Série 1 (Corrigé)

Exercice 1 - Multiple Choice

Determiner si les énoncés proposés sont vrais ou faux et *justifier* la réponse.

a) Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut :
- ◯ n'avoir aucune solution ;
- ◯ avoir exactement une solution ;
- ◯ avoir exactement deux solutions ;
- ◯ avoir une infinité de solutions.

Sol.:

a) Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut :
- ● *n'avoir aucune solution ;*
- ● *avoir exactement une solution ;*
- ◯ *avoir exactement deux solutions ;*
- ● *avoir une infinité de solutions.*

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x$. Répondre à chacune des questions suivantes en cochant la case correcte.

a) Est-ce que la fonction f est injective ?
- ◯ Oui.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble de départ à l'intervalle $[0, \infty[$.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble de départ à l'intervalle $]-\infty, 0]$.

b) Est-ce que la fonction f est surjective ?
- ◯ Oui.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble de départ à l'intervalle $[0, \infty[$.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble d'arrivée à l'intervalle $[-4, \infty[$.

Sol.: *Pour l'injectivité, la surjectivité, les images réciproques, le fascicule "Notions de base et notations courantes en mathématiques".*

(a) C'est la 3ème réponse qui est correcte. On a $f(0) = f(4)$, donc f n'est pas injective, et sa restriction à l'intervalle $[0, \infty[$ pas non plus. Donc les deux premières réponses ne sont pas correctes. Pour la 3ème, on constate que f est strictement décroissante entre $-\infty$ et 2, car la dérivée de $f(x)$ vaut $2x - 4$ et $f(x)$ admet un minimum en $x = 2$. En particulier f est strictement décroissante dans l'intervalle $]-\infty, 0]$. Cela implique que deux points distincts de cet intervalle ont des images distinctes, donc que f est injective sur cet intervalle.

(b) *C'est la 3ème réponse qui est correcte. On a vu que $f(x)$ admet un minimum en $x = 2$ et la valeur en 2 vaut $f(2) = -4$. Par conséquent, si $y < -4$, alors y n'est pas dans l'image de f. L'image de f est l'intervalle $[-4, \infty[$. Donc f n'est pas surjective et sa restriction à l'intervalle $[0, \infty[$ n'est pas non plus surjective. En revanche, en restreignant l'ensemble d'arrivée à $[-4, \infty[$, on obtient une application surjective.*

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. Déterminer $f^{-1}(0),\ f^{-1}(\frac{1}{2}),\ f^{-1}(\frac{3}{2})$.

Sol.: *Pour l'injectivité, la surjectivité, les images réciproques, voir le fascicule "Notions de base et notations courantes en mathématiques".*

Les images réciproques sont :

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(0) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \textit{tel que } \ \pi x = k\pi\} = \mathbb{Z} \\
f^{-1}(\frac{1}{2}) &= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi x) = \frac{1}{2}\Big\} \\
&= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \ \exists k \in \mathbb{Z} \ \ \textit{tel que } \ \pi x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\Big\} \cup \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \ \exists k \in \mathbb{Z} \ \ \textit{tel que } \ \pi x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\Big\} \\
&= \Big\{\frac{1}{6} + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\Big\} \cup \Big\{\frac{5}{6} + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\Big\} \\
f^{-1}(\frac{3}{2}) &= \emptyset, \quad \textit{car } \sin(\alpha) \leq 1\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

Exercice 4

Soit $f : X \to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Soient A et B deux sous-ensembles de X.

a) Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(b) Trouver un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(c) Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Sol.: *Pour les définitions et notations de la théorie des ensembles et pour l'inclusion et l'égalité d'ensembles, voir le fascicule "Notions de base et notations courantes en mathématiques".*

(a) *Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. En particulier $x \in A$, et par conséquent $f(x) \in f(A)$. De même, $x \in B$ et donc $f(x) \in f(B)$. Il s'ensuit que $f(x) \in f(A) \cap f(B)$, c'est-à-dire $y \in f(A) \cap f(B)$. On a ainsi démontré que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.*

(b) *Par exemple, posons $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, et $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$. En prenant $A = \{1, 3\}$ et $B = \{2, 3\}$, on obtient $A \cap B = \{3\}$ et $f(A \cap B) = \{2\}$, mais d'autre part $f(A) \cap f(B) = \{1, 2\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$.*

(c) *On a déjà montré en (a) l'inclusion $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $z \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $f(x_1) = z = f(x_2)$. Comme f est injective, $x_1 = x_2$, et donc $x_1 \in A \cap B$. Par* *conséquent,* $z = f(x_1) \in f(A \cap B)$*, ce qui montre que* $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$*. Il en résulte l'égalité* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$*.*

Exercice 5

Montrer par récurrence sur n que la somme des n premiers nombres entiers impairs est égale à n^2, c'est-à-dire que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Sol.: *Pour la technique des preuves par récurrence, voir le fascicule "Notions de base et notations courantes en mathématiques".*

Pour $n = 1$*, l'égalité est vraie, car* $1 = 1^2$*. En faisant l'hypothèse de récurrence que l'égalité est vraie pour* n*, on a donc*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2\,.$$

En ajoutant $2(n+1) - 1$*, c'est-à-dire* $2n+1$*, on obtient*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2\,,$$

ce qui montre l'égalité pour $n+1$*. Ainsi l'égalité est vraie pour tout entier* ≥ 1*.*

Exercice 6

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}, \qquad & B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{2}\,x\}, & D &= \mathbb{Z}^2\,. \end{aligned}$$

(a) Déterminer $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$.

(b) Déterminer $(B \cup C) \cap D$.

(c) Calculer $\mathrm{Card}\big((B - A) \cap D\big)$.

Sol.:

(a) $A \cap C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ et } y = \sqrt{2}\,x\}$*, donc*

$$\begin{aligned} A \cap C &= \{(x, \sqrt{2}\,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (\sqrt{2}\,x)^2 = 9\} = \{(x, \sqrt{2}\,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 = 9\} \\ &= \Big\{(-\sqrt{3}, -\sqrt{6})\ ,\ (\sqrt{3}, \sqrt{6})\Big\}. \end{aligned}$$

$A \cap D = \{(0,3), (0,-3), (3,0), (-3,0)\}$.
$B \cap C = \{(x, \sqrt{2}\,x) \mid x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\}$ *(cf.* $A \cap C$*).*
$B \cap D = \{(0,3), (0,-3), (3,0), (-3,0)\} \,\cup\, \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leq 2 \text{ et } |y| \leq 2\}$.

(b) Constatons d'abord que

$$(x,y) \in (B \cup C) \cap D \iff (x,y) \in (B \cap D) \cup (C \cap D) \iff (x,y) \in B \cap D \ \text{ ou } \ (x,y) \in C \cap D\,.$$

Or $C \cap D$ *est réduit à un seul point, à savoir* $(0,0)$*, car si* x *est un entier non nul,* $y = \sqrt{2}\,x$ *n'est jamais un entier. On obtient donc que* $(B \cup C) \cap D = (B \cap D) \cup \{(0,0)\}$*. Mais le point* $(0,0)$ *appartient déjà à* $B \cap D$*, donc* $(B \cup C) \cap D = B \cap D$*, qui a été déterminé en (a).*

(c) Pour trouver $(B-A)\cap D$, on doit considérer $B\cap D$ et exclure les éléments de $A\cap D$. Il reste alors $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid |x|\leq 2$ et $|y|\leq 2\}$. Il y a 5 valeurs possibles pour x et 5 valeurs possibles pour y, donc 25 points en tout. Ainsi $\operatorname{Card}\Big((B-A)\cap D\Big)=25$.

Exercice 7

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2+1$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont correctes ?

(a) L'application f est injective.

(b) L'application f est surjective.

(c) L'application $f|_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ est injective.

(d) Soient $A=[-3,2]$ et $B=[1,3]$. Alors $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

Sol.: *Pour l'injectivité, la surjectivité, les images réciproques, voir le fascicule "Notions de base et notations courantes en mathématiques".*

(a) Non. Par exemple, $f(-1)=2=f(1)$.

(b) Non. Par exemple, 0 *n'appartient pas à l'image de* f*, car* $f(x)=x^2+1\geq 1$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *et donc* f *ne prend jamais la valeur* 0.

(c) Oui. En effet, si $n,m\in\mathbb{N}$ *sont tels que* $f(n)=f(m)$*, alors* $n^2+1=m^2+1$ *et donc* $n=\pm m$*. Comme* $n,m\geq 0$*, on déduit que* $n=m$*. L'application* $f|_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *est donc injective.*

(d) Non. En fait, on a toujours $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$*, mais on n'a pas toujours l'égalité. Ici* $A\cap B=[1,2]$ *et donc* $f(A\cap B)=f([1,2])=[2,5]$.
Par ailleurs $f(A)=[1,10]$ *et* $f(B)=[2,10]$*, donc* $f(A)\cap f(B)=[2,10]$.
On voit bien que $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$*, car* $[2,5]\subseteq[2,10]$*. Mais on n'a pas l'égalité, car par exemple* $6\in[2,10]$ *mais* $6\notin[2,5]$*. Ainsi* $f(A)\cap f(B)\neq f(A\cap B)$.

Exercice 8

Soit $f:X\to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Soient A et B deux sous-ensembles de X et C et D deux sous-ensembles de Y.

(a) Montrer que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(b) Montrer que $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

(c) Montrer que $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

Sol.: *Pour les définitions et notations de la théorie des ensembles, pour les inclusions et égalités d'ensembles et pour l'usage des quantificateurs* $\forall$ *et* $\exists$*, voir le fascicule "Notions de base et notations courantes en mathématiques".*

(a) Pour tout $y\in Y$*, on a*

$$\begin{aligned}
y\in f(A\cup B) &\iff \exists\, x\in A\cup B \text{ tel que } y=f(x)\\
&\iff \exists\, x\in A \text{ ou } x\in B \text{ tel que } y=f(x)\\
&\iff \exists\, x\in A \text{ tel que } y=f(x) \text{ ou } \exists\, x\in B \text{ tel que } y=f(x)\\
&\iff y\in f(A) \text{ ou } y\in f(B)\\
&\iff y\in f(A)\cup f(B)
\end{aligned}$$

Ceci montre que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(b) *Attention au fait que f^{-1} ne désigne pas une application inverse (qui n'existe pas en général), mais c'est seulement une notation pour l'image réciproque d'un sous-ensemble.*

Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D && \textit{(par définition de l'image réciproque)} \\
&\iff f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D && \textit{(par définition de la réunion)} \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) && \textit{(par définition de l'image réciproque)} \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) && \textit{(par définition de la réunion)}
\end{aligned}$$

Ceci montre que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(c) *Attention au fait que f^{-1} ne désigne pas une application inverse (qui n'existe pas en général), mais c'est seulement une notation pour l'image réciproque d'un sous-ensemble.*

Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D && \textit{(par définition de l'image réciproque)} \\
&\iff f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D && \textit{(par définition de l'intersection)} \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) && \textit{(par définition de l'image réciproque)} \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) && \textit{(par définition de l'intersection)}
\end{aligned}$$

Ceci montre que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.