Corrigé 13 du mardi 13 décembre 20165

Exercice 1.

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas intégrable.

La fonction f est bornée. Ainsi pour chaque subdivision σ de l'intervalle $[0,1]$, on a trivialement $\overline{S}_\sigma = 1$ et $\underline{S}_\sigma = 0$ et donc $\overline{S}(f) = 1$ et $\underline{S}(f) = 0$. Ces deux dernières grandeurs ne sont pas égales, la fonction f n'est donc pas intégrable.

Exercice 2.

Calculer la limite des deux suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ données par:

a) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$,

b) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$.

On a :

a) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(t) = \frac{1}{1+t}$, alors f est décroissante. En choisissant la subdivision $t_j = \frac{j}{n}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ on pose $\sigma_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ avec $h_j = \frac{1}{n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ et on a

$$\underline{S}_{\sigma_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = x_n.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{\sigma_n} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2.$$

b) Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(t) = t^2$, alors f est croissante et en procédant de la même manière qu'en a), on a

$$\overline{S}_{\sigma_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = x_n$$

et

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\sigma_n} = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}.$$

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = x^{1/x}$.
On a, par définition, pour $x > 0$:

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}, \qquad \text{et} \qquad f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right).$$

1.) On a $\frac{\ln x}{x} < -1/x$, si $0 < x < 1/e$ et $e^{-1/x} = \mathcal{O}(|x|^\alpha)$, si $x \to 0$, $\forall \alpha > 0$ et ainsi, $\frac{e^{-1/x}}{x^p} = \mathcal{O}(|x|^{\alpha - p})$, si $x \to 0$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$ ainsi que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = 0$, puisque $\frac{-\ln x}{x^2} = \frac{\ln 1/x}{x^2} < \frac{1}{x}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$, si $x > 0$.

2.) De même, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ puisque $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$

3.) Calculer le maximum de la fonction f. Le seul point stationnaire de f est donné par $1 - \ln x = 0$, i.e., $x = e$. C'est le maximum global, puisqu'on a $f'(x) > 0$ pour $0 < x < e$ et $f'(x) < 0$ pour $x > e$. On a $f(e) = e^{\frac{1}{e}} > 1$.

Exercice 4.

Montrer que la suite

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

converge.
Sachant que $\ln n$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini très lentement, en conclure que la série harmonique, certes diverge, mais lentement.

On considère

$$y_n = \int_1^n \left(\frac{1}{\lfloor x + 1 \rfloor} - \frac{1}{x}\right) dx \quad \leq 0$$

où $\lfloor x \rfloor$ dénote la partie entière de x, soit le plus grand entier qui est plus petit ou égal à x.
On a

$$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\lfloor x + 1 \rfloor} - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \ln n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = x_n - 1.$$

Pour $x \in [k, k+1[$ on a

$$\frac{1}{\lfloor x + 1 \rfloor} - \frac{1}{x} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+t}$$

avec $t \in [0, 1[$ et donc

$$\left|\frac{1}{\lfloor x + 1 \rfloor} - \frac{1}{k+t}\right| \leq \frac{2}{k^2}.$$

Ainsi y_n est une suite décroissante et minorée par $-\frac{\pi^2}{3}$. Donc la suite x_n converge.