Série 6 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 31 octobre.
L'exercice 4 ($\star$) peut être rendu le jeudi 3 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Considérons la même matrice dans $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ et notons-la A_C. Alors, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_C)$.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$. Considérons la même matrice dans $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et notons-la A_R. Alors, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_R)$.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $n > r \geq 1$. Il existe des matrices $A, B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ telles que $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r$ et $A^T B = 0$.

  ○ vrai ○ faux

- Il existe un morphisme entre $(S_n, \circ)$ et l'ensemble des matrices de permutations de taille n muni du produit matriciel.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Considérons la même matrice dans* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *et notons-la* A_C. *Alors,* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_C)$.

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$. *Considérons la même matrice dans* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *et notons-la* A_R. *Alors,* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_R)$.

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit* $n > r \geq 1$. *Il existe les matrices* $A, B \in M_{n\times r}$ *telles que* $\text{rang}(A) = rg(B) = r$ *et* $A^T B = 0$.

  ○ *vrai* ●*faux*

- *Il existe un morphisme entre* $(S_n, \circ)$ *et l'ensemble des matrices de permutations de taille n muni du produit matriciel.*

  ● *vrai* ○ *faux*

(b) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, telle que $\text{rang}(A) = r$ et $A = A_R + \mathrm{i}A_I$, où $A_R, A_I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_R & A_I \\ -A_I & A_R \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\text{rang}(\tilde{A})$?

◯ On ne peut rien dire sur $\operatorname{rang}(\tilde{A})$.
◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = n$.
◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = r$.
◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 2r$.

Sol.:

1. *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, telle que $\operatorname{rang}(A) = r$ et $A = A_R + \mathrm{i}A_I$, où $A_R, A_I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_R & A_I \\ -A_I & A_R \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$. Ce qui peut être dit sur* $\operatorname{rang}(\tilde{A})$ *?*

   ◯ *On ne peut rien dire sur* $\operatorname{rang}(\tilde{A})$.
   ◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = n$.
   ◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = r$.
   ● $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 2r$.

Exercice 2

i) Transformer chacune des matrices suivantes en une matrice échelonnée réduite

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_2).$$

Calculer aussi les matrices de transformation.

ii) Utiliser le résultat de i) pour déterminer les inverses de A_1 et A_2.

Sol.:

i) Pour amener la matrice sous forme échelonnée, nous commençons avec $B^{(0)} = I$ et $A_1^{(0)} = A_1$. Premier objectif intermédiaire est de multiplier A_1 avec des matrices d'éléments tels que A_1 a une forme triangulaire supérieure, dans le même temps nous notons dans chaque cas les matrices $B^{(i)}$ le produit des matrices élémentaires sont.

$$A_1^{(0)} = IA_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous sommes $B^{(1)} = G_{13}(-2)G_{12}(1)B^{(0)}$ pour quitter à la première colonne.

$$A_1^{(1)} = B^{(1)}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suivant l'on applique $B^{(2)} = P_{23}B^{(1)}$ *pour obtenir une entrée non-zéro à la position* a_{22}.

$$A_1^{(2)} = B^{(2)}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maintenant vient l'étape intermédiaire suivante, nous apportons $A_1^{(3)}$ *à la forme diagonale, en utilisant* $B^{(3)} = G_{21}(\frac{2}{3})G_{32}(1)B^{(2)}$.

$$A_1^{(3)} = B^{(3)}A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous produisons $A_1^{(4)} = I$, *où on applique* $B^{(4)} = M_1(\frac{1}{3})M_2(\frac{1}{3})M_3(-1)B^{(3)}$.

$$A_1^{(4)} = B^{(4)}A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$C = A_1^{(4)}$ *est la forme échelonnée cherché de* A_1 *et* $B = B^{(4)}$ *est la correspondante matrice de transformation.*
D'une manière similaire, on calcule que la forme échelonnée de A_2 *est* I_3 *et la matrice de transformation est* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Les inverses de A_1 *et* A_2 *sont les matrices de transformation calculées ci-dessus.*

Exercice 3

(a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ sont équivalentes. Puis calculer $\text{rang}(A)$ et $\text{rang}(B)$.

Sol.: *En réduisant la matrice A par des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient la matrice B, par conséquent elles sont équivalentes. Ensuite, la matrice B est sous forme échelonnée réduite, on peut donc en déduire que* $\text{rang}(B) = 3$ *(trois pivots) ; comme A et B sont équivalentes, on a* $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 3$.

(b) Calculer la forme échelonnée réduite $C = BA$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 13 & 11 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 18 & 2 & 18 & 12 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 \\ 1 & 10 & 13 & 21 & 8 & 24 & 16 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 13 & 2 & 24 & 17 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{7\times 9}(\mathbb{Q}).$$

Pour cela il n'est pas nécessaire de calculer la matrice de transformation B explicitement.

Sol.: *D'abord on amène la matrice sous forme triangulaire avec des opérations élémentaires sur les lignes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 13 & 11 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 18 & 2 & 18 & 12 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 \\ 1 & 10 & 13 & 21 & 8 & 24 & 16 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 13 & 2 & 24 & 17 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 11 & 4 & 6 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 18 & 2 & 18 & 12 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 \\ 0 & 10 & 8 & 21 & 4 & 24 & 16 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 13 & 2 & 24 & 17 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 17 & 12 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 22 & 16 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 23 & 17 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 13 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 11 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquer qu'on n'a pas eu besoin d'utiliser des permutations, mais seulement d'ajouter à une ligne un multiple scalaire d'une autre ligne. Maintenant, dans chaque colonne pivot, on mets des zéros dans toutes les positions au-dessus du pivot, toujours à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{14}{25} & -\frac{23}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement on divise chaque ligne pivot par la valeur de son pivot, pour arriver à la forme échelonné réduite.

$$C = A^{(9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{125} & -\frac{23}{125} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{25} & \frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Exercice 4 ($\star$)
Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ une matrice de rang m, où $m \leq n$, et K est un corps. Démontrer que l'on peut choisir m colonnes $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ de A, telles que la matrice $X = \left(x_{i_1}|x_{i_2}|\dots|x_{i_m}\right)$ soit inversible.

Sol.: *Soit $C = BA$ la forme échelonné réduite de la matrice A. Pour mieux comprendre l'argument suivant, il convient d'envisager la multiplication de matrices en tant qu'opérations avec les colonnes. Donc*

$$C = \left(c_1|c_2|\dots|c_n\right) = \left(Ba_1|Ba_2|\dots|Ba_n\right) = BA,$$

où a_i et c_i sont les colonnes de A et C, respectivement. Comme $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(C) = m$, il existe exactement m colonnes pivot dans C, dont on désigne les indices par $i_1, i_2, \dots, i_m$. L'ensemble de ces colonnes $\left(c_{i_1}|c_{i_2}|\dots|c_{i_m}\right)$ forme précisement la matrice identité I_m, qui a rang m. Or, soit $X = \left(a_{i_1}|a_{i_2}|\dots|a_{i_m}\right)$ la matrice formé à partir de A lorsqu'on prend les colonnes de mêmes indices $i_1, i_2, \dots, i_m$. On obtient

$$B^{-1} = B^{-1}I_m = B^{-1}BX = X,$$

où on a utilisé le fait que

$$I_m = \left(c_{i_1}|c_{i_2}|\dots|c_{i_m}\right) = \left(Ba_{i_1}|Ba_{i_2}|\dots|Ba_{i_n}\right) = BX.$$

La matrice X est donc inversible, puisque B est inversible, et la matrice inverse de X est B. **Exercice 5**

(a) Soit $n \geq 2$. Pour $0 \leq r \leq n$, on considère l'ensemble

$$M = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \text{rang}(A) = r\}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de r a-t-on que $(M, \cdot)$ est un groupe muni de la multiplication matricelle $\cdot$?

ii) Pour quelle(s) valeur(s) de r a-t-on que $(M, +)$ est un groupe muni de l'addition matricelle $+$?

Sol.: *En général ni $(M, \cdot)$ ni $(M, +)$ ne constituent des groupes.*
Pour $r = 0$, $(M, \cdot)$ est un groupe avec un seul élément $M = \{0\}$. En effet dans ce cas 0 est l'élément neutre et son propre inverse. Pour $r = n$, $(M, \cdot)$ devient le groupe $GL(n)$. Dans tout autre cas $(M, \cdot)$ n'est pas un groupe, puisque

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2r-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si\ r > \frac{n}{2}, \\ 0 & si\ r \leq \frac{n}{2}. \end{cases}$$

i.e., le rang $\neq r$, sauf si $r = 0$ ou $r = n$.
Pour $r = 0$, $(M, +)$ est toujours un groupe à un seul élément, $M = \{0\}$. Dans tout autre cas, $(M, +)$ n'est pas un groupe : 0 est de rang 0 et donc n'est pas dans M. Il n'y a donc pas d'élément neutre dans M.

(b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{où } A_{11} \in M_{n_1\times n_1}(\mathbb{R}), A_{12} \in M_{n_1\times n_2}(\mathbb{R}), A_{22} \in M_{n_2\times n_2}(\mathbb{R}).$$

Est-ce que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_{11}) + \text{rang}(A_{22})$? Donner une démonstration ou, le cas échéant, un contre-exemple.

Sol.: *Faux. Considérons par exemple $n_1 = n_2 = 1$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors* $\text{rang}(A) = 1 \neq 0 = \text{rang}(A_{11}) + \text{rang}(A_{22})$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. Quel est le rang de xx^T ?

Sol.: *Nous calculons le produit matriciel*

$$xx^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{pmatrix}.$$

Comme $x \neq 0$, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $x_i \neq 0$. Sans perte de généralité on peut supposer que $x_1 \neq 0$. Alors les lignes $2, 3, \dots, n$ sont multiples scalaires de la ligne 1, et la forme échelonnée réduite de xx^T devient

$$C = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1x_2}{x_1^2} & \dots & \frac{x_1x_n}{x_1^2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice a rang 1.

MATLAB exercice (optionnel)
Dans cet exercice, nous étudions une classe spéciale de matrices - les carrés magiques. Un carré magique A_n de taille $n \times n$, avec $n \geq 3$, est généré avec la commande MATLAB `magic(n)`.

1. Nous étudions expérimentalement les rangs des carrés magiques. Utiliser la commande MATLAB `rank` pour calculer le rang r_n de A_n. Affichez r_n en fonction de n pour $n = 3, 4, \ldots, 20$ dans un graphique à colonnes (utiliser la commande MATLAB `bar`).
2. Pouvez-vous déterminer la formule pour r_n ? Pouvez-vous prouver la formule obtenue ?

Sol.: *Regarder sur* `https://in.mathworks.com/moler/exm/chapters/magic.pdf`.