EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE – LAUSANNE
POLITECNICO FEDERALE – LOSANNA
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY – LAUSANNE

Faculté Informatique et Communications
Cours ICC aux sections MA et PH
Chappelier J.-C.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

INFORMATIQUE, CALCUL & COMMUNICATIONS

Sections MA & PH

Correction Examen intermédiaire II

21 novembre 2014

SUJET 1

Instructions :

- **VOUS DEVEZ BIEN SÛR FAIRE CES CORRECTIONS DANS LA PLUS STRICTE CONFIDENTIALITÉ.**
  Veuillez en particulier ne *pas* diffuser le corrigé. Merci.
- Veillez à garder l'ordre alphabétique de classement des copies.
- Re-vérifiez bien deux fois vos corrections. Nous faisons tous des erreurs...
- Une fois la correction terminée, remplissez le fichier de notes envoyé par email.
  Mettre explicitement un 0 à tous ceux qui ont rendu une feuille blanche (par opposition à « vide » qui signifiera que vous n'avez pas vu de copie à ce nom).

Réponses aux quiz :

	A	B	C	D	
question 1 :		✔			1
question 2 :	✔				2
question 3 :	✔				3
question 4 :	✔				4
question 5 :		✔			5
question 6 :		✔			6

	A	B	C	D	
question 7 :			✔		7
question 8 :		✔			8
question 9 :				✔	9
question 10 :		✔			10
question 11 :		✔			11
question 12 :			✔		12

PARTIE QUIZ

1 – Entropies [2 points]

Question 1) Suivant la définition vue en classe, quelle est, en bit, l'entropie du mot « `ABABAB` » ?

A] 6 ✔**B]** 1 **C]** $\log_2(6)$ **D]** 2

Question 2) Soient X un mot de longueur n et Y un mot de longueur m n'ayant *aucune* lettre en commun avec X.

Soient $p = \frac{n}{n+m}$ et $h(p) = p\ \log_2(\frac{1}{p}) + (1-p)\ \log_2(\frac{1}{1-p})$, c'est-à-dire l'entropie d'un mot qui serait par exemple constitué de n fois la lettre `'A'` et m fois la lettre `'B'` : « `AA...ABBB...BB` ».

Quelle est l'entropie du mot « XY », constitué du mot Y collé derrière le mot X ?

✔**A]** $h(p) + p\,H(X) + (1-p)\,H(Y)$

B] $h(p)$

C] $p\,H(X) + (1-p)\,H(Y)$

D] $h(p) + H(X) + H(Y)$

$$
\begin{aligned}
H(XY) &= \sum_{l\in X} \frac{n_l}{n+m} \log\left(\frac{n+m}{n_l}\right) + \sum_{l\in Y} \frac{n_l}{n+m} \log\left(\frac{n+m}{n_l}\right) \\
&= \sum_{l\in X} p\,p_l \log\left(\frac{1}{p\,p_l}\right) + \sum_{l\in Y} (1-p)\ p_l \log\left(\frac{1}{(1-p)\,p_l}\right) \\
&= \sum_{l\in X} p\,p_l \left(\log\left(\frac{1}{p}\right) + \log\left(\frac{1}{p_l}\right)\right) + \sum_{l\in Y} (1-p)\,p_l \left(\log\left(\frac{1}{1-p}\right) + \log\left(\frac{1}{p_l}\right)\right) \\
&= p \sum_{l\in X} p_l \log\left(\frac{1}{p_l}\right) + p\ \log\left(\frac{1}{p}\right) \sum_{l\in X} p_l + (1-p) \sum_{l\in Y} p_l \log\left(\frac{1}{p_l}\right) + (1-p)\ \log\left(\frac{1}{1-p}\right) \sum_{l\in Y} p_l \\
&= p\,H(X) + (1-p)\,H(Y) + h(p)
\end{aligned}
$$

2 – Signal échantilloné [1 point]

Question 3) On considère le signal $X(t)$ suivant :

$$X(t) = 3\ \sin(6\pi\, t) + 4\ \sin(2\pi\, t)$$

Si l'on échantillonne ce signal toutes les $0.3\overline{3}$ s et que l'on cherche à le reconstruire à l'aide de la formule vue en cours, le signal résultant aura une amplitude de

✔**A]** 4 **B]** 3 **C]** 0 **D]** 7

3 – Signal filtré puis échantillonné [2 points]

On considère le signal $X(t)$ suivant :

$$X(t) = 7\ \sin(6\,\pi\,t + \frac{\pi}{4}) + 3\ \sin(2\,\pi\,t + \frac{\pi}{8}) + 2\ \sin(8\,\pi\,t + \frac{\pi}{6})$$

que l'on filtre avec un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 2.75$ Hz pour obtenir un signal $Y(t)$. On s'intéresse ensuite au signal $Z(t) = X(t) - Y(t)$.

$$Y(t) = 3\ \sin(2\,\pi\,t + \frac{\pi}{8})$$

Question 4) On veut échantillonner $Z(t)$ à une fréquence f_e. Quelle valeur de f_e (en Hz) ne permet pas une reconstruction parfaite (à l'aide de la formule de reconstruction vue en cours) ?

✔**A]** 5.5 **B]** 8.5 **C]** 10 **D]** 9.5

Question 5) Finalement, on décide d'échantilloner $Z(t)$ à une fréquence $f_e = 10$ Hz. Quel est le signal $\widehat{Z}(t)$ obtenu après reconstruction (à l'aide de la formule de reconstruction vue en cours) ?

A] $7\ \sin(6\,\pi\,t + \frac{\pi}{4}) + 3\ \sin(2\,\pi\,t + \frac{\pi}{8})$

✔**B]** $7\ \sin(6\,\pi\,t + \frac{\pi}{4}) + 2\ \sin(8\,\pi\,t + \frac{\pi}{6})$

C] aucune des 3 autres propositions

D] $3\ \sin(2\,\pi\,t + \frac{\pi}{8}) + 2\ \sin(8\,\pi\,t + \frac{\pi}{6})$

4 – Codes de Shannon-Fano [2 points]

On souhaite encoder, à l'aide d'un code de Shannon-Fano, cette célèbre phrase d'Albert Einstein : « *La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information.* ». Comme pour les exercices, on ignore ici la ponctuation et les majuscules ; ce qui fait 69 lettres en tout.

Pour vous aider voici le début de la table de codage :

e	n	a	t	i	r	s	c	l	o	u	p	q	d	f	m	x
12	7	6	6	5	5	5	4	4	4	3	2	2	1	1	1	1
000	001	010	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	11100	11101	111100	111101	111110	111111
3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6

Question 6) Quelle est, en bits, la longueur du mot de code pour la lettre 'o' ?

A] 3 ✔**B]** 4 **C]** 5 **D]** 6

Question 7) La longueur moyenne du code est, en bits, environ de :

A] $3.72 \simeq (3 \times 25 + 4 \times 40 + 5 \times 2 + 6 \times 2)\,/69$

B] $4.12 \simeq (3 \times 19 + 4 \times 31 + 5 \times 11 + 6 \times 8)\,/69$

✔**C]** $3.81 \simeq (3 \times 25 + 4 \times 36 + 5 \times 4 + 6 \times 4)\,/69$

D] $4.17 \simeq (3 \times 25 + 4 \times 11 + 5 \times 29 + 6 \times 4)\,/69$

5 – Compression de données [2 points]

Question 8) Une société vend un algorithme de compression de données et prétend comprimer à 70% des textes dans une langue d'entropie 3 bit, constitués de lettres représentées au départ chacune sur 8 bits.

A] c'est impossible

✔**B]** c'est possible avec pertes mais pas sans perte

C] c'est possible sans perte mais pas avec pertes

D] c'est possible avec et sans pertes

Question 9) Cette même société prétend que son algorithme est sans perte, et publie des expériences le comparant aux l'algorithmes de Huffman et de Shannon-Fano.

Elle reporte quatre expériences en publiant à chaque fois (en bits) la longueur L_{SF} obtenue en utilisant l'algorithme de Shannon-Fano, la longueur L_{Hu} obtenue en utilisant l'algorithme de Huffman, la longueur L_{eux} obtenue en utilisant leur algorithme, et l'entropie H du texte utilisé.

Laquelle de ces expérience est possible (i.e. n'est pas fausse) ?

A] $L_{\mathrm{SF}} = 7.3$, $L_{\mathrm{Hu}} = 6.1$, $L_{\mathrm{eux}} = 6.1$ et $H = 5.5$
B] $L_{\mathrm{SF}} = 6.8$, $L_{\mathrm{Hu}} = 5.5$, $L_{\mathrm{eux}} = 6.5$ et $H = 6.1$
C] $L_{\mathrm{SF}} = 7.3$, $L_{\mathrm{Hu}} = 7.2$, $L_{\mathrm{eux}} = 7.1$ et $H = 7$
✔**D]** $L_{\mathrm{SF}} = 7.4$, $L_{\mathrm{Hu}} = 7.4$, $L_{\mathrm{eux}} = 7.4$ et $H = 7.2$

---

6 – Bande passante [1 point]

Nous vous rappelons que :

$$\big(\sin(x)\big)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,x)$$

Question 10) Soit $f_1 > 2 > f_2 > 0$ et les signaux

$$X_1(t) = \big(\sin(2\pi\, f_1\, t + \frac{\pi}{12})\big)^2 \qquad X_3(t) = \big(\sin(2\pi\, f_2\, t + \frac{\pi}{4})\big)^2$$

$$X_2(t) = \sin(2\pi\, {f_1}^2\, t + \frac{\pi}{8}) \qquad X_4(t) = \sin(2\pi\, {f_2}^2\, t + \frac{\pi}{7})$$

Comment sont ordonnées leurs bandes passantes respectives B_1, B_2, B_3 et B_4 ?

A] $B_1 > B_2 > B_3 > B_4$ ✔**B]** $B_2 > B_1 > B_3 > B_4$ **C]** $B_2 > B_1 > B_4 > B_3$ **D]** autrement

7 – Signal filtré [2 points]

Considérons le signal suivant :

$$X(t) = 3\,\sin(5\,\pi\,t + \frac{\pi}{3}) + 5\,\sin(9\,\pi\,t + \frac{\pi}{2}) + 1.5\,\sin(2\,\pi\,t).$$

Question 11) Après application d'un filtre à moyenne mobile avec $T_c = 0.67$ s :

A] la composante sinusoïdale d'amplitude 3 est beaucoup atténuée, alors que les deux autres ne le sont que un peu.
✔**B]** la composante sinusoïdale d'amplitude 5 est beaucoup atténuée, alors que celle d'amplitude 1.5 est peu atténuée.
C] la composante sinusoïdale d'amplitude 1.5 est complètement annulée.
D] l'amplitude des trois composantes sinusoïdales sont égales.

Question 12) Si le signal $X(t)$ de départ était filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure 2 Hz, la bande passante du signal résultant serait :

A] 2 Hz **B]** 2.5 Hz ✔**C]** 1 Hz **D]** 9 Hz

PARTIE EXERCICES

8 – Compression d'une phrase [4 points]

On considère la phrase « ICC EXAAAAM » dont on ignore les blancs.

Question 13) Calculer son entropie en bit (au sens vu en cours). Donnez tout d'abord son expression sous la forme « $\log_2(5) + \frac{a}{10}$ » (a peut être négatif ou nul), puis une valeur approchée sachant que $\log_2(5) \simeq 2.3$.

A	C	X	M	I	E
4	2	1	1	1	1

$$H = \frac{4}{10}\log_2(\frac{10}{4}) + \frac{2}{10}\log_2(5) + \frac{4}{10}\log_2(10) = \frac{0}{10} + \log_2(5) \simeq 2.3\text{bit}$$

BARÈME : 1 point : 0.25 pour une justification des p_i ; 0.25 pour la formule, 0.25 pour son application et 0.25 pour la manipulation des log (i.e. calcul).

Question 14) Coder la phrase considérée en utilisant un code de Shannon-Fano. Justifiez votre démarche en donnant l'arbre de codage de votre code.

Voici les solutions possibles, à des permutations près bien sûr :

A	C	X	M	I	E
4	2	1	1	1	1
0	100	101	110	1110	1111
00	01	100	101	110	111

BARÈME : 1.25 points : 1 pour l'arbre et 0.25 pour le codage de la phrase.

Question 15) Quelle est la longueur moyenne par lettre du code construit à la question précédente ?

$$l(C) = 4 \times 1 + 4 \times 3 + 2 \times 4 = 2.4$$

$$l(C) = 6 \times 2 + 4 \times 3 = 2.4$$

BARÈME : 0.5 points ; uniquement 0.25 si non justifié.

Question 16) Commentez les résultats obtenus aux questions 13 et 15. Sont-ils raisonnables ? Peut-on faire mieux ?

Discuter la valeur de l'entropie par rapport à log(10).

Discuter les 2 inégalités du th. de Shannon.

Pour savoir s'il l'ont peut faire mieux il faudrait calculer le code de Huffman (ou alors accepter des pertes !). En fait, il ne fait pas mieux.

BARÈME : 1.25 points : 0.25 pour la borne max. de l'entropie ; 0.5 pour la partie $H \leq L$ du th. de Shannon, 0.1 pour la partie $L < H + 1$; 0.4 pour l'optimalité du code de Huffman (0.25 pour dire qu'il pourrait peut être faire mieux et 0.15 pour explicitement mentioner son optimalité).

9 – Que fait-on au juste ? [4 points]

Considérez l'algorithme suivant :

Mystère
entrée : *Une liste L non vide de nombres et un nombre entier x non nul* sortie : *? ? ?*

$n \longleftarrow$ taille(L)
Si $n < x$
    sortir : $L[1]$ (premier élément de L)
$s \longleftarrow 0$
Pour i de 1 à x
    $s \longleftarrow s + L[i]$
Créer une liste M (de taille 1) contenant s/x
Pour i de $x+1$ à n
    $s \longleftarrow s - L[i-x]$
    $s \longleftarrow s + L[i]$
    ajouter s/x à la liste M
sortir : la liste M

Question 17) Que calcule cet algorithme ?

Il **ne** s'agit **pas** ici de paraphraser l'algorithme mais bien de montrer *conceptuellement* ce qui est calculé par cet algorithme. Une formule mathématique explicite/développée peut suffire (mais *une* phrase en français aussi).

Réponse : filtre à moyenne mobile discret sur x échantillons ($T_c = x\,T_e$).

BARÈME : 1 à 2 points : 0.75 pt pour « *filtre à moyenne mobile* » (que 0.5 pour « *filtre passe-bas* ») et 0.25 pour « sur x échantillons ».

1 pt pour « $T_c = x\,T_e$ » compté *soit* ici, *soit* dans l'explication suivante.

Question 18) On construit une liste M de taille m obtenue en appliquant l'algorithme précédent à la liste L de taille $n = m + x - 1$ telle que

$$L[i] = 3\,\sin(2\pi\,i\,f_1\,T_e) + 5\,\sin(2\pi\,i\,f_2\,T_e).$$

Pour $m \geq 100$, $x \geq 2$, $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, différent de $f1$, $T_e > 0$, tels que $2\,f_2\,T_e$ ne soit pas un nombre entier, est-il possible d'avoir une constante $K > 0$ telle que (on ne vous demande rien sur K)

$$M[i] \simeq K\,\sin\left(2\pi\,(i + \frac{n-m}{2})\,f_1\,T_e\right)\ ?$$

Si oui, à quelle(s) condition(s) sur x, T_e, f_1 et f_2 ? Justifier votre réponse (faites un/des schéma(s)). (Nous ne vous demandons ici que des conditions suffisantes, pas des conditions nécessaires.)

On applique un filtre passe-bas et l'on coupe la composante de fréquence $f2$, une condition suffisante est donc que $f1 < f2$.

Par ailleurs, on va éviter les fréquences parasites dûes à une « repliement de spectre » : $f_2 < \frac{f_e}{2}$

Le filtre à moyenne mobile a une période $T_c = x\,T_e$.

Pour supprimer complètement la 2e composante (f_2), il faut que x soit multiple de $\frac{1}{f_2\,T_e}$, sinon elle n'est pas totalement atténuée.

f_c sera alors nécessairement supérieure à f_1 et la laissera passer, de façon atténuée : c'est le coefficient de proportionnalité dont parle la donnée.

BARÈME : 2 à 3 points : 1 pt pour « $T_c = x\,T_e$ » si non compté ci-dessus ; 0.5 pt pour idée de couper f_2 (filtre passe-bas) ; 0.5 pour «donc $f_1 < f_2$», 0.5 pour mettre f_2 à un nœud du filtre (dessin) et 0.5 pour éviter de replier f_2, effet stroboscopique (dessin du spectre).