



Ens: Prof. A. Abdulle - Algèbre Linéaire Avancée I - MA
22 janvier 2016 - durée: 3 heures



1

XXX

SCIPER: XXX

TOTAL DES POINTS: XX points.

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient XX pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Les questions **ouvertes** valent 24 points au total. Le nombre de points de chaque question ouverte est précisé entre parenthèses.
- Utilisez un **crayon** et effacez proprement avec une **gomme** si nécessaire.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses**.



oui | ja | sì | yes



non | nein | non | no





Question 1 Soit $\mathcal{P}_2(t)$ l'anneau des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} et $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{P}_2(t)$ une application linéaire définie par

$$f \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (2+i)z_1 + iz_2t + (z_1 + z_2)t^2.$$

Soient $E = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{C}^2 , espace vectoriel sur \mathbb{C} , et B la base canonique de $\mathcal{P}_2(t)$. Soient $G = (t-1, it+t^2, 2-t+it^2)$ une autre base de $\mathcal{P}_2(t)$ et $F = (w_1, w_2)$ une base de \mathbb{C}^2 . On suppose que la matrice de f par rapport aux bases F et G soit donnée par

$$\begin{pmatrix} -i & 2i \\ 1-2i & -1+3i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors la base $F = (f_1, f_2)$ est donnée par

☒ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix}.$

☐ $f_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

☐ $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1-i \end{pmatrix}.$

☐ $f_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Question 2 On considère l'ensemble suivant de matrices de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

$$E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

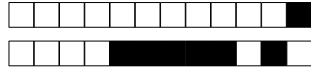
Laquelle des assertions suivantes est correcte?

☐ En complétant E par une matrice bien choisie, on trouve 6 matrices qui forment une base de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

☒ En enlevant à E une de ses matrices on trouve 4 matrices qui forment une base d'un sous-espace vectoriel de dimension 4.

☐ Les 5 matrices de E forment une base d'un sous-espace vectoriel de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 5.

☐ Les 5 matrices de E engendrent un sous-espace vectoriel de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ de dimension ≤ 3 .



Question 3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & a & -a \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}),$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = t - 1$ si $a = 0$.
- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = (t - 1)^2$ si $a = 0$.
- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = (t - 1)^2$ si $a = 1$.
- ☐ Le polynôme minimal $m_A(t) = (t - 1)^3$ si $a = 1$.

Question 4 On considère l'application \mathbb{C} -linéaire

$$f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + iz \\ iy - ix \\ z \end{pmatrix}.$$

Soit $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{C}^3 , espace vectoriel sur \mathbb{C} , et soit $B = (b_1, b_2, b_3)$ la base définie par $b_1 = e_1$, $b_2 = ie_2$, et $b_3 = e_2 + ie_3$. Laquelle des matrices suivantes est la matrice M de l'application f par rapport à la base B .

☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & i+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -i & i-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

☒ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & i & i+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & -1 & i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$



Question 5 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $P \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ donnée par

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

☐ $\ker P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad a^2x + b^2y + c^2z = 0 \right\}.$

☒ $\ker P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad ax + by + cz = 0 \right\}.$

☐ $\ker P = \mathbb{R}^3.$

☐ $\ker P = \{0\}.$

Question 6 Soit $\mathbb{R}(t)$ l'espace vectoriel des polynômes en t à coefficients dans \mathbb{R} . On considère les sous-espaces vectoriels suivants

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}(t); \deg(p(t)) \leq 5\},$$

$$V = \{p(t) \in \mathbb{R}(t); p(0) = 0\},$$

$$W = \{p(t) \in \mathbb{R}(t); p(t) = q(t)t^2, \text{ avec } q(t) \in \mathbb{R}(t)\}.$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

☐ $U \cap V = \{0\}.$

☐ $V + W = \mathbb{R}(t).$

☐ $V \cap W$ est de dimension finie.

☒ $U \cap W$ est de dimension 4.



Question 7 Soit K un corps. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(K).$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ Pour $a \neq 0, b = 0$, A est diagonalisable.
- ☐ Pour $b \neq 0, c = 0$, A est diagonalisable.
- ☐ Pour $a \neq b \neq c \neq 0$, A est diagonalisable.
- ☒ Pour $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, A n'est pas diagonalisable.

Question 8 Soit $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que pour les bases canoniques $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de \mathbb{R}^5 et (b_1, b_2, b_3) de \mathbb{R}^3 on ait

$$\begin{aligned} f(e_1) &= b_2 + 2b_3, & f(e_2) &= b_1 + b_2 + b_3, \\ f(e_3) &= b_1, & f(e_4) &= 2b_1 + b_2 + b_3, \\ f(e_5) &= b_2 + 2b_3. \end{aligned}$$

Alors pour la forme échelonnée réduite $C = (c_{ij})$ de la matrice $A = (a_{ij})$ telle que $f(x) = Ax$ pour $x \in \mathbb{R}^5$ on a

- ☐ $c_{33} = 0$.
- ☐ $c_{34} = 0$.
- ☐ $c_{24} = 0$.
- ☒ $c_{23} = 0$.



Question 9 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + 1 \neq 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} b & a & b \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & a \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ A est diagonalisable si et seulement si $a \neq b$.
- ☐ A est triangularisable si et seulement si $a \neq b$.
- ☐ A est diagonalisable si et seulement si $a = b$.
- ☐ A est triangularisable si et seulement si $a = b$.

Question 10 Sachant que le déterminant

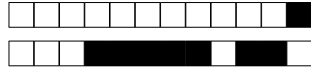
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 5.$$

Alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 2d \\ i & j & k & 2l \\ 3m + e & 3n + f & 3o + g & 6p + 2h \\ 5m & 5n & 5o & 10p \end{vmatrix},$$

vaut

- ☐ -150 .
- ☐ 50 .
- ☒ -50 .
- ☐ 150 .



Question 11 On considère le système linéaire

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0, \\2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\-3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 4x_5 &= 0.\end{aligned}$$

Soit W l'ensemble de toutes les solutions de ce système dans \mathbb{R}^5 . Laquelle des assertions suivantes est correcte?

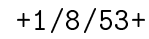
- ☒ W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 de dimension 2.
- ☐ W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 de dimension 3.
- ☐ $W = \{(0, 0, 0, 0, 0)^\top\}$.
- ☐ W n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 .

Question 12 On considère la matrice $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{F}_5)$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

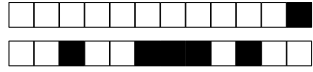
- ☒ A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ alors $b_{13} = 2$.
- ☐ A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ alors $b_{12} = 2$.
- ☐ A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ alors $b_{23} = 2$.
- ☐ A n'est pas inversible.



- i) Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1 .
- ii) Vérifier que pour tout $v \in V$ on a $f(v - f(v)) = -(v - f(v))$ et $f(v + f(v)) = v + f(v)$. En déduire que f admet toujours une valeur propre.
- iii) Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres alors V est la somme directe des sous-espaces propres correspondants.

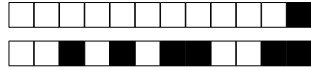
Laisser libre pour les correcteurs

Case No.	Case Name	Case Type	Case Status	Case Date	Case Location	Case Description	Case Details	Case Notes	Case Comments	Case Actions
1	John Doe	Case 1	Open	2023-01-01	New York	Case 1 Description	Case 1 Details	Case 1 Notes	Case 1 Comments	Case 1 Actions
2	Jane Smith	Case 2	Closed	2023-01-02	California	Case 2 Description	Case 2 Details	Case 2 Notes	Case 2 Comments	Case 2 Actions
3	Bob Johnson	Case 3	Pending	2023-01-03	Texas	Case 3 Description	Case 3 Details	Case 3 Notes	Case 3 Comments	Case 3 Actions
4	Alice Brown	Case 4	Open	2023-01-04	Florida	Case 4 Description	Case 4 Details	Case 4 Notes	Case 4 Comments	Case 4 Actions
5	Charlie White	Case 5	Closed	2023-01-05	Illinois	Case 5 Description	Case 5 Details	Case 5 Notes	Case 5 Comments	Case 5 Actions
6	Diana Green	Case 6	Pending	2023-01-06	Ohio	Case 6 Description	Case 6 Details	Case 6 Notes	Case 6 Comments	Case 6 Actions
7	Frank Black	Case 7	Open	2023-01-07	Georgia	Case 7 Description	Case 7 Details	Case 7 Notes	Case 7 Comments	Case 7 Actions
8	Grace King	Case 8	Closed	2023-01-08	Arizona	Case 8 Description	Case 8 Details	Case 8 Notes	Case 8 Comments	Case 8 Actions
9	Henry Lee	Case 9	Pending	2023-01-09	Colorado	Case 9 Description	Case 9 Details	Case 9 Notes	Case 9 Comments	Case 9 Actions
10	Ivy Hall	Case 10	Open	2023-01-10	Connecticut	Case 10 Description	Case 10 Details	Case 10 Notes	Case 10 Comments	Case 10 Actions
11	Jack Adams	Case 11	Closed	2023-01-11	Delaware	Case 11 Description	Case 11 Details	Case 11 Notes	Case 11 Comments	Case 11 Actions
12	Karen Baker	Case 12	Pending	2023-01-12	Idaho	Case 12 Description	Case 12 Details	Case 12 Notes	Case 12 Comments	Case 12 Actions
13	Liam Clark	Case 13	Open	2023-01-13	Indiana	Case 13 Description	Case 13 Details	Case 13 Notes	Case 13 Comments	Case 13 Actions
14	Mia Evans	Case 14	Closed	2023-01-14	Iowa	Case 14 Description	Case 14 Details	Case 14 Notes	Case 14 Comments	Case 14 Actions
15	Noah Foster	Case 15	Pending	2023-01-15	Kansas	Case 15 Description	Case 15 Details	Case 15 Notes	Case 15 Comments	Case 15 Actions
16	Olivia Gibson	Case 16	Open	2023-01-16	Kentucky	Case 16 Description	Case 16 Details	Case 16 Notes	Case 16 Comments	Case 16 Actions
17	Peter Hall	Case 17	Closed	2023-01-17	Louisiana	Case 17 Description	Case 17 Details	Case 17 Notes	Case 17 Comments	Case 17 Actions
18	Quinn Ives	Case 18	Pending	2023-01-18	Maine	Case 18 Description	Case 18 Details	Case 18 Notes	Case 18 Comments	Case 18 Actions
19	Rachel King	Case 19	Open	2023-01-19	Massachusetts	Case 19 Description	Case 19 Details	Case 19 Notes	Case 19 Comments	Case 19 Actions
20	Samuel Lee	Case 20	Closed	2023-01-20	Michigan	Case 20 Description	Case 20 Details	Case 20 Notes	Case 20 Comments	Case 20 Actions
21	Tina Miller	Case 21	Pending	2023-01-21	Minnesota	Case 21 Description	Case 21 Details	Case 21 Notes	Case 21 Comments	Case 21 Actions
22	Uma Nunez	Case 22	Open	2023-01-22	Mississippi	Case 22 Description	Case 22 Details	Case 22 Notes	Case 22 Comments	Case 22 Actions
23	Victor Ortiz	Case 23	Closed	2023-01-23	Montana	Case 23 Description	Case 23 Details	Case 23 Notes	Case 23 Comments	Case 23 Actions
24	Wendy Parker	Case 24	Pending	2023-01-24	Nebraska	Case 24 Description	Case 24 Details	Case 24 Notes	Case 24 Comments	Case 24 Actions
25	Xavier Quinn	Case 25	Open	2023-01-25	Nevada	Case 25 Description	Case 25 Details	Case 25 Notes	Case 25 Comments	Case 25 Actions
26	Yara Ramirez	Case 26	Closed	2023-01-26	New Hampshire	Case 26 Description	Case 26 Details	Case 26 Notes	Case 26 Comments	Case 26 Actions
27	Zoe Roberts	Case 27	Pending	2023-01-27	New Jersey	Case 27 Description	Case 27 Details	Case 27 Notes	Case 27 Comments	Case 27 Actions
28	Adam Scott	Case 28	Open	2023-01-28	New Mexico	Case 28 Description	Case 28 Details	Case 28 Notes	Case 28 Comments	Case 28 Actions
29	Bella Taylor	Case 29	Closed	2023-01-29	New York	Case 29 Description	Case 29 Details	Case 29 Notes	Case 29 Comments	Case 29 Actions
30	Chris White	Case 30	Pending	2023-01-30	North Carolina	Case 30 Description	Case 30 Details	Case 30 Notes	Case 30 Comments	Case 30 Actions
31	Diana Young	Case 31	Open	2023-01-31	North Dakota	Case 31 Description	Case 31 Details	Case 31 Notes	Case 31 Comments	Case 31 Actions
32	Ethan Green	Case 32	Closed	2023-02-01	Ohio	Case 32 Description	Case 32 Details	Case 32 Notes	Case 32 Comments	Case 32 Actions
33	Fiona Hall	Case 33	Pending	2023-02-02	Oklahoma	Case 33 Description	Case 33 Details	Case 33 Notes	Case 33 Comments	Case 33 Actions
34	Gavin King	Case 34	Open	2023-02-03	Oregon	Case 34 Description	Case 34 Details	Case 34 Notes	Case 34 Comments	Case 34 Actions
35	Hannah Lee	Case 35	Closed	2023-02-04	Pennsylvania	Case 35 Description	Case 35 Details	Case 35 Notes	Case 35 Comments	Case 35 Actions
36	Ian Miller	Case 36	Pending	2023-02-05	Rhode Island	Case 36 Description	Case 36 Details	Case 36 Notes	Case 36 Comments	Case 36 Actions
37	Jessica Nunez	Case 37	Open	2023-02-06	South Carolina	Case 37 Description	Case 37 Details	Case 37 Notes	Case 37 Comments	Case 37 Actions
38	Kyle Ortiz	Case 38	Closed	2023-02-07	South Dakota	Case 38 Description	Case 38 Details	Case 38 Notes	Case 38 Comments	Case 38 Actions
39	Laura Parker	Case 39	Pending	2023-02-08	Tennessee	Case 39				



+1/9/52+



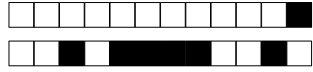


Question 14 (6pts) (6pts) Soit $A \in M_{m \times n}(K)$, où K est un corps et $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalents:

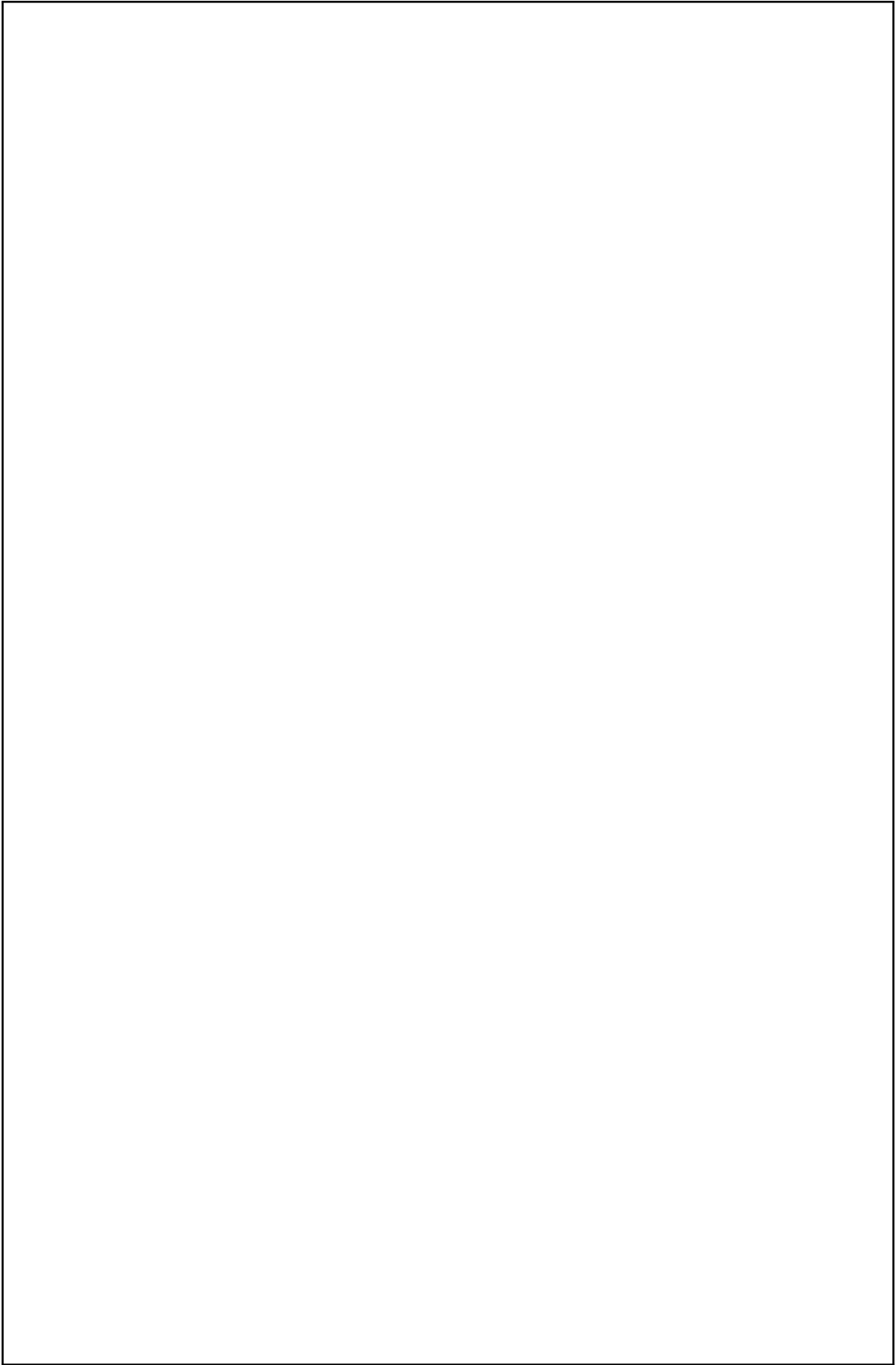
- $\text{rang } A = 1$
- Il existe $u \in M_{m \times 1}(K)$ et $v \in M_{n \times 1}(K)$ tels que $A = uv^T$.

Laisser libre pour les correcteurs





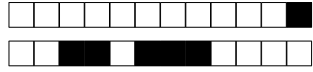
+1/11/50+





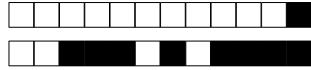
Question 15 (6pts) Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces vectoriels de V , un K -espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe $f \in L(V, V)$ telle que $\ker(f) = W_1$ et $\text{Im}(f) = W_2$ si et seulement si $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

Laisser libre pour les correcteurs ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐



+1/13/48+





Question 16 (4pts) Soit $(G, +)$ un groupe et $f : G \rightarrow G$ l'application définie par $f(x) = -x$. Montrer que f est un homomorphisme de groupe si et seulement si G est abélien.

Laisser libre pour les correcteurs





+1/15/46+





+1/16/45+

1 – XXX XXX