Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 31 octobre au 4 novembre 2016

Corrigé 7 du jeudi 3 novembre 2016

Exercice 1.

Parmi les formulations suivantes, lesquelles sont équivalentes à "f est continue en x" (justifier les réponses) :

1.) $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y : |x-y| < \epsilon => |f(x) - f(y)| < \delta$
Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Alors, au point $x = 0$, et pout tout $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = 3$ pour vérifier la formulation. Pourtant f n'est pas continue en x. Cette formulation n'est donc pas équivalente à "f est continue en x"

2.) $\forall \delta > 0\, \exists \epsilon > 0\, \forall y : |x-y| < \epsilon => |f(x) - f(y)| < \delta$

Cette formulation est clairement (en permutant les symboles ϵ et δ) équivalente à

2'.) $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y : |x-y| < \delta => |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Montrons alors que les formulations 2'.), 3.) et 4.) sont équivalentes à la formulation "officielle"

5.) : $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y : |x-y| \leq \delta => |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

On procède cycliquement (c.f. ci-dessous) : 2'.) $\Rightarrow$ 3.) $\Rightarrow$ 4.) $\Rightarrow$ 5.) $\Rightarrow$ 2'.).

3.) $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y : |x-y| \leq \delta => |f(x) - f(y)| < \epsilon$

4.) $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y : |x-y| < \delta => |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

2'.) $\Rightarrow$ 3.): Soit $\epsilon > 0$. Par 2'.) $\exists \tilde{\delta} > 0\, \forall y : |x-y| < \tilde{\delta} => |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Posons $\delta = \frac{1}{2}\tilde{\delta}$. Ainsi, pour $y : |x-y| \leq \delta$, on a $|x-y| < \tilde{\delta}$ et donc $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, ce qui montre 3.).

3.) $\Rightarrow$ 4.): Soit $\epsilon > 0$. Par 3.) $\exists \delta > 0\, \forall y : |x-y| \leq \delta => |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Ainsi, si $|x-y| < \delta$, on a $|x-y| \leq \delta$ ce qui implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon \leq \epsilon$, ce qui montre 4.).

4.) $\Rightarrow$ 5.): Soit $\epsilon > 0$. Par 4.) $\exists \tilde{\delta} > 0\, \forall y : |x-y| < \tilde{\delta} => |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Posons $\delta = \frac{1}{2}\tilde{\delta}$. Ainsi, pour $y : |x-y| \leq \delta$, on a $|x-y| < \tilde{\delta}$ et donc $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, ce qui montre 5.).

5.) $\Rightarrow$ 2'.): Soit $\epsilon > 0$. Par 5.) $\exists \delta > 0\, \forall y : |x-y| \leq \delta => |f(x) - f(y)| \leq \tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}\epsilon$. Ainsi, pour $y : |x-y| < \delta$, on a $|x-y| \leq \delta$ et donc $|f(x) - f(y)| \leq \tilde{\epsilon} < \epsilon$, ce qui montre 2'.).

Exercice 2 (* A rendre) .

Soit $I =]0, \infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Clairement f est continue.

En posant $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$, on peut voir que g est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi g est continue sur $[0, 2]$ et donc g est uniformément continue sur $[0, 2]$, ce qui implique que pour

$\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 < 1$) tel que

$$\text{si} \quad x, y \in]0,2], \ |x-y| \leq \delta_1 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Montrons que f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. En effet si $x, y \in [1, \infty[$ on a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \Big| x \sin(1/x) - y \sin(1/y) \Big| \\
&\leq \Big| (x-y) \sin(1/x) \Big| + \Big| y \left(\sin(1/x) - \sin(1/y) \right) \Big| \\
&\leq |x-y| + y \Big| \sin(1/x) - \sin(1/y) \Big| \\
&\leq |x-y| + y \Big| 2 \sin\left(\frac{1/x - 1/y}{2} \right) \cos\left(\frac{1/x + 1/y}{2} \right) \Big| \\
&\leq |x-y| + 2y \left| \sin\left(\frac{y-x}{2xy} \right) \cos\left(\frac{y+x}{2xy} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Puisque $|\sin z| \leq |z|$ et $|\cos z| \leq 1, \ \forall z \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| + 2y \frac{|x-y|}{2xy} = |x-y| \left(1 + \frac{1}{x} \right) \leq 2|x-y|.$$

En posant $\delta_2 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1 \right)$, on a

$$\text{si} \quad x, y \in [1, \infty[, \ |x-y| \leq \delta_2 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Enfin en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ on a

$$\text{si} \quad x, y \in]0, \infty[, \ |x-y| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons que si $x, y \in]0, \infty[$ vérifient $|x-y| \leq 1$, on a forcément ($x \in [0,2]$ <u>et</u> $y \in [0,2]$) ou bien ($x \in [1, \infty[$ <u>et</u> $y \in [1, \infty[$). En effet, supposons par l'absurde que $x \in [0,2] \setminus [1, \infty[$ et $y \in [1, \infty[\setminus [0,2]$. Ceci implique $x < 1$ et $y > 2$ et donc $|x-y| > 1$, ce qui est une contradiction.

<u>Exercice 3.</u>

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et supposons de plus que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que

$$a_n \neq a, \ \ f(a_n) \neq \alpha, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ \lim_{n \to \infty} a_n = a. \qquad (*)$$

Montrons que s'il existe un nombre réel ℓ et une fonction

$$\delta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$$

qui vérifient $x \in D$ et $\epsilon > 0$ tq $0 < |x-a| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$, alors nécessairement $\lim\limits_{\substack{\epsilon \to 0 \\ >}} \delta(\epsilon) = 0$.

Démonstration : Par l'absurde, supposons que l'on ait pas $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \delta(\varepsilon) = 0$.

Alors il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$, $\varepsilon_k > 0$ telle que $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$ et un réel $\gamma > 0$ tels que $\delta(\varepsilon_k) > \gamma, \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Par la propriété (*), il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0} \subseteq D \setminus \{a\}$, telle que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \quad \text{ et } \quad f(a_n) \neq \ell, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais ceci implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 < |a_N - a| \leq \gamma \leq \delta(\varepsilon_k), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mais, par la définition de la fonction δ, ceci implique que

$$\Big| f(a_N) - \ell \Big| \leq \varepsilon_k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Finalement, comme $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$, on doit obtenir $f(a_N) = \ell$, ce qui est absurde.

$\square$