Série 6

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 31 octobre.
L'exercice 4 ($\star$) peut être rendu le jeudi 3 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Considérons la même matrice dans $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ et notons-la A_C. Alors, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_C)$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$. Considérons la même matrice dans $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et notons-la A_R. Alors, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_R)$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $n > r \geq 1$. Il existe des matrices $A, B \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = r$ et $A^T B = 0$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Il existe un morphisme entre $(S_n, \circ)$ et l'ensemble des matrices de permutations de taille n muni du produit matriciel.

  ◯ vrai ◯ faux

(b) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, telle que $\operatorname{rang}(A) = r$ et $A = A_R + \mathrm{i}A_I$, où $A_R, A_I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Notons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_R & A_I \\ -A_I & A_R \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\operatorname{rang}(\tilde{A})$?

◯ On ne peut rien dire sur $\operatorname{rang}(\tilde{A})$.
◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = n$.
◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = r$.
◯ $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 2r$.

Exercice 2

i) Transformer chacune des matrices suivantes en une matrice échelonnée réduite

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_2).$$

Calculer aussi les matrices de transformation.

ii) Utiliser le résultat de i) pour déterminer les inverses de A_1 et A_2.

Exercice 3

(a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ sont équivalentes. Puis calculer $\operatorname{rang}(A)$ et $\operatorname{rang}(B)$.

(b) Calculer la forme échelonnée réduite $C = BA$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 13 & 11 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 18 & 2 & 18 & 12 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 24 & 16 & 8 & 6 \\ 1 & 10 & 13 & 21 & 8 & 24 & 16 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 13 & 2 & 24 & 17 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{7\times 9}(\mathbb{Q}).$$

Pour cela il n'est pas nécessaire de calculer la matrice de transformation B explicitement.

Exercice 4 ($\star$)

Soit $A \in M_{m\times n}(K)$ une matrice de rang m, où $m \leq n$, et K est un corps. Démontrer que l'on peut choisir m colonnes $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ de A, telles que la matrice $X = \left(x_{i_1}|x_{i_2}|\ldots|x_{i_m}\right)$ soit inversible.

Exercice 5

(a) Soit $n \geq 2$. Pour $0 \leq r \leq n$, on considère l'ensemble

$$M = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \operatorname{rang}(A) = r\}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de r a-t-on que $(M, \cdot)$ est un groupe muni de la multiplication matricelle $\cdot$?

ii) Pour quelle(s) valeur(s) de r a-t-on que $(M, +)$ est un groupe muni de l'addition matricelle $+$?

(b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \text{où } A_{11} \in M_{n_1\times n_1}(\mathbb{R}), A_{12} \in M_{n_1\times n_2}(\mathbb{R}), A_{22} \in M_{n_2\times n_2}(\mathbb{R}).$$

Est-ce que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_{11}) + \operatorname{rang}(A_{22})$? Donner une démonstration ou, le cas échéant, un contre-exemple.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. Quel est le rang de xx^T ?

MATLAB exercice (optionnel)
Dans cet exercice, nous étudions une classe spéciale de matrices - les carrés magiques. Un carré magique A_n de taille $n \times n$, avec $n \geq 3$, est généré avec la commande MATLAB `magic(n)`.

1. Nous étudions expérimentalement les rangs des carrés magiques. Utiliser la commande MATLAB `rank` pour calculer le rang r_n de A_n. Affichez r_n en fonction de n pour $n = 3, 4, \ldots, 20$ dans un graphique à colonnes (utiliser la commande MATLAB `bar`).
2. Pouvez-vous déterminer la formule pour r_n ? Pouvez-vous prouver la formule obtenue ?