EPFL
Geometrie, MATH-120

Automne 2017

Série 10

On rappelle que l'ensemble des matrice orthogonales $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est la reunion disjointe des ensembles des matrices speciales $(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}))$ et non-speciales $(\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}))$. Les matrices speciales seront dites "de rotation" et les non-speciales seront dites "de symetrie". De meme l'ensemble des isometries lineaires $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$ est la reunion disjointe des ensembles des isometries lineaires speciales et non-speciales qui seront appellees "rotations" et "symetries" 8lineaires).

Exercice 1. On a vu que etant donne $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non-nuls perpendiculaires, l'application

$$\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2\frac{\langle \vec{w}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}\vec{v}.$$

est une isometrie lineaire : la symetrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$.

1. Montrer que si $\vec{v} = (C, S)$, la matrice M de $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & -\mathrm{c} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathrm{c} = 1 - 2\frac{C^2}{C^2 + S^2},\ \mathrm{s} = -2\frac{CS}{C^2 + S^2}. \tag{0.1}$$

2. Reciproquement etant donne une matrice non-speciale

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & -\mathrm{c} \end{pmatrix}$$

montrer que M est la matrice d'une symetrie orthogonale et donne des coordonnees pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. Donner la matrice de la symetrie orthogonale par rapport a la droite d'equation

$$3x + 4y = 0.$$

Exercice 2. Montrer que toute matrice orthogonale O est le produit de une ou deux matrices de symetrie :

$$O = S \text{si } O \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) \text{ ou bien } O = S.S',\ S, S' \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) \text{ si } O \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}).$$

Dans le second cas on pourra prendre

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donner explicitement la matrice S en fonction de la matrice O.

Exercice 3. Soit

$$R = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} \end{pmatrix}$$

une matrice orthogonale speciale (ie. de rotation). Montrer que l'equation d'inconnue $M \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$

$$M.M = R$$

possede exactement deux solutions $R_\pm^{1/2}$.

Exercice 4 (Definition algebrique de l'angle)**.** On note

$$\mathbf{C}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle de rayon 1 centre en $\mathbf{0}$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{C}^1$ il existe une unique rotation $r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_\mathbf{0}^+$ telle que
$$r(1,0) = (x,y)$$
(on cherchera la matrice de r).
2. Quel est cette rotation pour $(x,y) = (1,2)$; meme question pour $(x,y) = (2,3)$.
3. Montrer que pour toute paire de vecteurs unitaires $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbf{C}^1$ il existe une unique rotation $r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_\mathbf{0}^+$ telle que
$$r(\vec{u}) = \vec{v}.$$
4. Etant donne des vecteurs non-nuls du plan, $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, il existe une unique rotation $r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_\mathbf{0}^+$ telle que
$$r(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\vec{u}) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\vec{v}$$
(la demi-droite engendree par $\vec{u}$ est transformee en la demi-droite engendree par $\vec{v}$).
On dira alors que l'isometrie speciale (la rotation) r est "l'angle (oriente)" entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
5. Si on note la matrice de r sous la forme
$$M_r = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} \end{pmatrix}$$
le nombre c s'appelle le cosinus de l'angle r et s son sinus. Retrouver une relation bien connue entre le cosinus de l'angle de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et leur produit scalaire $\langle vu, \vec{v} \rangle$ (ainsi que leurs longueurs.)

6. Quel est l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (2, 3)$?
7. Montrer que etant donne des vecteurs non-nuls du plan, $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ il existe deux isometries speciales $r_1, r_2 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ telles que

$$r(\mathbb{R}\vec{u}) = \mathbb{R}\vec{v}$$

   (la droite engendree par $\vec{u}$ est transformee en la droite engendree par $\vec{v}$).
   Donner une relation simple entre r_1 et r_2. On dira alors que la paire de rotations (r_1, r_2) est "l'angle (non-oriente)" entre les droites $\mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathbb{R}\vec{v}$.
8. Quel est l'angle entre les droites $\mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathbb{R}\vec{v}$?