Ens: Prof. A. Abdulle - Algèbre Linéaire Avancée I - MA
22 janvier 2016 - durée: 3 heures

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

1

XXX

SCIPER: **XXX**

TOTAL DES POINTS: **XX points**.

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient XX **pages, les dernières pouvant êtres vides. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:

  +3 points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Les questions **ouvertes** valent 24 points au total. Le nombre de points de chaque question ouverte est précisé entre parenthèses.
- Utilisez un **crayon** et effacez proprement avec une **gomme** si nécessaire.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses**.

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

Question 1 Soit $\mathcal{P}_2(t)$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C}^2 \to \mathcal{P}_2(t)$ une application linéaire définie par

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (2+i)z_1 + iz_2t + (z_1+z_2)t^2.$$

Soient $E = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et B la base canonique de $\mathcal{P}_2(t)$. Soient $G = (t-1, it+t^2, 2-t+it^2)$ une autre base de $\mathcal{P}_2(t)$ et $F = (w_1, w_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$. On suppose que la matrice de f par rapport aux bases F et G soit donnée par

$$\begin{pmatrix} -i & 2i \\ 1-2i & -1+3i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors la base $F = (f_1, f_2)$ est donnée par

- ☑ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix}.$
- ☐ $f_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1-i \end{pmatrix}.$
- ☐ $f_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Question 2 On considère l'ensemble suivant de matrices de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ En complétant E par une matrice bien choisie, on trouve 6 matrices qui forment une base de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.
- ☑ En enlevant à E une de ses matrices on trouve 4 matrices qui forment une base d'un sous-espace vectoriel de dimension 4.
- ☐ Les 5 matrices de E forment une base d'un sous-espace vectoriel de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 5.
- ☐ Les 5 matrices de E engendrent un sous-espace vectoriel de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension ≤ 3.

Question 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & a & -a \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}),$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = t - 1$ si $a = 0$.
- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = (t-1)^2$ si $a = 0$.
- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = (t-1)^2$ si $a = 1$.
- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = (t-1)^3$ si $a = 1$.

Question 4 On considère l'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + iz \\ iy - ix \\ z \end{pmatrix}.$$

Soit $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et soit $B = (b_1, b_2, b_3)$ la base définie par $b_1 = e_1$, $b_2 = ie_2$, et $b_3 = e_2 + ie_3$. Laquelle des matrices suivantes est la matrice M de l'application f par rapport à la base B.

- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & i+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -i & i-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$
- ☑ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & i & i+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & -1 & i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$

Question 5 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ donnée par

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ $\ker P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad a^2x + b^2y + c^2z = 0 \right\}$.
- ☑ $\ker P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad ax + by + cz = 0 \right\}$.
- ☐ $\ker P = \mathbb{R}^3$.
- ☐ $\ker P = \{0\}$.

Question 6 Soit $\mathbb{R}(t)$ l'espace vectoriel des polynômes en t à coefficients dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants

$$\begin{aligned} U &= \{p(t) \in \mathbb{R}(t); \deg(p(t)) \leq 5\}, \\ V &= \{p(t) \in \mathbb{R}(t); p(0) = 0\}, \\ W &= \{p(t) \in \mathbb{R}(t); p(t) = q(t)t^2, \text{ avec } q(t) \in \mathbb{R}(t)\}. \end{aligned}$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ $U \cap V = \{0\}$.
- ☐ $V + W = \mathbb{R}(t)$.
- ☐ $V \cap W$ est de dimension finie.
- ☑ $U \cap W$ est de dimension 4.

Question 7 Soit K un corps. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(K).$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- [ ] Pour $a \neq 0, b = 0$, A est diagonalisable.
- [ ] Pour $b \neq 0, c = 0$, A est diagonalisable.
- [ ] Pour $a \neq b \neq c \neq 0$, A est diagonalisable.
- [x] Pour $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, A n'est pas diagonalisable.

Question 8 Soit $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que pour les bases canoniques $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de $\mathbb{R}^5$ et (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ on ait

$$f(e_1) = b_2 + 2b_3, \qquad f(e_2) = b_1 + b_2 + b_3,$$
$$f(e_3) = b_1, \qquad f(e_4) = 2b_1 + b_2 + b_3,$$
$$f(e_5) = b_2 + 2b_3.$$

Alors pour la forme échelonnée réduite $C = (c_{ij})$ de la matrice $A = (a_{ij})$ telle que $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^5$ on a

- [ ] $c_{33} = 0$.
- [ ] $c_{34} = 0$.
- [ ] $c_{24} = 0$.
- [x] $c_{23} = 0$.

Question 9 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + 1 \neq 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} b & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & a \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ A est diagonalisable si et seulement si $a \neq b$.
- ☐ A est triangularisable si et seulement si $a \neq b$.
- ☐ A est diagonalisable si et seulement si $a = b$.
- ☐ A est triangularisable si et seulement si $a = b$.

Question 10 Sachant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 5.$$

Alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 2d \\ i & j & k & 2l \\ 3m+e & 3n+f & 3o+g & 6p+2h \\ 5m & 5n & 5o & 10p \end{vmatrix},$$

vaut

- ☐ -150.
- ☐ 50.
- ☑ -50.
- ☐ 150.

Question 11 On considère le système linéaire

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ -3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 4x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Soit W l'ensemble de toutes les solutions de ce système dans $\mathbb{R}^5$. Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- [x] W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension 2.
- [ ] W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3.
- [ ] $W = \{(0,0,0,0,0)^\top\}$.
- [ ] W n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

Question 12 On considère la matrice $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_5)$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- [x] A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ alors $b_{13} = 2$.
- [ ] A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ alors $b_{12} = 2$.
- [ ] A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ alors $b_{23} = 2$.
- [ ] A n'est pas inversible.

Question 13 (8pts) Soit $f \in L(V, V)$, où V est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $f^2 = id$, où id est l'application identité de $L(V, V)$.

i) Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.

ii) Vérifier que pour tout $v \in V$ on a $f(v - f(v)) = -(v - f(v))$ et $f(v + f(v)) = v + f(v)$. En déduire que f admet toujours une valeur propre.

iii) Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres alors V est la somme directe des sous-espaces propres correspondants.

Laisser libre pour les correcteurs

Question 14 (6pts) (6pts) Soit $A \in M_{m\times n}(K)$, où K est un corps et $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalents:

- $\operatorname{rang} A = 1$
- Il existe $u \in M_{m\times 1}(K)$ et $v \in M_{n\times 1}(K)$ tels que $A = uv^T$.

Laisser libre pour les correcteurs

Question 15 (6pts) Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces vectoriels de V, un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe $f \in L(V,V)$ telle que $\ker(f) = W_1$ et $\operatorname{Im}(f) = W_2$ si et seulement si $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

Laisser libre pour les correcteurs

Question 16 (4pts) Soit $(G,+)$ un groupe et $f : G \to G$ l'application définie par $f(x) = -x$. Montrer que f est un homomorphisme de groupe si et seulement si G est abélien.

Laisser libre pour les correcteurs

1 – XXX XXX