Série 10 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le mardi 29 novembre.
L'exercice 5 ($\star$) peut être rendu le jeudi 1 decembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient V un K-espace vectoriel, $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille génératrice de V et $A, B \in L(V, V)$. Si $A(v_i) = B(v_i), i = 1, \ldots, n$, donc $A = B$.

  ○ vrai ○ faux

- Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $A, B \in L(V, V)$ telles que $A \circ B = 0$ et $\dim \mathrm{Ker}\,(B) = 0$. Alors A est l'application nulle.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $F : V \to W$ une application linéaire, où V, W sont deux K-espaces vectoriels avec $\dim(V) = n$ et $\dim(W) = m$. Si $n < m$, donc F ne peut pas être surjective.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $V = \mathbb{F}_2^{10}$. Il existe une application linéaire $F : V \to V$ telle que la cardinalité (le nombre d'éléments) de $\mathrm{Ker}\,(F)$ est 128.

  ○ vrai ○ faux

- L'opérateur de décalage à droite $\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \Sigma(v_1, v_2, \ldots, v_n) := (0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ est une application injective.

  ○ vrai ○ faux

- Soit V l'espace vectoriel des suites réelles. L'opérateur de décalage à droite $\Sigma : V \to V, \Sigma(v_1, v_2, v_3, \ldots) := (0, v_1, v_2, \ldots)$ est une application injective.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soient V un K-espace vectoriel, $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille génératrice de V et $A, B \in L(V, V)$. Si $A(v_i) = B(v_i), i = 1, \ldots, n$, donc $A = B$.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $A, B \in L(V, V)$ telles que $A \circ B = 0$ et $\dim \mathrm{Ker}\,(B) = 0$. Alors A est l'application nulle.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit $F : V \to W$ une application linéaire, où V, W sont deux K-espaces vectoriels avec $\dim(V) = n$ et $\dim(W) = m$. Si $n < m$, donc F ne peut pas être surjective.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit* $V = \mathbb{F}_2^{10}$. *Il existe une application linéaire* $F : V \to V$ *telle que la cardinalité (le nombre d'éléments) de* $\mathrm{Ker}\,(F)$ *est* 128.

  ● *vrai* ○ *faux*

- *L'opérateur de décalage à droite* $\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \Sigma(v_1, v_2, \ldots, v_n) := (0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ *est une application injective.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit* V *l'espace vectoriel des suites réelles. L'opérateur de décalage à droite* $\Sigma : V \to V, \Sigma(v_1, v_2, v_3, \ldots) := (0, v_1, v_2, \ldots)$ *est une application injective.*

  ● *vrai* ○ *faux*

(b) Soit $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie comme $F : X \mapsto X - X^T$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

○ $\mathrm{rang}(F) = 0$.
○ $\mathrm{rang}(F) = n - 1$.
○ $\mathrm{rang}(F) = n^2 - 1$.
○ $\mathrm{rang}(F) = n(n-1)/2$.

Sol.: ● $n(n-1)/2$.

Exercice 2

Resultat 1 : Si $p \in \mathbb{R}_n[t]$ a $n + 1$ racines differentes, $n \in \mathbb{N}$, donc p est le polynôme nul. Soient I l'intervalle $[0, 1]$, $n \geq 1$ un entier positif et $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$ des nombres différents. En utilisant le **Resultat 1**, montrer que la matrice de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

est inversible.

Sol.: *Soient* $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *t.q.*

$$V \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En regardant ce système par lignes, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \cdots + \alpha_n x_0^n &= 0, \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_1^n &= 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \cdots + \alpha_n x_n^n &= 0. \end{aligned}$$

On voit que le polynôme $p(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ *a* $n+1$ *racines différentes. D'après le **Resultat 1**,* p *est le polynôme nul* $\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$*. Donc, le système* $V\alpha = 0$ *a une seule solution (le vecteur nul)* $\Rightarrow \operatorname{rang}(V) = n+1$*. Alors, la matrice* V *est inversible.*

Exercice 3

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie et $T \in L(V,V)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

ii) $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^2)$, où $T^2 = T \circ T$.

Sol.:

- *i)* $\Rightarrow$ *ii) : soit* $x \in \operatorname{Ker}(T)$*. Comme* $T(x) = 0 \Rightarrow T(T(x)) = 0$*, c-à-d,* $T^2(x) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(T^2)$*. Alors,* $\operatorname{Ker}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T^2)$.
  Soit $x \in \operatorname{Ker}(T^2)$*. Comme* $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$*, il existe* $a \in \operatorname{Ker}(T)$ *et* $b \in \operatorname{Im}(T)$ *t.q.* $x = a + b$*. Donc,*

  $$T(x) = T(a+b) = T(a) + T(b) = T(b)$$

  et

  $$T(T(x)) = T(T(b)) = 0, \text{ car } x \in \operatorname{Ker}(T^2).$$

  Alors $T(b) \in \operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\} \Rightarrow T(x) = 0$*. Par conséquent,* $x \in \operatorname{Ker}(T)$ *et* $\operatorname{Ker}(T^2) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$.
- *ii)* $\Rightarrow$ *i) : par Théorème du rang,* $\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = n$*. De plus, on sait que la somme de deux sous-espaces vectoriels de* V *est encore un sous-espace vectoriel de* V*, c-à-d,* $\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(V)$ *est un sous-espace vectoriel de* V*. Par la formule de Grassmann, on obtient,*

  $$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T)) &= \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) - \dim(\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T)) \\ &= n - \dim(\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T)).\end{aligned}$$

  On montre que $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$.
  Soit $y \in \operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T)$*. Il existe* $x \in V$ *t.q.* $T(x) = y$*. On obtient*

  $$T(T(x)) = T(y) = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(T^2)(= \operatorname{Ker}(T))$$

  Donc, $T(x) = 0 = y \Rightarrow \operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$*. Car* $\dim(\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T)) = 0$*, suit que* $\dim(\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T)) = n$*, et du Lemme* 4.22*, suit que* $V = \operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T)$*. De plus, comme* $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$*, on obtient* $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$.

Exercice 4

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un système linéaire de n équations et n variables tel que son ensemble de solutions est exactement U.

Sol.: *Construction : on définit une application linéaire* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, tel que son noyau soit exactement* U*. Soit* $A := [F]_{B,B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *la matrice de transformation de* F *selon la* *base canonique B de $\mathbb{R}^n$. Cette matrice nous donne le système $Ax = 0$ avec n équations et n variables, et avec U comme noyau.*

Comme U est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, il existe une base $(u_1, \ldots, u_m)$ de U avec $m \leq n$. En ajoutant $k = n - m$ vecteur, l'ensemble U peut être augmenté pour former une base Q de $\mathbb{R}^n$, où on dénote $Q = (u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+k})$. Ensuite on définit une application linéaire F avec $\operatorname{Ker}(F) = U$: on pose $F(u_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $F(v_j) = v_j$ pour $j = m+1, \ldots, m+k$. Avec la construction précédente $F_{B,B}$, un élément arbitraire $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ aura la construction cherchée (par la linéarité de F). Selon la construction, $F(v) = 0$ est uniquement valide pour $v \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m) = U$, ainsi l'ensemble des solutions de $Ax = 0$ est exactement U.

Exercice 5 ($\star$)

Considèrer l'intervalle $[0, 1]$ et l'application $I : f \mapsto F$, telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$. Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ et affines par morceaux, et W l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ et quadratiques par morceaux.

i) Trouver des bases pour V et W.
ii) Calculer la matrice de I par rapport à ces bases.
iii) Calculer le rang de cette matrice.

Sol.: *Cet exercice permet plusieurs solutions. Les étudiants sont encouragés à les explorer.*

Exercice 6

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et F une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

i) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et F (d'arrivée).
ii) Même question pour les bases F (de départ) et E (d'arrivée).
iii) Même question pour les bases F (de départ) et F (d'arrivée).

Sol.:

i) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et leur appliquer la transformation T. On obtient

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique E. Il faut maintenant calculer la matrice de passage $[I]_{E,F}$. On sait, du cours, que cette matrice est l'inverse de la matrice de passage $[I]_{F,E}$. Cette dernière est donnée par

$$[I]_{F,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer son inverse, on peut utiliser la méthode vue en cours (avec l'identité à droite) ou calculer son inverse directement en résolvant $[I]_{F,E}[I]_{F,E}^{-1} = I$, où l'on pose

$$[I]_{F,E}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice $[I]_{F,E}$ contient beaucoup de zéros, il sera plus simple de résoudre le système d'équations obtenus que d'utiliser la méthode vue en cours. On obtient facilement que l'inverse est

$$[I]_{F,E}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [I]_{E,F}.$$

On applique alors $[I]_{E,F}$ aux vecteurs obtenus précédemment. La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii)

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont exprimés dans la base canonique. La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii) On applique $[I]_{E,F}$ aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice M

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soit $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$S(x, y, z) = (3x - y + 2z,\ x + 3y - z,\ x - 3y + 5z,\ 2x - y)$$

et soit $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(f(t)) = (f(0), 0, f(2))$.

a) Déterminer la matrice de T par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[t]$ et $\mathbb{R}^3$, ainsi que la matrice de S par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

b) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice de $S \circ T$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[t]$ et $\mathbb{R}^4$.

c) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice du vecteur $T(t^2 - 3t + 4)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice du vecteur $S(T(t^2 - 3t + 4))$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Sol.:

a) Soit $B = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$, soit $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $F = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On calcule

$$\begin{aligned} T(1) &= (1, 0, 1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ T(t) &= (0, 0, 2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3 \\ T(t^2) &= (0, 0, 4) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 4 \cdot e_3 \end{aligned}$$

En mettant les coefficients trouvés en colonnes, cela donne la matrice

$$[T]_{B,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

De même, on calcule

$$\begin{aligned} S(e_1) &= S(1, 0, 0) = (3, 1, 1, 2) \\ S(e_2) &= S(0, 1, 0) = (-1, 3 - 3, -1) \\ S(e_3) &= S(0, 0, 1) = (2, -1, 5, 0) \end{aligned}$$

ce qui donne la matrice

$$[S]_{E,F} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice de $S \circ T$ par rapport aux bases choisies est le produit des matrices de T et de S. On obtient donc

$$[(S \circ T)]_{B,F} = [S]_{E,F} \cdot [T]_{B,E} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 10 & 20 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Posons $v = t^2 - 3t + 4 \in \mathbb{R}_2[t]$*. La matrice de* v *par rapport à la base* B *est*

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la matrice de l'image de v *par* T *en faisant le produit matriciel*

$$[T(v)]_E = [T]_{B,E} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi obtenu la matrice du vecteur $T(v)$ *par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Le vecteur lui-même dans* $\mathbb{R}^3$ *est* $T(v) = (4, 0, 2)$*.*

d) On obtient la matrice de l'image de v *par* $S \circ T$ *en utilisant (b) et en faisant le produit matriciel*

$$[(S \circ T)(v)]_F = [S \circ T]_{B,F} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 10 & 20 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Une autre méthode consiste à calculer l'image de $T(v)$ *par* S*, en utilisant (a) et (c), ce qui donne le produit matriciel*

$$[S(T(v))]_F = [S]_{E,F} \cdot [T(v)]_E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi obtenu la matrice du vecteur $S(T(v))$ *par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}^4$*. Le vecteur lui-même dans* $\mathbb{R}^4$ *est* $S(T(v)) = (16, 2, 14, 8)$*.*

Exercice 8 (avancée)
Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie comme $F : X \mapsto AX - XB$. Déterminer la matrice de F par rapport à la base canonique de l'espace vectoriel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Indication : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_Kronecker`.