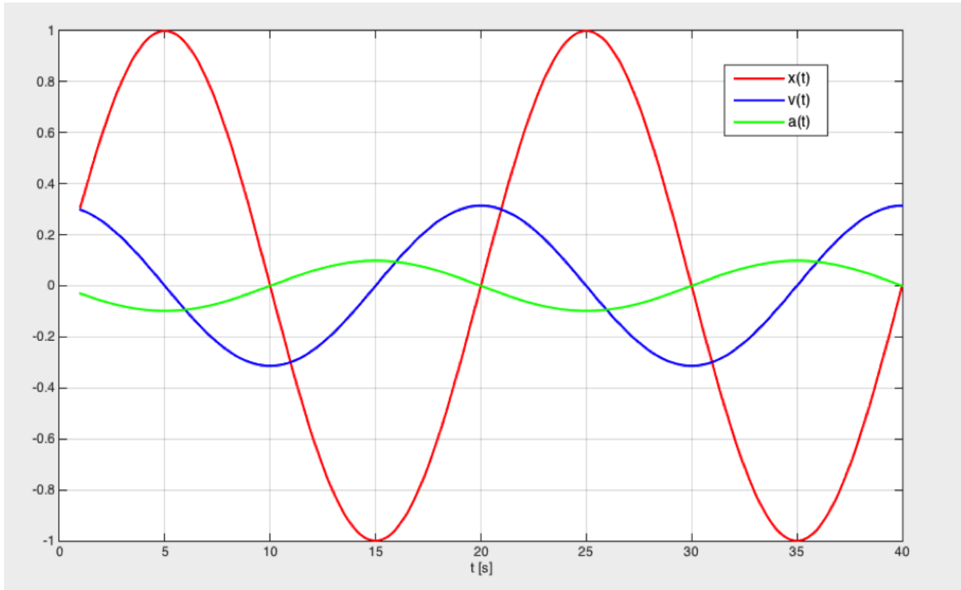
a) En redéfinissant l'origine du temps et l'origine de l'espace, l'équation horaire d'un oscillateur harmonique peut toujours se ramener à $x(t) = A\sin(\omega t)$. Sa vitesse et son accélération valent alors $v(t) = A\omega\cos(\omega t)$ et $a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$. On en déduit que ...
   - ... la norme de la vitesse est maximale quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$ où n est un nombre entier.
   - ... l'accélération est nulle quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$.
   - ... la vitesse est nulle quand $\omega t = \pi/2 + n\pi$, c'est-à-dire aux positions extrêmes $x = \pm A$.
   - ... la norme de l'accélération est maximale quand $\omega t = \pi/2 + n\pi$, c'est-à-dire aux positions extrêmes $x = \pm A$.

b) Oui c'est possible. En effet, pour que la vitesse augmente il faut que l'accélération soit positive (par définition), et il est parfaitement possible qu'une accélération diminue tout en restant positive.
   - Prenons par exemple un objet se déplaçant sur l'axe x, dont l'accélération décroit linéairement en fonction du temps ($a = a_0(1 - \alpha t)$, $a_0 > 0$, $\alpha > 0$). Calculons la variation de l'accélération et de la vitesse entre les temps t et $t + \Delta t$:

$$\Delta a = a(t + \Delta t) - a(t) = a_0(1 - \alpha(t + \Delta t)) - a_0(1 - \alpha t) = -a_0\alpha\Delta t < 0$$

$$\Delta v = a_0(1 - \alpha t)\Delta t > 0$$

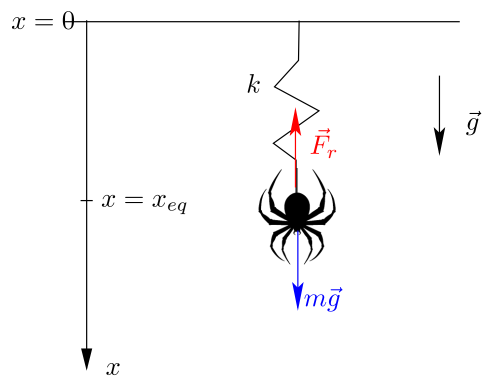
     Donc tant que $\alpha t < 1$, la variation de la vitesse Δv est positive alors que la variation de l'accélération Δa est négative.
   - Imaginez un cycliste dans une pente descendante constante qui pédale au début de la descente, puis se laisse aller en roue libre : l'accélération pendant le laps de temps où il pédale est supérieure à l'accélération s'exerçant lorsqu'il est en roue libre, cependant sa vitesse va continuer à augmenter.
   - Dans le mouvement d'un oscillateur harmonique, tel que représenté dans le graphique ci-après pour une pulsation de $\pi/10$, il y a des temps, entre 15 s et 20 s ou entre 35 s et 40 s, pendant lesquels l'accélération décroit (courbe verte) alors que la vitesse augmente (courbe bleue). Ceci peut être exprimé analytiquement en considérant le mouvement $x(t) = A\sin(\omega t)$, d'où la vitesse est $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$, l'accélération est $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t)$, et la variation de l'accélération est $\frac{da}{dt} = -A\omega^3\cos(\omega t)$. La variation de la vitesse est donc de signe opposé à la variation $\frac{da}{dt}$ de l'accélération si $\pi/2 < \omega < \pi$ ou $3\pi/2 < \omega < 2\pi$.



1 Araignée suspendue

Les positions sur l'axe Ox sont repérées par la coordonnée x.

N.B. : le symbole $\hat{e}_i$ indique le vecteur unitaire de l'axe i.



a) Système étudié : l'araignée.

Forces qui agissent sur l'araignée de masse m :

$$\text{Pesanteur : } \quad m\vec{g} = mg\ \hat{e}_x. \tag{1}$$

$$\text{Force élastique du fil : } \quad \vec{F}_r = -k(x - L)\ \hat{e}_x. \tag{2}$$

La position d'équilibre est telle que $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$. Sa projection sur l'axe x donne

$$mg - k(x_{eq} - L) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = L + \frac{mg}{k}.$$

b) L'équation du mouvement est l'équation de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Avec les forces énoncées plus haut et projetée sur $\hat{e}_x$, elle devient :

$$m\ddot{x} = -kx + kL + mg\ . \tag{3}$$

c) On sait que la solution générale de l'équation différentielle (3) est de la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \bar{x}$. On la dérive deux fois pour obtenir la vitesse et l'accélération de l'araignée

$$\dot{x}(t) = v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) \tag{4}$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi). \tag{5}$$

En substituant les expressions de $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans (3) on trouve

$$-mA\omega^2\cos(\omega t+\phi)+kA\cos(\omega t+\phi)+k\bar{x}-kL-mg=0. \tag{6}$$

La relation (6) doit être vérifiée pour chaque t. En particulier, au temps $t=\frac{\frac{\pi}{2}-\phi}{\omega}$ tel que $\cos(\omega t+\phi)=0$, on a

$$k\bar{x}-kL-mg=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{x}=\frac{mg}{k}+L. \tag{7}$$

La quantité $\bar{x}$ représente donc la position d'équilibre de l'araignée.
Reprenons l'équation (6), elle se simplifie comme suit :

$$\left(-m\omega^2+k\right)A\cos(\omega t+\phi)+\underbrace{k\bar{x}-kL-mg}_{=0}=0$$

$$\Rightarrow -m\omega^2+k=0 \quad\Rightarrow\quad k=m\omega^2 \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

d) Dans la donnée, on nous dit que la vitesse de l'araignée est nulle au temps t_0 où le fil n'exerce aucune force sur elle. Selon l'équation (2), la force du fil est nulle lorsque $x=L$, autrement dit lorsque le fil est à vide. La vitesse au temps t_0 s'écrit

$$\dot{x}(t_0)=-A\omega\sin(\omega t_0+\phi).$$

Outre le cas trivial où A ou ω sont nuls, qui est le cas de l'araignée immobile, cette expression est nulle quand

$$\sin(\omega t_0+\phi)=0 \qquad\Rightarrow\qquad \phi=-\omega t_0 \qquad (\text{à } \pi \text{ près}).$$

Si $\sin\alpha=0$, alors $\cos\alpha=\pm 1$. La position initiale s'écrit donc

$$x(t_0)=\pm A+\bar{x}=\pm A+\frac{mg}{k}+L.$$

Mais comme d'autre part $x(t_0)=L$, on peut en déduire l'amplitude du mouvement

$$A=\frac{mg}{k}. \tag{8}$$

Remarques :
- une amplitude est par définition positive, on a gardé la solution positive.
- les constantes $\bar{x}$ et ω (que l'on pourrait appeler ω_0) ne sont pas du même type que A et ϕ. Les paramètres $\bar{x}$ et ω sont des combinaisons des paramètres du problème (raideur k et longueur L du ressort, origine de l'axe x), qui déterminent l'équation différentielle du mouvement, alors que A et ϕ sont des "constantes d'intégration", qui doivent être déterminées par les conditions initiales x_0 et v_0, pour chaque mouvement qu'effectue l'araignée.

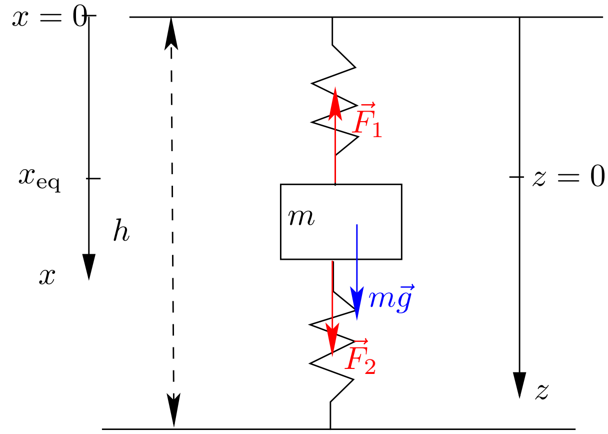
e) La vitesse est donnée par l'équation (4). Les valeurs d'un sinus oscillent entre -1 et 1, la vitesse maximale est donc

$$v_{max}=A\omega=\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}=g\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{9}$$

Application numérique : $v_{max}=10\times\sqrt{\frac{9\times 10^{-3}}{10}}=10\times\left(9\times 10^{-4}\right)^{1/2}=0.3$ m/s
Remarque : si $\sin\alpha=1$, alors $\cos\alpha=0$. Quand la vitesse est maximale, la position de l'araignée s'écrit simplement $x_{v_{max}}=\bar{x}$. L'araignée atteint sa vitesse maximale à sa position d'équilibre, lorsque la résultante des forces s'appliquant sur elle est nulle.
Son accélération est donnée par l'équation (5), et $a_{v_{max}}=0$. La vitesse étant maximale, l'accélération (qui est la dérivée de la vitesse) doit être nulle, ce qui est bien vérifié ici.

2 Oscillateur à deux ressorts

a) Les forces qui s'appliquent sur le bloc sont
   - son poids $m\vec{g}$,
   - la force exercée par le premier ressort
   $$\vec{F}_1 = -k_1 x \hat{e}_x,$$
   où $\hat{e}_x$ est un vecteur unitaire selon l'axe x,
   - et la force exercée par le deuxième ressort
   $$\vec{F}_2 = k_2(h-x)\hat{e}_x.$$



b) L'équation du mouvement est la deuxième équation de Newton. En projection sur l'axe x, elle s'écrit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 x + k_2(h-x) + mg \\ &= -(k_1+k_2)x + k_2 h + mg \\ m\ddot{x} &+ (k_1+k_2)x - (k_2 h + mg) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Afin de montrer que l'équation (10) correspond à l'équation de l'oscillateur harmonique, on doit faire un changement de variable. Pour cela, on définit un axe z parallèle à l'axe x mais dont l'origine se trouve à la position d'équilibre. La position d'équilibre x_{eq} s'obtient en posant $x = x_{\mathrm{eq}}$ et $\ddot{x} = 0$ dans l'équation (10). On obtient ainsi $x_{\mathrm{eq}} = \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}$. Le changement de variable s'écrit :

$$z = x - x_{\mathrm{eq}} = x - \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2} \quad \Rightarrow \quad x = z + \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{z}.$$

On remplace dans l'équation (10) :

$$m\ddot{z} + (k_1 + k_2)\left(z + \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}\right) - (k_2 h + mg) = 0.$$

Après simplification des termes indépendants de z :

$$m\ddot{z} + (k_1 + k_2)z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{k_1 + k_2}{m} z = 0.$$

On reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique dont la pulsation est donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \tag{11}$$

c) Dans le cas limite $k_2 = 0$, l'équation du mouvement (10) devient :

$$m\ddot{x} + k_1 x - mg = 0 \tag{12}$$

Ceci revient à enlever le ressort du bas et on obtient l'équation du mouvement pour un bloc tenu par dessus par un ressort vertical.
Dans le cas limite $k_1 = 0$, l'équation (10) devient :

$$m\ddot{x} + k_2(x-h) - mg = 0 \tag{13}$$

Ceci revient à ne garder que le ressort du bas. Ce dernier n'exerce aucune force lorsque le bloc est au niveau du sol.

d) Pour le bloc, passer du plafond au point le plus bas consiste à effectuer une demi-période d'oscillation d'un mouvement harmonique, la durée de ce déplacement vaut

$$\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}},$$

où T est la période et ω_0 la pulsation de l'oscillateur.
En utilisant le résultat de la partie b), on sait que le point d'équilibre du bloc se trouve à

$$x_{\text{eq}} = \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2},$$

et que le mouvement est décrit par

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{eq}}.$$

A $t = 0$, le bloc est lâché du plafond sans vitesse initiale, à $x_0 = 0$, ce qui correspond à la position la plus éloignée du point d'équilibre. L'amplitude A vaut donc

$$A = x_{\text{eq}} - x_0 = \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2},$$

et le mouvement s'écrit :

$$x(t) = \left(\frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \phi\right) + \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2}.$$

Le maximum $x_{\max}$ de l'amplitude est atteint pour $\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \phi\right) = 1$, d'où

$$x_{\max} = 2\frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}.$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}
\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} &\simeq \frac{3\times(1+0.05)}{2\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times(1+0.05) \\
&\simeq \frac{1.73}{2}\times(1+0.05) \\
&= 0.86\times(1+0.05) = 0.86 + 0.04 = 0.90\,\text{s}
\end{aligned}$$

$$x_{\max} = 2\frac{20\times 4 + 10\times 10}{100+20} = 2\times\frac{180}{120} = 2\times\frac{3\times\cancel{60}}{2\times\cancel{60}} = 3\text{ m}$$

Il est également possible de trouver le même résultat en utilisant la conservation de l'énergie. Toutes les forces s'appliquant sur le bloc sont conservatives ; elles dérivent d'énergies potentielles qui permettent de définir l'énergie mécanique totale du bloc comme

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(h-x)^2 - mgx,$$

où v est la vitesse du bloc. L'énergie potentielle dans le champ de pesanteur vaut $-mgx$ car l'axe x est dirigé vers le bas.
Au départ, en $x = 0$ avec $v = 0$ on a

$$E_i = \frac{1}{2}k_2h^2.$$

Au point le plus bas de la trajectoire (où $v = 0$ également), on a

$$E_f = \frac{1}{2}k_1x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max}.$$

Par conservation de l'énergie mécanique $E_i = E_f$:

$$\frac{1}{2}k_1x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max} = \frac{1}{2}k_2h^2.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$x_{\max}\left[x_{\max}\frac{k_1+k_2}{2} - (k_2h + mg)\right] = 0.$$

Ses deux solutions sont les coordonnées des points où la vitesse est nulle, soit le point le plus haut de la trajectoire en $x = 0$ et le point le plus bas de la trajectoire en

$$x_{\max} = 2\frac{k_2h + mg}{k_1 + k_2}.$$

3 Suspension d'une voiture

On considère la suspension de la voiture comme un ressort unique de constante de rappel k.

a) Dans l'exercice 1, il a été vu que la résolution de l'équation de mouvement $M\ddot{x} = Mg - kx$ avec la solution générale $x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + B$ donne la condition $\omega = \sqrt{k/M}$.
Avec la relation $\omega = 2\pi/T$, on arrive à la solution :

$$2\pi/T = \sqrt{k/M} \Rightarrow k = M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Application numérique : M=1540 kg et T=0.8 s donc $k = 1540 \times \frac{4\pi^2}{0.8^2} \simeq 95000$ kg/s^2 (=N/m)

b) Pour calculer l'abaissement de la voiture, on se place dans la situation où la voiture est à l'équilibre $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$, dans les 2 cas suivants : 1) la voiture est vide ; 2) la malle est chargée dans la voiture. Les différentes situations sont illustrées dans la figure ci-dessous.

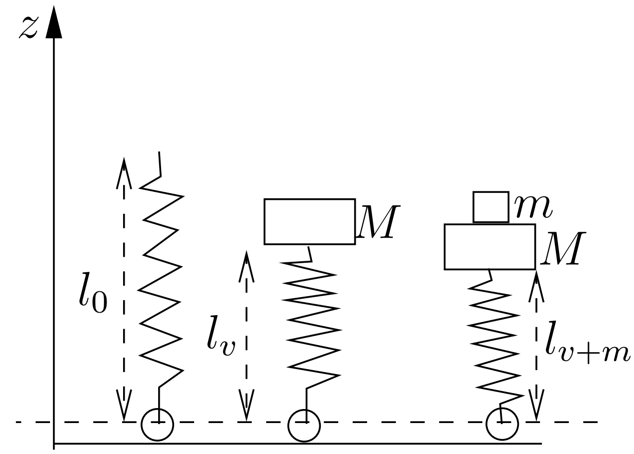
- Quand la voiture est vide, les forces qui s'appliquent sur la voiture sont son poids $M\vec{g}$ et la force exercée par le ressort. En projection sur un axe vertical z, dirigé vers le haut la condition d'équilibre s'écrit, lorsque la voiture est vide

$$-Mg + k(l_0 - l_\mathrm{v}) = 0, \tag{14}$$

où l_0 est la longueur du ressort à vide et l_v sa longueur lorsque la voiture est vide.
- Lorsque la malle de masse m est chargée dans la voiture, la condition d'équilibre de l'ensemble voiture+malle s'écrit

$$-(M+m)g + k(l_0 - l_{\mathrm{v}+m}) = 0, \tag{15}$$

où $l_{\mathrm{v}+m}$ est la longueur du ressort quand la voiture est chargée.



L'abaissement de la voiture s'écrit

$$\Delta l = l_\mathrm{v} - l_{\mathrm{v}+m} = -\frac{Mg}{k} - \frac{-(M+m)g}{k} = \frac{mg}{k}. \tag{16}$$

Application numérique : m=70 kg, g=10 m/s^2 et k=95000 N/m donc $\Delta l = \frac{70\times10}{95000} = 7.4\cdot10^{-3}$ m = 7.4 mm.

c) Quand on ajoute une force de frottement proportionelle à la vitesse verticale $\vec{F} = -b\vec{v}_z$, l'équation du mouvement selon z s'écrit

$$M_{tot}\ddot{z}(t) = -k\left[z(t) - l_0\right] - b\dot{z}(t) - M_{tot}g, \tag{17}$$

où M_{tot} est la masse de la voiture et de ses passagers.

d) Avec 2 passagers ($M_{tot} = M + 2m$), le régime d'amortissement est critique avec un mouvement vertical de la forme

$$z(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt) + C.$$

On dérive deux fois pour trouver la vitesse et l'accélération

$$\dot{z}(t) = Be^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t}(A+Bt) = e^{-\gamma t}(B - A\gamma - B\gamma t),$$
$$\ddot{z}(t) = -B\gamma e^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t}(B - A\gamma - B\gamma t) = e^{-\gamma t}(-2B\gamma + A\gamma^2 + B\gamma^2 t).$$

On introduit ces résultats dans l'équation du mouvement (17)

$$e^{-\gamma t}\left[(M_{tot}(-2B\gamma + A\gamma^2 + B\gamma^2 t) + b(B - A\gamma - B\gamma t) + k(A + Bt)\right] - kl_0 + Mg + kC = 0 \tag{18}$$

Cela doit être vrai pour **tout** t, en particulier $t \to \infty$. Dans ce cas, il reste

$$-kl_0 + M_{tot}g + kC = 0 \quad \Rightarrow \quad C = l_0 - \frac{M_{tot}g}{k}.$$

L'équation (18) devient

$$e^{-\gamma t}\left[M_{tot}(-2B\gamma + A\gamma^2 + B\gamma^2 t) + b(B - A\gamma - B\gamma t) + k(A + Bt)\right] = 0.$$

On simplifie par $e^{-\gamma t}$ et on regroupe les termes en t :

$$(-2B\gamma M_{tot} + A\gamma^2 M_{tot} + bB - b\gamma A + kA) + (B\gamma^2 M_{tot} - b\gamma B + kB)t = 0.$$

Encore une fois, cette relation doit être vraie pour **tout** t. On va considérer d'abord le cas $t = 0$ puis $t \neq 0$:

$$\begin{cases} t = 0: & -2B\gamma M_{tot} + A\gamma^2 M_{tot} + bB - b\gamma A + kA = 0 \\ t \neq 0: & B\gamma^2 M_{tot} - b\gamma B + kB = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\gamma^2 M_{tot} - b\gamma + k)A + (b - 2\gamma M_{tot})B = 0 \\ (\gamma^2 M_{tot} - b\gamma + k)B = 0 \end{cases}$$

De la deuxième on tire

$$\gamma^2 M_{tot} - b\gamma + k = 0. \tag{19}$$

Qui, reportée dans la première nous donne

$$b = 2\gamma M_{tot}. \tag{20}$$

En injectant cette expression pour b dans (19), on obtient

$$\gamma^2 M_{tot} - 2\gamma^2 M_{tot} + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{k}{M_{tot}} \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{k}{M_{tot}}},$$

et

$$b = 2\sqrt{\frac{k}{M_{tot}}} M_{tot} = 2\sqrt{kM_{tot}} = 2\sqrt{k(M + 2m)},$$

puisque $M_{tot} = M + 2m$.

Application numérique : $b = 2\sqrt{9.5 \cdot 10^4 \times (1540 + 2 \times 100)} = 2.54 \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$.

e) On peut mettre l'équation (17) sous la forme vue au cours

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z + C' = 0$$

avec $\gamma = \frac{b}{2M}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ et $C' = -\frac{kl_0}{M} + g$. Le système évolue différement selon les valeurs des paramètres du problème. Pour $b \geq 0$ et $k \geq 0$, il y a trois cas à distinguer :

- amortissement faible (ou sous-critique) : $\gamma < \omega_0$
- amortissement critique : $\gamma = \omega_0$
- amortissement fort (ou sur-critique) : $\gamma > \omega_0$

Il faut donc déterminer comment le signe de $\gamma - \omega_0$ change quand on change la masse M_{tot}.
Pour le cas avec 2 passagers, on a $\gamma = \omega_0$ et $M_{tot} = M + 2m$.

$$\frac{b}{2(M + 2m)} = \sqrt{\frac{k}{M + 2m}}.$$

Pour un seul passager, $M_{tot} = M + m$. Pour ce cas, on va chercher si $\gamma < \omega_0$ ou $\gamma > \omega_0$.

$$\frac{b}{2(M+m)} \quad ? \quad \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

$$b \quad ? \quad 2\sqrt{k(M+m)}$$

la valeur de b a été trouvée plus haut : $b = 2\sqrt{k(M+2m)}$, donc

$$2\sqrt{k(M+2m)} \quad ? \quad 2\sqrt{k(M+m)}$$

On voit clairement que cette inégalité est satisfaite par le symbole $>$. Il s'agit du cas où $\gamma > \omega_0$, c'est-à-dire du cas sur-critique. Il n'y a donc pas d'oscillation.

Pour le cas avec 4 passagers, on fait le même raisonnement et on trouve $\gamma < \omega_0$. Il s'agit du cas sous-critique. Dans ce cas, il y a une oscillation. Sa pulsation est donnée par (cf. cours)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad = \sqrt{\frac{k}{M+4m} - \frac{b^2}{4(M+4m)^2}}.$$

Avec $b = 2\sqrt{k(M+2m)}$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+4m} - \frac{4k(M+2m)}{4(M+4m)^2}} \quad = \sqrt{\frac{k}{M+4m}\left(1 - \frac{M+2m}{M+4m}\right)} \quad = \sqrt{\frac{k}{M+4m}\left(\frac{2m}{M+4m}\right)}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{2km}}{M+4m}.$$

Et la période d'oscillation est donnée par $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi(M+4m)}{\sqrt{2km}} \simeq 2.80$ s.