EPFL Automne 2017
Geometrie, MATH-120

Solutions série 7

Exercice 1. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un ensemble de n points. Leur barycentre est le point

$$\mathrm{Bar}(\mathcal{P}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Par exemple si $n = 2$, $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$.

– Montrer que le barycentre d'un triangle $\{P_1, P_2, P_3\}$ est le point d'intersection des trois medianes de ce triangle.

Solution 1. La médiane qui passe à travers P_1 relie P_1 au milieu M_1 du segment $[P_2P_3]$, qui est $\frac{1}{2}(P_2 + P_3)$. Le vecteur $P_1\vec{M}_1$ est $\frac{1}{2}(P_2 + P_3) - P_1$. Alors la médiane est décrite par l'equation $P_1 + tP_1\vec{M}_1 = P_1 + t(\frac{1}{2}(P_2 + P_3) - P_1)$, $t \in [0, 1]$. Si on prend $t = \frac{2}{3}$, on voit que le point $P_1 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(P_2 + P_3) - P_1) = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$ appartient à la médiane, mais ce point est exactement le barycentre $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$. De la même façon, on peut voir que $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$ appartient à chaque médiane et alors $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$ est leur point d'intersection.

Exercice 2.
1. Montrer que (a partir des definitions) les parallelogrammes sont exactement les quadrilateres tels que $d(P, Q) = d(R, S)$ et $d(Q, R) = d(S, P)$.
2. Montrer que etant donne un quadrilatere quelconque $[PQRS]$ les milieux des cotes
$$[PQ], [QR], [RS], [SP]$$
forment toujours un parallelogramme (Theoreme de Varignon).

Solution 2. Soit $[PQRS]$ un quadrilatère quelconque. Pour la **partie 1**, on prouve que les affirmations suivantes sont équivalentes : a) $[PQRS]$ est un parallélogramme ; b) $d(P, Q) = d(R, S)$ et $d(Q, R) = d(S, P)$.

a) implique b). Si $[PQRS]$ est un parallélogramme, alors il existe des réels λ et ρ tels que $\vec{PQ} = \lambda\vec{SR}$ et $\vec{RQ} = \rho\vec{SP}$. D'autre part, on peut écrire le vecteur $\vec{SQ}$ comme $\vec{SQ} = \vec{SP} + \vec{PQ} = \vec{SP} + \lambda\vec{SR}$, et aussi comme $\vec{SQ} = \vec{SR} + \vec{RQ} = \vec{SR} + \rho\vec{SP}$. L'identité de ces deux expressions nous apprend que $(1 - \rho)\vec{SP} = (1 - \lambda)\vec{SR}$. Ceci implique que

$\lambda = \rho = 1$, car les côtés consecutifs $[SP]$ et $[SR]$ ne peuvent pas être parallèles. Donc on a que $\vec{PQ} = \vec{SR}$ et $\vec{RQ} = \vec{SP}$, ce qui nous donne b) automatiquement.

b) implique a). Supposons que $d(P,Q) = d(R,S)$ et $d(Q,R) = d(S,P)$. On peut écrire la norme (carée) du vecteur $\vec{SQ}$ de deux façons :

$$\begin{aligned} d^2(S,Q) &= \|\vec{SP} + \vec{PQ}\|^2 = d^2(S,P) + d^2(P,Q) + 2\langle \vec{SP}, \vec{PQ}\rangle \\ &= \|\vec{SR} + \vec{RQ}\|^2 = d^2(S,R) + d^2(R,Q) + 2\langle \vec{SR}, \vec{RQ}\rangle. \end{aligned}$$

Après simplification des distances égales, on obtient que $\langle \vec{SP}, \vec{PQ}\rangle = \langle \vec{SR}, \vec{RQ}\rangle$. De la même manière avec le vecteur $\vec{RP}$, on peut montrer aussi l'identité $\langle \vec{RS}, \vec{SP}\rangle = \langle \vec{RQ}, \vec{QP}\rangle$. Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\begin{aligned} d^2(S,P) = \|\vec{SP}\| \cdot \|\vec{RQ}\| & \\ &\geqslant \langle \vec{SP}, \vec{RQ}\rangle = \langle \vec{SP}, \vec{RS} + \vec{SP} + \vec{PQ}\rangle \\ &= \langle \vec{SP}, \vec{RS}\rangle + \langle \vec{SP}, \vec{SP}\rangle + \langle \vec{SP}, \vec{PQ}\rangle \\ &= \langle \vec{RQ}, \vec{QP}\rangle + d^2(S,P) + \langle \vec{RQ}, \vec{SR}\rangle. \end{aligned}$$

Donc, on a que $0 \geqslant \langle \vec{RQ}, \vec{QP} + \vec{SR}\rangle$. Par symétrie, on peut montrer aussi que $0 \geqslant \langle \vec{RQ}, \vec{PQ} + \vec{RS}\rangle = -\langle \vec{RQ}, \vec{QP} + \vec{SR}\rangle$. Alors la seul solution possible est d'avoir cette inégalité de Cauchy-Schwarz avec égalité. Mais ceci implique que les vecteurs $\vec{SP}$ et $\vec{RQ}$ sont proportionels (et pareil pour $\vec{SR}$ et $\vec{PQ}$), d'où on obtient a).

Pour la **partie 2**, á partir de $[PQRS]$, on construit le nouveau quadrilatère $[ABCD]$, où

$$A := \frac{1}{2}(P+Q), \quad B := \frac{1}{2}(Q+R), \quad C : \frac{1}{2}(R+S), \quad D := \frac{1}{2}(S+P).$$

Alors, on a que

$$\vec{AB} = B - A = \frac{1}{2}(Q+R-P-Q) = \frac{1}{2}(R-P) = \frac{1}{2}(R+S-S-P) = C - D = \vec{DC}$$

et que

$$\vec{BC} = C - B = \frac{1}{2}(R+S-Q-R) = \frac{1}{2}(S-Q) = \frac{1}{2}(S+P-P-Q) = D - A = \vec{AD}.$$

Donc $[ABCD]$ est en effet un parallelogramme.

Exercice 7. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs non-nuls et orthogonaux ($\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$).

– On rappelle que tout vecteur $\vec{w}$ s'ecrit de maniere unique sous la forme

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

ou $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ont des expression explicites en terme de produit scalaire.

1. Soit $\text{Proj}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'application
$$\text{Proj}_{\vec{v}} : \vec{w} \mapsto \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$
Montrer que $\text{Proj}_{\vec{v}}$ est lineaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{w}, \vec{w'} \in \mathbb{R}^2$
$$\text{Proj}_{\vec{v}}(\lambda.\vec{w} + \vec{w}') = \lambda.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) + \text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w'}).$$
calculer son image et son noyau (utiliser la question precedente). Calculer $\text{Proj}_{\vec{v}} \circ \text{Proj}_{\vec{v}}$.
2. Pourquoi appelle-t-on $\text{Proj}_{\vec{v}}$ la *projection orthogonale sur la droite* $(\vec{v}) = \mathbb{R}\vec{v}$?
3. Soit $\text{sym}_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, l'application definie par
$$\text{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}).$$
Montrer que $\text{sym}_{\vec{u}}$ est lineaire et qu'elle preserve la longueur des vecteurs ($\|\text{sym}_{\vec{u}}(\vec{w})\| = \|\vec{w}\|$.) Montrer que c'est une isometrie.
4. Montrer que $\text{sym}_{\vec{u}}$ est bijective.
5. Que vaut $\text{sym}_{\vec{v}} \circ \text{sym}_{\vec{v}}$? L'application $\text{sym}_{\vec{v}}$ est la *symetrie orthogonale par rapport a l'axe* $(\vec{u}) = \mathbb{R}\vec{u}$

Solution 7. 1. On montre que $\text{Proj}_{\vec{v}}$ est lineaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{w'}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\vec{v}}(\lambda.\vec{w} + \vec{w}') &= \frac{\langle \lambda.\vec{w} + \vec{w'}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\lambda.\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w'}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \\ &= \lambda.\frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} + \frac{\langle \vec{w'}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \lambda.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) + \text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w'}) \end{aligned}$$
par bilinéarité du produit scalaire euclidien. L'image et le noyau se calculent en utilisant la décomposition $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ et le fait que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Par linéarité de $\text{Proj}_{\vec{v}}$, on a donc
$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\vec{v}} w = \frac{\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} &= \beta \frac{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \\ &= \beta\vec{v} \end{aligned}$$
donc $\text{Im}(\text{Proj}_{\vec{v}}) = \mathbb{R}\vec{v}$. Et donc on observe que $\text{Proj}_{\vec{v}} w = 0 \iff \beta = 0 \iff \vec{w} = \alpha\vec{u}$ et donc $\ker(\text{Proj}_{\vec{v}}) = \mathbb{R}\vec{u}$. Enfin, on a $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\vec{v}} \circ \text{Proj}_{\vec{v}}(w) = \text{Proj}_{\vec{v}}(\text{Proj}_{\vec{v}}(w)) &= \frac{\langle \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \\ &= \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} . \frac{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \\ &= \text{Proj}_{\vec{v}}(w) \end{aligned}$$

2. On l'apelle ainsi car toute application linéaire idempotente est une projection et cette projection est orthogonale sur $\mathbb{R}\vec{v}$ car $\ker(\text{Proj}_{\vec{v}}) = \mathbb{R}\vec{u} = \mathbb{R}\vec{v}^{\perp}$.
3. On vérifie que $\text{sym}_{\vec{u}}$ est bien linéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{w'}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\text{sym}_{\vec{u}}(\lambda.\vec{w} + \vec{w'}) &= \lambda.\vec{w} + \vec{w'} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\lambda.\vec{w} + \vec{w'}) \\ &= \lambda.\vec{w} + \vec{w'} - 2.(\lambda.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) + \text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w'})) \\ &= \lambda.(\vec{w} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w})) + \vec{w'} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w'}) \\ &= \lambda.\text{sym}_{\vec{u}}(\vec{w}) + \text{sym}_{\vec{u}}(\vec{w'})\end{aligned}$$

Ensuite, on vérifie que la longueur est conservée pour les vecteurs : $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\|\text{sym}_{\vec{u}}(\vec{w})\|^2 &= \|\vec{w} - 2.\beta.\vec{v}\|^2 = \|\alpha.\vec{u} - \beta.\vec{v}\|^2 \\ &= \langle \alpha.\vec{u} - \beta.\vec{v}, \alpha.\vec{u} - \beta.\vec{v} \rangle \\ &= \alpha^2.\beta^2 = \langle \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}, \alpha.\vec{u} + -\beta.\vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{w}\|^2\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont othogonaux et le fait que l'image de $\text{Proj}_{\vec{v}}$ est $\mathbb{R}\vec{v}$. Alors, comme la norme euclidienne est toujours positive, on en conclut que $\|\text{sym}_{\vec{u}}(\vec{w})\| = \|\vec{w}\| \quad \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2$.
On montre maintenant que c'est une isométrie. Plus généralement, soit ϕ une application linéaire qui preserve la longueur :
$\forall P, Q \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}d(\phi(P), \phi(Q)) &= \|\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}\| = \|\phi(P) - \phi(Q)\| = \|\phi(P - Q)\| \\ &= \|\phi(\vec{PQ})\| = \|\vec{PQ}\| = d(P, Q)\end{aligned}$$

donc ϕ est une isométrie.
4. On observe que $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\text{sym}_{\vec{u}}(\text{sym}_{\vec{u}}(\vec{w})) &= \text{sym}_{\vec{u}}(\vec{w} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w})) \\ &= \vec{w} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w})) \\ &= \vec{w} - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) - 2.\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) + 4.\text{Proj}_{\vec{v}}(\text{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w})) \\ &= \vec{w}\end{aligned}$$

donc $\text{sym}_{\vec{u}}$ est surjective. Pour l'injectivité on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{sym}_{\vec{u}}(\vec{w}) = 0 &\Leftrightarrow \vec{w} - 2.\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 2.\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \\
&\Leftrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 2.\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \\
&\Leftrightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 2.\beta\vec{v} \\
&\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \quad \text{par orthogonalite de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}
\end{aligned}$$

donc $\vec{w} = 0$ et $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ est inective donc bijective.

5. On a vu dans le point précédent que la composition de $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ avec elle même donnait l'identité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Soit X un ensemble fini de cardinal $|X| \geqslant 1$. Soit $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de X vers $\mathbb{R}$ (c'est un espace vectoriel pour l'addition des fonctions et pour la multiplication d'une fonction par un scalaire). Etant donnes deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ on pose

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)g(x).$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ defini un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$:
   — Est bilineaire,
   — Symetrique
   — Definie-Positive.
2. Montrer l'inegalite de Cauchy-Schwarz :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}),\ |\langle f, g\rangle| \leqslant \langle f, f\rangle^{1/2}\langle g, g\rangle^{1/2}$$

   et qu'on a egalite si et seulement si f et g sont proportionelles.
3. On pose

$$\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

   Montrer que l'application

$$d_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) & \mapsto & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ (f, g) & \mapsto & \|f - g\| \end{array}$$

   defini une distance homogene sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

Solution 8. 1. bilinearité : $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha.f + g, h\rangle &= \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(\alpha f + g)(x)h(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(\alpha f(x) + g(x))h(x) \\
&= \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}(\alpha f(x)h(x) + g(x)h(x)) \\
&= \frac{\alpha}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)h(x) + \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} g(x)h(x) \\
&= \alpha\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle
\end{aligned}$$

où on a utilisé la distributivité dans $\mathbb{R}$ et le fait que X est fini pour séparer la somme. Le fait que $\langle h, \alpha.f + g\rangle = \alpha\langle h, f\rangle + \langle h, g\rangle$ se prouve de manière similaire.

symétrique : immédiat par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$

definie-positive : $\forall f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)f(x) = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f^2(x) \geqslant 0$$

et en particulier, si on a égalité, alors forcément

$$f^2(x) = 0 \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow f = 0$$

2. Refaire ici exactement la même preuve que celle de Cauchy-Schwarz dans le cours en remplaçant les vecteurs par des fonctions.

3. séparation des points : $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
d_2(f, g) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \|f - g\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle f - g, f - g\rangle^{1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle f - g, f - g\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow f - g = 0 \quad \Leftrightarrow f = g
\end{aligned}$$

symétrie : $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
d_2(f, g) &= \|f - g\| = \langle f - g, f - g\rangle^{1/2} = (-\langle g - f, f - g\rangle)^{1/2} \\
&= \langle g - f, g - f\rangle^{1/2} = \|g - f\| = d_2(g, f)
\end{aligned}$$

inégalité du triangle : $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
d_2(f,h)^2 &= \|f-h\|^2 = \langle f-h, f-h\rangle = \langle f-g+g-h, f-g+g-h\rangle \\
&= \langle f-g, f-g\rangle + \langle f-g, g-h\rangle + \langle g-h, f-g\rangle + \langle g-h, g-h\rangle \\
&= \|f-g\|^2 + 2.\langle f-g, g-h\rangle + \|g-h\|^2 \\
&\leqslant \|f-g\|^2 + 2.|\langle f-g, g-h\rangle| + \|g-h\|^2 \\
&\leqslant \|f-g\|^2 + 2.\langle f-g, f-g\rangle^{1/2}\langle g-h, g-h\rangle^{1/2} + \|g-h\|^2 \\
&= \|f-g\|^2 + 2.\|f-g\|.\|g-h\| + \|g-h\|^2 \\
&= (\|f-g\| + \|g-h\|)^2 \\
&= (d_2(f,g) + d_2(g,h))^2
\end{aligned}$$

en utilisant Cauchy-Schwarz à la ligne 5 (pour la deuxième inégalité).

homogénéité : $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
d_2(\lambda f, \lambda g) &= \|\lambda f - \lambda g\| = \langle \lambda(f-g), \lambda(f-g)\rangle^{1/2} \\
&= (\lambda\langle f-g, \lambda(f-g)\rangle)^{1/2} \\
&= (\lambda^2\langle f-g, f-g\rangle)^{1/2} = |\lambda|\langle f-g, f-g\rangle^{1/2} \\
&= |\lambda| d_2(f,g)
\end{aligned}$$