Examen

Remarque (mise en garde du scribe)

Ceci est une retranscription des questions de l'examen basée sur la mémoire de quelques uns de vos intrépides précurseurs. Ce document n'est donc pas officiel et peut comporter des erreurs.

Chacune des questions 1 à 13 est à choix multiple. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.
Pour chacune des questions à choix multiple, on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 point si la question reste sans réponse, -1 point si la réponse est fausse.
La question 14 (définitions) vaut 6 points.
La question 15 (démonstration) vaut 6 points.
Total possible : 51 points.

Problème 1. Quel est le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ a & -a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$?

(A) $m_A(t) = t(t-2)^3$, si $a = 1$.
(B) $m_A(t) = (t-2)^2$, si $a = 0$.
(C) $m_A(t) = t^2(t-2)^2$, si $a = 0$.
(D) $m_A(t) = t(t-2)^2$, si $a = 2$.

Problème 2. Soit $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ avec $A \neq I_6$, $c_A(t) = (t-1)^6$.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $\mathrm{Tr}(A) \in [\![0, 5]\!]$
(B) A n'est pas diagonalisable.
(C) A n'est pas congruente à I_6.
(D) $A - I_6$ n'est pas nilpotente.

Problème 3. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) Toute matrice complexe non nilpotente est diagonalisable.
(B) Il existe une matrice complexe qui ne peut pas s'écrire comme la somme d'une matrice diagonalisable D et d'une matrice nilpotente N telles que $DN = ND$.
(C) Il existe une matrice complexe qui ne peut pas s'écrire comme la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N telles que $DN = ND$.
(D) Toute matrice complexe est le produit d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N telles que $DN = ND$.

Problème 4. Soit $\mathbb{F}_5$ le corps à 5 éléments et soit $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $V = \mathbb{F}_5^3$. Soit F la base de V constituée de $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_2 + e_3,\ f_3 = e_3$ et soit $F^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base duale de F avec $E^* = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la base canonique de V^*.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $\psi_1(e_1) = 0$
(B) $\psi_2(e_1) = 2$
(C) $\psi_3(e_1) = 1$
(D) $\psi_1(e_1) = 4$

Problème 5. Soit V l'espace des matrices triangulaires supérieures de taille 2×2.
Soit β la forme bilinéaire définie sur V par $\beta(A, B) = (AB)_{12} + (BA)_{12}$.
Quelle est la signature de β ?

(A) (1,0)
(B) (1,1)
(C) (2,1)
(D) (3,0)

Problème 6. Dans l'espace hermitien $\mathbb{C}^4$ muni du produit scalaire standard, on considère le vecteur $v = (0, 0, 0, 1)$. Soit $W = \mathrm{Vect}((1, i, 1, i), (0, 2, 0, 2))$. Que vaut la projection de v sur W ?

(A) $(0, 1, 0, 1)$
(B) $\left(\frac{i}{10}, \frac{1}{5}, \frac{i}{10}, \frac{1}{5}\right)$
(C) $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$
(D) $\left(\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2}, 0\right)$

Problème 7. Soit $F = (f_1, f_2, f_3)$ une base d'un espace euclidien V. Soit H la base obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base F. On note S la matrice de changement de base de F vers H. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) Si S est orthogonale, alors $H = F$.
(B) Si S est symétrique, alors $H = F$.
(C) Si $S = -I_3$, alors $F = -H$.
(D) Si S est triangulaire supérieure telle que $S_{ii} = 1,\ i = 1, 2, 3$, alors $\|f_1\| = \|f_2\| = \|f_3\| = 1$.

Problème 8. On considère l'espace hermitien $\mathbb{C}^4$ et la transformation linéaire $\alpha : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4i & 0 \\ 0 & 4i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) A est diagonalisable mais ses espaces propres ne sont pas orthogonaux.

(B) A est hermitienne donc unitairement diagonalisable.

(C) A n'est pas hermitienne mais néanmoins unitairement diagonalisable.

(D) A n'est pas unitairement diagonalisable car elle n'est pas hermitienne.

Problème 9. Soit α une transformation linéaire unitaire d'un espace hermitien V de dimension supérieure ou égale à 2. On suppose $\alpha \neq id$.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $\exists\, v_1, v_2 \in V, \quad \|\alpha(v_1 + v_2)\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

(B) $\forall\, v_1, v_2 \in V, \quad \|\alpha(v_1 + v_2)\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

(C) Etant donné $v \in V$, l'équation $\|\alpha(v)\| - \|v\| = 0$ est satisfaite si et seulement si $v = 0$.

(D) Pour toute valeur propre λ de α et pour tout v dans E_λ, $\|\alpha(v)\| - \lambda\|v\| = 0$.

Problème 10. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) A possède un espace propre de dimension 4.

(B) A possède un espace propre de dimension 1.

(C) $m_A(t) \neq c_A(t)$

(D) A est diagonalisable.

Problème 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Quelle est sa décomposition en valeurs singulières ?

(A) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problème 12. On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & 7x_1(t) - 6x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & 9x_1(t) - 8x_2(t) \end{cases}$$

avec conditions initiales $x_1(0) = x_2(0) = 1$. Que vaut $x_2(t)$?

(A) $x_2(t) = e^t + 2e^{-2t}$

(B) $x_2(t) = e^t - 3e^{2t}$

(C) $x_2(t) = e^{2t}$

(D) $x_2(t) = e^t$

Problème 13. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices orthogonales.

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $A + B$ est toujours orthogonale.

(B) AB n'est pas nécessairement orthogonale.

(C) $A^{-1}BA$ est toujours orthogonalement diagonalisable.

(D) $A^{-1}BA$ est toujours unitaire.

Problème 14. ***(Définitions)***

A) Qu'est-ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

B) Qu'est-ce qu'une forme bilinéaire sur un K-espace vectoriel (où K est un corps) ?

C) Qu'est-ce qu'une transformation linéaire auto-adjointe d'un espace hermitien ?

Problème 15. ***(Démonstration)***

Soient V, W deux espaces euclidiens.

a) Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et soit α^* son adjointe.
Montrer que $\mathrm{Im}(\alpha)^\perp = \ker(\alpha^*)$.

b) Soit $H = (h_1, \ldots, h_n)$ une base orthonormée de V et soit $v \in V$. Comment s'expriment les composantes de v, en terme de produit scalaire, par rapport à la base H ?

c) Démontrer le résultat du point **b)**.

(On demande des démonstrations claires. Justifiez vos raisonnements.)