Physique Avancée I – Examen Janvier 2015 – Prof. J-Ph. Ansermet

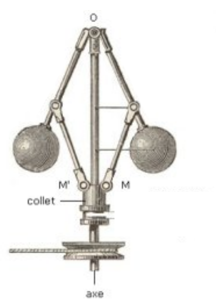
fait à la maison

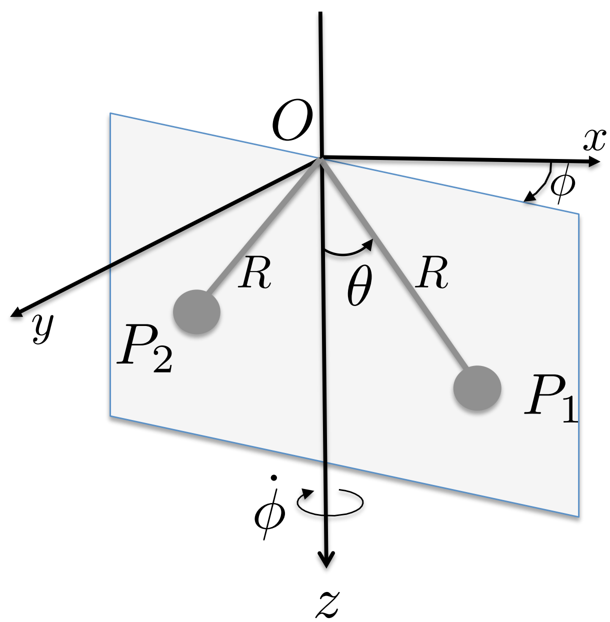
Nom :

Prénom :

N° Sciper :

A. Régulateur de Watt (4/10 points)





On modélise un régulateur de Watt (voir esquisse à gauche) par deux points matériels P_1 etP_2, pesants, de masse m, reliés chacun à un point O de l'axe de rotation Oz par des tiges rigides sans masse, de longueurs R, d'inclinaison θ par rapport à la verticale. Les masses sont astreintes à se déplacer dans un plan en rotation autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{z}}$. On suppose que le régulateur est sans frottement. La vitesse angulaire peut changer, par l'action sur le plan en rotation d'une corde et d'une poulie liée à ce plan, par exemple. L'axe Oz est vertical, orienté vers le bas, dans le sens de la pesanteur caractérisée par le vecteur $\boldsymbol{g}$. Le système d'axes cartésiens $Oxyz$ est choisi pour que θ et ϕ correspondent aux angles des coordonnées sphériques dans leur définition usuelle.

Dans ce problème, on va analyser le comportement mécanique de ce système en se concentrant uniquement sur le point matériel P_1 et on utilisera les coordonnées sphériques et le repère associé (qui n'est pas représenté sur le dessin).

Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) Etablir le bilan des forces agissant sur le point matériel P_1 uniquement. Représenter chacune des forces par une flèche sur le dessin et donner leurs projections sur le repère associé aux coordonnées sphériques.

2. (**1.0 point**) Ecrire les équations du mouvement pour le point matériel P_1 :

   $(\hat{\boldsymbol{e}_r})$ ....

   $(\hat{\boldsymbol{e}_\theta})$ ....

   $(\hat{\boldsymbol{e}_\phi})$ ....

3. (**0.5 point**) A quoi est égale la dérivée par rapport au temps de la composante z du moment cinétique en O du point matériel P_1, en termes des forces extérieures appliquées à P_1 ?

   $$\frac{d\left(\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{L}_O\right)}{dt} = \text{..}$$

4. (**1.0 point**) Exprimer l'énergie mécanique du point matériel P_1 en coordonnées sphériques, en prenant O comme point de référence du potentiel.

   $E =$ ....

5. (**0.5 point**) Trouver l'angle θ_0 à l'équilibre quand $\dot{\phi}$ est constant, sous la condition $\theta \neq 0$.

   ....

6. (**0.5 point**) On peut obtenir à nouveau l'accélération du point matériel P_1 en appliquant le formalisme du mouvement relatif, prenant le plan vertical et sa normale comme référentiel relatif, et le système d'axes cartésiens $Oxyz$ comme référentiel absolu. Avec al vitesse relative $\boldsymbol{v}_r = r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ et la vitesse angulaire d'entrainement du référentiel relatif $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{z}}$, calculer l'accélération de Coriolis projetée sur le repère des coordonnées sphériques :

   $\boldsymbol{a}_{Coriolis} = ($..$)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r$

   $+\,($..$)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

   $+\,($..$)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

Physique Avancée I – Examen Janvier 2015 – Prof. J-Ph. Ansermet

fait à la maison

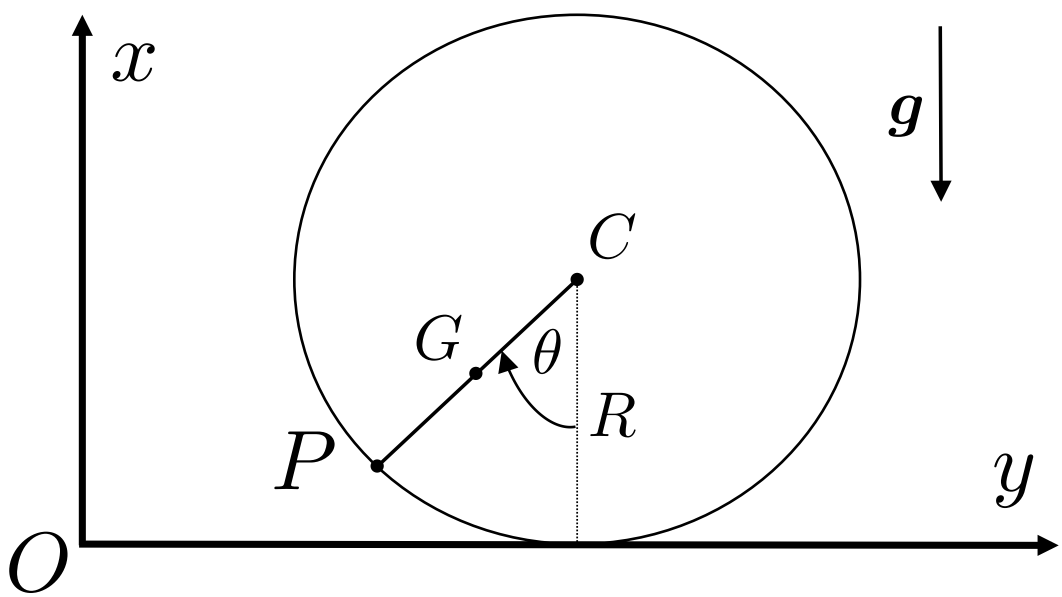
Nom :

Prénom :

N° Sciper :

B. Balançoire circulaire (4/10 points)

Un solide est formé d'un cercle et d'un point matériel P situé sur le cercle. Le cercle est en tout temps dans un plan vertical, il roule sans glisser sur une table horizontale, il est soumis à la pesanteur, sa masse vaut $m/2$, son rayon est R. La masse $m/2$ du cercle est répartie uniformément sur le cercle (l'intérieur est vide).
Le point matériel en P est pesant, de masse $m/2$, il est fixé en un point du cercle. Le solide constitué du cercle et du point matériel est donc de masse totale m. On désigne par C le centre du cercle, par P le point matériel et par G le centre de masse du solide composé du cercle et du point matériel.



Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) En utilisant la définition vectorielle du centre de masse pour tout système de point matériel, montrer que G est au milieu du segment CP.

2. (**0.5 point**) On désigne la vitesse angulaire du solide par $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$ où $\omega = \dot{\theta}$. Montrer que la condition de roulement sans glissement implique que $V_C = \omega R$, où V_C est la projection sur l'axe Oy de la vitesse $\boldsymbol{V}_C$ de C.

3. (**0.5 point**) Avec des règles élémentaires sur les propriétés des moments d'inertie, calculer le moment d'inertie en G du solide (cercle et point matériel) c'est-à-dire I_G (et non pas I_C) :

$$I_G = ...$$

4. (**1.0 point**) En utilisant I_G supposé connu, obtenir grâce au théorème du moment cinétique une équation du mouvement pour $\theta(t)$. Esquisser sur un dessin (celui de la donnée ou un dessin annexe) toutes les forces agissant sur le solide.

$$.....\ \ddot{\theta} = ...$$

5. (**1.0 point**) Tenant compte de la condition de roulement sans glissement $V_C = R\omega$, trouver l'expression vectorielle de l'accélération de G en termes de θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$, appliquer le théorème du centre de masse et projeter selon $\hat{\boldsymbol{x}}$ pour obtenir les équations du mouvement : $\hat{\boldsymbol{y}}$.

$(\hat{\boldsymbol{x}})$ .... = ...

$(\hat{\boldsymbol{y}})$ .... = ...

6. (**0.5 point**) En considérant I_G et la vitesse $\boldsymbol{v}_P$ du point P connus, exprimer l'énergie mécanique du solide. Prendre comme référence du potentiel la position la plus basse du centre de masse G.

$$E = ...$$

Physique Avancée I – Examen Janvier 2015 – Prof. J-Ph. Ansermet

fait à la maison

Nom :

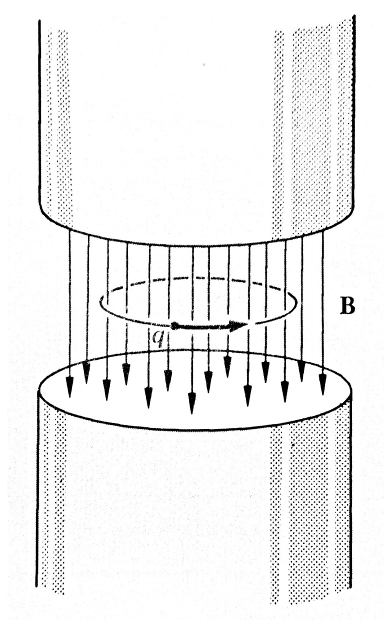
Prénom :

N° Sciper :

C. Gyrotronique (2/10 points)

Une charge électrique q considérée comme un point matériel de masse m est soumise à un champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$ uniforme et constant. On admet que le point matériel a une trajectoire dans un plan normal au champ $\boldsymbol{B}$. On note $\boldsymbol{v}$ sa vitesse et $\boldsymbol{p}$ sa quantité de mouvement. On veut examiner ici les conséquences de la définition relativiste de la fonction $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{v})$. L'équation de la dynamique est donnée :

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$$



Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) On donne la norme du vecteur de vitesse initiale, $v = |\boldsymbol{v}|$. Déterminer la norme du vecteur de quantité de mouvement et montrer qu'elle est indépendante du temps.

$$p = |\boldsymbol{p}| = \text{..........................}$$

2. (**0.5 point**) Obtenir les équations du mouvement pour p_x et p_y en termes de m, q, B et γ où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

$$\ddot{p}_x = \text{...........................}$$

$$\ddot{p}_y = \text{...........................}$$

3. (**0.5 point**) Montrer que la trajectoire est un cercle et donner son rayon R en termes de m, v, q, B et γ.

$$R = \text{.....................}$$

4. (**0.5 point**) Quelle est la norme du vecteur de vitesse angulaire ω_c du point matériel sur le cercle ?

$$\omega_c = \text{...}$$