Ens: D. Kressner - Algèbre Linéaire Avancée I - (n/a)

28 novembre 2016 - durée : 2 heures

n/a

n/a

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

  $+3$ points si la réponse est correcte,

  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

oui | ja | sì | yes

non | nein | non | no

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : On considère le système linéaire

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Soit W l'ensemble de toutes les solutions de ce système dans $\mathbb{F}_5^4$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ W contient un nombre infini d'éléments.
- ☐ W contient 1 élément.
- ☐ W contient 25 éléments.
- ☐ W contient 16 éléments.

Question 2 : Pour un nombre fixe $\alpha \in \mathbb{R}$, soit S_α l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont le premier et le second éléments sont des nombres réels quelconques, et dont le troisième élément est α. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ Il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que S_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Il y a une infinité de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que S_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Il existe un seule $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que S_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Si S_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors la dimension de S_α est 1.

Question 3 : Soit $K[t]$ l'espace vectoriel des polynômes. Laquelle des assertions suivantes est fausse ?

- ☐ La famille $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ où $p_0(t) = 1$ et $p_i(t) = 1 + t + \cdots + t^i$, $i \geq 1$, engendre $K[t]$.
- ☐ La famille $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ où $p_0(t) = 1 + t + t^2 + \cdots$ et $p_i(t) = t^i + t^{i+1} + t^{i+2} + \cdots$, $i \geq 1$, engendre $K[t]$.
- ☐ Si $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots \in K[t]$ où $\alpha_0 \neq 0$, alors le degré de p est fini.
- ☐ La famille $(1, t, t^2, t^3, \ldots)$ engendre $K[t]$.

Question 4 : Soit $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$. Laquelle des affirmations suivantes équivaut à dire que $\operatorname{rang}(A) = 3$?

- ☐ Aucune des autres assertions n'est correcte.
- ☐ Il existe au moins une ligne de A qui est une combinaison linéaire des autres lignes.
- ☐ A a une ligne nulle.
- ☐ A a deux colonnes nulles.
- ☐ Il existe au moins une colonne de A qui est une combinaison linéaire des autres colonnes.

Question 5 : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), n > 1$, la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On note $x_n = (A^n)_{1n}$, le coefficient $(1, n)$ de la matrice A^n. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ $x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n + \lambda(n-2)$.
- ☐ $x_n = (\lambda+1)^n - \lambda^n - 1$.
- ☐ Aucune des autres assertions n'est correcte.
- ☐ $x_n = n\lambda$.

Question 6 : Soient V un K-espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et H un sous-espace vectoriel de V. Laquelle des assertions suivantes est fausse ?

- ☐ Si $(v_1, \dots, v_n)$ engendre H, alors cette famille engendre V aussi.
- ☐ $\dim(H) \leq \dim(V)$.
- ☐ Une famille linéairement indépendante dans H est linéairement indépendante dans V aussi.
- ☐ Si $(v_1, \dots, v_n)$ engendre V, alors cette famille est linéairement indépendante.

Question 7 : Un groupe abélien satisfait les axiomes suivants : la stabilité ($A1$), l'associativité ($A2$), l'existence de l'élément neutre ($A3$), l'existence des inverses ($A4$) et la commutativité ($A5$). Soit $G = \mathbb{R}$ et la loi de composition $\circ$ définie dans $G \times G$ par $x \circ y = -x - y + xy$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ Les axiomes $A1, A3, A4$ sont satisfaits, et les axiomes $A2, A5$ ne sont pas satisfaits.
- ☐ Les axiomes $A1, A2, A5$ sont satisfaits, et les axiomes $A3, A4$ ne sont pas satisfaits.
- ☐ Les axiomes $A1, A5$ sont satisfaits, et les axiomes $A2, A3, A4$ ne sont pas satisfaits.
- ☐ Les axiomes $A1, A3, A5$ sont satisfaits, et les axiomes $A2, A4$ ne sont pas satisfaits.

Deuxième partie, question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question A : *Cette question est notée sur 8 points.*

Réservé au correcteur

Réservé au correcteur

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$ est un entier positif. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{rang}(A) \leq 2$.

ii) Il existe $U, V \in M_{n\times 2}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV^T$.

Question B : *Cette question est notée sur 4 points.*

Réservé au correcteur

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, et L, M deux sous-espaces vectoriels de V tels que $V = L \oplus M$. On définit $P : V \to V$ par $P(x) = a$, où $x = a + b, a \in L, b \in M$. Montrer que :

i) P est une application linéaire,

ii) $P \circ P = P$.

Question C : *Cette question est notée sur 6 points.*

Réservé au correcteur

Soit $(G, +)$ un groupe et $f : G \to G$ la fonction définie par $f(x) = x^{-1}$. Montrer que f est un morphisme de groupe si et seulement si G est abélien.

Question D : *Cette question est notée sur 6 points.*

Réservé au correcteur

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 1 & -2 \\ -1 & 2+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

et F_A l'application linéaire $F_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, F_A : x \mapsto Ax$.

i) Calculer une base de $\mathrm{Ker}(F_A)$ et une base de $\mathrm{Im}(F_A)$.

ii) Déterminer si F_A est surjective, injective ou bijective.