ANALYSE I et II
Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Douchet & J.Rappaz

Propédeutique automne 2008

Lundi 1er septembre 2008, **08:15 - 12:15**
Salle MA C2 642

Exercice 1 (6 points) .

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement contractante et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné. On définit la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ par

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Démonstration :

1°) Par définition d'une fonction contractante, on a

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|,\ \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

2°) Par le point 1°), on a

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^n|x_1 - x_0|,\ n = 1, 2, 3, \dots$$

3°) Par le point 2°), on a

$$\begin{aligned}
|x_{n+m} - x_n| &\leq |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq (k^{n+m-1} + k^{n+m-2} + \dots + k^n) \cdot |x_1 - x_0| \\
&\leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \dots + 1) \cdot k^n \cdot |x_1 - x_0| \\
&\leq \frac{1 - k^m}{1 - k} \cdot k^n \cdot |x_1 - x_0| \\
&\leq \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|,\ n, m = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

4°) Par le point 3°) la suite est de Cauchy donc convergente, i.e. $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. De plus, comme f est strictement contractante, elle est continue (même uniformément continue) et donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Ainsi on a bien

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

$\square$

Exercice 2 (6 points) .

Soient I_1, I_2 deux intervalles ouverts, $(a, b) \in I_1 \times I_2$ et $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 telles que $N(a, b) \neq 0$ et pour tout $(x, y) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

Soit encore $\chi : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\chi(x, y) = \int_a^x M(t, y)\ dt + \int_b^y N(a, t)\ dt.$$

1°) $\nabla\chi(x,y) = \big(M(x,y), N(x,y)\big)$. En effet on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x M(t,y)\ dt + \int_b^y N(a,t)\ dt\right) = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^x M(t,y)\ dt = M(x,y),\\
\frac{\partial\chi}{\partial y}(x,y) &= \int_a^x \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\ dt + N(a,y) = \int_a^x \frac{\partial N}{\partial x}(t,y)\ dt + N(a,y) = N(t,y)\Big|_a^x + N(a,y) = N(x,y).
\end{aligned}$$

2°) Par le point 1°), on a

$$\frac{\partial\chi}{\partial y}(a,b) = N(a,b) \neq 0.$$

Puisque $\chi(a,b) = 0$ et $\chi \in C^1$, alors par le théorème des fonctions implicites, il existe localement une unique fonction $\phi :]a-\delta, a+\delta[\to I_2$, de classe C^1, telle que $\phi(a) = b$ et pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$:

$$\chi(x,\phi(x)) = 0.$$

3°) Du point 2°) on a

$$\frac{d\chi}{dx}(x,\phi(x)) = \frac{\partial\chi}{\partial x}(x,\phi(x)) + \frac{\partial\chi}{\partial y}(x,\phi(x))\phi'(x) = M(x,\phi(x)) + N(x,\phi(x))\phi'(x) = 0.$$

De plus, si $I \subset I_1$ est un intervalle ouvert contenant a et si $y \in C^1(I, I_2)$ est une solution de la forme différentielle exacte vérifiant $y(a) = b$ alors on a

$$\chi(a,b) = \chi(a,y(a)) = 0 \text{ et } \frac{d\chi}{dx}(x,y(x)) = 0,\ \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad \chi(x,y(x)) = 0,\ \forall x \in I.$$

Par unicité locale de ϕ on a $y = \phi$ sur $]a-\delta, a+\delta[\cap I$.

Exercice 3 (6 points) .

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos(\cos x)$. On demande le développement de Taylor à l'ordre 6 autour de $x = 0$.
En calculant les dérivées successives de f au point $x = 0$, on peut trouver le développement de Taylor de f à l'ordre 6 autour de $x = 0$, mais c'est très fastidieux ! Il vaut mieux procéder ainsi :
Si $x = 0$, on a $\cos 0 = 1$. Développons donc $\cos z$ autour de $z = 1$. On obtient

$$\cos z = \cos(1) - \sin(1)(z-1) - \frac{\cos(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}(z-1)^3 + \mathcal{O}\left(|z-1|^4\right),\ \text{si } z \to 1.$$

Mais le développement de la fonction cos autour de $x = 0$ donne

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}\left(|x|^8\right),\ \text{si } x \to 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\cos(\cos\, x) &= \cos(1) - \sin(1)\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(|x|^8)\right)\\
&- \frac{\cos(1)}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(|x|^6)\right)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(|x|^4)\right)^3 + \mathcal{O}\left(|x|^8\right)\\
&= \cos(1) + \frac{\sin(1)}{2}\ x^2 + x^4\left(-\frac{\sin(1)}{4!} - \frac{\cos(1)}{2!(2!)^2}\right) + x^6\left(\frac{\sin(1)}{6!} + \frac{2\cos(1)}{2!4!} - \frac{\sin(1)}{(2!)^3 3!}\right) + \mathcal{O}(|x|^8)\\
&= \cos(1) + \frac{\sin(1)}{2}\ x^2 - \left(\frac{\sin(1)}{24} + \frac{\cos(1)}{8}\right)x^4 + \left(\frac{\cos(1)}{48} - \frac{7\sin(1)}{360}\right)x^6 + \mathcal{O}(|x|^8).
\end{aligned}$$

Exercice 4 (6 points) .

1.) Commençons par appliquer le critère de d'Alembert sur les séries numériques. Si on calcule, à x fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \cdot \frac{(3n)!}{|x|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0.$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série est $R = \infty$. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge uniformément vers une fonction analytique sur tout intervalle du type $[-\beta, +\beta]$ où $\beta > 0$. On peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\, x^{3n-1}}{(3n)!} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(3n-1)x^{3n-2}}{(3n)!}.$$

Les séries dérivées héritent du rayon de convergence ($R = \infty$). Ainsi leurs convergences sont uniformes sur tout intervalle borné. On obtient ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}.$$

Il s'ensuit donc que

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.) On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Ainsi $f(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(P) \qquad \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t) = e^t$$

avec les conditions initiales $u(0) = 1$ et $\dot{u}(0) = 0$ (c'est-à-dire $u(t) = f(t)$).
Calculons la solution générale de l'équation sans second membre

$$\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t) = 0$$

d'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Puisque le discriminant de cette équation vaut $1 - 4 = -3$, on obtient :

$$u(t) = c_1\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right).$$

On vérifie immédiatement que $\frac{1}{3}\, e^t$ est une solution particulière de (P), ce qui implique qu'une solution générale de (P) est donnée par

$$u(t) = c_1\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2\, e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{1}{3}\, e^t.$$

En posant $u(0) = 1$ et $\dot{u}(0) = 0$, on obtient $c_1 = \frac{2}{3}$ et $c_2 = 0$. Ainsi, la solution de (P) qui vérifie ces conditions initiales est

$$u(t) = \frac{2}{3}\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{1}{3}\, e^t.$$

Puisque $u(1) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{2}{3}\, e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\, e}$$

Exercice 5 (6 points) .

Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^{-x}}$ est bijective.

Démonstration :

- *(Injectivité)* Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On doit montrer que $x_1 = x_2$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{x_1}+2}{e^{-x_1}} = \frac{e^{x_2}+2}{e^{-x_2}} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x_1} + 2e^{x_1} = e^{2x_2} + 2e^{x_2} \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(e^{2x_1} - e^{2x_2}\Big) + 2\Big(e^{x_1} - e^{x_2}\Big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(e^{x_1} - e^{x_2}\Big) \cdot \underbrace{\Big(e^{x_1} + e^{x_2} + 2\Big)}_{>0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

- *(Surjectivité)* Calculons $Im(f)$: On cherche les $y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que l'équation suivante admette des solutions:

$$\frac{e^x+2}{e^{-x}} = y \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + 2e^x - y = 0.$$

  Posons $z = e^x$, on doit résoudre l'équation du deuxième degré $z^2 + 2z - y = 0$.

  Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Delta = 4 + 4y > 0$ et donc l'équation admet des solutions.

  Ceci démontre que $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ et donc que f est surjective.

$\square$

Pour calculer l'inverse de f, on résout l'équation $z^2 + 2z - y = 0$. Les solutions sont données par

$$e^{x_{1,2}} = z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+y}.$$

Mais comme $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, la seule solution admissible est

$$e^x = -1 + \sqrt{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\Big(-1 + \sqrt{1+y}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = \ln\Big(-1+\sqrt{1+y}\Big).$$

Exercice 6 (6 points) .

Soit $D = [1, \sqrt{3}] \times [0, 1]$. Calculons

$$\iint_D \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\, dxdy = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)\, dx.$$

On commence par calculer

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \int_0^1 \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad &= \quad \left[y\text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2}\, dy \\ &= \quad \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \left[\frac{x}{2}\ln(x^2+y^2)\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \quad \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}\ln(x^2+1) + \frac{x}{2}\ln(x^2). \end{aligned}$$

On a de plus

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\, dx \quad &= \quad \left[x\text{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{x=1}^{x=\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= \quad \sqrt{3}\text{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \text{Arctg}\,(1) + \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{x=1}^{x=\sqrt{3}} \\ &= \quad \sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \quad \sqrt{3}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2), \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{2}\ln(x^2+1)\ dx &= \int_2^4 \frac{1}{4}\ln(z)\ dz\\ &= \frac{1}{4}\left[z\ln(z)-z\right]_{z=2}^{z=4}\\ &= \ln(4)-1-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\\ &= \frac{3}{2}\ln(2)-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{2}\ln(x^2)\ dx &= \int_1^3 \frac{1}{4}\ln(z)\ dz\\ &= \frac{1}{4}\left[z\ln(z)-z\right]_{z=1}^{z=3}\\ &= \frac{3}{4}\ln(3)-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{4}\ln(3)-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\iint_D \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\ dxdy = \mathcal{I}_1-\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{\pi}{4}-\ln(2)+\frac{3}{4}\ln(3).$$