Corrigé Série 11 : Moment d'inertie

Question conceptuelle

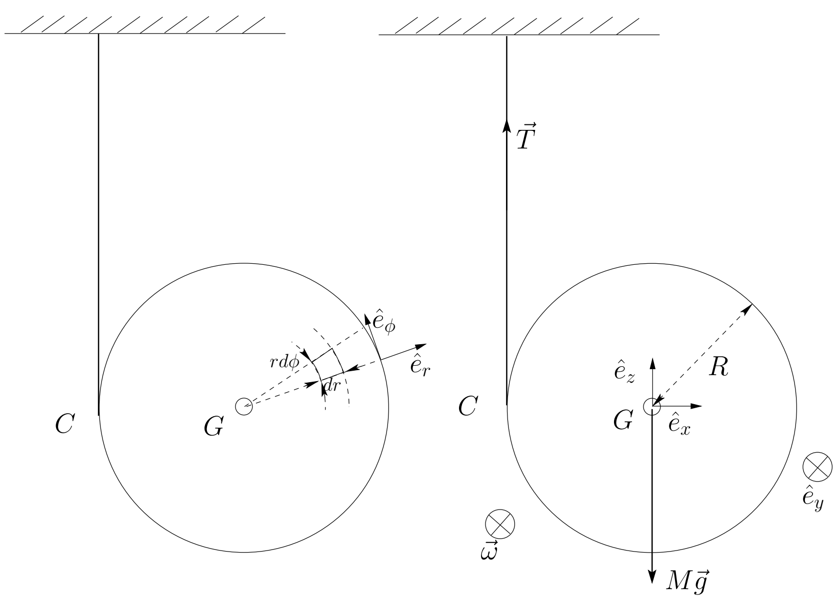
Lorsque le système motard-moto est en l'air, il ne subit que son poids comme force extérieure (on néglige les frottements de l'air). Le moment de ce poids par rapport au centre de masse est nul, donc le moment cinétique total du sytème par rapport au centre de masse est constant.

a) Si le motard freine la roue arrière, il diminue le moment cinétique de la roue, donc la conservation du moment cinétique total implique une mise en rotation de l'ensemble du système dans le même sens que la roue arrière, donc la moto pique du nez.

b) S'il freine avec la roue avant, il va se passer exactement la même chose.

c) Seule la roue arrière est motorisée. En ré-accélérant la roue arrière, le motard pourra arrêter la rotation de la moto (s'il redonne à la roue arrière sa vitesse de rotation initiale). Ainsi en freinant la roue arrière ou en donnant des gaz, le motard pourra garder sa vitesse de rotation sous contrôle pendant le saut.

1 Yoyo



a) Le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe de symétrie de révolution est donné par la double intégrale prise sur la surface du disque :

$$I_{\text{disque}} = \int_{\text{disque}} r^2 dm = \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sigma r d\phi dr = \sigma \int_{r=0}^{R} r^3 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma \int_{0}^{R} r^3 dr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$I_{\text{disque}} = \frac{2\pi}{4}\sigma R^4 \,, \qquad (1)$$

où l'élément de surface utilisé est $rd\phi dr$, et σ est la masse surfacique (i.e. la masse par unité de surface) donnée par $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$. On obtient finalement le moment d'inertie pour le disque

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2} M R^2 \,. \tag{2}$$

b) Pour résoudre ce problème, on va utiliser les équations du mouvement du yoyo. Les forces qui s'appliquent sur le yoyo sont son poids $\vec{P} = M\vec{g}$, dirigé vers le bas, et la tension dans le fil $\vec{T}$, dirigée vers le haut. Les équations du mouvement sont données d'une part par le théorème du centre de masse (deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse) qui projeté sur $\hat{e}_z$ donne

$$-Ma_G = -Mg + T \,, \tag{3}$$

et d'autre part par le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{\text{disque}} \dot{\omega} \hat{e}_y = \Sigma \vec{M}_G = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GC} \wedge \vec{T} \,.$$

qui projeté sur $\hat{e}_y$ donne

$$I_{\text{disque}} \dot{\omega} = RT \,. \tag{4}$$

Tous les points du fil ont une vitesse nulle y compris donc au point de contact C ($v_C = 0$). On a ainsi $\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_C}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$ ($\vec{v}_G$ pointe bien vers le bas) donc la vitesse et l'accélération angulaire du disque sont reliées par

$$v_G = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_G}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_G}{R} \,. \tag{5}$$

En combinant les équations (2), (4) et (5), on obtient

$$\frac{1}{2} M R^2 \frac{a_G}{R} = R(Mg - Ma_G) \,.$$

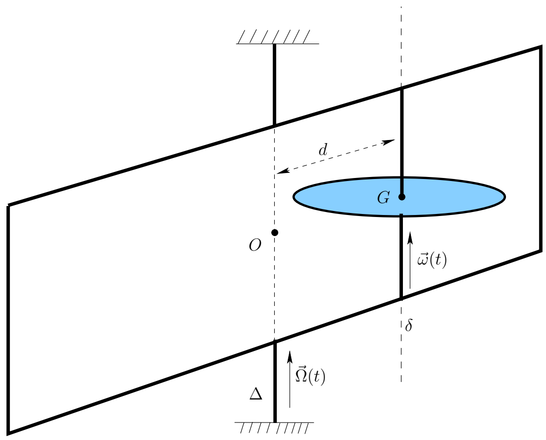
En résolvant pour a_G, on trouve

$$a_G = \frac{2}{3} g \,. \tag{6}$$

Et par substitution dans l'équation (3), on obtient :

$$T = M(g - a_g) = M\left(g - \frac{2}{3} g\right) = \frac{Mg}{3} \,. \tag{7}$$

2 Volant et châssis



a) Le volant tourne autour d'un axe principal d'inertie avec une vitesse angulaire de rotation totale $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$; son moment cinétique par rapport au point G vaut ainsi

$$\vec{L}_{\mathrm{v},G} = I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\,. \tag{8}$$

On obtient son moment cinétique par rapport à O par le théorème du transfert :

$$\vec{L}_{\mathrm{v},O} = \vec{L}_{\mathrm{v},G} + \overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}_G = I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + \overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}_G\,. \tag{9}$$

Le point O étant immobile et les points G et O appartenant tous deux au châssis, leurs vitesses doivent satisfaire

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG}\,. \tag{10}$$

Le châssis tourne également autour d'un axe principal d'inertie et son moment cinétique par rapport à O vaut

$$\vec{L}_{\mathrm{c},O} = I_{\mathrm{c},O}\,\vec{\Omega}\,. \tag{11}$$

En combinant les relations ci-dessus, le moment cinétique total du système volant+châssis par rapport à O vaut alors :

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{\mathrm{tot},O} = \vec{L}_{\mathrm{c},O} + \vec{L}_{\mathrm{v},O} &= I_{\mathrm{c},O}\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + \overrightarrow{OG}\wedge m(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG}) \\
&= I_{\mathrm{c},O}\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + m\left(\overrightarrow{OG}^2\vec{\Omega} - (\overrightarrow{OG}\cdot\vec{\Omega})\,\overrightarrow{OG}\right) \\
&= I_{\mathrm{c},O}\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},G}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + md^2\vec{\Omega} \\
\Rightarrow \vec{L}_{\mathrm{tot},O} &= (I_{\mathrm{c},O} + I_{\mathrm{v},G} + md^2)\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},G}\,\vec{\omega}\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

b) Le système volant+châssis ne subit aucune force extérieure horizontale (en effet les forces de freinage sont internes au système), et donc aucun moment de force vertical. La composante verticale du moment cinétique total (par rapport à n'importe quel point du référentiel) est ainsi constante. Le moment cinétique total par rapport au point O, donné par l'équation (12), est vertical et est donc un vecteur constant au cours du temps. En particulier, on a

$$\vec{L}_{\mathrm{tot},O}(t_1) = \vec{L}_{\mathrm{tot},O}(t_0)\,,$$

ce qui donne

$$(I_{c,O} + I_{v,G} + md^2)\,\vec{\Omega}(t_1) + I_{v,G}\underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} = (I_{c,O} + I_{v,G} + md^2)\underbrace{\vec{\Omega}(t_0)}_{=\vec{0}} + I_{v,G}\,\vec{\omega}_0\,,$$

et donc

$$\vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,G}}{I_{c,O} + I_{v,G} + md^2}\,\vec{\omega}_0\,. \tag{13}$$

c) Les forces de freinage sur le châssis sont extérieures au système volant+châssis ; elles exercent un moment vertical qui modifie le moment cinétique total entre t_1 et t_2. Considérons uniquement le volant : entre les temps t_1 et t_2, ce dernier subit son poids vertical vers le bas, et trois autres forces exercées par le châssis : une force de soutien vers le haut (compensant le poids), une force centripète (dans la direction de $\overrightarrow{GO}$), et une force horizontale de direction opposée à $\vec{v}_G$. Cette force s'applique au point G et va le freiner jusqu'à ce qu'il s'immobilise. Aucune de ces forces n'a un moment pas rapport au point G, et donc le moment cinétique du volant par rapport au point G reste constant,

$$\vec{L}_{v,G}(t_2) = \vec{L}_{v,G}(t_1)\,,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} I_{v,G}\big(\vec{\omega}(t_2) + \underbrace{\vec{\Omega}(t_2)}_{=\vec{0}}\big) &= I_{v,G}\big(\underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(t_1)\big)\,, \\ I_{v,G}\,\vec{\omega}(t_2) &= I_{v,G}\,\vec{\Omega}(t_1)\,, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'équation (13) :

$$\vec{\omega}(t_2) = \vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,G}}{I_{c,O} + I_{v,G} + md^2}\,\vec{\omega}_0\,. \tag{14}$$

d) Comme vu au cours, un point C sur l'axe instantané de rotation du volant doit satisfaire à

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC} = \frac{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\wedge\vec{v}_G}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2} &= \frac{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG})}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2} \\ &= \frac{((\vec{\omega}+\vec{\Omega})\cdot\overrightarrow{OG})\,\vec{\Omega} - ((\vec{\omega}+\vec{\Omega})\cdot\vec{\Omega})\,\overrightarrow{OG}}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2} \\ &= -\frac{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\cdot\vec{\Omega}}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2}\,\overrightarrow{OG} = -\frac{(\omega+\Omega)\Omega}{(\omega+\Omega)^2}\,\overrightarrow{OG} = -\frac{\Omega}{\omega+\Omega}\,\overrightarrow{OG}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

et donc

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \left(1 - \frac{\Omega}{\omega+\Omega}\right)\overrightarrow{OG} = \frac{\omega}{\omega+\Omega}\,\overrightarrow{OG}\,. \tag{16}$$

L'axe de rotation instantané du volant est vertical et passe par le point C situé entre les points O et G à une distance $\omega d/(\omega+\Omega)$ du point O. Quand $\vec{\Omega}(t) = \vec{0}$, par exemple aux temps t_0 ou t_2, $C = G$ et l'axe de rotation instantané est δ ; quand $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$, par exemple au temps t_1, $C = O$ et l'axe de rotation instantané est Δ.

3 Moment d'inertie d'un haltère entraîné par un poids

a) La masse m_3 subit la force de pesanteur $\vec{F} = m_3\vec{g}$ et la force de tension $\vec{T}$ exercée par le câble. L'équation du mouvement de la masse m_3, projetée sur un axe z vertical (pointant vers le bas) est :

$$m_3\ddot{z} = m_3 g - T\,,$$

donc

$$T = m_3(g - \ddot{z})\,, \tag{17}$$

où T est la norme du vecteur $\vec{T}$.

A son autre extrémité, le câble exerce une force horizontale $\vec{T}'$, de norme T, sur le système formé de l'haltère et de son axe de rotation vertical. Il s'agit de la seule force sur ce système qui ait un moment non nul (ou non compensé) par rapport au centre C de l'haltère, situé sur l'axe de rotation. Le théorème du moment cinétique par rapport à C s'écrit :

$$\frac{d\vec{L_C}}{dt} = \vec{M}_{C,ext} = \vec{r} \wedge \vec{T}'\,, \tag{18}$$

où $\vec{L} = I\vec{\omega}$ est le moment cinétique du système et $I = (m_1 + m_2)R^2$ son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation vertical. Comme cet axe est un axe principal d'inertie par le point C, $\vec{L}$ est parallèle à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, selon cet axe.

Soit θ l'angle de rotation. La vitesse angulaire de l'haltère vaut $\omega = \dot{\theta}$. L'accélération de la masse m_3 vaut $\ddot{z} = r\ddot{\theta}$.

En projetant le théorème du moment cinétique sur l'axe z puis en éliminant T, on obtient :

$$I\ddot{\theta} = rT = m_3 rg - m_3 r^2\ddot{\theta}\,,$$

c'est à dire :

$$\ddot{\theta} = \frac{m_3 rg}{m_3 r^2 + I}\,, \tag{19}$$

et donc

$$\ddot{\theta} = \frac{m_3 rg}{m_3 r^2 + (m_1 + m_2)R^2}\,. \tag{20}$$

b) Si $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et si $r \ll R$, on a l'approximation suivante :

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{rg}{r^2 + 2R^2} \approx \frac{rg}{2R^2} \tag{21}$$

En utilisant la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(0) = 0$ on a :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{rg}{2R^2}t \tag{22}$$

et

$$\theta(t) = \frac{rg}{4R^2}t^2 + \theta_0\,. \tag{23}$$

Si R est multiplié par 3, la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ est divisée par $3^2 = 9$.

Une chute de la masse m_3 d'une hauteur h correspond à une rotation d'un angle $\theta - \theta_0 = h/r$.

Le temps de chute t_h satisfait alors à :

$$h/r = \frac{rg}{4R^2}{t_h}^2 \tag{24}$$

soit :

$$t_h = \sqrt{\frac{4R^2}{r^2 g}h} = \frac{2R}{r}\sqrt{\frac{h}{g}}\,. \tag{25}$$

Si R est multiplié par 3, le temps de chute est multiplié par 3.