Geometrie - Serie 1 Correction

October 9, 2017

Exercice 1.1 (Corr)**.** *Soient E, F, G des ensembles (pas forcement finis) et $\phi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications entre les ensembles E et F et les ensembles F et G et $\varphi = \psi \circ \phi : E \to G$ l'application composee.*

1. *Montrer que si ϕ et ψ sont surjectives alors φ l'est.*
2. *Montrer que si ϕ et ψ sont injectives alors φ l'est.*
3. *Montrer que si ϕ et ψ sont bijectives alors φ l'est et calculer l'application reciproque φ^{-1} en fonction de celle de ϕ et de celle de ψ.*
4. *Montrer que si φ est surjective alors ψ est surjective. Donner un exemple montrant que ϕ ne l'est pas forcement.*
5. *Montrer que si φ est injective alors ϕ est injective. Donner un exemple montrant que ψ ne l'est pas forcement.*

Solution 1.1.

- Démontrer que $\varphi = \psi \circ \phi : E \to G$ est surjective revient à montrer que pour tout $g \in G$ il existe $e \in E$ tel que $\varphi(e) = g$. Soit donc $g \in G$ un élément quelconque. Comme ψ est surjective, nous pouvons choisir $f \in F$ tel que $\psi(f) = g$. De même, comme ϕ est surjective, nous choisissons $e \in E$ tel que $\phi(e) = f$. Nous en déduisons facilement que

  $$\varphi(e) = \psi \circ \phi(e) = \psi(\phi(e)) = \psi(f) = g,$$

  et donc φ est bien surjective.

- Démontrer que φ est injective revient à montrer que pour tout $e, e' \in E$,

  $$\varphi(e) = \varphi(e') \Rightarrow e = e'.$$

  Supposons donc que $\varphi(e) = \varphi(e')$. Par définition, donc, $\psi(\phi(e)) = \psi(\phi(e'))$. Mais comme ψ est injective, nous avons que $\phi(e) = \phi(e')$. L'injectivité de ϕ nous permet donc de conclure que $e = e'$ et donc que φ est bien injective.

- Si ϕ et ψ sont bijectives, alors en particulier elles sont injectives et surjectives et par les deux points précédants, φ est également injective et surjective, ce qui implique par définition que φ est bijective. Soit $\phi^{-1} : F \to E$ et $\psi^{-1} : G \to F$ les applications inverse de ϕ et ψ respectivement et posons

$$\tau := \phi^{-1} \circ \psi^{-1} : \begin{array}{ccccc} G & \to & F & \to & E \\ g & \mapsto & \psi^{-1}(g) & \mapsto & \phi^{-1}(\psi^{-1}(g)). \end{array}$$

Nous allons montrer que $\tau = \varphi^{-1}$. En effet, pour tout $e \in E$

$$\tau \circ \varphi(e) = \phi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi(e) = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\psi(\phi(e))) = \phi^{-1}(\phi(e)) = e,$$

et donc $\tau \circ \varphi$ est bien l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$. Par un calcul quasi-identique nous avons également $\varphi \circ \tau = \mathrm{Id}_G : G \to G$, et donc $\varphi^{-1} = \phi^{-1} \circ \psi^{-1}$.

- Supposons que φ est surjective. Nous voulons démontrer que ψ est également surjective. Soit donc $g \in G$ quelconque, et nous voulons trouver un antécédant de g pour ψ. Par la surjectivité de φ, nous pouvons choisir $e \in E$ tel que $\varphi(e) = g$. Nous notons $\phi(e) = f \in F$ et comme $\varphi(e) = \psi(\phi(e)) = \psi(f) = g$, f est un antécédant de g pour ψ, ce qui démontre sa surjectivité.
Nous allons construire un exemple avec $\varphi = \psi \circ \phi$ surjective tel que ϕ ne soit pas surjective. Soit donc $E = \{0\}, F = \{0, 1\}$ et $G = \{0\}$ avec ϕ et ψ définies par

$$\phi : \begin{array}{ccc} E = \{0\} & \to & F = \{0, 1\} \\ 0 & \mapsto & 0, \end{array}$$

et

$$\psi : \begin{array}{ccc} F = \{0, 1\} & \to & G = \{0\} \\ 0 & \mapsto & 0, \\ 1 & \mapsto & 0. \end{array}$$

Alors

$$\varphi = \psi \circ \phi : \begin{array}{ccccc} E = \{0\} & \to & F = \{0, 1\} & \to & G = \{0\} \\ 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & 0. \end{array}$$

Il est facile de voir que φ est surjective car $\varphi(0) = 0$ qui est l'unique élément de G, tandis que ϕ n'est pas surjective car $1 \in F$ n'a pas d'antécédant dans E.

- Supposons que φ est injective. Nous voulons démontrer que ϕ est également injective. Soit donc $e, e' \in E$ tels que $\phi(e) = \phi(e')$. Cela implique donc que

$$\varphi(e) = \psi(\phi(e)) = \psi(\phi(e')) = \varphi(e'),$$

et l'injectivité de φ implique que $e = e'$. Cela prouve donc que ϕ est injective.
Nous voyons aisément que l'exemple du point précédant est tel que φ est injective tandis que ψ ne l'est pas.

Dans cette premiere serie on va explorer la notion de cardinal d'un ensemble. Si l'ensemble est fini le cardinal est bien sur le nombre d'elements de l'ensemble. On va voir comment on definit le cardinal d'un ensemble infini: la methode est intuitive: on compte le nombre d'element d'un ensemble en faisant correspondre ses elements avec les elements d'un autre ensemble ; par exemple les doigts des deux mains...

Définition 1.1. *Soient E et F deux ensembles.*

- *Si il existe une application bijective (une bijection) $\phi : E \simeq F$ entre E et F on dit qu'ils ont le meme cardinal ou sont equipollents et on note cette relation $|E| = |F|$.*
- *Si il existe une application injective entre E et F, $\phi : E \hookrightarrow F$, on dit que le cardinal de E est plus petit que celui de F et on note cette relation $|E| \leq |F|$.*

Définition 1.2 (Ensembles finis)**.** *Soit $n \geq 1$ un entier non-nul. Si un ensemble E a meme cardinal que l'ensemble*

$$\{1, \cdots, n\}$$

(des entiers consecutifs de 1 à n) on dit que E est fini de cardinal n et on ecrit $|E| = n$ (au lieu d'ecrire $|E| = |\{1, \cdots, n\}|$). On dit que l'ensemble vide $\emptyset$ est de cardinal 0. Un ensemble E est fini si il est de cardinal n pour $n \geq 0$. On note alors ce cardinal $|E|$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Exercice 1.2 (Corr)**.** *Soient E et F des ensembles finis et*

$$F^E := \{\phi : E \to F\}$$

l'ensemble des applications de E vers F.

1. *Montrer que F^E est fini et que son cardinal vaut*
$$|F^E| = |F|^{|E|}.$$
2. *L'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E (l'ensemble des parties de E) est note*
$$\mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}.$$
Montrer que si E est fini, $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ (on etablira une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des fonctions de E a valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$, $\{0,1\}^E$).

Solution 1.2. 1. On sait que E et F sont finis, on suppose que $|E| = n$ et $|F| = k$, et on pose

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \qquad F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\},$$

c'est à dire que nous faisons des listes des éléments de E et de F. Alors une application $\phi\colon E \to F$ est uniquement charactérisée par un élément $(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)) \in F^n$: chaque élément du produit F^n est admissible et donne une unique application. Alors on a l'égalité des ensembles $F^E = F^n$ et ainsi

$$|F^E| = |F|^{|E|}.$$

En mots: pour le premier élément $e_1 \in E$ on peut choisir librement un élément de F pour son image, et ainsi on a $|F|$ choix. Mais la même chose est vraie pour le deuxième élément $e_2 \in E$, indépendamment du choix fait à la première étape, et ainsi on a $|F|$ choix pour cette étape; celui donne $|F| \cdot |F|$ choix pour les deux premières étapes. Comme on a $|E|$ étapes on déduit le résultat voulu: $|F| \cdot |F| \cdots |F|$, où le produit est pris $|E|$ fois.

2. On définit d'abord une application $\Psi \colon \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$ (l'ensemble des applications $\phi : E \to \{0,1\}$), et on prouve après que Ψ est une bijection. Soit $K \in \mathcal{P}(E)$ c'est à dire $K \subseteq E$, alors on construit l'application $\Psi(K) \colon E \to \{0,1\}$ donnant comme image pour chaque élément $e \in E$:

$$\Psi(K)(e) := \begin{cases} 0, & e \notin K \\ 1, & e \in K. \end{cases}$$

On veut maintenant prouver que Ψ est une bijection.

- *injective* On prend K, L deux sous-ensembles de E, s'ils sont différents on peut supposer qu'il y a un élément $e \in E$ tel que $e \in K$, mais $e \notin L$. Alors $1 = \Psi(K)(e) \neq \Psi(L)(e) = 0$, et alors $\Psi(K) \neq \Psi(L)$ comme applications.
- *surjective* Soit $\phi \in \{0,1\}^E$, c'est à dire $\phi \colon E \to \{0,1\}$, il faut construire un sous-ensemble K_ϕ de E tel que $\Psi(K_\phi) = \phi$. Pour cela on pose

$$K_\phi := \{e \in E \text{ telle que } \phi(e) = 1\}.$$

On a donc bien $\Psi(K_\phi)(e) = \phi(e)$ pour chaque $e \in E$, parce que, par définition,

$$\Psi(K_\phi)(e) = \begin{cases} 0, & e \notin K_\phi \text{ i.e. } \phi(e) = 0 \\ 1, & e \in K_\phi \text{ i.e. } \phi(e) = 1. \end{cases}$$

Alors $|\mathcal{P}(E)| = |\{0,1\}^E| \overset{1.}{=} |\{0,1\}|^{|E|} = 2^{|E|}$.

Exercice 1.3 (Corr)**.** *On suppose que E est fini de cardinal $|E| = n$; montrer que pour tout ensemble F le cardinal de l'ensemble des applications bijectives de E a valeurs dans F,* $\mathrm{Bij}(E,F)$ *vaut soit* 0 *soit* $n! = 1 \cdot .2 \cdot ... \cdot .n$.

Solution 1.3. On sait que $|E| = n$. Il faut prouver que

$$|\mathrm{Bij}(E,F)| = \begin{cases} 0 & |F| \neq n \\ n! & |F| = n. \end{cases}$$

On sait qu'il existe une bijection entre E et un autre ensemble F si et seulement si $|E| = |F|$. Cela prouve la première partie. Pour la deuxième partie on suppose $|F| = n$, et on cherche les bijections $E \to F$. En effet il suffit de chercher les injections $E \to F$ parce que, parmi deux ensembles finis de même cardinalité, une application est une injection si et seulement si elle est une bijection.
Pour construire une application injective $\phi \colon E = \{e_1, \dots, e_n\} \to F = \{f_1, \dots, f_n\}$ on a

- n choix pour $\phi(e_1)$,
- $n-1$ choix pour $\phi(e_2)$, comme il faut éviter $\phi(e_1)$,
- $\ldots$
- 2 choix pour $\phi(e_{n-1})$, comme il faut éviter $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$, $\ldots$, $\phi(e_{n-2})$.
- 1 choix pour $\phi(e_n)$, comme il faut éviter $\phi(e_1)$, $\phi(e_2)$, $\ldots$, $\phi(e_{n-1})$.

Alors on a $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ injections $E \to F$.

Exercice 1.4 (Corr)**.** *Soit $\phi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ des applications entre des ensembles finis E et F.*

1. *Montrer que si ϕ est injective et $|E| \geq |F|$ alors ϕ est bijective.*
2. *Montrer que si ϕ est surjective et $|E| \leq |F|$ alors ϕ est bijective.*
3. *Montrer que si ϕ et ψ sont toutes les deux injectives alors elles sont bijectives.*
4. *Montrer que si ϕ et ψ sont toutes les deux surjectives alors elles sont bijectives.*

Solution 1.4.

Remarque. Pour une application $\phi : E \to F$ entre deux ensembles finis, ϕ est injective si et seulement si $|E| = |\operatorname{Im}(\phi)|$ et ϕ est surjective si et seulement si $|F| = |\operatorname{Im}(\phi)|$. L'inégalité $|E| \geq |\operatorname{Im}(\phi)|$ est vérifiée.

1. Si ϕ est injective, nous avons $|E| = |\operatorname{Im}(\phi)|$, ce qui implique que $|E| \leq |F|$ parce que $|\operatorname{Im}(\phi)| \leq |F|$. On déduit donc du fait que $|E| \geq |F|$ que $|E| = |F|$. Nous avons donc $|\operatorname{Im}(\phi)| = |E| = |F|$, et cela implique donc que ϕ est également surjective et donc bijective.
2. Si ϕ est surjective, nous avons $|E| \geq |\operatorname{Im}(\phi)| = |F|$. On déduit donc du fait que $|E| \leq |F|$ que $|E| = |F|$. Nous avons donc $|E| = |\operatorname{Im}(\phi)|$, ce qui implique que ϕ est également injective et donc bijective.
3. L'injectivité de ϕ implique que $|E| \leq |F|$, tandis que l'injectivité de ψ implique que $|F| \leq |E|$. Par le premier point de l'exercice nous avons que ϕ et ψ sont bijectives.
4. La surjectivité de ϕ implique que $|E| \geq |F|$, tandis que la surjectivité de ψ implique que $|F| \geq |E|$. Par le second point de l'exercice nous avons que ϕ et ψ sont des bijections.

Exercice 1.5 (Corr)**.** *On considere des ensembles. Montrer que la relation "avoir le meme cardinal" est une relation*

1. *Symmetrique*
$$|E| = |F| \Longrightarrow |F| = |E|.$$

2. *Transitive* $|E| = |F|$ *et* $|F| = |G| \implies |E| = |G|$

Soit E, F, G *des ensembles quelconques. Montrer que*

$$|E| \leq |F| \text{ et } |F| \leq |G| \Longrightarrow |E| \leq |G|.$$

Solution 1.5. 1. On commence par prouver qu'il s'agit d'une relation symétrique. Soit $\phi : E \to F$ une bijection. En particulier, ϕ est une surjection. Donc a tout élément $f \in F$ est l'image d'au moins un élḿent $e \in E$. Comme ϕ est aussi une injection, cet élément est unique. On le dénote $\phi^{-1}(f)$. On doit prouver que cette application $\phi^{-1} : F \to E$ est une bijection.

On note que d'après la définition ci-dessus, l'élément $\phi^{-1}(f)$ est tel que

$$\phi(\phi^{-1}(f)) = f, \ \ \forall f \ \in F.$$

On en conclut l'injectivité. Car si $\phi^{-1}(f_1) = \phi^{-1}(f_2)$, on a $\underbrace{\phi(\phi^{-1}(f_1))}_{=f_1} = \underbrace{\phi(\phi^{-1}(f_2))}_{=f_2}$.

Pour la surjectivité on note que comme pour tout élément $e \in E$ est le seul élément dont l'image est $\phi(e)$, on a la relation

$$\phi^{-1}(\phi(e)) = e, \ \ \forall \, e \in E.$$

Cela prouve que tout élément $e \in E$ est dans l'image de ϕ^{-1}. Donc il s'agit bien d'une fonction surjective.

2. Maintenant on va prouver la transitivité. Soient $\phi : E \to F$, $\psi : F \to G$ deux fonctions bijectives. On considère la fonction composée $\psi \circ \phi : E \to G$ défini par

$$(\psi \circ \phi)(e) = \psi(\phi(e)).$$

Il suffit maintenant de prouver que cela est une fonction bijective entre E et G. Pour l'injectivité nous remarquons simplement que par l'injectivité de ϕ et ψ

$$\psi(\phi(e_1)) = \psi(\phi(e_2)) \Rightarrow \phi(e_1) = \phi(e_2) \Rightarrow e_1 = e_2.$$

Pour la surjectivité, on raisonnera de la manière suivante: Soit $g \in G$. Comme ψ surjective, il existe en élement $f \in F$ tel que $\psi(f) = g$. De la même façon, comme ϕ est aussi surjective, il existe un élement $e \in E$ tel que $\phi(e) = f$. On en déduit que

$$(\psi \circ \phi)(e) = \psi(f) = g.$$

Donc g appartient à l'image de $(\psi \circ \phi)$. Cela est vrai pour tout les éléments de G. Donc $(\psi \circ \phi)$ est aussi surjective. Nous avons trouvé une bijection entre E et G. Donc

$$|E| = |G|.$$

Exercice 1.6 ($\star\star\star$ Le Theoreme de Cantor-Bernstein-Schroeder). *En pensant au cas des ensembles finis il est tres tentant de penser que*

$$|E| \leq |F| \text{ et } |F| \leq |E| \text{ equivaut a } |E| = |F|.$$

Eh bien c'est vrai! Si il existe une injection $\phi : E \hookrightarrow F$ et une injection $\psi : F \hookrightarrow E$ alors il existe une bijection $\varphi : E \simeq F$.
Ce n'est pas du tout evident et meme plutot astucieux.
Pour cela on associe a chaque element de E (resp. de F) une suite (finie ou infinie) $(a_k)_{k\geq 0}$ (resp $(b_k)_{k\geq 0}$) d'elements appartenant alternativement a E et F:

- *Pour $e \in E$ on pose $a_0 = e$, et on pose $a_1 \in F$ l'unique antecedent de e par ψ si cet antecedent existe; si cet antecedent n'existe pas on interrompt la suite. Si a_1 existe, on pose $a_2 \in E$ l'unique antecedent de a_1 par ϕ si il existe; si il n'existe pas on interrompt la suite. Si a_2 existe, on pose $a_3 \in F$ l'unique antecedent de a_2 par ψ si il existe; si il n'existe pas on interrompt la suite...et on continue ainsi a l'infini ou jusqu'a ce qu'on s'arrete.*

- *Pour $f \in F$ on pose $b_0 = f$, et on pose $b_1 \in E$ l'unique antecedent de f par ϕ si cet antecedent existe; si cet antecedent n'existe pas on interrompt la suite. Si b_1 existe, on pose $b_2 \in F$ l'unique antecedent de b_1 par ψ si il existe; si il n'existe pas on interompt la suite. Si b_2 existe, on pose $b_3 \in E$ l'unique antecedent de b_2 par ϕ si il existe; si il n'existe pas on interrompt la suite...et on continue ainsi a l'infini ou jusqu'a ce qu'on s'arrete.*

On note $E_p, E_i, E_\infty \subset E$ les sous-ensembles formes des elements de E dont la suite associe est soit

- *finie et se termine sur un indice n pair (par exemple une suite a un element (e_0) ou e_0 n'a pas d'antecedent par ψ dans F),*

- *finie et se termine sur un indice n impair (par exemple une suite a deux elements (e_0, f_1) ou f_1 n'a pas d'antecedent par ϕ dans E),*

- *infinie.*

On note de meme $F_p, F_i, F_\infty \subset F$ les sous-ensembles formes des elements de F dont la suite associe est soit

- *finie et se termine sur un indice n pair,*

- *finie et se termine sur un indice n impair ,*

- *infinie.*

1. *Pourquoi les elements a_1, $a_2, a_3, \cdots$, quand ils existent sont ils uniques ?*

2. *Montrer que E_p et F_i sont en bijection; que F_p et E_i sont en bijection et que E_∞ et F_∞ egalement (on regardera ce qui ce passe pour les sous-ensemble $E_0, E_2 \subset E_p$, $E_1, E_3 \subset E_i$ et $F_0, F_2 \subset F_p$, $F_1, F_3 \subset F_i$ les elements dont les suites associes se termine a l'indice* $0, 2, 1, 3$*).*

3. *Conclure.*

Solution 1.6. 1. Lorsqu'ils existent, les éléments a_1, a_2, $a_3, \ldots$ sont uniques car les applications ϕ et ψ sont injectives.

2. Nous allons montrer que $|E_p| = |F_i|$, $|E_i| = |F_p|$ et $|E_\infty| = |F_\infty|$. On rappelle pour cela que deux ensembles A et B sont en bijection si et seulement s'il existe deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to A$ tels que $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.

   a) $|E_p| = |F_i|$: On définit les deux applications suivantes

$$\begin{aligned} \Phi_p : E_p &\longrightarrow \quad F_i \\ e &\longmapsto \phi(e), \end{aligned}$$

   ainsi que

$$\begin{aligned} \Psi_i : F_i &\longrightarrow \quad E_p \\ f &\longmapsto \phi^{-1}(f), \end{aligned}$$

   où $\phi^{-1}(f)$ désigne l'unique élément e de E tel que $\phi(e) = f$. Il s'agit premièrement de voir que ces deux applications sont bien définies, c'est-à-dire que $\Phi_p(E_p) \subset F_i$ et $\Psi_i(F_i) \subset E_p$. Or si $e \in E_p$ a comme suite associée $(e, a_1, \ldots, a_{2n})$, alors la suite associée à $\Phi_p(e) = \phi(e)$ est $(\phi(e), e, a_1, \ldots, a_{2n})$ qui est bien de longueur impaire. De même, si $f \in F_i$ a comme suite $(f, b_1, \ldots, b_{2n+1})$, alors $\Psi_i(f) = \phi^{-1}(f)$ possède comme suite $(b_1, ..., b_{2n+1})$ qui est bien de longueur paire. Finalement, on a par construction

$$\Phi_p \circ \Psi_i = Id_{F_i} \quad \text{et} \quad \Psi_i \circ \Phi_p = Id_{E_p},$$

   d'où $|E_p| = |F_i|$.

   b) $|E_i| = |F_p|$: On définit cette fois

$$\begin{aligned} \Phi_i : E_i &\longrightarrow \quad F_p \\ e &\longmapsto \psi^{-1}(e), \end{aligned}$$

   puis

$$\begin{aligned} \Psi_p : F_p &\longrightarrow \quad E_i \\ f &\longmapsto \psi(f). \end{aligned}$$

   On vérifie exactement comme au point *a)* que les deux applications sont bien définies et que $\Psi_p \circ \Phi_i = Id_{E_i}$ et $\Phi_i \circ \Psi_p = Id_{F_p}$.

c) $|E_\infty| = |F_\infty|$: On pose

$$\begin{aligned} \Phi_\infty : E_\infty &\longrightarrow F_\infty \\ e &\longmapsto \phi(e), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_\infty : F_\infty &\longrightarrow E_\infty \\ f &\longmapsto \phi^{-1}(f). \end{aligned}$$

Encore une fois, il est facile de voir que ces deux applications sont bien définies et qu'elles sont inverse l'une de l'autre.

3. Pour conclure que $|E| = |F|$, on remarque que les deux ensembles admettent les partitions suivantes

$$E = E_p \sqcup E_i \sqcup E_\infty \quad \text{et} \quad F = F_i \sqcup F_p \sqcup F_\infty$$

où le symbole $\sqcup$ signifie "union disjointe". Puisque l'on a montré que $|E_p| = |F_i|$, $|E_i| = |F_p|$ et $|E_\infty| = |F_\infty|$, on conclut que $|E| = |F|$. En effet, il suffit pour cela de considérer l'application $\Phi : E \to F$ définie par

$$\Phi(e) = \begin{cases} \Phi_p(e) & \text{si} \quad e \in E_p, \\ \Phi_i(e) & \text{si} \quad e \in E_i, \\ \Phi_\infty(e) & \text{si} \quad e \in E_\infty \end{cases}$$

qui admet comme inverse l'application $\Psi : F \to E$ définie par

$$\Psi(f) = \begin{cases} \Psi_i(f) & \text{si} \quad f \in F_i, \\ \Psi_p(f) & \text{si} \quad f \in F_p, \\ \Psi_\infty(f) & \text{si} \quad f \in F_\infty. \end{cases}$$

Définition 1.3 (Ensembles denombrables, Corr)**.** *Un ensemble infini qui a meme cardinal que $\mathbb{N}$ est dit denombrable.*

Exercice 1.7. *Quelques ensembles denombrables.*

1. *Montrer que pour qu'un ensemble infini E soit denombrable il suffit d'exhiber une injection $E \hookrightarrow \mathbb{N}$.*

2. *Montrer que $\mathbb{Z}$ est denombrable.*

3. *Montrer directement que $\mathbb{N}^2$ est denombrable (on pourra faire un dessin).*

4. *Montrer que $\mathbb{N}^2$ est denombrable (deuxieme methode); soit $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \cdots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que*

$$\mathcal{P}^2 \text{ denombrable } \Longrightarrow \mathbb{N}^2 \text{ denombrable }.$$

Etablir ce dernier fait en considerant l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &\to \mathbb{N} \\ (p, q) &\mapsto p^2 q. \end{aligned}$$

5. *En deduire que $\mathbb{Q}$ est denombrable.*

6. *On appliquera un raisonnement par induction pour montrer que pour tout $k \geq 3$, $\mathbb{N}^k$ est denombrable.*

Solution 1.7. 1. On va montrer que pour tout ensemble infini, il existe une injection $\mathbb{N} \hookrightarrow E$. On définit une fonction par récurrence de la manière suivante:

Comme l'ensemble E est infini, en particulier il n'est pas vide. Donc nous pouvons choisir un élément $x_1 \in E$. On posera $\phi(1) = x_1$. On suppose maintenant que l'on a choisi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ tels que $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et que l'on a posé $\phi(i) = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Comme l'ensemble E est infini, les élément $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne constituent pas la totalité de l'ensemble E. C'est-à-dire, il existe un élément $x_{n+1} \in E$ tel que $x_{n+1} \neq x_i$ pour tout $i \leq n$. On pose alors $\phi(n+1) = x_{n+1}$.

En procédant comme cela, on a produit une fonction $\phi : \mathbb{N} \to E$ tel que, par construction, $\phi(i) \neq \phi(j)$ pour $i \neq j$. Autrement dit, ϕ est injective. Donc pour demontrer qu'un ensemble infini E soit denombrable il suffit (en utilisant l'Exercise 1.6) d'exhiber une application injective $E \hookrightarrow \mathbb{N}$.

2. On construit une fonction $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui envoie 0 dans 0, tout les entiers positifs dans les entiers positifs *paires* et tous les entiers négatifs dans les entiers positifs *impaires* de la façon suivante

$$\phi(n) = \begin{cases} 2n, & \text{si } n \geq 0, \\ -2n-1, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Juste pour avoir une idée, on a

$$\{\ldots \phi(-2), \phi(-1), \phi(0), \phi(1), \phi(2) \ldots\} = \{\ldots 3, 1, 0, 2, 4, \ldots\}.$$

D'après la question précédente, il suffit de montrer que cela est une fonction injective. Supposons que $\phi(m) = \phi(n)$, alors soit on a $m, n \geq 0$, soit on a $m, n < 0$, car sinon on serait en train de dire qu'un entier paire est égal a un entier impaire. Donc soit on a $2m = 2n$ et donc $m = n$, soit on a $-2m - 1 = -2n - 1$ et donc $m = n$. Alors la fonction ϕ est bien injective. Comme $\mathbb{Z}$ est un ensemble infini, d'après le point précédent, $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

3. Pour définir une application injective

$$\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N},$$

on peut considérer la fonction de couplage de Cantor définie par

$$\pi(x, y) = y + \sum_{i=0}^{x+y} i = y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}.$$

(Voir Figure 1 pour une illustration)

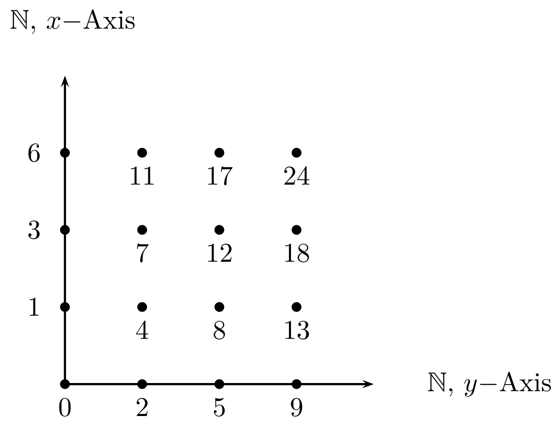

Figure 1: fonction de couplange de Cantor

Montrons que l'application est injective. Soient pour cela $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_1 + y_1 > x_2 + y_2$. Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned}
\pi(x_1, y_1) &= y_1 + \frac{(x_1+y_1)(x_1+y_1+1)}{2} \\
&\geq \frac{(x_1+y_1)(x_1+y_1+1)}{2} \\
&\geq \frac{(x_2+y_2+1)(x_2+y_2+2)}{2} \\
&= \frac{(x_2+y_2)^2 + 3(x_2+y_2) + 2}{2} \\
&> \frac{(x_2+y_2)^2 + 3(x_2+y_2)}{2} \\
&= \frac{(x_2+y_2)^2 + (x_2+y_2)}{2} + (x_2+y_2) \\
&= \frac{(x_2+y_2)(x_2+y_2+1)}{2} + (x_2+y_2) \\
&\geq \frac{(x_2+y_2)(x_2+y_2+1)}{2} + (y_2) \\
&= \pi(x_2, y_2) \Rightarrow \pi(x_1, y_1) > \pi(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

De l'autre cote, si $x_2 + y_2 > x_1 + y_1$ on a $\pi(x_2, y_2) > \pi(x_1, y_1)$. Alors on a $\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2)$ seulement si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Supposons que $\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2)$. Avec $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ on a

$$\begin{aligned}
&\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2) \\
\Leftrightarrow\ & y_1 + \frac{(x_1+y_1)(x_1+y_1+1)}{2} = y_2 + \underbrace{\frac{(x_2+y_2)(x_2+y_2+1)}{2}}_{=\frac{(x_1+y_1)(x_1+y_1+1)}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2
\end{aligned}$$

Et π est bien injective.

4. La fonction $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ donné par l'identité, *i.e.* $\phi(p) = p$. Cela est évidemment une fonction injective. Alors par le premier point, comme $\mathcal{P}$ est infini, on a que $|\mathcal{P}| = |\mathbb{N}|$. Soit ψ une bijection entre $\mathcal{P}$ et $\mathbb{N}$, cela peut être étendu a une bijection entre $\Psi : \mathcal{P}^2 \to \mathbb{N}^2$ de la forme suivante

$$\Psi(p, q) := (\psi(p), \psi(q)).$$

Donc nous avons que $|\mathcal{P}^2| = |\mathbb{N}^2|$. On va maintenant prouver que l'ensemble $\mathcal{P}^2$ est dénombrable. Il suffit de montre que l'application décrite dans l'exercice

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (p,q) & \mapsto & p^2 q. \end{array}$$

est une injection (encore une fois on utilise le premier point). En effet, si

$$p_1^2 q_1 = p_2^2 q_2,$$

avec p_1, p_2, q_1, q_2 des nombres premiers, alors grace au théorème fondamental de l'arithmétique (factorization unique), on a forcément que $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. Ceci implique que la fonction est effectivement injective.

5. Considérons la fonction $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^2$ de la façon suivante: Pour chaque rationnel x, on choisit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \frac{a}{b}$ et posons $\phi(x) = (a, b)$. Tel fonction est injective, car si $\phi(x) = \phi(y)$, alors $x = \frac{a}{b} = y$. Nous savons déjà que $\mathbb{Z}$ est dénombrable, alors

$$|\mathbb{Z}^2| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|.$$

Soit $\psi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ une bijection entre $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{N}$. Alors la fonction $\psi \circ \phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ est une composition de fonctions injectives et donc injective (voir l'exercice 1.1). Comme $\mathbb{Q}$ est infini, on a prouvé qu'il est aussi dénombrable.

6. On va prouver que $\mathbb{N}^k$ dénombrable implique $\mathbb{N}^{k+1}$ dénombrable.

   Supposons que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable. On considère une bijection $\phi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ et on définit une application $\psi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^2$ donnée par

$$(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (\phi(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}).$$

Il est très facile de vérifier que cela nous donne une bijection entre $\mathbb{N}^{k+1}$ et $\mathbb{N}^2$. Donc on a que

$$|\mathbb{N}^{k+1}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|.$$

Donc $\mathbb{N}^{k+1}$ est aussi dénombrable. Alors on a prouvé

$$\mathbb{N}^k \text{ dénombrable} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{N}^{k+1} \text{ dénombrable, pour tout } k \geq 2.$$

Comme on sait déjà que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on a de même pour tout $k \geq 3$.

Exercice 1.8 (Cantor). *L'intervalle* $[0,1[$ *n'est pas denombrable. On donne ici le celebre argument diagonal.*
On suppose qu'il existe une bijection qu'on note $\phi : \mathbb{N} \simeq [0,1[$. *Ainsi pour tout* $n \geq 1$, *on dispose d'un nombre reel* $\phi(n) \in [0,1[$ *dont on note l'ecriture decimale*

$$\phi(n) = 0, a_{n,1}a_{n,2} \cdots a_{n,k} \cdots , \ a_{n,k} \in \{0, \cdots , 9\}.$$

On (Cantor) considere le reel

$$C = 0, a_1a_2 \cdots a_k \cdots \in [0,1[$$

dont l'ecriture decimale est donnee pour $k \geq 1$ *par*

$$a_k = \begin{cases} a_{k,k} + 1 & \textit{si } a_{k,k} < 9 \\ 0 & \textit{si } a_{k.k} = 9 \end{cases}.$$

Obtenir une contradiction en etudiant l'entier n *correspondant a* C *via la bijection* ϕ *et ses liens avec l'ecriture decimale de* C.

Solution 1.8. On va prouver que $C \neq \phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela impliquera que la fonction ϕ n'est pas surjective. D'où la contradiction.
Supposons que $C = \phi(n)$. Alors il y a deux possibilités. Rappelons que tout nombre réel possède au plus deux représentations décimales. En comparant le $n-$ième chiffre de la représentation décimale de ces deux nombre, on a $a_{n,n}$ pour $\phi(n)$ et a_n pour C, où

$$a_k = \begin{cases} a_{k,k} + 1 & \text{si } a_{k,k} < 9 \\ 0 & \text{si } a_{k.k} = 9. \end{cases}$$

Donc ces chiffres sont forcément distincts. On a envie de dire que cela implique que $\phi(n) \neq C$, mais il a une subtilité. C'est que certains nombres réels possèdent deux représentations décimales distinctes (c'est le cas pour les nombres dont la représentation décimales finit par $00\ldots$ ou $99\ldots$). Par exemple

$$0.123000000\ldots = 0.122999999\ldots$$

Or il suffit de montrer que le nombre C n'a pas une telle représentation décimale. Pour cela, il suffit par exemple de montrer que dans la réprésentation décimale de C il a une infinité de chiffres différents de 0 et 9. D'après la surjectivité de ϕ il existe des entiers x_i tels que

$$\begin{cases} \phi(x_1) = 0.211111\dots \\ \phi(x_2) = 0.121111\dots \\ \phi(x_3) = 0.112111\dots \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Par la définition de C, le x_i-iéme chiffre de la représentation décimale de C est soit égal à 2 ou 3.
On a demontré que la représentation décimale de C contient une infinité de chiffres que sont égaux á 2 ou 3. Alors C n'est pas un nombre avec deux représentations décimales distinctes est donc on a terminé.