29 mai 2014

Test (durée 2 heures)

Chacune des questions 1 à 9 est à choix multiple. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.
Pour chacune des questions à choix multiple, on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 point si la question reste sans réponse, -1 point si la réponse est fausse.
La question 10 (définitions) vaut 4 points (2 points pour chaque définition).
La question 11 (démonstration) vaut 4 points.

Total possible : 35 points.

Problème 1. *Quel est le polynôme minimal de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ *?*

(A) $(t-1)t$.

(B) $(t-1)^2 t$.

(C) $(t-1)t^2$.

(D) $(t-1)^2 t^2$.

Problème 2. *Soit* $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ *l'espace vectoriel des polynômes en* t*, à coefficients dans* $\mathbb{R}$*, de degré au plus 3. Soit* β *la forme bilinéaire sur* $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ *définie par* $\beta\big(f(t), g(t)\big) = f(1)g(1),\ \forall\, f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$*. Quelle est la signature de* β *?*

(A) $(1,0)$.

(B) $(2,0)$.

(C) $(3,0)$.

(D) $(1,1)$.

Problème 3. *Soit* $\mathbb{F}_{11}$ *le corps à 11 éléments, soit* $E = (e_1, e_2)$ *la base canonique de* $V = (\mathbb{F}_{11})^2$ *et soit* $E^* = (\phi_1, \phi_2)$ *la base duale de* E *(base de l'espace dual* V^**). Soit* $F = (f_1, f_2)$ *une autre base de* V *et soit* $F^* = (\psi_1, \psi_2)$ *sa base duale. Sachant que* $\psi_1 = 3\phi_1 - \phi_2,\ \ \psi_2(e_1) = 0,\ \ \psi_2(e_2) = 6$*, quelle est la première composante de* f_1 *relativement à* E *?*

(A) 0.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Problème 4. *Sur $\mathbb{C}^3$, on définit le produit scalaire donné par la matrice suivante (par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$) :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

(On admet que c'est bien un produit scalaire.) Soit $W = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),\,(0,1,i)\big)$ et considérons les vecteurs $u = (0, 2i, 3)$ et $v = (0, 4, 6i)$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $v \in W^\perp$.

(B) $u \in W^\perp$.

(C) $2u - iv \in W^\perp$.

(D) $u \notin W^\perp$.

Problème 5. *Soit $V = \mathbb{R}^3$ l'espace euclidien avec produit scalaire standard et considérons le sous-espace $W = \mathrm{Vect}\big((1,0,-1),\,(4,1,0)\big)$. Quel est le vecteur de W qui est à distance minimale du vecteur $v = (1,5,1)$?*

(A) $(5, 1, -1)$.

(B) $(36, 9, 0)$.

(C) $(2, 1, 2)$.

(D) $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.

Problème 6. *On considère le système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{array} \right.$$

avec conditions initiales $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 1$. Que vaut la fonction $x_1(t)$?

(A) $x_1(t) = e^{2t} - e^{3t}$.

(B) $x_1(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$.

(C) $x_1(t) = e^{3t} - e^{2t}$.

(D) $x_1(t) = 2e^{2t} - 2e^{3t}$.

Problème 7. *On considère la matrice complexe* $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & -6 & -4i \\ 0 & 4i & 0 \end{pmatrix}$, *où* $a, b \in \mathbb{C}$. *Est-ce que* A *est unitairement diagonalisable ?*

(A) *Oui si* $a = i$ *et* $b = 0$.

(B) *Non si* $a = 2$ *et* $b = 1$.

(C) *Oui si* $a = 2$ *et* $b = i$.

(D) *Non si* $a = -8$ *et* $b = 0$.

Problème 8. *Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(A) *Il existe une matrice complexe hermitienne* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et une valeur propre* λ *de* A *satisfaisant l'inégalité stricte* $m_{geom}(\lambda) > m_{alg}(\lambda)$.

(B) *Il existe une matrice complexe hermitienne* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et une valeur propre* λ *de* A *satisfaisant l'inégalité stricte* $m_{geom}(\lambda) < m_{alg}(\lambda)$.

(C) *Il existe une matrice complexe hermitienne* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et une valeur propre* λ *de* A *telles que* $(t - \lambda)^n$ *est un polynôme annulateur de* A *et* $A - \lambda I_n \neq 0$.

(D) *Pour toute matrice complexe hermitienne* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et pour toute valeur propre* λ *de* A, *la valeur* λ *n'est pas une racine double du polynôme minimal de* A.

Problème 9. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice orthogonale. Combien vaut la somme des carrés des coefficients de* A *?*

(A) *Cette somme peut valoir n'importe quel nombre réel positif.*

(B) *Cette somme vaut* 1.

(C) *Cette somme vaut* n.

(D) *Cette somme vaut* n^2.

Problème 10. *Répondez de manière précise à chacune des questions suivantes.*

a) *Qu'est-ce qu'une matrice complexe normale ?*

b) *Qu'est-ce que les valeurs singulières d'une matrice* $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ *?*

Problème 11. *Soit* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel hermitien et soit* $\alpha : V \to V$ *une transformation linéaire auto-adjointe. Montrer de manière directe (sans utiliser le théorème spectral) que deux espaces propres de* α *distincts sont orthogonaux. Justifiez vos raisonnements.*
