Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 21 au 25 novembre 2016

Série 10 du jeudi 24 novembre 2016

Rappel 1.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance α est définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\forall x > 0$.

Rappel 2.

On admet les développements limités suivants (!):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}\left(|x|^8\right), \text{ si } x \to 0,$$
$$\cos z = \cos(1) - \sin(1)(z-1) - \frac{\cos(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}(z-1)^3 + \mathcal{O}\left(|z-1|^4\right), \text{ si } z \to 1,$$
$$\ln(z) = (z-1) - \frac{1}{2!}(z-1)^2 + \mathcal{O}(|z-1|^3), \quad \text{si } z \to 1.$$

Exercice 1 (* A rendre).

Calculer les limites suivantes: 1.) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{1 - \cos x^6}{x^{12}}$, 2.) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 2.

Calculer les limites suivantes:

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{(\sin x)^m}{(1 - \cos x)^n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq m, n \leq 2$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha \ln x$, avec $\alpha > 0$.

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, avec $\alpha > 0$.

Exercice 3.

Trouver le polynôme de Taylor d'ordre m autour de 0 des fonctions suivantes:

1.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \cos(x^2)$ et $m = 4$,

2.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\cos(x))$ et $m = 6$,

3.) $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\cos(x))$ et $m = 4$.

Exercice 4.

Supposons qu'on ait une quantité $x > 0$ d'une certaine ressource que l'on veut partager en n parties $x_1, \ldots, x_n$ avec $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ et $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq x$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On veut maximiser $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$.
Montrer que si f est strictement concave, alors la seule solution optimale est le choix $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{x}{n}$.
Indication: montrer que si $x_i \neq x_j$, alors on peut trouver une meilleure solution en remplaçant x_i et x_j par $x_i' = x_j' = \frac{x_i + x_j}{2}$.