EPFL Automne 2017

Geometrie, MATH-120

Série 7

Les exercices qui suivent sont des problemes classique de geometrie elementaire a resoudre par des calculs algebriques a base de distance euclidienne et de produit scalaire (et non par des dessins) sur des coordonnes en choisissant convenablement le meilleur moyen de representer les objets geometriques.

— Etant donne $P, Q \in \mathbb{R}^2$, le segment $[PQ]$ est l'ensemble des points R de la forme
$$R = P + t\vec{PQ},\ t \in [0,1].$$

— Soit $n \geqslant 3$ un entier, un polygone $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ a n cotes est une reunion de segments (appeles cotes du polygone) de la forme
$$\mathbf{P} = \bigcup_{i=1\cdots n} [P_i P_{i+1}]$$
avec
$$P_1, \cdots, P_n,\ P_{n+1} = P_1$$
un ensemble de n points distincts du plan (qu'on appelle sommets du polygone), tels que deux cotes consecutifs ne sont pas paralleles et tels que deux cotes ne se coupent que s'ils sont consecutifs et alors en un seul point (le sommet bordant les deux cotes). On notera un polygone
$$\mathbf{P} = [P_1 \cdots P_n].$$

— Un polygone a 3 cotes et un triangle, a 4 un quadrilatere etc... Un triangle rectangle est un triangle dont deux cotes sont perpendiculaires. etc...

— Un parallelogramme est un quadrilatere $[PQRS]$ tel que les paires de cotes opposes $([PQ],[RS])$ et $([QR],[SP])$ sont paralleles

Exercice 1. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un ensemble de n points. Leur barycentre est le point
$$\mathrm{Bar}(\mathcal{P}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i.$$
Par exemple si $n = 2$, $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$.

– Montrer que le barycentre d'un triangle $[P_1, P_2, P_3]$ est le point d'intersection des trois medianes de ce triangle.

Exercice 2. 1. Montrer que (a partir des definitions) les parallelogrammes sont exactement les quadrilateres tels que $d(P,Q) = d(R,S)$ et $d(Q,R) = d(S,P)$.

2. Montrer que etant donne un quadrilatere quelconque $[PQRS]$ les milieux des cotes $[PQ], [QR], [RS], [SP]$ forment toujours un parallelogramme (Theoreme de Varignon).

Exercice 3. Soit $\mathcal{D} = P + \mathbb{R}\vec{u} \subset \mathbb{R}^2$ une droite et $Q \in \mathbb{R}^2$ un point.

1. Montrer que la fonction
$$R \in \mathcal{D} \mapsto d(R,Q) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$
qui donne la distance d'un point de $\mathcal{D}$ a Q admet un minimum qu'on appelle distance de Q a la droite $\mathcal{D}$ et qu'on note $d(\mathcal{D},Q)$ et que ce minimum atteint en un unique point R_0 (on pourra parametrer les points de $\mathcal{D}$ sous la forme $P + t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$ et pour simplifier les calculs on pourra considerer le carre de la distance $d(R,Q)^2$).
2. Que dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{R_0Q}$?

Exercice 4. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{C}$ un cercle. Montrez que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en 0, 1 ou 2 points. Caracteriser les trois possibilites en fonction de la distance de $\mathcal{D}$ au centre du cercle.

Exercice 5 (Theoreme de l'hypothenuse)**.** Soient $P \neq Q$ deux points et $\mathcal{C}$ le cercle de centre le milieu de $[PQ]$ et de rayon $d(P,Q)/2$. Montrer que pour tout point $R \in \mathcal{C}$ le triangle $[PQR]$ est rectangle en R.

Exercice 6 (Triplets euclidiens)**.** ($\star$) Un triplet d'entiers $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ est euclidien si
$$a^2 + b^2 = c^2 :$$
en d'autres termes si le triangle de cotes de longueurs entieres $|a|, |b|, |c|$ est rectangle. Par exemple $(1,0,1)$ est un triplet euclidien, $(3,4,5)$ en est un autre qu'on appelle *triplet des maçons* (pourquoi ?).

Montrer que tout triplet euclidien peut etre obtenu par la recette suivante (faire un dessin) :

1. Soit $\mathcal{C} = C(\mathbf{0},1)$ le cercle unite centre en l'origine et $P = (-1,0) \in \mathcal{C}$,
2. Montrer que pour tout nombre rationnel $\lambda \in \mathbb{Q}$ la droite $D(P,\lambda)$ passant par P et de pente λ (ie. de direction le vecteur $(1,\lambda)$)intersecte $\mathcal{C}$ en exactement deux points P et Q_λ et que les coordonnes de ce dernier sont des nombres rationels (x_λ, y_λ).
3. Montrer que (x_λ, y_λ) peut toujours se mettre sous la forme $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ avec $a,b,c \in \mathbb{Z}$ (et ce de multiples manieres) et que (a,b,c) est un triplet euclidien.

Exercice 7. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs non-nuls et orthogonaux ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$).

– On rappelle que tout vecteur $\vec{w}$ s'ecrit de maniere unique sous la forme

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

ou $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ont des expression explicites en terme de produit scalaire.

1. Soit $\mathrm{Proj}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'application
$$\mathrm{Proj}_{\vec{v}} : \vec{w} \mapsto \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$
Montrer que $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}$ est lineaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{w}, \vec{w}' \in \mathbb{R}^2$
$$\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\lambda.\vec{w} + \vec{w}') = \lambda.\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) + \mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}').$$
calculer son image et son noyau (utiliser la question precedente). Calculer $\mathrm{Proj}_{\vec{v}} \circ \mathrm{Proj}_{\vec{v}}$.
2. Pourquoi appelle-t-on $\mathrm{Proj}_{\vec{v}}$ la *projection orthogonale sur la droite* $(\vec{v}) = \mathbb{R}\vec{v}$?
3. Soit $\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, l'application definie par
$$\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2.\mathrm{Proj}_{\vec{v}}(\vec{w}).$$
Montrer que $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ est lineaire et qu'elle preserve la longueur des vecteurs ($\|\mathrm{sym}_{\vec{u}}(\vec{w})\| = \|\vec{w}\|$.) Montrer que c'est une isometrie.
4. Montrer que $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ est bijective.
5. Que vaut $\mathrm{sym}_{\vec{v}} \circ \mathrm{sym}_{\vec{v}}$? L'application $\mathrm{sym}_{\vec{v}}$ est la *symetrie orthogonale par rapport a l'axe* $(\vec{u}) = \mathbb{R}\vec{u}$

Exercice 8. Soit X un ensemble fini de cardinal $|X| \geqslant 1$. Soit $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de X vers $\mathbb{R}$(c'est un espace vectoriel pour l'addition des fonctions et pour la multiplication d'une fonction par un scalaire). Etant donnes deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ on pose

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) g(x).$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ defini un produit scalaire sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$l'espace :
   — Est bilineaire,
   — Symetrique
   — Definie-Positive.
2. Montrer l'inegalite de Cauchy-Schwarz :
$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}),\ |\langle f, g \rangle| \leqslant \langle f, f \rangle^{1/2} \langle g, g \rangle^{1/2}$$
et qu'on a egalite si et seulement si f et g sont proportionelles.

3. On pose

$$\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

Montrer que l'application

$$d_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) & \mapsto & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ (f,g) & \mapsto & \|f-g\| \end{array}$$

defini une distance homogene sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$.