Semaines 6 & 8 : Série d'exercices sur les signaux

Organisation du travail

En raison de l'examen en semaine 6 (et de la vacance de la semaine 7), nous étalons les exercices des semaines 6 et 8 sur les semaines 8 et 9. J'ai cependant gardé le regroupement des exercices par thématique de semaine de cours : vous trouverez donc ici les deux semaines réunies.

Organisez votre travail sur ces deux semaines (semaines 8 et 9) comme cela vous convient le mieux. Vous avez en tout 11 exercices (4+3+4) sur les sujets des semaines 6, 8 et 9, à faire en semaines 8 et 9.[1] Voici trois exemples d'organisation possibles :

Exemple 1 :

— Semaine 8 (aujourd'hui) : 4 exercices de la semaine 6 et moitié des exercices de la semaine 8 (1 ou 2 exercices) ;

— Semaine 9 : 2^e^ moitié des exercices de la semaine 8 (1 ou 2 exercices) et 4 exercices de la semaine 9.

Exemple 2 :

— Semaine 8 (aujourd'hui) : exercices faciles des semaines 6 et 8 (au choix suivant ce que vous trouvez facile, mais par exemple 6.1, 6.2, 8.1 et 8.3) ;

— Semaine 9 : le reste des exercices des semaines 6 et 8 (par exemple 6.3, 6.4 et 8.2) et 4 exercices de la semaine 9.

Exemple 3 :

— Semaine 8 (aujourd'hui) : tous les exercices des semaines 6 et 8 (7 exercices au total) ;

— Semaine 9 : 4 exercices de la semaine 9.

Rappels de trigonométrie

Soient a, b, u, v des nombres réels. Alors on a les relations suivantes :

• $\cos(b) - \cos(a) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

• $\sin(b) - \sin(a) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$

ou de manière équivalente :

• $2\sin(u)\sin(v) = \cos(u-v) - \cos(u+v)$

• $2\cos(u)\sin(v) = \sin(u+v) - \sin(u-v)$

On rappelle également que $\cos(-a) = \cos(a)$ et $\sin(-a) = -\sin(a)$.

1. Et, pour information, il y aura 3 exercices en semaine 10.

Semaine 6 : Série d'exercices sur les signaux

1 [N1 puis N3] Bandes passantes

a) [N1] Soit $X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t + \delta_i)$ un signal de bande passante B. Quelle est la bande passante des signaux suivants ?

1. $2X(t)$
2. $X(t - \frac{\pi}{2})$
3. $X(3t)$
4. $X(t) + \sin(2\pi f t)$, avec $f \neq f_1, f_2, \ldots, f_n$
5. $X'(t)$, la dérivée de la fonction $X(t)$

b) [N3, ne restez pas bloqués mais revenez y plus tard si nécessaire] Soient maintenant $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux de la forme ci-dessus, avec bandes passantes B_X et B_Y, respectivement. Que pouvez-vous dire de la bande passante des signaux suivants ?

1. $X(t) + Y(t)$
2. $X(t) \cdot Y(t)$

2 [N2] Signaux périodiques et apériodiques

Un signal $X(t)$ est dit *périodique de période* T s'il existe un nombre $T > 0$ tel que $X(t) = X(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (exemple : une sinusoïde pure de fréquence $f = 1/T$ est périodique de période T). Remarquer qu'on a alors également $X(t + kT) = X(t)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$.

a) Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même période T. Est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique ? Si oui, avec quelles périodes ?

b) Soient encore $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques, mais cette fois avec deux périodes différentes T_1 et T_2, respectivement. La somme $X_1(t) + X_2(t)$ est-elle périodique ? (aucune justification formelle ne vous est demandée ici).

Indication : Pour avoir une meilleure idée de ce qui peut se passer, on peut chercher la réponse de manière numérique en représentant différents signaux sur votre calculatrice, votre ordinateur (ou sur `www.wolframalpha.com` ; ça se fait « tout seul » : entrez simplement la formule comme par exemple « sin(2 pi t) + cos(4 pi t) »). Essayez par exemple avec :

$$\sin(2\,\pi\,t) + \cos(4\,\pi\,t) \qquad \text{et} \qquad \sin(2\,\pi\,t) + \cos(4\,t)$$

NB : Cette indication est également valable pour les deux questions suivantes !

c) Un cas particulier : si T_1 et T_2 sont des nombres entiers, est-ce que le signal $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique ? Si oui, avec quelles périodes ?

d) Un autre cas particulier : une note produite par un instrument de musique est composée d'une sinusoïde avec une fréquence fondamentale f_0 et d'autres sinusoïdes, appelées les *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de f_0. La note est donc un signal de la forme (a_1 non nul) :

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \, \sin(2\pi n f_0 t),$$

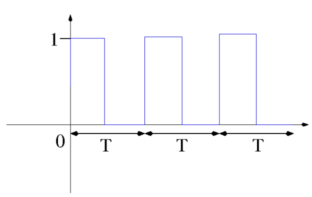
où le coefficient $a_n > 0$ est l'amplitude de la n^e harmonique (ce sont ces coefficients qui déterminent le *timbre* de l'instrument). Est-ce que ce signal est périodique ? Si oui, avec quelle plus petite période ?

3 [N1] Interlude musical

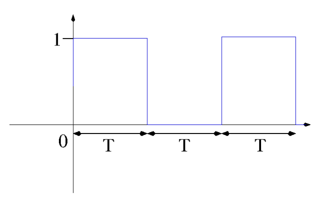
Durant une heure, on enregistre un concert de musique à l'aide d'un micro qui échantillonne le son à une fréquence de 44 kHz, et chaque échantillon est quantifié sur 32 bits. Quelle est la taille du fichier audio résultant (si on ignore ici toute forme de compression) ?

4 [N3] Filtre à moyenne mobile

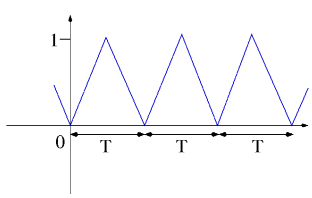
a) Comment les signaux suivants sont-ils transformés après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de durée d'intégration $T_c = T$? On considère que les signaux sont périodiques et définis pour $t \in \mathbb{R}$.



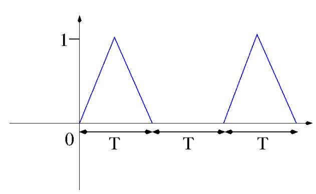
$X_1(t)$



$X_2(t)$



$X_3(t)$



$X_4(t)$

Pas besoin ici de formules mathématiques pour répondre : des dessins suffiront !

b) Qu'arrive-t-il à un signal périodique de période T (cf. exercice 1) après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de même durée d'intégration $T_c = T$?

c) Soit $X(t) = \sin(2\pi f \, t)$, une sinusoïde pure de fréquence f. Montrer qu'après un passage à travers un filtre à moyenne mobile de durée d'intégration T_c, l'amplitude du signal sortant $\widehat{X}(t)$ satisfait l'inégalité

$$|\widehat{X}(t)| \leq |\mathrm{sinc}(f \, T_c)| \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où on rappelle que $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ par définition.

Pour aller plus loin

5 [N3] Accordage d'une guitare et phénomène dit de « battement »

Cet exercice illustre une famille spéciale de signaux obtenus en faisant la somme de deux sinusoïdes pures. Pour accorder une guitare, on joue en même temps sur deux cordes voisines deux notes qui sont censées être identiques en théorie. Si la guitare est mal accordée, on entend une vibration caractéristique (un « battement »), qui disparaît lorsque la guitare est bien accordée. Dans cet exercice, on se propose de comprendre ce phénomène du point de vue mathématique. Supposons pour simplifier que les notes qui sortent d'une guitare soient des sinusoïdes pures. L'onde émise par la première corde est donc $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, tandis que celle émise par la deuxième est $X_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$, avec f_1 et f_2 proches l'une de l'autre [1]. Quelle est la forme de l'onde résultante $X_1(t) + X_2(t)$.

a) lorsque f_1 et f_2 sont très proches ?
  — Approche à suivre : remplacer f_2 par $f_1 + \varepsilon$ et transformer la somme des deux sinusoïdes en un produit de deux termes à l'aides des formules de trigonométrie. Quelles sont les fréquences apparaissant dans ces deux termes ?

b) lorsque $f_1 = f_2$?

Indication. Là aussi, vous pouvez vous aider de votre calculatrice, ordinateur ou `www.wolframalpha.com` pour visualiser le résultat pour, par exemple, f_1 et f_2 valant respectivement 16 Hz et 17 Hz.

Liens ICC $\longleftrightarrow$ Programmation

En cours (de prog.), nous allons voir comment calculer la moyenne mobile « discrète » (i.e. approximation par somme de Riemann) d'un signal échantillonné :

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(t) &= \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(s)\,ds \\
&\simeq \frac{1}{T}\cdot\frac{t-(t-T)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X\left((t-T)+k\cdot\frac{t-(t-T)}{n}\right) \\
&\simeq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X\left(t-T+k\cdot\frac{T}{n}\right)}_{\text{moyenne usuelle de } n \text{ échantillons}}
\end{aligned}$$

1. En pratique, il se peut bien sûr qu'il y ait un déphasage entre les deux ondes, et aussi que les amplitudes ne soient pas rigoureusement les mêmes, mais là aussi, on simplifie.

Semaine 8 : Série d'exercices sur les signaux

1 [N1] Fréquence d'échantillonnage

Soient $f_1 > f_2 > 0$ deux fréquences données. Pour chacun des signaux suivants, à quelle fréquence f_e minimum doit-on échantillonner le signal de manière à garantir une reconstruction parfaite au moyen de la formule d'interpolation ?

a) $X_1(t) = \sin(2\pi f_1\, t) + \sin(2\pi f_2\, t)$

b) $X_2(t) = 2\,\cos(2\pi f_1\, t) - \sin(2\pi f_2\, t + \pi/4)$

c) $X_3(t) = \sin(4\pi f_1\, t) + \sin(2\pi (f_1 + f_2)\, t)$

d) $X_4(t) = \sin(2\pi f_1\, t) \cdot \sin(2\pi f_2\, t)$

2 [N2] Questions-test

Pour les questions ci-dessous, *plusieurs réponses* sont parfois possibles.

1. Un *filtre passe-haut* (idéal) est un filtre qui supprime toutes les fréquences plus basses qu'une certaine fréquence de coupure f_c dans un signal. On applique successivement à un signal $X(t)$ un filtre passe-haut avec fréquence de coupure f_1, puis un filtre passe-bas avec fréquence de coupure f_2. Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont-elles vraies ?

a) Si $f_1 < f_2$, alors le signal sortant est nul.

b) Si $f_2 < f_1$, alors le signal sortant est nul.

c) Si la plus haute fréquence contenue dans le signal est plus petite que f_1, alors le signal sortant est nul, quelle que soit la valeur de f_2.

d) Si la plus haute fréquence contenue dans le signal est plus petite que f_2, alors le signal sortant est nul, quelle que soit la valeur de f_1.

2. On rappelle ici la formule d'interpolation : $X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$. Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes sont-elles vraies ?

a) $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ lorsque la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le signal $X(t)$.

b) $X_I(t)$ est la « courbe » qui relie les points du signal échantillonné $(X(nT_e),\, n \in \mathbb{Z})$ par des droites.

c) Dans tous les cas, $X_I(nT_e) = X(nT_e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

d) La bande passante du signal $X_I(t)$ est plus petite ou égale à $f_e/2$, quel que soit le signal $X(t)$.

3. Si on désire éviter l'effet stroboscopique lorsqu'on échantillonne un signal dont la bande passante est infinie, on doit

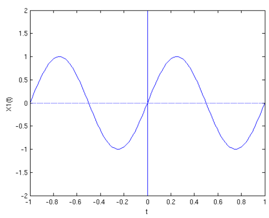
a) ne rien faire en particulier.

b) filtrer les hautes fréquences du signal avant de l'échantillonner.

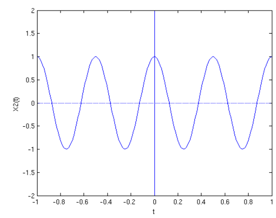
c) filtrer les basses fréquences du signal avant de l'échantillonner.

d) échantilloner le signal à plus de deux fois la fréquence maximum qui nous intéresse dans le signal.

4. On représente deux signaux :



$X_1(t)$



$X_2(t)$

Pour passer de $X_1(t)$ à $X_2(t)$, on a :

a) doublé l'amplitude du signal et introduit un déphasage de $\pi/2$.

b) divisé par 2 l'amplitude du signal et doublé sa fréquence.

c) doublé la fréquence du signal et introduit un déphasage de $\pi/2$.

d) divisé par 2 la fréquence du signal et introduit un déphasage de $\pi/2$.

3 [N3] Un peu de radio

Cet exercice montre l'application du filtrage à travers un exemple du monde réel. On s'intéresse à la modulation en amplitude (AM). Un signal modulé en amplitude est formé par le produit de deux signaux distincts : le signal contenant l'information que l'on désire transmettre $S(t)$ (du son en général) et l'onde porteuse $P(t)$. Dans cet exercice, on désire transmettre une sinusoïde à 1 kHz en utilisant une onde radio porteuse à 300 kHz.

$$\begin{aligned} S(t) &= \sin(2\pi f_s t) \qquad & P(t) &= \sin(2\pi f_p t) \\ f_s &= 1 \text{ kHz} & f_p &= 300 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Le signal émis par l'émetteur radio est finalement donné par

$$A(t) = S(t)\,P(t).$$

La figure 1 donne une illustration conceptuelle de ce à quoi peut ressembler $A(t)$; les fréquences ne sont pas correctes mais leur grande difffférence produit ce type de signal qui d'ailleurs a été rencontré dans un exercice précédent.

a) Dans un premier temps, un petit rappel de Physique est nécessaire pour justifier l'emploi de l'onde porteuse. En effet pourquoi n'est-il pas possible de simplement transmettre le signal $S(t)$ directement en émettant une onde radio à 1 kHz ?

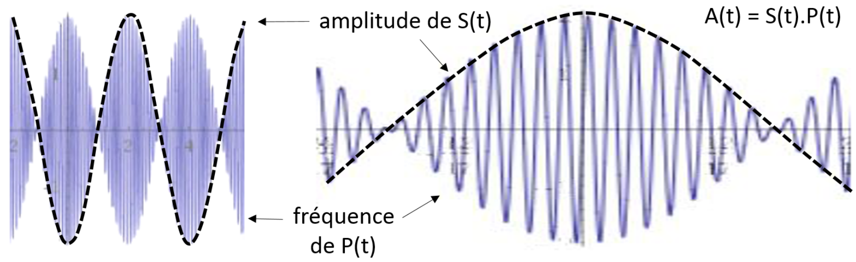


FIGURE 1 – L'onde porteuse est la sinusoïde de haute fréquence tandis que le signal $S(t)$ est rendu visible par l'enveloppe de l'amplitude de la porteuse.

— En pratique, la longueur d'une antenne pour un récepteur radio doit au moins être de l'ordre du quart de la longueur d'onde du signal à recevoir. La relation entre la fréquence f et la longueur d'onde λ d'une onde électromagnétique est $c = \lambda f$, où $c = 3 \times 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière. Sachant cela calculer et comparer la longueur d'antenne nécessaire pour les deux valeurs de fréquences fournies (signal et porteuse).

b) Ensuite, du coté de la réception, on obtient $A(t)$ et on cherche à récupérer le signal $S(t)$. On suppose pour ça qu'on connaît la fréquence f_p, mais pas forcément la fréquence f_s (seulement qu'elle est bien plus petite que f_p).

— Que se passe-t-il si on filtre le signal reçu $A(t)$ avec un filtre à moyenne mobile ayant une durée d'intégration égale à 4 fois la période de l'onde porteuse ? Faire une ébauche du résultat en appliquant le filtre sur le dessin conceptuel de droite et en déduire ce qui se passerait sur le cas réel. Quelle est la cause principale de cet effet ?

c) Il s'agit maintenant de transformer $A(t)$ pour 1) conserver l'enveloppe de l'amplitude de $S(t)$, mais 2) tout en supprimant l'effet d'alternance de signe de l'amplitude causée par $P(t)$. L'idée est la suivante : pour supprimer la variation de signe de l'amplitude causée par $P(t)$, il faut rendre ce terme toujours positif au lieu d'alterner entre positif et négatif. Cela se fait facilement en multipliant $A(t)$ une nouvelle fois par $P(t)$. On a alors :

$$A'(t) = S(t)\,P(t)\,P(t).$$

— Utiliser les formules trigonométriques pour transformer $A'(t)$ en une somme de sinusoïdes.
— En déduire comment récupérer $S(t)$ à partir de $A'(t)$.

Liens ICC $\longleftrightarrow$ Programmation

L'exercice 7 de la série 7 vous propose de coder un signal, son échantillonnage et la reconstruction de celui-ci pour voir l'effet de la fréquence d'échantillonnage sur le résultat et « jouer » avec les résultats du théorème d'échantillonnage.