13 décembre 2012

Corrigé test

Exercice 1. (10 points)

1. On définit une application $\psi : \mathbb{C}^3 \to M_2(\mathbb{C})$ par $\psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+iy & y-iz \\ ix-y & 0 \end{pmatrix}$. On admet que ψ est une application $\mathbb{C}$-linéaire. Soit C la base canonique (ordonnée) de $\mathbb{C}^3$ et $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ une base ordonnée de $M_2(\mathbb{C})$. (Rappel: E_{ij} est la matrice dont le seul coefficient non nul est $(E_{ij})_{ij} = 1$.)
   a) Trouver $\ker\psi$, $\dim(\ker\psi)$ et le rang de ψ.
   b) Trouver une partie génératrice de $\operatorname{Im}\psi$.
   c) Trouver la matrice de ψ par rapport aux bases C et B, c'est-à-dire trouver $(\psi)_C^B$.
2. Soit C la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $B = \{1+t, t^2+t, it^2\}$ une base de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$. Soit $\theta : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire dont la matrice par rapport aux bases données est
$$(\theta)_C^B = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix}.$$
   Trouver le polynôme $\theta((1,-1,i)) \in \mathbb{C}[t]$.

Solution 1. 1. a)
$$\ker\psi = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid \psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$
$$= \{(x,y,z) \mid x+iy = 0, y-iz = 0, ix-y = 0\} = \{(x, ix, x) \mid \ \in \mathbb{C}\}.$$
Comme tout vecteur dans $\ker\psi$ est un multiple scalaire de $(1,i,1)$, une base de $\ker\psi$ est $\{(1,i,1)\}$. De plus cela montre que $\dim\ker\psi = 1$. Par le théorème du rang, le rang de ψ est égal à $3-1=2$.

b) $\operatorname{Im}\psi = \{\psi(v) \mid v \in \mathbb{C}^3\}$ et tout $v \in \mathbb{C}^3$ etant une combinaison linéaire des vecteurs dans la base canonique C, l'image de v est une combinaison linéaire des vecteurs $\{\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3)\}$. Une partie génératrice est donc $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

c) On place les coordonnées de $\psi(e_i)$ par rapport à la base B dans la i-ème colonne :
$$(\psi)_C^B = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $(\theta((1,-1,i)))_B = (\theta)_C^B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+2i \\ -1+i \end{pmatrix}$. Donc
$$\theta((1,-1,i)) = 0 \cdot (1+t) + (1+2i)(t^2+t) + (-1+i)(it^2) = it^2 + (1+2i)t.$$

Exercice 2. (10 points)

1. Soit K un corps, $A \in M_n(K)$, et V un K-espace vectoriel. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base ordonnée de V.

a) On définit une application $\varphi : V \to M_{n\times 1}(K)$ par $\varphi(v) = (v)_B$. Démontrer que φ est une application K-linéaire.

b) On pose $V^A = \{v \in V \mid A \cdot (v)_B = (v)_B\}$. Démontrer que V^A est un sous-espace vectoriel de V.

c) Dans le cas particulier où $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, B est la base canonique, et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, trouver une base et la dimension de V^A.

2. Soit

$$W = \mathrm{Vect}\left((1,2,1,0), (0,1,2,1), (0,1,0,0), (3,6,1,-1)\right) \subset \mathbb{R}^4.$$

Démontrer que $\{(1,0,1,0), (0,0,2,1), (0,1,0,0)\}$ est une base de W et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution 2. 1. a) Soient $u, v \in V$ et $\lambda \in K$. On a $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n b_i e_i$. Donc

$$\lambda u + v = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i + b_i) e_i,$$

et

$$\phi(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + b_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda \phi(u) + \phi(v).$$

b) V^A n'est pas vide car $A \cdot (0)_B = (0)_B$. Soit $u, v \in V^A$ et $\lambda \in K$. Donc $A \cdot (u)_B = (u)_B$ et $A \cdot (v)_B = (v)_B$. On calcule $A \cdot (\lambda u + v)_B$: Par la partie a), on a que $(\lambda u + v)_B = \lambda (u)_B + (v)_B$. Donc $A \cdot (\lambda u + v)_B = A(\lambda (u)_B + (v)_B) = \lambda A \cdot (u)_B + A \cdot (v)_B$, par les propriétés de la multiplication des matrices. Enfin, $\lambda A \cdot (u)_B + A \cdot (v)_B = \lambda (u)_B + (v)_B = (\lambda u + v)_B$ et $\lambda u + v \in V^A$, ce qui montre que V^A est un sous-espace vectoriel.

c) Pour $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v \in V^A$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, si et seulement si $2x + y = x$, $-x + y + z = y$ et $x + y + z = z$. Ces équations sont vérifiées si et seulement si $y = -x$ et $z = x$. Donc une base de V^A est $\{(1, -1, 1)\}$ et sa dimension est 1.

2. Posons $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,0,2,1)$ et $v_3 = (0,1,0,0)$. D'abord on montre que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants Si $a(1,0,1,0) + b(0,0,2,1) + c(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$ alors on a que $a = 0$, $c = 0$ et $b = 0$.

Ensuite on montre que la dimension de W est trois. Une méthode consiste à appliquer la méthode de Gauss: on place les vecteurs dans les lignes d'une matrice et on réduit à une forme échelonnée. Le rang ligne de la matrice qui résulte est la dimension de W.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_{41}(-3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_{32}(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{43}(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme le rang ligne de la matrice échelonnée est 3, $\dim W = 3$.

Si on n'utilise pas la méthode de Gauss pour échelonner le système, on résout l'équation $a(1,2,1,0) + b(0,1,2,1) + c(0,1,0,0) + d(3,6,1,-1) = (0,0,0,0)$ et on trouve que $b = d$, $a = -3d$ et $c = -d$. On déduit, en posant $d = 1$, que $(3,6,1,-1) = 3(1,2,1,0) - (0,1,2,1) + (0,1,0,0)$. Donc

$W = \text{Vect}((1,2,1,0),(0,1,2,1),(0,1,0,0))$. On vérifie ensuite facilement que les trois vecteurs $(1,2,1,0),(0,1,2,1),(0,1,0,0)$ sont linéairement indépendants et forment donc une base de W. D'où $\dim W = 3$.

Enfin, il faut voir que $v_i \in W$ pour $1 \le i \le 3$: pour v_3 c'est clair. $v_2 = (0,1,2,1)-(0,1,0,0) \in W$ et $v_1 = (1,2,1,0) - 2(0,1,0,0) \in W$. Comme $\dim W = 3$ et v_1, v_2, v_3 sont trois vecteurs linéairement indépendants dans W, ils forment une base de W.

En plus, il est clair d'après la forme de la matrice échelonnée que e_4 n'appartient pas à W et donc on peut compléter la base en rajoutant e_4. On peut aussi compléter la base par e_1 ou e_3, par exemple. La réponse ici n'est pas du tout unique.

Exercice 3. (8 points)

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_p(K)$ et $B = (b_{k\ell}) \in M_q(K)$. Supposons que $a_{1j} = 0$ pour tout $j \ge 1$ et $b_{j1} = 0$ pour tout $j \ge 1$. Montrer que pour tout $C \in M_{p\times q}(K)$, $(ACB)_{ij} = 0$ si $i = 1$ ou si $j = 1$.

2. Soient U, V et W des K-espaces vectoriels de dimension finie, et soient encore $\psi : U \to V$ et $\varphi : V \to W$ deux applications K-linéaires. Supposons que les quatre conditions suivantes sont vérifiées:

   i. $\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\psi = 0$;

   ii. φ est surjective;

   iii. ψ est injective; et

   iv. $\dim U = \dim W$.

   Démontrer que $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$.

Solution 3. 1. On considère la première ligne de la matrice ACB :

$(ACB)_{1k} = (A(CB))_{1k} = \sum_{j=1}^{p} a_{1j}(CB)_{jk} = 0$ car $a_{1j} = 0$ pour tout j. On considère aussi la première colonne de la matrice ACB :

$(ACB)_{k1} = ((AC)B)_{k1} = \sum_{j=1}^{q}(AC)_{kj}b_{j1} = 0$, car $b_{j1} = 0$ pour tout j.

2. Pour montrer que $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$ on doit montrer

$$V = \ker\varphi + \operatorname{Im}\psi \text{ et } \ker\varphi \cap \operatorname{Im}\psi = 0.$$

Comme la deuxième condition est une des conditions données, on doit simplement montrer que $V = \ker\varphi + \operatorname{Im}\psi$. On a une inclusion: $\ker\varphi + \operatorname{Im}\psi \subset V$ On calcule la dimension du sous-espace $\ker\varphi + \operatorname{Im}\psi$:

On sait que $\dim(\ker\varphi + \operatorname{Im}\psi) = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\psi - \dim(\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\psi) = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\psi$. Comme ψ est injective, $\dim\operatorname{Im}\psi = \dim U$ et comme φ est surjective, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim W$ (les deux égalités découlent du théorème du rang). Mais on a aussi $\dim U = \dim W$. Par le théorème du rang, $\dim V = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim\ker\varphi + \dim W = \dim\ker\varphi + \dim U = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\psi = \dim(\ker\varphi + \operatorname{Im}\psi)$.

Donc on a bien que le sous-espace $\ker\varphi + \operatorname{Im}\psi$ a la même dimension que V et donc est égal à V.

Exercice 4. (11 points) Soit K un corps.

1. Vrai-faux: Seule la réponse sera évaluée, aucune justification n'est demandée. **Attention:** Réponse correcte 1 point, réponse fausse -1 point, aucune réponse, 0 point.

Vrai Faux

☐ ☐ Soit V un K-espace vectoriel avec sous-espaces $V_1, V_2, \dots, V_k$. Si $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$, alors $V_i \cap V_j = 0$ pour tout $i \ne j$, $1 \le i, j \le k$.

☐ ☐ Soit $\phi : V \to V$ une application K-linéaire d'un K-espace vectoriel V. Alors $\ker\phi \cap \operatorname{Im}\phi$ est un sous-espace de V.

☐ ☐ Soit $\phi : V \to V$ une application K-linéaire d'un K-espace vectoriel V. Si $\ker \phi \cap \operatorname{Im} \phi = \{0\}$ alors ϕ est injective.

☐ ☐ Soit $\phi : V \to V$ une application K-linéaire injective. Alors l'application $\phi : V \to \operatorname{Im} \phi$ est bijective. (Attention: V n'est pas nécessairement de dimension finie.)

☐ ☐ L'ensemble $\{t+1, t^2+2, t^2+t\}$ est une base de $\mathbb{F}_3[t]_{\leq 2}$.

☐ ☐ Soient $A \in M_n(K)$ et $B, C \in M_{n\times m}(K)$. Si $AB = AC$ alors $B = C$.

☐ ☐ Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie avec sous-espaces W et U. Alors $\dim(U+W) > \dim U$.

☐ ☐ Soit $\{v_1, v_2, v_3\}$ une partie libre d'un K-espace vectoriel V de dimension finie, alors il existe une base de V contenant l'ensemble $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3\}$.

☐ ☐ Soit $\psi : K^n \to K^m$ une application K-linéaire. Si ψ est injective alors $n < m$.

2. Donner une définition précise de chacune des notions suivantes:

   i. Qu'est-ce qu'une *partie liée* dans un espace vectoriel ?

   ii. Qu'est-ce que le *noyau* d'une application linéaire d'espaces vectoriels ?

Solution 4. 1.

- Vrai, car une des conditions pour que la somme soit directe est que $V_i \cap (\sum_{k\neq i} V_k) = 0$. Comme pour $j \neq i$, $V_j \subset (\sum_{k\neq i} V_k)$, alors $V_i \cap V_j \subset V_i \cap (\sum_{k\neq i} V_k) = 0$.
- Vrai. L'intersection de sous-espaces est un sous-espace.
- Faux. Prenons ϕ la projection orthogonale sur le plan xy dans $\mathbb{R}^3$. Donc ϕ n'est pas injective, son noyau est l'axe z et son image est le plan xy, qui ont l'intersection égale au vecteur nul.
- Vrai. L'application est injective par l'hypothèse et surjective, car pour tout $v \in \operatorname{Im} \phi$, il existe $x \in V$ tel que $v = \phi(x)$.
- Faux. Ces trois vecteurs sont linéairement dépendants car: $t + 1 = t^2 + t - (t^2 + 2)$ (dans $\mathbb{F}_3[t]$).
- Faux. Considérerar exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$.
- Faux. prenons $W \subset U$ et donc $U + W = U$ et $\dim(U + W) = \dim U$.
- Vrai. On montre que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants: supposons que

  $$a(v_1 + v_2) + b(v_2 + v_3) + cv_3 = 0.$$

  Donc $av_1 + (a + b)v_2 + (b + c)v_3 = 0$. Par l'indépendance linéaire de v_1, v_2, v_3, on a que $a = 0 = a + b = b + c$. De ces trois egalités on déduit que $a = 0 = b = c$ et donc les trois vecteurs sont linéairement indépendants. On peut donc prolonger en une base de V.
- Faux. Ce qui est vrai est que $n \leq m$. Mais on peut trés bien avoir $n = m$, par exemple dans le cas d'une application bijective, qui est en particulier injective.

2. i. Soit V un K-espace vectoriel et soit $S \subset V$ un sous-ensemble. On dit que S est une partie liée s'il existe $v_1, \dots, v_t$ dans S et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ dans K, non tous nuls, tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_t v_t = 0$.

   ii. Soient V et W deux K-espaces vectoriels. Soit $\phi : V \to W$ une application K-linéaire. Le noyau de ϕ, noté $\ker \phi$, est l'ensemble $\ker \phi = \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$.