EPFL Automne 2017

Geometrie, MATH-120

Série 9

L'application de transposition ${}^t\cdot : M_2(\mathbb{R}) \mapsto M_2(\mathbb{R})$ est l'application sur l'espace des matrices 2×2 definie par

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto {}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On a vu dans le cours que si $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$ est une isometrie lineaire de matrice M la matrice de ϕ^{-1} est donnee par ${}^tM$ et donc

$$M.{}^tM = {}^tM.M = \mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1. 1. Montrer reciproquement que si M est une matrice verifiant

$${}^tM.M = \mathrm{Id}_2$$

alors l'application lineaire de $\mathbb{R}^2$ associee a M est une isometrie (on pourra utiliser l'Exercice 1 de la serie precedente.)

Exercice 2. Montrer que transposition a les proprietes suivantes

1. ^{t} est lineaire :
$${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^tM + {}^tN.$$
2. ^{t} est involutive :
$${}^t\cdot \circ {}^t\cdot = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})},\ {}^t({}^tM) = M.$$
3. La transposition est multiplicative :
$${}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM.$$
4. La transposition preserve le determinant $\det(M) = ad - bc$.
$$\det({}^tM) = \det(M).$$

Soit

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ M.{}^tM = {}^tM.M = \mathrm{Id}_2\}$$

le groupe des matrices orthogonales : c'est un groupe car il correspond au groupe des isometries lineaires. Ce groupe se decompose en deux sous-ensembles (des matrices speciales et non-speciales, ou encore matrices de rotations et matrices de symetries)

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^+ \cup \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^-$$

avec

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^+ = \{M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} \end{pmatrix},\ \mathrm{c}, \mathrm{s} \in \mathbb{R},\ \mathrm{c}^2 + \mathrm{s}^2 = 1.\}$$

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^- = \{M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & -\mathrm{c} \end{pmatrix},\ \mathrm{c}, \mathrm{s} \in \mathbb{R},\ \mathrm{c}^2 + \mathrm{s}^2 = 1.\}$$

Exercice 3. 1. Montrer que la reunion ci-dessus est disjointe :

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^+ \cap \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^- = \emptyset.$$

2. Montrer que $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe abelien de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et qu'il est distingue.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} \mathrm{c}' & -\mathrm{s}' \\ \mathrm{s}' & \mathrm{c}' \end{pmatrix}$ des matrices de rotations et $M'' = M.M' = \begin{pmatrix} \mathrm{c}" & -\mathrm{s}" \\ \mathrm{s}" & \mathrm{c}" \end{pmatrix}$ le produit. Que vous evoque les expressions de $\mathrm{c}", \mathrm{s}"$ en fonction de c, s et c', s'.
4. Montrer que tout element de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^-$ est d'ordre 2.
5. A quel ensemble appartiennent les produits $M^+.M^-$ et $M^-.M^+$ d'un element de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^+$ et d'un element de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^-$.
6. Montrer que pour tout $M^- \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^-$, on a

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^- = M^-.\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^+ = \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^+.M^-.$$

Exercice 4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non-nuls orthogonaux. On a vu que l'application

$$\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2.\frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$$

est une isometrie lineaire. Sa matrice dans la base canonique appartient donc a $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'elle appartient a $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^-$.