Série 7

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 7 novembre.
L'exercice 3 ($\star$) peut être rendu le jeudi 10 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit V un K-espace vectoriel muni de l'addition $+$ et de la multiplication par un scalaire $\cdot$. Alors $(V, +, \cdot)$ est un anneau.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit V un K-espace vectoriel muni de l'addition $+$ et de la multiplication par un scalaire $\cdot$. Alors tout sous-espace vectoriel de V muni de $+$ est un sous-groupe de $(V, +)$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Dans un espace vectoriel, tout multiple scalaire d'un vecteur non nul est un vecteur non nul.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soient l'espace vectoriel K et les suites $z_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, 0 \ldots), i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dans K. Les suites $z_i, i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, engendrent le sous-espace des suites convergentes sur K.

  ◯ vrai ◯ faux

(b) Determiner les énoncés corrects.

1. Soient $A, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $b, d \in \mathbb{R}^n$. Supposons que les systèmes $Ax = b$ et $Cx = d$ ont une infinité de solutions. Que peut-on dire sur le nombre de solutions du système $(A + C)x = b + d$?

   ◯ Le système a une infinité de solutions.

   ◯ On ne peut rien dire sur l'ensemble des solutions.

   ◯ Le système a soit une infinité de solutions soit une seule solution.

2. Soit l'ensemble des matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | \, a + d = 0 \right\}$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

   ◯ S n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

○ $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = S.$

○ Aucun des énoncés ci-dessus n'est correct.

Exercice 2

Pour chacun des systèmes linéaires suivants :

1) Calculer l'ensemble des solutions.
2) Si on écrit ce système sous la forme $Ax = b$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, indiquer le rang de la matrice A.

a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= -1. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Exercice 3 ($\star$)

Soit $C = BA$ la forme échelonnée réduite d'une matrice $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$, où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner l'ensemble des solutions du système $Ax(\alpha) = b(\alpha)$ en fonction de la valeur α, où le vecteur

$$b(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 4 & 2 & (\alpha-1)(\alpha+1)+1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

est paramétré par $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{F}_5$ le système suivant.

$$\begin{aligned} x + 3y + 2t &= 1 \\ y + 3z + t &= 0 \\ 3x + z + t &= 0 \\ x + 2y + 4z + 2t &= 4. \end{aligned}$$

Exercice 5

Un **carré magique** d'ordre n est composé de n^2 entiers strictement positifs, écrits dans une matrice carrée. Ces nombres sont disposés de sorte à ce que leurs sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne, sur la diagonale et l'anti-diagonale soient égales, et vaille une valeur fixe $c \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ un carré magique d'ordre 3. Déterminer la relation entre a_{22} et c.
Indication : Convertir la définition de carré magique en un système d'équations, et en déterminer l'ensemble des solutions correspondant.

(b) Remplir cette matrice, pour en faire un carré magique.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, l'ensemble V est-il un K-espace vectoriel pour la loi d'addition classique et la multiplication scalaire $\cdot$ donnée ?

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(x, y) \in V$.

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(x, y) \in V$.

c) $K = \mathbb{F}_3$, $V = K^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(x, y) \in V$.

d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{p \in \mathbb{R}[t] : p(0) = a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, et la multiplication scalaire est la même que pour les polynômes (et restreinte à V).

e) $K = \mathbb{R}$, $V = \{p \in \mathbb{R}[t] : \deg p = 4\}$ et la multiplication scalaire est la même que pour les polynômes (restreinte à V).

f) $K = \mathbb{C}$, $V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2|\}$, et $\lambda \cdot (z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(z_1, z_2) \in V$.

Exercice 7

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces **vectoriels** de l'espace vectoriel indiqué ?

a) $\{(0, x, 2x, 3x)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

b) $\{(x^3, x^2, x)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

c) $\{(x, x+y, x-y)^\mathsf{T} : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

d) $\{(x, 0, 0)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0)^\mathsf{T} : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

e) $\{(a, b, a, b)^\mathsf{T} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 = b^2, ab \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

f) $\{(x, y, z)^\mathsf{T} : x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 + z^2 = 0, x - y + z = 0, x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

g) $\{\ln\left(\frac{p}{q}\right) \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \subseteq \mathbb{R}$.