# Examen Blanc (Corrigé)

**Question 1**
Pour un nombre fixe $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $S_\alpha$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont le premièr et le second éléments sont des nombres réels quelconques, et dont le troisième élément est $\alpha$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

○ Il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
● Il existe un seule $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
○ Il y a une infinité de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
○ Si $S_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors la dimension de $S_\alpha$ est 1.

***Sol.:*** *Soit* $S_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$. *D'abord on voit que le vecteur nul est dans* $S_\alpha$ *si et seulement si* $\alpha = 0$. *Donc, le vecteur nul est l'élément de* $S_\alpha$ *seulement pour une valeur de* $\alpha$. *Il est facile de vérifier que les autres deux conditions du Lemme 4.4 sont satisfaites.*

**Question 2**
Soit $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$. Laquelle des affirmations suivantes équivaut à dire que $\operatorname{rang}(A) = 3$ ?

○ $A$ a une ligne nulle.
○ $A$ a deux colonnes nulles.
○ Il existe au moins une colonne de $A$ qui est une combinaison linéaire des autres colonnes.
○ Il existe au moins une ligne de $A$ qui est une combinaison linéaire des autres lignes.
● Aucune des autres assertions n'est correcte.

***Sol.:*** *Soit* $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ *la matrice nulle. Donc* $A$ *satisfait tous les quatre premieres affirmations et* $\operatorname{rang}(A) = 0$. *Alors, on voit que aucun d'entre eux équivaut à dire que* $\operatorname{rang}(A) = 3$.

**Question 3**
Un groupe abélien satisfait les axiomes suivants : la stabilité ($A1$), l'associativité ($A2$), l'existence de l'élément neutre ($A3$), l'existence des inverses ($A4$) et la commutativité ($A5$). Soit $G = \mathbb{R}$ et la loi de composition $\circ$ définie dans $G \times G$ par $x \circ y = -x - y + xy$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

● Les axiomes $A1, A5$ sont satisfaits, et les axiomes $A2, A3, A4$ ne sont pas satisfaits.
○ Les axiomes $A1, A2, A5$ sont satisfaits, et les axiomes $A3, A4$ ne sont pas satisfaits.
○ Les axiomes $A1, A3, A4$ sont satisfaits, et les axiomes $A2, A5$ ne sont pas satisfaits.
○ Les axiomes $A1, A3, A5$ sont satisfaits, et les axiomes $A2, A4$ ne sont pas satisfaits.

***Sol.:***

*(A1) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a que $x \circ y = -x - y + xy \in \mathbb{R}$, donc la stabilité est satisfaite.*

*(A2) Par exemple, pour $x = y = 1$ et $z = 0$, $(x \circ y) \circ z = 1 \neq -1 = x \circ (y \circ z)$.*

*(A3) L'élément neutre n'existe pas, car pour $x = 1$ on a que $x \circ y = -1 - y + y = -1 \neq x$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.*

*(A4) L'inverses n'existent pas, car l'élément neutre n'existe pas.*

*(A5) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x \circ y = -x - y + xy = y \circ x$, donc la commutativité est satisfaite.*

**Question 4**

Soient $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et $H$ un sous-espace vectoriel de $V$. Laquelle des assertions suivantes est fausse ?

○ $\dim(H) \leq \dim(V)$.
○ Une famille linéairement indépendante dans $H$ est linéairement indépendante dans $V$ aussi.
● Si $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre $H$, alors cette famille engendre $V$ aussi.
○ Si $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre $V$, alors cette famille est linéairement indépendante.

***Sol.:*** *La troisième assertion est fausse. Par exemple, pour $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, H = \{(x, 0)^T : x \in \mathbb{R}\}$, la famille $(e_1, 2e_1)$ engendre $H$, mais n'engendre pas $V$.*

**Question 5**

On considère le système linéaire

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Soit $W$ l'ensemble de toutes les solutions de ce système dans $\mathbb{F}_5^4$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

○ $W$ contient 1 élément.
○ $W$ contient 16 éléments.
● $W$ contient 25 éléments.
○ $W$ contient un nombre infini d'éléments.

***Sol.:*** *La matrice du système est :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Si on ajoute la première ligne à la dernière, on obtient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On voit que* $\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Ker}\,(A) = 2$. *Si* $(v_1, v_2)$ *une base de* $\mathrm{Ker}\,(A)$, *pour tout vecteur* $v \in \mathrm{Ker}\,(A)$ *existe unique* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_5$ *tels que* $v = \alpha v_1 + \beta v_2$. *Comme on peut prendre* $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, *W contient 25 éléments.*

**Question 6**

Soit $K[t]$ l'espace vectoriel des polynômes. Laquelle des assertions suivantes est fausse ?

○ Si $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots \in K[t]$ où $\alpha_0 \neq 0$, alors le degré de $p$ est fini.
○ La famille $(1, t, t^2, t^3, \ldots)$ engendre $K[t]$.
○ La famille $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ où $p_0(t) = 1$ et $p_i(t) = 1 + t + \cdots + t^i$, $i \geq 1$, engendre $K[t]$.
● La famille $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ où $p_0(t) = 1 + t + t^2 + \cdots$ et $p_i(t) = t^i + t^{i+1} + t^{i+2} + \cdots$, $i \geq 1$, engendre $K[t]$.

***Sol.:*** *La première assertion est correcte car tout polynôme non nul a le degré fini.*
*On vérifie que la famille* $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ *où* $p_0(t) = 1$ *et* $p_i(t) = 1 + t + \cdots + t^i$, $i \geq 1$ *engendre* $K[t]$ *: si* $p \in K[t]$, *donc* $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n t^n$, *où* $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *On considère la famille* $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ *et l'équation*

$$p = x_0 p_0 + x_1 p_1 + \cdots x_n p_n, \quad x_0, \ldots, x_n \in K.$$

*En comparant les coefficients des polyômes, on obtient*

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\alpha_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\alpha_2 &= x_2 + \cdots + x_n \\
&\vdots \\
\alpha_{n-1} &= x_{n-1} + x_n \\
\alpha_n &= x_n.
\end{aligned}$$

*Comme la matrice du système*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*est inversible, on a montré que* $p \in \mathrm{span}(p_0, \ldots, p_n)$. *Donc,* $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ *est une famille génératrice de* $K[t]$. *La quatrième assertion est fausse car* $p_i \notin K[t]$, $i = 0, 1, \ldots$

**Question 7**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), n > 1$, la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On note $x_n = (A^n)_{1n}$, le coefficient $(1, n)$ de la matrice $A^n$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

○ $x_n = (\lambda + 1)^n - \lambda^n - 1$.
● $x_n = n\lambda$.
○ $x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n + \lambda(n-2)$.
○ Aucune des autres assertions n'est correcte.

***Sol.:*** *On peut écrire la matrice $A$ comme $A = \lambda I_n + N$, où*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

*D'abord on voit que*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*En fait, les uns vont vers la droite jusqu'à ce qu'ils disparaissent. Poursuivant ainsi, on voit que*

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^n = 0.$$

*Pour calculer $(\lambda I_n + N)^n$, on utilise la formule du binôme de Newton : soient $x$ et $y$ deux éléments d'un anneau qui commutent et $k$ un entier positif, alors*

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i}. \tag{1}$$

*Comme $\lambda I_n$ est une matrice scalaire, elle commute avec $N$, et on peut utiliser (1) :*

$$(\lambda I_n + N)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^i N^{n-i}. \tag{2}$$

*Dans la somme (2), le seul facteur avec le coefficient $(1, n)$ non nul est la matrice $\lambda\binom{n}{1}N^{n-1}$. Donc, on obtient que le coefficient $(1, n)$ est égal à $n\lambda$.*

**Question A**
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$ est un entier positif. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\operatorname{rang}(A) \leq 2$.

ii) Il existe $U, V \in M_{n\times 2}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV^T$.

**"i) $\Rightarrow$ ii)" (5 points)** Suppose que $\operatorname{rang}(A) \leq 2$. Alors la matrice $A$ est équivalente à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

où $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ et toutes les autres valeurs sont nuls (Théorème 3.18). Alors il existe $Q, Z \in GL_n(\mathbb{R})$ t.q.

$$A = QBZ = Q \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} Z}_{=:V^T},$$

avec $U, V \in M_{n\times 2}(\mathbb{R})$.

**"ii) $\Rightarrow$ i)" (3 points)** Suppose qu'il existe $U, V \in M_{n\times 2}(\mathbb{R})$ t.q. $A = UV^T$. La matrice $U$ a deux colonnes, alors $\operatorname{rang}(U) \leq 2$ et on obtient

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(UV^T) \leq \operatorname{rang}(U) \leq 2,$$

où on a utilisé le Théorème 3.22 du cours.

**Question B**
Soient $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, et $L, M$ deux sous-espaces vectoriels de $V$ tels que $V = L \oplus M$. On définit $P : V \to V$ par $P(x) = a$, où $x = a + b, a \in L, b \in M$. Montrer que :

i) $P$ est une application linéaire,

ii) $P \circ P = P$.

**(1 point)** Nous observons que l'application $P : V \to V$, $P(x) = a$, est bien défini. En fait on sait par le course que

$$V = L \oplus M \Leftrightarrow \forall x \in V \,\exists!\, a \in L, b \in M, \text{ tels que } x = a + b\,.$$

**i) (2 points)** Soit $x_1, x_2 \in V$, $x_1 = a_1 + b_1$, $x_2 = a_2 + b_2$, $a_1, a_2 \in L$, $b_1, b_2 \in M$. Donc on a que

$$\begin{aligned} P(x_1 + x_2) &= P(a_1 + b_1 + a_2 + b_2) \\ &= P(\underbrace{a_1 + a_2}_{\in L} + \underbrace{b_1 + b_2}_{\in M}) \\ &= a_1 + a_2 \\ &= P(x_1) + P(x_2)\,. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in K$, $x = a + b \in V$, on a que

$$\begin{aligned} P(\lambda x) &= P(\lambda(a + b)) \\ &= P(\underbrace{\lambda a}_{\in L} + \underbrace{\lambda b}_{\in M}) \\ &= \lambda a \\ &= \lambda P(x)\,. \end{aligned}$$

Donc $P$ est une application linéaire.

**ii) (1 point)** Soit $x = a + b \in V$. Donc nous obtient

$$\begin{aligned} P(P(x)) &= P(P(a + b)) \\ &= P(\underbrace{a}_{\in L}) \\ &= P(\underbrace{a}_{\in L} + \underbrace{0}_{\in M}) \\ &= a = P(x)\,. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in V\, P(P(x)) = P(x)$, alors $P \circ P = P$.

**Question C**
Soit $(G, +)$ un groupe et $f : G \to G$ la fonction définie par $f(x) = x^{-1}$. Montrer que $f$ est un morphisme de groupe si et seulement si $G$ est abélien.

**"$\Rightarrow$" (3 points)** Suppose $f$ est un morphisme de groupe. Soient $x, y \in G$. Il faut montrer que $x + y = y + x$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) && \text{(car } f \text{ morphisme)} \\ &= x^{-1} + y^{-1} && \text{(la définition de } f\text{)} \\ &= (y+x)^{-1}. && \text{(Lemme 2.3)} \end{aligned}$$

D'autre part, $f(x+y) = (x+y)^{-1}$. Alors, il suit que $(x+y)^{-1} = (y+x)^{-1}$. Par le Lemme 2.3, il suit

$$x + y = ((x+y)^{-1})^{-1} = ((y+x)^{-1})^{-1} = y + x.$$

Donc, $(G, +)$ est un groupe abélien.

**"$\Leftarrow$" (3 points)** Soit $(G, +)$ un groupe abélien et $f(x) = x^{-1}$ (l'élément inverse de $x$). Soient $x, y \in G$. Il faut montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On a

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)^{-1} \\ &= y^{-1} + x^{-1} && \text{(Lemme 2.3)} \\ &= x^{-1} + y^{-1} && \text{(car } G \text{ abélien)} \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Donc $f$ est un morphisme de groupe.

**Question D**
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 1 & -2 \\ -1 & 2+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

et $F_A$ l'application linéaire $F_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, F_A : x \mapsto Ax$.

i) Calculer une base de $\mathrm{Ker}(F_A)$ et une base de $\mathrm{Im}(F_A)$.

ii) Déterminer si $F_A$ est surjective, injective ou bijective.

**i) (4 points)** Tout d'abord on calcule la forme echelonnée reduite $C$ de $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1+i \\ 2i & 1 & -2 \\ -1 & 2+i & -1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1+i \\ 0 & 1-4i & 2i \\ 0 & 4+i & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1+i \\ 0 & 1-4i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1+i \\ 0 & 1 & (-8+2i)/17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & (-1+13i)/17 \\ 0 & 1 & (-8+2i)/17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: C$$

Pour calculer une base du $\mathrm{Ker}\,(F_A)$ on cherche l'ensemble de solutions $S(A,0)$. On sait que $S(A,0) = S(C,0)$, on résout donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (-1+13i)/17 \\ 0 & 1 & (-8+2i)/17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on trouve

$$x_3 \in \mathbb{C}, \qquad x_1 = x_3(1-13i)/17, \qquad x_2 = x_3(8-2i)/17.$$

Ainsi une base de $\mathrm{Ker}\,(F_A)$ est $\{((1-13i)/17, (8-2i)/17, 1)^\top\}$. Ensuite, en regardant $C$ on remarque que les deux premières colonnes sont lineairement independentes. Il en est de même pour $A$, donc une base de $\mathrm{Im}\,(F_A)$ est donné par $\{(1, 2i, -1)^\top, (2, 1, 2+i)^\top\}$.

**ii) (2 points)** Vu que $\dim(\mathrm{Ker}(F_A)) = 1 \neq 0$ alors $F_A$ n'est pas injective. Comme le domaine et codomaine de $F_A$ ont la même dimension, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont equivalentes. Donc $F_A$ n'est pas surjective ni bijective non plus.