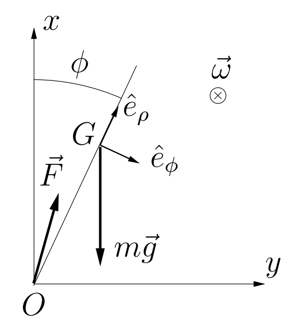
Corrigé du mini-test 5 : Pendule physique

(3 + 3 + 6 + 5 = 17 points au total)

a) (3 points au total)
Comme l'axe de rotation z_O est un axe principal d'inertie, le moment cinétique du solide par rapport au point O vaut

$$\vec{L}_O = I_{z_O}\,\vec{\omega} = I_{z_O}\,\dot{\phi}\,\hat{e}_z\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{A}} \tag{1}$$



où $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire de rotation instantanée. Le solide subit deux forces : son poids $m\vec{g}$, vertical vers le bas, s'appliquant au centre de masse G, et une force $\vec{F}$ de direction inconnue que l'axe de rotation applique au point O. Seul le poids a un moment non nul par rapport au point O.
Le théorème du moment cinétique, appliqué par rapport au point O, donne

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = d\,mg\sin\phi\,\hat{e}_z\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{B}} \tag{2}$$

La projection sur l'axe z donne l'équation différentielle pour $\phi(t)$:

$$\frac{d}{dt}(I_{z_O}\,\dot{\phi}) = mg\,d\,\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} = \frac{mg\,d}{I_{z_O}}\sin\phi\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{C}} \tag{3}$$

b) (3 points au total)
Le poids $m\vec{g}$ est une force conservative dérivant de l'énergie potentielle mgx, alors que la force $\vec{F}$ ne travaille pas car son point d'application O est fixe. Le système est conservatif et son énergie mécanique est conservée $\boxed{\text{1 point}}_{\text{D}}$. L'énergie mécanique du système est donnée par

$$E = \frac{1}{2}I_{z_O}\dot{\phi}^2 + mg\,d\cos\phi \;\boxed{\text{1 point}}_{\text{E}} = mg\,d\,, \;\boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \tag{4}$$

où la valeur $E = mg\,d$ est l'énergie du système à $t = 0$ quand $\phi(0) = 0$ et $\dot{\phi}(0) = 0$.
On peut vérifier que l'équation $dE/dt = 0$ est équivalente à l'équation (3). De l'équation (4) on tire

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2mg\,d}{I_{z_O}}(1 - \cos\phi)\,. \tag{5}$$

c) (6 points au total)
Pour déterminer la force $\vec{F}$, on utilise le théorème du centre de masse,

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}_G\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{G}} \tag{6}$$

qu'on projette sur les vecteurs unitaires $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$ du repère associé aux coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z). Le centre de masse est contraint à rester à une distance d du point O, donc $\rho(t) = d =$ constante $\boxed{\text{1 point}}_{\text{H}}$. Les projections donnent

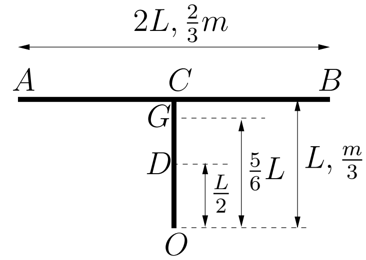
$$\begin{aligned} \text{sur } \hat{e}_\rho : \quad F_\rho - mg\cos\phi &= -md\dot{\phi}^2 \,, \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} &(7) \\ \text{sur } \hat{e}_\phi : \quad F_\phi + mg\sin\phi &= md\ddot{\phi} \,. \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}} &(8) \end{aligned}$$

En utilisant les équations (5) et (3), on obtient

$$\begin{aligned} F_\rho &= mg\cos\phi - \frac{2md^2}{I_{z_O}} mg(1-\cos\phi) \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} &(9) \\ F_\phi &= -mg\sin\phi + \frac{md^2}{I_{z_O}} mg\sin\phi = -\left(1 - \frac{md^2}{I_{z_O}}\right) mg\sin\phi \,. \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{L}} &(10) \end{aligned}$$

d) (5 points au total)

- Le solide est considéré comme formé de la barre AB (de masse $2m/3$ et de centre de masse C situé au milieu de AB) et de la barre OC (de masse $m/3$ et de centre de masse D au milieu de OC). Le centre de masse G du système formé des deux barres est donc donné par



$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\left(\frac{2m}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{m}{3}\overrightarrow{OD}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\frac{\overrightarrow{OC}}{2} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OC} \,. \tag{11}$$

La distance entre O et G vaut donc

$$d = \frac{5}{6}\overline{OC} = \frac{5}{6}L \,. \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{M}} \tag{12}$$

Le point G se trouve sur la barre OC à une distance cinq fois plus grande de O que de C (voir figure). $\boxed{\text{1 point pour un dessin avec } G \text{ au bon endroit}}_{\text{N}}$

- Le plan défini par les points A, B et O est un plan de symétrie du solide. Un axe perpendiculaire à ce plan et passant par n'importe quel point du solide (par exemple l'axe z_O par le point O) est un axe d'inertie principal en ce point. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{O}}$
- Soient I_P^{AB} et I_P^{OC} les moments d'inertie des barres AB et OC autour d'un axe z_P passant par P et perpendiculaire au plan défini par les points A, B et O. On calcule le moment d'inertie I_{z_O} du solide par rapport à l'axe z_O comme la somme des moments d'inertie I_O^{AB} et I_O^{OC} des deux barres AB et OC formant le solide. Pour chaque barre, on utilise le théorème de Steiner pour obtenir le moment d'inertie autour de l'axe z_O à partir de I_C^{AB} et I_D^{OC}. Ainsi

$$\begin{aligned} I_{z_O} &= I_O^{AB} + I_O^{OC} = \left(I_C^{AB} + \frac{2m}{3}\overline{CO}^2\right) + \left(I_D^{OC} + \frac{m}{3}\overline{DO}^2\right) \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{P}} \\ &= \left(\frac{1}{12}\frac{2m}{3}(2L)^2 + \frac{2}{3}mL^2\right) + \left(\frac{1}{12}\frac{m}{3}L^2 + \frac{m}{3}(L/2)^2\right) \\ &= \left(\frac{8}{36} + \frac{2}{3} + \frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right) mL^2 = \frac{8+24+1+3}{36} mL^2 = mL^2 \,. \; \boxed{\text{1 point}}_{\text{Q}} \end{aligned} \tag{13}$$