

Corrigé 4 du mardi 11 octobre 2016

Exercice 1.

1.) Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_0 = 0, x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$ est de Cauchy.
On a, pour $n, m \geq 1$:

$$|x_{n+m} - x_n| = \left|\frac{(-1)^{n+m}}{n+m} - \frac{(-1)^n}{n}\right| = \left|\frac{(-1)^m}{n+m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{n(-1)^m - (n+m)}{(n+m)n}\right|$$

et donc

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{m+2n}{(n+m)n} = \frac{1}{n+n^2/m} + \frac{2}{n+m} \leq \frac{3}{n},$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, on choisit un entier N tel que $N > \frac{3}{\epsilon}$ et on vérifie que $|x_p - x_q| < \epsilon$ si $p, q > N$.

2.) Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ n'est pas de Cauchy, i.e.:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists m, n \geq N \text{ tel que } |x_n - x_m| > \epsilon.$$

Il suffit de prentre $\epsilon = 1$ et $n = N, m = N+1$ pour avoir $|x_m - x_n| = 2 > 1$.

3.) Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée récursivement par $x_{n+1} = \dfrac{x_n+1}{x_n+2}$, $n \geq 0,\ x_0 = 1$ est de Cauchy et calculons sa limite.
Pour $n > 0$, on a, puisque $x_n > 0$, $\forall n$:

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{x_n+1}{x_n+2} - \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}\right| = \left|\frac{(x_n+1)(x_{n-1}+2) - (x_{n-1}+1)(x_n+2)}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)}\right| = \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)}\right|$$

et donc

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|.$$

Par conséquent:

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}}\Big) \leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0|,$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. Sa limite x vérifie $x = \frac{x+1}{x+2}$ ou encore $x^2 + x - 1 = 0$ et donc $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$.

4.) On considère la suite donnée par $8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, \ldots$. Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite?
Considérons la suite $1, 1.1, 1.11, 1.111, \ldots$ dont le terme général est $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k$, $n \geq 0$ et qui converge vers $\frac{1}{1-1/10} = 10/9$ (c.f. ex. 3, série 4 du jeudi 13 septembre 2016 !). On en déduit que la suite donnée converge vers $80/9 = 9 - 1/9$.

Exercice 2.

Tout d'abord remarquons que

$$x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left((n+8)\frac{\pi}{4}\right)\cos\left((n+8)\frac{\pi}{4}\right),$$

ce qui montre que $x_n = x_{n+8}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On obtient ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_7\} = \frac{1}{2},$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_7\} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3.

Tout d'abord on remarque que $0 \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ce qui montre en utilisant les définitions de $\limsup$ et $\liminf$ que $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leq 1$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = 1$ on obtient $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{1}{2n}\right) = 0$ on obtient $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exercice 4.

Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = 0$ et $x_n = \sqrt[n]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
Démonstration :

1) Montrons pour commencer que $\forall \delta > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(1+\delta)^n} = 0$.
On applique le critère de d'Alembert:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{n+1}{(1+\delta)^{n+1}}}{\dfrac{n}{(1+\delta)^n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(1+\delta)^n}{n(1+\delta)^{n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)}{(1+\delta)} = \frac{1}{(1+\delta)} < 1, \quad \forall \delta > 0, \\
\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\delta)^n} &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\left| \frac{n}{(1+\delta)^n} \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$
En particulier en prenant $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\begin{aligned}
\left| \frac{n}{(1+\delta)^n} \right| = \frac{n}{(1+\delta)^n} &< 1, \qquad \forall n > N \\
\Leftrightarrow \qquad n &< (1+\delta)^n, \quad \forall n > N.
\end{aligned}$$

2) Montrons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon, \quad \forall n > N.$$
Par le point 1), on a l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n < (1+\epsilon)^n, \quad \forall n > N \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt[n]{n} - 1 = |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon, \quad \forall n > N.$$
On a donc prouvé que
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$\square$