Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 21 au 25 novembre 2016

Série 10 du mardi 22 novembre 2016

Exercice 1 (* A rendre).

Soit I un intervalle non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, i.e., telle que $\forall a, b \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Montrer que si $x, y, z \in I$ sont tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Indication: Commencer par vérifier que $y = \dfrac{z-y}{z-x}\, x + \dfrac{y-x}{z-x}\, z$.

Exercice 2.

Soit I un intervalle ouvert non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est continue sur I et admet en tout $x \in I$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite de x.

Indication: Montrer, en utilisant l'exercice 1, que si $x, y, x_0 \in I$, $x \leq y$ et $x, y \neq x_0$, alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$

Exercice 3.

Démontrer que si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et si f est convexe, alors on a $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.