

Mini-test de physique générale I – Sections IN&SC et MA

A rendre à la séance d'exercices du 09-10 novembre 2017

version 1

Corrigé du mini-test 3 : Le piège à atomes

(1 + 3 + 3 + 6 + 6 = 19 points au total)

- a) L'énergie potentielle a la dimension d'une énergie, c'est-à-dire des Joules = $[N][m] = [kg][m^2][s^{-2}]$. Dans l'expression du potentiel, la masse m a une dimension de kilogrammes $[kg]$, et les coordonnées x , y , et z des mètres $[m]$. Pour que le potentiel ait la dimension d'une énergie, les constantes α_\perp et α_y doivent donc avoir la dimension de $[s^{-1}]$. 1 point _A
- b) Comme la force dérive d'un potentiel, elle est donc conservative et l'énergie mécanique totale est conservée. 1 point _B L'énergie mécanique s'écrit comme

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(x, y, z). \quad (1)$$

Lorsque l'atome passe par le centre du piège en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, le potentiel est nul ($V(0, 0, 0) = 0$) et l'énergie mécanique vaut

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(0, 0, 0) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2. \quad \text{1 point} \quad \text{C} \quad (2)$$

La norme de la vitesse au centre du piège vaut donc

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad \text{1 point} \quad \text{D} \quad (3)$$

quelle que soit la direction du vecteur vitesse.

- c) La force exercée sur l'atome ("le système") par le piège est donnée par le gradient de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z \quad (4)$$

$$= -m\alpha_\perp^2 x \hat{e}_x - m\alpha_y^2 y \hat{e}_y - m\alpha_\perp^2 z \hat{e}_z. \quad \text{1 point} \quad \text{E} \quad (5)$$

Donc la seconde loi de Newton, $m\vec{a} = \vec{F}$, s'écrit :

1 point (à donner même si le résultat de l'Eq. (7) est obtenu sans écrire explicitement l'équation vectorielle)

$$m\ddot{x}\hat{e}_x + m\ddot{y}\hat{e}_y + m\ddot{z}\hat{e}_z = -m\alpha_\perp^2 x\hat{e}_x - m\alpha_y^2 y\hat{e}_y - m\alpha_\perp^2 z\hat{e}_z. \quad (6)$$

En projetant sur les trois axes et divisant par m , on obtient les équations du mouvement : 1 point _G

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha_\perp^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \alpha_y^2 y &= 0 \\ \ddot{z} + \alpha_\perp^2 z &= 0 \end{cases} \quad (7)$$

- d) Les equations du mouvement décrivent trois oscillateurs harmoniques, un pour chacune des directions. Les solutions des équations sont 1 point pour $x(t)$ et/ou $z(t)$ _H 1 point pour $y(t)$ _I

$$\begin{cases} x(t) &= A_x \cos(\alpha_{\perp} t) + B_x \sin(\alpha_{\perp} t) \\ y(t) &= A_y \cos(\alpha_y t) + B_y \sin(\alpha_y t) \\ z(t) &= A_z \cos(\alpha_{\perp} t) + B_z \sin(\alpha_{\perp} t) \end{cases} \quad (8)$$

A l'instant $t=0$, l'atome passe par le centre du piège : donc $x(0) = y(0) = z(0) = 0 \Leftrightarrow A_x = A_y = A_z = 0$. 1 point_J

Cas 1) $\dot{y} = \sqrt{2E/m}$ 1 point (à donner pour \dot{y} ou \dot{x} au Cas 2)_K, $\dot{z}, \dot{x} = 0$ à l'instant $t = 0$.

Dans ce cas on obtient $B_y = \frac{1}{\alpha_y} \sqrt{2E/m}$ et $B_x = B_z = 0$. 1 point_L

Cas 2) $\dot{x} = \sqrt{2E/m}, \dot{y}, \dot{z} = 0$ à l'instant $t = 0$. Dans ce cas on obtient $B_x = \frac{1}{\alpha_{\perp}} \sqrt{2E/m}$, et $B_y = B_z = 0$. 1 point_M

- e) Les équations du mouvement sont celles écrites dans l'équation (7). Cette fois les conditions initiales sont différentes, et on a $x(0) = x_0, y(0) = z(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = v_y, \dot{z}(0) = 0$. Déterminons v_y en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale. On écrit l'énergie totale à l'instant $t = 0$:

$$\frac{1}{2} m \alpha_{\perp}^2 x_0^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 = E, \quad \text{1 point} \quad \text{N}$$

$$v_y^2 = \frac{2E}{m} - \alpha_{\perp}^2 x_0^2, \quad (10)$$

$$v_y = \sqrt{\frac{2E}{m} - \alpha_{\perp}^2 x_0^2}. \quad \text{1 point} \quad \text{O} \quad (11)$$

Pour que la situation décrite soit possible, il faut que l'expression sous la racine soit positive ou nulle. Donc on peut écrire la condition sur x_0 comme

$$x_0 \leq \sqrt{\frac{2E}{m \alpha_{\perp}^2}}. \quad \text{1 point} \quad \text{P} \quad (12)$$

Avec ces conditions initiales, les constantes d'intégration des équations (8) s'écrivent $A_x = x_0, A_y = A_z = 0$, et $B_x = B_z = 0, B_y = v_y / \alpha_y$. La trajectoire de l'atome s'écrit donc :

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 \cos(\alpha_{\perp} t) & \text{1 point} \quad \text{Q} \\ y(t) &= \sqrt{\frac{2E}{m \alpha_y^2} - \frac{\alpha_{\perp}^2}{\alpha_y^2} x_0^2} \sin(\alpha_y t) & \text{1 point} \quad \text{R} \\ z(t) &= 0, & \text{1 point} \quad \text{S} \end{cases} \quad (13)$$

où on a utilisé l'expression de v_y obtenue dans l'équation (11).

Remarque : lorsque le rapport des deux périodes est un nombre entier, la trajectoire va être périodique de période inférieure ou égale à $2\pi/\alpha_y$. En effet, $\alpha_{\perp} \times 2\pi/\alpha_y = 2n\pi$, donc l'atome revient exactement à son point de départ. La figure décrite par la trajectoire est appelée courbe de Lissajous. Si n est un nombre rationnel, il existera toujours un certain nombre d'oscillations dans la direction y après lequel l'atome revient sur son point de départ. En revanche si n est irrationnel, l'atome ne revient jamais à son point de départ. Dans ce cas, toute région aussi petite soit elle, qui n'est pas interdite par la conservation de l'énergie sera traversée par la trajectoire de l'atome.

Deux exemples de trajectoires sont donnés sur la figure ci-après.

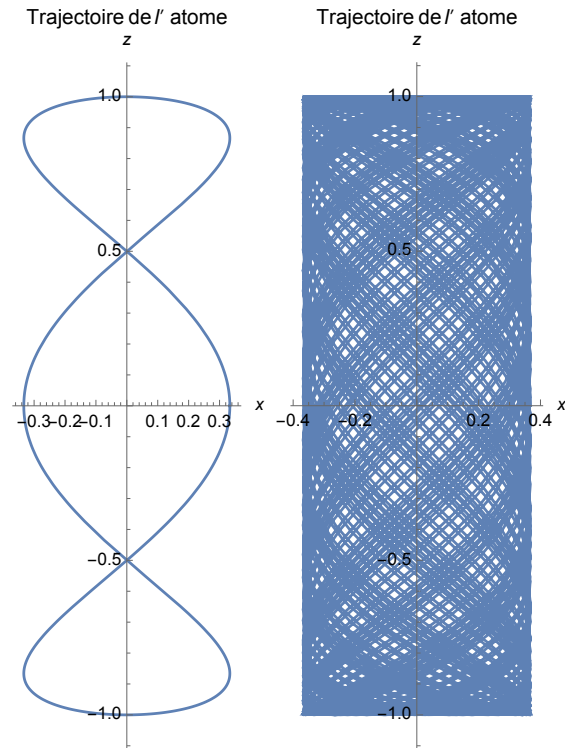


FIGURE 1 – A gauche : trajectoire de l'atome, pour $\alpha_{\perp} = 3\alpha_y$, et $Y_m = 1$. A droite, trajectoire de l'atome après 50 périodes d'oscillations dans la direction z pour $\alpha_{\perp} = 2.71828\alpha_y$.