Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 28 au 2 décembre 2016

Corrigé 11 du jeudi 1er décembre 2016

Exercice 1.

Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ et $\alpha_0 = 1$. Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n.$$

On commence par remarquer que $(\alpha)_n = (\alpha)_{n-1}(\alpha-(n-1))$.

1.) Montrer que le rayon de convergence de la série est 1.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{(\alpha)_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \Big/ \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n = x \frac{1}{(n+1)} (\alpha - n).$$

La valeur absolue de ce rapport tend bien vers $|x|$ lorsque n tend vers l'∞. On en conclut que le rayon de convergence de la série est 1.

2.) Définissons $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n$.
Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$.
On remarque pour commencer que quel que soit $\alpha > 0$, la suite commence par des termes positifs, et ensuite les $(\alpha)_n$ ont des signes alternés. On a en plus

$$\frac{(\alpha)_n}{n!} + \frac{(\alpha)_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(\alpha)_{n-1}(\alpha-(n-1)) + n(\alpha)_{n-1}}{n!} = \frac{(\alpha+1)(\alpha)_{n-1}}{n!}$$

Soit n le numéro du premier $(\alpha)_i$ négatif. Les $n-2$ premiers termes sont positifs. De plus, si on prend le reste par paires, par ex. $(n-1, n)$, $(n+1, n+2)$, ..., on n'ajoute que des termes positifs (c.f. la formule ci-dessus).
Montrer que $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$.
Puisqu'on peut dériver terme à terme, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n-1}(\alpha-(n-1))}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} - x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n-1}}{(n-2)!} x^{n-2} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \alpha f(x) - x f'(x).
\end{aligned}$$

3.) Posant $g(x) = \ln f(x)$, calculer $g'(x)$ et en déduire la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n = (1+x)^\alpha.$$

On a $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$, $g(0) = 1$ et donc $g(x) = \alpha \ln(1+x) = \ln(1+x)^\alpha = \ln f(x)$, d'où $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Exercice 2.

Soit $(C_n)_{n\geq 0}$ la suite des nombres de Catalan, définie par $C_0 = C_1 = 1$ et $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$. Montrer que C_n compte le nombre d'expressions qu'on peut formuler avec $2n$ parenthèses avec la règle que chaque parenthèse droite trouve sa correspondante gauche "avant".

0.) pour $n = 1$, on a les possibilités: (), soit $1 = C_1 (= C_0)$.
pour $n = 2$, on a les possibilités: (()) et ()(), soit $2 = C_2 = C_0C_1 + C_1C_0$.
pour $n = 3$, on a les possibilités: ((())), ()(()), (())(), (()()) et ()()()
Relation de récurrence:
Etant donné un parenthésage correct avec 2(n+1) parenthèses (n+1 paires de parenthèses ouvrantes-fermées "(" et ")"), on regarde la première parenthèse : c'est forcément une parenthèse ouvrante "(", puis on regarde où elle se ferme. En particulier, on regarde combien de paires de parenthèses ouvrantes-fermées "(" et ")" il y a à l'intérieur. Ce nombre, notons le i, sera forcément entre 0 et n, et il y aura $n - i$ autres paires de parenthèses après que la première se ferme. Le nombre de parenthésages corrects avec n+1 paires de parenthèses ouvrantes-fermées tel que la première en contienne i sera donc C_i. C_{n-i} (à l'intérieur de la première parenthèse, on arrange comme on veut, et après aussi), et le nombre total de parenthésages corrects avec n+1 paires de parenthèses sera donc le nombre de Catalan C_{n+1}.

1.) Montrer que $C_n \leq 2^{2n} = 4^n$ et déduire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ a un rayon de convergence au moins $\frac{1}{4}$.
Le maximum de possibilité (sans respecter de règle) est de 2^{2n}, car pour chaque parenthèse, on peut choisir gauche ou droite.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on a alors, avec "$C_n = 4^n$": $\frac{C_{n+1}x_{n+1}}{C_n x_n} = 4x$ et donc le rayon de convergence est plus grand ou égal à $\frac{1}{4}$.

2.) Soit $C :]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$. Montrer, en utilisant un exercice de la série précédente pour le produit de deux séries entières et la relation $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$, qu'on a

$$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0.$$

En déduire que $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ (et pas $C(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$, en utilisant que C doit être continue sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et valoir 1 en 0).
On a et donc

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} C_k C_j x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n$$

et ainsi

$$xC^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = C(x) - 1.$$

Il est clair qu'il faut prendre $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ pour avoir $C(0) = 1$.

3.) Déduire, en utilisant l'exercice précédent, que $C(x) = \frac{1}{2x}\Big(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!}(-4x)^n\Big)$.
Cette expression découle immédiatement de ce qui précède et de l'exercice précédent.

4.) En supposant l'identité $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}(-4)^n = -\binom{2n}{n}\frac{1}{2n-1}$ en déduire que $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
On a

$$C(x) = -\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!}(-4)^n x^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!}(-4)^n x^{n-1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_{n+1}}{(n+1)!}(-4)^{n+1} x^n$$

et donc

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{1}{2}\frac{(1/2)_{n+1}}{(n+1)!}(-4)^{n+1} = \frac{1}{2}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!(n+1)!}\frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$