Algèbre linéaire avancée I — Jeudi 22 septembre 2016
Prof. D. Kressner — EPFL

Série 1

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 26 septembre.
L'exercice 5 ($\star$) peut être rendu le jeudi 29 septembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM
Determiner si les énoncés proposés sont vrais ou faux et *justifier* la réponse.

a) Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut :
- ◯ n'avoir aucune solution ;
- ◯ avoir exactement une solution ;
- ◯ avoir exactement deux solutions ;
- ◯ avoir une infinité de solutions.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x$. Répondre à chacune des questions suivantes en cochant la case correcte.

a) Est-ce que la fonction f est injective ?
- ◯ Oui.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble de départ à l'intervalle $[0, \infty[$.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble de départ à l'intervalle $]-\infty, 0]$.

b) Est-ce que la fonction f est surjective ?
- ◯ Oui.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble de départ à l'intervalle $[0, \infty[$.
- ◯ Oui, si on restreint l'ensemble d'arrivée à l'intervalle $[-4, \infty[$.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. Déterminer $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(\frac{1}{2})$, $f^{-1}(\frac{3}{2})$.

Exercice 4
Soit $f : X \to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Soient A et B deux sous-ensembles de X.

a) Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(b) Trouver un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(c) Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 5 ($\star$)
Montrer par récurrence sur n que la somme des n premiers nombres entiers impairs est égale à n^2, c'est-à-dire que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Exercice 6
On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}, \qquad & B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{2}\,x\}, & D &= \mathbb{Z}^2\,. \end{aligned}$$

(a) Déterminer $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$.
(b) Déterminer $(B \cup C) \cap D$.
(c) Calculer $\mathrm{Card}\big((B - A) \cap D\big)$.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont correctes ?

(a) L'application f est injective.
(b) L'application f est surjective.
(c) L'application $f|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est injective.
(d) Soient $A = [-3, 2]$ et $B = [1, 3]$. Alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 8
Soit $f : X \to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Soient A et B deux sous-ensembles de X et C et D deux sous-ensembles de Y.

(a) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
(c) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.