EPFL 1er semestre 2015-16
Géométrie I, MATH-120

Examen-Correction

Nom : Prenom : No SCIPER :

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Enoncer le Théorème de Lagrange.
2. Esquisser une figure dont le groupe d'isométries est cyclique d'ordre 8.
3. Entourer le label des affirmations qui sont correctes (la détermination de leur véracité devrait, normalement, ne nécessiter que peu de calculs) :
   a) Un groupe dihedral est commutatif.
   b) La composée de la symétrie d'axe la droite d'équation $x + y = 2$ et de la symétrie d'axe la droite d'équation $2x + y = 3$ est une symétrie dont l'axe passe par le point d'intersection des deux droites.
   c) L'image du point $(4, -4)$ par la symétrie d'axe la droite d'équation $2x+3y = 1$ est le point $(6, -2)$.
   d) Le groupe des isométries d'un hexagone régulier est d'ordre 6.

Question 1.2 Voir la figure 1.

Question 1.3

a) Un groupe dihedral est commutatif : Faux

b) La composée de la symétrie d'axe la droite d'équation $x + y = 2$ et de la symétrie d'axe la droite d'équation $2x + y = 3$ est une symétrie dont l'axe passe par le point d'intersection des deux droites : Faux (la composee de deux symetries est soit un translation soit une rotation)

c) L'image du point $(4, -4)$ par la symétrie d'axe la droite d'équation $2x + 3y = 1$ est le point $(6, -2)$: Faux (le vecteur $\overrightarrow{(6, -2)(4, -4)}$ n'est pas perpendiculaire a l'axe de symetrie).

d) Le groupe des isométries d'un hexagone régulier est d'ordre 6 : Faux (ordre 12)

Exercice 2. Soit φ defini par

$$\varphi(x, y) = (\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 1, -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2)$$

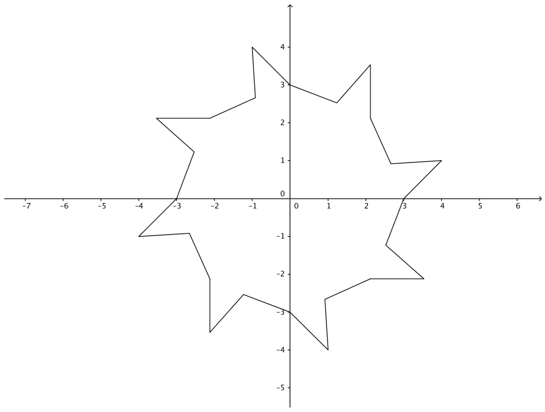

FIGURE 1 –

1. Quelle est la nature géométrique de φ : type de transformation, angle, points fixes (si ils existent).
2. Ecrire φ sous forme de transformations complexe.
3. Calculer φ^{2016}.

Question 2.1 φ est une symetrie affine car la matrice de sa partie lineaire est

$$\begin{pmatrix} 12/13 & -5/13 \\ -5/13 & -12/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}, \; c^2 + s^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = 1$$

celle d'une symetrie. L'ensemble des points fixes est obtenu en resolvant le systeme

$$\begin{cases} \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 1 = x \\ -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{13}x - \frac{5}{13}y + 1 = 0 \\ -\frac{5}{13}x - \frac{25}{13}y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 5y - 13 = 0 \\ x + 5y - 2\frac{13}{5} = 0 \end{cases}$$

qui n'a pas de solution : φ est donc une symetrie glissee.

Question 2.2

$$z \mapsto \overline{\beta z} + 1 + 2i, \; \beta = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i.$$

Question 2.3 Comme φ est une symetrie affine donc φ^2 est une translation de vecteur donne par

$$\varphi^2(0,0) = \varphi(1,2) = (15/13, -3/13)$$

et donc

$$\varphi^{2016} = t^{1008}_{(15/13,-3/13)} = t_{\left(\frac{15120}{13}, -\frac{3024}{13}\right)}.$$

Exercice 3. Soit D la droite d'équation

$$x + y = 1.$$

1. Soit s_D la symétrie orthogonale d'axe D. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

   $$s_D(x, y) = (X, Y).$$

   Calculer (X, Y) en fonction de (x, y).
2. Exprimer s_D sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes.
3. Soit r la rotation d'angle $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de centre $(1, 0)$. Exprimer r sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes. Quel est l'ordre de r ?
4. Soit $D' = r(D)$ la transformée de D par la rotation r. Calculer l'isométrie composée $\varphi = s_{D'} \circ s_D$ en fonction de r (on pourra considérer les points fixes de s_D, r et $s_{D'}$).
5. Montrer que le groupe $G = \langle s_D, s_{D'} \rangle$ engendré par s_D et $s_{D'}$ est aussi le groupe engendré par s_D et φ et calculer son ordre.
6. Donner un polygone explicite $\mathbf{P}$ et une isométrie du plan ψ tel que le groupe d'isométries de $\mathbf{P}' = \psi(\mathbf{P})$ soit G.

Question 3.1 On a $s_D(0, 0) = (1, 1)$ et la partie lineaire s_0 est donnee par $s_0(x, y) = (-y, -x)$ et donc

$$(X, Y) = (-y + 1, -x + 1).$$

Question 3.2 On a

$$s_D(z) = \overline{iz} + 1 + i.$$

Question 3.3 Le complexe 1 est le centre de la rotation r. On a donc

$$r(z) - 1 = \omega(z - 1) \Longleftrightarrow r(z) = 1 - \omega + \omega z.$$

L'ordre de r est l'ordre de ω et on a $\omega^3 = 1$ donc r est d'ordre 3.

Question 3.4 On a

$$s_{D'} = r \circ s_D \circ r^{-1}.$$

En effet l'ensemble des points fixes de (la symetrie affine) $r \circ s_D \circ r^{-1}$ est l'image par r de l'ensemble des points fixes de s_D et s'est donc $r(D) = D'$; deux symetries ayant la meme droite de points fixes sont egales.

L'isometrie $\varphi = s_{D'} \circ s_D = r'$ est une rotation affine. Pour trouver son centre on remarque que le centre de r, $P_r = (1, 0)$ appartient a D et donc a $D' = r(D)$ car

$$P_r \in D \Longleftrightarrow r(P_r) = P_r \in r(D) = D'.$$

comme P_r est un point fixe de s_D et $S_{D'}$, c'est un point fixe du compose r' et c'est donc le centre de r'. Pour trouver l'angle de r' il suffit de considerer la partie lineaire : on a

$$s_{D',0} = r_0 \circ s_{D,0} \circ r_0^{-1}.$$

Comme r_0 est une rotation lineaire d'ordre 3 (donnee en complexes par $z \mapsto \omega z$) le groupe engendre par r_0 et $s_{D,0}$ est dihedral d'rodre 6 et on a

$$s_{D,0} \circ r_0 \circ s_{D,0} = r_0^{-1}.$$

On a donc

$$r'_0 = r_0 \circ s_{D,0} \circ r_0^{-1} \circ s_{D,0} = r_0 \circ s_{D,0} \circ s_{D,0} \circ r_0 \circ s_{D,0} \circ s_{D,0} = r_0^2.$$

Ainsi l'angle de r'_0 et donc de r' est ω^2 (qui est egalement d'ordre 3). Comme r' a le meme centre que r et est d'angle ω^2, on a

$$r' = r^2.$$

Question 3.5 On a $r' = s_{D'} \circ s_D$ et donc est contenu dans le groupe engendre par $s_{D'}$ et s_D ; par cette meme relation $s_{D'} = r' \circ s_D$ (on rapelle que $S_D^{-1} = s_D$) donc $s_{D'}$ s'ecrit comme compose de r' et s_D et est contenu dans le groupe engendre par r et s_D. Ainsi

$$G = \langle s_D, r \rangle = \langle s_D, s_{D'} \rangle.$$

Comme le point $(1,0)$ est un point fixe de r' et s_D c'est un point fixe de tout element du groupe $\langle s_D, r \rangle$ et le conjugue ce groupe par la translation $t_{-(1,0)}$, admet l'origine $(0,0)$ comme point fixe : si $g \in G$,

$$t_{-(1,0)} \circ g \circ t_{(1,0)}(0,0) = t_{-(1,0)}(g(1,0)) = t_{-(1,0)}((1,0)) = (0,0).$$

On obtient donc un groupe d'isometrie lineaires (donc le groupe G_0 engendre par les parties lineaires $s_{D,0}$ et $r'_0 = r_0^2$) endrendre par une rotation lineaire d'ordre 3 et une symetrie : ce groupe est fini dihedral d'ordre 6 et on a la relation

$$s_{D,0} \circ r'_0 \circ s_{D,0}^{-1} = r_0'^{-1}.$$

en prenant conjugue inverse on obtient que G est dihedral d'ordre 6.

Question 3.6 Il suffit de prendre $\mathbf{P}'$ le triangle equilateral de barycentre le point $(1,0)$ et dont un des sommets est sur l'axe D'.

Exercice 4. (Première méthode) Soit g_0 un génerateur de G et h_0 un génerateur de H.

1. Montrer que l'ordre de (g_0, h_0) dans le groupe produit $G \times H$ divise mn.
2. Montrer que l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que la première coordonnée de $(g_0, h_0)^k = (g_0, h_0) \times \cdots \times (g_0, h_0)$ (k fois) vaut e_G est l'ensemble des multiples de m.
3. Effectuer un raisonnement similaire et en déduire l'ordre de (g_0, h_0).
4. Conclure la preuve du Théorème.

Question 4.1 On a
$$(g_0, h_0)^{mn} = (g_0^{mn}, h_0^{mn}) = (e_G, e_H)$$
donc mn est un multiplie de l'ordre de (g_0, h_0).

Question 4.2 On a $(g_0, h_0)^k = (g_0^k, h_0^k)$ donc si la premiere coordonnee vaut e_G on a $g_0^k = e_G$ et k est un multiplie de m.

Question 4.3 De meme si la deuxieme coordonnee de $(g_0, h_0)^k = (g_0^k, h_0^k)$ vaut e_H, k est un multiplie de n. Ainsi si $(g_0, h_0)^k = (e_G, e_H)$ alors k est un multiplie commun de m et n et donc un multiple commun de leur ppmc qui vaut mn. Ainsi l'ordre de (g_0, h_0), k_0 est un multiple de mn et comme par la premiere question mn est un multiple de k_0. on a $k_0 = mn$.

Question 4.4 Le groupe $G \times H$ est d'ordre mn et (g_0, h_0) est d'ordre mn donc $\langle (g_0, h_0) \rangle = G \times H$ et $G \times H$ est cyclique.

Exercice 5. (Deuxième méthode) Soit $(\mathbb{C}^\times, .) = (\mathbb{C} - \{0\}, .)$ le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ (muni de la multiplication usuelle). Soient $\mu_m, \mu_n \subset \mathbb{C}^\times$ les sous-groupes des racines m-ièmes et n-ièmes de l'unité.

1. Montrer que l'application "produit"
$$\pi : \begin{array}{ccc} \mu_m \times \mu_n & \mapsto & \mathbb{C}^\times \\ (\zeta, \xi) & \mapsto & \zeta.\xi \end{array}$$
est un morphisme de groupes.
2. Montrer que l'image $\mathrm{Im}(\pi)$ est un groupe cyclique.
3. Montrer que le noyau $\ker(\pi)$ peut s'identifier à un sous-groupe de μ_m et a un sous-groupe de μ_n. En déduire que $\ker(\pi) = \{(1, 1)\}$.
4. Montrer que $\mu_m \times \mu_n$ est cyclique et conclure la preuve du Théorème.
5. Quel sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ est le groupe $\mathrm{Im}(\pi)$?

Question 5.1 On a pour $\zeta, \zeta' \in \mu_m$, $\xi, \xi' \in \mu_n$

$$\pi((\zeta, \xi) \times (\zeta', \xi')) = \pi((\zeta\zeta', \xi\xi')) = \zeta\zeta'\xi\xi' = \zeta\xi\zeta'\xi' = \pi(\zeta, \xi).\pi(\zeta', \xi')$$

et donc par le critere de morphisme de groupe π est un morphisme.

Question 5.2 $\mathrm{Im}(\pi)$ est un groupe fini (car image d'un groupe fini par un morphisme) de $\mathbb{C}^\times$ et par le theoreme du cours d'est un groupe cyclique.

Question 5.3 Consierons l'application "projection sur la premiere coordonnee"

$$\pi_1 : (\zeta, \xi) \in \ker(\pi) \mapsto \zeta \in \mu_m.$$

c'est un morphisme de groupes :

$$\pi_1((\zeta, \xi) \times (\zeta', \xi')) = \pi_1((\zeta\zeta', \xi\xi')) = \zeta\zeta' = \pi_1(\zeta, \xi).\pi_1(\zeta', \xi');$$

montrons qu'il est injectif : soit $(\zeta, \xi \in \ker(\pi)$ tel que $\zeta = 1$, alors comme

$$\pi(\zeta, \xi) = \zeta\xi = 1$$

on a $\xi = 1$ et $(\zeta, \xi) = (1, 1)$ et donc $\ker(\pi)$ s'identifie a son image par π_1 et est un sous-groupe de μ_m. De meme $\ker(\pi)$ s'identifie a son image par π_2 et est un sous-groupe de μ_n. Ains l'ordre $|\ker(\pi)|$ divise a la fois m et n qui sont premiers entre eux donc $|\ker(\pi)| = 1$ et $\ker(\pi) = \{(1, 1)\}$.

Question 5.4 Ainsi l'application π est injective et est un isomorphisme de groupes de $\mu_m \times \mu_n$ vers sont image $\pi(\mu_m \times \mu_n) \subset \mathbb{C}^\times$. comme ce dernier groupe est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$ il est cyclique.

Question 5.5 $\mathrm{Im}(\pi)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ d'ordre mn, il n'y a uqu'un seul sous-groupe possible : le groupe des racine mn-iemes de l'unite

$$\mu_{mn} = \{z \in \mathbb{C},\ z^{mn} = 1\}.$$