Geometrie - Serie 8 Correction

Exercice. 8.3 Soit $\mathcal{P} = (P_1, \cdots, P_n)$ un ensemble ordonne de points du plan et $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ un vecteur de reels positifs ou nuls tels que

$$\sum_i \lambda_i = 1.$$

Le barycentre des points $\mathcal{P}$ affectes des poids Λ est le point

$$\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i.$$

Par exemple si $n = 2$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ le barycentre est le milieu.

1. Montrer que le barycentre $\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)$ est l'unique point $G \in \mathbb{R}^2$ qui verifie

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}.$$

2. Soit $\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ une isometrie. Montrer que φ preserve les barycentres:

$$\mathrm{Bar}(\varphi(\mathcal{P}), \Lambda) = \varphi(\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)).$$

   Pour cela on pourra decomposer φ en translation et partie lineaire.

Solution. 8.3

1. On se rappelle que $\overrightarrow{GP_i} = P_i - G$, alors l'équation

$$\overrightarrow{0} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i}$$

est équivalent à

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} \\
&= \sum_i \lambda_i (P_i - G) \\
&= \sum_i \lambda_i P_i - \sum_i \lambda_i G \\
&= \sum_i \lambda_i P_i - G \underbrace{\sum_i \lambda_i}_{=1} \\
&= \sum_i \lambda_i P_i - G.
\end{aligned}$$

Ca veut dire que G est le barycentre de $(P_i)_{i=1}^n$ avec de poids $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Donc le barycentre G est le seul point qui vérifie $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$.

2. Soit $\varphi = t \circ \varphi_0$ la decomposition de l'isometrie φ en translation t et partie lineaire φ_0. Si on arrive a demontrer le fait que $t = t_{\overrightarrow{u}}$ et φ_0 preservent les barycentres, alors φ les preserve, car

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)) &= \varphi_0(\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)) + \overrightarrow{u} = \mathrm{Bar}(\varphi_0(\mathcal{P}), \Lambda) + \overrightarrow{u} \\
&= \mathrm{Bar}(\varphi_0(\mathcal{P}) + \overrightarrow{u}, \Lambda) = \mathrm{Bar}(\varphi(\mathcal{P}), \Lambda)
\end{aligned}$$

- *Les translations préservent les barycentres* Soit $t = t_{\overrightarrow{u}}$, la translation avec le vecteur $\overrightarrow{u}$. Alors $t(\mathcal{P}) = t(P_1, \ldots, P_n) = (P_1 + \overrightarrow{u}, \ldots, P_n + \overrightarrow{u})$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bar}(t(\mathcal{P}), \Lambda) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i t(P_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i + \overrightarrow{u}) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{u} \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i}_{=\mathrm{Bar}(\mathcal{P},\Lambda)} + \overrightarrow{u} \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=1} \\
&= \mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda) + \overrightarrow{u} = t(\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda))
\end{aligned}$$

- *Les isométries qui préservent l'origine préservent les barycentres.* Une isométrie qui préserve l'origine est une application linéaire. Soit G le barycentre $\mathrm{Bar}(\mathcal{P}, \Lambda)$, alors G vérifie l'equation $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$. Appliquer φ_0 et utiliser le fait que φ_0 est linearie, on a

$$\underbrace{\varphi_0(\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i})}_{=\sum_i \lambda_i \varphi_0(\overrightarrow{GP_i})} = \varphi_0(0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_i \lambda_i \overrightarrow{\varphi_0(G)\varphi_0(P_i)} = 0$$

D'après la première partie, ca nous dit que $\varphi_0(G)$ est le barycentre des points $\varphi_0(P_i)_{i=1}^n$ avec de poids $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Alors φ_0 preserve les barycentres.

Remarque. En effet, dans la démonstration on utilise seulement le fait que ϕ_0 soit linéaire, donc la proposition reste vraie pour tous les applications affines.

Exercice. 8.4 Une *application affine* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application de la forme

$$\varphi : P \mapsto t \circ \varphi_0(P)$$

ou t est une translation et $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application lineaire.

1. Montrer plus generalement que la propriete de preserver les barycentres est vraie pour toute application affine.

2. Montrer que toute application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui preserve les barycentres est une application affine; on pourra commencer par se ramener au cas ou $\varphi(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ et montrer qu'alors φ est lineaire; pour cela on considerera des barycentres particuliers.

Solution. 8.4

1. Par l'exercise 3, on sait déjà que la translation préserve les barycentres, et on a remarqué qu'on a seulement utilisé la linearité dans la preuve, alors on a déjà demontré la première partie.

2. Soit $\overrightarrow{v} = \varphi(0)$, soit $T_{-\overrightarrow{v}}$ la translation sur $\mathbb{R}^2$ par le vecteur $-\overrightarrow{v}$. On pose $\varphi_0 = T_{-\overrightarrow{v}} \circ \varphi$, alors $\varphi_0(0) = 0$. De plus, puisque la translation $T_{-\overrightarrow{v}}$ et φ préservent les barycentres, leur composé φ_0 les préserve aussi. On va montrer que φ_0 est une application linéaire, ce qui terminera la démonstration car $\varphi = T_{\overrightarrow{v}} \circ \varphi_0$ sera une application affine par définition.

   On va donc montrer que φ_0 satisfait les deux propriétés:

   $$\varphi(a\overrightarrow{u}) = a\varphi(\overrightarrow{u}), \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2; \tag{1}$$
   $$\varphi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \varphi(\overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{w}), \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

   L'idée pour la démonstration est de les lier avec les barycentres. Pour l'équation 1, on va discuter 3 cas:

a) Pour $0 \leq a \leq 1$, on peut écrire $a\overrightarrow{u}$ comme un barycentre de 0 et $\overrightarrow{u}$:

$$a\overrightarrow{u} = (1-a)\overrightarrow{0} + a\overrightarrow{u} = \mathrm{Bar}((\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}), (1-a, a)),$$

car $1-a$ et a sont dans l'interval $[0,1]$. Parce que φ_0 préserve le barycentre, on a

$$\begin{aligned}\varphi_0(a\overrightarrow{u}) &= \varphi_0(\mathrm{Bar}((\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}), (1-a, a))) = \mathrm{Bar}(\varphi_0(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{1}), (1-a, a)) \\ &= (1-a)\varphi_0(\overrightarrow{0}) + a\varphi_0(\overrightarrow{u}) = a\varphi_0(\overrightarrow{u}).\end{aligned}$$

b) Pour $a > 1$, on peut écrire $\overrightarrow{u}$ comme un barycentre de 0 et $a\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} = (1 - \frac{1}{a})\overrightarrow{0} + \frac{1}{a}(a\overrightarrow{u}),$$

car $\frac{1}{a}$ et $1 - \frac{1}{a}$ sont dans l'interval $[0,1]$. Parce que φ_0 préserve le barycentre, on a

$$\varphi_0(\overrightarrow{u}) = (1 - \frac{1}{a})\varphi_0(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{a}\varphi_0(a\overrightarrow{u}) = \frac{1}{a}\varphi_0(a\overrightarrow{u}),$$

ce qui nous donne $\varphi_0(a\overrightarrow{u}) = a\varphi_0(\overrightarrow{u})$.

c) Pour $a < 0$, le point 0 se situe entre $\overrightarrow{u}$ et $a\overrightarrow{u}$, on va donc écrire $\overrightarrow{0}$ comme un barycentre de $\overrightarrow{u}$ et $a\overrightarrow{u}$: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{u} + (1-\lambda)(a\overrightarrow{u}) = [\lambda + (1-\lambda)a]\overrightarrow{u}. \tag{3}$$

On a donc l'équation

$$\lambda + (1-\lambda)a = 0, \tag{4}$$

ce qui nous donne

$$\lambda = \frac{a}{a-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}.$$

Puisque $a < 0$, on a $0 < \lambda = \frac{1}{1-\frac{1}{a}} < 1$. Donc l'équation 3 exprime bien $\overrightarrow{0}$ comme un barycentre de $\overrightarrow{u}$ et $a\overrightarrow{u}$. Appliquant φ_0 à l'équation 3, on trouve

$$\varphi_0(\overrightarrow{0}) = \lambda\varphi_0(\overrightarrow{u}) + (1-\lambda)\varphi_0(a\overrightarrow{u}),$$

ce qui nous donne

$$\varphi_0(a\overrightarrow{u}) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\varphi_0(\overrightarrow{u}) = a\varphi_0(\overrightarrow{u}),$$

si on utilise la relation 4. On termine ainsi la démonstration de l'équation 1.

Pour l'équation 2, on écrit $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ comme le milieu de $2\overrightarrow{u}$ et $2\overrightarrow{w}$:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}(2\overrightarrow{w}).$$

Parce que φ_0 préserve le barycenter, ceci nous donne

$$\varphi_0(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\varphi_0(2\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}\varphi_0(2\overrightarrow{w}) = \varphi_0(\overrightarrow{u}) + \varphi_0(\overrightarrow{w}),$$

ici pour la deuxième égalité, on a utilisé l'équation 1, déjà montré.

Exercice. 8.5 Soit σ_0 la symetrie orthogonale par rapport a la droite d'equation

$$2x + 3y = 0.$$

1. Montrer que σ_0 peut s'ecrire sous la forme

$$\sigma_0 : \overrightarrow{w} \to \sigma_0(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} - 2\frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle}{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}\overrightarrow{v}$$

avec $\overrightarrow{v}$ un vecteur non-nul convenable ($\overrightarrow{v}$ n'est pas forcement unique) (cf. Exercice 7 de la serie 7.)

2. Ecrire la matrice M_{σ_0} de l'application lineaire σ_0 dans la base canonique. Calculer $M_{\sigma_0} \times M_{\sigma_0}$.

3. Soit $\sigma = t_{(2,3)} \circ \sigma_0$. Montrer que si on pose $P = (x, y)$ et $(X, Y) = \sigma(P)$ alors on a

$$\begin{aligned} X &= \alpha + ax + by \\ Y &= \beta + cx + dy \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta, a, b, c, d$ des reels convenables.

4. Quel est l'ensemble des points fixes de σ (ie. l'ensemble des $P \in \mathbb{R}$ verifiant $\sigma(P) = P$?) Comment s'appelle l'isometrie σ ?

Solution. 8.5

1. According to Exercise 7 on Serie 7, the application

$$\sigma_0 : \overrightarrow{w} \to \overrightarrow{w} - 2\frac{\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle}{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}\overrightarrow{v}$$

defines a *symetrie orthogonale par rapport a l'axe* $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$, where $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ is a vector orthogonal to the vector $\overrightarrow{u}$. In our case, the vector $\overrightarrow{u}$ is defined by $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. We can choose the vector $\overrightarrow{v}$ orthogonal to $\overrightarrow{u}$ to be $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hence the following application defines the required symmetry

$$\sigma_0 : \overrightarrow{w} \to \overrightarrow{w} - 2\frac{\langle \overrightarrow{w}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. The matric associated to σ_0 in the canonical basis is defined to be the matrix containing in its colums the vectors $\sigma_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\sigma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$M_{\sigma_0} = \left(\sigma_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sigma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Computing the entries we get

$$M_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

It holds that

$$M_{\sigma_0} * M_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Let $\sigma = t_{(2,3)} \circ \sigma_0$. It holds that

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sigma_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= M_{\sigma_0} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{13}x & -\frac{12}{13}y \\ -\frac{12}{13}x & -\frac{5}{13}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

is of the required form.

4. To find the points which are fixed under the action of σ, we solve the following system of equations

$$\begin{aligned} &\sigma(P) = P \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \frac{5}{13}x & -\frac{12}{13}y \\ -\frac{12}{13}x & -\frac{5}{13}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{where } P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A solution to this system is given by the line defined by $y = \frac{13}{6} - \frac{2}{3}x$. Therefore, σ is a symmetry along the above symmetry axis.