Solutions 6

On considere le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de ces fonctions distances $d(.,.)$, longueur $\|.\|$ et de son produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On rappelle (ou on enonce) les definitions suivantes

— Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires (ou lies, ou paralleles) si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{v} = \lambda\vec{u} \text{ ou bien } \vec{u} = \lambda\vec{v}.$$

Deux droites $D(\vec{u}, P)$ et $D(\vec{v}, Q)$ sont paralleles si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires (ou lies, ou paralleles).

— Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires ou orthogonaux si

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Deux droites $D(\vec{u}, P)$ et $D(\vec{v}, Q)$ sont perpendiculaires si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le sont.

— Une droite D est de pente $\lambda \in \mathbb{R}$ si elle admet le vecteur $(1, \lambda)$ comme vecteur directeur. Si elle n'admet aucun vecteur de cette forme, ses vecteurs directeurs sont de la forme $(0, \lambda)$ (la droite est verticale) et on dit que la pente est *infinie.*

— Etant donne $P, Q \in \mathbb{R}^2$, le segment $[PQ]$ est l'ensemble des points R de la forme

$$R = P + t\vec{PQ},\ t \in [0, 1].$$

— Soit $n \geqslant 2$ un entier, un polygone $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ a n cotes est une reunion de segments (appeles cotes du polygone) de la forme

$$\mathbf{P} = \bigcup_{i=1\cdots n} [P_i P_{i+1}]$$

avec

$$P_1, \cdots, P_n,\ P_{n+1} = P_1$$

un ensemble de n points distincts du plan (qu'on appelle sommets du polygone), tels que deux cotes consecutifs ne sont pas paralleles et tels que deux cotes ne se coupent que s'ils sont consecutifs et alors en un seul point (le sommet bordant les deux cotes). On notera

$$\mathbf{P} = [P_1 \cdots P_n].$$

Un polygone a 3 cotes est un triangle, a 4 un quadrilatere etc... Un triangle rectangle est un triangle dont deux cotes sont perpendiculaires. Un parallelogramme est un quadrilatere $[PQRS]$ tel que les paires $([PQ], [RS])$ et $([QR], [SP])$ sont paralleles, etc...

Les exercices qui suivent sont des problemes classiques de geometrie elementaire a resoudre par des calculs algebriques sur des coordonnes en choisissant convenablement le meilleur moyen de representer les objets geometriques en question.

Exercice 1. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un ensemble de n points. Leur barycentre est le point

$$\mathrm{Bar}(\mathcal{P}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Par exemple si $n = 2$, $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$ est le milieu du segment $[P_1 P_2]$.

1. Montrer que le barycentre d'un triangle $\{P_1, P_2, P_3\}$ est le point d'intersection des trois medianes de ce triangle (droite joignant un sommet au milieu du segment oppose).

Solution 1. Il suffit de montrer que le barycentre $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$ du triangle $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ est contenu dans chacune des trois medianes. Et par symétrie, il suffit de présenter la preuve pour une seule mediane : par exemple celle qui joigne P_1 au milieu du segment $[P_2 P_3]$. On représente ce dernier point par Q_1.

D'après l'exemple dans l'énoncé, on sait que le milieu du segment $[P_2 P_3]$ est justement le barycentre $\mathrm{Bar}(\{P_2, P_3\}) = \frac{1}{2}(P_2 + P_3)$, donc notre mediane joigne P_1 avec $Q_1 = \frac{1}{2}(P_2 + P_3)$. Or, le segment $[P_1 Q_1]$ est composé de tous les points de la forme

$$P_1 + t\vec{P_1 Q_1} = P_1 + t(Q_1 - P_1) = (1-t)P_1 + tQ_1 = (1-t)P_1 + \frac{t}{2}P_2 + \frac{t}{2}P_3,$$

pour quelque réél $t \in [0, 1]$. Et si l'on choisit la valuer $t = \frac{2}{3}$, le point précédent devient $\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \mathrm{Bar}(\mathcal{P})$. Ainsi, le barycentre est en effet contenu dans cette mediane.

Exercice 2.
1. Etant donne P, Q deux points, pourquoi le point $P + \frac{1}{2}\vec{PQ}$ s'appelle-t-il le mileu du segment $[PQ]$?
2. Montrer que
$$[PQ] = \{R \in \mathbb{R}^2 |\ d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)\}.$$
3. Comment pourrait-on appeler les ensembles
$$\{R \in \mathbb{R}^2 |\ d(P, R) - d(R, Q) = d(P, Q)\}$$
et
$$\{R \in \mathbb{R}^2 |\ -d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)\}?$$

Exercice 3. Montrer que (a partir des definitions de la feuille) :

1. les parallelogrammes sont exactement les quadrilateres tels que $d(P,Q)=d(R,S)$ et $d(Q,R)=d(S,P)$.
2. Etant donne un quadrilatere quelconque $[PQRS]$ les milieux des cotes

$$[PQ],[QR],[RS],[SP]$$

forment toujours un parallelogramme (Theoreme de Varignon).

Solution 2. Soit $[PQRS]$ un quadrilatère quelconque. Pour la partie 1, on preuve que les affirmations suivantes sont équivalentes : a) $[PQRS]$ est un parallélogramme ; b) $d(P,Q)=d(R,S)$ et $d(Q,R)=d(S,P)$.

a) implique *b*). Si $[PQRS]$ est un parallélogramme, alors il existe des rééls λ et ρ tels que $\vec{PQ}=\lambda\vec{SR}$ et $\vec{RQ}=\rho\vec{SP}$. D'autre part, on peut écrire le vecteur $\vec{SQ}$ comme $\vec{SQ}=\vec{SP}+\vec{PQ}=\vec{SP}+\lambda\vec{SR}$, et aussi comme $\vec{SQ}=\vec{SR}+\vec{RQ}=\vec{SR}+\rho\vec{SP}$. L'identité de ces deux expressions nous apprend que $(1-\rho)\vec{SP}=(1-\lambda)\vec{SR}$. Ceci implique que $\lambda=\rho=1$, car les côtés consecutifs $[SP]$ et $[SR]$ ne peuvent pas être parallèles. Donc, on a que $\vec{PQ}=\vec{SR}$ et $\vec{RQ}=\vec{SP}$, d'où suit b) automatiquement.

b) implique *a*). Supposons que $d(P,Q)=d(R,S)$ et $d(Q,R)=d(S,P)$. On peut écrire la norme (carée) du vecteur $\vec{SQ}$ de deux façons :

$$\begin{aligned} d^2(S,Q) &= \|\vec{SP}+\vec{PQ}\|^2 = d^2(S,P)+d^2(P,Q)+2\langle\vec{SP},\vec{PQ}\rangle \\ &= \|\vec{SR}+\vec{RQ}\|^2 = d^2(S,R)+d^2(R,Q)+2\langle\vec{SR},\vec{RQ}\rangle. \end{aligned}$$

Après l'annulation des distances égales, on apprend que $\langle\vec{SP},\vec{PQ}\rangle=\langle\vec{SR},\vec{RQ}\rangle$. De la même manière, on peut montrer aussi l'identité $\langle\vec{RS},\vec{SP}\rangle=\langle\vec{RQ},\vec{QP}\rangle$. Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\begin{aligned} d^2(S,P)=\|\vec{SP}\|\cdot\|\vec{RQ}\| & \\ &\geqslant \langle\vec{SP},\vec{RQ}\rangle = \langle\vec{SP},\vec{RS}+\vec{SP}+\vec{PQ}\rangle \\ &= \langle\vec{SP},\vec{RS}\rangle+\langle\vec{SP},\vec{SP}\rangle+\langle\vec{SP},\vec{PQ}\rangle \\ &= \langle\vec{RQ},\vec{QP}\rangle+d^2(S,P)+\langle\vec{RQ},\vec{SR}\rangle. \end{aligned}$$

Donc, on a que $0\geqslant\langle\vec{RQ},\vec{QP}+\vec{SR}\rangle$. Par symétrie, on peut montrer aussi que $0\geqslant\langle\vec{RQ},\vec{PQ}+\vec{RS}\rangle=-\langle\vec{RQ},\vec{QP}+\vec{SR}\rangle$. Alors, la seul solution possible c'est d'avoir cette inégalité de Cauchy-Schwarz avec égalité. Mais ceci implique que les vecteurs $\vec{SP}$ et $\vec{RQ}$ sont proportionels (et pareil pour $\vec{SR}$ et $\vec{PQ}$), d'où suit a).

Pour la partie 2, d'après $[PQRS]$, on construit le nouveau quadrilatère $[ABCD]$, où

$$A:=\frac{1}{2}(P+Q),\quad B:=\frac{1}{2}(Q+R),\quad C:\frac{1}{2}(R+S),\quad D:=\frac{1}{2}(S+P).$$

Alors, on a que

$$\vec{AB} = B - A = \frac{1}{2}(Q + R - P - Q) = \frac{1}{2}(R - P) = \frac{1}{2}(R + S - S - P) = C - D = \vec{DC}$$

et que

$$\vec{BC} = C - B = \frac{1}{2}(R + S - Q - R) = \frac{1}{2}(S - Q) = \frac{1}{2}(S + P - P - Q) = D - A = \vec{AD}.$$

Donc, $[ABCD]$ est en effet un parallelogramme.

Exercice 4 (Theoreme de l'hypothenuse)**.** Soient $P \neq Q$ deux points et $\mathcal{C}$ le cercle de centre le milieu de $[PQ]$ et de rayon $d(P, Q)/2$. Montrer que pour tout point $R \in \mathcal{C}$ le triangle $[PQR]$ est rectangle en R.

Solution 3. Soit O le milieu du segment $[PQ]$. D'après l'exercice 1, on sait que ce point correspond au barycentre $O = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$; et d'ici il découle que $\vec{OP} = -\vec{OQ}$. Pour un point R dans le cercle $\mathcal{C}$, on montre que les vecteurs RP et RQ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{RP}, \vec{RQ} \rangle &= \langle \vec{OP} - \vec{OR}, \vec{OQ} - \vec{OR} \rangle \\
&= \langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle - \langle \vec{OP}, \vec{OR} \rangle - \langle \vec{OQ}, \vec{OR} \rangle + \langle \vec{OR}, \vec{OR} \rangle \\
&= -\langle \vec{OP}, \vec{OP} \rangle - \langle \vec{OP}, \vec{OR} \rangle + \langle \vec{OP}, \vec{OR} \rangle + \langle \vec{OR}, \vec{OR} \rangle \\
&= d^2(O, P) - d^2(O, R) = 0
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{D} = P + \mathbb{R}\vec{u} \subset \mathbb{R}^2$ une droite et $Q \in \mathbb{R}^2$ un point.

1. Montrer que la fonction

$$R \in \mathcal{D} \mapsto d(R, Q) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

qui donne la distance d'un point de $\mathcal{D}$ a Q admet un minimum qu'on appelle distance de Q a la droite $\mathcal{D}$ et qu'on note $d(\mathcal{D}, Q)$ et que ce minimum atteint en un unique point R_0 (on pourra parametrer les points de $\mathcal{D}$ sous la forme $P + t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$ et pour simplifier les calculs on pourra considerer le carre de la distance $d(R, Q)^2$).

2. Que dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{R_0Q}$?

Exercice 6. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{C}$ un cercle. Montrez que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en 0, 1 ou 2 points. Caracteriser les trois possibilites en fonction de la distance de $\mathcal{D}$ au centre du cercle.

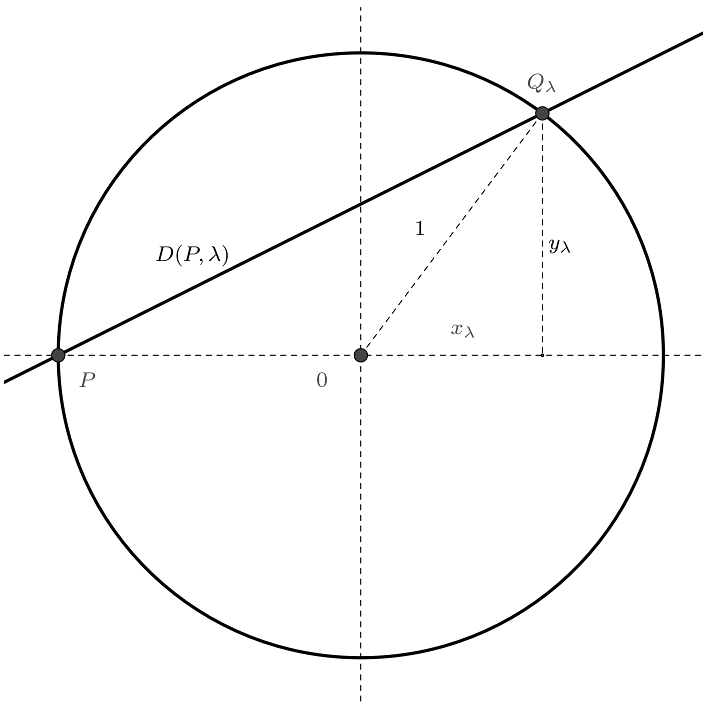
Exercice 7 (Triplets euclidiens)**.** $\star$ Un triplet d'entiers $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ est euclidien si

$$a^2 + b^2 = c^2 :$$

en d'autres termes si le triangle de cotes de longueurs entieres $|a|, |b|, |c|$ est rectangle. Par exemple $(1, 0, 1)$ est un triplet euclidien, $(3, 4, 5)$ en est un autre qu'on appelle *triplet des maçons* (pourquoi ?).

Montrer que tout triplet euclidien peut etre obtenu par la recette suivante (s'aider avec un dessin) :

1. Soit $\mathcal{C} = C(\mathbf{0}, 1)$ le cercle unite centre en l'origine et $P = (-1, 0) \in \mathcal{C}$,
2. Montrer que pour tout nombre rationnel $\lambda \in \mathbb{Q}$ la droite $D(P, \lambda)$ passant par P et de pente λ intersecte $\mathcal{C}$ en exactement deux points P et Q_λ et que les coordonnes de ce dernier sont des nombres rationels (x_λ, y_λ).
3. Montrer que (x_λ, y_λ) peut toujours se mettre sous la forme $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (et ce de multiples manieres) et que (a, b, c) est un triplet euclidien.



Solution 4.

La droite $D(P, \lambda)$ consiste en touts les points de la forme $P_t = P + t(1, \lambda)$, pour un paramètre réél t. Si un tel point P_t sur cette droite intersecte $\mathcal{C}$, sa norme (carrée) est

$$1 = \|P_t\|^2 = \|(-1 + t, \lambda t)\|^2 = (-1 + t)^2 + (\lambda t)^2 = (1 + \lambda^2)t^2 - 2t + 1.$$

Ceci equivaut à $0 = (1 + \lambda^2)t^2 - 2t = t((1 + \lambda^2)t - 2)$. On conclut que les seuls valeurs possibles pour t sont 0 et $\frac{2}{1+\lambda^2}$, qui correspondent aux points $P_0 = P$ et $Q_\lambda := P_{\frac{2}{1+\lambda^2}} = P + \frac{2}{1+\lambda^2}(1, \lambda) = \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)$.

Si $\lambda = \frac{p}{q}$ est un nombre rationel, alors les coordonnés de Q_λ sont des nombres rationels aussi :

$$Q_\lambda =: (x_\lambda, y_\lambda) = \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \right) = \left(\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}, \frac{2pq}{p^2+q^2} \right).$$

Si on définit les entiers $a = q^2 - p^2$, $b = 2pq$ et $c = p^2 + q^2$, alors on a bien que $x_\lambda = \frac{a}{c}$ et $y_\lambda = \frac{b}{c}$. D'ailleurs, (a, b, c) est un triplet Euclidean, puisque :

$$a^2 + b^2 = (q^2 - p^2)^2 + (2pq)^2 = q^4 - 2p^2q^2 + p^4 + 4p^2q^2 = (p^2 + q^2)^2 = c^2.$$

Si $k \neq 0$ est un paramètre réél tel que $a' = ka$, $b' = kb$ et $c' = kc$ sont tous des nombres entiers, il est facile à voir que (a', b', c') est aussi un triplet euclidean, avec $x_\lambda = \frac{a'}{c'}$ et $y_\lambda = \frac{b'}{c'}$. Ceci veut dire que plusieurs triplets euclidiens ont été obtenus par cette recette. On remarque finalement que tout triplet euclidean (a', b', c') peut être obtenu de cette façon : il suffit de choisir la pente $\lambda = \frac{b'}{a'+c'}$, et le paramètre $k = \frac{1}{2(a'+c')}$ (verifier avec les formules précédentes).