ANALYSE I et II
Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Mardi 18 janvier 2011, 12H15-15H00

Examen propédeutique pour le semestre d'automne 2010/2011

Exercice 1 (10 points).

On considère la fonction "sinus hyperbolique" $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a.) Etablir le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de sh autour de $x = 0$.

b.) Calculer

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\left(\mathrm{sh}(x)\right)^3}{2x^3 + x^5} .$$

Exercice 2 (10 points).

On définit la suite numérique $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ par

$$\begin{aligned} a_n &= n!, && \text{si } n \leq N_0, \\ a_n &= n, && \text{si } n > N_0, \end{aligned}$$

où N_0 est un entier positif donné.

a.) Démontrer que si $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument et que si $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge.

b.) Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| = 1$, la série diverge.

Exercice 3 (Question théorique du cours: 10 points).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

a.) Montrer que f est continue.

b.) Montrer que si $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors f est strictement croissante.

c.) Montrer que si f' est croissante, alors f est une fonction convexe.

Tourner la page, s.v.p.

Exercice 4 (10 points).

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \ell_2.$$

Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 5 (10 points).

Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $x_0 = 3$, $x_1 = 2$ et

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + x_{n-1}}$$

converge. Calculer sa limite.

Indications: Montrer récursivement que $1 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1}$.