EPFL Automne 2017
Geometrie, MATH-120

Solutions série 11

Solution 1. 1. 0 degres : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

30 degres : $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

45 degres : $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

60 degres : $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

90 degres : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

180 degres : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Ce resultat, en language du cours, donne : soit r_1, r_2, r_3 les rotations envoyant respectivement BA sur BC, CB sur CA et AC sur AB, alors $lin(r_3 \circ r_2 \circ r_1) = -Id$ (application correspondant a une rotation de 180 degres)
Prouvons ce resultat : Soit r_1, r_2 et r_3 definis comme ci-dessus et notons $r := r_3 \circ r_2 \circ r_1$, on a :
$r_1(AB) = -r_1(BA) = -BC = CB$
$r_2(CB) = CA$
$r_3(CA) = -r_3(AC) = -AB$
(la raison pour laquelle $r_1(AB) = -r_1(BA)$ est que le centre de r_1 est B, pareil pour $r_3(AC) = -r_3(CA)$)
Ainsi, en regroupant, on a :

$$r(AB) = -AB$$

et en refaisant le meme raisonnement,

$$r(BA) = -BA$$

Ainsi on obtient

$$r^2(AB) = AB, r^2(BA) = BA$$

On a donc que r^2 a deux points fixes distincs, c'est donc Id (cf points fixes des differentes isometries) et ainsi, comme lin est un morphisme, on a 2 possibilites : $lin(r)^2 = Id$. Ainsi, on a vu qu'il n'y a que 2 possibilites pour $lin(r)$ (cf racines des matrices orthogonales de determinant $+1$, fait en exos), et ici ces possibilites sont $lin(r) = Id$ et $lin(r) = -Id$.Cependant, la premiere possibilite est fausse car r envoie deux points sur leur opposes, elle ne peut donc pas etre une translation et donc $lin(r) = -Id$ et le theoreme est prouve. $\square$

Solution 3. Soit r l'angle entre PQ sur RS (r est donc une rotation lineaire), on va decomposer en 2 cas :

- ϕ est une rotation :
  $r(P'Q') = r(\phi_0(PQ)) = \phi_0(r(PQ)) = \phi_0(RS) = R'S'$ oú la deuxieme egalite est due au fait que les rotations lineaires commutent entre elles (vu en exos)
  Ainsi, r est l'angle entre P'Q' et R'S'
- ϕ est une symetrie :
  $r(R'S') = r(\phi_0(RS)) = \phi_0(r^{-1}(RS)) = \phi_0(PQ) = P'Q'$ oú la deuxieme egalite est due au fait que, pour r une rotation lineaire et s une symetrie lineaire, $srs = r^{-1}$ (vu en exos) $\Leftrightarrow rs = sr^{-1}$
  Ainsi, r est l'angle entre R'S' et P'Q' $\square$

Solution 5. 1. Cherchons tout d'abord sa partie lineaire s_0, qui est donc d'axe D d'equation $2x + 3y = 0$ Comme $(-3, 2) \in D$ on a$s_0(-3, 2) = (-3, 2)$ On resout donc le systeme : $\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
   Ce qui nous donne $c = 5/13$, $s = -12/13$ Cherchons maintenant la partie de translation. Comme $(2, 0)$ appartien a l'axe de la symetrie, on a $s(2, 0) = (2, 0)$ Or, $s(2, 0) = u + s_0(2, 0)$ ou u est le vecteur de translation. Ainsi, $u = (2, 0) - s_0(2, 0) = (16/13, 24/13)$
   On a donc trouve notre symetrie.
2. On a vu en cours que si l'on compose une symetrie axiale d'une translation dont le vecteur n'est pas perpendiculaire a l'axe de la symetrie, alors la symetrie obtenue est glissee, donc s' est une symetrie glissee.
3. On a que $(1, 1) = -1/13(-3, 2) + 5/13(2, 3)$ oú le premier vecteur est parallele a l'axe de symetrie et le deuxieme perpendiculaire a cet axe (ils ont ete obtenus en faisant la projection orthogonale de $(1, 1)$ sur $(-3, 2)$ et $(2, 3)$).
   Ainsi, $s' = t' \circ s''$ ou s'' est une symetrie orthogonale de meme partie lineaire que s et de vecteur de translation $5/13(2, 3)$ et t' est une translation de vecteur $-1/13(-3, 2)$. De plus, par le cours, t' et s" commutent, ce que nous utilisons pour calculer s'^n en general.
   On a donc $s'^2 = t'^2$ et plus generalement $s'^{2n} = t'^{2n}$ (car s" est d'ordre 2) avec t'^n est la translation de vecteur $n * (-1/13(-3, 2))$
4. On a donc que $s'^{2n+1} = t'^{2n+1} \circ s''$