Analyse avancée I — Semaine du 26 au 30 septembre 2016
Mathématiques 1ère année
Prof. Cl. Hongler

Série 2 du mardi 27 septembre 2016

Exercice 1.

Prouver scrupuleusement les énoncés suivants pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1.) $x^2 \geq 0$,
2.) $x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow x.z \geq y.z$,
3.) $|xy| = |x|.|y|$.

On rappelle les axiomes pour l'ordre sur $\mathbb{R}$ (c.f Douchet-Zwahlen):

1.) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
2.) $x \leq y$ et $y \leq x \Leftrightarrow x = y$
3.) $\forall x, y,\ x \leq y$ ou $y \leq x$
4.) $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
5.) $0 \leq x$ et $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Exercice 2.

Calculer

1.) $\dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 8} + \ldots + \dfrac{1}{2012 \cdot 2014}$.
2.) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{2013 \cdot 2015}$.

Exercice 3.

1.) Soient $\varnothing \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, B majoré. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

2.) Trouver une suite d'intervalles ouverts $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ tq
   1.) $\cap_{n=1}^{n=\infty} A_n$ est un intervalle ouvert,
   2.) $\cap_{n=1}^{n=\infty} A_n$ est un intervalle fermé.

3.) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ une suite d'ensembles bornés.
   1.) est-ce que $\cap A_n$ est borné?
   2.) est-ce que $\cup A_n$ est borné?
   Donner la preuve ou un contre exemple.

4.) Montrer qu'un ensemble fini A est borné et donner $\sup A$ et $\inf A$.

5.) Soient $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, majoré et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a = \sup A$ si et seulement:
   1.) a est un majorant de A,
   2.) il existe une suite $(a_n) \subset A$ qui converge vers a.