

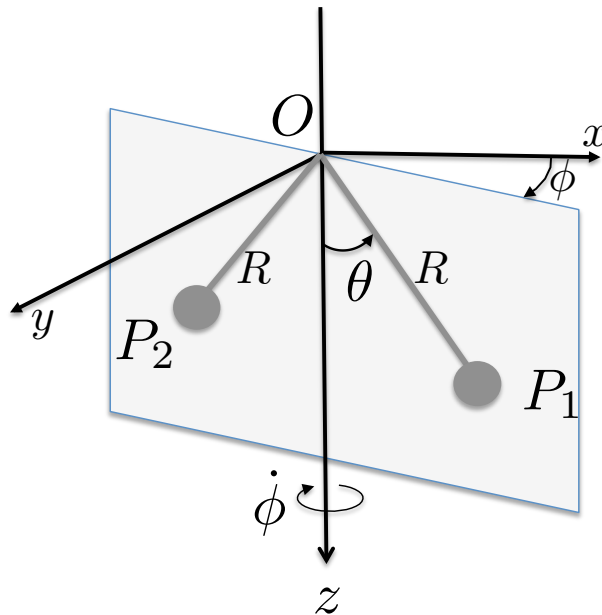
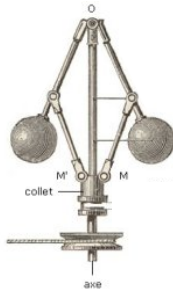
*fait à la maison*

Nom :

Prénom :

N° Sciper :

**A. Régulateur de Watt (4/10 points)**



On modélise un régulateur de Watt (voir esquisse à gauche) par deux points matériels, pesants, de masses  $m$ , reliés chacun à un point  $O$  de l'axe de rotation  $Oz$  par des tiges rigides sans masses, de longueurs  $R$ . Les masses sont astreintes à se déplacer dans un plan en rotation autour de l'axe  $Oz$  avec une vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  comme indiqué. On suppose que le régulateur est sans frottement. La vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  peut changer, par l'action sur le plan en rotation d'une corde et d'une poulie liée à ce plan, par exemple. L'axe  $Oz$  est vertical, orienté vers le bas, dans le sens de la pesanteur caractérisée par le vecteur  $\mathbf{g}$ . Le système d'axes cartésiens  $Oxyz$  correspond à la définition conventionnelle des coordonnées sphériques.

Dans ce problème, on va analyser le comportement mécanique de ce système en se concentrant uniquement sur le point matériel indiqué  $P_1$  et on utilisera les coordonnées sphériques et le repère associé (qui n'est pas représenté sur le dessin).

*Questions et réponses au verso !*

1. **(0.5 point)** Etablir le bilan des forces agissant sur  $P_1$ . Représenter chacune des forces par une flèche sur le dessin et donner leurs projections sur le repère associé aux coordonnées sphériques. On a une force de réaction du plan en rotation,  $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{e}}_\phi$ , la force de traction de la tige  $\mathbf{T} = -T\hat{\mathbf{e}}_r$  et la pesanteur  $m\mathbf{g} = mg\hat{\mathbf{z}}$ .

2. **(1.0 point)** Ecrire les équations du mouvement pour  $P_1$  :

$$(\hat{\mathbf{e}}_r) \quad -mR^2\dot{\theta}^2 - mR\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = -T + mg \cos \theta$$

$$(\hat{\mathbf{e}}_\theta) \quad mR^2\ddot{\theta} - mR\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -mg \sin \theta$$

$$(\hat{\mathbf{e}}_\phi) \quad mR\ddot{\phi} \sin \theta + 2mR\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta = N$$

3. **(0.5 point)** A quoi est égale la dérivée par rapport au temps de la composante  $z$  du moment cinétique en O du point matériel  $P_1$ , en termes des forces extérieures appliquées à  $P_1$  ? C'est la projection sur  $Oz$  du moment des forces extérieures :

$$\frac{d(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L}_O)}{dt} = NR \sin \theta$$

4. **(1.0 point)** Exprimer l'énergie mécanique du point matériel en coordonnées sphériques, en prenant  $O$  comme point de référence du potentiel.

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta$$

5. **(0.5 point)** Trouver l'angle  $\theta_0$  à l'équilibre quand  $\dot{\phi}$  est constant, sous la condition  $\theta \neq 0$ .

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{R\dot{\phi}^2}$$

6. **(0.5 point)** On peut obtenir à nouveau l'accélération du point matériel  $P_1$  en appliquant le formalisme du mouvement relatif, prenant le plan vertical et sa normale comme référentiel relatif, et  $Oxyz$  comme référentiel absolu. Avec  $\mathbf{v}_r = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta$  et la vitesse angulaire de rotation du référentiel relatif  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}}$ , calculer l'accélération de Coriolis projeté sur le repère des coordonnées sphériques :

$$\mathbf{a}_{Coriolis} = 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r = 2\dot{\phi}(\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \wedge (R\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) = (0)\hat{\mathbf{e}}_r + (0)\hat{\mathbf{e}}_\theta + (2\dot{\phi}R\dot{\theta} \cos \theta)\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

*fait à la maison*

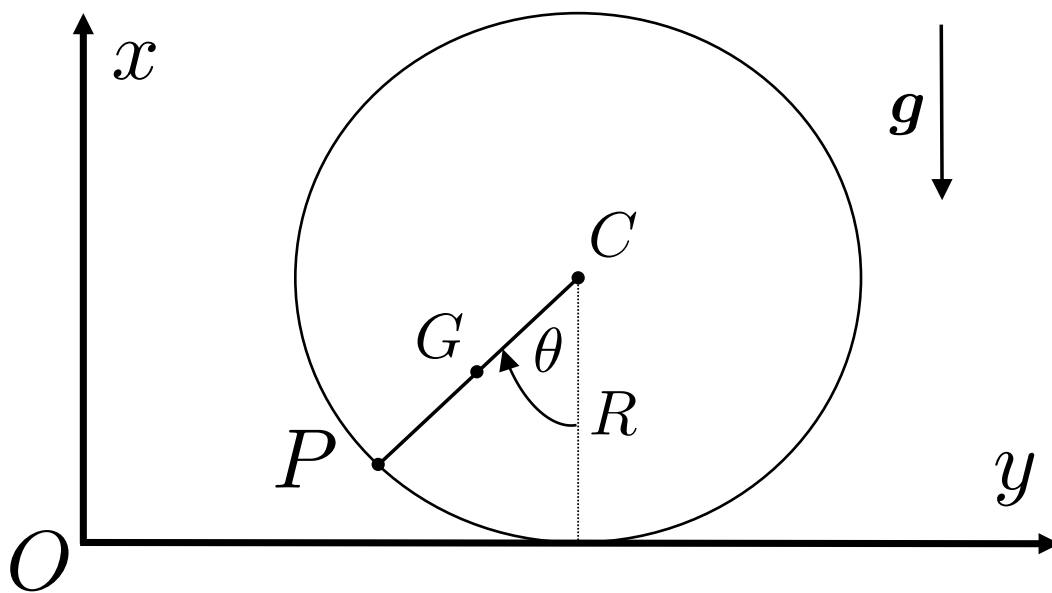
Nom :

Prénom :

N° Sciper :

### B. Balançoire circulaire (4/10 points)

Un solide est formé d'un cercle et d'un point matériel situé sur le cercle. Le cercle est en tout temps dans un plan vertical, il roule sans glisser sur une table horizontale, il est soumis à la pesanteur, sa masse vaut  $m/2$ , son rayon est  $R$ . Sa masse  $m/2$  est entièrement sur le cercle (ce n'est pas un disque). Le point matériel en  $P$  est pesant, de masse  $m/2$ , il est fixé en un point du cercle. Le solide constitué du cercle et du point matériel est donc de masse totale  $m$ . On désigne par  $C$  le centre du cercle, par  $P$  le point matériel et par  $G$  le centre de masse du solide composé du cercle et du point matériel.



*Questions et réponses au verso !*

1. **(0.5 point)** En utilisant la définition vectorielle du centre de masse pour tout système de point matériel, montrer que  $G$  est au milieu du segment  $CP$ .

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{OP}_i + \frac{m}{2} \mathbf{OP}}{\sum_i m_i + \frac{m}{2}} = \frac{\frac{m}{2} \mathbf{OC} + \frac{m}{2} \mathbf{OP}}{m} = \mathbf{OC} + \frac{1}{2} (-\mathbf{OC} + \mathbf{OP}) = \mathbf{OC} + \frac{1}{2} \mathbf{CP}$$

2. **(0.5 point)** On désigne la vitesse angulaire du solide par  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$  où  $\omega = \dot{\theta}$ . Montrer que la condition de roulement sans glissement implique que  $V_C = \omega R$ , où  $V_C$  est la projection sur l'axe  $Oy$  de la vitesse  $\mathbf{V}_C$  de C. Pour le point A du solide en contact avec le sol, on a

$$\mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CA} = 0 = V_C \hat{\mathbf{y}} + \omega \hat{\mathbf{z}} \wedge (-R \hat{\mathbf{x}}) \implies V_C = R\omega$$

3. **(0.5 point)** Avec des règles élémentaires sur les propriétés des moments d'inertie, calculer le moment d'inertie en  $G$  du solide (cercle et point matériel) ( $I_G \neq I_C$ ). On applique la règle de Steiner pour le cercle et on ajoute la contribution du point :

$$I_G = \frac{m}{2} R^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{R}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{R}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} m R^2$$

4. **(1.0 point)** En utilisant  $I_G$  supposé connu, obtenir grâce au théorème du moment cinétique une équation du mouvement pour  $\theta(t)$ . On peut traiter la pesanteur comme une force appliquée en  $G$  dont le moment en  $G$  est donc nul. La réaction du sol  $\mathbf{N}$  vers le haut et le frottement  $\mathbf{F}$  en avant donnent les contributions :

$$I_G \ddot{\theta} = N \frac{R}{2} \sin \theta - F \frac{R}{2} (2 - \cos \theta)$$

5. **(1.0 point)** Tenant compte de la condition de roulement sans glissement  $V_C = R\omega$ , trouver l'expression vectorielle de l'accélération de G (sur feuille annexe), appliquer le théorème du centre de masse et projeter selon  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{y}}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CG} \\ \mathbf{a}_G &= \dot{\mathbf{V}}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{CG} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CG}) \\ &= R\dot{\omega} \hat{\mathbf{y}} + \ddot{\theta} \hat{\mathbf{z}} \wedge \left( \frac{-R}{2} \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \frac{-R}{2} \sin \theta \hat{\mathbf{y}} \right) - \omega^2 R (-\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

$$(\hat{\mathbf{x}}) \quad m \left( \frac{R}{2} \ddot{\theta} \sin \theta + \frac{R}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) = N - mg$$

$$(\hat{\mathbf{y}}) \quad m \left( R\ddot{\theta} + \frac{R}{2} \ddot{\theta} \cos \theta + \frac{R}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) = F$$

6. **(0.5 point)** En considérant  $I_G$  et la vitesse  $\mathbf{v}_P$  du point  $P$  connus, exprimer l'énergie mécanique du solide. Prendre comme référence du potentiel la position la plus basse du centre de masse  $G$ . Avec  $\mathbf{v}_P$  donné, le plus simple est de considérer les deux objets séparément Pour le solide, l'énergie cinétique a les contributions de translation et de rotation :

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{2} R^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{2} \mathbf{V}_P^2 + mg \frac{R}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{4} \mathbf{V}_P^2 + \frac{mgR}{2} (1 - \cos \theta)$$

De  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CP}$ , on tire  $v_P^2 = \omega^2 R^2 (5/4 + \cos \theta)$  qu'on peut utiliser obtenir une expression contenant  $V_P$  seulement.

*fait à la maison*

Nom : 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom : 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

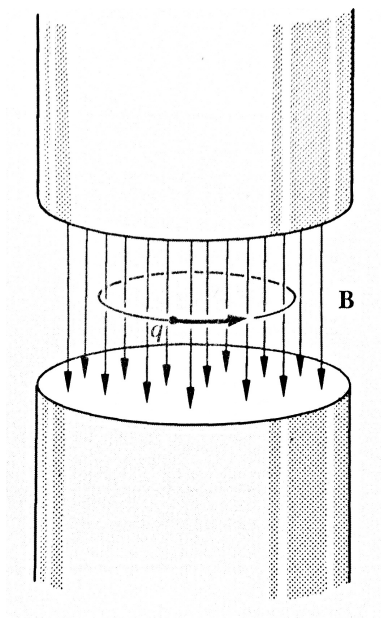
N° Sciper : 

--	--	--	--	--	--

### C. Gyrotronique (2/10 points)

Une charge  $q$  considérée comme un point matériel de masse  $m$  est soumise à un champ d'induction magnétique  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  uniforme et constant. On admet que le point matériel a une trajectoire dans un plan normal au champ  $\mathbf{B}$ . On note  $\mathbf{v}$  sa vitesse et  $\mathbf{p}$  sa quantité de mouvement. On veut examiner ici les conséquences de la définition relativiste de la fonction  $\mathbf{p}(\mathbf{v})$ . L'équation de la dynamique est donnée :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$



*Questions et réponses au verso !*

1. **(0.5 point)** On donne la norme du vecteur de vitesse initiale,  $v = |\mathbf{v}|$ . Déterminer la norme du vecteur de quantité de mouvement et montrer qu'elle est indépendante du temps.

La norme de la quantité de mouvement est une grandeur conservée :

$$\frac{dp^2}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot (q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0$$

$$p = |\mathbf{p}| = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

2. **(0.5 point)** Obtenir les équations du mouvement pour  $p_x$  et  $p_y$ . (Notation  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ )

On note que  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  est une constante. On peut donc écrire  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$  et :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{-q\mathbf{B}}{\gamma m} \wedge \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & 0 & v_x \\ \hat{e}_y & 0 & v_y \\ \hat{e}_z & \omega & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega v_y \\ \omega v_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \omega = \frac{-qB}{\gamma m}$$

$$\ddot{p}_x = -\omega^2 p_x$$

$$\ddot{p}_y = -\omega^2 p_y$$

3. **(0.5 point)** Montrer que la trajectoire est un cercle et donner son rayon  $R$  en termes de  $p, q, B$ .

Comme  $\mathbf{v}$  subit une rotation de vitesse angulaire  $\omega = \frac{-qB}{\gamma m}$ , on doit avoir  $v_x = v \cos \omega t$  et  $v_y = v \sin \omega t$ . Donc  $x(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t + x_0$  et  $y(t) = \frac{v}{\omega} \cos \omega t + y_0$ . C'est l'équation paramétrique d'un cercle de rayon :

$$R = \frac{p}{qB} = \frac{\gamma m v}{qB}$$

4. **(0.5 point)** Quelle est la norme  $\omega_c$  du vecteur de vitesse angulaire du point matériel sur le cercle ?

$$\omega_c = \frac{qB \sqrt{1 - v^2/c^2}}{m}$$