Examen

Remarque (mise en garde du scribe)
Ceci est une retranscription des questions de l'examen basée sur la mémoire de quelques uns de vos intrépides précurseurs. Ce document n'est donc pas officiel et peut comporter des erreurs.

Chacune des questions 1 à 13 est à choix multiple. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question. Pour chacune des questions à choix multiple, on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 point si la question reste sans réponse, -1 point si la réponse est fausse.
La question 14 (définitions) vaut 6 points.
La question 15 (démonstration) vaut 6 points.
Total possible : 51 points.

Problème 1. On considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(x, y, z) = (x + y, x + y + z, x + 2y).$$

Soit $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $F = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 = e_1$, $f_2 = 3e_2$, $f_3 = e_1 + e_3$. Soit $A = (\alpha)_E^E$ et $B = (\alpha)_F^F$.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $A_{23} = 2$
(B) $B_{23} = \frac{2}{3}$
(C) $B_{11} = 1$
(D) $B_{13} = 1$

Problème 2. Soit K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension 7.
On fixe une base $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)$ de V. Soit $U = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$, $W = \text{Vect}(f_4, f_5)$, $T = \text{Vect}(f_5, f_6)$.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $U \cap (W + T)$ est de dimension 2.
(B) La somme des sous-espaces vectoriels $U + W$ et T est une somme directe.
(C) $\forall x \in U + W,\ \exists y \in T$ tel que $x - y \in U$
(D) $\dim(U + W + T) > \dim(U + T)$

Problème 3. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs $f_1 = (1, a, 0, 0)$, $f_2 = (a, 1, 1, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1, 1)$, $f_4 = (0, a, 1, 1)$.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) Si $a = 0, \{f_1, f_2, f_3\}$ est une partie libre.
(B) $\forall a \in \mathbb{R},\ f_3 \in \text{Vect}\ (f_1, f_2)$
(C) $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.
(D) Si $a = 1$, $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ est de dimension 4.

Problème 4. Dans $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$, soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i & 2i \\ i & i & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 4i \\ 2i & -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) Si $c \neq i$, alors la dimension de $\mathrm{Vect}(A, B, C, D)$ vaut 4.

(B) Si $c = i$, alors la dimension de $\mathrm{Vect}(A, B, C, D)$ vaut 2.

(C) Pour tout $c \in \mathbb{C}$, la dimension de $\mathrm{Vect}(A, B, C, D)$ vaut 3.

(D) Si $c = 0$, alors la dimension de $\mathrm{Vect}(A, B, C, D)$ vaut 4.

Problème 5. Soit $\alpha\colon \mathbb{F}_5^4 \to \mathbb{F}_5^3$ l'application linéaire définie par :

$$\alpha(x, y, z, t) = (x + y + z + 2t,\ x + 4y + 4z + 3t,\ 3y + 3z + t)$$

Soit $v = (b, 1, 0) \in \mathbb{F}_5$.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $\forall b \in \mathbb{F}_5,\ v \in \mathrm{Im}(\alpha)$

(B) $\dim(\ker(\alpha)) = 2$

(C) $\forall b \in \mathbb{F}_5,\ v \notin \mathrm{Im}(\alpha)$

(D) Si $b \neq 2$, alors $\mathrm{Vect}(v) + \mathrm{Im}(\alpha) = \mathbb{F}_5^3$

Problème 6. Quel est le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, où $c \in \mathbb{R}$ est fixé ?

(A) $\det(A) = 3c$

(B) $\det(A) = 4$

(C) $\det(A) = -4$

(D) $\det(A) = 0$

Problème 7. Soit la transformation linéaire :

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A + {}^tA - 2\,\mathrm{Tr}(A) \cdot I_2 \end{aligned}$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = 3$

(B) $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = 1$

(C) $\dim(\ker(\phi)) = 2$

(D) ϕ est injective mais non surjective.

Problème 8. Soit la transformation linéaire :

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathbb{R}[t]_{\leq 3} &\to \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \\ f(t) &\mapsto (t+1)f'(t) + 3f(t) + (t^3+2)f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) 4 n'est pas valeur propre de ψ.

(B) 7 est valeur propre de ψ avec $m_{alg}(7) = 1$.

(C) 5 est valeur propre de ψ avec $m_{alg}(5) = 2$.

(D) 5 est valeur propre de ψ avec $m_{alg}(5) = 1$.

Problème 9. Soit A la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 est valeur propre. Quelles est sa multiplicité géométrique ?

(A) $m_{geom}(2) = 1$

(B) $m_{geom}(2) = 2$

(C) $m_{geom}(2) = 3$

(D) $m_{geom}(2) = 4$

Problème 10. Soit A la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } p \in \mathbb{R}, \text{fixé.}$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) Si $p = 0, A$ est diagonalisable.

(B) Si $p = 1, A$ est diagonalisable.

(C) Si $p = 2, A$ est diagonalisable.

(D) Si $p \neq 0, A$ n'est pas triangularisable.

Problème 11. Soit α une transformation linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 6.
2 et 5 sont valeurs propres, avec multiplicités algébriques $m_{alg}(2) = 3$ et $m_{alg}(5) = 2$. De plus, $\dim(\ker(\alpha)) = 1$.
Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) $\mathrm{Tr}(\alpha) = 7$

(B) $\mathrm{Tr}(\alpha) = 17$

(C) $\mathrm{Tr}(\alpha) = 16$

(D) $\det(\alpha) = 200$

Problème 12. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) A n'est pas inversible.

(B) $(A^{-1})_{11} = 1$

(C) $(A^{-1})_{31} = 2$

(D) $(A^{-1})_{13} = 0$

Problème 13. Soit V un K-espace vectoriel de dimension 5 et $\alpha\colon V \to V$ une transformation linéaire. Soit $W = \{v \in V \mid \alpha(v) = v\}$ le sous-espace vectoriel des vecteurs fixes par α. On suppose que W est de dimension 3 et que 0 est valeur propre de α avec $m_{geom}(0) = 2$.

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(A) 1 est valeur propre de α avec $m_{geom}(1) = 1$.

(B) Le terme constant de $c_\alpha(t)$ est non nul.

(C) $m_{alg}(0) = 3$

(D) α est diagonalisable.

Problème 14. ***(Définitions)***

A) Qu'est-ce que le rang d'une application linéaire ?

B) Qu'est-ce qu'une valeur propre d'une transformation linéaire ?

C) Qu'est-ce que le sous-espace engendré par deux vecteurs v_1, v_2 d'un K-espace vectoriel V ?

Problème 15. ***(Démonstration)***

Soit V un K-espace vectoriel et $\phi\colon V \to V$ une application K-linéaire. On suppose :

i) $\dim(V) = 10$

ii) $\phi \circ \phi = 0$ (application nulle)

iii) 0 est valeur propre de ϕ avec multiplicité géométrique 5.

Montrer que $\operatorname{Im}(\phi) = \ker(\phi)$.