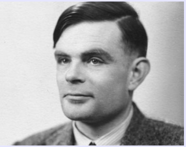
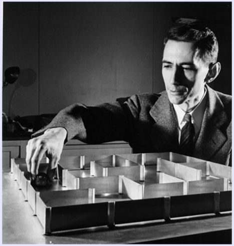
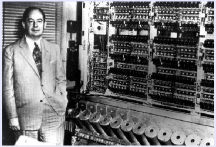
  

Information, Calcul et Communication

Module 2 : Information et Communication

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Module 2: Information et Communication
Introduction

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Introduction

Supposons que votre meilleur(e) ami(e) habite en Nouvelle-Zélande.

Avec un groupe d'amis, vous désirez lui jouer un sketch pour son anniversaire.

Il est désormais possible d'accomplir cette tâche en quelques minutes seulement.

Que se passe-t-il exactement lors d'une telle opération ?

Introduction

1. A l'aide de votre smartphone, vous enregistrez une vidéo amusante.
   - Ce faisant, un signal *analogique* est converti en sa représentation *numérique* au moyen d'un algorithme sophistiqué.
   - De plus, un algorithme de *correction d'erreurs* est utilisé pour stocker le fichier dans la mémoire.

Réussir son oral à l'EPFL pour les nuls

Introduction

2. Vous téléchargez ensuite cette vidéo sur votre site web préféré, non sans en avoir réduit la taille au préalable, au moyen d'un algorithme de *compression*, pour que le téléchargement ne dure pas des heures.

- Lors du téléchargement, deux autres algorithmes de *correction* d'erreurs sont utilisés pour protéger la *transmission* des données a) jusqu'à votre borne wifi, b) sur internet.
- Si vous ne désirez pas que d'autres gens puissent profiter de votre sketch, un algorithme de *cryptage* est utilisé par le site web pour empêcher d'autres utilisateurs de visionner la vidéo.

Introduction

3. Puis votre ami(e) découvre cette vidéo sur son « mur » et la regarde.

- Un algorithme de *correction* d'erreurs est à nouveau utilisé ici...
- ...ainsi qu'un algorithme de *décryptage*,
- et le signal est *reconstruit* à partir des données numériques.

Introduction

En bref:

- Dans nos gestes quotidiens, nous utilisons, souvent sans nous en rendre compte, un grand nombre d'**algorithmes sophistiqués**.
- Ceci a, pour le meilleur ou pour le pire, considérablement changé notre manière de communiquer, de voyager, de voir le monde...
- Quelques **contributions fondamentales**, remontant pour certaines à plus d'une cinquantaine d'années, ont permis la réalisation de ces moyens de communication modernes.

Objectif principal de ce module:

Comprendre quelques-unes de ces contributions fondamentales.

Plan

Plan du module:

- leçons 2.1 et 2.2: échantillonnage de signaux
- leçons 2.3 et 2.4: compression de données

Et ce dont nous ne parlerons pas ou peu:

- transmission de données
- cryptographie
- réseaux de communication

Questions

Voici les questions auxquelles nous allons tenter de répondre dans ce module:

- Comment représenter / **capter** la réalité physique avec des bits ?
- Comment **restituer** cette réalité à partir de bits ?
- Comment **mesurer la quantité d'information** présente dans des données ?
- Comment **compresser** les données, i.e. les *stocker en utilisant le moins d'espace* possible ?

Plan

Plan détaillé des deux leçons à venir:

Aujourd'hui:

- signaux, fréquences, bande passante et spectre
- filtrage
- échantillonnage

La semaine prochaine:

- reconstruction
- théorème d'échantillonnage
- sous-échantillonnage

Signaux, fréquences et bande passante

Qu'est-ce qu'un signal ? C'est une fonction !

Exemples:

1. Une onde sonore ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
2. Une onde électromagnétique ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)
3. Une photo noir-blanc ($X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)
4. Une photo couleur ($X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$)
5. Une vidéo ($X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

De manière générale, on peut définir un signal comme une fonction (continue, bornée) $X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$.

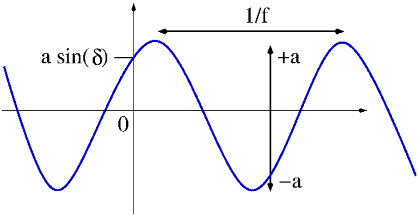
Dans le cadre de ce module, nous considérerons presque exclusivement des signaux unidimensionnels ($X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), par souci de clarté et de simplification.

Exemples de signaux

Sinusoïde pure:

$$X(t) = a\sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a =$ amplitude, $f =$ fréquence, $\delta =$ déphasage



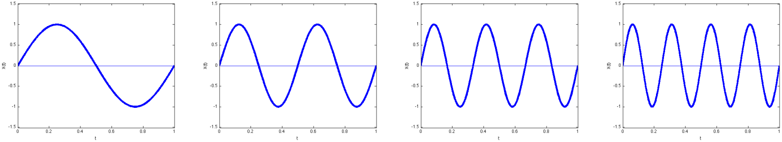
Exemples de signaux

Sinusoïde pure:

$$X(t) = a\sin(2\pi f\, t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a =$ amplitude, $f =$ fréquence, $\delta =$ déphasage

- $a = 1,\ f = 1,\ \delta = 0$: $X(t) = \sin(2\pi t)$
- $a = 1,\ f = 2,\ \delta = 0$: $X(t) = \sin(4\pi t)$
- $a = 1,\ f = 3,\ \delta = 0$: $X(t) = \sin(6\pi t)$
- $a = 1,\ f = 4,\ \delta = 0$: $X(t) = \sin(8\pi t)$



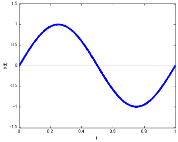
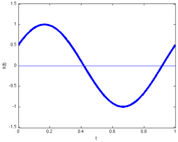
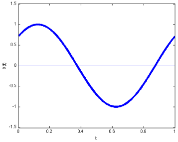
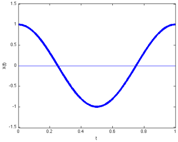
Exemples de signaux

Sinusoïde pure:

$$X(t) = a\sin(2\pi f t + \delta), \quad t \in \mathbb{R}$$

$a =$ amplitude, $f =$ fréquence, $\delta =$ déphasage

- $a = 1$, $f = 1$, $\delta = 0$: $X(t) = \sin(2\pi t)$
- $a = 1$, $f = 1$, $\delta = \pi/6$: $X(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{6})$
- $a = 1$, $f = 1$, $\delta = \pi/4$: $X(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{4})$
- $a = 1$, $f = 1$, $\delta = \pi/2$: $X(t) = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{2}) = \cos(2\pi t)$

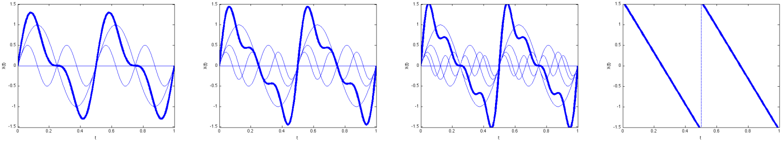
Exemples de signaux

Somme de sinusoïdes:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \ldots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n), \quad t \in \mathbb{R}$$

a_j = amplitudes, f_j = fréquences, δ_j = déphasages

- Exemple: $a_j = 1/j$, $f_j = 2j$, $\delta_j = 0$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
- $n = 1: \; X(t) = \sin(4\pi t)$
- $n = 2: \; X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$
- $n = 3: \; X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t)$
- $n = 4: \; X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$
- « $n = \infty$ »



Signaux en général

Affirmation: (à mettre en doute...)

« Tout signal est une somme de sinusoïdes ! »

Dans ce cours, nous ne considérerons que des signaux qui sont effectivement des sommes de sinusoïdes.

Fréquences: unité de mesure

La fréquence f contenue dans la sinusoïde pure $X(t) = a\sin(2\pi f t + \delta)$ s'exprime en hertz = Hz = $\frac{1}{\text{sec}}$.

Un signal dont la fréquence est de f Hz se répète toutes les $T = \frac{1}{f}$ sec.

Exemple: La note « La » à 440 Hz est une sinusoïde pure qui se répète toutes les $\frac{1}{440} = 2.2727...$ millisecondes.

Cette unité de mesure a été attribuée en l'honneur d'Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), à qui on doit:

- la vérification expérimentale de la théorie de Maxwell affirmant que la lumière est une onde électromagnétique;
- le premier système permettant la transmission et la réception d'ondes radio.

Fréquences: quelques ordres de grandeur

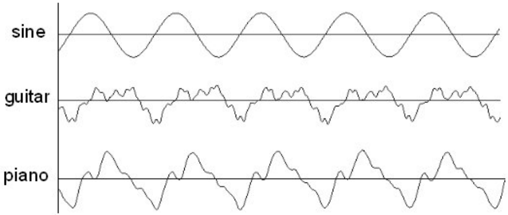
Ondes sonores:

- 20 Hz - 20 kHz: sons audibles
- 20 kHz +: ultrasons

Ondes électromagnétiques:

- 150 kHz - 3 GHz: ondes radio
- 3 GHz - 300 GHz: micro-ondes, radar
- 300 GHz - 4.3 x 10^{14} Hz: infrarouge
- 4.3 x 10^{14} Hz - 7.5 x 10^{14} Hz: lumière visible
- 7.5 x 10^{14} Hz - 3 x 10^{17} Hz: ultraviolet
- 3 x 10^{17} Hz +: rayons X, rayons γ, rayons cosmiques...

Tous les « La 440 » ne sont pas les mêmes!



EXEMPLE tiré de: `http://www.yuvalnov.org/temperament/`

- diapason (électronique)
- guitare
- piano

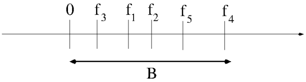
Bande passante

Revenons aux sommes de sinusoïdes:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \ldots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

On définit comme suit la *bande passante* de ce signal:

$$B = f_{\max} = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$$



Comme nous allons le voir, la bande passante joue un rôle primordial en traitement du signal.

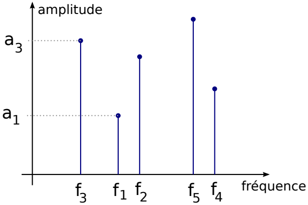
Spectre

Autre représentation graphique bien utile d'un signal : son **spectre** :

dans « l'espace des fréquences » :
axe horizontal = fréquences présentes
axe vertical = amplitude correspondante

Exemple avec une somme de sinusoïdes:

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \ldots + a_n \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$



Filtrage d'un signal

De manière générale, lorsqu'un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$ passe par un **filtre**, il en ressort une version *déformée* $(\widehat{X}(t), t \in \mathbb{R})$:

Pourquoi donc vouloir filtrer un signal ?
Le plus souvent, pour **supprimer** (ou du moins, atténuer) **le bruit** présent dans le signal.

Il existe bien sûr de multiples sortes de filtres.

Dans ce cours, nous allons voir une catégorie particulière de filtres:

les **filtres « passe-bas »**

Filtre passe-bas idéal

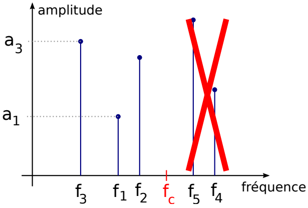
Un **filtre passe-bas idéal** est un filtre qui

> supprime d'un signal toutes les fréquences supérieures à une **fréquence de coupure** f_c donnée

(i.e. supprime les hautes fréquences, généralement sources de bruit).

Concrètement, si $X(t)$ est une somme de sinusoïdes, alors après le filtre, toutes les composantes de $X(t)$ dont la fréquence est plus grande que f_c ont disparu :

$$X(t) = a_1 \sin(2\pi f_1\, t + \delta_1) + \ldots + \cancel{a_k \sin(2\pi f_k\, t + \delta_k)} + \ldots + a_n \sin(2\pi f_n\, t + \delta_n)$$



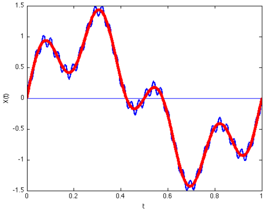
Filtre passe-bas idéal : exemple

- Considérons le signal (contenant les fréquences $f = 1$, 4 et 32 Hz):

$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{10}\sin(64\pi t)$$

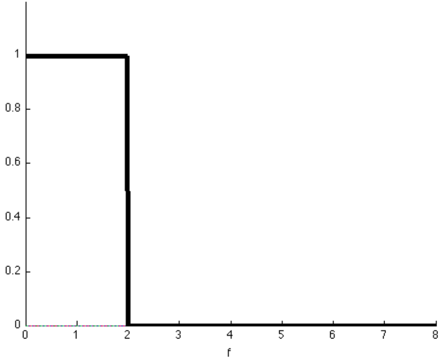
Filtre passe-bas idéal : exemple

- Après passage au travers d'un filtre passe-bas avec fréquence de coupure $f_c = 30$ Hz, la composante du signal à 32 Hz disparaît, et le signal devient: $\widehat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$



Filtre passe-bas idéal dans l'espace des fréquences

Exemple :
un filtre passe-bas idéal avec fréquence de coupure $f_c = 2$ Hz



Filtre à moyenne mobile

Le signal $\widehat{X}(t)$ sortant à l'instant t d'un **filtre à moyenne mobile** est donné par:

$$\widehat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t} X(s)\, ds$$

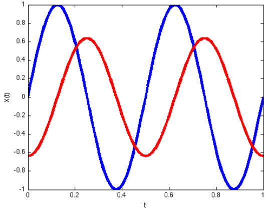
T_c est la période sur laquelle on moyenne le signal avant l'instant t.

Exemple: Qu'arrive-t-il à une sinusoïde pure qui passe par un tel filtre ?
$X(t) = \sin(2\pi f\, t)$ devient:

$$\widehat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi f\, s)\, ds$$

$$= \frac{\cos(2\pi f(t - T_c)) - \cos(2\pi f\, t)}{2\pi f\, T_c}$$

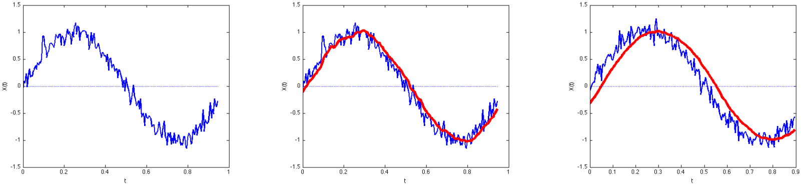
$$= \frac{\sin(\pi f\, T_c)}{\pi f\, T_c} \sin(2\pi f\, t - \pi f\, T_c)$$



(ici, $f = 2$ Hz, $T_c = 0.25$ sec)

Filtre à moyenne mobile

Autre exemple: $X(t) \mapsto \widehat{X}(t)$

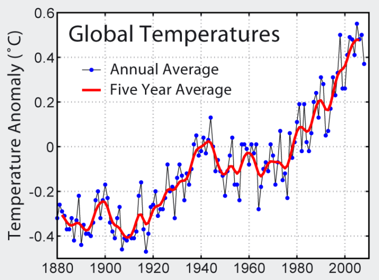


$T_c = 0.05$ sec $\qquad$ $T_c = 0.1$ sec

Plus T_c augmente, plus le signal sortant est régulier, mais plus le déphasage est grand également.

Filtre à moyenne mobile

Autre exemple:



source: Global Warming Art

Note : sur cette figure le signal filtré a été resynchronisé avec le signal d'origine (suppression du déphasage)

Filtre à moyenne mobile

Revenons à la sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi f t)$:

$$\widehat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \int_{t-T_c}^{t} \sin(2\pi f s)\, ds = \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \sin(2\pi f t - \pi f T_c)$$

De cette expression, on déduit que

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\widehat{X}(t)| \leq \frac{1}{\pi f T_c}$$

on voit que si $f T_c$ est grand, alors le signal $\widehat{X}(t)$ est de faible amplitude.

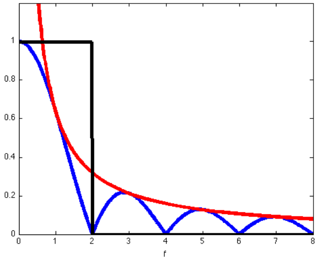
(remarquer que si $f T_c$ est un nombre entier, alors on a même $\widehat{X}(t) = 0$ puisqu'alors $\sin(\pi f T_c) = 0$)

Après le passage à travers un filtre à moyenne mobile, les hautes fréquences d'un signal sont donc fortement atténuées.

Comparaison des filtres

Comparons l'atténuation des fréquences entre:

- un filtre passe-bas idéal avec fréquence de coupure $f_c = 2$ Hz et
- un filtre à moyenne mobile de période $T_c = 1/f_c = 0.5$ sec.



(sur ce dernier graphe apparaît en rouge la borne supérieure $\frac{1}{\pi f T_c}$ qu'on vient de calculer)

Filtres: conclusion

- Un filtre passe-bas sert donc à supprimer ou atténuer les hautes fréquences dans un signal.
- La semaine prochaine, nous verrons une application importante des filtres passe-bas.

Echantillonnage d'un signal

Revenons maintenant à notre première question:

> Comment représenter / **capter** la réalité physique avec des bits?

Les signaux qui nous entourent sont de nature *analogique*
(ondes sonores, électromagnétiques).

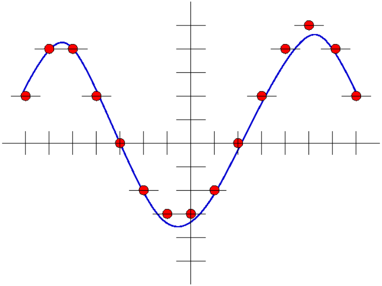
Or un ordinateur ne peut traiter que des données *numériques*.

Pour pouvoir traiter l'information contenue dans un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$,
il faut donc:

1. **échantillonner** le signal à des instants discrets;
2. **quantifier** les valeurs du signal à ces instants.

Une question se pose naturellement: que perd-on du signal d'origine à travers ces deux opérations successives?

Echantillonnage d'un signal



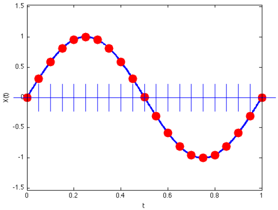
- signal échantillonné et quantifié

Échantillonnage

Pour représenter un signal dans l'ordinateur, on va n'en garder que quelques valeurs « bien choisies »

Pour simplifier, ces valeurs sont choisies de façon périodique :
on parle d'**échantillonage**

Le signal $X(t)$ sera donc représenté par la suite de valeurs $X(nT_e)$



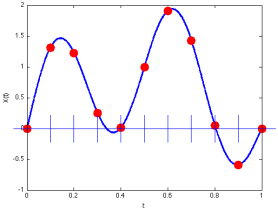
T_e s'appelle la « période d'échantillonnage »

(Note : la représentation numérique des valeurs elles-mêmes (cf leçon I.4) s'appelle « quantification »)

Echantillonnage d'un signal

Nous nous concentrons ici sur la partie « échantilonnage »:

signal entrant $(X(t), t \in \mathbb{R})$ $\quad\mapsto\quad$ signal échantilloné $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$:



T_e = période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T_e}$ = fréquence d'échantillonnage

Période d'échantillonnage T_e

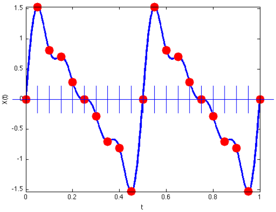
Quelle période d'échantillonnage T_e est la « bonne » ?

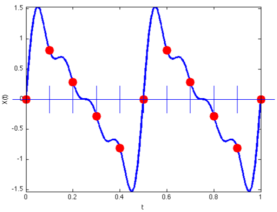
- T_e trop petite: trop d'information à traiter...
- T_e trop grande: de l'information est perdue...

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment:

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$



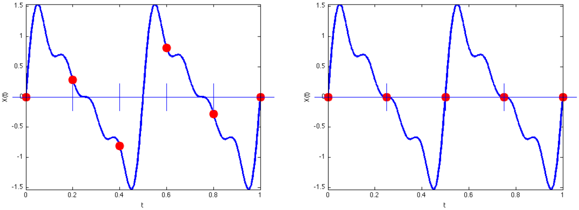


Période d'échantillonnage $T_e = 0.05$ sec.
Période d'échantillonnage $T_e = 0.1$ sec.

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment:

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

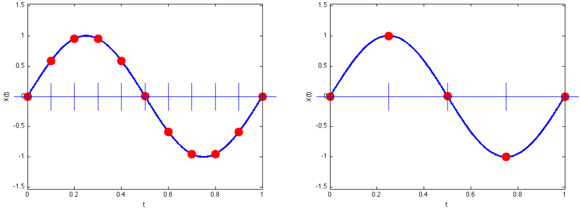


Période d'échantillonnage $T_e = 0.2$ sec.
Période d'échantillonnage $T_e = 0.25$ sec.

Echantillonnage d’une sinusoïde pure

- **Autre exemple:** sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1\,\mathrm{Hz})$$



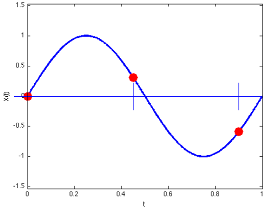
- Période d’échantillonnage $T_e = 0.1$ sec.
- Période d’échantillonnage $T_e = 0.25$ sec.

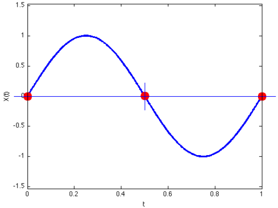
Pour pouvoir reconstruire la sinusoïde à partir de l’échantillon, il est nécessaire que $T_e < 0.5$ sec, autrement dit, que $f_e = \frac{1}{T_e} > 2$ Hz.

Echantillonnage d'une sinusoïde pure

- **Autre exemple:** sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1\,\text{Hz})$$





- Période d'échantillonnage $T_e = 0.45$ sec.
- Période d'échantillonnage $T_e = 0.5$ sec.

Pour pouvoir reconstruire la sinusoïde à partir de l'échantillon, il est nécessaire que $T_e < 0.5$ sec, autrement dit, que $f_e = \frac{1}{T_e} > 2$ Hz.

Echantillonnage d'une sinusoïde pure

De manière plus générale, on peut dire les choses suivantes:

Soit $X(t)$ une sinusoïde pure dont la fréquence est *plus petite ou égale à* f.

- Pour pouvoir reconstruire cette sinusoïde à partir de sa version échantillonnée à la fréquence f_e, il est nécessaire que

$$f_e > 2f.$$

- Le *théorème d'échantillonnage* que nous verrons la semaine prochaine dit pour l'essentiel que cette condition est non seulement *nécessaire* mais aussi *suffisante*.

- Nous verrons également que ce théorème s'applique à tous les signaux, et pas seulement aux sinusoïdes.

Application

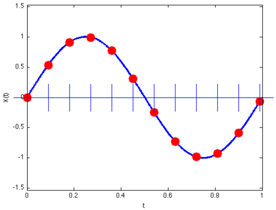
Sur un CD, le son est échantillonné à une fréquence de 44.1 kHz, car les sons au-dessus d'une fréquence de 22 kHz ne sont (en général) pas perçus par l'oreille humaine.

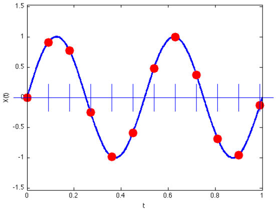
Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est *sous-échantillonné* ?

Nous poursuivons ici avec l'exemple d'une sinusoïde pure: $X(t) = \sin(2\pi f t)$, échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.11...$ Hz.

- $f = 1$ Hz
- $f = 2$ Hz



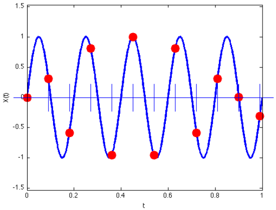


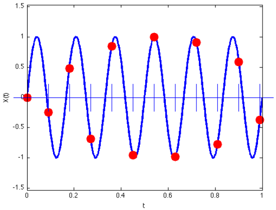
Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est *sous-échantillonné* ?

Nous poursuivons ici avec l'exemple d'une sinusoïde pure: $X(t) = \sin(2\pi f\, t)$, échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.11...$ Hz.

- $f = 5$ Hz
- $f = 6$ Hz



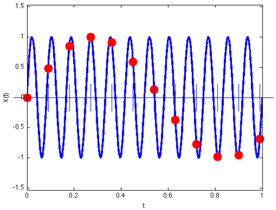


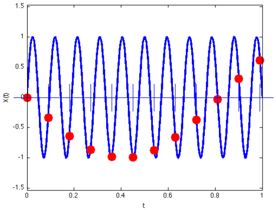
Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est *sous-échantillonné* ?

Nous poursuivons ici avec l'exemple d'une sinusoïde pure: $X(t) = \sin(2\pi f\, t)$, échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.11\ldots$ Hz.

- $f = 12$ Hz
- $f = 10.5$ Hz

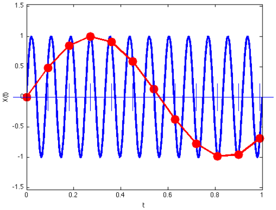


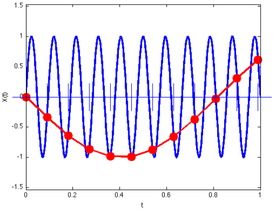


Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

Dans les deux derniers cas, nous avons vu apparaître:

- une sinusoïde avec une fréquence plus lente;
- une autre sinusoïde, également avec une fréquence plus lente, qui part d'abord vers le bas.

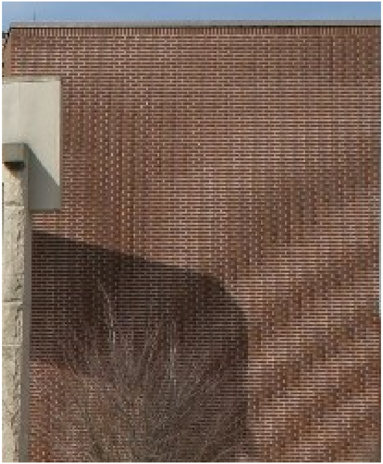




Ce phénomène s'appelle l'**effet stroboscopique** et survient donc lorsqu'on *sous-échantillonne* un signal. Nous y reviendrons en détail la semaine prochaine.

Effet stroboscopique: illustrations

EXEMPLE VISUEL:



Effet stroboscopique: illustrations

EXEMPLES VIDEO :

```
http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA
http://www.youtube.com/watch?v=r3hs8pPCQmo
http://www.wideo.fr/video/iLyROoaft6e3.html
http://www.youtube.com/watch?v=LVwmtwZLG88
```

Conclusion temporaire

- signaux / sinusoïdes
- « tout signal est une somme de sinusoïdes ! »
- fréquence(s) présente(s) dans un signal, bande passante, spectre
- filtrage et échantillonnage
- condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal: $f_e > 2f$

La semaine prochaine:

- comment reconstruire un signal à partir d'un échantillon donné ?
- théorème d'échantillonnage
- sous-échantillonnage