Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 7 au 11 novembre 2016

Série 8 du mardi 8 novembre 2016

Exercice 1 (* A rendre) .

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout $x \in [0, \infty[$:

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Indications:

1^o) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [0, \infty[$, $|x - y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq 1$.
2^o) Vérifier que $|f(n\delta) - f(0)| \leq n$, $\forall n = 0, 1, \ldots$.
3^o) Montrer que $|f(x)| \leq 1 + m + |f(0)|$ avec $m = \left[\frac{x}{\delta}\right]$ où $[y]$ dénote la partie entière de $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \ell_2.$$

Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 3.

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction croissante.

1) Montrer que f admet un point fixe.
2) Que devient ce résultat si f est supposée décroissante?

Indication: Considérer l'ensemble $E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq x\}$ et montrer que $E \neq \varnothing$ et que $c = \inf E$ vérifie $f(c) = c$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique, continue. On pose $g(x) = f(x + \pi) - f(x)$.

1.) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $g(\alpha) = 0$.
2.) En déduire que sur l'équateur terrestre, il y a toujours au moins 2 points diamétralement opposés avec la même température.