EPFL
Géométrie I, MATH-120

Jeudi 02.02.2017 de $12h15$ à $15h15$

Examen

Nom : Prenom : No SCIPER :

Consignes :

- **Indiquer votre nom et/ou numero SCIPER sur chaque feuille de votre copie et les numeroter.**
- **Utiliser une nouvelle feuille pour chaque nouvel exercice.**
- **A la fin de l'examen retourner votre copie dans la feuille A3 pliée.**
- **Les notes de cours et les notes d'exercices ne sont pas autorisées.**
- **Le formulaire standard est autorisé.**
- **Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.**
- **Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.**
- **Dans tout le texte, "symétrie" signifie "symétrie orthogonale".**
- **Les angles seront représentés sous forme de nombres complexes de modules 1.**
- **L'examen est long mais il n'est pas nécéssaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.**

Soit G un groupe et $A \subset G$ un sous-ensemble. On rappelle que *le sous-groupe engendré* par A dans G, noté $\langle A \rangle$, est de manière équivalente :

- Le plus petit sous-groupe de G contenant A.
- L'ensemble des éléments de G qui s'écrivent comme un produit fini (pour la loi de groupe) d'éléments de A ou de leurs inverse.

Si

$$\langle A \rangle = G$$

on dit que G est engendré par A.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. (Critère de morphisme de groupes) Soit G, H deux groupes et $\varphi : G \to H$ une application de G vers H. Enoncer un critère garantissant que φ est un morphisme de groupes (ce critère ne doit PAS être la définition originelle d'un morphisme de groupes).
2. Dire si ces affirmations sont vraies ou fausses (donner les réponses sur votre copie et pas sur le texte de l'examen) :
   (a) Le groupe des isométries spéciales de la figure 1 (dernière page) est d'ordre 5. V.
   (b) Pour tout groupe fini d'isométries de $\mathbb{R}^2$, il existe un point $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ invariant par tout les éléments du groupe. V.
   (c) La composée de deux symétries affines glissées a toujours au moins un point fixe. F.
   (d) L'application affine
   $$\varphi(x, y) = (y + 1, x + 1)$$
   est une isométrie d'ordre fini. F.

Exercice 2. Soit s la symétrie d'axe la droite d'équation $y - x = 1/2$. Pour chacune des translations $t_{\vec{v}}$ de vecteur $\vec{v} = (1, 1),\ (2, 0)$, soit l'isométrie composée $s_{\vec{v}} = s \circ t_{\vec{v}}$.

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $(X, Y) := s(x, y)$ en fonction de (x, y).
2. Déterminer la nature de $s_{\vec{v}}$ et ses éléments caractéristiques (points fixes etc...) .

1. Soit s_0 la partie lineaire. c'est la symetrie par rapport a la droite d'equation $y-x = 0$. On a donc
$$s_0(x, y) = (y, x).$$
On a $s(x, y) = (y + a, x + b)$ et pour trouver a, b on note que le point $(0, 1/2)$ doit etre fixe car sur la droite. On a donc

$$0 = 1/2 + a,\ 1/2 = 0 + b \Longleftarrow a = -1/2, b = 1/2$$

et
$$(X, Y) = (y - 1/2, x + 1/2).$$
Ainsi $s = t_{\vec{u}} \circ s_0,\ \vec{u} = (-1/2, 1/2)$.

2. On a

$$s \circ t_{(1,1)}(x, y) = ((y + 1) - 1/2, (x + 1) + 1/2) = s_0(x, y) + (1/2, 3/2).$$

Le vecteur $(1/2, 3/2)$ n'est pas perpendiculaire a l'axe de s_0 (de vecteur directeur $(1,1)$) donc la symetrie est glissee : elle na pas de point fixe et l'axe de sa partielineaire est la droite $\mathbb{R}(1,1)$.

On a

$$s \circ t_{(2,0)}(x,y) = ((y+0) - 1/2, (x+2) + 1/2) = s_0(x,y) + (-1/2, 5/2).$$

Le vecteur $(-1/2, 5/2)$ n'est pas perpendiculaire a l'axe de s_0 (de vecteur directeur $(1,1)$) donc la symetrie est glissee : elle na pas de point fixe et l'axe de sa partie lineaire est la droite $\mathbb{R}(1,1)$.

Exercice 3. Soit φ defini par

$$\varphi(x,y) = (-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5})$$

1. Montrer que φ est une symetrie par rapport à une droite D qu'on precisera.
2. Soit r la rotation de centre $(0,1)$ et d'angle $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $D' = r(D)$. Soit $s_{D'}$ la symetrie par rapport a D'. Montrer que
$$s_{D'} = r \circ s_D \circ r^{-1}.$$
(On pourra considérer des ensembles de points fixes).
3. Soient β, β' les paramètres complexes des parties linéaires de s_D et $s_{D'}$. Calculer β' en fonction β et de ω.
4. Montrer que $r' := s_{D'} \circ s_D$ est une rotation dont on calculera l'angle.
5. Que vaut r'^{2017} ?.

1. La partie lineaire de φ a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}, \ c = -3/5, \ s = -4/5, \ c^2 + s^2 = (9+16)/25 = 1$$

c'est donc une symetrie. Cherchons les points fixes

$$x = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5}, \ y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5} \iff$$
$$2x + y = 1$$

2. $s' = r \circ s_D \circ r^{-1}$ est une symetrie car sa partie lineaire est $r_0 \circ s_0 \circ r_0^{-1}$ qui est une symetrie (si c'etait une rotation r'_0 alors $s_0 = \mathrm{Ad}(r_0^{-1})(r'_0)$ en serait une). Pour

montrer que c'est $s_{D'}$ il suffit de montrer que s' admet D' comme point fixe ; soit $P' = r(P) \in D'$ ($P \in D$) alors

$$r \circ s_D \circ r^{-1}(P') = r \circ s_D \circ r^{-1}(r(P)) = r(s_D(P)) = r(P) = P'$$

car $P \in D$ est une point fixede s_D.

3. Ces partie lineaires s'exprimes en nombres complexes par

$$z \mapsto \overline{\beta z},\ z \mapsto \overline{\beta' z}$$

et pour r_0 par $z \mapsto \omega z$ et on a

$$\overline{\beta' z} = \omega\overline{\beta\omega^{-1}z} = \overline{\overline{\omega}\beta\omega^{-1}z} = \overline{\omega^{-2}\beta z}$$

car $\overline{\omega} = \omega^{-1}$ (nb complexe de module 1). Ainsi

$$\beta' = \omega^{-2}\beta.$$

4. La partie lineaire de r' s'exprime en nombres complexes par

$$z \mapsto \overline{\beta'\overline{\beta z}} = \overline{\beta'}\beta z = \omega^2\overline{\beta}\beta z = \omega^2 z.$$

L'angle exprime en complexes est donc

$$\omega^2 = i$$

et sont consinus/sinus est $(c, s) = (0, 1)$ et en terme de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. rmk : comme l'angle complexe est $\neq 1$ c'estune vraierotation par une translation.

5. Comme r' est une vraie rotation (pas l'identite ou une translation) elle admet un point unique point fixe (qui est en fait l'intersection de D et D') et ce point est fixe pour tout puissance de r' donc r'^{2017} est une rotation ayant comme point fixe le centre de r'. L'angle complexe de r'^{2017} est $(-1)^{2017} = -1$ qui est l'angle de r'. Comme r'^{2017} et r' on le meme angle et un meme point fixe on a

$$r'^{2017} = r'.$$

Exercice 4. On considere le plan complexe $\mathbb{C}$ identifié avec $\mathbb{R}^2$ de la manière usuelle. Pour $\nu \in \mathbb{C}$ un nombre complexe on notera t_ν la translation de $\mathbb{C}$

$$t_\nu : z \mapsto z + \nu.$$

Le groupe des translations sera note $T(\mathbb{C})$.

On note $\mathcal{C}$ le carré formé des points 1, i, -1, $-i$. On note $G_{\mathcal{C}}$ le groupe (fini) des isométries préservant ce carré et $G_{\mathcal{C}}^{+}$ le sous-groupe des rotations .

Soit

$$G = \langle G_{\mathcal{C}}, t_1 \rangle \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$$

le groupe des isométries affines engendré par le groupe $G_{\mathcal{C}}$ et par la translation par le nombre complexe 1, $t_1 : z \mapsto z+1$.

On notera $G_0 \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$ l'ensemble des parties linéaires des éléments de G et $T_G = T(\mathbb{C}) \cap G$, l'ensemble des translations contenues dans G. L'objectif est de calculer T_G et G_0.

1. Montrer que T_G est un sous-groupe distingué de G.
2. Exprimer les 8 éléments de $G_{\mathcal{C}}$ sous forme de transformation sur les nombres complexes (on pourra commencer par les éléments de $G_{\mathcal{C}}^{+}$, ceux d'un élément de $G_{\mathcal{C}} - G_{\mathcal{C}}^{+}$ et trouver tous les autres).
3. Montrer que G_0 est un groupe. Montrer que $G_0 = G_{\mathcal{C}}$ (on pourra écrire un élément de G comme produit fini d'éléments de $G_{\mathcal{C}}$ et de t_1 ou t_{-1}).
4. Montrer que tout élément $\varphi \in G$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\varphi = t \circ \varphi_0$$

   avec $t \in T_G$ et $\varphi_0 \in G_{\mathcal{C}}$ et que $t = t_{\varphi(0)}$.
5. Montrer que l'ensemble (dit des entiers de Gauss)

$$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{\nu = m + in,\ m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

   est stable par les éléments de G :

$$\forall \varphi \in G,\ \forall \nu \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z},\ \varphi(\nu) \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}.$$

   (on pourra commencer par montrer la stabilité pour les éléments de $G_{\mathcal{C}}$.)
6. Montrer que $T_G \subset T(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) := \{t_\nu,\ \nu \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}\}$.
7. A l'aide d'une conjugaison adéquate montrer que T_G contient t_i puis que

$$T_G = T(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}).$$

1. Soit $g \in G$ et $t \in T_G$, on va mq $gtg^{-1} \in T_G$. Comme le groupe des translation $T(\mathbb{R}^2)$ est distingue dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ on a $gtg^{-1} \in T(\mathbb{R}^2)$ et comme $gtg^{-1} \in G$ on a $gtg^{-1} \in T(\mathbb{R}^2) \cap G = T_G$.

2. Pour les isometrie speciales, on a les rotations, lineaires $r_i = r_{i,0} : z \to iz$ et toutes ses puissances d'angles $1,\ i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i$ et donc

$$r_1 : z \to z,\ r_i : z \to iz,\ r_{-1} : z \to -z,\ r_{-i} : z \to -iz.$$

Par ailleurs la symetrie lineaire $s_: z \to \overline{z}$ est dans G et donc toutes les symetries sont

$$s_1 : z \to \overline{z},\ s \circ r_i = s_i : z \to \overline{iz},\ s \circ r_{-1} = s_{-1} : z - \overline{z},\ s \circ r_{-i} = s_{-i} : z \to -\overline{iz}.$$

3. G_0 est l'image de G par l'application partie lineaire lin qui est un morphisme de groupe. C'est donc un groupe. On a $G_{\mathcal{C}} \subset G_0$ car

$$r_1,\ r_i,\ r_{-1},\ r_{-i}$$

sont dans G et sont lineaires donc egales a leurs partie lineaire. Pour l'inclusion inverse : soit $\varphi \in G_{\mathcal{C}}$ alors φ est un produit d'elements de $G_{\mathcal{C}}$ et de t_1. Appliquant lin a φ (comme lin est un morphisme) $\mathrm{lin}(\varphi)$ est le produit des parties lineaires des memes elements de $G_{\mathcal{C}}$ (qui sont ces memes elements puisque les element de $G_{\mathcal{C}}$ sont lineaires) et de la partie lineaire de t_1 qui est l'element neutre. Ainsi $\mathrm{lin}(\varphi) \in G_0$ est contenu dans $G_{\mathcal{C}}$.

4. On a $\varphi = t \circ \mathrm{lin}(\varphi)$ et comme $\mathrm{lin}(\varphi) \in G$ (question precedente) on a

$$t = \varphi \circ \mathrm{lin}(\varphi)^{-1} \in G$$

et donc $t \in T(\mathbb{R}^2) \cap G \in T_G$.

5. On a $r_i(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) = i(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) = i\mathbb{Z} - \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. Donc $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ est stable par r_i (et donc par toutes les puissances de r_i.) De plus on a

$$s_1(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(-i) = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$$

et $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ est stable par s_1. Comme $G_{\mathcal{C}}$ est un produit de puissances r_i et de s_i, $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ est stable par tout element de $G_{\mathcal{C}}$. Par ailleurs $t_1(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) = 1+\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} = \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ ainsi $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ est stable par t_1 et $G_{\mathcal{C}}$ et donc par tout produits de ces elements ainsi que leurs inverses : $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ est donc stable par $\langle G_{\mathcal{C}}, t_1\rangle = G$.

6. Soit $t_\nu \in T_G$, on a $t_\nu(0) = \nu + 0 = \nu \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ est stable par t_ν. Ainsi $\nu \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ et $T_G \subset T(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.

7. On a

$$r_i \circ t_1 \circ r_i^{-1} = r_i \circ t_1 \circ r_{-i} : z \to i(1 - iz) = i + z$$

donc $r_i \circ t_1 \circ r_i^{-1} = t_i \in T_G$ car T_G est distingue dans G. Comme pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$t_{m+in} = t_1^m \circ t_i^n \in T_G$$

on a $T(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \in T_G$ et donc egalite.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer une partie du résultat de théorie des groupes suivant :

Théorème. *Soit G un groupe fini d'ordre $2p$ ou p est un nombre premier > 2 alors G est soit cyclique soit dihedral.*

Soit G un groupe d'ordre $2p$. On notera le produit de deux éléments g, g' de G , $g.g'$ et pour $g' = g$, $g.g$ sera aussi noté g^2 ; e_G désignera l'élément neutre.

1. Quels sont a priori les ordres possibles des éléments de G ?
2. Montrer que si G n'est pas commutatif alors G n'a pas d'élément d'ordre $2p$.
3. Montrer que si tous les éléments de G vérifient
$$g^2 = e_G$$
alors G est commutatif (pour cela on calculera sous cette hypothèse, les commutateurs $[g, g'] = g.g'.g^{-1}.g'^{-1}$ pour $g, g' \in G$).
4. On suppose dans toute la suite que G n'est pas commutatif. Montrer que G admet au moins un élément d'ordre p. On notera r un tel élément. Soit $R = r^{\mathbb{Z}}$ le sous-groupe engendre par r. Quels sont les ordres des autres éléments non-triviaux de R.
5. Soit $G - R$ l'ensemble des éléments de G qui n'appartiennent pas a R. Montrer que $G - R$ est non-vide et que pour tout $s \in G - R$ on a
$$G - R = s.R = R.s.$$
6. Montrer que $s^2 \in R$ puis que $s^2 = e_G$ (on pourra utiliser la question 2.) Pour tout $s' \in G - R$ que vaut s'^2 ?
7. Montrer que $G = \langle r, s\rangle$ est un groupe dihedral.

1. Par le theoreme de Lagrange ils font partie des divisieurs de $2p$: $1, 2, p, 2p$.

2. Si G admet un element d'ordre $2p$, cet element engendre un sous-groupe cyclique (donc commutatif) d'ordre $2p$ qui doit donc etre G tout entier. Ainsi si G n'est commutatif il n'a pas d'elements d'ordre $2p$.

3. Si $g^2 = e_G$ alors $g^{-1} = g$ et
$$[g, g'] = gg'gg' = (gg')^2 = e_G$$
Donc pour tout $g, g' \in G$,
$$gg'g^{-1}g'^{-1} = e_G \Rightarrow gg' = g'g$$

et g, g' commutent donc G est commutatif.

4. Si G m'est par commutatif les ordre possible de ses elements sont $1, 2, p$ et ils ne peuvent pas tous etre d'ordre 1 ou 2 par la question precedente. Il exisate donc un element r d'ordre p.

Soit $R = r^{\mathbb{Z}}$ alors R est d'ordre p. tous ces element sont d'ordre 1 ou p. Il n'y a qu'un element d'ordre 1, l'element neutre donc tous les elements non triviaux sont d'ordre p.

5. $G - R$ possede $2p - p$ elements. Soit $s \in G - R$ alors $s.R$ possede $|R| = p$ element distincts (la translation par s est bijective) et est contenu dans $G - R$: si $s' = s.r' \in s.R$ etait dans R alors $s = s'r^{-1}$ serait dans R absurde. Donc $G - R = s.R$. Le meme raisonnement montre que $R.s = G - R$.

6. On a

$$s.(G - R) = s.G - s.R = G - (G - R) = R \text{ et } s.(G - R) = s.sR = s^2R$$

comme $R = s^2R$ on a $s^2 \in R$. Si $s^2 = e_G$ on a fini. Sinon s^2 est do'rdre p mais alors s est d'ordre $2p$ et G est commutatif ce qui est exclu.

La seule hypothese qu'on a fait sur s pour montrer que $s^2 = e_G$ c'est que $s \in G - R$ donc tout autre element de $G - R$ verifie $s'^2 = e_G$.

7. Il faut montrer que

$$srs^{-1} = r^{-1}.$$

Comme s est d'ordre 2 on a $srs^{-1}r = srsr = (sr)^2 = e_G$ car $sr \in G - R$ est d'ordre 2 et donc

$$srs^{-1}r = e_G \Rightarrow srs^{-1} = r^{-1}.$$