Série 13 du mardi 13 décembre 2016

Exercice 1.

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas intégrable.
On utilise ici la définition modifiée du polycopié dans laquelle on définit les sommes de Darboux avec des inf au lieu de min et des sup au lieu de max pour une fonction seulement bornée.

Exercice 2.

Calculer la limite des deux suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ données par:

a) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$,

b) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$.

Indication: Poser en a) $x_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$ et en b) $x_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}$.

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = x^{1/x}$.

1.) Calculer les limites à droite de 0 de f et de f'

2.) Calculer les limites lorsque x tend vers $+\infty$ de f et de f'

3.) Calculer le maximum de la fonction f.

Exercice 4.

Montrer que la suite

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

converge.
Sachant que $\ln n$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini très lentement, en conclure que la série harmonique, certes diverge, mais lentement.