EPFL Automne 2016

Geometrie, MATH-120

Solutions 10

Dans les exercices qui suivent on pourra utiliser avec profit le fait que l'application partie lineaire

$$\mathrm{lin} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) & \mapsto & \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}} \\ \phi & \mapsto & \phi_0 \end{array}$$

est un morphisme de groupe.

On rappelle que

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+ \text{ et } \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$$

designent les ensembles d'isometries du plan dont la partie lineaire est contenue dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}^+$ et $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}^-$ respectivement.

Le premier ensemble est appelle *ensemble des rotations affines*, le second l'ensemble des *symetries affines*. On a vu en cours que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ est un sous-groupe distingue de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 1. Montrer que

1. l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$ est le translate (a gauche ou a droite) de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ par un element quelconque de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$ est "distingue" dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ au sens suivant : pour toute symetrie affine $s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$ et toute isometrie affine $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ le conjugue
$$\phi \circ s \circ \phi^{-1}$$
est encore une symetrie affine.
3. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est engendre par $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$: tout element de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ s'ecrit comme le compose de 1 ou 2 symetries affines (utiliser le resultat analogue pour $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$)

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^-$ l'ensemble des isometries ϕ (rotations, symetries) affines qui fixent P, i.e.

$$\phi(P) = P.$$

1. Trouver une translation t telle que

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P = t \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}} \circ t^{-1}.$$

2. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ et que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ est un sous-groupe commutatif et distingue dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^-$ est le translate (a gauche ou a droite) de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ par un element quelconque de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^-$.
4. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ n'est pas distingue dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ (bien qu'il le soit dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$).
5. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ n'est pas commutatif (bien que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ le soit).

Solution 2.

1. Soit t_P la translation par le vecteur $\overrightarrow{OP}$. Nous allons montrer que

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P = t_P \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}} \circ t_P^{-1}.$$

Soit donc $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$. Nous avons alors

$$t_P^{-1} \circ \phi \circ t_P(O) = t_P^{-1}\phi(P) = t_P^{-1}(P) = O,$$

et donc $t_P^{-1} \circ \phi \circ t_P \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$. De même, soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$. Alors,

$$t_P \circ \varphi \circ t_P^{-1}(P) = t_P \circ \varphi(O) = t_P(O) = P,$$

et donc $t_P \circ \varphi \circ t_P^{-1} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$.

2. Soit $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$. Nous vérifions que

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2(P) = \phi_1^{-1}(P) = P.$$

En effet, ϕ_1 étant une isomètrie est bijective, et comme $\phi_1(P) = P$, nous avons $\phi_1^{-1}(P) = P$. Ceci montre que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$. Il existe alors $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}^+$ tels que $\phi_i = t_P \circ \varphi_i \circ t_P^{-1}$ pour $i = 1, 2$. Comme $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}^+$ est commutatif nous avons

$$\phi_1 \circ \phi_2 = t_P \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ t_P^{-1} = t_P \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ t_P^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1,$$

et donc $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ est commutatif. Finalement, nous montrons que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ est distingué. Soit donc $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ et $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$. Nous avons alors

$$\det(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}) = \det(\phi) = 1,$$

et donc $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$.

3. Soit $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_P$. Il existe alors $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$ tel que $\phi = t_P \circ \varphi \circ t_P^{-1}$. Comme $\varphi \cdot \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}} = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$, nous avons

$$\phi \cdot \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_P = t_P \circ \varphi \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}} \circ t_P^{-1} = t_P \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}} \circ t_P^{-1} = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_P,$$

et donc $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_P$ est le translaté à gauche de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_P$ par un élément quelconque de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_P$. Le résultat pour le translaté à droite est identique, en utilisant que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}} \cdot \varphi = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$.
4. Soit $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_P$. Il existe alors $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ tel que $\phi = t_P \circ \varphi \circ t_P^{-1}$. Afin de voir que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_P$ n'est pas distingué dans dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, il suffit de prendre la translation t_P^{-1}, et de constater que

$$t_P^{-1} \circ \phi \circ t_P = t_P^{-1} \circ t_P \circ \varphi \circ t_P^{-1} \circ t_P = \varphi \notin \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_P,$$

si $P \neq O$. Si $P = O$, le même argument marche, en prenant n'importe quelle translation par un point $Q \neq O$; c'est en effet le point 1 de la question.
5. Afin de voir que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ n'est pas commutatif, nous prenons la translation $t_{(1,0)}$, par le point $(1,0)$, et la rotation linéaire r d'angle π. Nous avons alors

$$r \circ t_{(1,0)}(0) = r((1,0)) = (-1,0) \neq (1,0) = t_{(1,0)}(0) = t_{(1,0)} \circ r(0).$$

Exercice 3. Etant donne une rotation r, montrer qu'il existe deux rotations $r^{1/2}, -r^{1/2}$ telles que

$$(r^{1/2})^2 = (-r^{1/2})^2 = r;$$

on dira que la paire $\{r^{1/2}, -r^{1/2}\}$ est l'angle moitie.

Solution 3. Quitte à placer le centre de rotation à l'origine du plan, il est suffisant de considérer les rotations linéaires. Soit donc r un rotation affine et la matrice associée,

$$A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons à présent une matrice orthogonale

$$B = \begin{pmatrix} c' & -s' \\ s' & c' \end{pmatrix},$$

telle que $B^2 = A$. Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} c'^2 - s'^2 = c \\ 2c's' = s \end{cases}.$$

Or comme $c'^2 + s'^2 = 1$, la première équation est équivalente à $2c'^2 = c + 1$, soit

$$c' = \pm\sqrt{\frac{c+1}{2}}.$$

Nous notons que cette racine est bien définie comme $c \geqslant -1$. En remplaçant la valeur de c' dans la deuxième équation, nous trouvons

$$s' = \frac{s}{\sqrt{2(c+1)}},$$

si $c \neq -1$. Si $c = -1$, alors la matrice originale est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et les matrices

$$\pm B = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sont tels que $(\pm B)^2 = A$.

Exercice 4. 1. Donner la matrice de la symetrie s d'axe la droite d'equation

$$3x + 4y = 0?$$

2. Quelle est la nature (et donner les points fixes) de la composee $\phi \circ s$ ou ϕ est l'application lineaire de matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Meme question avec la matrice

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Quelle est l'angle[1] entre la demi-droite $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(1,1)$ et la demi-droite $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(-\sqrt{3},-1)$ (on commencera par chercher les matrices des rotations envoyant $\mathbb{R}(1,0)$ sur respectivement, $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(1,1)$ et $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(-\sqrt{3},-1)$).

Exercice 6. On considere la transformation

$$\phi(x,y) = (X,Y)$$

avec

$$X = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1.\ Y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2$$

1. Quelle est la nature de ϕ ?

1. suivant la definition du cours

2. Quels sont ses points fixes.
3. Quelle est la nature de ϕ^6 (on commencera par calculer la partie lineaire) ?

Solution 6. 1. Nous pouvons écrire $\phi = t_{(1,2)} \circ \phi_0$, où ϕ_0 est la partie linéaire de ϕ donnée par

$$\phi_0(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à ϕ_0 étant de déterminant 1, nous concluons que ϕ est une rotation affine.

2. Le point fixe de la rotation se trouve en résolvant $\phi(x,y) = (x,y)$, soit le système

$$\begin{cases} (\sqrt{3}-2)x - y & = -2 \\ x + (\sqrt{3}-2)y & = -4 \end{cases}.$$

Nous trouvons comme solution

$$(x,y) = \left(\frac{-3-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-5}{2\sqrt{3}-4} \right).$$

3. On sait que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, et donc ϕ^6 est également une rotation affine. En calculant

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

nous voyons que ϕ^6 correspond à une rotation de paramètre complexe -1 et centrée en $\left(\frac{-3-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-5}{2\sqrt{3}-4} \right)$.

Exercice 7. On considere les transformations

$$\phi_1(x,y) = (y+1, x+1)$$

$$\phi_2(x,y) = (y+1, x-1)$$

1. Quelle est la nature de ϕ_1 et de ϕ_2 ?
2. Quels sont leurs points fixes respectifs.
3. Calculer ϕ_1^2 et ϕ_2^2.
4. Que valent ϕ_1^{2n} et ϕ_2^{2n} pour $n \in \mathbb{Z}$?

Solution 7. 1. Nous pouvons écrire $\phi_1 = t_{(1,1)} \circ \phi_1^0$, où ϕ_1^0 est la partie linéaire de ϕ_1 donnée par

$$\phi_1^0(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à ϕ_1^0 étant de déterminant -1, nous concluons que ϕ_1 est une symétrie affine. Nous pouvons écrire $\phi_2 = t_{(1,-1)} \circ \phi_2^0$, où ϕ_2^0 est la partie linéaire de ϕ_2 donnée par

$$\phi_2^0(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à ϕ_2^0 étant de déterminant -1, nous concluons que ϕ_2 est une symétrie affine.

2. Afin de déterminer les points fixes de ϕ_1, nous devons résoudre $\phi_1(x,y) = (x,y)$, soit le système

$$\begin{cases} y - x & = -1 \\ x - y & = -1 \end{cases},$$

qui n'admet aucune solution. Nous concluons que ϕ_1 n'admet aucun point fixe. Afin de déterminer les points fixes de ϕ_2, nous devons résoudre $\phi_2(x,y) = (x,y)$, soit le système

$$\begin{cases} y - x & = -1 \\ x - y & = 1 \end{cases}.$$

Nous trouvons que l'ensemble des points fixes est donné par la droite $\{(x, x-1); x \in \mathbb{R}\}$.

3. Nous trouvons $\phi_1^2(x,y) = (x+2, y+2)$ et $\phi_2^2(x,y) = (x,y)$.

4. Il est aisé de voir par récurrence que $\phi_1^{2n}(x,y) = (x+2n, y+2n)$ et $\phi_2^{2n}(x,y) = (x,y)$.