Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 14 au 18 novembre 2016

Corrigé 9 du mardi 15 novembre 2016

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Vérifier que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a). \quad \text{(Dérivée centrée)}$$

1.) Si f est dérivable alors

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

et par suite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = f'(a).$$

2.) L'existence de cette dernière limite n'entraîne PAS celle de $f'(a)$. Contre exemple : $f(x) = |x|$ et $a = 0$.

Exercice 2 (* A rendre) .

Si $0 \neq x \in [-1, 1]$, on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
Ainsi $\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f'(x) = 0$.

D'autre part, $f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$.

De même, $f'_g(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$.

De plus, il n'y a pas de problème aux points $x = 1$ et $x = -1$. Ainsi, $f' \in C^0([-1, 1])$ et donc $f \in C^1([-1, 1])$.
Si $0 \neq x \in [-1, 1]$, on a $f''(x) = 6x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et ainsi $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f''(x)$ n'existe pas. La fonction $f \notin C^2([-1, 1])$.
En conclusion, $f \in C^1([-1, 1])$, mais $f \notin C^m([-1, 1])$ avec $m \geq 2$.

Exercice 3.

On pose $p(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ et $h(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(b) - p(b)}{(b - a)^2}(x - a)^2$. On a $h(a) = h(b) = 0$.
Par le théorème de Rolle, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $h'(\xi) = 0$.
Calculons

$$h'(x) = f'(x) - p'(x) - 2\frac{f(b) - p(b)}{(b - a)^2}(x - a),$$

on a donc $h'(a) = f'(a) - p'(a) = 0$.
En réutilisant le théorème de Rolle encore une fois sur h' on aura l'existence de $c \in]a, \xi[$ tel que $h''(c) = 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} & f''(c) - \underbrace{p''(c)}_{=0} - 2\frac{f(b)-p(b)}{(b-a)^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & f(b) = p(b) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2 = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2. \end{aligned}$$

Exercice 4.

Montrons que si la dérivée d'une fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ n'est pas bornée alors f n'est pas Lipschitz.
Soit $x \in]0,1[$ tq $|f'(x)| > K > 0$. Alors,

$$|f'(x)| = \Big|\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Big| = \lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = \alpha > K.$$

Il existe donc $\delta > 0$ tq si $|x-y| < \delta$, $y \in]0,1[$, on ait

$$\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} > K + \frac{\alpha - K}{2} > K.$$

On a donc trouvé $x, y \in]0,1[$ tels que $|f(y)-f(x)| > K|y-x|$. Comme f' n'est pas bornée, pour tout $K > 0$, il existe $x \in]0,1[$ tq $|f'(x)| > K$ et donc on ne peut trouver de K qui vérifie

$$|f(y)-f(x)| \leq K|y-x|, \ \forall x, y \in]0,1[.$$

f n'est pas Lipschitz.

Si on pose $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ sur $]0,1[$, on a immédiatement

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

qui n'est pas bornée. f n'est donc pas Liptshitz sur $]0,1[$.