# Corrigé 14 du mardi 20 décembre 2016

**Exercice 1.**

1.) Montrer que $\mathrm{tg} : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ est bijective.
Puisque $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on a $(\mathrm{tg})'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pour tout $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi tg est strictement croissante et continue. On a de plus $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\, x = \pm\infty$. Ainsi tg est bijective et analytique.
On définit la réciproque de la tangente, $\mathrm{arctg}(x) : \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2.) Montrer que $\dfrac{d}{dx}\mathrm{arctg}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On a $y = \mathrm{tg}\, x$ si et seulement si $x = \mathrm{arctg}\, y$ et donc $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x$. Dérivant cette égalité, on obtient $\mathrm{arctg}'(\mathrm{tg}\, x)\frac{1}{\cos^2 x} = 1$ ou encore $\mathrm{arctg}'(y) = \cos^2 x$, mais $\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$. Ainsi, $\dfrac{d}{dy}\mathrm{arctg}(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

3.) Montrer que:

$$\sin(2\theta) = \frac{2\mathrm{tg}(\theta)}{1+\mathrm{tg}^2(\theta)} \qquad \text{et} \qquad \cos(2\theta) = \frac{1-\mathrm{tg}^2(\theta)}{1+\mathrm{tg}^2(\theta)}$$

en utilisant les expressions complexes (rappel: $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$).
On a $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ et $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ d'où $\mathrm{tg}\, x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}$. Il vient $1+\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1/4(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)}$ et donc $\frac{2\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{2(e^{ix}-e^{-ix})1/4(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)}{i(e^{ix}+e^{-ix})} = \frac{1/2(e^{2ix}-e^{-2ix})(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)}{i(e^{2ix}+e^{-2ix}+2)} = \sin 2x$.
Idem pour le cos.

4.) Calculer:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt.$$

On remplace $\sin t$ par l'expression ci-dessus, puis ont fait le changement de variables $t = 2\mathrm{arctg} x, dt = \frac{2}{1+x^2}, x = \mathrm{tg}\, t/2$:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\mathrm{tg}^2(t/2)}{2\mathrm{tg}(t/2)}\, dt = \int_{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2dx}{1+x^2} = \int_{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}}^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}\, dx = \ln\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - \ln\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}.$$

5.) Calculer:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t}\, dt.$$

... on procède de la même manière...

**Exercice 2.**

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, est impaire alors, pour $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

En se basant sur l'exercice 2 série 14 du jeudi 22 décembre 2016, le résultat est immédiat car pour chaque $n$, par ex. pair $n = 2p$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} f\big(-a+(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big) &= \sum_{k=1}^{p} f\big(-a+(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big) + \sum_{k=p+1}^{2p} f\big(-a+(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big)\\
&= \sum_{k=1}^{p} f\big(-a+(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big) + \sum_{m=1}^{p} f\big(-a+(p+m-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big)\\
&= \sum_{k=1}^{p} f\big(-a+(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big) + \sum_{m=1}^{p} f\big(-a+(2p+1-m-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big)\\
&= \sum_{k=1}^{p} f\big(-a+(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big) + \sum_{m=1}^{p} f\big(a-(m-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big) = 0.\\
&= \sum_{k=1}^{p} \Big(f\big(-a+(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big) + f\big(a-(k-\frac{1}{2})\frac{a}{p}\big)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

... on peut aussi s'amuser avec des $\overline{S}_\sigma(f)$ et des $\underline{S}^\sigma(f)$ .

**Exercice 3.**

Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,x^n\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,}\\ \\ C_{n/2} & \text{sinon}\end{cases}$$

où $C_k = \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}$ est le k-ième nombre de Catalan (c.f. série jeudi 1er déc 2016, ex 2) .

On a, avec le changement de variables $x = 2\sin t, dx = 2\cos t dt, t = \arcsin x/2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,x^n\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,(2\sin t)^n\,2\cos t dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos t)^2\,(2\sin t)^n\,dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\,(2\sin t)^n\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin t)^n\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin t)^{n+2}\,dt.
\end{aligned}$$

Il est dès lors clair que, pour $n$ impair, ces deux intégrales s'annullent puisque l'intégrand est impair sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. On s'intéresse maintenant à

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin t)^{2k}\,dt.$$

ce qui donne, en utilisant l'expression complexe de sin ainsi que le binôme de Newton:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin t)^{2k}\,dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i}\Big)^{2k}\,dx = \frac{1}{(i)^{2k}}\sum_{j=0}^{j=2k}\binom{2k}{j}(-1)^{2k-j}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{ixj}e^{-ix(2k-j)}\,dx\\
&= \frac{1}{(i)^{2k}}\sum_{j=0}^{j=2k}\binom{2k}{j}(-1)^{2k-j}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{2ix(j-k)}\,dx = \frac{1}{(-1)^k}\binom{2k}{k}(-1)^{2k-k}\pi\\
&= \binom{2k}{k}\pi
\end{aligned}$$

puisque l'intégrale est non nulle seulement si $j = k$. Si on revient à l'intégrale de départ, avec $n = 2k$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,x^n\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin t)^n\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin t)^{n+2}\,dt\\
&= 2\binom{2k}{k} - \frac{1}{2}\binom{2(k+1)}{k+1} = \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1} = C_k.
\end{aligned}$$