ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1ère année
Prof. J. Rappaz

Mardi 18 janvier 2011, 12H15-15H00

Propédeutique semestre automne 2010/2011

Exercice 1 (10 points).

Rappel: $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a.) (5 points) Deux manières de résoudre le problème:

a1.) On a

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + o(|x|^n), \quad \text{si } x \to 0,$$

$$e^{-x} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^j}{j!} + o(|x|^n), \quad \text{si } x \to 0.$$

Ainsi

$$\text{sh}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1-(-1)^j}{2} \frac{x^j}{j!} + o(|x|^n), \quad \text{si } x \to 0.$$

Si on développe, on a:

$$\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(|x|^n) \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$

$$\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(|x|^n) \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

a2.) Si $f(x) = \text{sh}(x)$, on a $f'(x) = \text{ch}(x), f''(x) = \text{sh}(x), f'''(x) = \text{ch}(x), ...$, etc.
Ainsi $f^{(n)}(0) = 0$ si n est pair et $f^{(n)}(0) = 1$ si n est impair.
On a

$$\text{sh}(x) = \sum_{j=1}^{n/2} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} + o(|x|^n) \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

$$\text{sh}(x) = \sum_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} + o(|x|^n) \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

b.) (5 points) On a $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)$, si $x \to 0$.
Ainsi $\Big(\text{sh}(x)\Big)^3 = \Big(x + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\Big)^3 = x^3 + 3x^2\frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^7)$, si $x \to 0$.
On a donc

$$\frac{\Big(\text{sh}(x)\Big)^3}{2x^3 + x^5} = \frac{1}{2} \frac{x^3 + \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)}{x^3 + \frac{x^5}{2}} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^4), \quad \text{si } x \to 0.$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\big(\text{sh}(x)\big)^3}{2x^3 + x^5} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 (10 points).

a.) (7 points) Trois manières de démontrer a.):

(a1) Critère de d'Alembert. On calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\;|x| = |x|.$$

Ainsi, si $|x|<1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument et si $x\in\mathbb{R}$, $|x|>1$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge.

(a2) Critère rayon de convergence d'une série entière:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|n|^{1/n}} = 1.$$

Ainsi, si $|x|<R=1$, a série converge absolument et si $|x|>R=1$, la série diverge.

(a3) Si $|x|<1$, il existe $r\in]|x|,1[$ et il existe C tq pour $n>N_0$, $|a_n x^n| = nr^n = ne^{n\ln r}\le C$ car $\ln r<0$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n = \sum_{n=0}^{N_0}|a_n||x|^n + \sum_{n=N_0+1}^{\infty}|a_n|r^n\xi^n$$

où $\xi\in]-1,1[$ est tel que $x=\xi\, r$.
On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n \le \sum_{n=0}^{N_0}|a_n||x|^n + C\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\xi^n \le \sum_{n=0}^{N_0}|a_n||x|^n + \frac{C}{1-\xi}.$$

La suite $S_N = \sum_{n=0}^{N_0}|a_n||x|^n$ est croissante et bornée; elle converge. Ce qui prouve que si $|x|<1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument.
Si $x=1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N_0} n! + \underbrace{\sum_{n=N_0+1}^{\infty} n}_{\text{diverge}}\,.$$

Ainsi la série entière diverge si $|x|>1$.

b.) (3 points) Si $x=1$, la série diverge (c.f. ci-dessus).
Si $x=-1$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{N_0}(-1)^n n! + \sum_{n=N_0+1}^{\infty}(-1)^n n.$$

Le terme général $(-1)^n n$ ne tend pas vers zéro, donc la série diverge.

Exercice 3 (10 points).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

a.) (3 points) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Supposons, ab absurdo, que f n'est pas continue en x_0. Alors $\exists (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \qquad , a_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad |f(a_n) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \right| = +\infty$$

ce qui contredit

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} - f'(x_0) \right| = 0.$$

b.) (3 points) Si $x < y$ on a l'existence de $z \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x). \qquad \text{(Thm. accr. finis)}$$

Ainsi, si $f'(z) > 0$, on obtient $f(y) > f(x)$, ce qui montre la stricte croissance de f.

c.) (4 points) Supposons f' croissante et soit $a < b$. Si $x \in]a, b[$, on a

$$x = a + \lambda(b - a) \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in]0, 1[$$

et réciproquement, si $\lambda \in]0, 1[$, on a $x = a + \lambda(b - a) \in]a, b[$. Le théorème des accroissements finis donne:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x - a) \qquad \text{où } \xi_1 \in]a, x[,$$
$$f(b) - f(x) = f'(\xi_2)(b - x) \qquad \text{où } \xi_2 \in]x, b[.$$

On a alors

$$(1 - \lambda)\Big(f(x) - f(a)\Big) - \lambda\Big(f(b) - f(x)\Big) = (1 - \lambda)f'(\xi_1)(x - a) - \lambda f'(\xi_2)(b - x).$$

Mais $x - a = \lambda(b - a)$ et $b - x = (1 - \lambda)(b - a)$. Ainsi,

$$f(x) - (1 - \lambda)f(a) - \lambda f(b) = \underbrace{\lambda(1 - \lambda)}_{>0}\underbrace{\Big(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)\Big)}_{\leq 0}\underbrace{(b - a)}_{>0}$$

et par suite

$$f(x) \leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a).$$

Mais, $x = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b$ et donc

$$f\Big((1 - \lambda)a + \lambda b\Big) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b), \qquad \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, l'inégalité est triviale.
Ainsi, f est convexe.

Exercice 4 (10 points).

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \ell_2.$$

Montrons que f est uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$.

- Puisque $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell_2$, il existe $\beta > a$ tel que $\forall t \geq \beta, |f(t) - \ell_2| \leq \frac{\epsilon}{4}$.
  On en tire alors que $\forall x, y \geq \beta, |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

- Puisque $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1$, la fonction f se prolonge par continuité à droite en a. Ainsi, f est uniformément continue sur $]a, \beta]$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in]a, \beta]$ avec $|x - y| \leq \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

- Pour $a < x \leq \beta \leq y$ avec $y - x \leq \delta$, on a:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\beta)| + |f(\beta) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Finalement, $\forall x, y \in]a, \infty[$ avec $|x - y| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, ce qui montre que f est uniformément continue sur $]a, \infty[$.

Exercice 5 (10 points).

Montrons que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + x_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

est convergente et calculons sa limite.

Démonstration :

1) *(Convergence)* Montrons par induction que la suite est minorée par 1 et décroissante, i.e

$$1 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Pour $n = 1$, on a

$$x_0 = 3 > x_1 = 2 > x_2 = \sqrt[3]{2+3} > 1.$$

b) On suppose maintenant l'hypothèse vraie jusqu'à $n \in \mathbb{N}^*$ et on va montrer qu'elle est vraie pour $n+1$. On a donc

$$1 < x_{k+1} < x_k < x_{k-1}, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

et on veut montrer que

$$1 < x_{n+2} < x_{n+1} < x_n.$$

Comme la fonction $\sqrt[3]{x}$ est strictement croissante on a bien par l'hypothèse de récurrence que

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + x_{n-1}} \quad > \quad \sqrt[3]{x_{n+1} + x_n} = x_{n+2}.$$

De plus, comme x_n et x_{n+1} sont plus grands que 1, on a

$$x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1} + x_n} > 1.$$

Ainsi la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est minorée et décroissante, donc convergente.

2) *(Limite)* Si $x \in \mathbb{R}$ est la limite de la suite, il vérifie alors l'équation

$$x^3 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \;\text{ ou }\; x = \pm\sqrt{2}.$$

Mais comme $x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a finalement que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

□