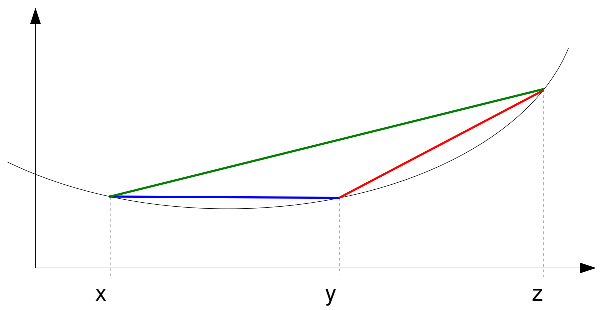
Corrigé 10 du jmardi 22 novembre 2016

Exercice 1 (* A rendre).



Puisque $x < y < z$, on a $\dfrac{z-y}{z-x} \in]0,1[$. Posons donc $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. On obtient $1-\lambda = \frac{y-x}{z-x}$ et on a bien

$$y = \lambda x + (1-\lambda)z.$$

Puisque f est convexe, on a $f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$ et ainsi

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z).$$

On obtient donc

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \left(\frac{z-y}{(z-x)(y-x)} - \frac{1}{y-x}\right)f(x) + \frac{1}{z-x}f(z) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{1}$$

De même, on aura

$$\frac{f(y)-f(z)}{z-y} \leq \frac{1}{z-x}f(x) + \left(\frac{y-x}{(z-x)(z-y)} - \frac{1}{z-y}\right)f(z) = \frac{f(x)-f(z)}{z-x} \tag{2}$$

En résumé, (1) et (2) impliquent

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Exercice 2.

Si $x = y$, la relation donnée par l'indication est évidente. Si $x < y$, on a trois situations possibles:

$$x_0 < x < y \qquad \text{ou} \qquad x < x_0 < y \qquad \text{ou} \qquad x < y < x_0.$$

Dans les trois cas on vérifie en utilisant l'exercice 1 que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$

Posons pour $x \neq x_0$,

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

On a donc montré que g est définie sur $I - \{x_0\}$ et que g est croissante. De plus, g est bornée au voisinage de x_0; en effet, il existe $\delta > 0$ tel que $V = [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\} \subset I$ et en posant $M = g(x_0-\delta)$ et $\bar{M} = g(x_0+\delta)$, puisque g est croissante sur I, on a

$$M \leq g(x) \leq \bar{M}, \quad \forall x \in V.$$

En utilisant le résultat p. 39, th. 3.4 du polycopié, on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} g(x) \quad \text{existent.}$$

Ainsi, $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent. De plus on a, si $x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

et puisque $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent, alors on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \quad = \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \quad = \quad f(x_0)$$

ce qui montre que f est continue en x_0.

Exercice 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h \neq 0$. Puisque f est convexe, on a, si $\lambda \in [0, 1]$:

$$f\Big(\lambda(x - h) + (1 - \lambda)(x + h)\Big) \leq \lambda f(x - h) + (1 - \lambda) f(x + h).$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient

$$f(x) \leq \frac{1}{2} f(x - h) + \frac{1}{2} f(x + h),$$

et par suite

$$\frac{f(x - h) + f(x + h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0.$$

L'exercice 3 du jeudi 17 nov. 2016 nous permet de conclure que $f''(x) \geq 0$.