Corrigé 3 du jeudi 6 octobre 2016

Exercice 1.

Montrons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier $n > 1$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Démonstration : Rappelons que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k, \\ 0! = 1. \end{cases}$$

Pour $n = 1$, on a

$$(x+y) = \underbrace{\binom{1}{0}}_{1} x^0 y^1 + \underbrace{\binom{1}{1}}_{1} x^1 y^0 = y + x.$$

On suppose

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots, N$$

et on veut montrer que c'est encore vrai pour $n = N+1$. On a:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{N+1} &= (x+y)(x+y)^N = (x+y) \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{k+1} y^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{k+1} y^{(N+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{(N+1)-k} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N}{k-1} x^k y^{(N+1)-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{(N+1)-k} \\
&= x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k-1} x^k y^{(N+1)-k} + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{(N+1)-k} + y^{N+1} \\
&= x^{N+1} + y^{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \binom{N+1}{k} x^k y^{(N+1)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} x^k y^{(N+1)-k}.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que

$$\begin{aligned}
\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k} &= \frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!} + \frac{N!}{k!(N-k)!} \\
&= \frac{N! \cdot k}{k!(N+1-k)!} + \frac{N!(N-k+1)}{k!(N+1-k)!} = \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 2.

1^o) Rappelons la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial qui est en fait le nombre de combinaisons de n éléments pris par k. En appliquant cette formule avec $a=1$, $b=\frac{1}{n}$, on vérifie facilement que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

et par suite $(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (0! = 1)$.

2^o) Puisque $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},\ k \geq 1$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} \leq 2$, on obtient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3,$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

3^o) Montrons que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante. En reprenant l'expression de $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ développée par le binôme de Newton, on vérifie que

$$\begin{aligned} x_n \leq 1 &+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

et ainsi $x_n \leq x_{n+1}$. On conclut que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et bornée; par le théorème (1.1) du cours, elle est convergente. De plus, pour $n=2$, on a $x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$. On en conclut, puisque $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 2$.

Exercice 3.

Calculons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{5^n}.$$

On a

$$\ln(n!) = \ln(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

Mais comme $\ln(k) \leq k,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\ln(n!) \leq \sum_{k=1}^{n} k = n\frac{n+1}{2}.$$

Ainsi

$$\frac{\ln(n!)}{5^n} \leq \frac{n(n+1)}{2\cdot 5^n} = \frac{n^2}{2\cdot 5^n} + \frac{n}{2\cdot 5^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet:

- par le critère de d'Alembert, la suite définie par $y_n = \dfrac{n^2}{2\cdot 5^n}$ converge vers 0 car

$$\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{2\cdot 5^{n+1}} \cdot \frac{2\cdot 5^n}{n^2}\right| = \frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \to \frac{1}{5}$$

  par la propriété (1) des suites convergentes (cours page 8), les suites $\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ convergeant vers 0;

- par un raisonnement analogue, on montre que la suite $\dfrac{n}{2\cdot 5^n}$ converge vers 0;
- d'autre part, puisque $0 \leq \dfrac{\ln(n!)}{5^n} \leq \dfrac{n^2}{2\cdot 5^n} + \dfrac{n}{2\cdot 5^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la règle des deux gendarmes (Remarque 1.3 du cours, p. 10) permet de conclure que $\dfrac{\ln(n!)}{5^n}$ converge vers 0.

Exercice 4.

Montrons que si les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \varepsilon,\ \ \forall n > N$.

- Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \ell$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{2n} - \ell| < \varepsilon,\ \ \forall n > n_1$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \ell$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_{2n+1} - \ell| < \varepsilon,\ \ \forall n > n_2$.

En posant $N = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, on a bien $|x_n - \ell| < \varepsilon,\ \ \forall n > N$.

Exercice facultatif: On peut utiliser ce résultat pour montrer la convergence de la suite:

$$x_0 = 2/3,$$
$$x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}.$$

$\square$