

Bienvenue au ...

# Cours de physique générale I

pour étudiants en section de Mathématiques

Dr. Frédéric Blanc  
Laboratoire de physique des hautes énergies

Site web du cours:

<http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14237>

# Première partie: Sensibilisation aux objectifs de la mécanique

Entrée en matière avec deux exemples de cinématique et dynamique du point matériel:

- projectile dans un champ de pesanteur (ballistique)
- oscillateur harmonique

Buts:

- 1) se familiariser avec les notions de dérivée et d'équation différentielle
- 2) comprendre comment une loi du mouvement ( $F=ma$ ) et la donnée de conditions initiales permettent de prédire la position et la vitesse en tout temps

# Le modèle du « point matériel »

**Point matériel:** système assimilé à un point géométrique auquel on attribue toute la masse de ce système, et dont l'état est décrit en tout temps par une (seule) position et une (seule) vitesse

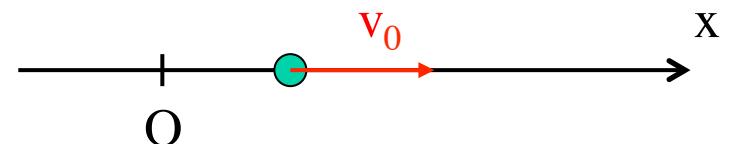
- Notion introduite par Isaac Newton (1642–1727):  
corps → point matériel → ensemble de points matériels
- Modèle souvent suffisant pour décrire et prédire correctement le mouvement d'un corps:
  - Un point matériel peut être « gros » (exemple: la Terre, le Soleil, ...)
  - Pas applicable dans toutes les situations (exemple: boule de billard)
  - Le modèle a des limites (exemple: boule pendue à un fil court)

# Mouvement rectiligne uniforme

- Mouvement d'un point matériel se déplaçant en ligne droite à vitesse constante

- On définit un axe x associé à la trajectoire rectiligne, avec une origine O

$$v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = v_0 = \text{constante}$$



- La relation ci-dessus est une équation pour la fonction inconnue  $x(t)$ ; c'est une **équation différentielle**, car elle fait intervenir la dérivée de  $x(t)$
  - Solution:  $x(t) = v_0 t + x_0$ , où  $x_0 = \text{constante}$

équation horaire

= paramétrisation de la trajectoire en fonction du temps (t est le paramètre)

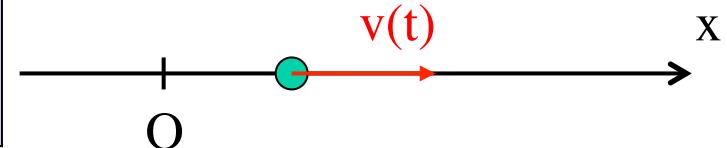
$x_0 = x(0)$

= position initiale (à t=0)

# Mouvement rectiligne uniformément accéléré

- Mouvement d'un point matériel se déplaçant en ligne droite avec une accélération constante

$$a(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) = a_0 = \text{constante}$$



- Equation différentielle d'ordre 2, faisant intervenir la dérivée seconde de la fonction inconnue  $x(t)$
- Solution:
$$x(t) = a_0 t^2/2 + v_0 t + x_0, \quad \text{où } x_0 = x(0) = \text{position initiale}$$
$$v(t) = dx/dt = a_0 t + v_0, \quad \text{où } v_0 = v(0) = \text{vitesse initiale}$$
- On vérifie la solution (quels que soient  $v_0$  et  $x_0$ ) en calculant la dérivée seconde de  $x(t)$ .
- Cas particulier:  $a_0 = 0 \rightarrow$  mouvement rectiligne uniforme

# Equation différentielle: première sensibilisation

- Nous allons « intégrer » l'équation du mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = a_0$$

équation différentielle pour la fonction inconnue  $x(t)$

et chercher  $v(t)$  et  $x(t)$  avec les conditions  $v(0)=0$  et  $x(0)=0$

- On écrit (avec un abus de notation):

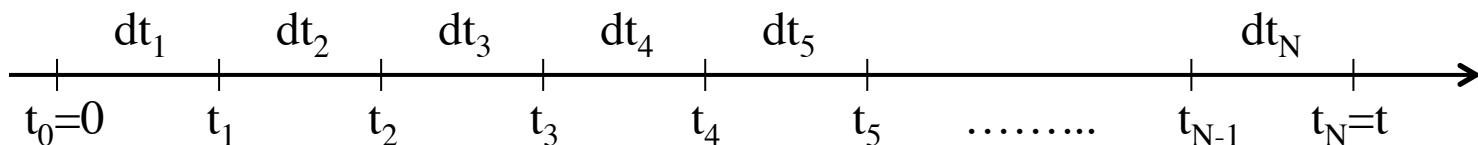
$$v = dx/dt \Rightarrow dx = v dt$$

$$a = dv/dt \Rightarrow dv = a dt$$

«  $dt$  » = intervalle de temps très petit,  
 «  $dx$  » = variation de  $x$  pendant  $dt$   
 «  $dv$  » = variation de  $v$  pendant  $dt$

- On divise l'intervalle de temps de 0 à  $t$  en  $N$  parties égales

$dt_i = t/N = dt$  délimitant les temps  $t_i = i dt$ :



## Equ. diff.: première sensibilisation (suite)

- Variation de  $v$  dans l'intervalle  $dt_i$ :  $dv_i = a_0 dt_i$

$$\begin{aligned} \text{limite } N \rightarrow \infty \quad & v(t) = \sum_{i=1}^N dv_i = \sum_{i=1}^N a_0 dt_i = a_0 \sum_{i=1}^N dt_i = a_0 t \\ & v(t) = \int_0^t dv' = \int_0^t a_0 dt' = a_0 \int_0^t dt' = a_0 t \end{aligned}$$

- Variation de  $x$  dans l'intervalle  $dt_i$ :  $dx_i = v(t_i) dt_i = a_0 t_i dt_i$

$$\begin{aligned} \text{limite } N \rightarrow \infty \quad & x(t) = \sum_{i=1}^N dx_i = \sum_{i=1}^N a_0 t_i dt_i = a_0 \sum_{i=1}^N i (dt_i)^2 = a_0 (dt)^2 \sum_{i=1}^N i \\ & = a_0 \left(\frac{t}{N}\right)^2 \frac{N(N+1)}{2} = a_0 \frac{t^2}{2} \frac{N+1}{N} \\ & x(t) = \int_0^t dx' = \int_0^t a_0 t' dt' = a_0 \int_0^t t' dt' = a_0 \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

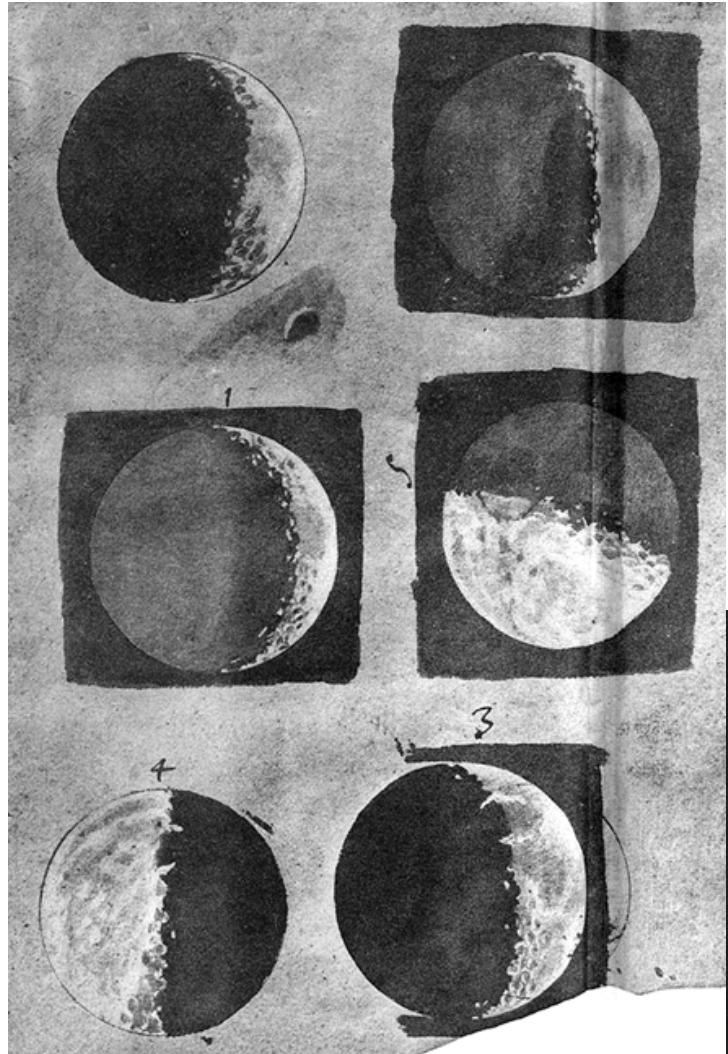
# Galilée et la chute des corps

- Le mouvement « naturel » des corps est rectiligne uniforme (**principe d'inertie**); toute déviation est due à une force.
- La chute des corps (dans le vide,  $v_0=0$ ) est un **mouvement rectiligne uniformément accéléré** sous l'effet de la force de pesanteur.
  - Prouvé expérimentalement par Galilée
- Galilée constate que la période d'un pendule est indépendante de sa masse  $m$   
→ force de pesanteur proportionnelle à  $m$

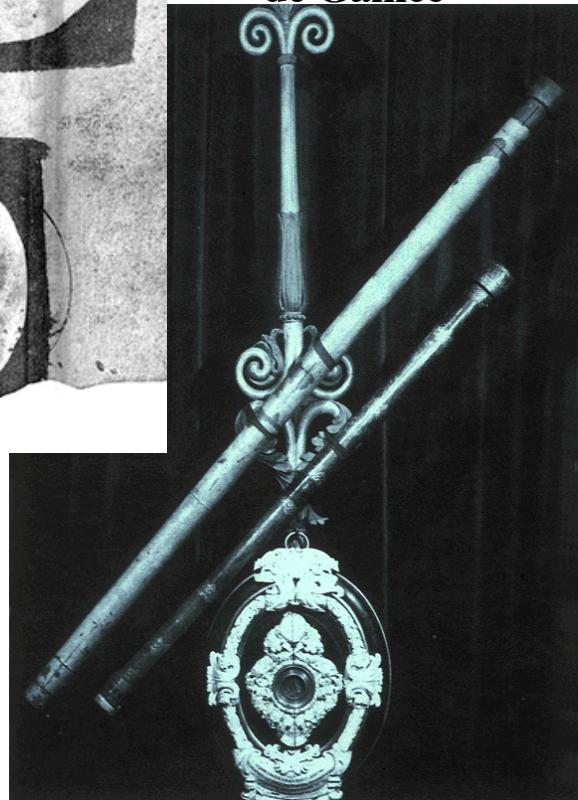
Galileo Galilei (1564-1642)



IL DIVINO GALILEO  
DI VINCENZIO GALILEI  
PATRIZIO FIORI  
FILOS. E MATEM.  
DI FERDINANDO II. G. D. DI TOSCANA.  
nato il dì XVIII Febb. MDLXIV. morto il dì VIII Genn. MDCLII.  
Alla Profonda Dottrina, ed Universale Erudizione dell'Ilt. Sig.  
Giovanni Tommaso Perotti Astronomo, e Meteorologico Celesterrima  
Provveduta un Quadrato Tela di Giacinto Subterminata per l'Ilt. Sig. Giov. Perotti  
Giuseppe Zocchi del.  
Francesco Allegri inciso.



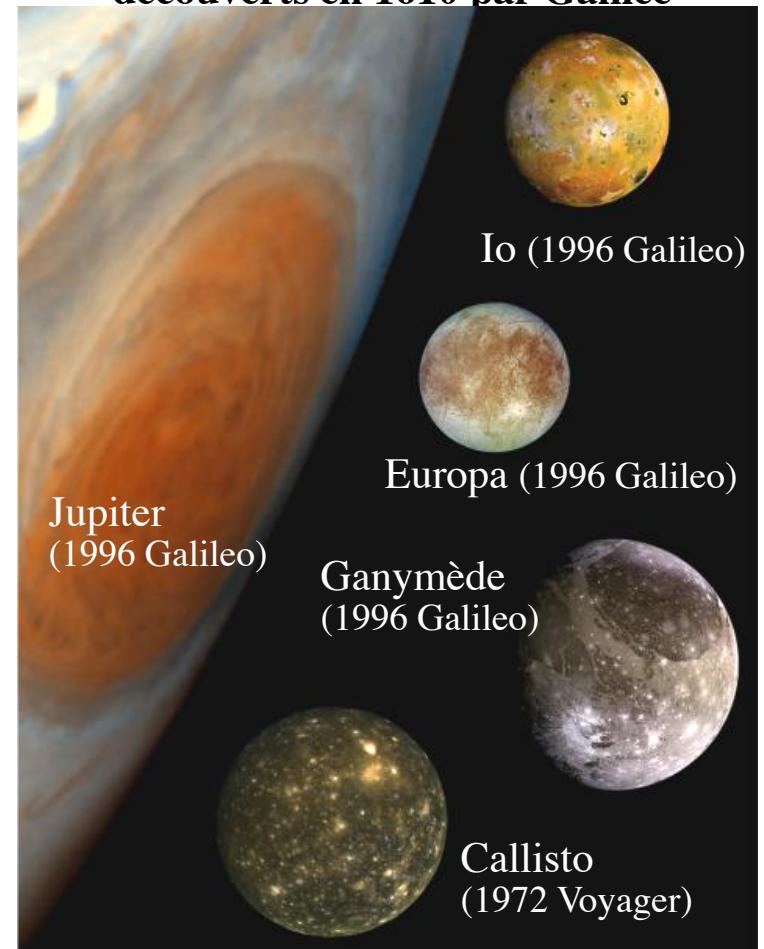
Dessins de la Lune  
par Galilée



Téléscope  
de Galilée

# Parenthèse sur Galilée

**Les quatre satellites de Jupiter  
découverts en 1610 par Galilée**



Sonde « Galileo »: 18 oct 1989 -21 sep 2003

# Lois de Newton

« Philosophiae Naturalis Principia Mathematica » (1687)

Sir Isaac Newton (1642-1727)



- **Lex prima (loi d'inertie):**

- « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état »

$$\text{mouvement rectiligne uniforme} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

- **Lex secunda:**

- « Les changements dans le mouvement d'un corps sont proportionnels à la force et se font dans la direction de la force »

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- **Lex tertia (action-réaction):**

- « A chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée; si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier »

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = - \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

# Force de pesanteur et chute des corps

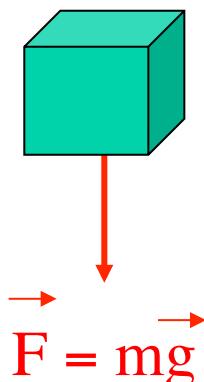
- Modèle phénoménologique:

- l'attraction terrestre donne lieu à une force verticale (appelée le poids) proportionnelle à la masse  $m$ :

$$F = mg$$

- facteur de proportionnalité:

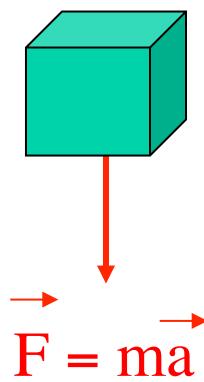
$$g \cong \text{constante} = 9.8 \text{ m/s}^2$$



- Application de la 2ème loi de Newton:

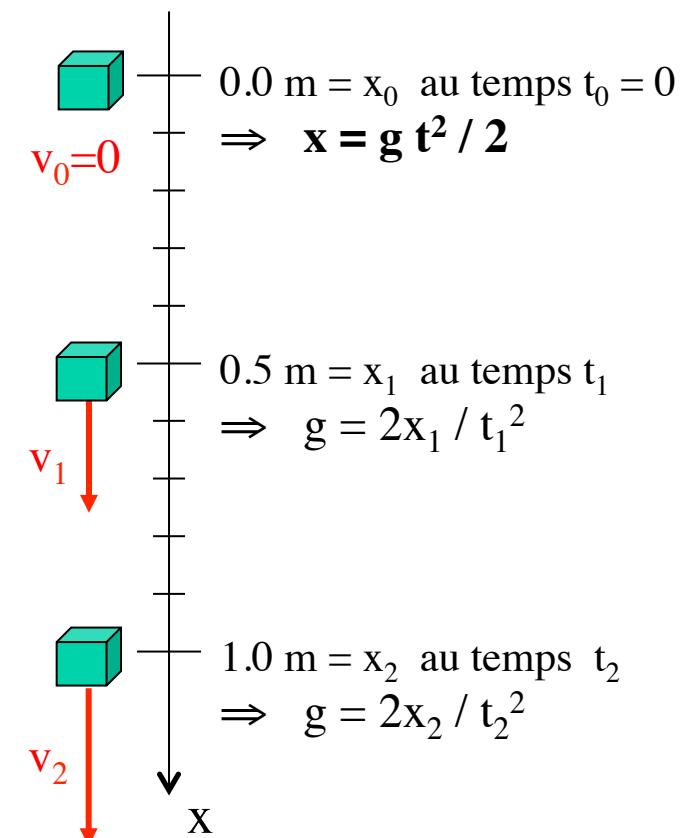
- Si le poids est la seule force appliquée à un point matériel:

$$F = ma \Rightarrow a = g = \text{constante}$$



$\Rightarrow$  dans le vide les corps ont un mouvement uniformément accéléré d'accélération  $g$

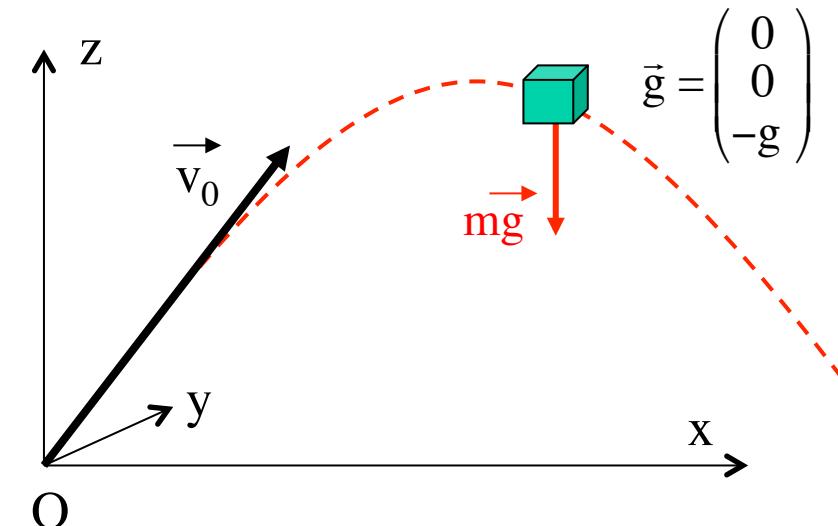
→ démo « mesure de  $g$  »



# Projectile sous l'effet de la force de pesanteur

- On peut toujours choisir un repère Oxyz (avec z vertical) tel quel les conditions initiales s'écrivent:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$



- Application de la loi de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , dans chacune des directions x, y, z:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = v_{0x}t + x_0 = v_{0x}t \\ m\ddot{y} = 0 \Rightarrow y(t) = v_{0y}t + y_0 = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{cases}$$

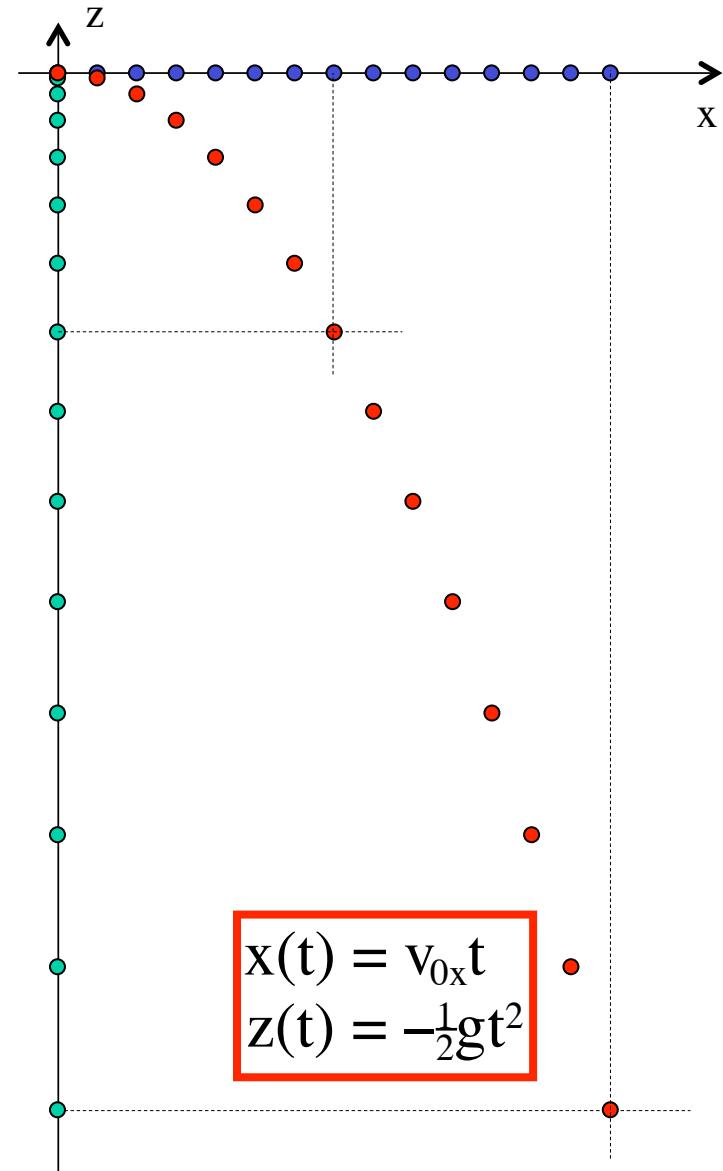
- En éliminant t, on obtient l'équation d'une parabole dans le plan y=0:

$$z = -\frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0z} \left( \frac{x}{v_{0x}} \right)$$

# Décomposition du mouvement balistique

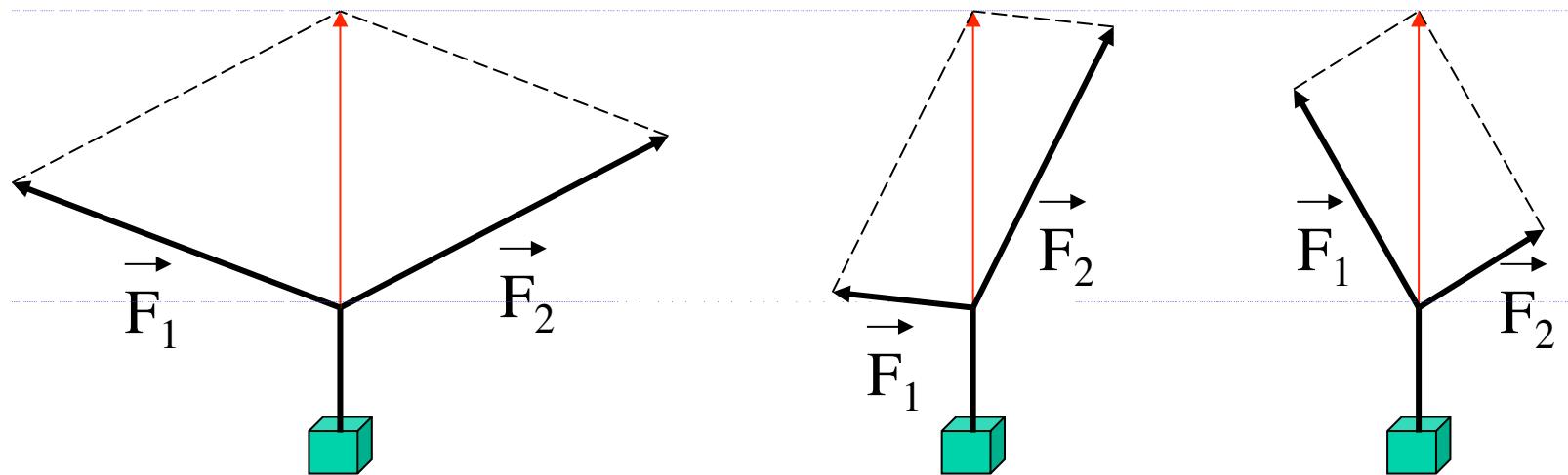
→ démo : deux boules, dont les conditions initiales ne diffèrent que par la vitesse horizontale, touchent le sol en même temps

- Le mouvement d'un corps en chute libre peut être vu comme la superposition de deux mouvements:
    - un mouvement rectiligne horizontal uniforme
- $$x(t) = v_{0x}t$$
- un mouvement rectiligne vertical uniformément accéléré
- $$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$



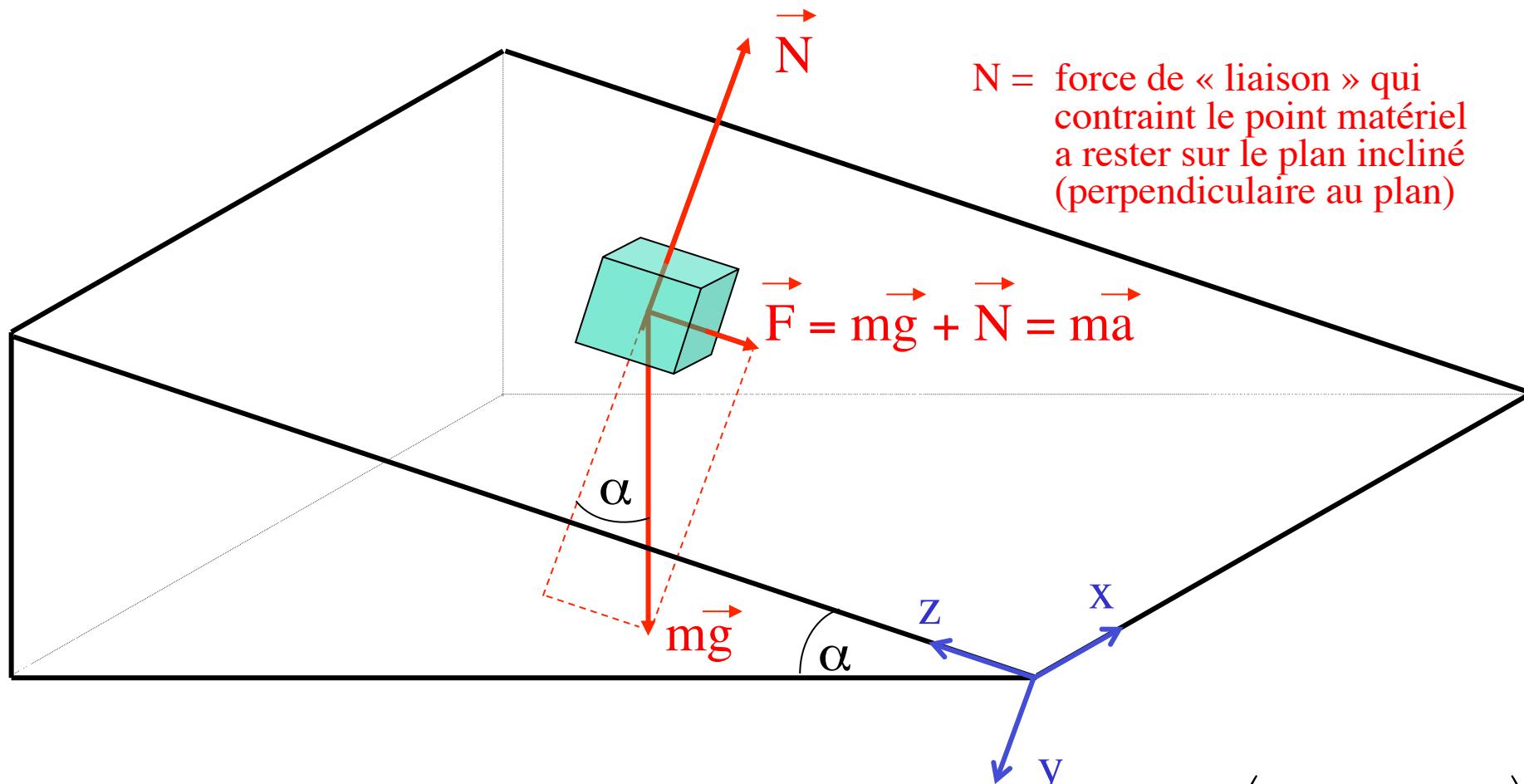
# Expérience de Stévin (1548–1620)

- Une masse est suspendue à deux fils obliques dont on mesure les tensions avec des dynamomètres
- Le parallélogramme construit sur les deux vecteurs forces a une diagonale verticale indépendante de la direction des fils



- Conclusion: il est possible de représenter l'effet global des deux forces au moyen d'une seule force égale à  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ 
  - cette résultante est en l'occurrence opposée au poids de la masse puisque cette dernière est à l'équilibre (immobile)

# Plan incliné sans frottement (table à air)



$$\text{Projection sur axe } x: F_x = 0$$

$$\text{Projection sur axe } y: F_y = mg \cos\alpha - N = 0$$

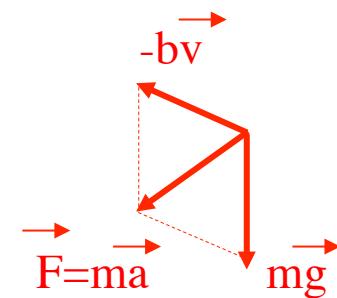
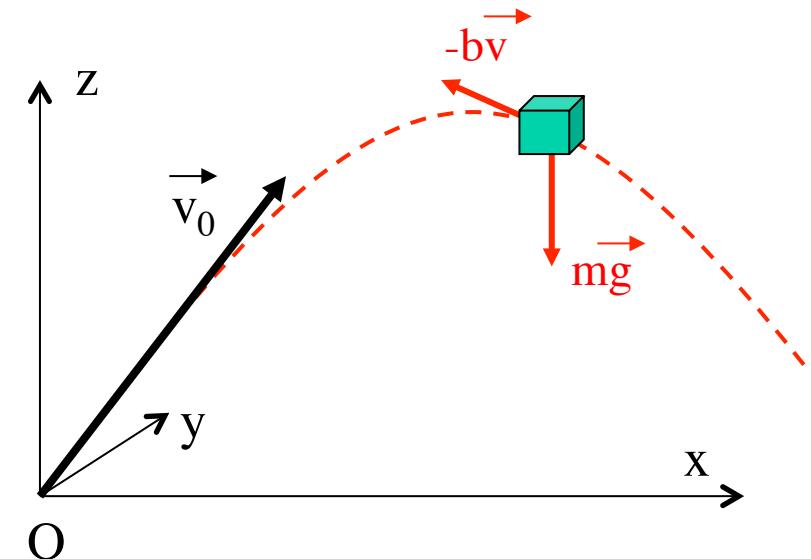
$$\text{Projection sur axe } z: F_z = -mg \sin\alpha = ma_z$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \sin\alpha \end{pmatrix}$$

→ démo avec petit «  $g$  »: 1)  $a$  indépendant de  $m$ , 2) intersection balistique

# Balistique avec frottement dans l'air

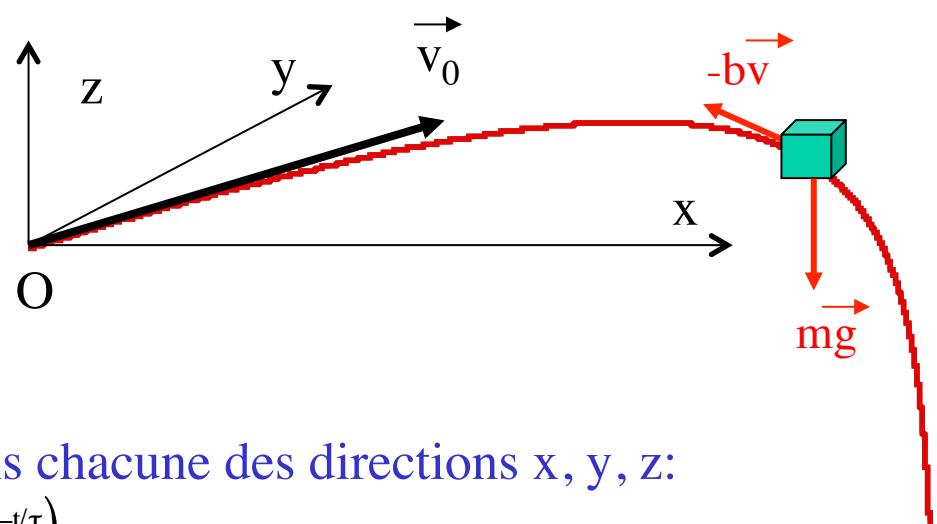
- Notre modèle balistique avec  $F=mg$  est-il bon ?
  - $v_z(t)$  ne croît pas à l'infini !
- Modèle plus réaliste:
  - On tient compte de la résistance de l'air
  - Force de frottement opposée à la vitesse:  $\vec{F}_{\text{frot}} = -b\vec{v}$ ,  $b = \text{constante}$
- Attention:
  - Les forces s'additionnent comme des vecteurs
  - La 2ème loi de Newton s'applique en utilisant la somme vectorielle des forces (comme dans l'exemple précédent de la table à air)



# Chute libre avec frottement

- On peut toujours choisir un référentiel Oxyz (avec z vertical) tel que les conditions initiales s'écrivent:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$



- Application de la loi de Newton dans chacune des directions x, y, z:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_{0x}\tau (1 - e^{-t/\tau})$$

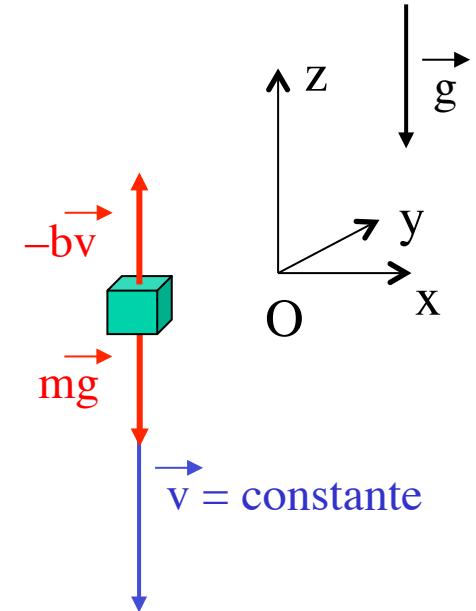
$$m\ddot{y} = -b\dot{y} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{m}{b}$$

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} - mg \quad \Rightarrow \quad z(t) = -g\tau t + (v_{0z} + g\tau)\tau (1 - e^{-t/\tau})$$

- Vitesse limite de chute ( $t \gg \tau$ ):  $v_z(t) \approx -g\tau = -mg/b$

# Vitesse limite de chute

- Après un temps de chute long ( $t \gg m/b$ ):
    - vitesse  $\vec{v} = \text{constante}$
    - accélération  $\vec{a} = 0$
    - force  $\vec{F} = \vec{ma} = \vec{mg} - \vec{bv} = 0$
    - vitesse  $\vec{v} = \frac{\vec{g}}{b} m/b$
  
  - Deux masses différentes avec  $b$  constant:
    - la plus grande masse
      - atteint sa vitesse limite plus tard
      - atteint une vitesse limite plus grande
  
  - Deux masses égales dans milieux visqueux avec  $b$  différents:
    - dans le milieu le plus visqueux
      - vitesse limite atteinte plus vite
      - vitesse limite plus faible
- démo



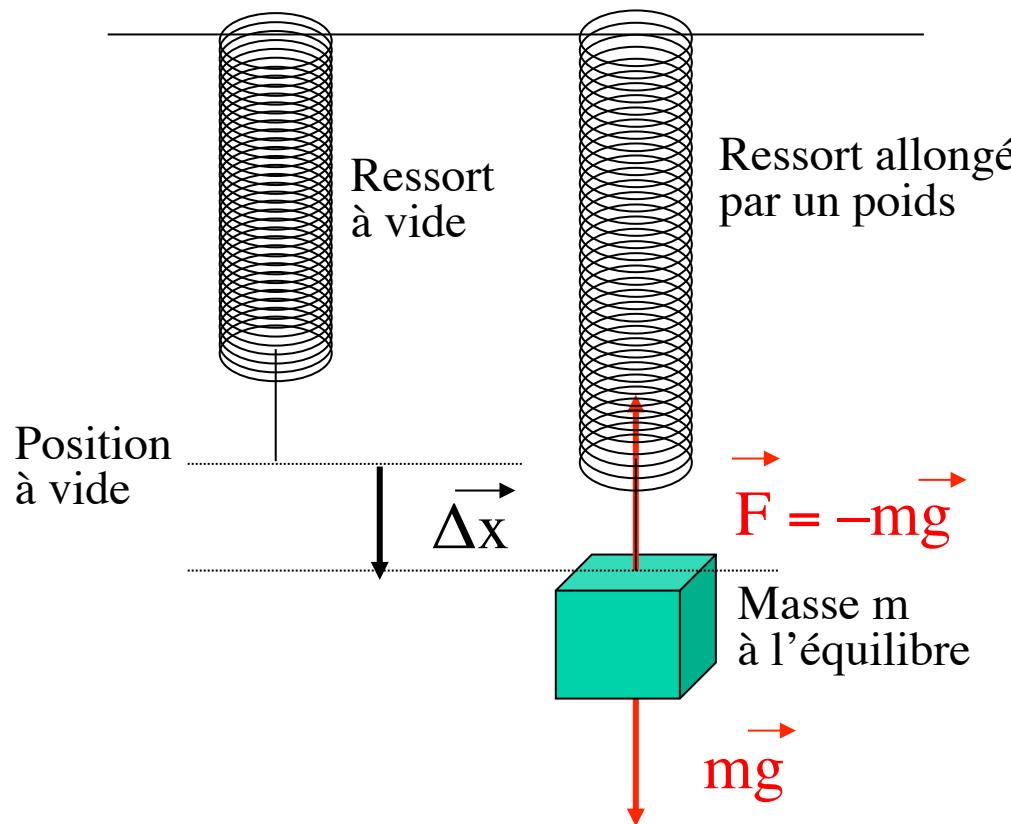
# Oscillateurs harmoniques

- Modèle valable, en première approximation, pour tout phénomène oscillatoire ou vibratoire (petits mouvements périodiques autour d'une position d'équilibre stable)
- Exemples:
  - masse pendue à un ressort → démo
  - pendule simple, pendule de torsion → démo
  - résonateurs à quartz (montres)
  - circuits électriques RLC
  - vibrations (corde de guitare, aile d'avion, pudding, ...) → démo diapason
  - oscillations du champ électromagnétique (lumière ...)
  - etc ...

Note: un système physique avec un mouvement périodique est notre meilleure horloge  
→ on mesure le temps en comptant le nombre de périodes

# Modélisation de la force d'un ressort

- La force exercée par un ressort est proportionnelle à son déplacement (élongation ou compression) par rapport à sa position de repos → démo



- Force de rappel

$$\vec{F} = -k \vec{\Delta x}$$

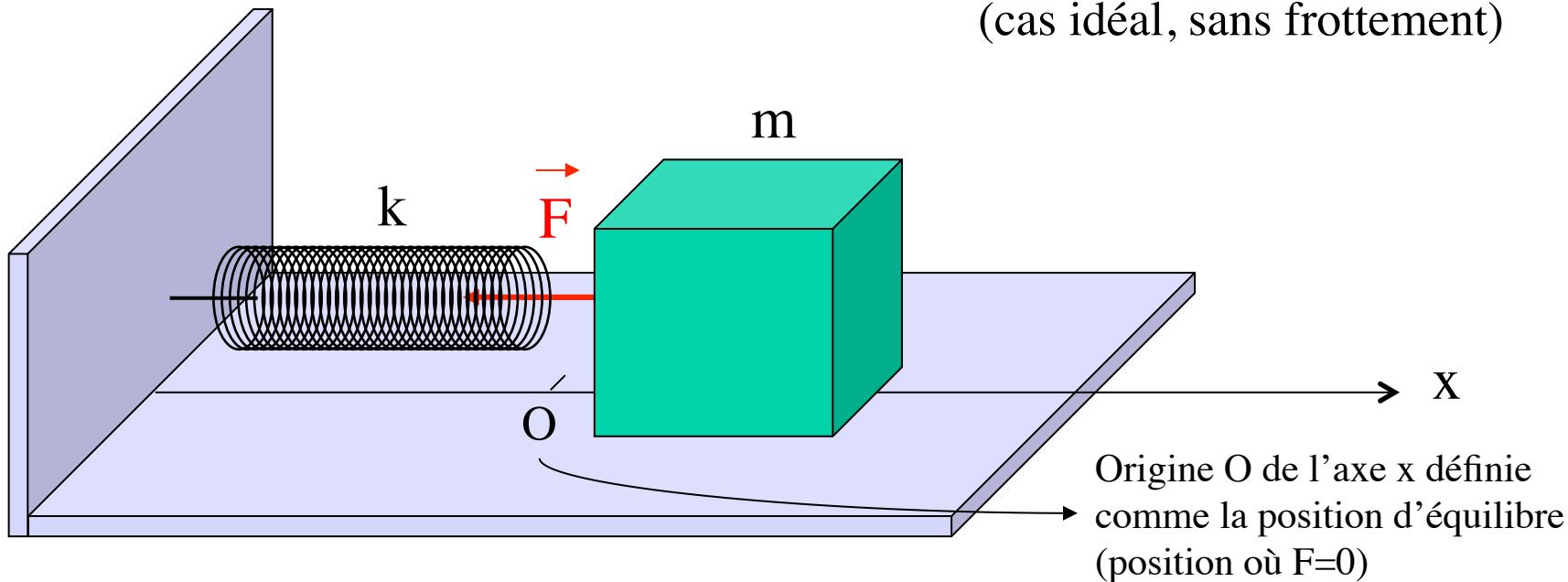
Loi de Hooke

$k$  = constante élastique  
du ressort

Note: ce modèle n'est  
valable que pour les  
petits allongements

# Oscillateur harmonique à une dimension

(cas idéal, sans frottement)



- Loi de Hooke:  $F = -kx$
  - 2ème loi de Newton:  $F = ma$
- équation différentielle

$$m\ddot{x} = -kx$$

But: connaissant  $k$ ,  $m$  et les conditions initiales ( $x_0$  et  $v_0$  à  $t=0$ ), déterminer  $x(t)$  pour tout  $t > 0$

# Résolution numérique

- Pour fixer les idées:
  - $m = 1 \text{ kg}$ ,  $k = 1 \text{ N/m} = 1 \text{ kg/s}^2$ ,
  - Conditions initiales:  $x(0) = 1 \text{ m}$ ,  $v(0) = 0 \text{ m/s}$
  - $\Rightarrow a(0) = F(0)/m = -k x(0)/m = -1 \text{ m/s}^2$

- Récurrence:
  - Accroissement de  $v$  entre  $t$  et  $t+\Delta t$ :  
$$\Delta v = a(t) \Delta t \text{ car } a(t) = dv(t)/dt$$
$$\Rightarrow v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \Delta t$$
  - Accroissement de  $x$  entre  $t$  et  $t+\Delta t$ :  
$$\Delta x = v(t) \Delta t \text{ car } v(t) = dx(t)/dt$$
$$\Rightarrow x(t+\Delta t) = x(t) + v(t) \Delta t$$

Algorithme pour ordinateur :

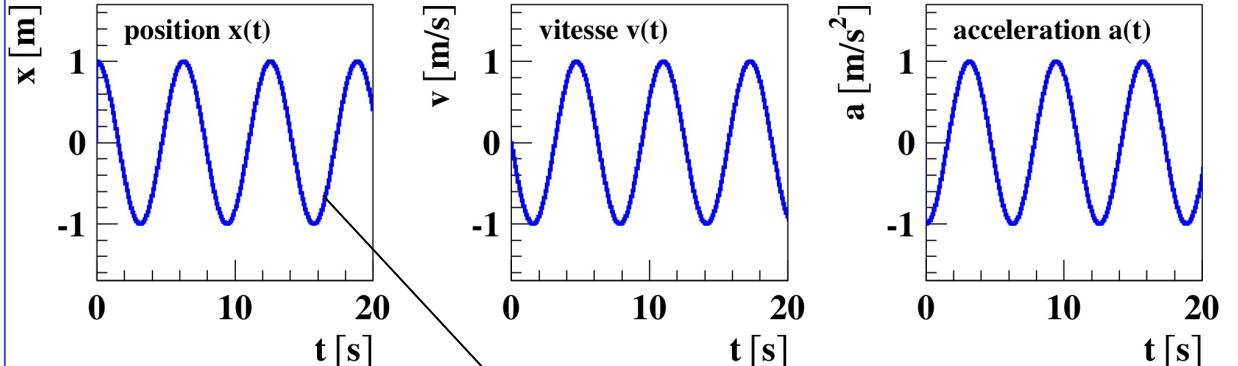
```
M=1
K=1
T=0
X=1
V=0
DT=0.001
1 F=-K*X
A=F/M
V=V+A*DT
X=X+V*DT
T=T+DT
PRINT *,T,X,V,A
GOTO 1
```

- On choisit  $\Delta t$  très petit ( $\Delta t = 0.001 \text{ s}$  dans notre exemple), et on itère un grand nombre de fois

« Output » de l'ordinateur ...

T	X	V	A
0.0	1.000	0.000	-1.000
0.5	0.877	-0.479	-0.877
1.0	0.540	-0.841	-0.540
1.5	0.070	-0.997	-0.070
2.0	-0.417	-0.909	0.417
2.5	-0.801	-0.598	0.801
3.0	-0.990	-0.141	0.990
3.5	-0.936	0.351	0.936
4.0	-0.653	0.757	0.653
4.5	-0.210	0.978	0.210
5.0	0.284	0.959	-0.284
5.5	0.709	0.706	-0.709
6.0	0.960	0.279	-0.960
6.5	0.976	-0.215	-0.976
7.0	0.754	-0.657	-0.754
7.5	0.346	-0.938	-0.346
8.0	-0.146	-0.989	0.146
8.5	-0.602	-0.798	0.602
9.0	-0.911	-0.412	0.911
9.5	-0.997	0.075	0.997
10.0	-0.839	0.544	0.839
10.5	-0.475	0.880	0.475
11.0	0.005	1.000	-0.005
11.5	0.484	0.875	-0.484
12.0	0.844	0.537	-0.844
12.5	0.998	0.066	-0.998
13.0	0.907	-0.420	-0.907
13.5	0.595	-0.804	-0.595
14.0	0.136	-0.991	-0.136
14.5	-0.355	-0.935	0.355
15.0	-0.760	-0.650	0.760
15.5	-0.979	-0.206	0.979
16.0	-0.958	0.288	0.958
16.5	-0.702	0.712	0.702
17.0	-0.275	0.961	0.275
17.5	0.220	0.976	-0.220
18.0	0.661	0.751	-0.661
18.5	0.940	0.342	-0.940
19.0	0.989	-0.150	-0.989
19.5	0.796	-0.606	-0.796
20.0	0.408	-0.913	-0.408

... duquel on fait les graphes suivants:



NB:  $a = dv/dt = 0 \Leftrightarrow v$  est max (ou min)

On reconnaît le cosinus !

Vérification analytique de la solution:

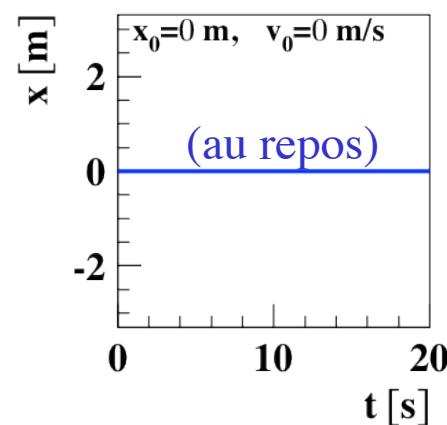
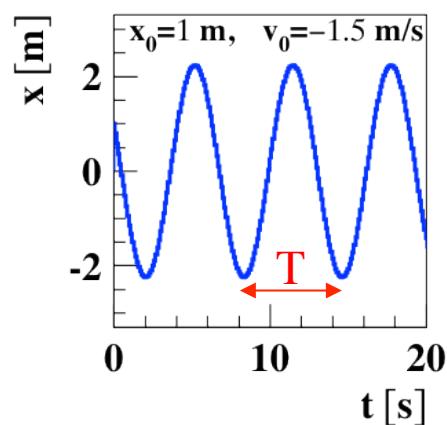
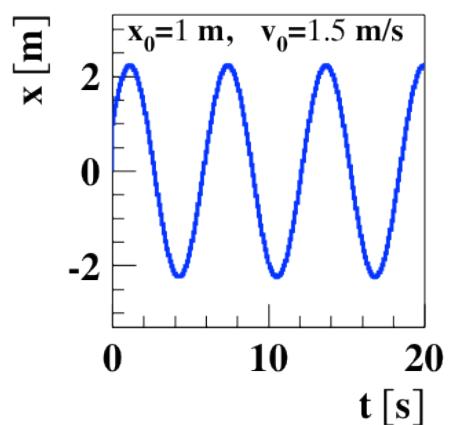
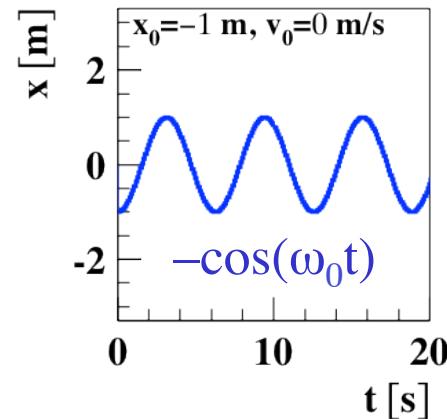
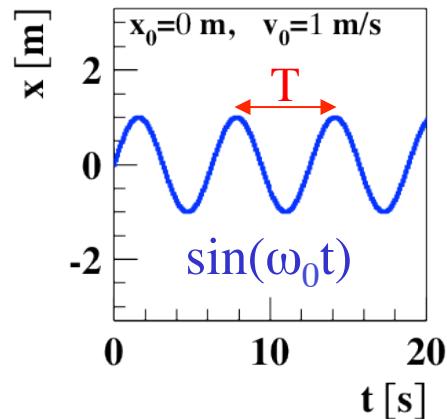
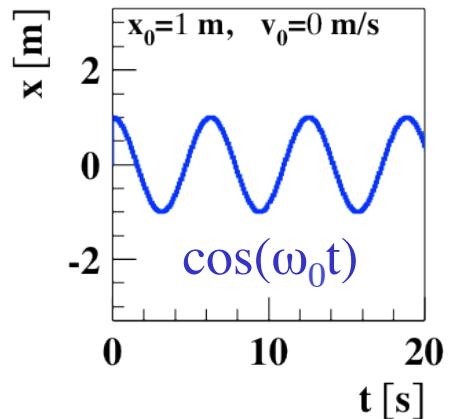
- On pose:  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$   $\Rightarrow x(0)=1$  ✓
- $v(t) = dx/dt = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)$   $\Rightarrow v(0)=0$  ✓
- $a(t) = dv/dt = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$  [=  $-\omega_0^2 x(t)$ ]
- Comme  $a(t) = -k/m x(t)$ , on doit avoir

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pulsation propre de  
l'oscillateur libre

=  $1 \text{ s}^{-1}$  dans notre exemple

# Solution générale et dépendance par rapport aux conditions initiales



Note:  
l'amplitude et la phase des oscillations (mais pas  $\omega_0$ ) dépendent des conditions initiales.

Période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Fréquence

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Solution générale de  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou bien } x(t) = C \sin(\omega_0 t + D)$$

Deux constantes d'intégration à déterminer par les conditions initiales:

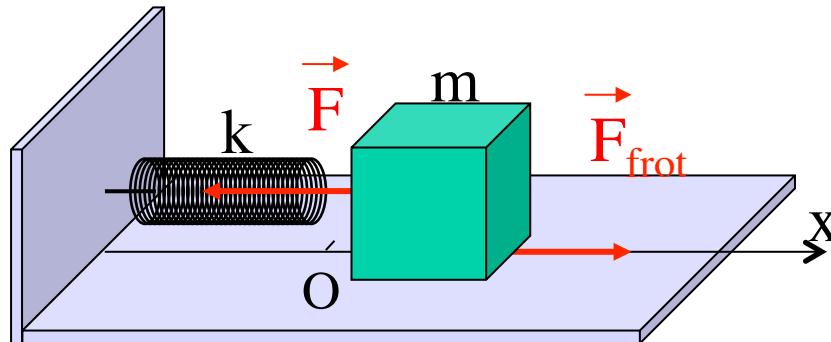
$$A = x_0 \text{ et } B = v_0 / \omega_0, \quad \text{ou bien } C^2 = x_0^2 + (v_0 / \omega_0)^2 \text{ et } \tan(D) = \omega_0 x_0 / v_0$$

→ démo  
pendule  
de torsion

# Oscillateur harmonique amorti

- En pratique, tout oscillateur s'amortit à cause des frottements

- Modèle:



- on ajoute une force de frottement proportionnelle à la vitesse:  $F_{\text{frot}} = -bv$   
(signe « - »: la force s'oppose au mouvement)
- coefficient de frottement  $b = 0.25 \text{ kg/s}$
- Deuxième loi de Newton:  $F + F_{\text{frot}} = ma$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

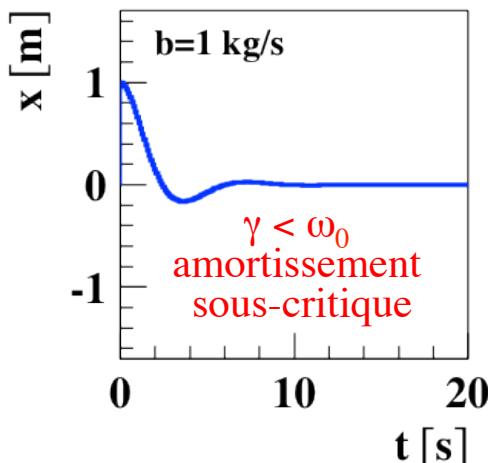
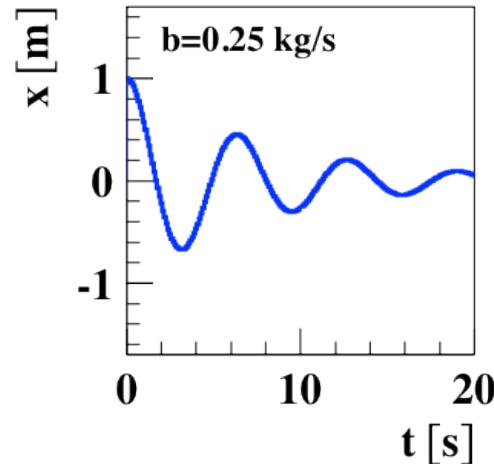
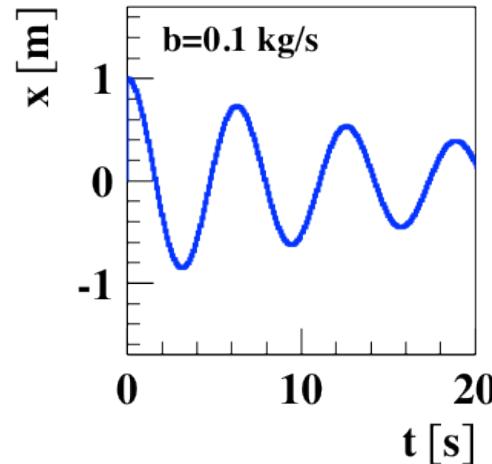
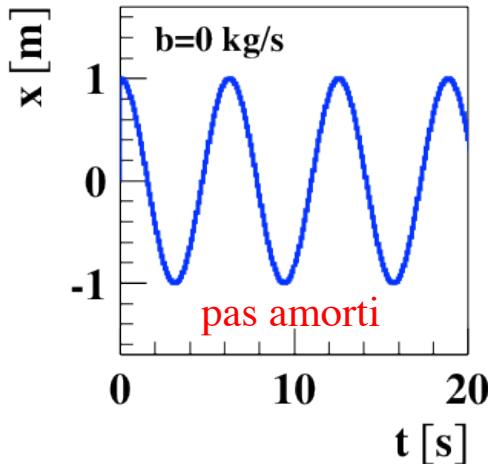
équation différentielle plus compliquée,  
mais toujours facile à résoudre numériquement

Algorithme pour ordinateur:

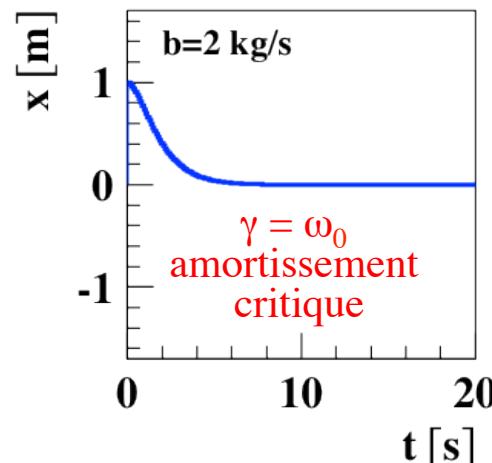
```
M=1  
K=1  
B=0.25  
T=0  
X=1  
V=0  
DT=0.001  
1 F=-K*X-B*V  
A=F/M  
V=V+A*DT  
X=X+V*DT  
T=T+DT  
PRINT *,T,X,V,A  
GOTO 1
```

# Oscillateur harmonique amorti

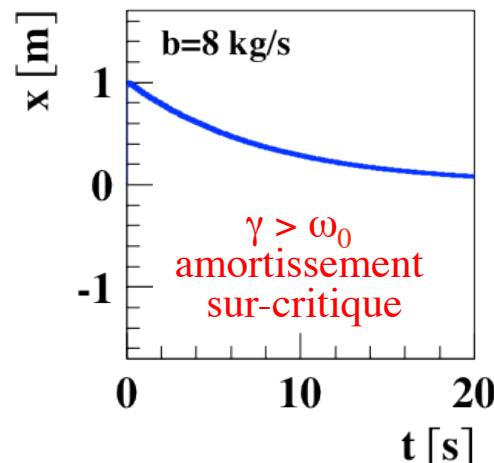
$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{avec } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Comportement oscillatoire



Cas où l'amortissement est le plus rapide



Plus de comportement oscillatoire

# Solution oscillateur harmonique amorti

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- $\gamma < \omega_0$  (cas sous-critique ou non amorti):

$$x(t) = e^{-\gamma t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]$$

avec  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$



- $\gamma = \omega_0$  (cas critique):

$$x(t) = e^{-\gamma t} [A + B t]$$



- $\gamma > \omega_0$  (cas sur-critique):

$$x(t) = e^{-\gamma t} [A \exp(\omega_2 t) + B \exp(-\omega_2 t)]$$

avec  $\omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$



A et B sont les constantes d'intégration,  
à déterminer par les conditions initiales

# Oscillateur forcé

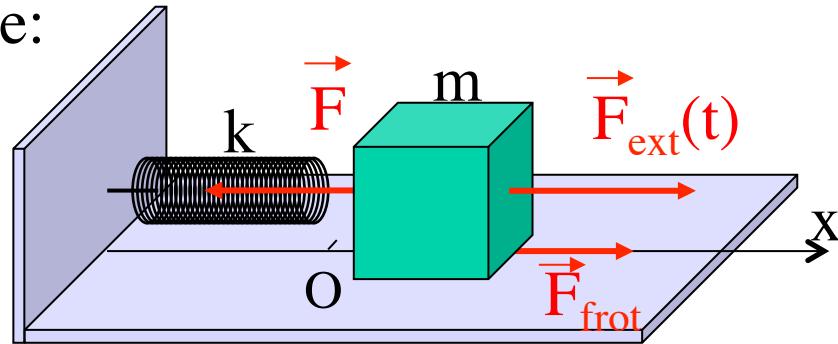
- En pratique tout oscillateur s'amortit; mais on peut « entretenir » les oscillations à l'aide d'une force extérieure
- Exemples:
  - Balançoire poussée par un enfant
  - Voiture (avec suspension) passant sur des bosses
  - Atome (électron lié) recevant un rayonnement électromagnétique
  - Pendule de l'Exploratorium à San Francisco (USA)

→ démos: pendule excité par un ressort  
oscillateur forcé amorti par un fluide



# Oscillateur harmonique forcé

- Modèle:



- on ajoute une force périodique:

$$F_{\text{ext}} = f \sin(\omega t)$$

- amplitude  $f = 1 \text{ N}$ , pulsation  $\omega = 0.2 \text{ s}^{-1}$

- Deuxième loi de newton:

$$F + F_{\text{frot}} + F_{\text{ext}} = ma$$

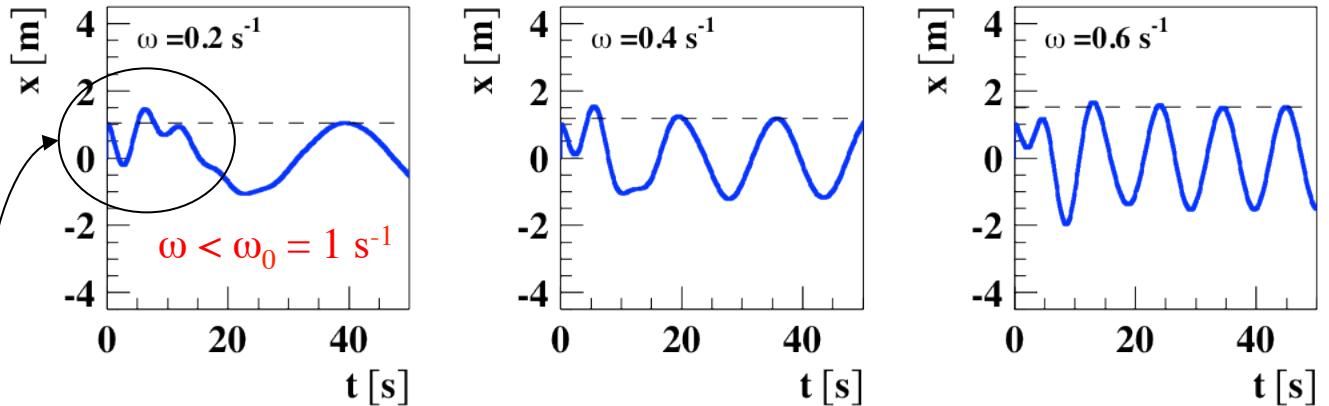
$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{\text{ext}}(t)$$

Algorithme pour ordinateur:

```
M=1  
K=1  
B=0.25  
FEXT=1  
W=0.2  
T=0  
X=1  
V=0  
DT=0.001  
1 F=-K*X-B*V+FEXT*SIN(W*T)  
A=F/M  
V=V+A*DT  
X=X+V*DT  
T=T+DT  
PRINT *,T,X,V,A  
GOTO 1
```

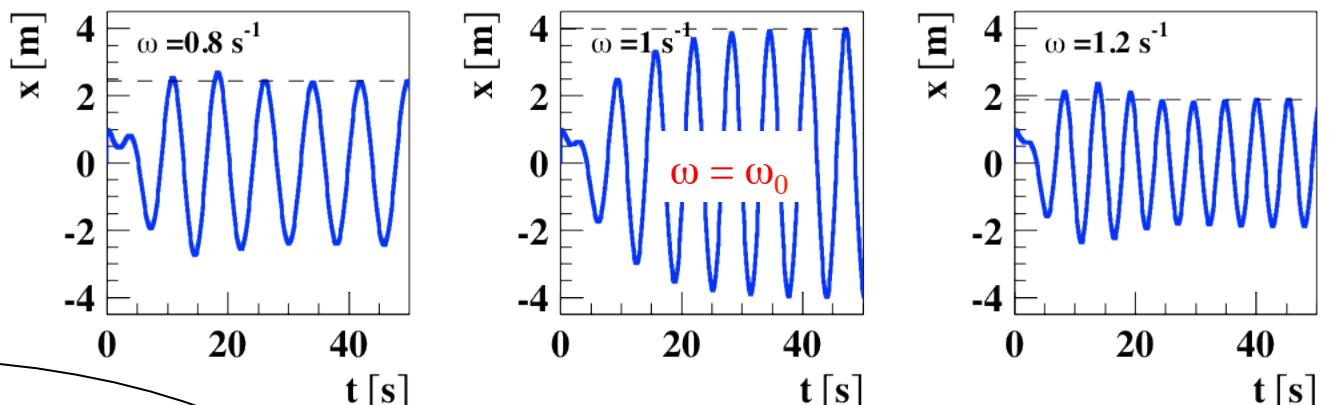
équation différentielle encore plus compliquée,  
mais toujours facile à résoudre numériquement

# Oscillateur harmonique forcé (et amorti)



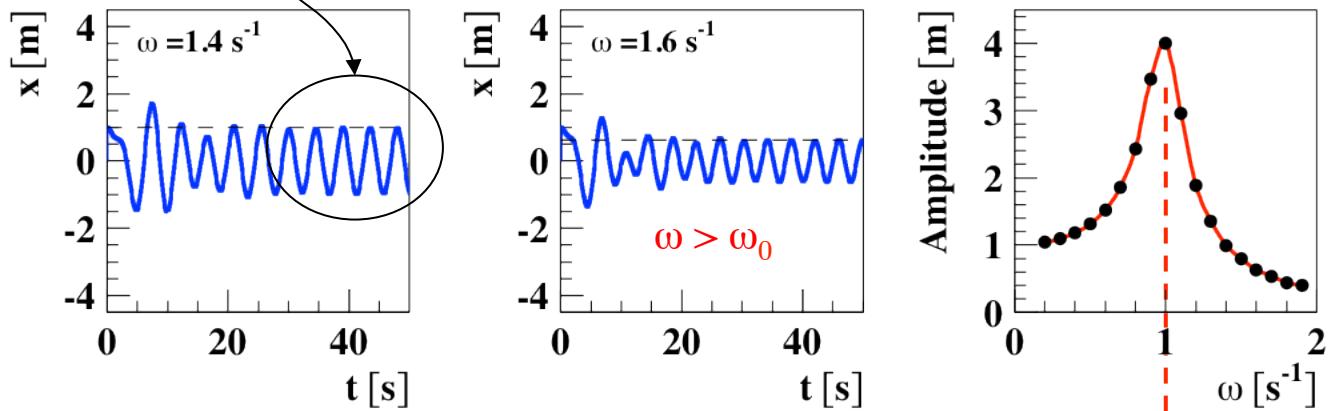
## Phase transitoire:

- Les pulsations  $\omega_0$  et  $\omega$  se superposent
- Dépend des conditions initiales



## Phase stationnaire:

- La pulsation  $\omega_0$  est amortie et le système oscille avec la pulsation imposée  $\omega$
- Ne dépend plus des conditions initiales
- L'amplitude dépend de  $\omega$  !



« Résonance » à  $\omega \sim \omega_0$

# Complément

## Oscillateur

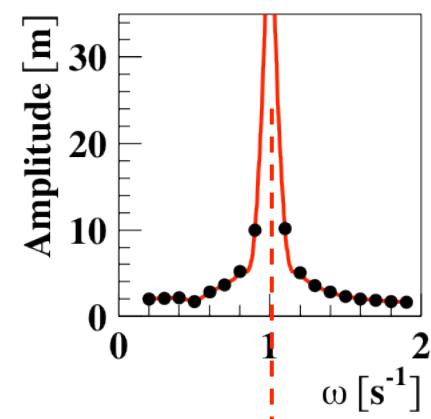
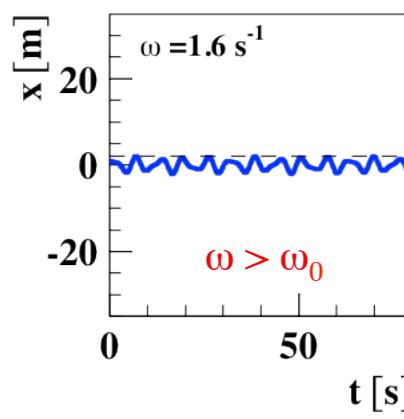
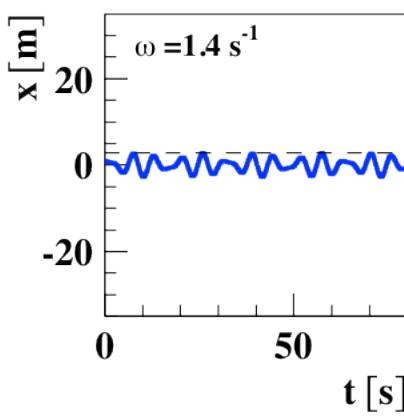
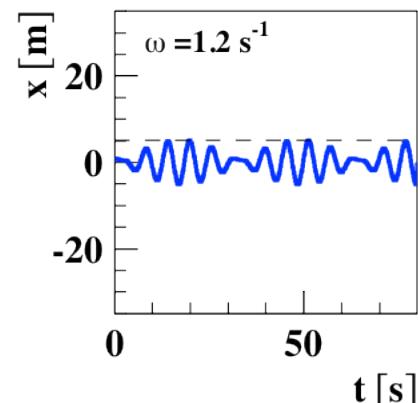
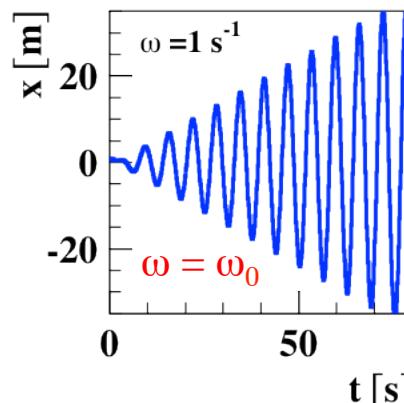
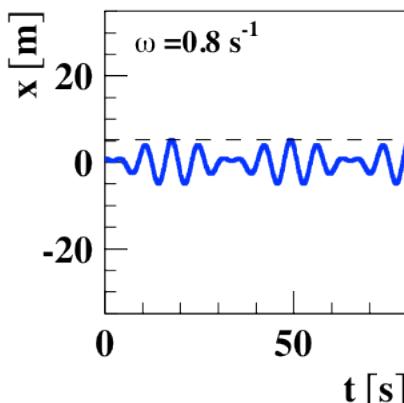
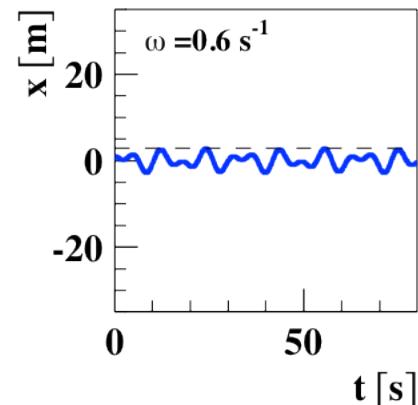
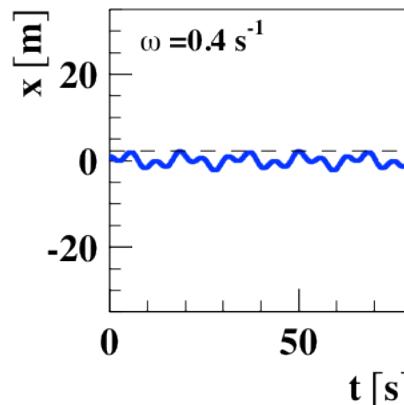
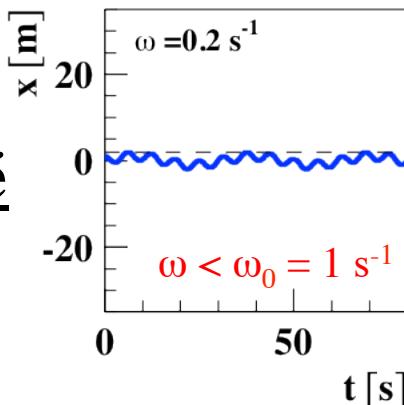
### harmonique forcé

#### (pas ou très peu amorti)

Note: l'échelle verticale n'est pas la même que précédemment

Le système répond de façon beaucoup plus sélective en fréquence.

A la résonance, l'amplitude devient très grande.

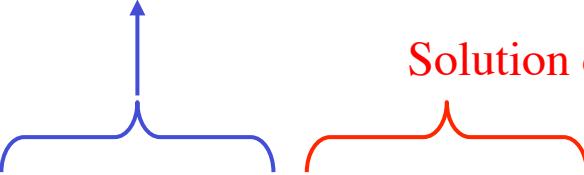


« Résonance » à  $\omega = \omega_0$

# Solution oscillateur harmonique forcé

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin(\omega t) \quad \text{avec } \gamma = \frac{b}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \alpha_0 = \frac{f}{m}$$

Solution de l'oscillateur libre (amorti): tend vers 0 pendant la phase transitoire



Solution de la phase stationnaire

$$x(t) = x_{\text{non-forcé}}(t) + \rho \sin(\omega t - \phi)$$

avec  $\rho = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$  et  $\tan(\phi) = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Résonance:  $\frac{d\rho}{d\omega} = 0 \Rightarrow \rho_{\max} = \frac{\alpha_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$  pour  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

# Phénomènes de résonance

→ démo: pendules sur élastique  
vibration de tiges plastiques

- Résonances indésirables dans:
  - Amortisseurs d'une voiture
  - Suspension du tambour d'une essoreuse à linge
  - Structure de génie civil (ponts, bâtiments, ...)
    - par ex. Tacoma Narrows Bridge (WA, USA) en 1940
- Résonances désirables dans:
  - Circuits électriques dans un « tuner » (radio)
  - Tuyaux d'orgue
  - Balançoire de jardin



# Equations différentielles et chaos

- Certains systèmes mécaniques présentent un comportement chaotique, apparemment imprédictible, bien que leur mouvement (ou évolution) soit décrit par des équations différentielles déterministes
  - démo balle de ping-pong sur table oscillante
  - démo pendule à deux fléaux
- Le chaos déterministe apparaît aussi dans des systèmes comme l'atmosphère terrestre:
  - équations du mouvement non-linéaires
  - ⇒ forte dépendance par rapport aux conditions initiales
  - conditions initiales pas connues précisément
  - ⇒ difficile de faire de prédictions fiables

# Deuxième partie: Cinématique et dynamique du point matériel

## Notions abordées:

- repères, rappels d'analyse vectorielle
- référentiel, position, vitesse, accélération normale et tangentielle
- rotations, repère en rotation, mouvement circulaire uniforme
- vitesse et accélération en coordonnées cylindriques et sphériques
- contraintes et forces de liaison

## Buts:

- apprendre à travailler avec différents systèmes de coordonnées
- savoir écrire les équations du mouvement d'un point matériel

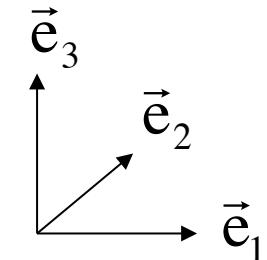
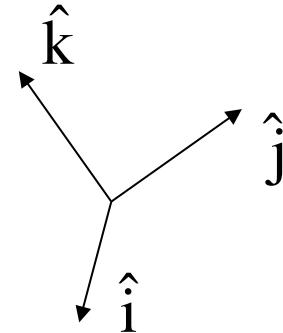
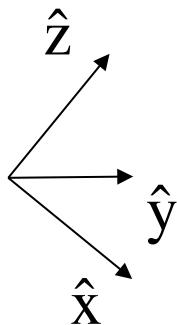
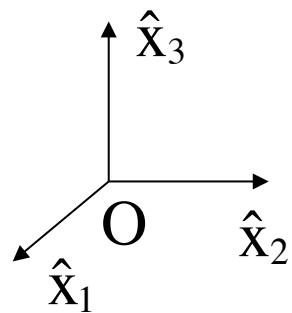
# Référentiel

- **Définition:** un ensemble de  $N$  points ( $N \geq 4$ ), non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres (et par extension tous les points immobiles par rapport à ces  $N$  points)
- La description du mouvement se fait toujours par rapport à un certain référentiel !
- L'observateur et les appareils de mesure sont supposés immobiles par rapport au référentiel (ils « font partie » du référentiel)
- Le choix du référentiel est arbitraire
- Exemples:
  - Le laboratoire (référentiel terrestre)
  - Le centre de la Terre et trois étoiles fixes (référentiel de Ptolémée)
  - Le centre du Soleil et trois étoiles fixes (référentiel de Képler)
  - Un paquebot, etc...

# Repère

→ démo repère orthonormé

- **Repère** = origine O et trois axes orthogonaux définis par des vecteurs de longueur unité (vecteurs unitaires)



Vecteurs unitaires:

$$|\hat{x}_1| = |\hat{x}_2| = |\hat{x}_3| = 1$$

Vecteurs orthogonaux:

$$\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 = \hat{x}_2 \cdot \hat{x}_3 = \hat{x}_3 \cdot \hat{x}_1 = 0$$

Base orthonormée:

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

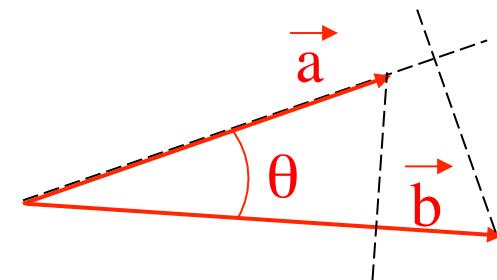
produit  
scalaire

symbole de  
Kronecker

# Produit scalaire

- Définition d'un scalaire (nombre):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



$$= (\text{norme de } \vec{a}) \times (\text{norme de la projection de } \vec{b} \text{ sur } \vec{a})$$

$$= (\text{norme de } \vec{b}) \times (\text{norme de la projection de } \vec{a} \text{ sur } \vec{b})$$

- En composantes (dans un repère orthonormé):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3) \cdot (b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + b_3 \hat{x}_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Propriétés:

– Commutativité:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

– Distributivité:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

– Linéarité:

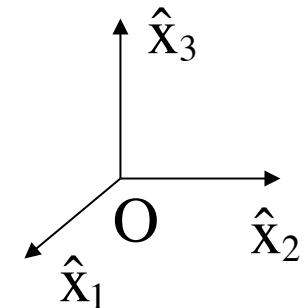
$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

– Vecteurs orthogonaux:

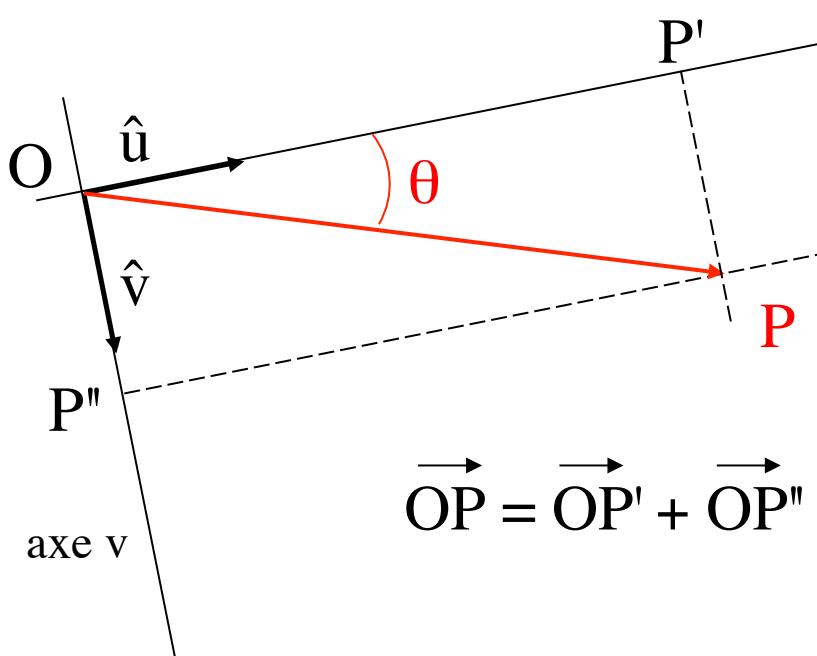
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

– Norme<sup>2</sup> d'un vecteur:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$$



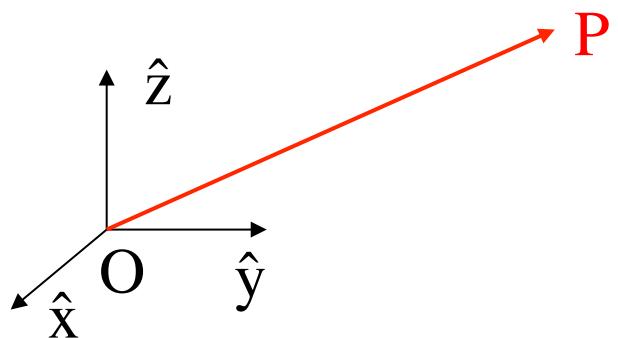
# Projections et composantes d'un vecteur



Projection du vecteur  $\vec{OP}$  sur l'axe **u**:  
$$\vec{OP} \cdot \hat{u} = |\vec{OP}| |\hat{u}| \cos\theta = OP \cos\theta = OP'$$

produit scalaire

$$\vec{OP} = \vec{OP}' + \vec{OP}'' = OP' \hat{u} + OP'' \hat{v} = (\vec{OP} \cdot \hat{u})\hat{u} + (\vec{OP} \cdot \hat{v})\hat{v}$$



Coordonnées cartésiennes  
du point P ou composantes  
du vecteur  $\vec{OP}$ :

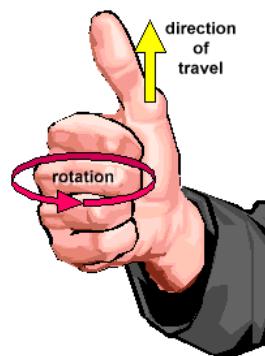
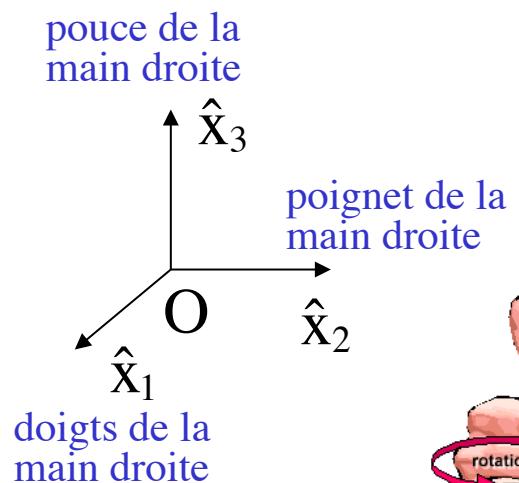
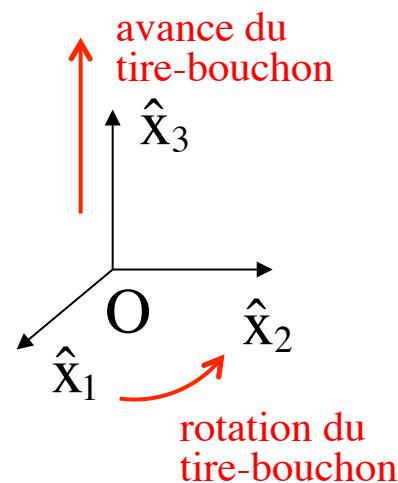
$$\begin{cases} x = \vec{OP} \cdot \hat{x} \\ y = \vec{OP} \cdot \hat{y} \\ z = \vec{OP} \cdot \hat{z} \end{cases}$$

$$\vec{OP} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# Repère direct (ou repère droit)

- Par convention, on n'utilise que des repères dont la chiralité est définie (arbitrairement) par la « règle du tire-bouchon » ou la « règle de la main droite »

## Repère direct ou « droit »



Un mouvement de rotation qui amène l'axe 1 sur l'axe 2 ferait avancer un tire-bouchon dans la direction de l'axe 3

Il faut évidemment utiliser un tire-bouchon normal, c'est-à-dire un tire-bouchon « droit ».

L'avance d'un tire-bouchon droit est donné par la direction du pouce de la main droite quand la rotation est donnée par les doigts qui se referment.

→ démo tire-bouchon

# Droit ou gauche ?

Coquillage

Limnée géante  
*Lymnaea stagnalis*

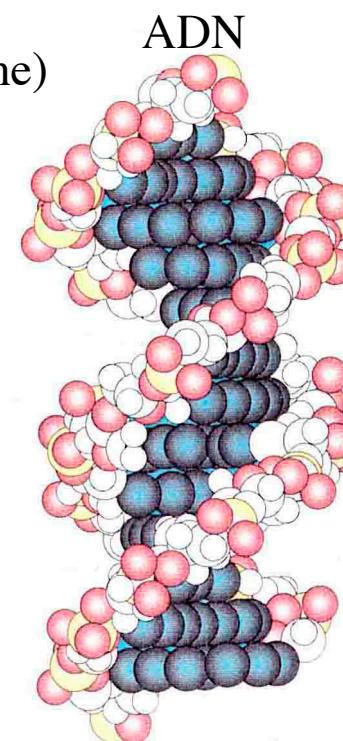
6,25 cm



Escargot

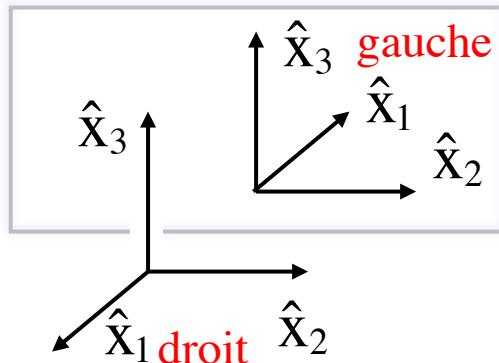


Liseron (droit)  
Chèvre-feuille (gauche)

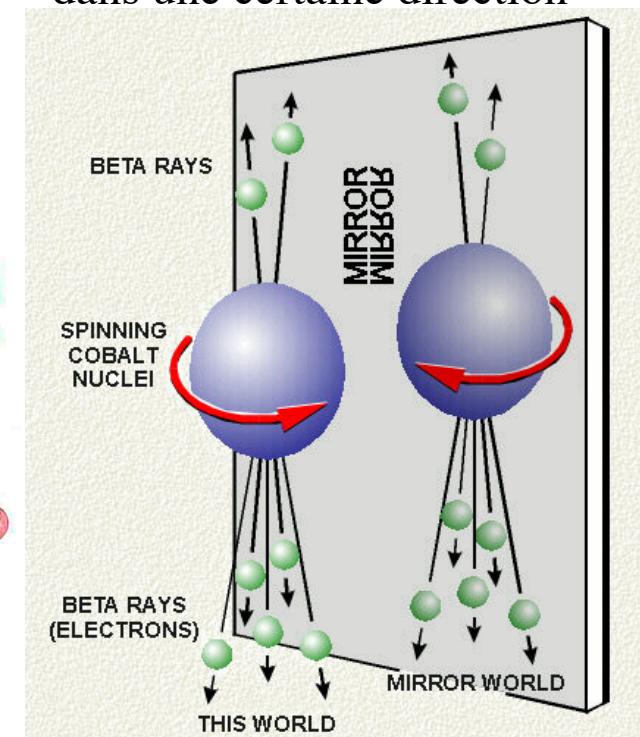


Remarque:

un miroir échange « gauche » et « droit »



Noyaux de cobalt radioactifs ayant un « spin » (rotation intrinsèque) et émettant des électrons préférentiellement dans une certaine direction



# Produit vectoriel

- Définition d'un « vecteur »:

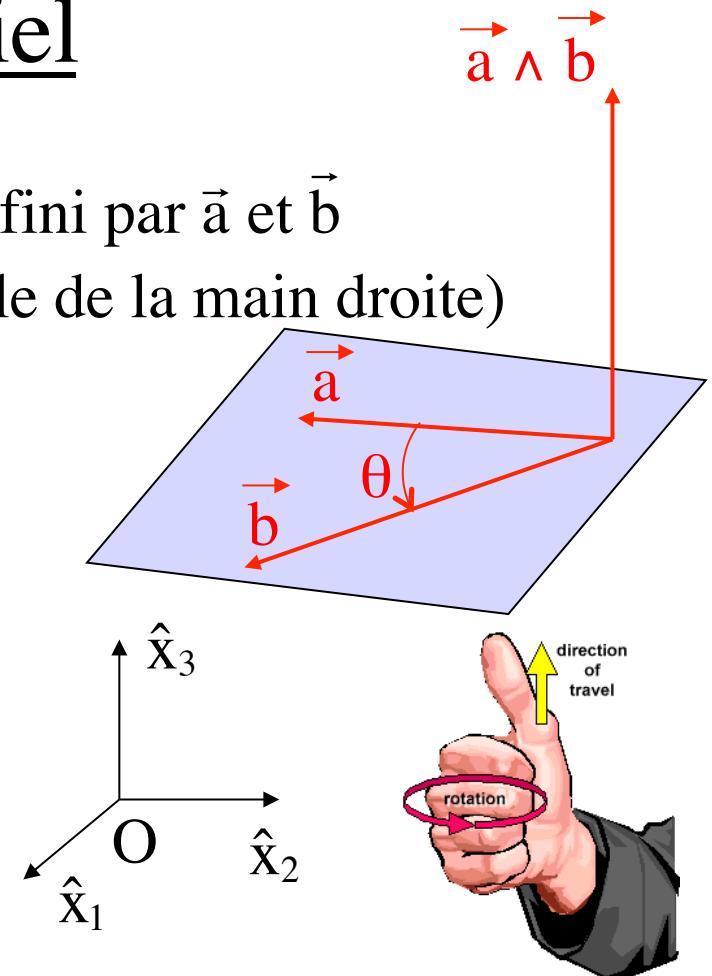
direction de  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  = normale au plan défini par  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$

sens de  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  = conventionnel (règle de la main droite)

$$\text{norme de } \vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta$$

- En composantes:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{x}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{x}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\left( a_2 b_3 - a_3 b_2 \right)}_{\text{composantes}} \hat{x}_1 + \underbrace{\left( a_3 b_1 - a_1 b_3 \right)}_{\text{composantes}} \hat{x}_2 + \underbrace{\left( a_1 b_2 - a_2 b_1 \right)}_{\text{composantes}} \hat{x}_3$$



- Propriétés:

– Anti-commutativité:  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

– Distributivité:  $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

– Linéarité:  $\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$

– Vecteurs parallèles:  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$

Questions:

– que vaut  $\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_2$  ?

– que vaut  $\hat{x}_1 \wedge \hat{x}_3$  ?



# Produit mixte et double produit vectoriel

- Produit mixte (= un « nombre »):

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

{ déterminant}

N.B: le signe du produit mixte est conventionnel

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b} \text{ et } \vec{c} \text{ coplanaires (dans le même plan)}$$

- Double produit vectoriel (= un vecteur):

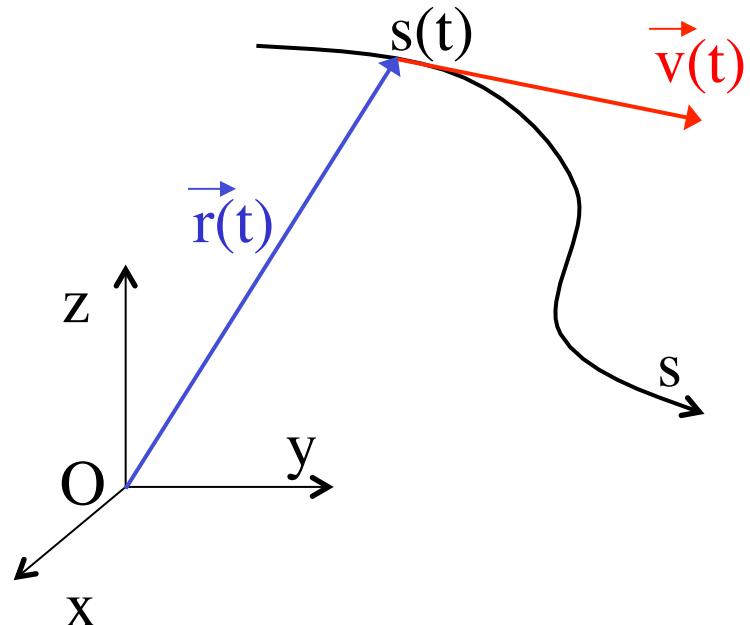
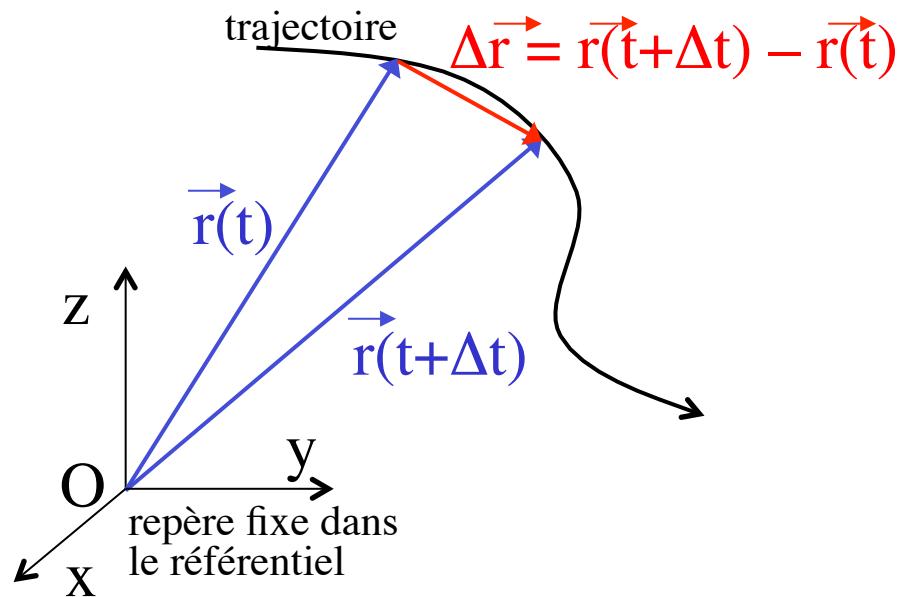
$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$$

perpendiculaire à  $\vec{a}$  et  
dans le plan de  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$

Au tableau

## Cinématique du point matériel



$\vec{r}(t)$  = position par rapport à O

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

= vitesse vectorielle instantanée  
(tangente à la trajectoire)

$s(t)$  = abscisse curviligne  
= longueur parcourue  
le long de la trajectoire

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \text{vitesse scalaire} = |\vec{v}(t)|$$

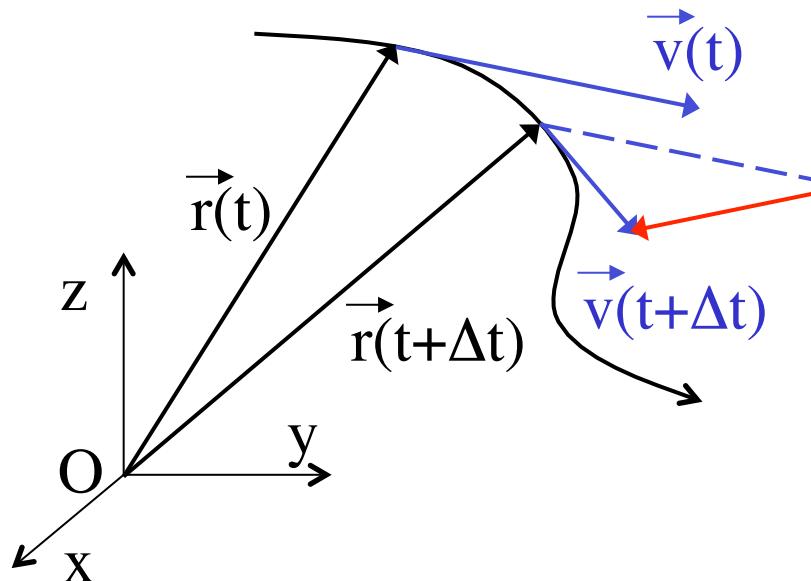
Avec  $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}(s(t))$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{r}}{ds} = v \hat{\tau}$$

$$\hat{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \text{vecteur unitaire tangent à la trajectoire}$$

Au tableau

## Cinématique du point matériel (suite)



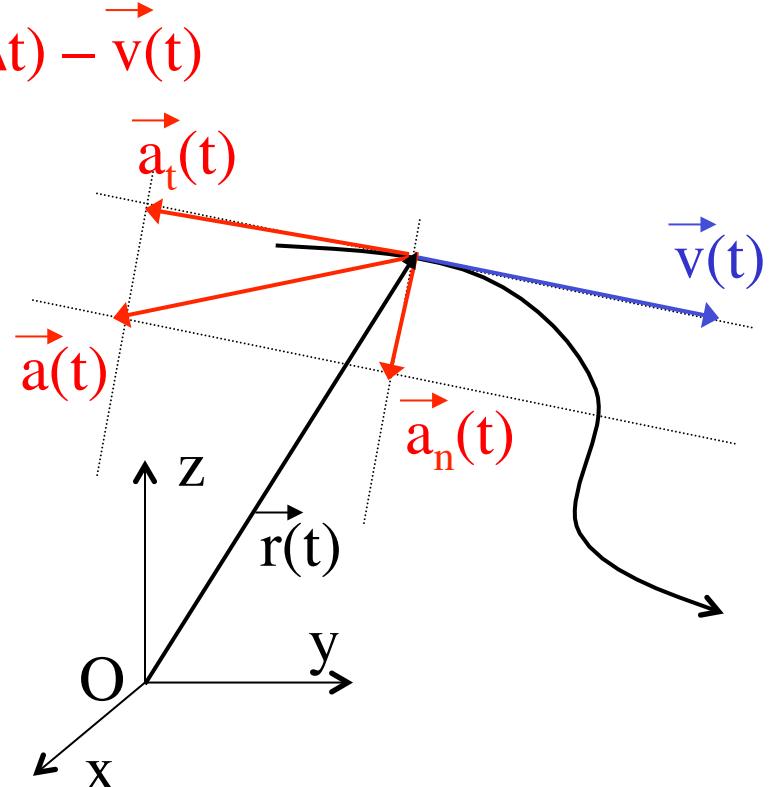
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

= accélération vectorielle instantanée

$$= \frac{d}{dt} (\vec{v} \hat{\tau}) = \underbrace{\frac{dv}{dt} \hat{\tau}}_{\vec{a}_t(t)} + v \underbrace{\frac{d\hat{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n(t)}$$

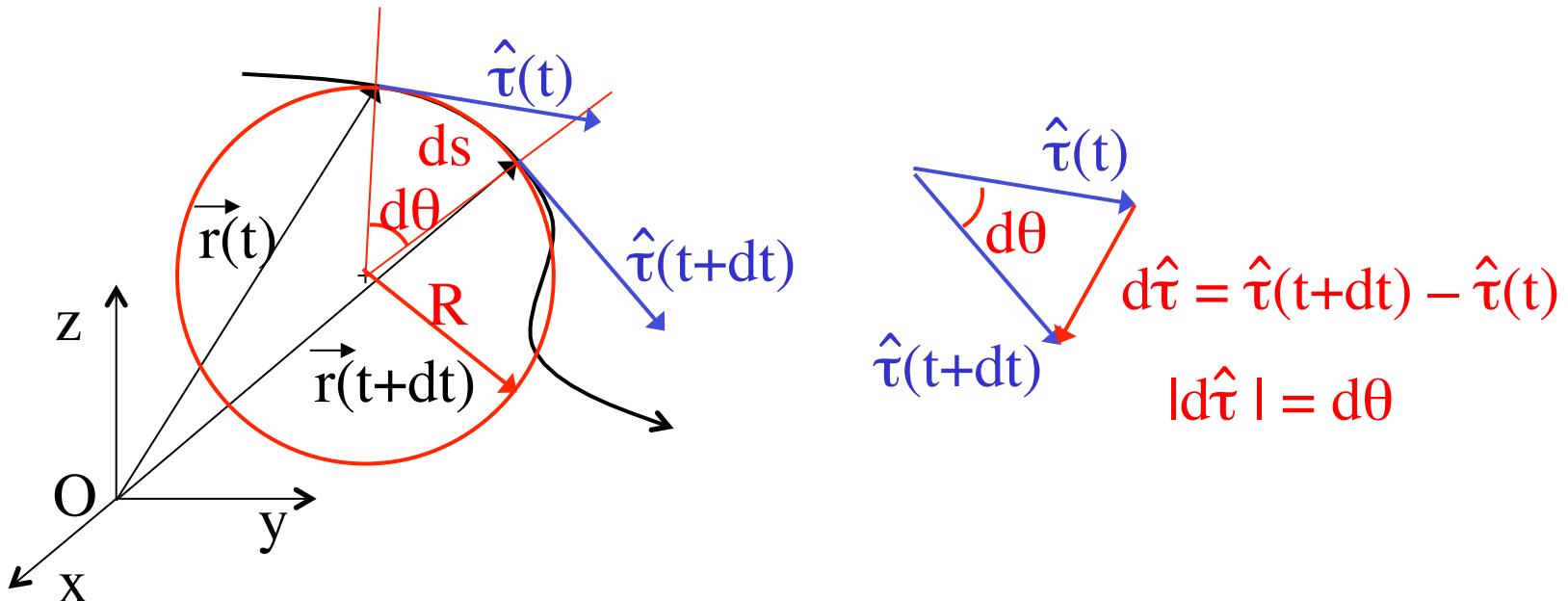
$\vec{a}_t(t)$  = accélération tangentielle (colinéaire à  $\vec{v}$ )

$\vec{a}_n(t)$  = accélération normale (perpendiculaire à  $\vec{v}(t)$ , car  $\hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt} = 0$ )



## Accélération normale

Approximation de la trajectoire entre les instants  $t$  et  $t+dt$  par un **arc de cercle** de **rayon  $R(t)$**  et de longueur  $ds = R(t) d\theta$



$$\begin{aligned} \hat{\tau}(t+dt) - \hat{\tau}(t) &= d\hat{\tau} \\ |d\hat{\tau}| &= d\theta \end{aligned}$$

$$\vec{a}_n(t) = v(t) \frac{d\hat{\tau}}{dt} = v(t) \frac{d\hat{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = v(t)^2 \frac{d\hat{\tau}}{ds}$$

= accélération normale dirigée vers le centre de courbure

$$a_n(t) = |\vec{a}_n(t)| = v^2(t) \left| \frac{d\hat{\tau}}{ds} \right| = v(t)^2 \frac{d\theta}{R(t) d\theta} = \frac{v(t)^2}{R(t)}$$

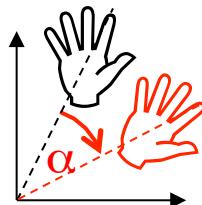
= norme de l'accélération normale

# Mouvement avec vitesse scalaire constante

- Considérons un point matériel avec:
    - une vitesse scalaire  $v = ds/dt$  constante non nulle
    - un vecteur vitesse qui change de direction au cours du temps
  - Accélération:  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 0$ 
    - pas de composante tangentielle:  $a_t = dv/dt = 0$
    - seule une composante normale  $a = a_n = v^2/R \neq 0$   
dirigée vers le centre de courbure
  - Force:  $\vec{F} = m\vec{a}$ 
    - $F = ma = mv^2/R$   
force centripète
- démo: mouvement circulaire uniforme  
une force doit être exercée  
(et donc une accélération existe)

# Description des rotations spatiales

- Une rotation spatiale est caractérisée par un axe de rotation (dans l'espace), un sens de rotation et un angle de rotation
- Deux points de vue:

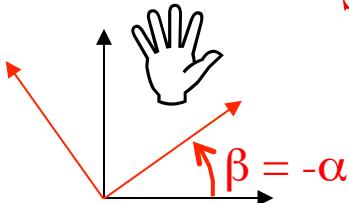


–Rotation d'un système physique dans un repère fixe:

- Mouvement circulaire d'un point matériel
- Mouvement de rotation d'un solide sur lui-même (toupie, Terre, ...)

–Système physique fixe décrit dans un repère en rotation

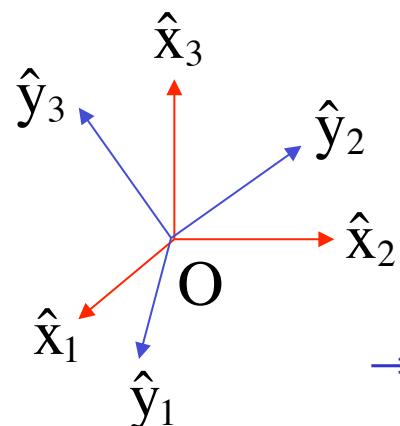
- La description du mouvement d'un point matériel dans un référentiel donné peut parfois être simplifiée si on choisit un repère en mouvement par rapport au référentiel



## Théorème d'Euler:

Soit deux repères orthonormés droits de même origine:

il existe toujours une rotation qui amène le premier sur le deuxième



→ démo repères orthonormés

Au tableau

## Repères et vecteurs en rotation

Au temps  $t$ , le repère subit une rotation infinitésimale pendant un temps  $dt$ . De façon générale on peut écrire

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i(t)}{dt} = \sum_j E_{ji}(t) \hat{\mathbf{e}}_j(t) = E(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t) \quad \text{où } E(t) \text{ est une matrice } 3 \times 3$$

$$0 = \frac{d}{dt} (\underbrace{\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j}_{\delta_{ij}}) = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot E \hat{\mathbf{e}}_j + \hat{\mathbf{e}}_j \cdot E \hat{\mathbf{e}}_i = E_{ij} + E_{ji} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

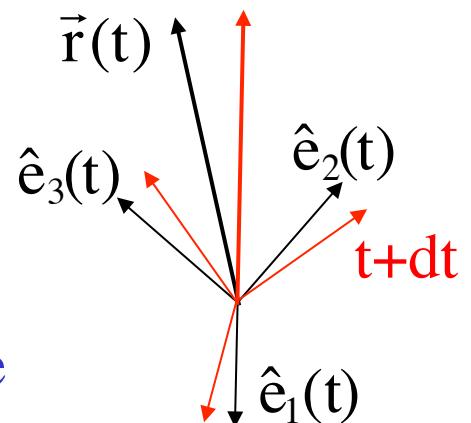
Pour un vecteur fixe dans le repère en rotation (= vecteur en rotation):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = E \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

De même pour les vecteurs de base du repère :

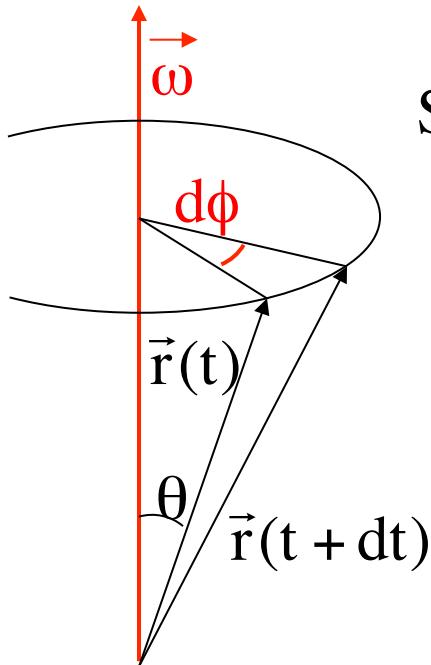
$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \frac{d\hat{\mathbf{e}}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_i$$

Formule de Poisson



# Interprétation du vecteur $\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{r}(t)$$



Si  $\vec{r}$  est collinéaire à  $\vec{\omega}$ , alors  $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ , donc  $\vec{r}$  ne bouge pas  
 ⇒ la direction de  $\vec{\omega}$  définit l'axe de rotation au temps t  
 ⇒ sens de  $\vec{\omega}$  = sens de rotation (règle main droite)

$$|d\vec{r}| = |\vec{\omega} \wedge \vec{r}| dt = |\omega| dt |\vec{r}| \sin\theta$$

$$\text{Mais } |d\vec{r}| = |\vec{r}| \sin\theta d\phi, \text{ donc } \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

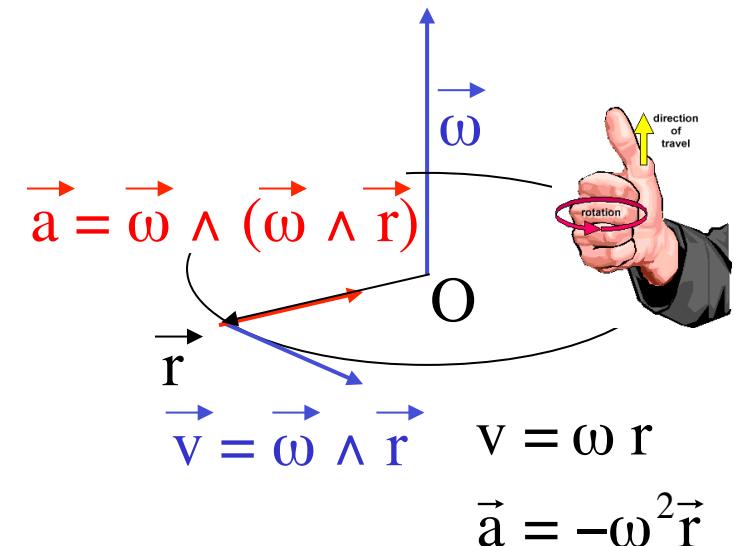
⇒ la norme de  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire de rotation

Cas particulier:  $\vec{\omega} = \text{constante}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

mouvement circulaire uniforme

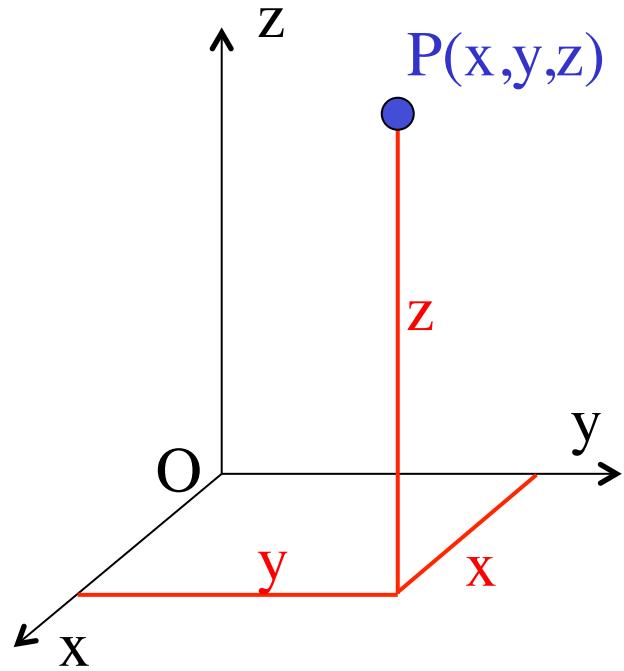


# Système de coordonnées

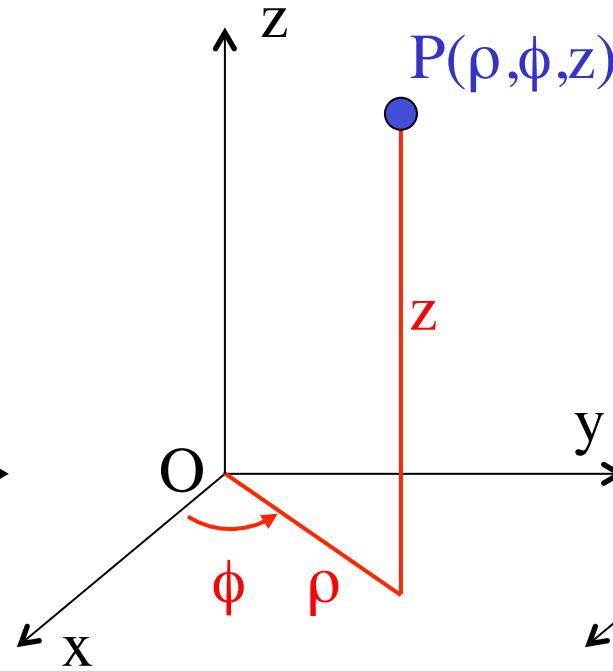
- **Définition:** paramétrisation, à un certain temps  $t$ , des points du référentiel au moyen de trois nombres réels.
  - Pour un référentiel donné il existe une infinité de systèmes de coordonnées
  - Exemples:
    - Coordonnées cartésiennes  $(x,y,z)$  dans un repère lié au référentiel
    - Coordonnées cartésiennes  $(x,y,z)$  dans un repère en mouvement par rapport au référentiel
    - Coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$
    - Coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$

# Différents systèmes de coordonnées

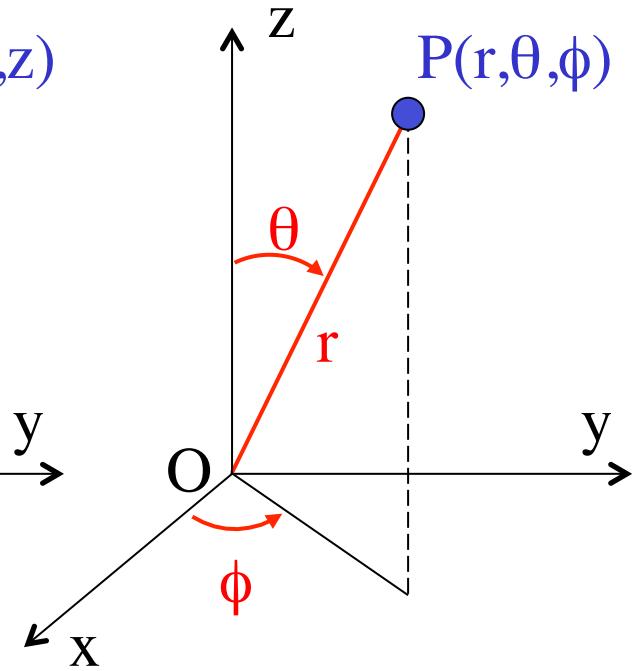
cartésiennes



cylindriques



sphériques



$$\begin{aligned} \rho &\geq 0 \\ \phi &\in [0, 2\pi[ \\ z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &\geq 0 \\ \theta &\in [0, \pi] \\ \phi &\in [0, 2\pi[ \end{aligned}$$

Autre exemple: coordonnées géographiques sur le globe terrestre (latitude, longitude, altitude)

# Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Point matériel P en mouvement

- Coordonnées cylindriques:

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \geq 0 \\ \phi = \phi(t) \in [0, 2\pi[ \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z \end{cases}$$

- Repère en mouvement associé aux coordonnées cylindriques du point P: O $\hat{\mathbf{e}}_\rho \hat{\mathbf{e}}_\phi \hat{\mathbf{e}}_z$

- Vitesse angulaire de rotation du repère:

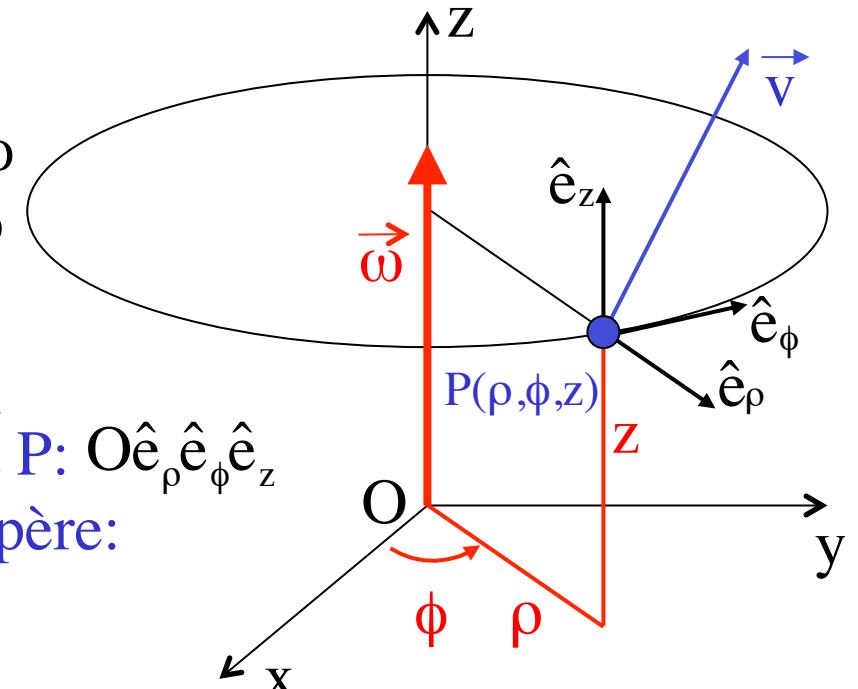
$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{\mathbf{z}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}}$$

- Position, vitesse et accélération dans ce repère:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + z \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z$$



$\vec{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho$  = vitesse radiale

$\vec{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi$  = vitesse transverse

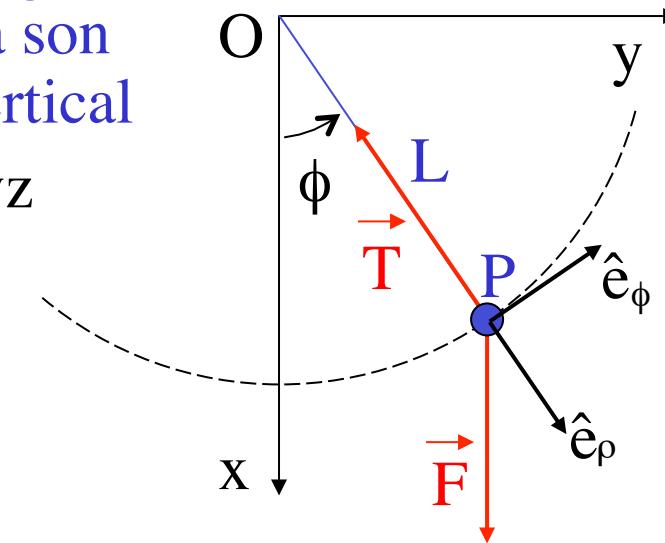
$\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho$  = accélération radiale

$\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi$  = accélération transverse

# Pendule mathématique

→ démo

- Point matériel P attaché à une tige rigide sans masse de longueur L, soumis à son poids F, et oscillant dans un plan vertical
- Repère fixe (lié au référentiel): Oxyz
- Repère en mouvement:  $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$  ( coordonnées cylindriques)
- Contraintes (ou liaisons):
 
$$\begin{cases} \rho = L = \text{constante} \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \\ z = \dot{z} = \ddot{z} = 0 \end{cases}$$



- Accélération:  $\vec{a} = -L\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi$
  - 2ème loi de Newton:  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}$
  - Projections sur les axes du repère: 
$$\begin{cases} -mL\dot{\phi}^2 = F \cos\phi - T \\ mL\ddot{\phi} = -F \sin\phi \end{cases}$$
 sur  $\hat{e}_\rho$   
sur  $\hat{e}_\phi$
- équation différentielle à résoudre pour  $\phi(t)$ ...   ... puis on peut tirer  $T(t)$

→ démo mesure de la tension T du fil d'un pendule

# Pendule mathématique (suite)

- Galilée observe que la mouvement d'un pendule (en particulier la période d'oscillation) ne dépend pas de m: → démo

⇒ pour que l'équation du mouvement soit indépendante de m, il faut que  $F = mg$ , où g est une constante !

$$\ddot{\phi} = -\frac{F}{mL} \sin\phi = -\frac{g}{L} \sin\phi$$

- Solution:
  - Mouvement périodique, mais pas de solution analytique simple (intégrale elliptique)
  - La période dépend de l'amplitude ! → démo
- Approximation dans le cas de petites oscillations:

$$\sin\phi \approx \phi \Rightarrow \ddot{\phi} \approx -\frac{g}{L} \phi$$

⇒ oscillateur harmonique de pulsation  $\sqrt{\frac{g}{L}}$  et de période  $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

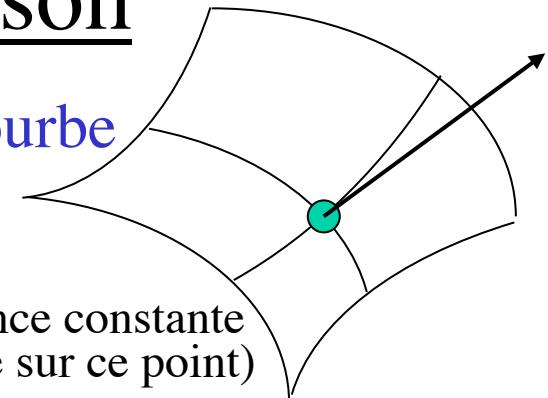
# Contraintes et forces de liaison

- Point matériel astreint à se déplacer sur une courbe ou une surface lisse, fixe ou en mouvement.

- Exemples:

- Pendule mathématique, contraint à rester à une distance constante d'un point fixe (i.e. sur une surface sphérique centrée sur ce point)
    - Wagonnet d'un « grand huit », qui ne doit pas dérailler
    - Goutte d'eau coulant sur le pare-brise d'une voiture
    - Bille dans un anneau en rotation

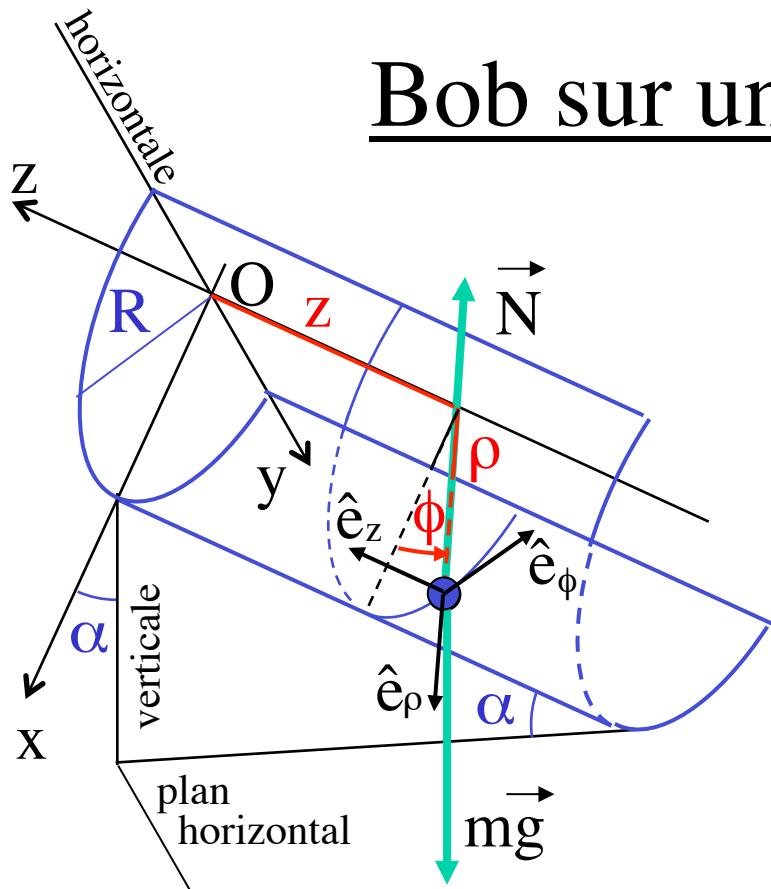
→ démo



- Force de liaison = force exercée sur le point matériel pour qu'il obéisse à la contrainte géométrique

- toujours perpendiculaire à la courbe ou à la surface
  - jamais de composante tangente à la courbe ou la surface (c'est-à-dire dans une direction où le point matériel peut bouger)
  - la force de liaison devient nulle  $\Leftrightarrow$  la contrainte disparaît
    - Souvent on ne spécifie pas le mécanisme qui exerce la contrainte (tout ce passe comme si la surface ou la courbe exerçait la force de liaison)
    - La force de liaison est a priori inconnue; elle fait partie du problème à résoudre
    - La surface ou la courbe peut exercer une force tangente, mais ce n'est pas une force de liaison (par exemple force de frottement)

# Bob sur une piste cylindrique



Repère lié à la piste (référentiel):  $Oxyz$

Coordonnées cylindriques:  $\rho, \phi, z$

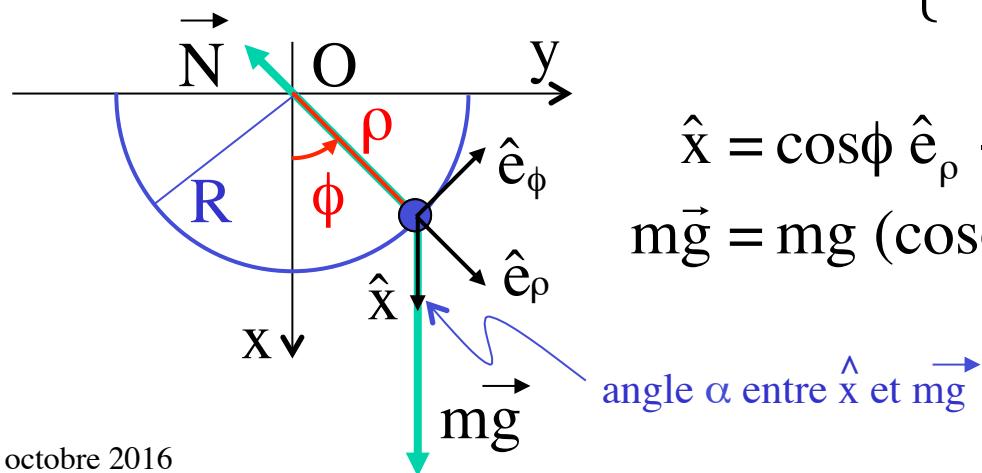
Contrainte: le bob reste sur la piste

$$\rho = R, \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$$

Repère en mvt avec le bob:  $O\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$

Forces:

$$\begin{cases} \text{poids } \vec{mg} = mg (\cos\alpha \hat{x} - \sin\alpha \hat{z}) \\ \text{force de liaison } \vec{N} = -N \hat{e}_\rho \end{cases}$$



$$\hat{x} = \cos\phi \hat{e}_\rho - \sin\phi \hat{e}_\phi$$

$$\vec{mg} = mg (\cos\alpha \cos\phi \hat{e}_\rho - \cos\alpha \sin\phi \hat{e}_\phi - \sin\alpha \hat{z})$$

angle  $\alpha$  entre  $\hat{x}$  et  $mg$

## Bob sur une piste cylindrique (suite)

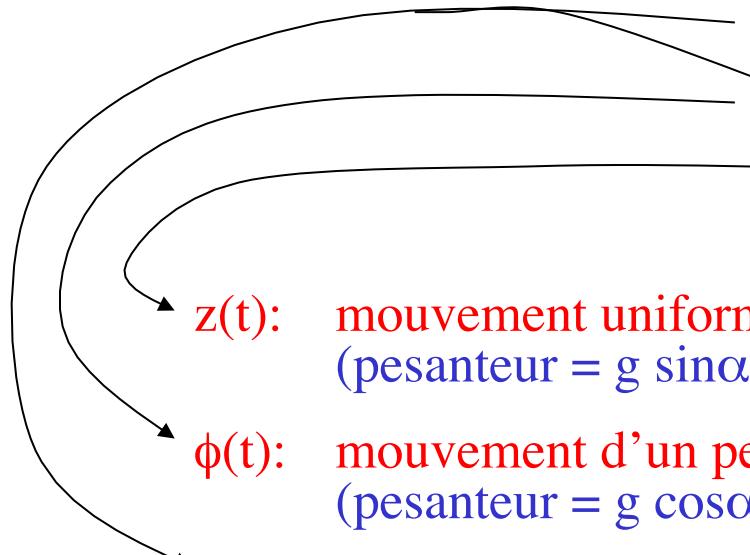
$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z \\ &= -R\dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + R\ddot{\phi} \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{N} = -N \hat{e}_\rho$$

$$m\vec{g} = mg (\cos\alpha \cos\phi \hat{e}_\rho - \cos\alpha \sin\phi \hat{e}_\phi - \sin\alpha \hat{e}_z)$$

2ème loi de Newton:  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } \hat{e}_\rho: -mR\dot{\phi}^2 = mg \cos\alpha \cos\phi - N \\ \text{sur } \hat{e}_\phi: mR\ddot{\phi} = -mg \cos\alpha \sin\phi \\ \text{sur } \hat{e}_z: m\ddot{z} = -mg \sin\alpha \end{array} \right.$$



$z(t)$ : mouvement uniformément accéléré  
(pesanteur =  $g \sin\alpha$ )

$\phi(t)$ : mouvement d'un pendule mathématique  
(pesanteur =  $g \cos\alpha$ , longueur =  $R$ )

$N(t) = 3 mg \cos\alpha \cos\phi(t) + A$   
( $A$  = constante d'intégration déterminée par les conditions initiales)

# Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

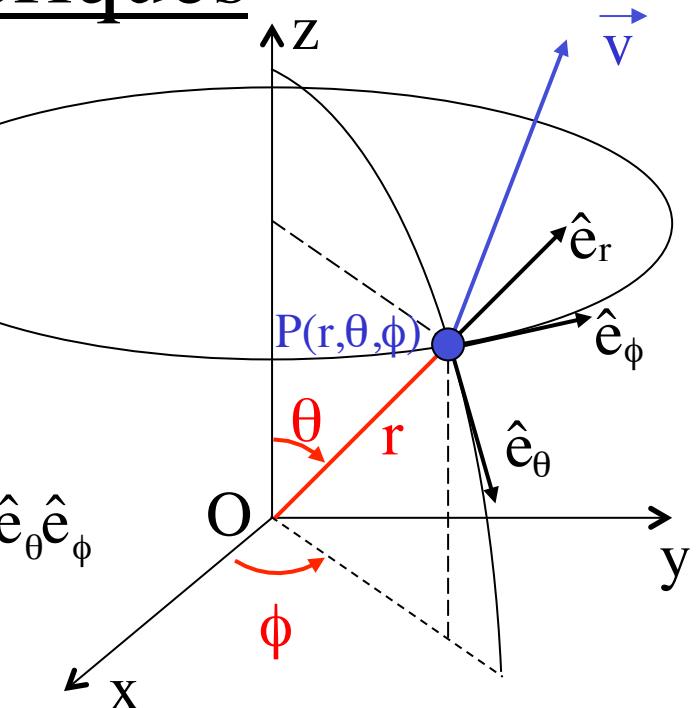
- Point matériel P en mouvement

- Coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} r = r(t) \geq 0 \\ \theta = \theta(t) \in [0, \pi] \\ \phi = \phi(t) \in [0, 2\pi[ \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

- Repère en mouvement associé aux coordonnées sphériques du point P:  $O\hat{e}_r\hat{e}_\theta\hat{e}_\phi$
- Vitesse angulaire de rotation du repère:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{e}_\phi$$



Preuve: en un temps  $dt$ , un vecteur fixe dans le repère subit

- une rotation infinitésimale d'angle  $d\phi$  autour de l'axe z  $d\vec{r}_1 = d\phi\hat{z} \wedge \vec{r}$
- une rotation infinitésimale d'angle  $d\theta$  autour de  $\hat{e}_\phi$   $d\vec{r}_2 = d\theta\hat{e}_\phi \wedge \vec{r}$

$\Rightarrow$  rotation infinitésimale totale:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = (d\phi\hat{z} + d\theta\hat{e}_\phi) \wedge \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\left( \frac{d\phi}{dt}\hat{z} + \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\phi \right)}_{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}$$

# Vitesse et accélération en coordonnées sphériques (suite)

- Vitesse angulaire de rotation du repère:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{e}_\phi$$

- Dérivées des vecteurs de base:

$$\dot{\hat{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = -\dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_r - \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_\theta$$

- Position, vitesse et accélération dans ce repère:

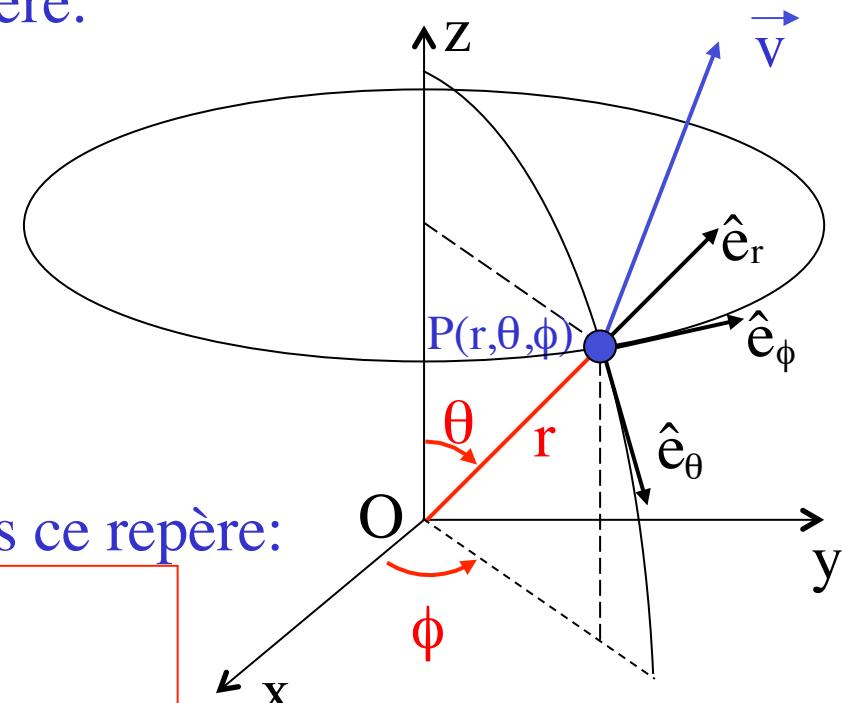
$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) \hat{e}_r$$

$$+ \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \right) \hat{e}_\theta$$

$$+ \left( r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta \right) \hat{e}_\phi$$

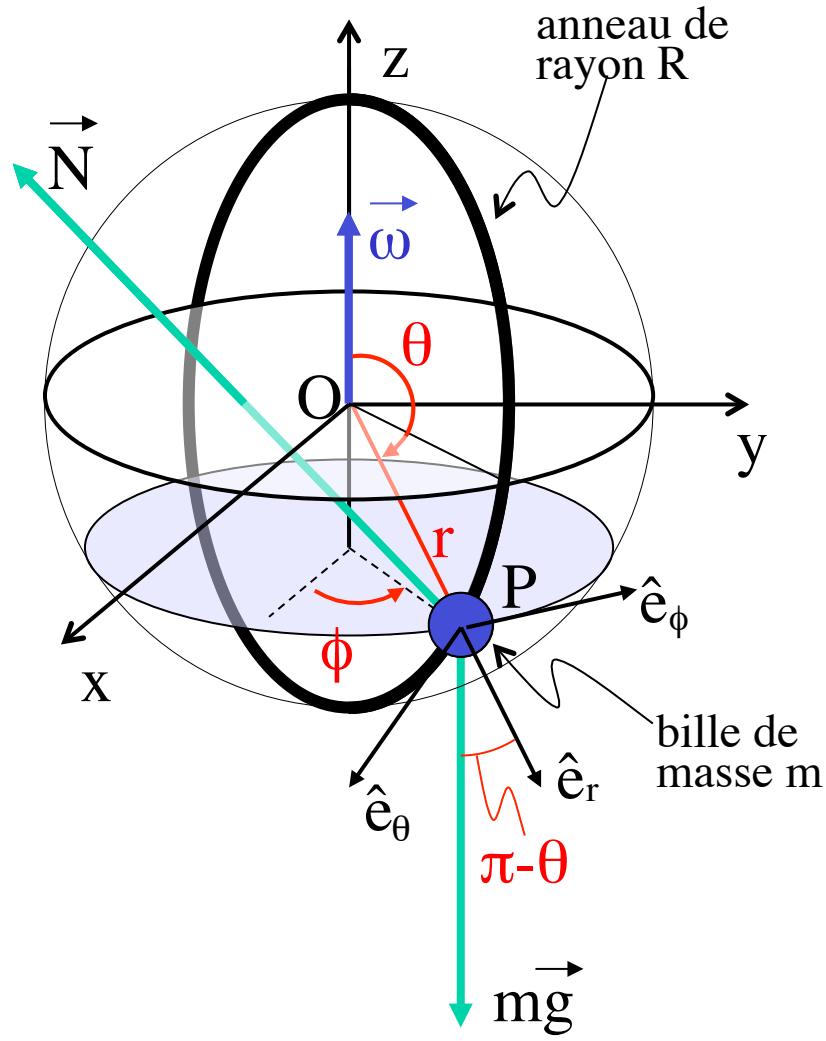


accélération radiale

accélération méridienne

accélération transverse

# Bille en équilibre dans un anneau en rotation



Référentiel = le laboratoire (fixe)

Repère lié au référentiel:  $Oxyz$

Vitesse angulaire de l'anneau:  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

Coordonnées sphériques:  $r, \theta, \phi$

Contrainte: la bille reste sur l'anneau

$$\begin{cases} r = R, & \dot{r} = 0, & \ddot{r} = 0 \\ \dot{\phi} = \omega, & \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

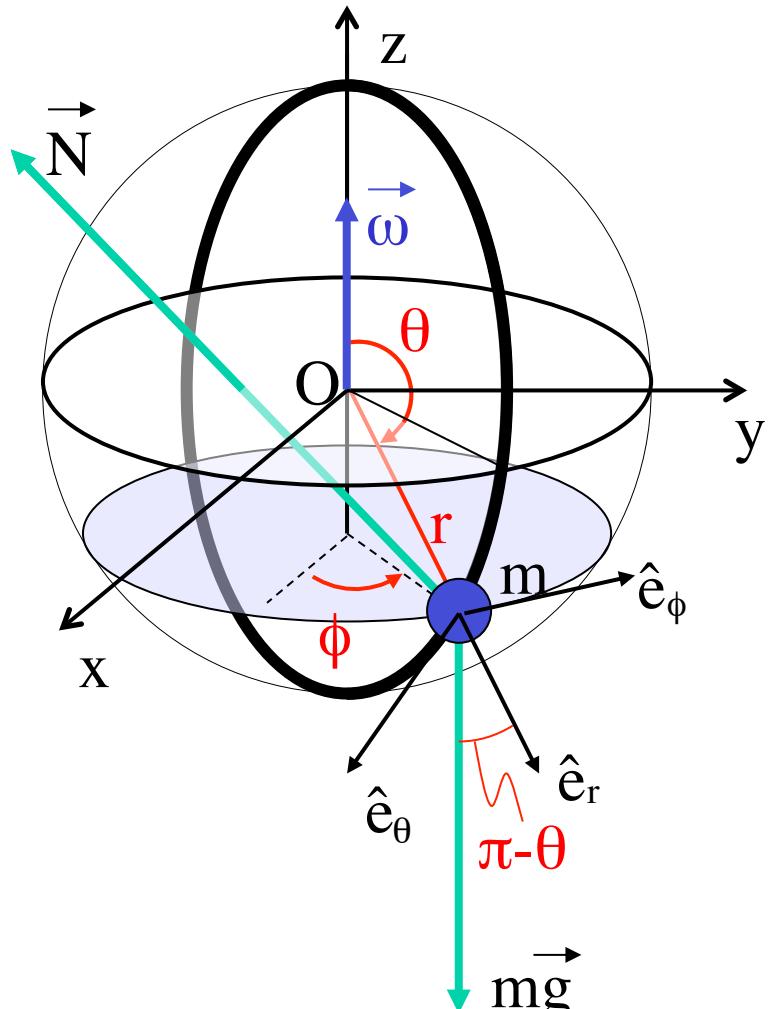
Si bille en équilibre:  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

Repère en mvt avec la bille:  $O\hat{e}_r\hat{e}_\theta\hat{e}_\phi$

Forces s'exerçant sur la bille:

$$\begin{cases} \text{poids de la bille } m\vec{g} = -mg\hat{z} \\ \text{force de liaison } \vec{N} \text{ telle que } \vec{N} \cdot \hat{e}_\theta = 0 \end{cases}$$

# Bille en équilibre dans un anneau en rotation



$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \hat{e}_r \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta) \hat{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos\theta) \hat{e}_\phi \\ &= -R\omega^2 \sin^2\theta \hat{e}_r - R\omega^2 \sin\theta \cos\theta \hat{e}_\theta \\ &\quad \text{car } r = R = \text{cte}, \dot{\phi} = \omega = \text{cte et } \theta = \text{cte (équilibre)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} m\vec{g} = -mg \cos\theta \hat{e}_r + mg \sin\theta \hat{e}_\theta \\ \vec{N} = N_r \hat{e}_r + N_\phi \hat{e}_\phi \end{cases}$$

2ème loi de Newton :  $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \text{sur } \hat{e}_r: N_r - mg \cos\theta = -mR\omega^2 \sin^2\theta \\ \text{sur } \hat{e}_\theta: mg \sin\theta = -mR\omega^2 \sin\theta \cos\theta \\ \text{sur } \hat{e}_\phi: N_\phi = 0 \end{cases}$$

$\sin\theta = 0 \quad (\Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \pi) \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -\frac{g}{R\omega^2} \quad \left( \text{seulement si } |\omega| \geq \sqrt{\frac{g}{R}} \right)$

# Troisième partie: Travail, énergie, forces conservatives et non conservatives, énergie potentielle

## Notions abordées:

- Forces de frottements
- Travail et énergie, théorème de l'énergie cinétique
- Energie potentielle, conservation de l'énergie
- Equilibre et petites oscillations

## Buts:

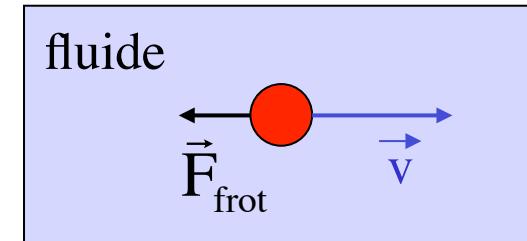
- Comprendre les notions de force conservative et d'énergie potentielle

# Forces de frottement (ou friction)

- Forces exercées sur un corps par:
  - le fluide (gaz ou liquide) dans lequel il se déplace
  - tout autre corps avec lequel il est en contact et par rapport auquel il se déplace (ou pourrait se déplacer).
- Ces forces s'opposent au mouvement du corps:
$$\vec{F}_{\text{frot}} = -f(v) \hat{v}, \quad f(v) > 0$$
- Elles résultent d'un grand nombre de phénomènes microscopiques (interactions entre molécules), complexes à décrire:
  - Exemple: frottement de l'air sur un avion
    - A priori on devrait pouvoir décrire cette situation comme une succession d'un grand nombre de « chocs » entre l'avion et les molécules d'air ...
    - ... mais ceci supposerait qu'on puisse déterminer les trajectoires de toutes les molécules d'air, ce qui est irréaliste
- On décrit donc les forces de frottement par des lois empiriques:
  - Tirées de l'expérience
  - Non fondamentales
  - Approximatives et pas toujours applicables

# Forces de frottement visqueux

- Solide en mouvement dans un fluide:
  - On distingue plusieurs régimes en fonction de la vitesse  $v$  par rapport au fluide
- A très basse vitesse ( $< 5$  m/s dans l'air) en régime laminaire:



$$\vec{F}_{\text{frot}} = -k \eta \vec{v}$$

$$k = 6\pi R \quad \begin{cases} \text{pour boule} \\ \text{de rayon } R \end{cases}$$

Loi de Stokes

- $k$  = coefficient caractéristique de la géométrie du solide
- $\eta$  = coefficient de viscosité du fluide (dépend de la température)

	0°C	20°C	40 °C
$\eta(\text{air})$	$0.017 \cdot 10^{-3}$	$0.018 \cdot 10^{-3}$	$0.019 \cdot 10^{-3}$
$\eta(\text{eau})$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$0.7 \cdot 10^{-3}$
$\eta(\text{glycérine})$		$1490 \cdot 10^{-3}$	

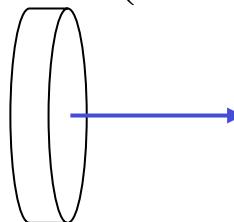
en décaisse =  $\text{N m}^{-2} \text{s} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$

# Forces de frottement visqueux (suite)

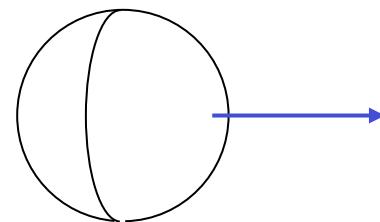
- A plus grande vitesse ( $5 < v < 20$  m/s dans l'air), en régime turbulent:

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -C_x \frac{1}{2} \rho v^2 S \hat{v}$$

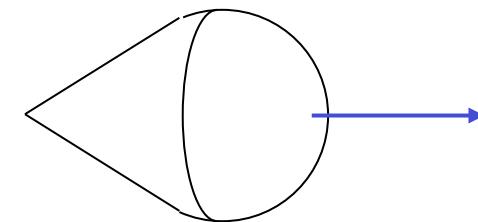
- $\rho$  = masse volumique du fluide
- $S$  = aire du solide selon direction perpendiculaire à la vitesse
- $C_x$  = coefficient de traînée caractérisant la géométrie du solide (sans unité)



disque:  $C_x \approx 1.32$



boule:  $C_x \approx 0.45$



demi-boule+cône:  $C_x \approx 0.04$

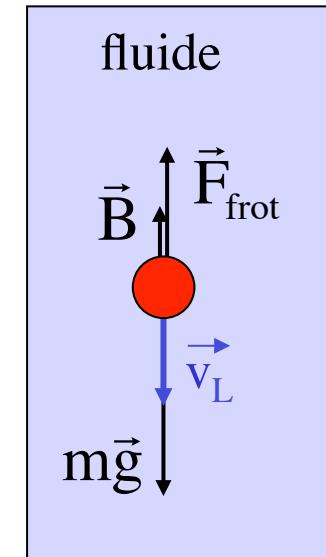
- A très grande vitesse (mais  $<$  vitesse du son):

$$\vec{F}_{\text{frot}} \propto -v^n \hat{v}, \quad n \geq 2$$

# Vitesse limite de chute dans un fluide

- **Principe d'Archimède:**

Un solide dans un fluide subit de la part du fluide une force (**poussée d'Archimède**) dans la direction opposée au poids du corps et égale au poids du volume de fluide déplacé:  $\vec{B} = -m_{\text{fluide}} \vec{g}$



- Lorsque la vitesse limite  $v_L$  (constante) est atteinte:

$$\vec{F}_{\text{frot}} + m\vec{g} + \vec{B} = m\vec{a} = 0 \Rightarrow F_{\text{frot}} = (m - m_{\text{fluide}})g$$

- Pour une boule (rayon  $R$ , masse volumique  $\rho$ ):  $F_{\text{frot}} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_{\text{fluide}})g$

$$\begin{cases} \text{a) régime laminaire (Stokes): } v_L = F_{\text{frot}} / (6\pi R \eta) = \frac{2}{9} g R^2 (\rho - \rho_{\text{fluide}}) / \eta \\ \text{b) régime turbulent : } v_L = \sqrt{F_{\text{frot}} / (0.45 \frac{1}{2} \rho_{\text{fluide}} \pi R^2)} \cong \sqrt{6gR(\rho/\rho_{\text{fluide}} - 1)} \end{cases}$$

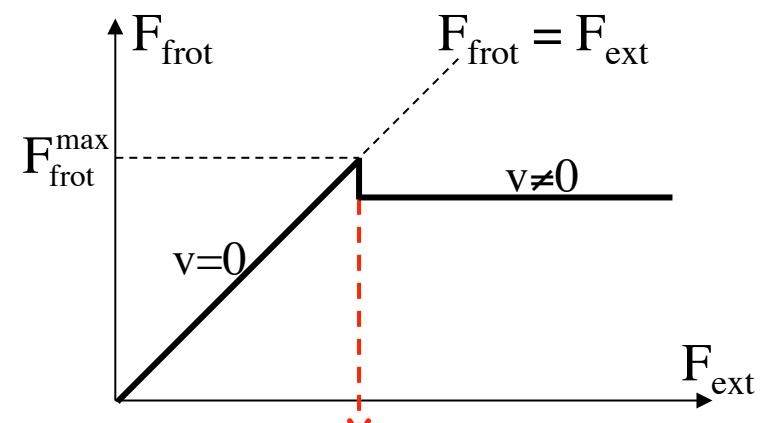
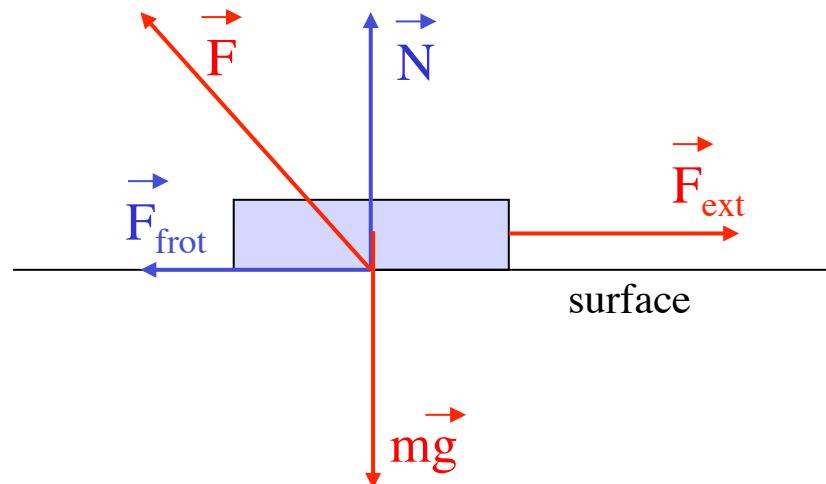
Application  
numérique  
pour un grêlon

$$\begin{cases} R = 5 \text{ mm} \\ \rho_{\text{glace}} = 917 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_{\text{air}} = 1.3 \text{ kg/m}^3 \\ \eta_{\text{air}} = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1} \\ g = 9.8 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

a) 2800 m/s faux (Stokes pas valable)  
b) 14 m/s ~ OK

# Forces de frottement sec

- Force  $F$  exercée par une surface sur un solide :
  - composante normale à la surface  $N$  = réaction (force de liaison)
  - composante tangente à la surface  $F_{\text{frot}}$  = force de frottement sec



Force d'arrachement:  
imminence de glissement

- Il faut distinguer deux cas:

Lois de  
Coulomb

$$\begin{aligned} \text{si } v = 0 : \quad & F_{\text{frot}} \leq F_{\text{frot}}^{\max} = \mu_s N \\ \text{si } v \neq 0 : \quad & \vec{F}_{\text{frot}} = -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v} \end{aligned}$$

$\mu_s$  = coefficient de frottement statique

$\mu_c$  = coefficient de frottement cinétique

# Coefficients de frottement

- Dépendent de:
  - Nature des corps en contact
  - Etat des surfaces (rugueux ou poli, sec ou lubrifié, ...)
  - Température
- En première approximation, ne dépendent pas de:
  - Vitesse (si  $v \neq 0$ )
  - Dimension des surfaces de contact (si surfaces planes)
- Exemples (valeurs indicatives)
- En règle générale
  - $\mu_c < \mu_s$
- Note:
  - Avec un lubrifiant, le frottement peu devenir de type visqueux ...

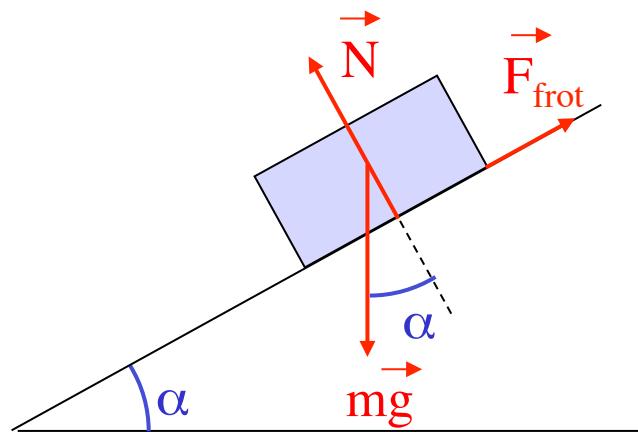
Corps en contact	$\mu_s$	$\mu_c$
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Acier sur acier (gras)	0.10	0.05
Acier sur acier (surfaces polies)	100	100
Bois sur bois	0.5	0.3
Métal sur glace	0.03	0.01
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Cuir sur fonte	0.28	0.56

# Forces de frottement sec (suite)

- Ne dépendent pas de la dimension de la surface de contact:
  - Surface pas parfaitement plane
  - Surface de contact véritable proportionnelle à la charge



- Solide sur plan incliné:



- Cas statique:

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{frot}} + m\vec{g} = 0$$

$\alpha_s$  = angle  $\alpha$  tel que  $F_{\text{frot}} = F_{\text{frot}}^{\max} = \mu_s N$   
(début glissement)

$$\begin{cases} \mu_s N = mg \sin \alpha_s \\ N = mg \cos \alpha_s \end{cases} \Rightarrow \mu_s = \tan \alpha_s$$

- Glissement:

$\alpha_c$  = angle  $\alpha$  tel que  $\vec{v} = \text{constante}$

$$\mu_c = \tan \alpha_c$$

# Forces de frottement sec (suite)

- Barreau oscillant sur roues en rotation de sens opposés

– Quand A ne glisse pas et B glisse:

$$F_A \leq F_A^{\max} = \mu_s N_A \text{ et } F_B = \mu_c N_B$$

$$\vec{v} = \omega R \hat{x} = \text{constante} (\text{car A ne glisse pas})$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{N}_A + \vec{N}_B + m\vec{g} = 0 \\ \sum \vec{M}_{C,i}^{\text{ext}} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{N}_A + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{N}_B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_A - F_B = 0 \\ N_A + N_B - mg = 0 \\ N_A a - N_B b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_A = b mg / L \\ N_B = a mg / L \\ F_A = F_B = \mu_c N_B \end{cases}$$

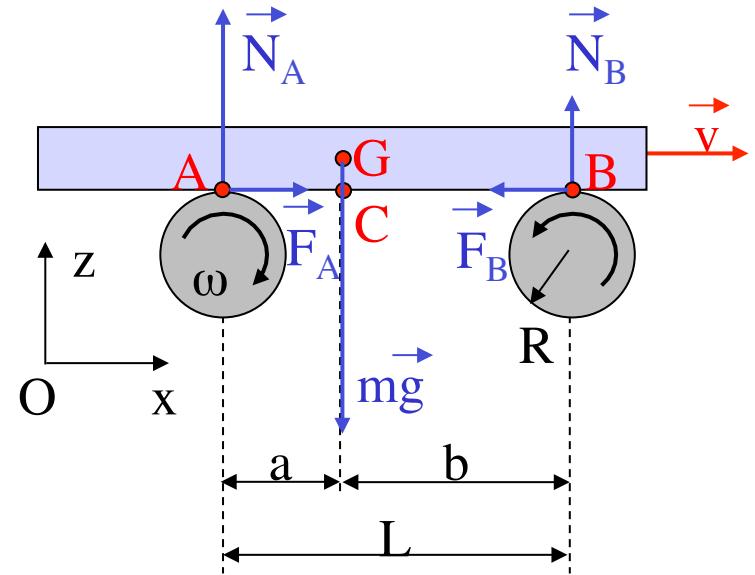
- a,  $N_B$  et  $F_A = F_B$  augmentent alors que b,  $N_A$  et  $F_A^{\max}$  diminuent
- Quand  $F_A = F_A^{\max}$ , A se met à glisser et  $F_A$  diminue soudain de  $\mu_s N_A$  à  $\mu_c N_A$
- La barre est alors accélérée vers la gauche jusqu'à ce que B ne glisse plus

– Quand B ne glisse pas et A glisse:

$$F_B \leq F_B^{\max} = \mu_s N_B \text{ et } F_A = \mu_c N_A$$

$$\vec{v} = -\omega R \hat{x} = \text{constante} (\text{car B ne glisse pas})$$

etc ...



# Impulsion et quantité de mouvement

- Point matériel de masse  $m$  soumis à une force  $\vec{F}$  entre les points ① et ②
- Définition:

$$d\vec{I} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

- Si  $\vec{F}$  est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel (et si  $m=\text{constante}$ )

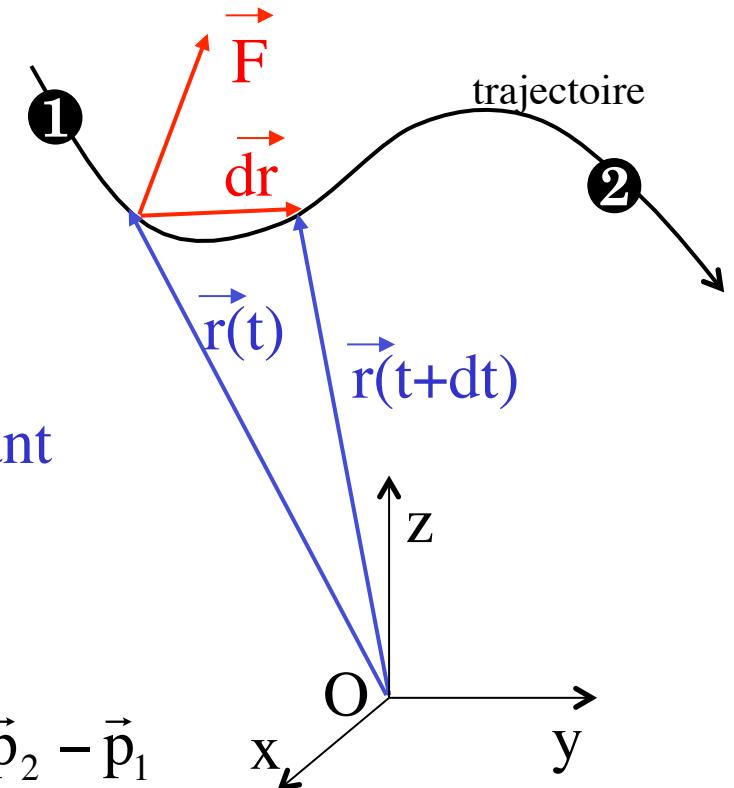
$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{I}_{12} = \int_1^2 m\vec{a} dt = \int_1^2 m d\vec{v} \\ &= \int_1^2 d(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \end{aligned}$$

où on a défini:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Quantité de mouvement

La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la somme des forces



$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Downarrow \text{si } m \text{ constante}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Formulation générale de la 2ème loi de Newton

# Travail et énergie cinétique

- Point matériel de masse  $m$  soumis à une force  $\vec{F}$  entre les points ① et ②

- Définition: **Travail (« Work »)**

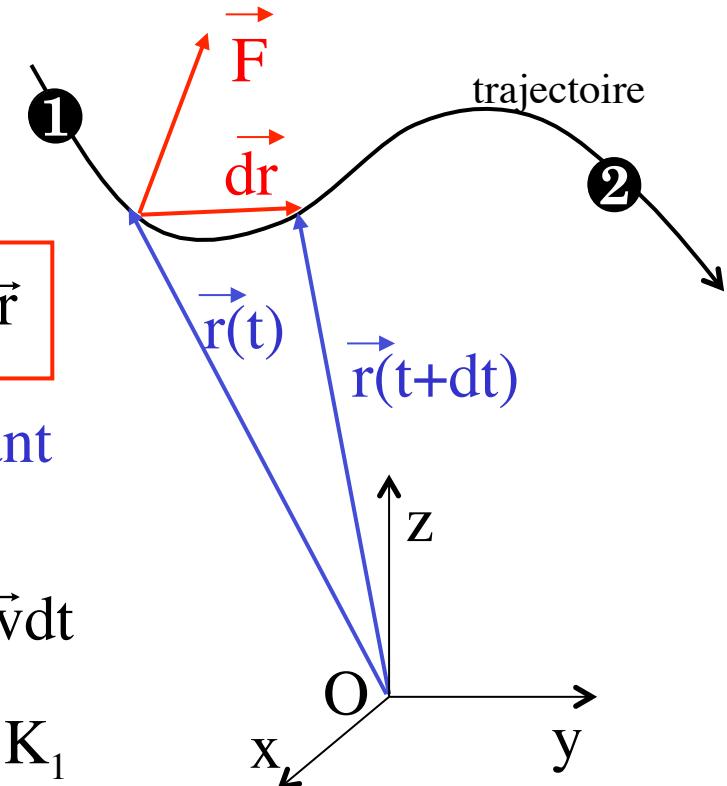
$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Si  $\vec{F}$  est la résultante des forces s'appliquant sur le point matériel (et si  $m=\text{constante}$ )

$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow W_{12} = \int_1^2 m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_1^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) dt = K_2 - K_1 \end{aligned}$$

où on a défini:  **$K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$  Energie cinétique**

La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces



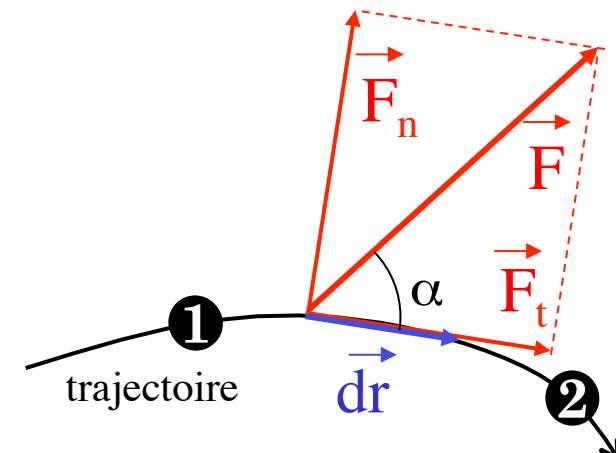
# Travail et puissance d'une force

$$W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \underbrace{\vec{F} \cos \alpha}_{F_t} ds$$

$\int_1^2 \dots$  = intégrale curviligne le long de la trajectoire

$s$  = abscisse curviligne le long de la trajectoire

$$ds = |d\vec{r}|$$



- Seule la composante de  $F$  tangente à la trajectoire ( $F_t$ ) travaille; la composante normale à la trajectoire ( $F_n$ ) ne travaille pas
  - Exemples: la force centripète du mouvement circulaire uniforme ne travaille pas, les forces de liaison (perpendiculaires au déplacement) ne travaillent pas
- Une force dont le point d'application est immobile ne travaille pas:
  - Exemple: force de frottement sur un cylindre roulant sans glisser sur un plan incliné
- Le travail  $\delta W$  a le signe de la projection de  $F$  sur la direction de mouvement:
  - Exemple: le travail d'une force de frottement sec vaut  $W_{12} = -\mu_c N (s_2 - s_1) < 0$

Puissance instantanée d'une force:

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unité de travail:

$$\text{J (Joule)} = \text{N m} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$$

Unité de puissance:

$$\text{W (Watt)} = \text{J/s} = \text{kg m}^2/\text{s}^3$$

# Théorème de l'énergie cinétique

(valable quelle que soit la nature des forces)

- Pour un point matériel:

$$K_2 - K_1 = W_{12} \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Pour un système de points matériels:

- en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chaque point matériel du système, on obtient

$$K_2^{\text{tot}} - K_1^{\text{tot}} = W_{12}^{\text{tot, ext}} + W_{12}^{\text{tot, int}} \Leftrightarrow \frac{dK^{\text{tot}}}{dt} = P^{\text{tot, ext}} + P^{\text{tot, int}}$$

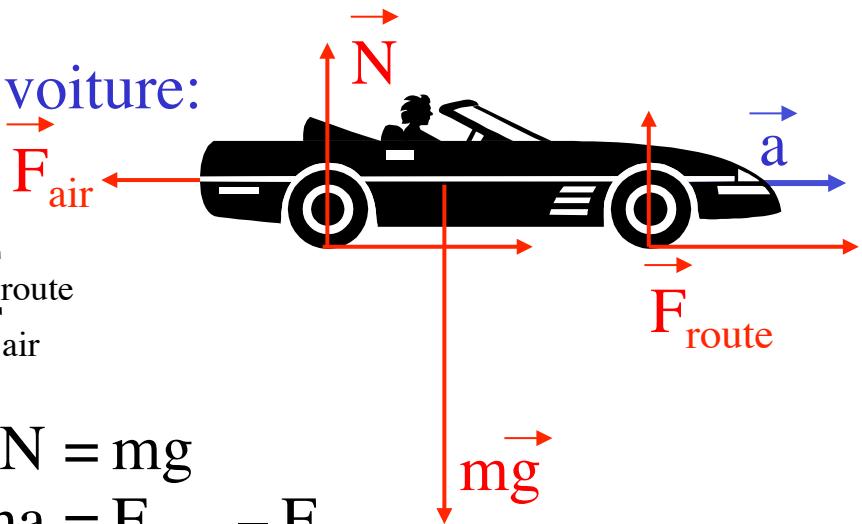
- Attention:
    - les forces internes au système ne peuvent pas être ignorées, car elles peuvent travailler !
  - Note:
    - dans le cas d'un solide, les forces internes ont un travail total nul (voir 6<sup>ème</sup> partie)

démos: roue de vélo, voiture, boule motorisée

# Voiture en accélération

- Forces extérieures s'exerçant sur la voiture:

- Poids  $mg$
- Réaction du sol  $N$
- Frottements de la route sur les roues  $F_{\text{route}}$
- Frottement de l'air sur la carrosserie  $F_{\text{air}}$



- 2ème loi de Newton:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{route}} + \vec{F}_{\text{air}} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} N = mg \\ ma = F_{\text{route}} - F_{\text{air}} \end{cases}$$

**F<sub>route</sub> est responsable de l'accélération mais pas du gain en énergie cinétique !**

- Travail et énergie cinétique:

- $F_{\text{route}}$  ne travaille pas (roulement sans glissement)
- Aucune force extérieure ne travaille sauf  $F_{\text{air}}$
- Le travail de  $F_{\text{air}}$  est négatif et cause une diminution d'énergie cinétique
- Mais l'énergie cinétique augmente ...  
 $\Rightarrow$  il y a des forces internes dont le travail est positif !

$$\frac{dK^{\text{voiture}}}{dt} = \underbrace{P^{\text{tot, ext}}}_{< 0} + P^{\text{tot, int}} > 0$$

# Conservation de l'énergie mécanique

- Si  $W_{12} \neq 0$ , alors l'**énergie cinétique K** n'est pas conservée
- Cependant, dans certains cas particuliers,  $\vec{F}$  ne dépend que de la position et « dérive d'un potentiel », c'est-à-dire qu'il existe une **énergie potentielle  $V(\vec{r})$**  telle que

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2), \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} \partial V(\vec{r}) / \partial x \\ \partial V(\vec{r}) / \partial y \\ \partial V(\vec{r}) / \partial z \end{pmatrix}$$

On dit alors que la force est « conservative ».

- Dans ce cas, on a:  $W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$   
donc:  $K_1 + V(\vec{r}_1) = K_2 + V(\vec{r}_2)$

et l'**énergie mécanique E** est conservée:

$$E = K + V(\vec{r}) = \text{constante}$$

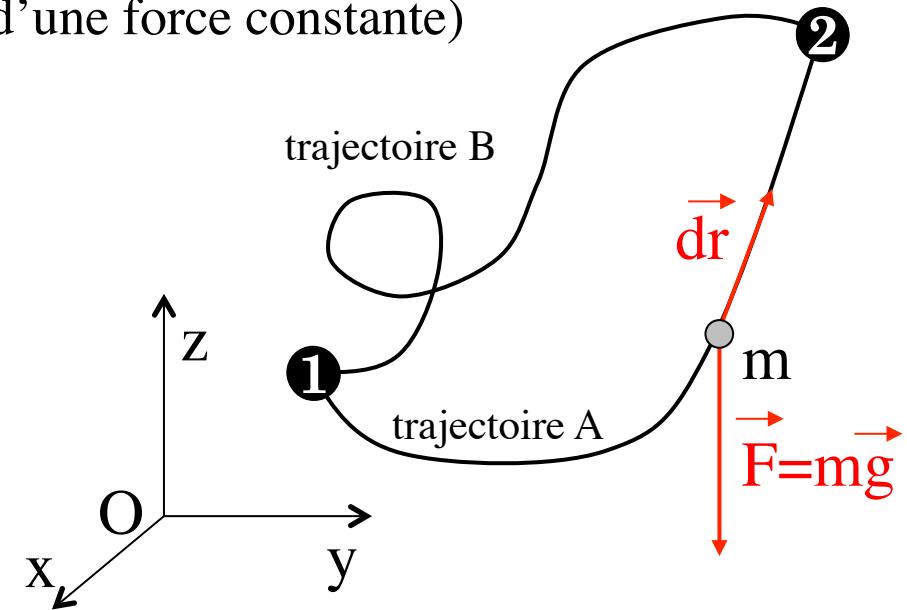
Au tableau

Exemple déjà rencontré:  
Point matériel soumis à  
la pesanteur  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$   
 $E = \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{mgz}_{V(\vec{r})} = \text{cste}$

# Travail de la force de pesanteur

(ou, plus généralement, d'une force constante)

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg \hat{e}_z \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_1^2 mg dz = -[mgz]_1^2 \\ &= mgz_1 - mgz_2 \end{aligned}$$



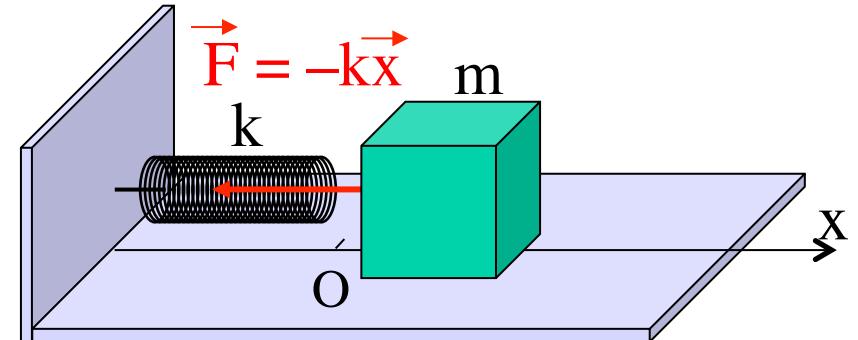
- Le travail ne dépend que des coordonnées z des points 1 et 2; il ne dépend pas de la trajectoire suivie entre ces deux points
- Le travail de la force de pesanteur est nul le long d'une trajectoire fermée quelconque:

$$W_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_2^1 m\vec{g} \cdot d\vec{r} = W_{12} + W_{21} = 0$$

- On écrit:  $\oint m\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0$

# Travail de la force de rappel d'un ressort

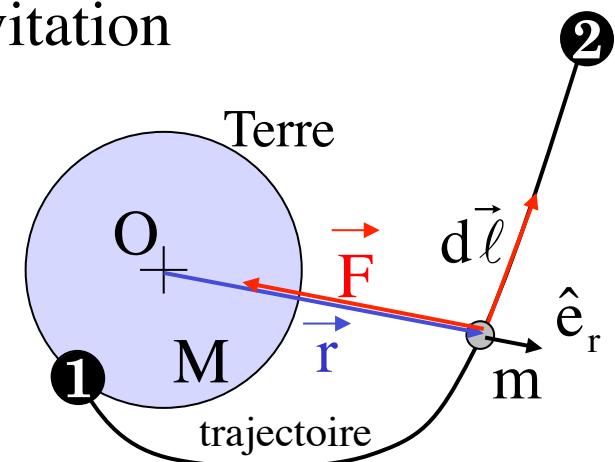
$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -kx \, dx \\ &= -\left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 \end{aligned}$$



## Travail d'une force centrale en $1/r^2$

par exemple force de gravitation

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 -\frac{GmM}{r^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{\ell} \\ &= -\left[ -\frac{GmM}{r} \right]_1^2 = -\frac{GmM}{r_1} + \frac{GmM}{r_2} \end{aligned}$$



- Le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

# Forces conservatives

- Force conservative:

- force  $\vec{F}(\vec{r})$  dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée (quels que soient ces points), et non de la trajectoire entre les deux

- Propriétés:

La force  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$  est conservative

$\Updownarrow$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \forall \text{ courbe fermée}$$

$\Updownarrow$

$$\exists \text{ une fonction } V(\vec{r}) \text{ telle que} \\ \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)], \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$\Updownarrow$

$$\exists \text{ une fonction } V(\vec{r}) \text{ (potentiel)} \\ \text{telle que } \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}), \quad \forall \vec{r}$$

$\Updownarrow$

$$\text{Le champ de force } \vec{F} \text{ est irrotationnel} \\ \text{c'est - à - dire } \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r}) = 0, \quad \forall \vec{r}$$

On dit que la force  $\vec{F}$  dérive du potentiel  $V$

Abus de langage:  
 « potentiel » = énergie potentielle

Notations d'analyse vectorielle :

$$\text{Nabla : " } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} "$$

$$\text{Gradient : } \overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r}) = \vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$\text{Rotationnel : } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r})$$

# Energie potentielle

potentiel dont une force conservative dérive

=

énergie potentielle du point matériel soumis à cette force

- L'énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près
- Elle représente le travail que la force doit fournir pour amener le point matériel à une position de référence arbitraire (où  $V=0$  par définition):

$$V = \int_{\text{position du point matériel}}^{\text{position de référence}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemple de force :

Ressort :  $F = -kx$

Energie potentielle associée :

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Pesanteur :  $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_z$

$$V = mgz + C$$

Gravitation :  $\vec{F} = -\left(GMm/r^2\right)\hat{e}_r$

$$V = -GMm/r + C$$

Centrale :  $\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$

$$V = - \int_0^r F(r') dr' + C$$

Frottement :  $\vec{F} = -f(v)\hat{v}$

aucune (force non conservative)

# Théorème de l'énergie

- Point matériel soumis à:

- des forces conservatives  $\vec{F}_k = -\overrightarrow{\text{grad}} V_k(\vec{r})$
- des forces non conservatives de résultante  $\vec{F}^{\text{NC}}$

- Energie mécanique:

$$E(\vec{r}, \vec{v}) = K(\vec{v}) + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \sum_k V_k(\vec{r})$$

- Entre les points 1 et 2, on a:

$$K_2 - K_1 = W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) + W_{12}^{\text{NC}}$$

$$\Rightarrow E_2 - E_1 = W_{12}^{\text{NC}} \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = P^{\text{NC}} = \vec{F}^{\text{NC}} \cdot \vec{v}$$

**Théorème de l'énergie**

La variation (dérivée) de l'énergie mécanique est égale au travail (à la puissance) des forces non-conservatives

- si seules des forces conservatives travaillent:

E = constante

**Conservation de l'énergie mécanique**

# Lugeur

- Pente suffisante pour luger :

$$\operatorname{tg} \alpha > \mu_c$$

- Point de départ 1:  $z_1 = h, v_1 = 0$

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = mgh$$

- Point d'arrivée 2:  $z_2 = 0, v_2 = ?$

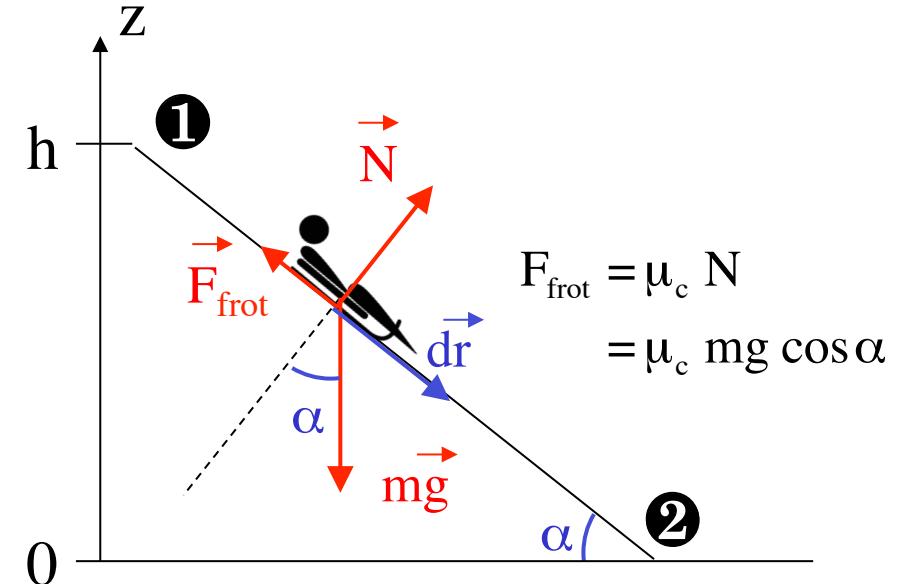
$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

- Théorème de l'énergie:

$$E_2 - E_1 = W_{12}^{\text{NC}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{frot}} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -F_{\text{frot}} ds = -mg \mu_c \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh = -mg \mu_c \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = mgh \left(1 - \frac{\mu_c}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu_c}{\operatorname{tg} \alpha}\right)}$$



# Cylindre oscillant sur plan incliné

- Connus:

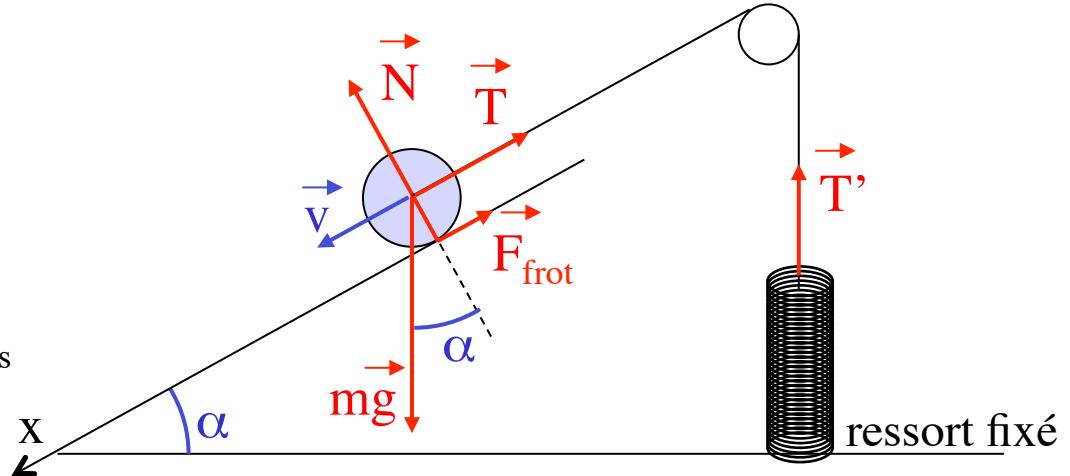
- Masse  $m$  du cylindre
- Rayon  $R$  du cylindre
- Constante  $k$  du ressort
- Coefficient de frottement  $\mu_s$
- Angle  $\alpha$
- Fil et poulie sans masses

- Conditions initiales ( $t=0$ ):

- $x=0, v=0$
- Fil tendu et  $T'=0$

- Question:

- Pourquoi le cylindre finit-il par s'arrêter définitivement ?



$$E = K_{cylindre} + mg(-x \sin\alpha) + \frac{1}{2}kx^2$$

$x_f$  = position finale (équilibre)

$$kx_f = mg \sin\alpha \Rightarrow x_f = (mg/k) \sin\alpha$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_f - E_{t=0} = \left( mg(-x_f \sin\alpha) + \frac{1}{2}kx_f^2 \right) - 0 \\ &= -\frac{1}{2}kx_f^2\end{aligned}$$

= travail des forces non conservatives  
(frottements sur l'axe du cylindre  
et de la poulie, amortissement du  
ressort, ...)

# L'énergie mécanique: intégrale première

Si  $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})$  est une constante, alors, par dérivation:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}) \right) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{dV(\vec{r})}{dt} \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \left( \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \\ &= m\vec{a} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r}) \cdot \vec{v} = (m\vec{a} - \vec{F}) \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a} \end{aligned}$$

- On dit que l'énergie mécanique, si elle est conservée, est une **intégrale première** des équations du mouvement
- On verra que, de manière générale
  - les constantes du mouvement sont des intégrales premières
  - les lois de conservation donnent des équations différentielles faisant apparaître les dérivées premières des variables définissant la position (plutôt que les dérivées secondes comme dans la 2ème loi de Newton)

# Energie d'un oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

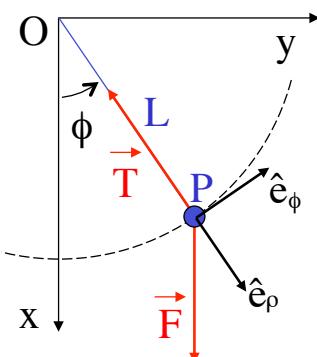
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

énergie cinétique + énergie potentielle = énergie mécanique totale

# Energie d'un pendule

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin\phi \Rightarrow \ddot{\phi}\dot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin\phi \dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{L} \cos\phi\right)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{L} \cos\phi$  est une constante (intégrale première)



Donc:  $\underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2}_{\frac{1}{2}mv^2} - \underbrace{mg L \cos\phi}_{+mg(-x)} = \text{constante}$

énergie cinétique + énergie potentielle = énergie mécanique totale

énergie potentielle dans le champ de pesanteur  
=  $mg \times \text{hauteur}$

# Mouvement rectiligne sous l'action d'une force conservative

- Au lieu de chercher la position  $x(t)$  comme solution de  $F = ma$ , utilisons l'intégrale première donnée par la conservation de l'énergie mécanique:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

- Par intégration:

$$t = \int_0^t dt' = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} = t(x)$$

puis il suffit d'inverser pour trouver  $x(t)$  !

- Exemple 1:  $V(x) = mgx$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E/m - gx'}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{2}{g} \sqrt{E/m - gx'} \right]_{x_0}^x = \frac{\sqrt{2}}{g} (\sqrt{E/m - gx_0} - \sqrt{E/m - gx}) \\ \Rightarrow x = x_0 + \sqrt{2(E/m - gx_0)} t - \frac{1}{2}gt^2$$

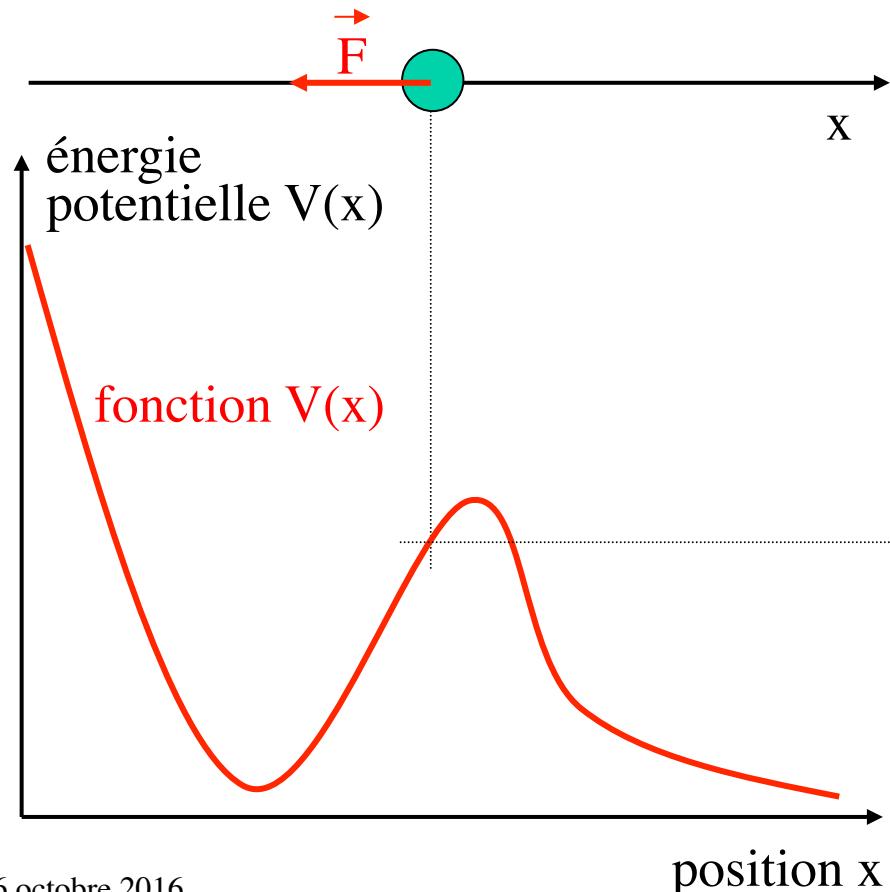
- Exemple 2:  $V(x) = kx^2/2$

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{2E/k - x'^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[ \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} x' \right) \right]_{x_0}^x \Rightarrow \omega t = \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) - \varphi_0 \\ \Rightarrow x = \sqrt{2E/k} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

# Mouvement rectiligne dans un potentiel

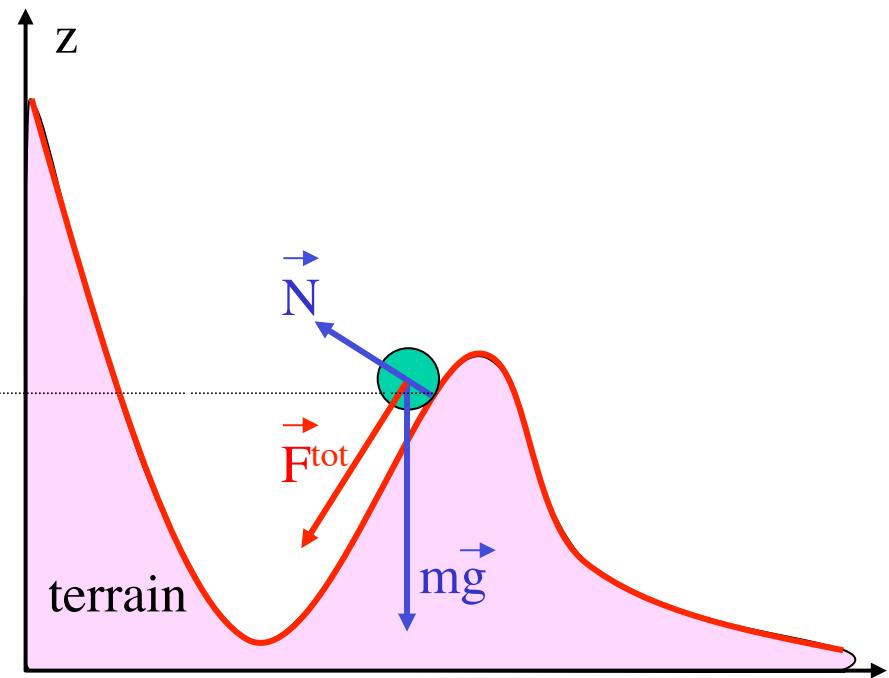
- Situation considérée:

- Point matériel se déplaçant sur un axe  $x$  et soumis à une force conservative  $F_x = -dV(x)/dx$

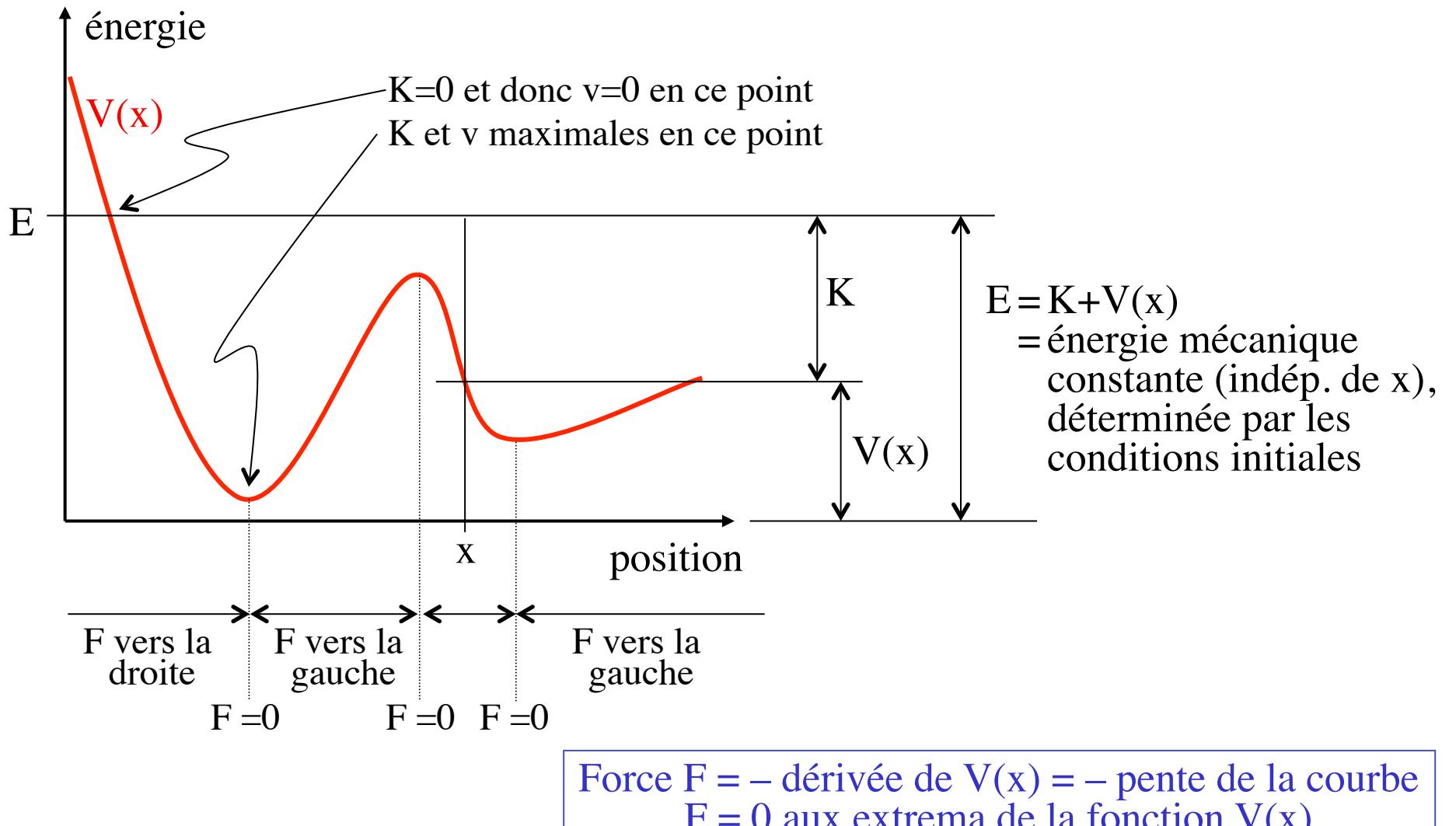


- Image (pour mieux comprendre):

- Bille soumise à son poids et contrainte à se déplacer (sans frottement) sur un relief donné par  $z(x) = V(x)/mg$
- Dans ce cas  $V(x) = mgz$  est l'énergie potentielle de cette bille dans le champ de pesanteur !



# Mouvement rectiligne dans un potentiel: discussion qualitative

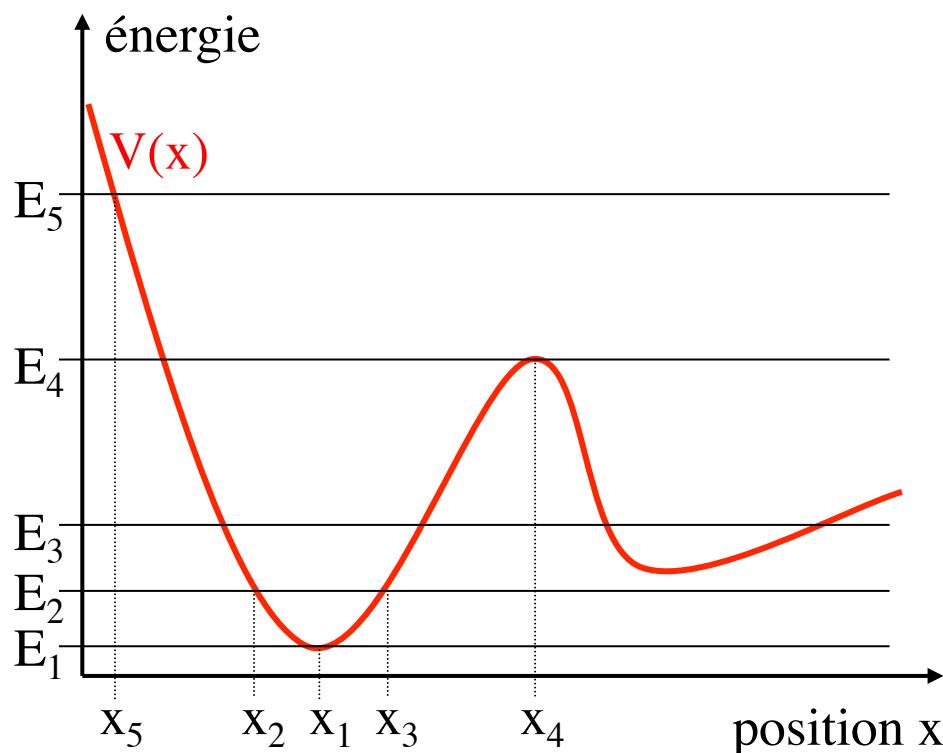


# Mouvement rectiligne dans un potentiel: discussion qualitative

Condition:

$$K = E - V(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E \geq V(x)$$

$\Rightarrow$  les positions  $x$  telles que  $V(x) > E$  sont inaccessibles

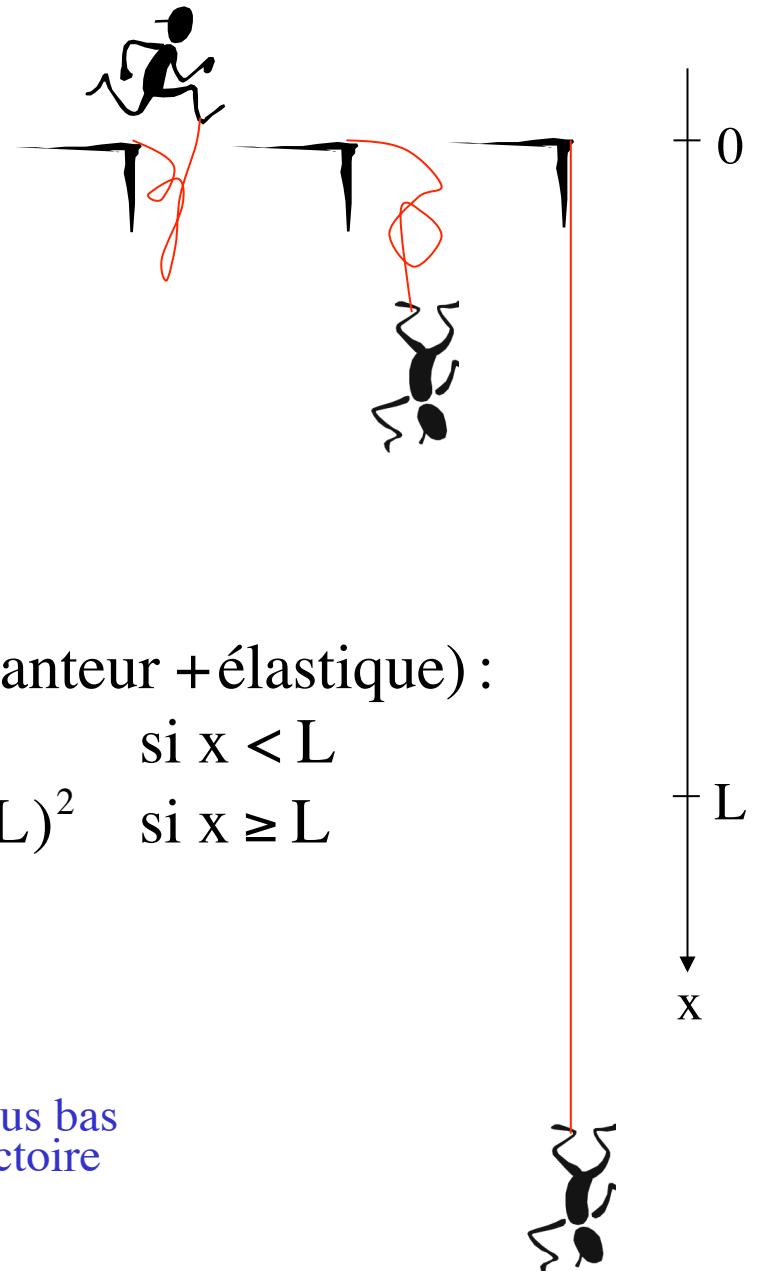


Cas particuliers:

- Si  $E = E_1$ :  
 $x = x_1$  constante;  
 $x_1$  = point d'équilibre ( $F=0$ ,  $v=0$ )
- Si  $E = E_2$ :  
oscillations entre  $x_2$  et  $x_3$ ;  
 $x_2$ ,  $x_3$ : points d'arrêt ( $v=0$ )
- Si  $E = E_3$ :  
deux plages en  $x$  permises, séparées par une « barrière de potentiel » (infranchissable en mécanique classique)
- Si  $E = E_4$ :  
position d'équilibre instable en  $x = x_4$  ( $F=0$ ,  $v=0$ )
- Si  $E = E_5$ :  
 $x > x_5$ ;  
le point matériel part à l'infini

# Saut à l'élastique

- Conditions initiales (début du saut):
  - $x = 0, v = 0$
- Chute libre (élastique détendu):
  - $0 < x < L$  = longueur de l'élastique à vide
- Chute « assistée » (élastique tendu):
  - $x > L$



# Equilibre et petites oscillations

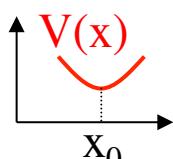
- L'étude de la fonction  $V(x)$  permet de déterminer les points d'équilibre, ainsi que les fréquences des petites oscillations autour des points d'équilibre stables

$$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0 \text{ est un point d'équilibre}$$

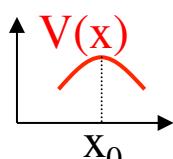
- Développement limité autour d'un point d'équilibre  $x_0$  (pour  $x$  proche de  $x_0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x) \approx V(x_0) + \underbrace{\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0}}_{=0} (x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0}}_{=k(x_0)} (x - x_0)^2 = V(x_0) + \frac{1}{2} k(x_0) (x - x_0)^2 \\ F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \approx -k(x_0) (x - x_0) \end{array} \right.$$

- Deux cas importants:



$k(x_0) = \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} > 0 :$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre stable, garanti par une force de rappel} \\ \Rightarrow \text{petites oscillations harmoniques autour de } x_0 \\ \text{de pulsation } \omega = \sqrt{k(x_0)/m} \end{array} \right.$



$k(x_0) = \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} < 0 :$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre instable : si le point matériel ne se} \\ \text{trouve pas exactement en } x_0, \text{ il part loin de } x_0 \end{array} \right.$

# Equilibre et petites oscillations: exemple 1

- Point matériel attaché à une tige rigide de longueur  $L$ , soumis à son poids  $mg$  et restant dans un plan vertical:

Coordonnée curviligne =  $s = L\phi$

Energie potentielle =  $V = -mgx = -mgL \cos\phi = -mgL \cos(s/L)$

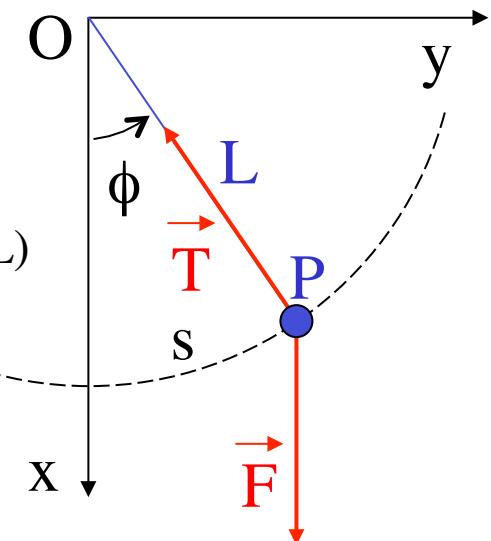
- Recherche des positions d'équilibre:

$$\frac{dV(s)}{ds} = mg \sin(s/L) \quad \text{et} \quad \left. \frac{dV}{ds} \right|_{s=s_0} = 0 \Rightarrow s_0 = 0 \text{ ou } \pi L$$

$$\frac{d^2V(s)}{ds^2} = \frac{mg}{L} \cos(s/L)$$

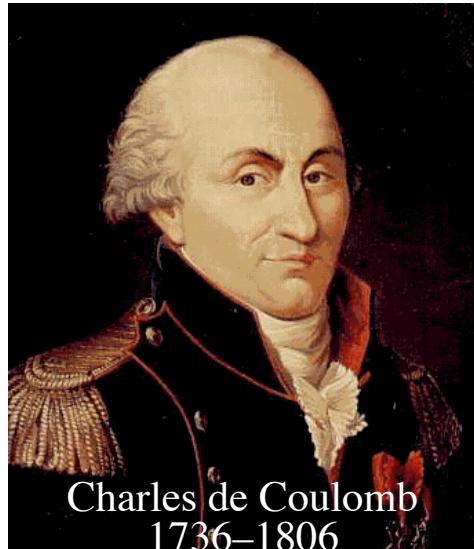
$$\Rightarrow \left. \frac{d^2V}{ds^2} \right|_{s=s_0} = \begin{cases} \frac{mg}{L} > 0 & \text{si } s_0 = 0 \\ -\frac{mg}{L} < 0 & \text{si } s_0 = \pi L \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{équilibre stable en } s_0 = 0 \\ \text{équilibre instable en } s_0 = \pi L \end{array}$$

- Pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable en  $s_0=0$ :



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2V}{ds^2} \right|_{s=s_0}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

## Quelques mots sur les forces électriques et magnétiques (l'électromagnétisme sera traité en détail au cours de phys. générale de 2ème année)



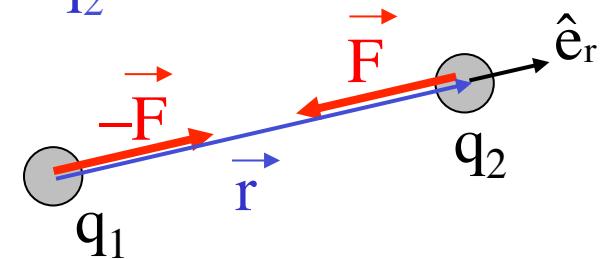
démo: électromètre

### Force électrostatique

- Force exercée entre deux points matériels, immobiles, séparés par une distance  $r$ , et de charges électriques  $q_1$  et  $q_2$ :

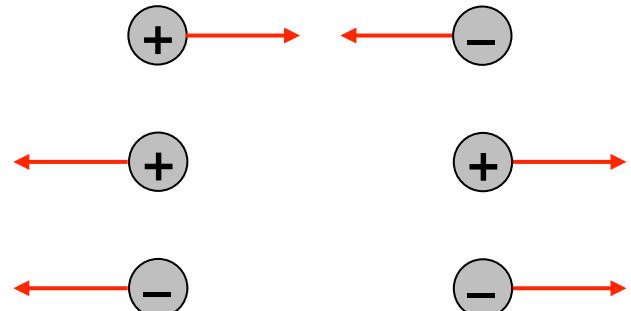
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r$$

**Loi de Coulomb**



- Les charges électriques peuvent être positives ou négatives
  - Charges de signes opposés: force attractive
  - Charges de mêmes signes: force répulsive
- Dimensions:
  - unité de charge électrique: le Coulomb (C)
  - $\epsilon_0$  = constante physique (permittivité du vide)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$



# Forces gravifique et électrostatique: analogie

- Force entre deux masses M et m:

– Gravitation universelle de Newton

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

–  $F \propto 1/r^2$

– Toujours attractive ( $m, M > 0$ )

– Force centrale conservative dérivant de

$$V_{\text{gravifique}}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

- Champ de gravitation produit par M:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Force ressentie par une masse m dans un champ de gravitation g:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

- Force entre deux charges Q et q:

– Loi de Coulomb électrostatique

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

–  $F \propto 1/r^2$

– Attractive ou répulsive ( $q, Q > 0$  ou  $< 0$ )

– Force centrale conservative dérivant de

$$V_{\text{Coulomb}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$$

- Champ électrique produit par Q:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

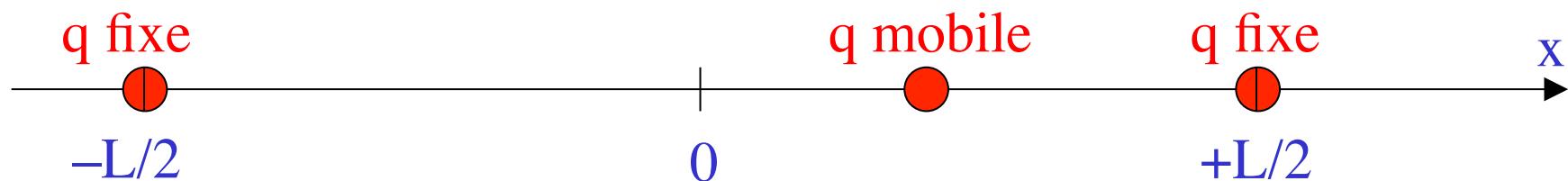
- Force ressentie par une charge q dans un champ électrique E:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Note: la notion de champ permet de rendre de compte d'une interaction à distance

## Equilibre et petites oscillations: exemple 2

- Charge mobile  $q$  de masse  $m$ , contrainte à rester sur l'axe  $x$ , entre deux charges  $q$  fixes séparées par une distance  $L$ :



$$\text{Energie potentielle } = V(x) = \frac{C}{L/2+x} + \frac{C}{L/2-x} \quad \text{où } C = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$$

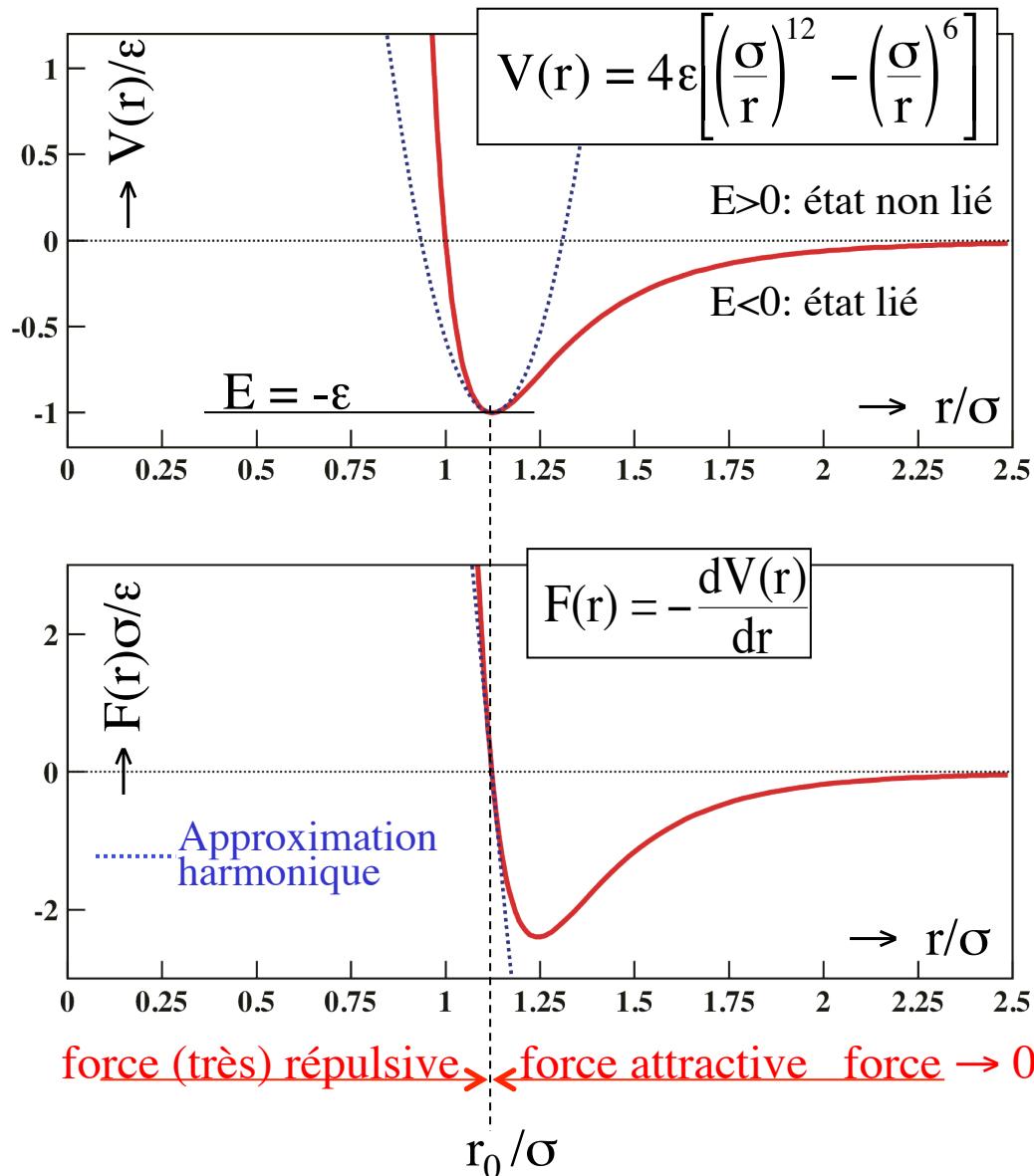
$$\frac{dV}{dx}(x) = -\frac{C}{(L/2+x)^2} + \frac{C}{(L/2-x)^2} \quad \text{et} \quad \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}(x) = \frac{2C}{(L/2+x)^3} + \frac{2C}{(L/2-x)^3} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{32C}{L^3} > 0$$

- Equilibre stable en  $x=0$
- Pulsation des petites oscillations:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0}} = \sqrt{\frac{32C}{L^3 m}} = \sqrt{\frac{8q^2}{\pi\epsilon_0 L^3 m}}$$

# Potentiel de Lennard-Jones



Forme empirique pour décrire l'interaction de:

- deux molécules de gaz (force centrale de Van der Waals)
- deux atomes dans une molécule

(résulte de forces électriques entre les noyaux et électrons des atomes)

$r$  = distance entre les deux objets

Position d'équilibre stable à  $r = r_0$ :

$$F(r_0) = -\frac{dV(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow r_0 = \sqrt[6]{2} \sigma$$

$$V(r_0) = -\epsilon ; \quad \frac{d^2V(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_0} = \frac{72\epsilon}{r_0^2} > 0$$

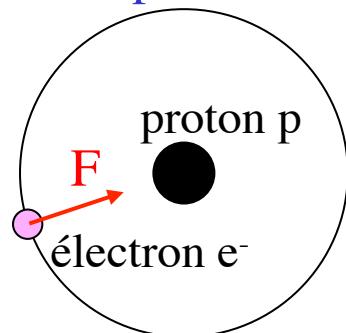
$\epsilon$  = énergie de liaison

2 molécules  $H_2$ :  $r_0 \sim 3.2 \text{ \AA}$   
2 atomes H (=molécule  $H_2$ ):  $r_0 \sim 0.74 \text{ \AA}$

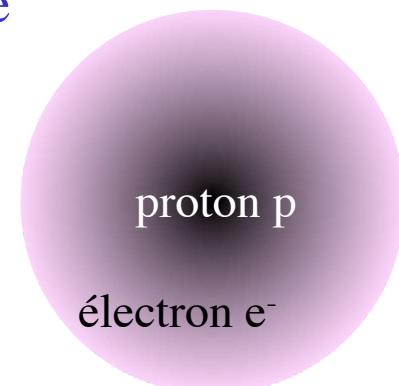
$$(1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m})$$

# Force, potentiel et passage au monde quantique

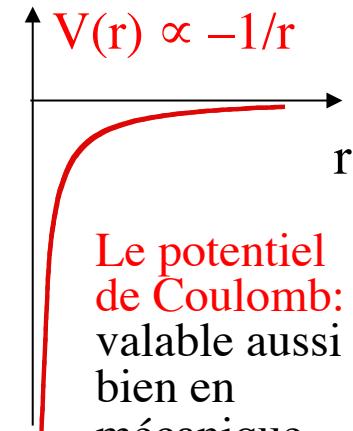
- En mécanique classique, les forces sont utilisées pour décrire les **interactions entre les corps**:
  - Concept de force introduit/découvert par Newton
    - 3 lois de la dynamique + loi de la gravitation universelle + loi de Coulomb, ...
- Le concept de force n'est pas bien adapté pour décrire les **interactions entre particules de matière** au niveau microscopique, où la mécanique quantique doit être utilisée:
  - Difficulté avec la notion de trajectoire (!), donc avec celle de force
  - Par contre, la notion de potentiel subsiste et reste très utile; toutes les « interactions fondamentales » sont conservatives et dérivent d'un potentiel
  - Exemple: l'atome d'hydrogène



Vision classique de l'atome H:  
la force est centrale en  $1/r^2$ ,  
la trajectoire de l'électron est  
une conique ( cercle ou ellipse)



Vision quantique de l'atome H:  
la trajectoire n'est pas définie,  
on raisonne sur les probabilités  
de présence de l'électron



Le potentiel  
de Coulomb:  
valable aussi  
bien en  
mécanique  
quantique  
que classique

# Quatrième partie: Gravitation, moment cinétique

Notions abordées:

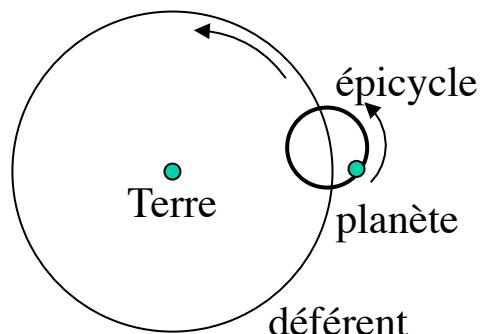
- Lois de Kepler
- Force centrale et moment cinétique
- Loi de la gravitation universelle de Newton
- Champ de gravitation
- Mouvements de Kepler

But:

- Découvrir la conservation du moment cinétique

# Mouvement des corps célestes (Grèce antique)

- Eudoxe de Cnide (405–355 av. J-C), Aristote (384–322 av. J-C)
  - Soleil et planètes sur des sphères concentriques centrées sur la Terre
- Aristarque de Samos (310–230 av. J-C)
  - Terre en rotation sur elle-même
  - Terre et planètes sur des orbites circulaires autour du Soleil  
(idées en contradiction avec l'époque, ne parviennent pas à s'imposer)
- Ptolémée (~100 – ~170 ap J-C), inspiré par Hipparque (~140 av J-C)
  - Terre au centre, Soleil à vitesse constante sur un cercle légèrement décentré
  - Planètes à vitesse constante sur des cercles (épicycles) dont les centres sont à vitesse constante sur d'autres cercles (différents) centrés sur la Terre



Les modèles géocentriques de Ptolémée ou d'Aristote ont prévalu pendant tout le Moyen Âge jusqu'au 16ème siècle !

# Nicolas Copernic (1473-1543)

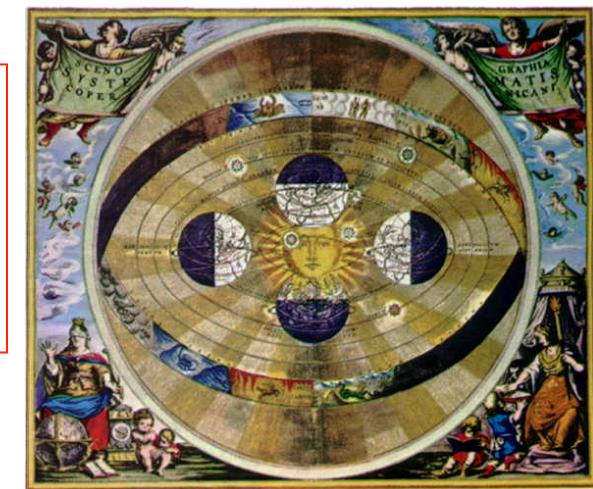
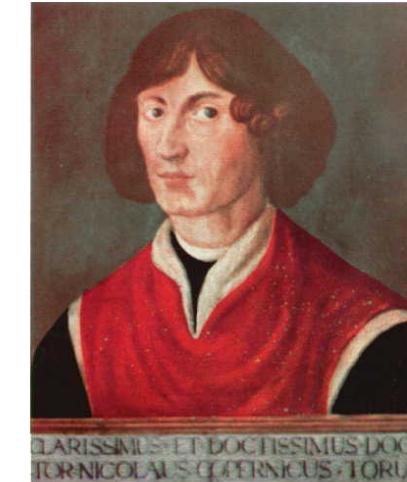
polonais

- *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543)
  - Modèle héliocentrique (inspiré par Aristarque)
  - Remet en question la vision géocentrique et le « modèle des deux sphères concentriques » (la sphère terrestre et la sphère des étoiles fixes)



Révolution de pensée:  
la Terre (et donc l'humain)  
n'est plus le centre de  
l'Univers !

⇒ conflit avec l'Eglise



Qualitativement, explication plus simple du mouvement des planètes (mouvement rétrograde expliqué par le mouvement de la Terre)  
... mais toujours des cercles !

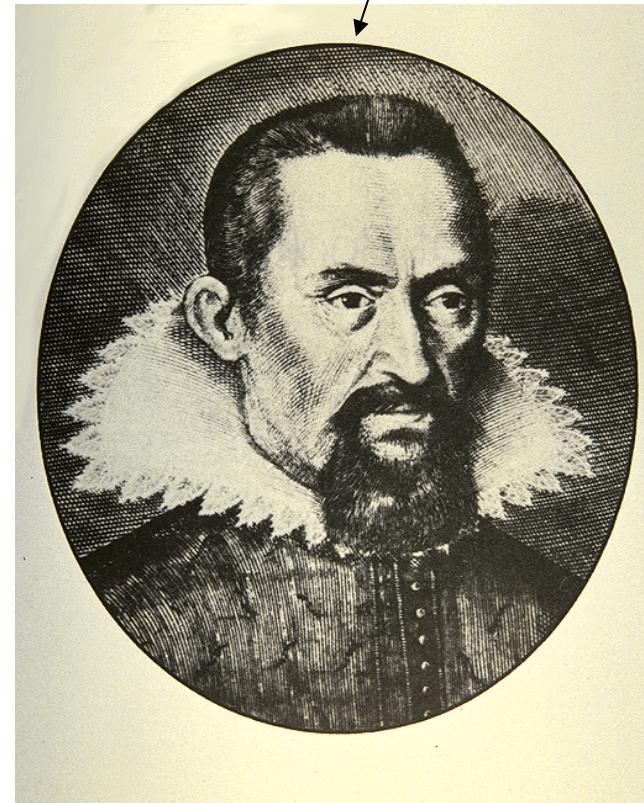
« ... le mouvement des corps célestes est circulaire. En effet, la mobilité propre de la sphère est de tourner en rond: par cet acte même [...] elle exprime sa forme, celle du corps le plus simple ... »

# Tycho Brahe (1546–1601), Johannes Kepler (1571–1630)

danois

- Tente de réconcilier les points de vue de l'Eglise et de Copernic (Soleil tourne autour de la Terre immobile et planètes tournent autour du Soleil)
- Réalise l'importance de faire des mesures précises du mouvement des planètes (approche scientifique)
- Consacre de nombreuses années à l'observation et la mesure des mouvements planétaires

allemand



- Partisan du système héliocentrique de Copernic
- Poursuit l'analyse des mesures du mouvement de Mars faite(s) par son maître et ami Tycho Brahé
- Remarque que si l'orbite de Mars est un cercle, le Soleil ne peut pas se trouver au centre de ce cercle ... et finalement que l'orbite de Mars n'est pas un cercle



## Lois de Kepler

- 2ème loi: (lois des aires, 1609)  
Le rayon-vecteur du Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux.
- 1ère loi: (1609)  
Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- 3ème loi: (1619)  
Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels au cube des grands axes:

$$\frac{(\text{période})^2}{(\text{grand axe})^3} = \text{constante}$$

Découverte pour la planète Terre en supposant une orbite circulaire avec le Soleil près du centre

Découverte en 1604 pour la planète Mars en supposant la loi des aires

Note:

Rapport des axes de l'ellipse:

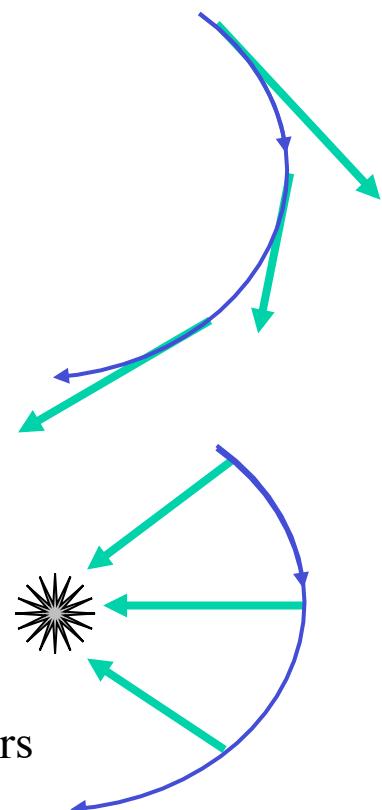
0.996 pour Mars

0.99986 pour la Terre

# Galilée (1564–1642), Newton (1642–1727)

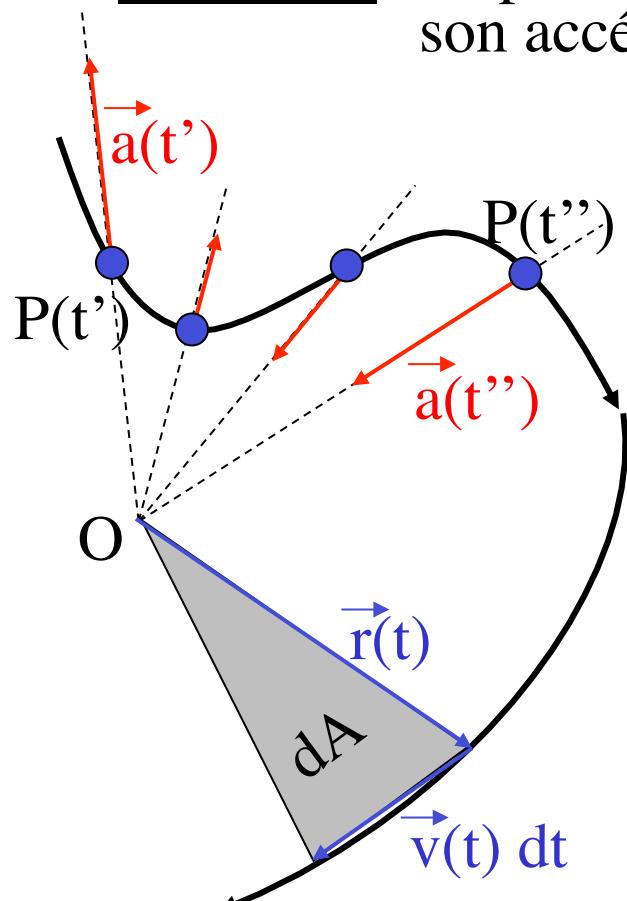
## et le développement de la dynamique

- Qu'est-ce qui fait bouger les planètes ?
    - Avant Galilée/Newton:
      - Le mouvement « naturel » d'un corps est l'immobilité
      - Une planète doit constamment être poussée ou tirée (par un ange !) dans la direction de son mouvement, autrement elle s'arrête
    - Après Galilée/Newton:
      - Le mouvement « naturel » d'un corps est rectiligne uniforme; une planète dévie de sa ligne droite si une force non tangentielle agit sur elle
  - Newton tire les conséquences des lois de Kepler:
    - ❶ La 2ème loi et la planéité de l'orbite implique que la force (et donc l'accélération) subie par une planète pointe toujours vers le Soleil:  
⇒ cette **force centrale attractive** est exercée par le Soleil (voilà notre ange !)
    - ❷ En utilisant de plus la 3ème loi, Newton montre que la force est **proportionnelle à  $1/r^2$**  ( $r$  = distance Soleil-planète)
    - ❸ A partir de là, il prédit une **trajectoire elliptique** ! (1ère loi)
- loï de la gravitation universelle



# Mouvement central et loi des aires

Définition: un point P de masse m a un **mouvement central** si son accélération passe toujours par un même point O  
 $\Leftrightarrow \vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$  reste toujours parallèle à  $\vec{a}(t)$



## Conséquences:

- Le vecteur **moment cinétique**  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$  reste **constant** et le mouvement est plan:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\vec{a} = 0$$

- L'aire balayée par unité de temps par le vecteur  $\vec{r}(t)$  est constante (loi des aires):

$$dA = \frac{1}{2} r v dt \sin(\vec{r}, \vec{v}) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}| = \frac{L}{2m}$$

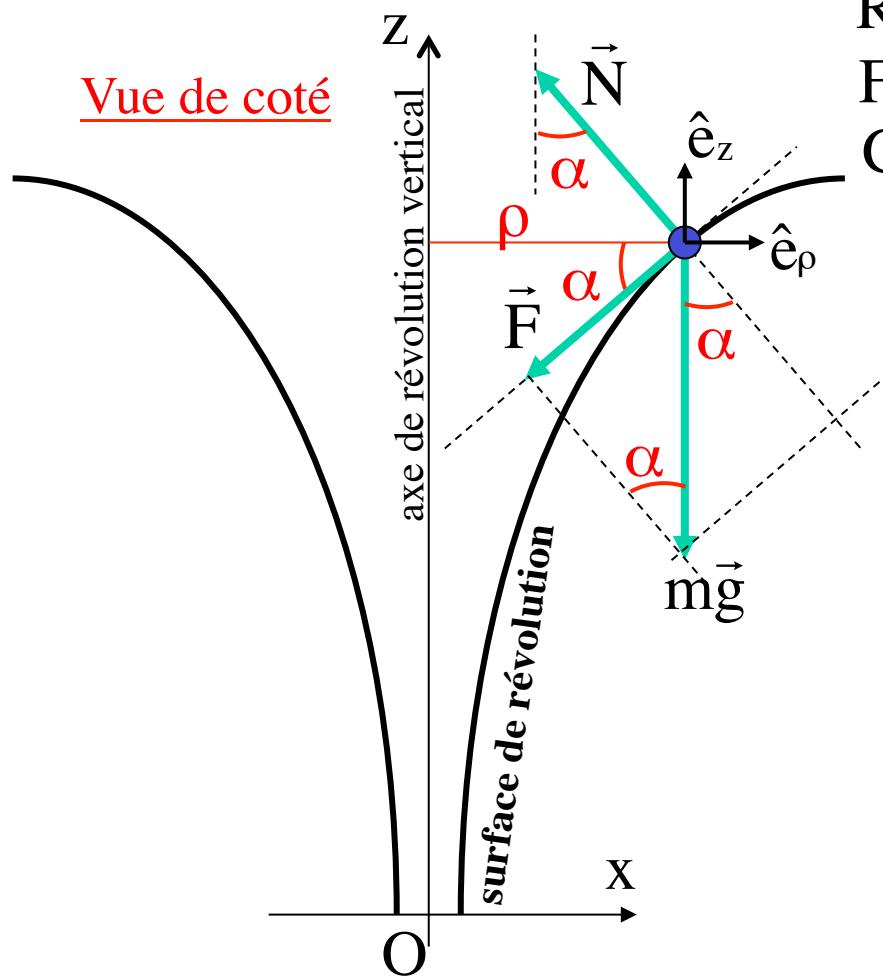
<b>Mouvement central</b>	$\Leftrightarrow$	<b>Moment cinétique constant</b>	$\Leftrightarrow$	<b>Loi des aires + mouvement dans un plan</b>
--------------------------	-------------------	----------------------------------	-------------------	---

par rapport à un certain point O fixe

# Mouvement central (demos)

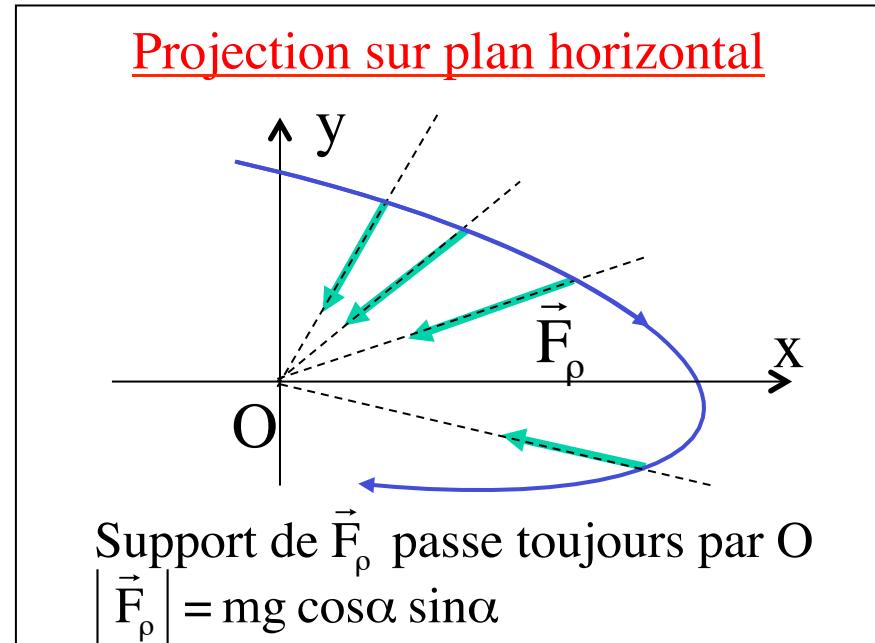
demos: projection dans un plan horizontal du mouvement d'une bille soumise à son poids et astreinte à se déplacer sur une surface de révolution d'axe vertical

Vue de côté



Repère associé aux coord. cylindr.:  $\hat{e}_\rho \hat{e}_\phi \hat{e}_z$   
 Force totale  $\vec{F} = \vec{mg} + \vec{N} = F_\rho \hat{e}_\rho + F_z \hat{e}_z$   
 Composante horizontale:  
 $F_\rho = \vec{F} \cdot \hat{e}_\rho = -mg \cos\alpha \sin\alpha$

Projection sur plan horizontal



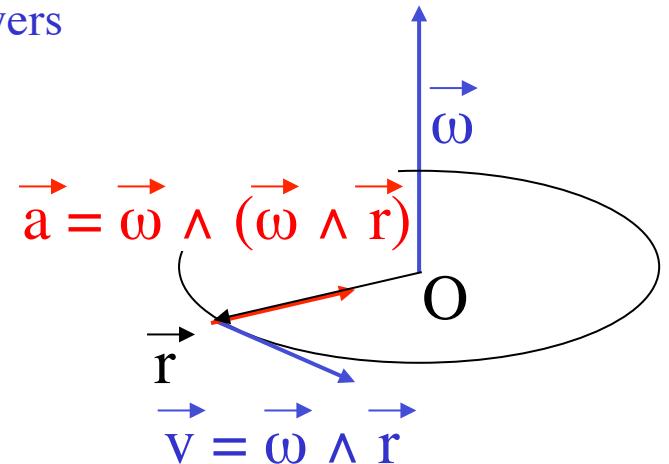
Au tableau

## « Découverte » de la force en $1/r^2$

(dans le cas particulier d'une orbite circulaire de rayon  $r$ )

NB: le cercle est une ellipse de grand (petit) demi-axe  $r$   
et son centre est l'un ou l'autre des foyers

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{r} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ &= m(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - m(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} = mr^2\vec{\omega}\end{aligned}$$



- 2ème loi de Kepler (loi des aires):

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \text{cste} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{cste} \Rightarrow v = \omega r = \text{cste} \\ &\Rightarrow \text{mouvement circulaire uniforme}\end{aligned}$$

- 3ème loi de Kepler:

$$(\text{période})^2 = T^2 = C r^3$$

où  $C$  est une constante

$$\text{On pose } \chi_s = \frac{4\pi^2}{C}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\chi_s}}$$

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = \frac{m}{r} \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2$$

$$= \frac{m}{r} \frac{(2\pi r)^2}{C r^3} = \frac{4\pi^2 m}{C} \frac{1}{r^2}$$

$$= \chi_s m \frac{1}{r^2}$$

# Les planètes, la lune et la pomme

- Newton postule que tous les corps exercent l'un sur l'autre une force similaire à celle du Soleil sur une planète:

- Exemple: la Terre attire aussi bien la Lune qu'une pomme, et donc la Lune « tombe » en chute libre de la même manière que la pomme



Gotlib

- Vérification du postulat (1666):

- A la surface de la Terre de rayon  $R$ , la pomme de masse  $m$  subit une force donnée par  $mg = \chi_T m / R^2$ , donc  $\chi_T = gR^2$
  - Newton calcule alors la période de révolution  $T$  de la Lune connaissant sa distance  $d$  à la Terre:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{\chi_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{gR^2}}$

... mais le résultat diffère de 15% par rapport à la valeur observée !

Il renonce à publier, jusqu'à ce que, plusieurs années plus tard, la longueur du méridien terrestre soit mesurée correctement (et réduise l'écart de 15% à 1%)

# Action et réaction (3ème loi de Newton)

« A chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée; si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier »

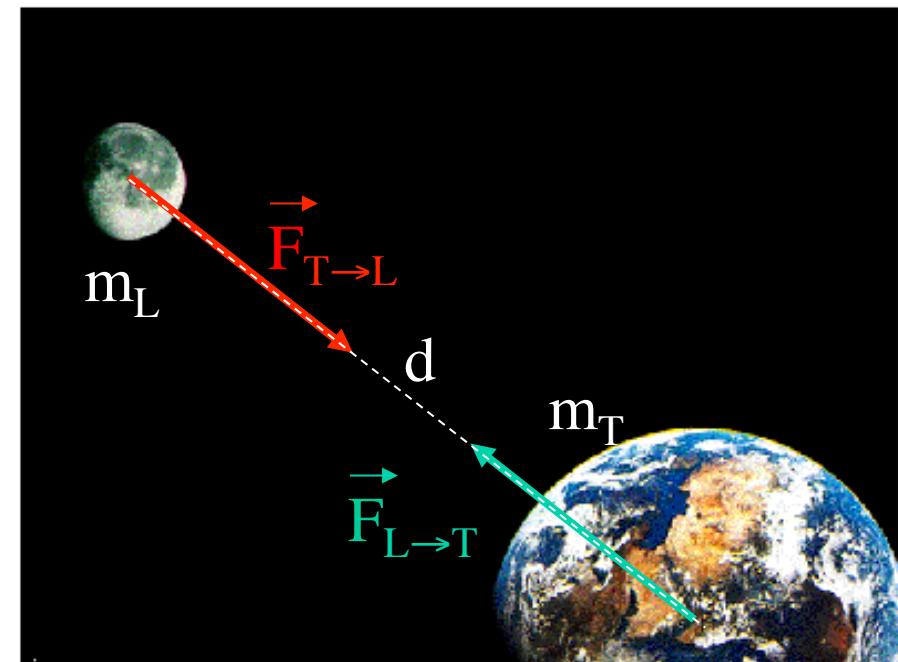
Application aux forces gravifiques:  
cas du système Terre(T)-Lune(L)

$$\vec{F}_{T \rightarrow L} + \vec{F}_{L \rightarrow T} = 0$$

$$F_{T \rightarrow L} = F_{L \rightarrow T}$$

$$\left. \begin{array}{l} F_{T \rightarrow L} = \chi_T m_L \frac{1}{d^2} \\ F_{L \rightarrow T} = \chi_L m_T \frac{1}{d^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_T m_L = \chi_L m_T$$

$$\Rightarrow \frac{\chi_T}{m_T} = \frac{\chi_L}{m_L} = \text{constante universelle indépendante du corps} (= G)$$



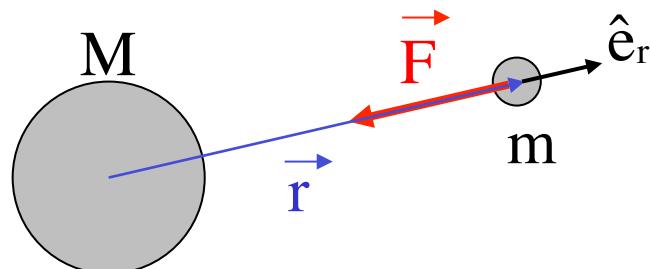
# Loi de la gravitation universelle (Newton)

« Philosophiae Naturalis Principia Mathematica » (1687)

L'interaction de gravitation entre deux corps s'exprime par une force centrale attractive proportionnelle aux masses des deux corps et inversement proportionnelle au carré de leur distance

$$\vec{F} = -G \frac{M m}{r^2} \hat{e}_r = -G \frac{M m}{r^3} \vec{r}$$

$G$  = constante de gravitation universelle



## Notes:

- En pleine cohérence avec les lois de Kepler, cette loi a tout de suite été acceptée
- $G = (6.673 \pm 0.010) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

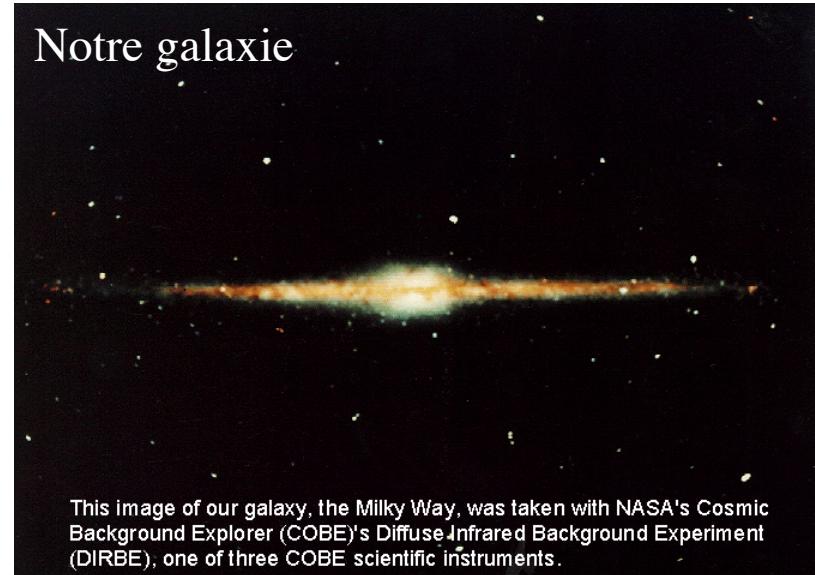


# Et plus loin ...



Andromède

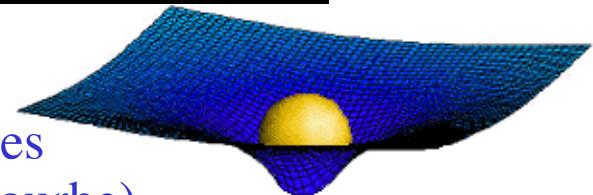
A grande échelle, la structure de l'Univers est complètement dominée par les forces gravitationnelles.



Notre galaxie

## Relativité générale d'Einstein (dès 1915)

- Concept de base:
  - l'espace-temps est déformé par la présence des masses (et les corps suivent des géodésiques dans l'espace courbe)
- La gravitation newtonienne n'est qu'une approximation
  - des effets de relativité générale ont été observés sur l'orbite de Mercure
  - la lumière, qui n'a pas de « masse », est également affectée par la gravitation (observation d'étoiles dans la direction du Soleil lors d'une éclipse solaire)
- Description de « phénomènes extrêmes » (trous noirs, ...)



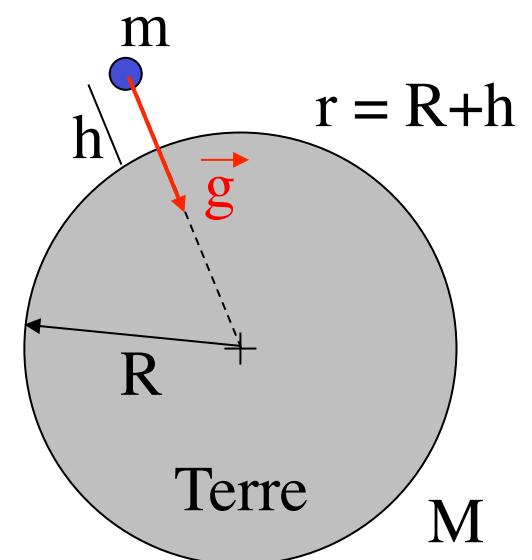
# Champ de gravitation

- Une masse ponctuelle  $M$  produit un champ gravitationnel  $\vec{g}(\vec{r})$  à la position  $\vec{r}$ :  
Force subie par une masse  $m$  à cette position:  $\vec{F} = m \vec{g}(\vec{r})$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Quel est le champ gravitationnel produit par une masse  $M$  non ponctuelle supposée sphérique de rayon  $R$  et homogène ? (par exemple la Terre)

Réponse: si  $r \geq R$ , le même champ que produirait une masse  $M$  ponctuelle située au centre de la Terre (conséquence de la forme en  $1/r^2$ )



# Flux du champ de gravitation

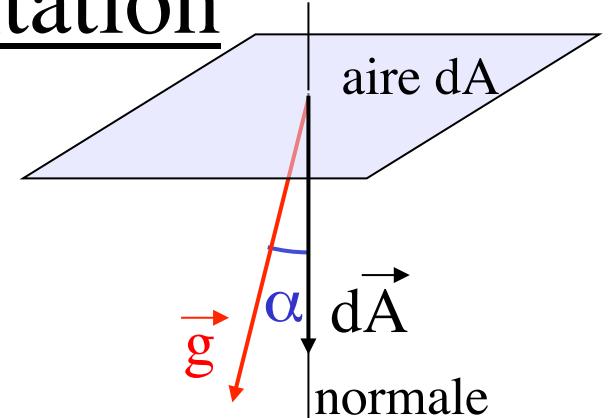
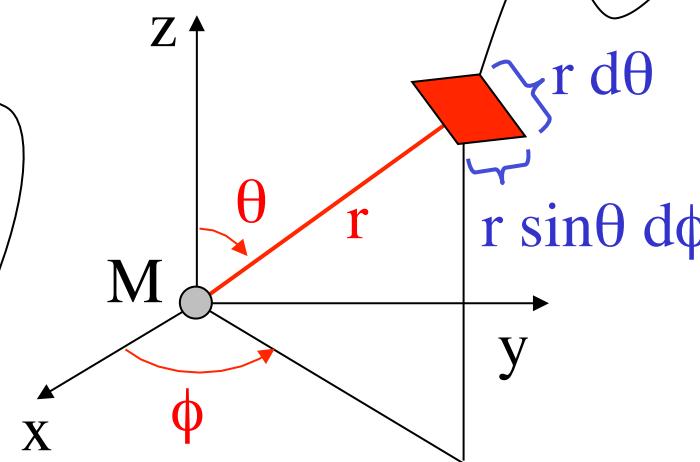
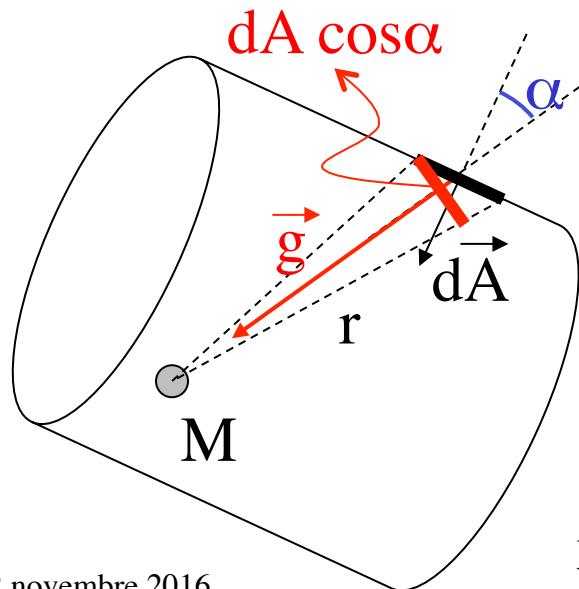
- Définition du flux d'un champ  $\vec{g}$  à travers une surface  $dA$ :

$$d\Phi = \vec{g} \cdot d\vec{A} = g dA \cos\alpha$$

- Flux total à travers une surface fermée quelconque entourant une masse ponctuelle  $M$ :

$$\Phi = \int_{\text{surface}} d\Phi = \int_{\text{surface}} g \cos\alpha dA = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{GM}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi}_{\cos\alpha dA} = 4\pi GM$$

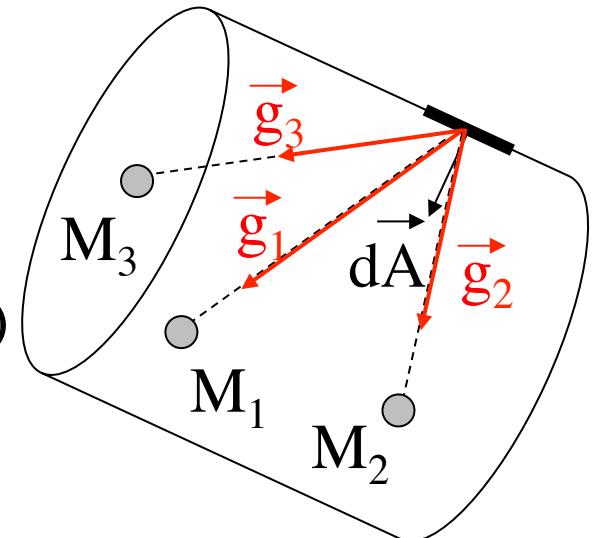
indépendant  
de la surface  
fermée !  
(théorème  
de Gauss)



# Champ de gravitation d'une distribution de masse

- Flux total à travers une surface fermée quelconque entourant 3 masses ponctuelles:

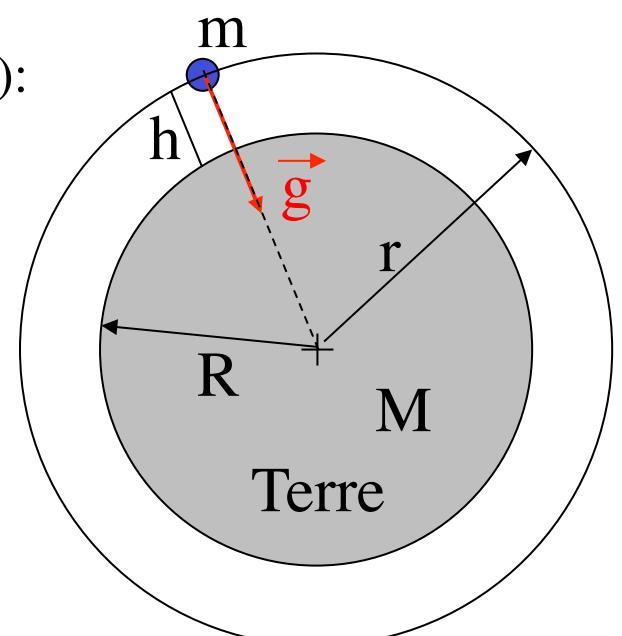
$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 \Rightarrow \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 4\pi G (M_1 + M_2 + M_3)$$



- Boule de rayon  $R$  de masse  $M$  (distribution de masse uniforme):
  - Le champ  $g(r)$  doit être radial (symétrie sphérique):
  - On applique le théorème de Gauss sur la sphère de rayon  $r = R+h$ :

$$\Phi = g 4\pi r^2 = 4\pi GM$$

$$\Rightarrow g = \frac{GM}{r^2}$$



# Energie potentielle gravifique

- Energie potentielle:  $V(r) = -\frac{GMm}{r}$

- Approximation à la surface de la Terre ( $h \ll R$ ):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{R-h}{R^2-h^2} \cong \frac{R-h}{R^2} = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

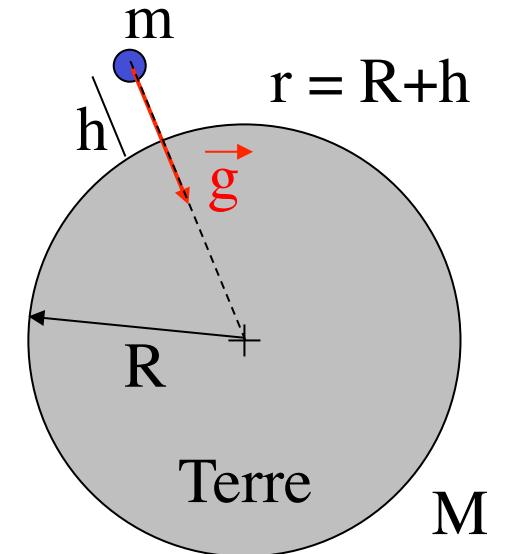
$$\Rightarrow V(r) = -\frac{GMm}{r} \cong \underbrace{-\frac{GMm}{R}}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{GM}{R^2}mh}_{mg h}$$

Au tableau

- La force dérive de l'énergie potentielle:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = -\frac{GMm}{r^2} \frac{x}{r}$$

... et de même pour  $F_y$  et  $F_z$



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

# Masse d'inertie et masse gravitationnelle

- Deux définitions différentes de la masse:
  - masse d'inertie, apparaissant dans la 2ème loi de Newton:  $F = m_i a$
  - masse gravitationnelle, apparaissant dans la loi de la gravitation:  $F = m_g g$
- Observations expérimentales conduisant à l'hypothèse  $m_i = m_g$ :

Galilée (1590?)	$10^{-1}$	accélération des corps en chute libre indép. de m
Newton (1686)	$10^{-3}$	période d'un pendule indép. de m
Bessel (1832)	$10^{-4}$	période d'un pendule indép. de m
Eötvös (1922)	$10^{-8}$	pendule de torsion (test parallélisme poids de deux corps)
Dicke (1961)	$10^{-11}$	
Braginskii+Parov (1972)	$10^{-12}$	

↑  
précision relative

Poids apparent = force gravitationnelle + force d'inertie due à la rotation de la Terre

- Principe d'équivalence d'Einstein (1911):

$$m_i \equiv m_g$$

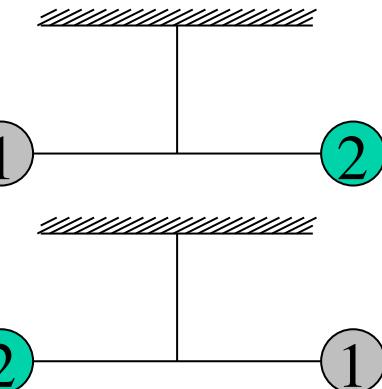
On ne peut pas distinguer un champ de pesanteur d'une accélération

demos: rail à air

## Expérience d'Eötvös:

Pendule de torsion avec deux boules de mêmes poids, mais de substances différentes

L'expérience est répétée tournée de 180 degrés



Si on mesure une torsion différente, alors  $m_i/m_g$  n'est pas le même pour les deux boules

# Mouvement dans un potentiel central

- Si le potentiel ne dépend que de la distance à l'origine,  $V=V(r)$ , alors on a une force centrale:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r) = -\frac{dV}{dr} \hat{e}_r \quad \text{car} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_i}{r}$$

- Force centrale  
 $\Leftrightarrow$  vecteur moment cinétique constant  
 $\Rightarrow$  mouvement plan

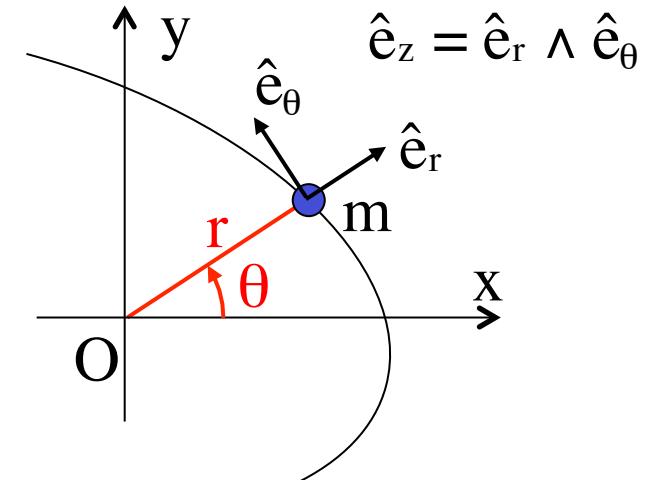
Coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = r \hat{e}_r \\ \vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \end{array} \right.$$

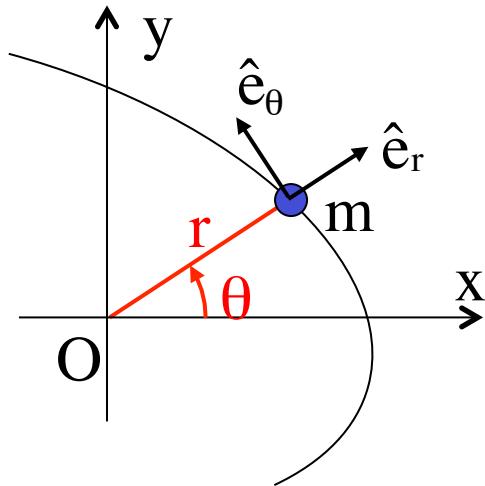
- Constantes du mouvement:

**Moment cinétique**  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = mr\hat{e}_r \wedge (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z$

**Energie mécanique**  $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m \underbrace{(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)^2}_{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} + V(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$



# Intégrales premières d'un mouvement central



Point matériel soumis  
à une force centrale:  $\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{e}_r$

Accélération en  
coordonnées  
polaires  $(r, \theta)$ :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

$m\vec{a} = \vec{F}$  projeté sur  $\hat{e}_\theta$ :

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \Leftrightarrow m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{(mr^2\dot{\theta})}_{= \text{cste } L} = 0$$

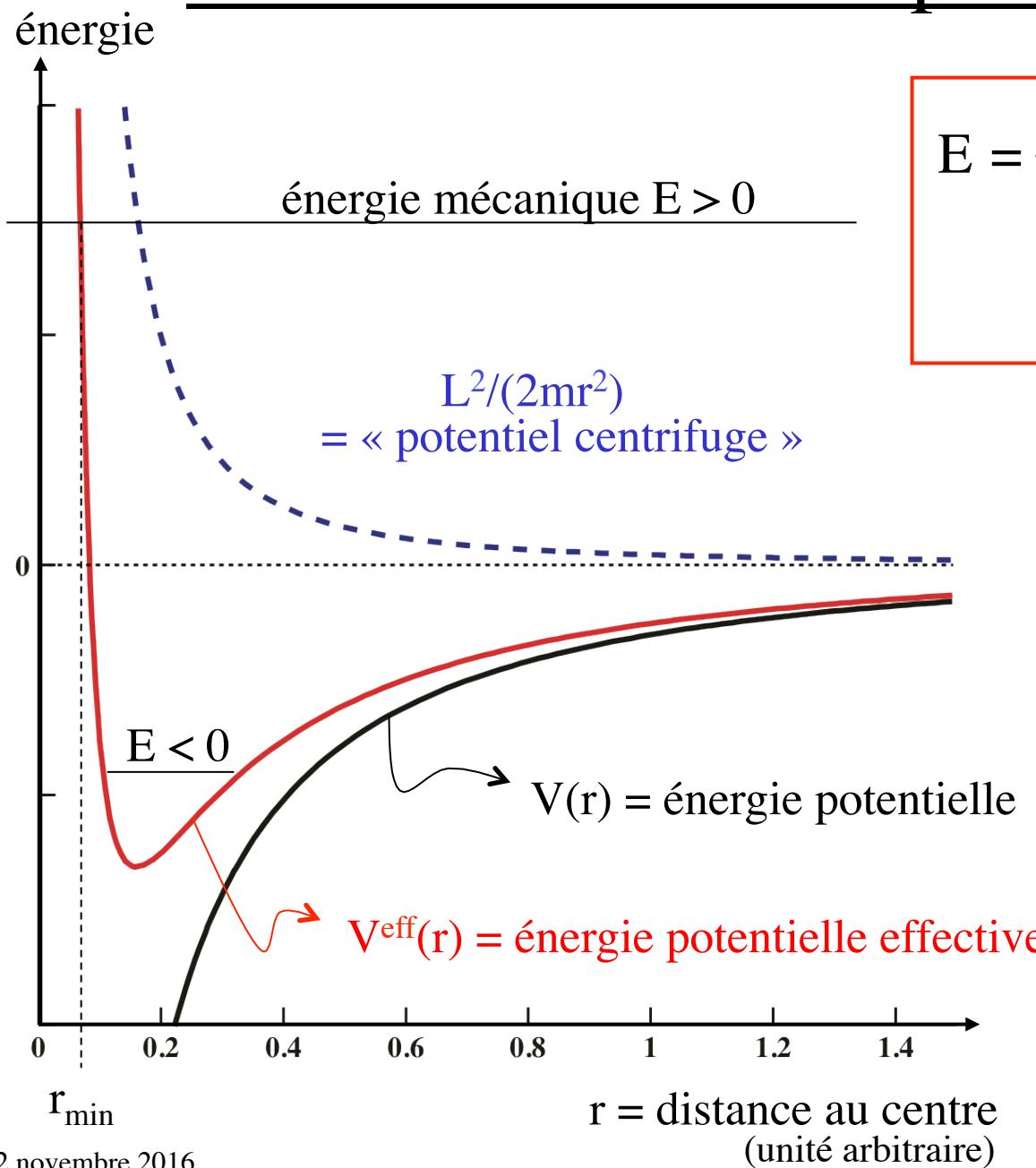
$m\vec{a} = \vec{F}$  projeté sur  $\hat{e}_r$ :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{dV}{dr} \Leftrightarrow m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dV}{dr} \Leftrightarrow m\ddot{r}r - \dot{r}\frac{L^2}{mr^3} + \dot{r}\frac{dV}{dr} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right)}_{= \text{constante E}} = 0$$

**Deux intégrales premières  
du mouvement: L et E**

# Mouvement dans un potentiel central



$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V^{\text{eff}}(r)$$

$$\text{où } V^{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

- Exemple:
  - Potentiel gravifique:  
 $V(r) = -GMm/r$
  - Discussion qualitative des orbites possibles (en  $r$ )
  
- Remarque:
  - Les lois de conservation de  $L$  et  $E$  ne permettent pas au point matériel de s'approcher trop près du centre de force ( $r > r_{\min}$ )

# Mouvement de Kepler

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{avec } K = GMm$$

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{K}{r^2}$$

Equation du mouvement selon  $\hat{e}_r$

Posons  $r = \frac{1}{q}$  :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{q^2} \frac{dq}{d\theta} \dot{\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{dq}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{dq}{d\theta} \\ \ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d^2q}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{L}{m} \frac{d^2q}{d\theta^2} \frac{L}{mr^2} = -\frac{L^2}{m^2} q^2 \frac{d^2q}{d\theta^2} \end{cases}$$

Résolution de l'équation du mouvement pour obtenir l'orbite ( $r$  en fonction de  $\theta$ ) :

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{K}{r^2} \Rightarrow -\frac{L^2}{m} q^2 \frac{d^2q}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m} q^3 = -Kq^2 \Rightarrow \frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \frac{Km}{L^2}$$

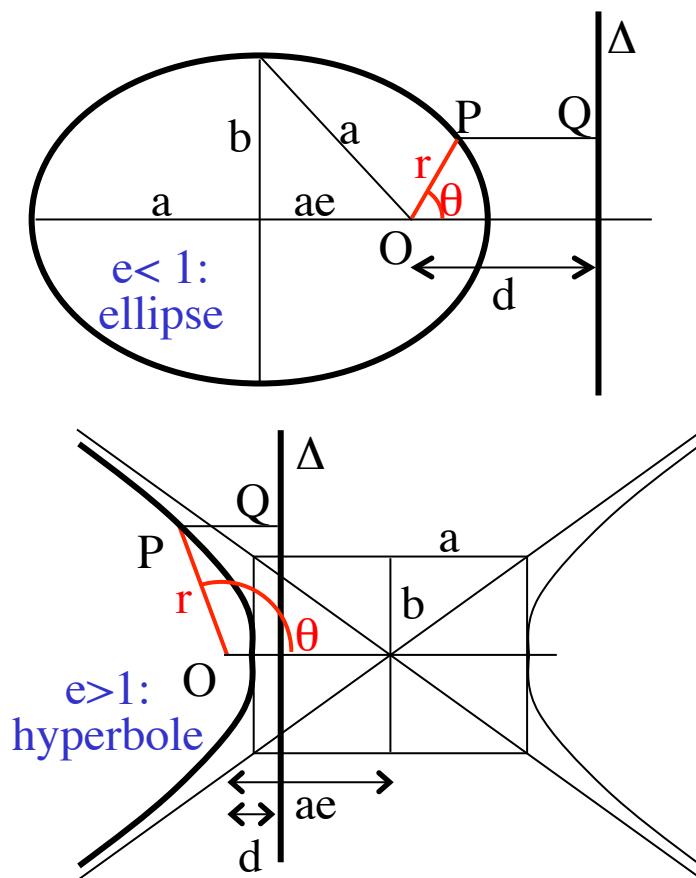
$$\Rightarrow q(\theta) = \frac{1}{r} = \frac{Km}{L^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

où  $e$  et  $\theta_0$  sont des constantes d'intégration

**Conique d'excentricité  $e$**

# Coniques

**Conique:** lieu géométrique des points P du plan dont le rapport des distances à un point fixe O (foyer) et une droite fixe  $\Delta$  (directrice) est une constante e (excentricité):



$$\frac{PO}{PQ} = e = \frac{r}{d - r \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad ed = r(1 + e \cos\theta)$$

r,  $\theta$  = coord. polaires par rapport à O  
d = distance foyer-directrice

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos\theta) \quad \text{avec } p = ed$$

**Equation conique en coordonnées polaires définie par les paramètres e et p**

demi-grand axe:  $a = \frac{p}{|1 - e^2|}$

demi-petit axe:  $b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}$

## Orbites de Kepler

$$\frac{1}{r} = \frac{Km}{L^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

Conique d'excentricité  $e$

$e = 0:$	cercle
$0 < e < 1:$	ellipse
$e = 1:$	parabole
$e > 1:$	hyperbole

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = \frac{Km}{L^2} (1 + e)$$

$$\text{Energie : } E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} = \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} - \frac{K}{r_{\min}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = \frac{Km}{L^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2}{K^2 m} E} \right)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{K^2 m} E}$$

- si énergie  $E < 0$ : orbite elliptique, donc bornée  
→ système lié (par exemple Soleil+planète)
- si énergie  $E > 0$ : orbite hyperbolique, donc non bornée  
→ système non lié

(le corps peut aller à l'infini où  $E_{\text{pot}}=0$  et avoir  $E_{\text{cin}}>0$ )

# Cinquième partie: Systèmes de points matériels, lois de conservation

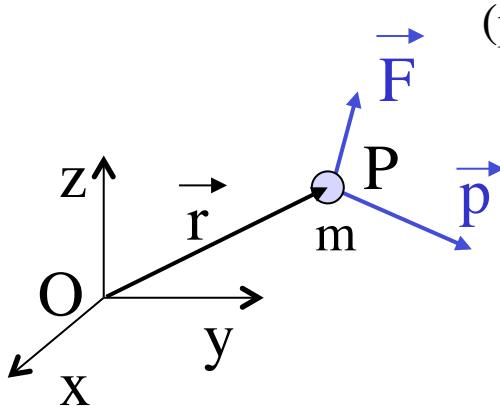
## Notions abordées:

- 2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique
- Systèmes de points matériels: énoncé général de la 3ème loi de Newton
- Centre de masse, théorème du centre de masse
- Lois de conservation pour un système isolé
- Chocs et collisions

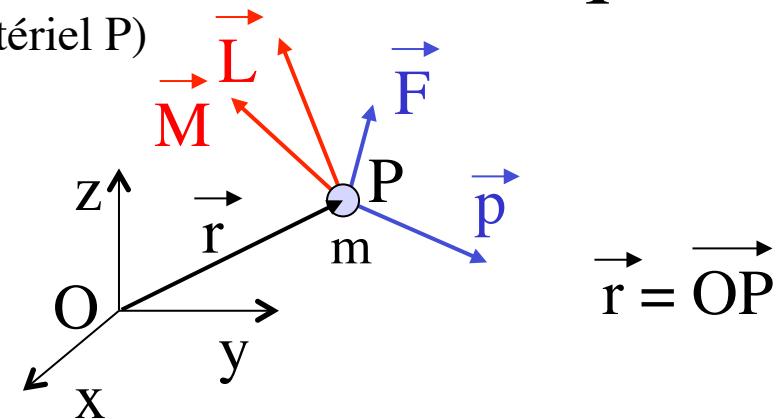
## Buts:

- Assimiler et savoir appliquer les lois de la mécanique newtonienne

# 2ème loi et théorème du moment cinétique



(pour un point matériel P)



- Résultante (somme) des forces appliquées au point matériel P:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

- Quantité de mouvement du point matériel de masse  $m$ :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Deuxième loi de Newton**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

équivalente à  $\vec{F} = m\vec{a}$ , si  $m$  constante

- Moment de la force résultante  $F$  par rapport à un point  $O$  du référentiel:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i = 0 \text{ si force centrale}$$

- Moment cinétique du point matériel par rapport au point  $O$ :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

- Théorème du moment cinétique**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

= 0 si force centrale

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

# Système de points matériels

- On suppose que chaque point matériel  $P_\alpha$  du système subit:
  - une force extérieure  $F_\alpha^{\text{ext}}$  dont l'origine est extérieure au système
  - des forces intérieures  $F^{\beta \rightarrow \alpha}$  exercées par les autres points  $P_\beta$  du système (uniquement forces « à deux corps »)
- Troisième loi de Newton, appliquée à  $P_\alpha$  et  $P_\beta$ :

action et réaction sont égales, opposées et de même support

$$\vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = 0$$

$$\vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{M}_O^{\alpha \rightarrow \beta} = \vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{r}_\beta \wedge \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \wedge \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

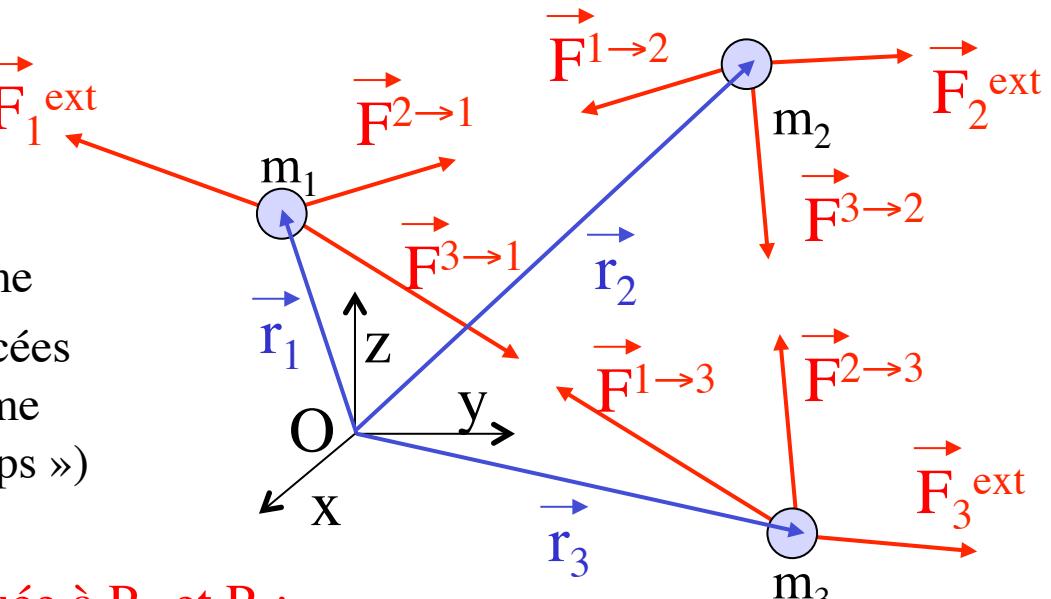
- Troisième loi (énoncé général)**

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

La somme des forces internes est nulle

La somme des moments des forces internes est nulle



# Système de points matériels (suite)

- Quantité de mouvement totale:  $\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{d\vec{p}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \left( \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \right) = \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}}_{\vec{F}^{\text{ext}}}$$

- Moment cinétique total (par rapport à O):  $\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{L}_{O,\alpha}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{d\vec{L}_{O,\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \left( \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} \right) = \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}}}_{\vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

**Lois générales de la dynamique pour un système de points matériels**

(pourraient être prises comme postulat fondamental duquel découlerait le principe de l'action et de la réaction)

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O^{\text{ext}}\end{aligned}}$$

Seules les forces exercées par l'extérieur sur le système déterminent l'évolution de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique total

# Système à l'équilibre (statique)

- Un système est à l'équilibre si:

$$\begin{cases} \vec{r}_\alpha(t) = \text{constante} \\ \vec{v}_\alpha(t) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout point } \alpha \text{ du système}$$

- Dans ce cas on a:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \\ \vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout point } O \text{ du référentiel}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{array}} \quad \text{pour tout point } O \text{ du référentiel}$$

**Conditions d'équilibre**  
**pour un système de points matériels**  
**(en particulier pour un solide rigide)**

démo: balances

# Centre de masse (ou d'inertie, ou « de gravité »)

- Le centre de masse est un point G défini par:

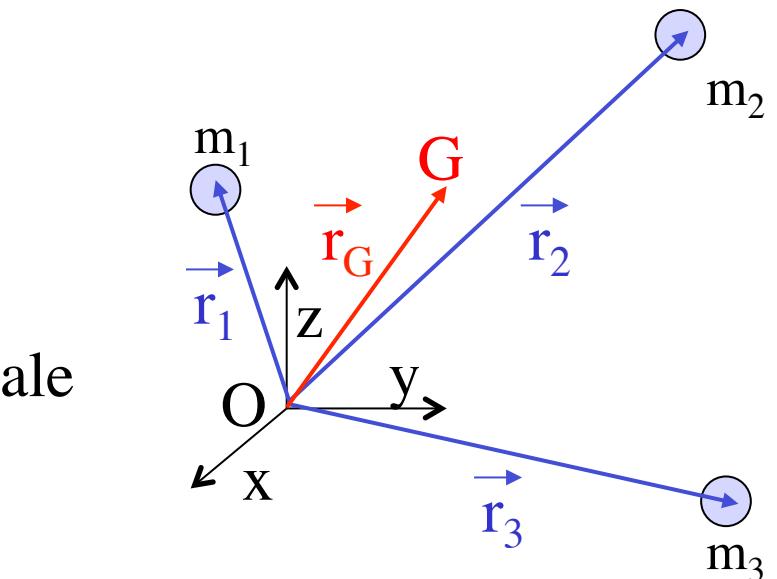
$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

où  $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$  = masse totale

- Si les masses  $m_{\alpha}$  sont constantes:
  - vitesse du centre de masse

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \frac{\vec{p}}{M} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = M \vec{v}_G}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{M \vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}}$$



**Théorème du  
centre de masse**

Le **centre de masse** d'un système **se comporte comme un point matériel** de masse  $M = \sum m_{\alpha}$  subissant toutes les forces extérieures appliquées sur les différentes parties du système, comme si ces forces étaient exercées sur ce point matériel

# Les bases de la mécanique Newtonienne classique

(résumé)

## Les 3 lois de Newton

### 1. Loi d'inertie

mouvement rectiligne uniforme  $\Leftrightarrow \vec{F} = 0$

### 2. Loi fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ où } \vec{p} = m\vec{v} \quad \left( \begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} \\ \text{si } m = \text{cste} \end{array} \right)$$

### 3. Loi de l'action et de la réaction

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

1. Définit les « bons » référentiels pour la 2ème loi, c'est-à-dire les référentiels d'inertie

2. Introduit les grandeurs physiques importantes; de cette loi découle le théorème du moment cinétique:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \text{ où } \begin{cases} \vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \\ \vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} \end{cases}$$

O = point arbitraire du référentiel

### 3. Enonce une propriété générale des forces:

Dans un système la somme des forces et des moments internes est nulle  
⇒ la 2ème loi de Newton et le théorème du moment cinétique sont valables pour la quantité de mouvement totale et le moment cinétique total en ne considérant que les forces extérieures au système

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{O,\text{tot}}}{dt}$$

## Relativité Galiléenne (invariance par changement de référentiel d'inertie)

Les intervalles de temps et d'espace sont les mêmes dans tous les référentiels (d'inertie)  
Les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie

# Lois de conservation pour un système isolé

- Pour un système isolé (i.e. qui ne subit aucune force de l'extérieur),  
 $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$  et  $\vec{M}_O^{\text{ext}} = 0$  et donc:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante} \Rightarrow \vec{v}_G = \text{constante}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{constante}$$

par rapport à n'importe quel point O du référentiel

- Pour un système partiellement isolé selon une direction fixe  $\hat{u}$ :

$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

→ démos: 1) véhicule (initialement à l'arrêt) propulsé par des boulets       $\vec{p}_{\text{boulets}} + \vec{p}_{\text{véhicule}} = 0$   
2) oscillateur sur rail à air  
3) pendule sur roulettes } le centre de masse a un mvt rectiligne uniforme  
4) tabouret tournant       $\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = \text{constante}$  (si r diminue,  $\omega$  augmente)

# Lois de conservation: remarques, exemples ...

- Il existe encore une autre loi de conservation importante en mécanique: la **conservation de l'énergie**
  - tout aussi fondamentale que la conservation de  $p$  et  $L$
  - l'énergie cinétique totale d'un système, même isolé, n'est pas toujours conservée, car il existe des formes « cachées » d'énergie (énergies potentielles, chaleur, énergie électrique ou chimique, masse, ...)
  - cette loi dépasse donc le cadre strict de la mécanique !
- Les lois de conservation sont des concepts et des outils puissants:
  - Analyse simplifiée de situations complexes
- Exemples et démonstrations (pour constater la conservation de  $\vec{p}$  et  $\vec{L}$ , et chercher les formes d'énergie « cachées »):
  - « voiture à boulets »
  - chocs élastiques, choc mou
  - tabouret tournant

# Propriétés du centre de masse (CM)

- Soit  $G$  ( $G'$ ) le centre de masse défini à partir de l'origine  $O$  ( $O'$ ):

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{O'P_{\alpha}} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_{\alpha}}) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}$$

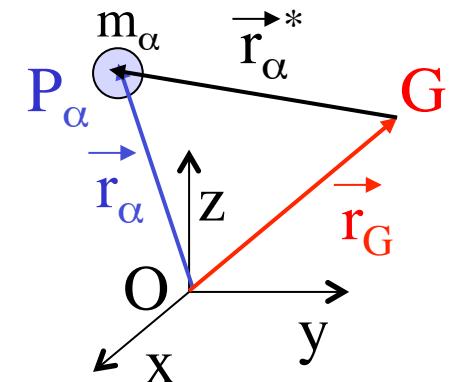
$\Rightarrow G' = G \Rightarrow$  le centre de masse est indépendant de l'origine  
(et l'origine n'a même pas besoin d'être un point du référentiel)

- Les positions  $\vec{r}_{\alpha}^*$  et les quantités de mouvement  $\vec{p}_{\alpha}^* = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*$  des points matériels du système par rapport au CM (dans le référentiel du CM) satisfont à:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* = 0 \text{ où } \vec{r}_{\alpha}^* = \overrightarrow{GP_{\alpha}} = \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_G$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* = 0 \text{ où } \vec{v}_{\alpha}^* = \frac{d\vec{r}_{\alpha}^*}{dt} = \vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_G$$

La somme des quantités de mouvement par rapport au centre de masse est nulle



# Problème à deux corps

- 2ème loi appliquée à chaque corps

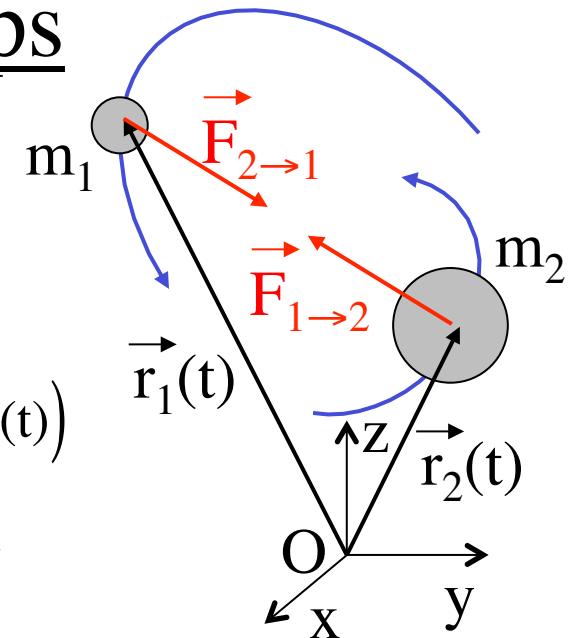
$$\begin{cases} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 & (1) \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 & (2) \end{cases}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = 0$$

(3ème loi)

- Changement de coordonnées:  $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) \rightarrow (\vec{R}(t), \vec{r}(t))$

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \text{coord. du centre de masse} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{coord. relatives} \end{cases}$$



$$(1) + (2) \Rightarrow 0 = (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}}$$

Equation du mouvement du centre de masse  
(théorème du CM pour  $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0$ )

$$(1) \times m_2 - (2) \times m_1 \Rightarrow m_2 \vec{F}_{2 \rightarrow 1} - m_1 \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F}_{2 \rightarrow 1} (m_1 + m_2) = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}$$

Equation du mouvement relatif

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \mu \ddot{\vec{r}} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\ M = m_1 + m_2 \end{cases}$$

$\mu$  = masse réduite du système  
 $M$  = masse totale du système

# Problème à deux corps (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{array} \right. \quad \text{référentiel du laboratoire} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{R} = -\frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{array} \right. \quad \text{référentiel du centre de masse}$$

changement de référentiel

- Quantité de mouvement totale:  $\begin{cases} \vec{p}_{\text{tot}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{V} \\ \vec{p}_{\text{tot}}^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = 0 \end{cases}$   $\vec{p}_{\text{tot}} = M \vec{V}$  Théorème de la quantité de mvt

- Moment cinétique total:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_{\text{tot},O} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 = \vec{r}_1 \wedge m_1 (\vec{V} + (\mu/m_1) \vec{v}) + \vec{r}_2 \wedge m_2 (\vec{V} - (\mu/m_2) \vec{v}) \\ = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \wedge \vec{V} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \mu \vec{v} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \end{array} \right.$$

$$\left. \vec{L}_{\text{tot},G}^* = \vec{r}_1^* \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \vec{r}_2^* \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \dots = \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \right. \quad \boxed{\vec{L}_{\text{tot},O} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \vec{L}_{\text{tot},G}^*}$$

- Energie cinétique totale: 1er théorème de König

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{V} + (\mu/m_1) \vec{v})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{V} - (\mu/m_2) \vec{v})^2 \\ = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{V}^2 + \frac{1}{2} (1/m_1 + 1/m_2) \mu^2 \vec{v}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \\ K_{\text{tot}}^* = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{*2} = \dots = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \end{array} \right. \quad \boxed{K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + K_{\text{tot}}^*}$$

2ème théorème de König

# Chocs ou collisions entre deux corps

- Peuvent être analysés sur la base des lois de conservation et permettent d'étudier les forces en jeu
- Modélisation: le système des deux corps est isolé:

$\Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}}$  et  $\vec{p}_{\text{tot}}$  conservés

## ① Bien avant le choc ( $t \ll 0$ ):

- Les corps n'exercent aucune force l'un sur l'autre (ils sont très éloignés et on suppose une force à courte portée)
- Chaque corps est un système isolé

## ② Pendant le choc ( $t \sim 0$ ):

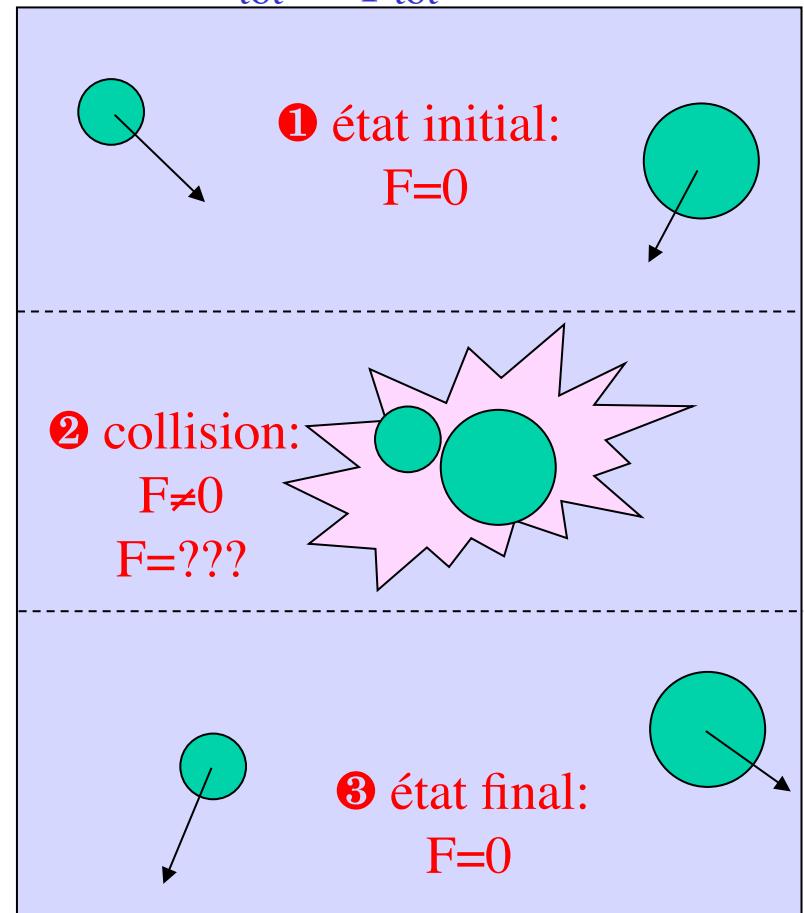
- Les corps interagissent, sous l'effet d'une force  $F$  (qu'on ne décrit pas)

## ③ Bien après le choc ( $t \gg 0$ ):

- Les corps sont à nouveau libres

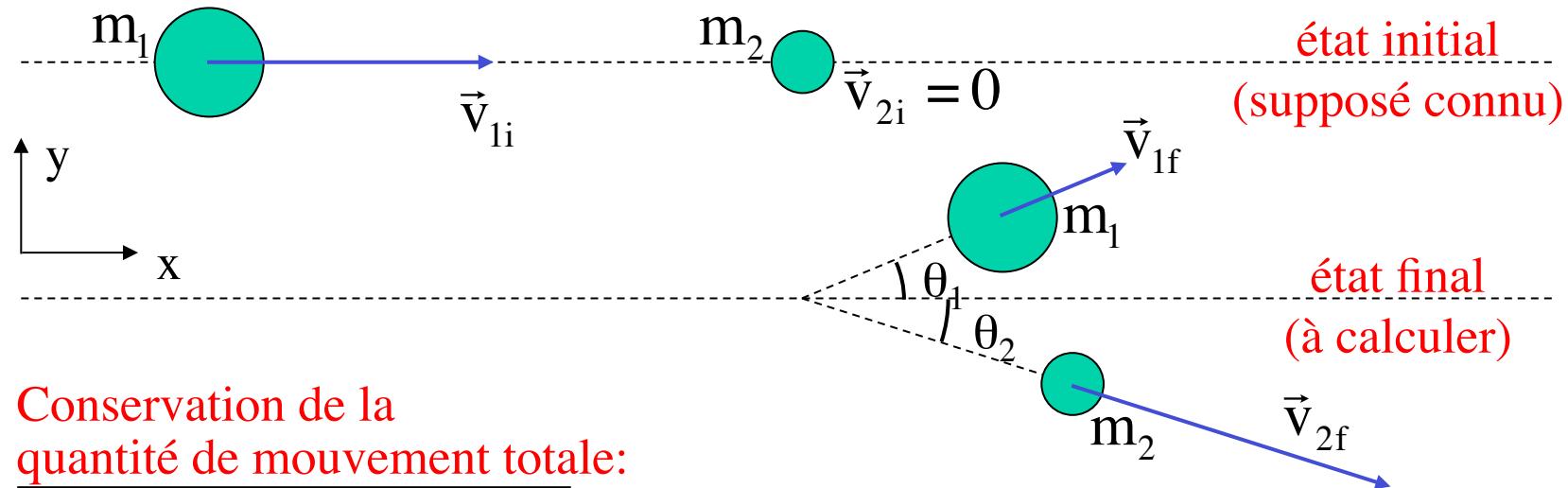
état initial  $\neq$  état final: les corps ont échangé, entre autres, de la quantité de mouvement:

$$\Delta \vec{p} = \int_{\text{choc}} \vec{F}(t) dt = \text{impulsion}$$



# Choc entre deux points matériels

- On choisit, sans perte de généralité, un référentiel dans lequel l'une des deux boules est initialement au repos



- Conservation de la quantité de mouvement totale:

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \Rightarrow \text{toutes les vitesses sont dans un même plan}$$

Projections x et y

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

- Variation d'énergie cinétique totale:

$$Q \equiv K_{\text{final}} - K_{\text{initial}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2}_{K_{1f}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2}_{K_{2f}} - \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2}_{K_{1i}}$$

Pour un choc entre deux boules (par exemple de billard), il faudrait en plus tenir compte de la conservation du moment cinétique, et de l'énergie cinétique de rotation !  
 $(K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2)$

## Choc élastique entre deux points matériels

- Définition choc élastique: énergie cinétique conservée  $\Leftrightarrow Q=0$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \text{élimination } \theta_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2 v_{1i} v_{1f} \cos\theta_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2f}^2$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left( \cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right)$$

élimination  $v_{2f}^2$

Conditions à satisfaire:  $(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\dots}) \geq 0$  et argument de la racine  $\geq 0$

a) si  $m_1 < m_2$ :

– signe « - » exclu et l'angle  $\theta_1$  n'est pas restreint:  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$

b) si  $m_1 > m_2$ :

– les deux signes sont possibles, mais l'angle  $\theta_1$  doit satisfaire à:

$$\cos^2\theta_1 > 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} \text{ et } \cos\theta_1 > 0 \Rightarrow$$

$$\theta_1 < \theta_1^{\max} \text{ où } \sin\theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1}$$

(Exemples: chocs entre balle de ping-pong et boule de pétanque)

# Choc élastique entre deux points matériels (2)

- Remarques:
  - Le problème n'est pas complètement soluble sans information sur la force
  - La donnée de la direction finale de la particule 1 permettrait de tout connaître (on obtiendrait  $|\vec{v}_{1f}|$  et  $\vec{v}_{2f}$  à partir des 4 équ. de conservation)
- Cas particulier d'une collision unidimensionnelle  
(entièlement soluble avec les lois de conservation)
  - On reprend les résultats précédents avec  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , mais  $v_{1i}$ ,  $v_{1f}$ , et  $v_{2f}$  sont maintenant les composantes sur l'axe x (et non plus les normes)
  - On obtient:

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} v_{1f} = v_{1i} \\ v_{2f} = 0 \end{cases}}_{\text{pas de choc !}} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$$

- Cas limites:
  - Si  $m_1 = m_2$  :  $v_{1f} = 0$  et  $v_{2f} = v_{1i}$       échange des vitesses
  - Si  $m_1 \ll m_2$  :  $v_{1f} \approx -v_{1i}$  et  $v_{2f} \approx 0$       rebond sur une masse « infinie »
  - Si  $m_1 \gg m_2$  :  $v_{1f} \approx v_{1i}$  et  $v_{2f} \approx 2v_{1i}$       collision avec masse négligeable

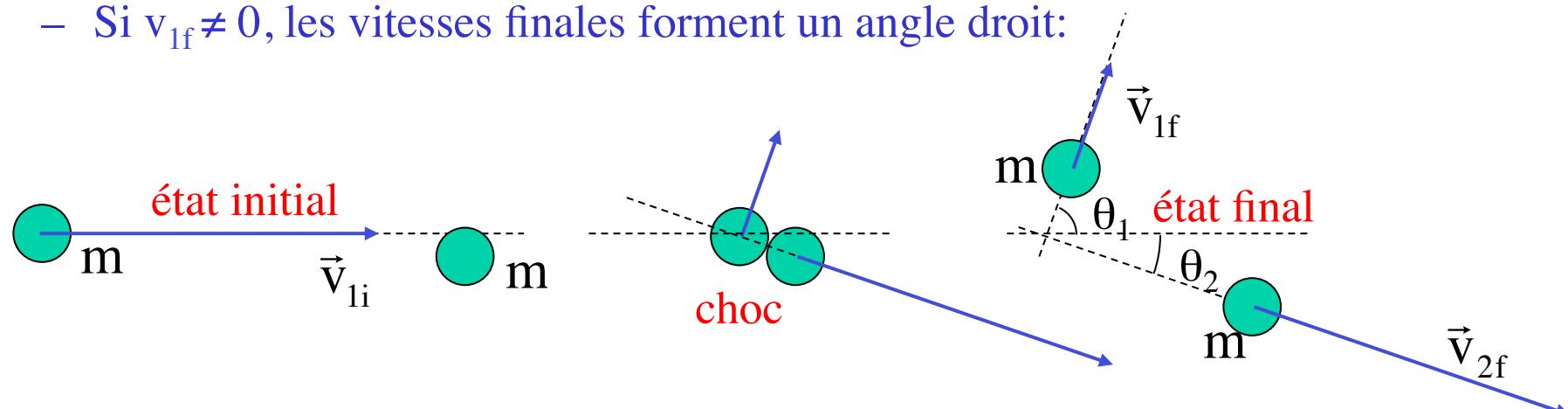
# Choc élastique entre deux points matériels (3)

- Cas particulier  $m_1=m_2=m$ :

- Par exemple boules de billard sans frottements (pour autant que l'approximation du point matériel soit valable, c-à-d billard sans « effets »)

- On obtient:  $\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{1}{2}(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1}) \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = 0 : \text{échange des vitesses} \\ v_{1f} = v_{1i} \cos\theta_1 \end{cases}$

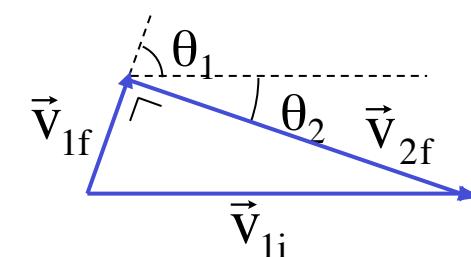
- Si  $v_{1f} \neq 0$ , les vitesses finales forment un angle droit:



conservation de  $\vec{p}_{\text{tot}}$  :  $\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$   $\Rightarrow$  triangle

conservation de  $K_{\text{tot}}$  :  $v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$   $\Rightarrow$  triangle rectangle

$$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \pi/2$$



# Choc inélastique entre deux points matériels

- Définition choc inélastique: énergie cinétique non conservée
  - $Q > 0$ : la collision dégage de l'énergie cinétique (exo-énergétique)
  - $Q < 0$ : la collision absorbe de l'énergie cinétique (endo-énergétique)
- La variation d'énergie interne du système vaut  $-Q$  (par conservation de l'énergie totale):
  - elle peut conduire à un changement de l'identité des particules en interaction, ou du nombre de particules dans l'état final; exemples:
    - Choc entre un marteau et un verre de cristal
    - Collisions entre particules élémentaires, par ex.  $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$
- Cas particulier: choc mou (les deux points matériels s'accroissent):

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V} = \text{vitesse du centre de masse}$$

démonstration: rail à air

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

$$Q \equiv K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right) v_{1i}^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 < 0$$

# Vitesse relative et coefficient de restitution

- Quantité de mouvement transférée de  $m_2$  à  $m_1$ :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= m_1 \vec{v}_{1f} - m_1 \vec{v}_{1i} & [\Delta \vec{p} = -(m_2 \vec{v}_{2f} - m_2 \vec{v}_{2i}) \text{ par conservation de } \vec{p}_{\text{tot}}] \\ &= m_1 \left( \vec{V}_f + \frac{\mu}{m_1} \vec{v}_f \right) - m_1 \left( \vec{V}_i + \frac{\mu}{m_1} \vec{v}_i \right) & \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_i = \vec{V}_f : \text{vitesse du centre de masse} \\ \vec{v}_i \text{ et } \vec{v}_f : \text{vitesses relatives initiale et finale} \\ \text{de } m_1 \text{ par rapport à } m_2 \\ \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) : \text{masse réduite} \\ M = m_1 + m_2 : \text{masse totale} \end{array} \right. \\ &= \mu (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \end{aligned}$$

- Variation d'énergie cinétique totale:

$$\begin{aligned} Q &= K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} = \left( \frac{1}{2} M V_f^2 + \frac{1}{2} \mu v_f^2 \right) - \left( \frac{1}{2} M V_i^2 + \frac{1}{2} \mu v_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu (v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_f + \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \Delta \vec{p} \cdot (\vec{v}_f + \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \Delta \vec{p} \cdot \vec{v}_i (1 - e) \end{aligned}$$

- On a défini  $e = \text{coefficient de restitution}$

$\text{choc élastique } (Q = 0) \Leftrightarrow e = 1$   
 $\text{choc mou } (\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f}) \Rightarrow e = 0$

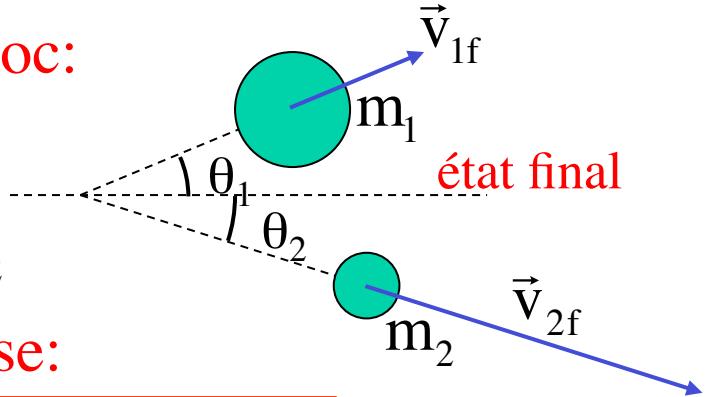
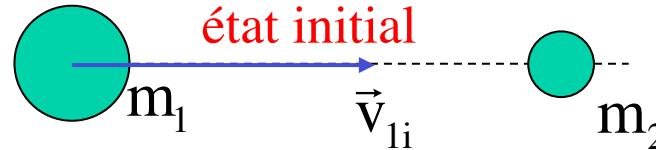
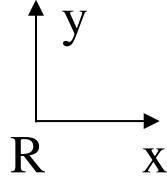
$\vec{v}_f \cdot \hat{u} = -e \vec{v}_i \cdot \hat{u} \quad \text{où } \hat{u} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta p}$

Vitesse relative  
d'éloignement  
selon direction  $\Delta p$   
dans l'état final

Vitesse relative de  
rapprochement  
selon direction  $\Delta p$   
dans l'état initial

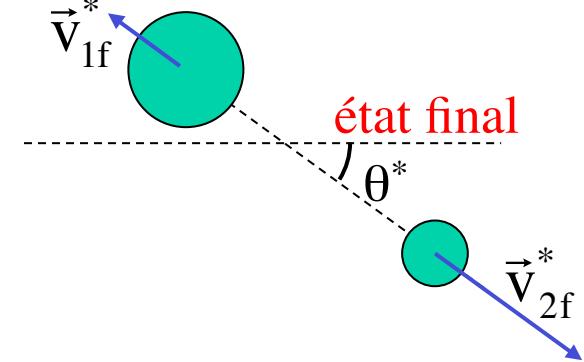
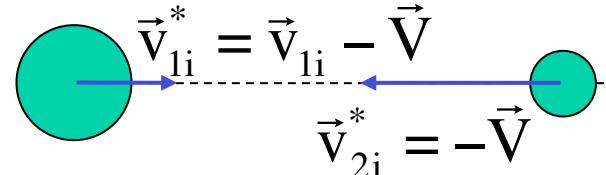
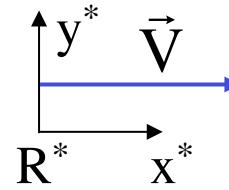
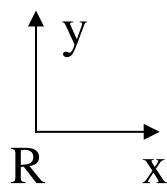
# Collision vue du centre de masse

- Dans le référentiel R où  $v_{2i} = 0$  avant le choc:



- Dans le référentiel  $R^*$  lié au centre de masse:

$$m_1 \vec{v}_{1i}^* + m_2 \vec{v}_{2i}^* = m_1 \vec{v}_{1f}^* + m_2 \vec{v}_{2f}^* = \vec{p}_{\text{tot}}^* = \vec{P}^* = 0$$



- Variation d'énergie cinétique:

$$Q = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}_f^2 - \vec{v}_i^2) \quad \left( \text{si } \theta^* = 0, \text{ alors } v_f = -e v_i \text{ et } Q = \frac{1}{2} \mu (e^2 - 1) v_i^2 \right)$$

- Si un processus demande l'absorption d'une énergie  $E_{\text{int}}$ :

au seuil:  $-E_{\text{int}} = Q = -\frac{1}{2} \mu \vec{v}_i^2 = -\frac{1}{2} \mu \vec{v}_{1i}^2 \Rightarrow K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1i}^2 = \frac{m_1}{\mu} E_{\text{int}} = E_{\text{int}} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$

# Système de masse variable (fusée)

- On considère, au temps  $t$ , la fusée et son gaz:

$$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$$

$$\begin{aligned}\vec{p}(t + dt) &= (m(t) + dm) (\vec{v}(t) + d\vec{v}) - dm (\vec{v}(t) + \vec{u}) \\ d\vec{p} &= \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = m(t) d\vec{v} - dm \vec{u}\end{aligned}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m(t) \vec{a}(t) - \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

- Fusée au décollage ( $g \sim \text{constant}$ ):

$$\vec{F}(t) = m(t) \vec{g} \Rightarrow m(t) \vec{a}(t) = m(t) \vec{g} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

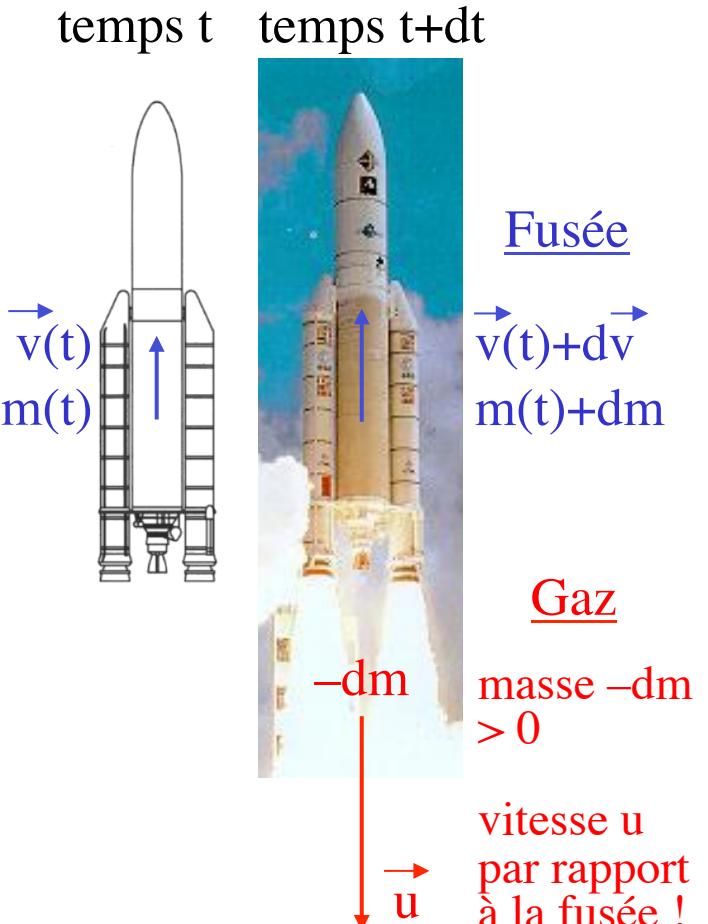
Projection sur axe vertical:

$$m(t) a(t) = -m(t) g - \frac{dm}{dt} u$$

Condition de démarrage ( $t=0$ ):

$$a(0) > 0 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{dm}{dt} \right|}_{\text{poussée}} u > \underbrace{m(0) g}_{\text{poids}}$$

$$\text{Si } u=\text{constante, on obtient: } v(t) - \underbrace{v(0)}_0 = -gt - u \ln \frac{m(t)}{m(0)} \Rightarrow v(t) = u \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt$$



# Sixième partie: Cinématique et dynamique du corps solide indéformable

## Notions abordées:

- Cinématique du solide, distribution des vitesses, angles d'Euler
- Dynamique du solide, effets gyroscopiques
- Tenseur d'inertie, axe de rotation fixe, axe de rotation en mouvement, équations d'Euler

## Buts:

- apprendre à décrire le mouvement d'un corps solide
- savoir écrire les équations du mouvement d'un corps solide (théorèmes du centre de masse et du moment cinétique)

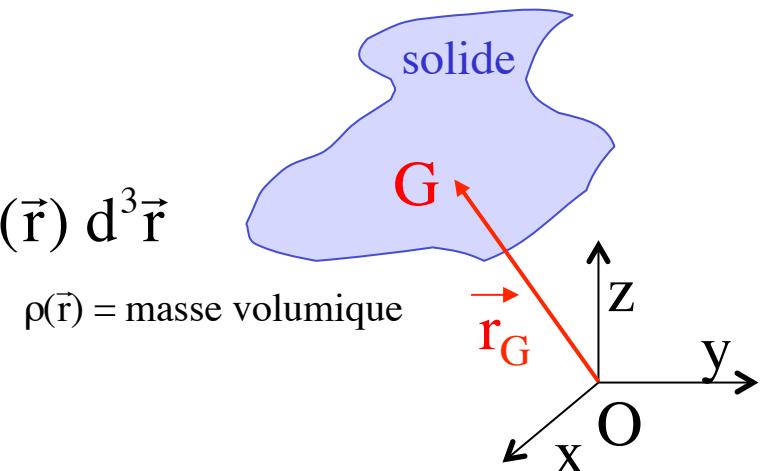
# Corps solide indéformable

- Définition: solide indéformable = système de points matériels qui sont fixes les uns par rapport aux autres
- Remarques:
  - Tous les corps solides réels se déforment sous l'effet des forces appliquées; le solide indéformable est un modèle mathématique (bonne approximation si les déformations sont petites par rapport aux dimensions du solide).
  - Le nombre  $N$  de points matériels peut être très grand ( $N \rightarrow \infty$ ); on remplace alors les sommes sur ces  $N$  points par des intégrales. Par exemple, pour le centre de masse:

Exemple  
au tableau

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} m_{\alpha}$$

$$\rightarrow \frac{1}{M} \int \vec{r} dm(\vec{r}) = \frac{1}{M} \int_{\text{volume du solide}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$



- Position d'un solide:
  - 6 coordonnées indépendantes
  - par exemple, on repère 3 points non colinéaires du solide:
    - 3 coord. pour le point 1
    - 2 coord. pour le point 2 (à une distance fixe du premier)
    - 1 coord. pour le point 3 (à des distances fixes des deux premiers)
    - 0 coord. pour tous les autres points (fixes par rapport aux trois premiers)

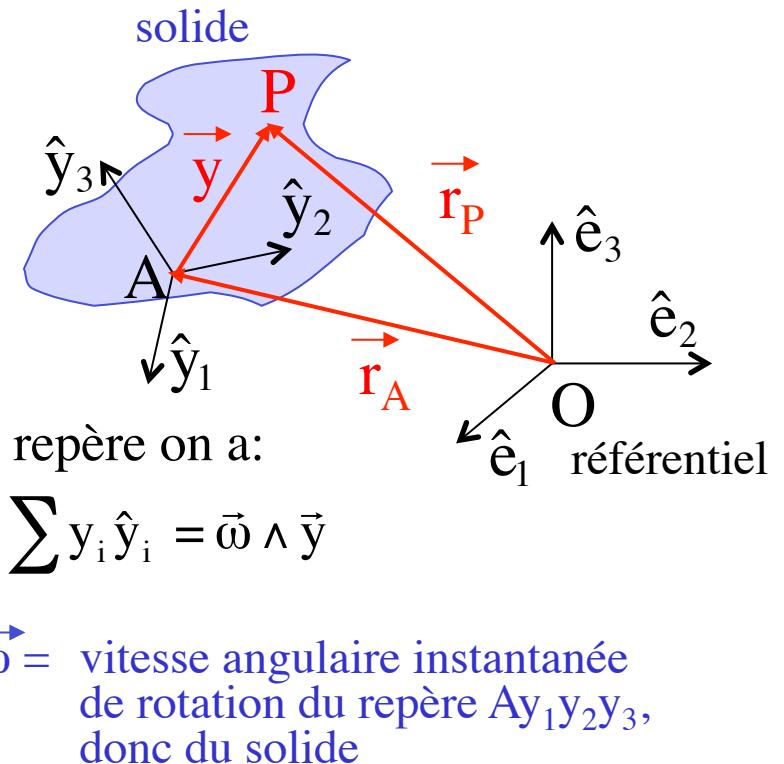
# Vitesse et accélération d'un point du solide

- Repère lié au référentiel  $Oe_1e_2e_3$
- Repère lié au solide  $Ay_1y_2y_3$   
( $A$  = point quelconque du solide)

- Tous les points  $P$  du solide sont immobiles dans ce repère
- Pour tout vecteur  $\vec{y}$  immobile dans ce repère on a:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum y_i \hat{y}_i \right) = \sum y_i \underbrace{\frac{d\hat{y}_i}{dt}}_{\vec{\omega} \wedge \hat{y}_i} = \vec{\omega} \wedge \sum y_i \hat{y}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{y}$$

formule de Poisson



- Pour tout point  $P$  du solide:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_A + \overline{AP}) = \vec{v}_A + \frac{d}{dt} \overline{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AP}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AP}) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AP})$$

avec  $\vec{\omega}$  indépendant de  $P$ , de  $A$  et du choix du repère  $Ay_1y_2y_3$

# Mouvement instantané d'un solide

- Soit A un point quelconque du solide:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad \forall P \in \text{solide} \quad \text{où } \vec{\omega} = \begin{array}{l} \text{vitesse instantanée de} \\ \text{rotation du solide} \end{array}$$

- Le mouvement instantané du solide est l'un des quatre suivants:

- $\vec{\omega} = 0$  et  $\vec{v}_A = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P = 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide au repos
- $\vec{\omega} = 0$  et  $\vec{v}_A \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A \neq 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide en translation
- $\vec{\omega} \neq 0$  et  $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide en rotation (axe //  $\vec{\omega}$ )
- $\vec{\omega} \neq 0$  et  $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$  solide en mvt hélicoïdal  
(rotation d'axe //  $\vec{\omega}$  + translation //  $\vec{\omega}$ )

- Si  $\omega \neq 0$ , un point C sur l'axe instantané de rotation est donné par:

En effet :

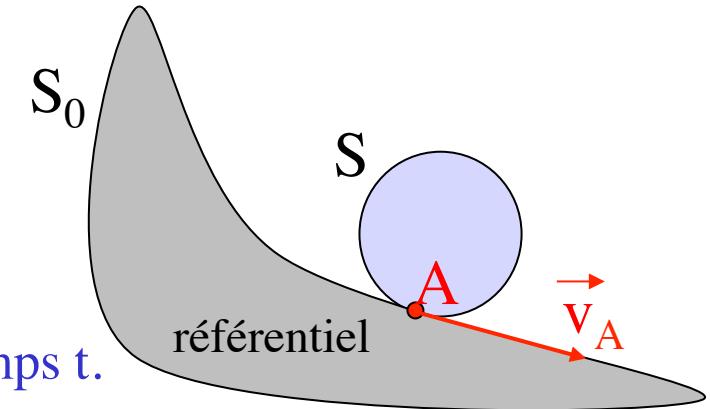
$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\vec{\omega}^2}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{v}_A + \hat{\omega} \wedge (\hat{\omega} \wedge \vec{v}_A) = \vec{v}_A + (\hat{\omega} \cdot \vec{v}_A) \hat{\omega} - (\hat{\omega} \cdot \hat{\omega}) \vec{v}_A = (\hat{\omega} \cdot \vec{v}_A) \hat{\omega}$$

$$\vec{v}_C = \begin{cases} 0 \text{ si solide en rotation} & \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} \quad \forall P \in \text{solide} \\ // \vec{\omega} \text{ si solide en mvt hélicoïdal} & \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} + v_C \hat{\omega} \quad \forall P \in \text{solide} \end{cases}$$

# Solides en contact

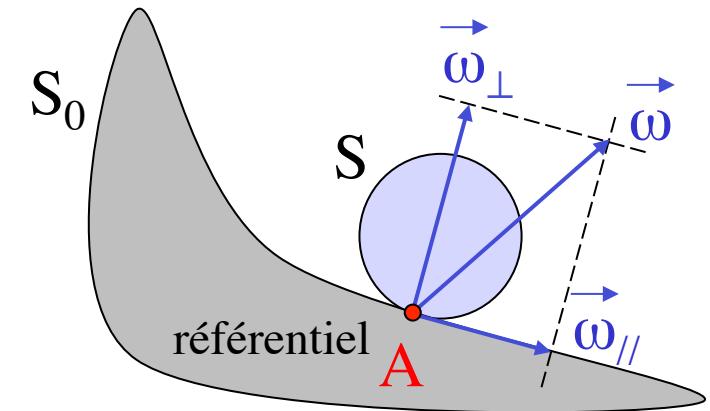
- Soient deux solides  $S$  et  $S_0$  restant constamment en contact
  - On choisit l'un des deux solides,  $S_0$ , comme référentiel  
 $\Rightarrow S_0$  est immobile et on décrit le mouvement de  $S$  par rapport à  $S_0$
  - On admet que le contact est ponctuel.  
Soit  $A$  le point de  $S$  en contact avec  $S_0$  au temps  $t$ .



- $\vec{v}_A = \text{vitesse de glissement}$  (de  $S$  par rapport à  $S_0$ )
- Condition du **roulement sans glissement**:  $\vec{v}_A = \vec{0}$

- $A$  est alors sur l'axe instantané de rotation

- Vecteur instantané de rotation  $\vec{\omega}$ 
    - Décomposition en composantes parallèle et perpendiculaire au plan tangent commun à  $S$  et  $S_0$  en  $A$ :
- $\vec{\omega}_{//} = \text{vitesse angulaire de roulement}$   
 $\vec{\omega}_{\perp} = \text{vitesse angulaire de pivotement}$

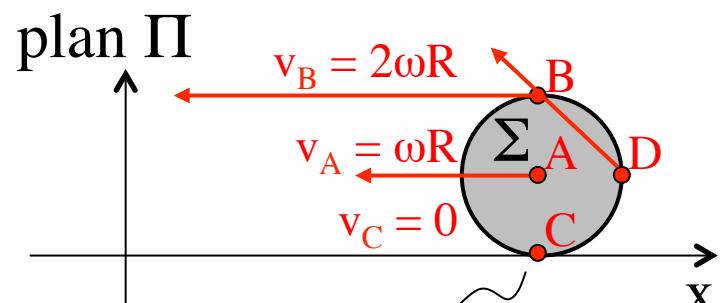
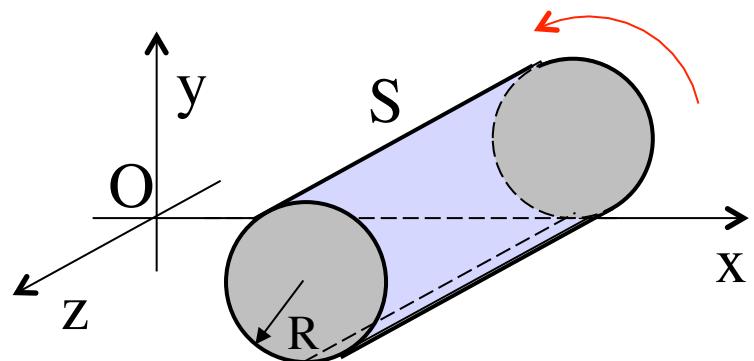


# Mouvement « plan-sur-plan »

- Définition: mouvement tel qu'un plan du solide S reste constamment dans un plan fixe  $\Pi$  du référentiel  
 $\Leftrightarrow$   
à tout instant les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe  $\Pi$
- Conséquences:
  - le vecteur instantané de rotation  $\vec{\omega}$  est perpendiculaire à  $\Pi$
  - on est ramené à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide  $\Sigma$  (section de S) sur un plan  $\Pi$ ;
  - dans ce plan, il y a un centre instantané de rotation (si  $\omega \neq 0$ )
- Lieu géométrique des centres instantanés de rotation:
  - dans le référentiel lié à  $\Pi$ : la base
  - dans le référentiel lié à  $\Sigma$ : la roulante

« Tout mouvement plan-sur-plan est un roulement sans glissement de la roulante sur la base »

# Exemple: cylindre sur un plan sans glissement



Base = axe x  
Roulante = circonférence du disque  $\Sigma$

- En trois dimensions:

- Un cylindre S de rayon R roule sans glisser sur le plan Oxz, avec la génératrice de contact parallèle à l'axe z
- Il s'agit d'un mouvement plan-sur-plan: à chaque instant, toutes les vitesses sont dans le plan Oxy  $\Leftrightarrow$  la base du cylindre reste constamment parallèle au plan Oxy
- $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$  = vitesse angulaire de roulement (il n'y a pas de pivotement)

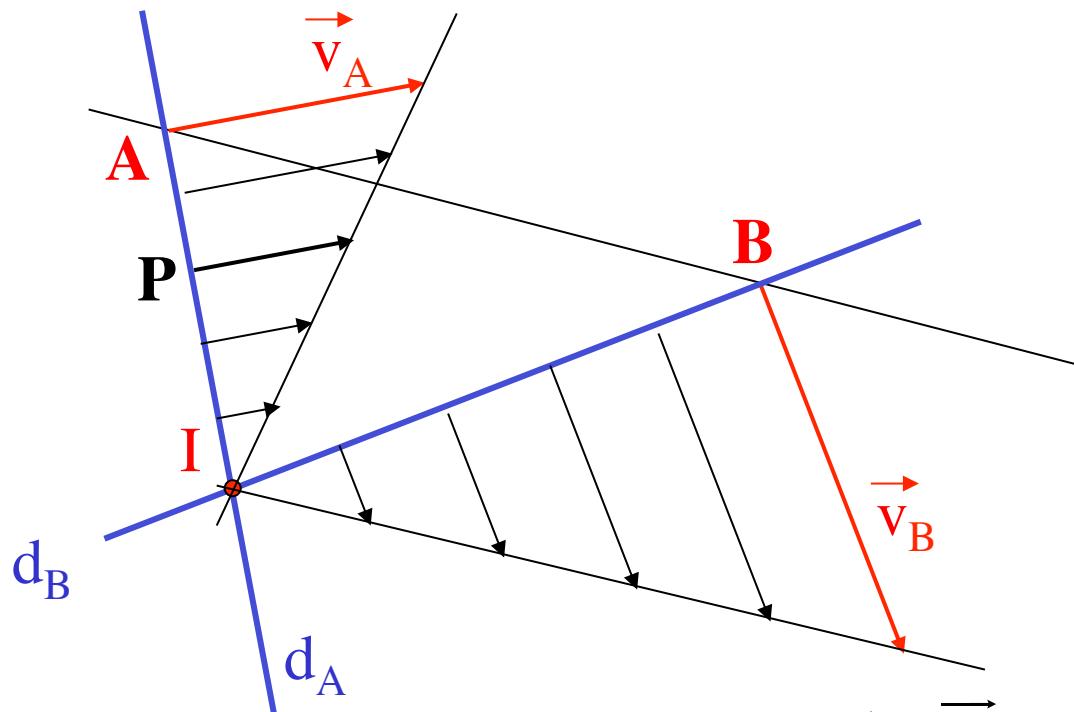
- Dans le plan Oxy (plan  $\Pi$ )

- On considère la section  $\Sigma$  du cylindre
- Le point de contact C a une vitesse nulle (pas de glissement); c'est le centre instantané de rotation
- $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} \quad \forall P \in \Sigma$   
par ex.  $\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AP}}$$

Les projections des vitesses de deux points quelconques du solide sur la droite qui les relient sont égales

## Détermination du centre instantané de rotation pour un solide en mouvement plan-sur-plan dont on connaît les vitesses de deux points A et B



$d_A$  = droite passant par A et perpendiculaire à  $v_A$

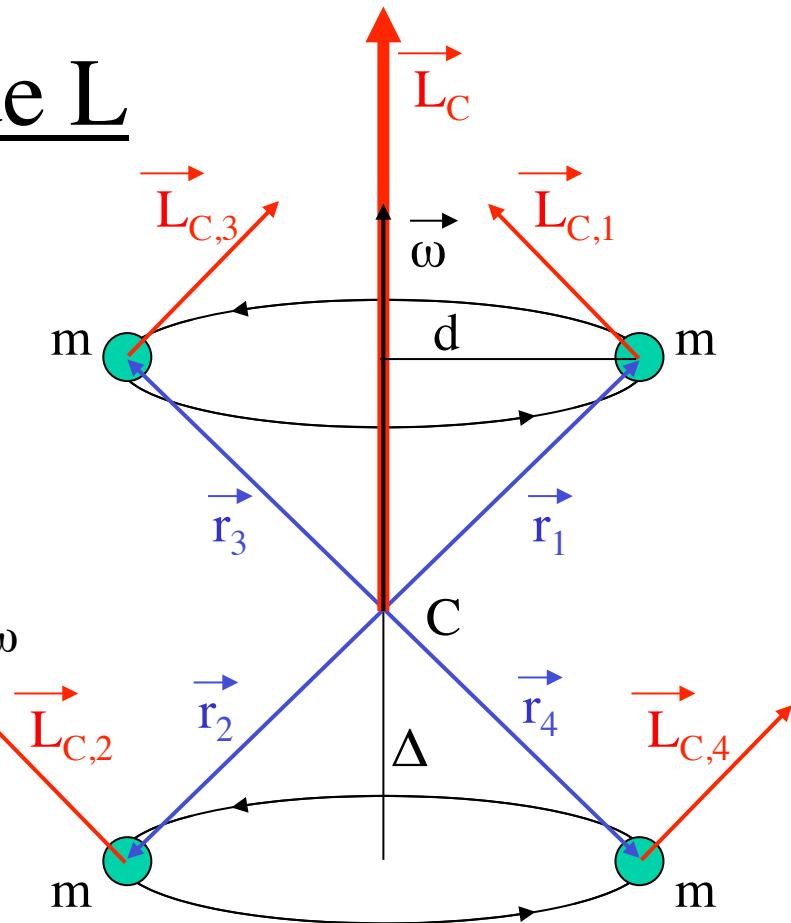
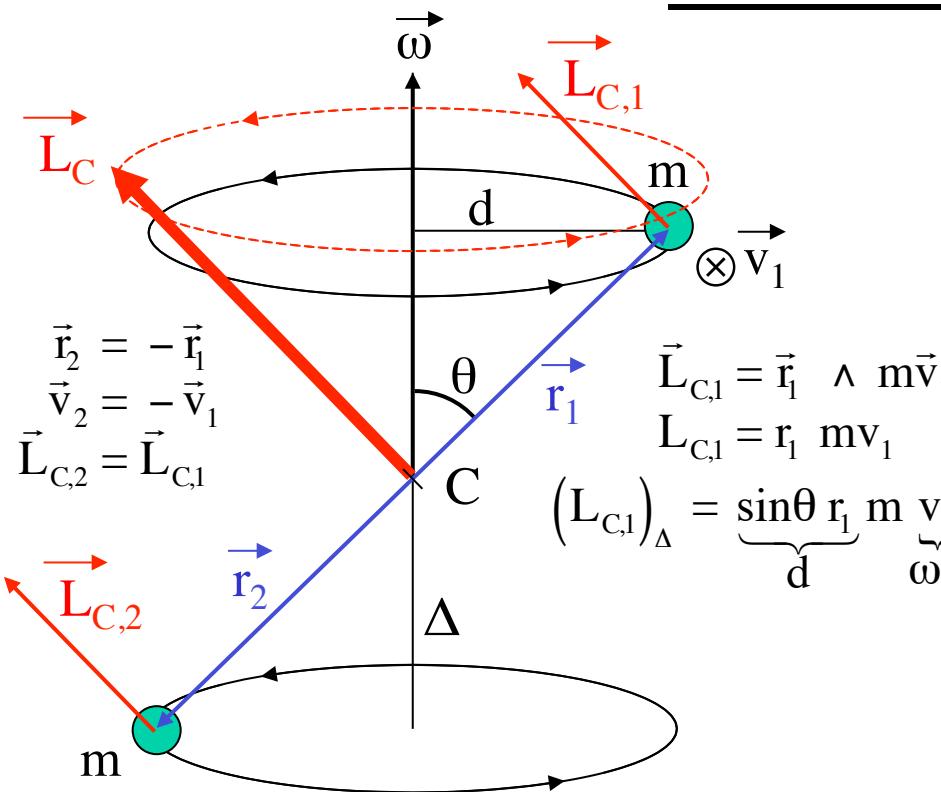
Tous les points P de cette droite ont des vitesses ayant une projection nulle sur cette droite (égale à celle de  $v_A$ )

Idem pour la droite  $d_B$

Le point commun à  $d_A$  et  $d_B$  a donc une vitesse nulle. C'est le centre instantané de rotation I.

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP} \Rightarrow v_P = \omega \overline{IP} \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{\overline{IP}}{\overline{IA}}$$

# Direction de $\vec{L}$



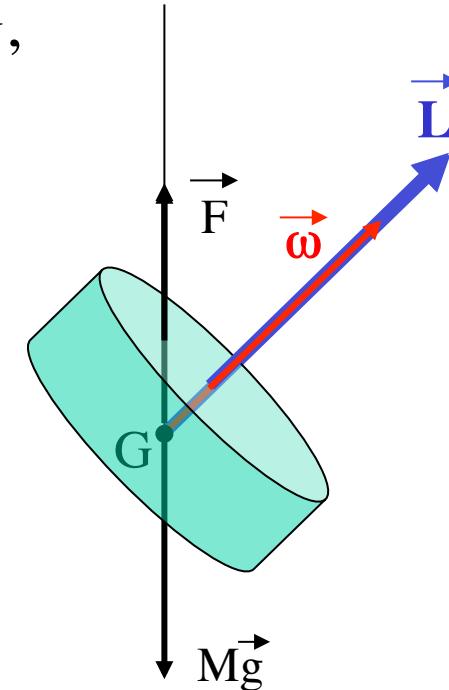
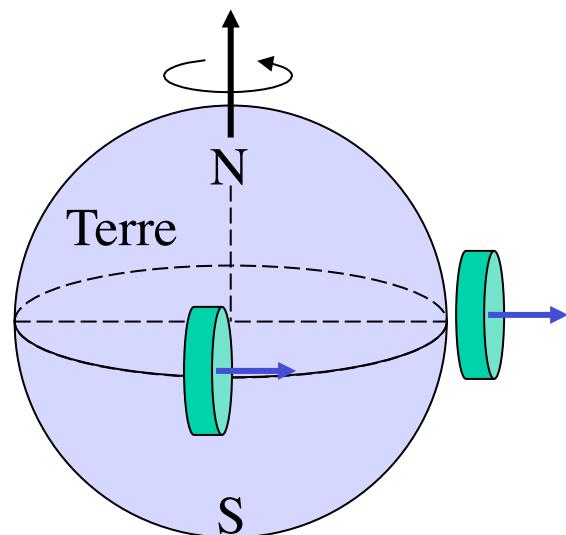
- Deux masses  $m$  telles que  $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$  par rapport à  $C$
- Axe de rotation  $\Delta$  par  $C$  faisant un angle  $\theta$  quelconque avec  $\vec{r}_1$
- $\vec{L}_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{\omega} = 2md^2\omega = I_\Delta\omega$   
 $\vec{L}_C$  n'est pas parallèle à  $\vec{\omega}$

- On ajoute deux masses  $m$  supplémentaires, de sorte à faire un **système symétrique par rapport à l'axe de rotation**
- $\vec{L}_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{\omega} = 4md^2\omega = I_\Delta\omega$   
 $\vec{L}_C$  est parallèle à  $\vec{\omega}$ :  $\vec{L}_C = I_\Delta\vec{\omega}$

# Gyroscope

- Solide « suspendu » à son centre de masse G, libre d'adopter n'importe quelle orientation, en rotation autour d'un axe de symétrie (fixe par rapport au solide) tel que  $\vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega}$
- Théorème du moment cinétique:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_G = \overbrace{\text{constante}} \\ \text{donc } \vec{\omega} = \overbrace{\text{constante}}$$

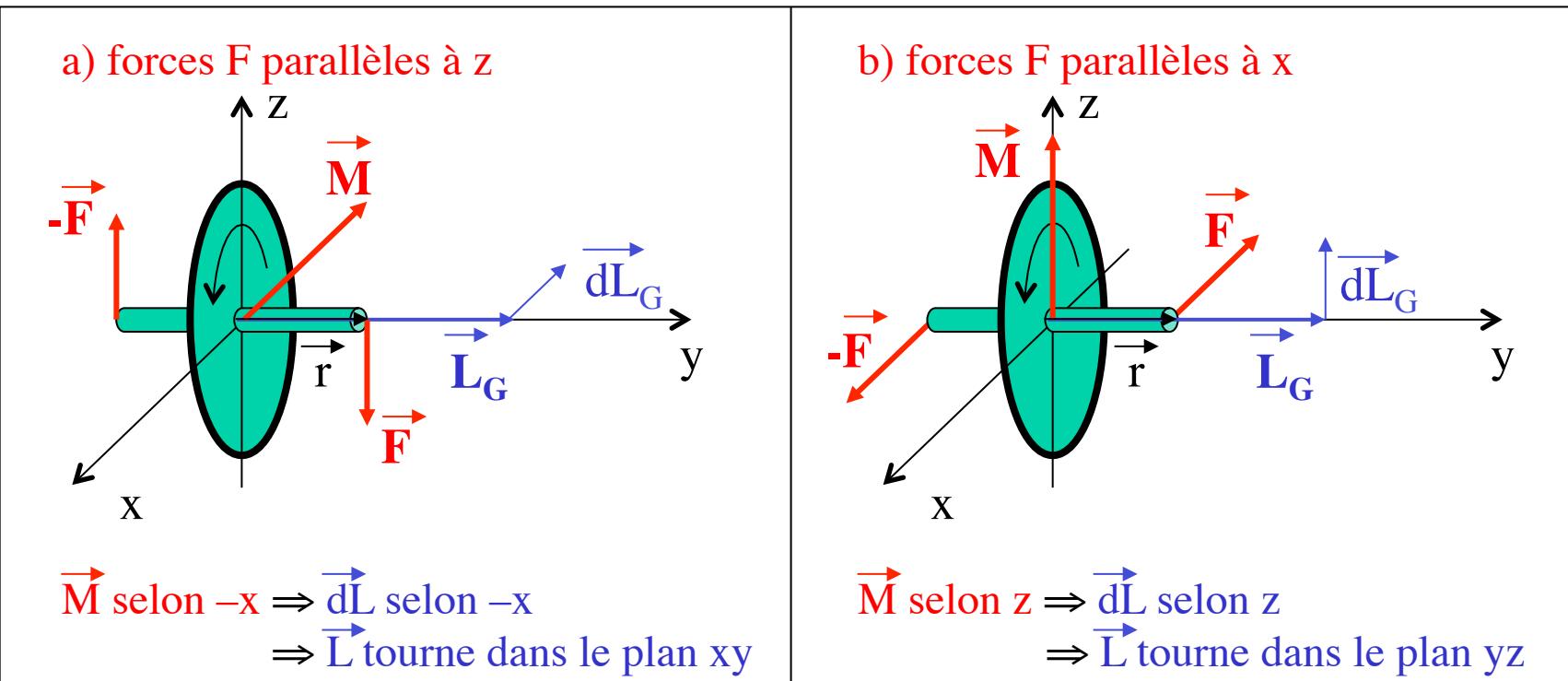


- Gyroscope à l'équateur:
  - axe de rotation horizontal selon la direction est-ouest
  - 6 heures plus tard, l'axe est devenu vertical (à cause du mouvement de la Terre)

démos: roue de vélo simple  
gyroscope de Magnus

# Effets gyroscopiques (1)

- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie:  $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$ 
  - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Ox ? ou de Oz ?



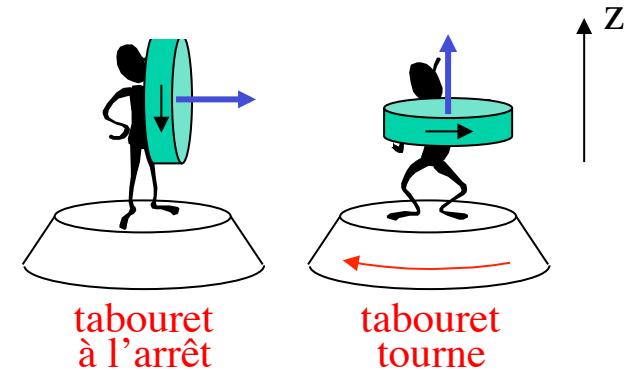
Théorème du  
moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = (\vec{r} \wedge \vec{F}) + (-\vec{r} \wedge -\vec{F}) = 2 \vec{r} \wedge \vec{F}$$

# Effets gyroscopiques (2)

démo: roue de vélo et tabouret

- Pourquoi le tabouret tournant (à l'arrêt quand l'axe de la roue est horizontal) se met-il en rotation quand on force l'axe de la roue à être vertical ?



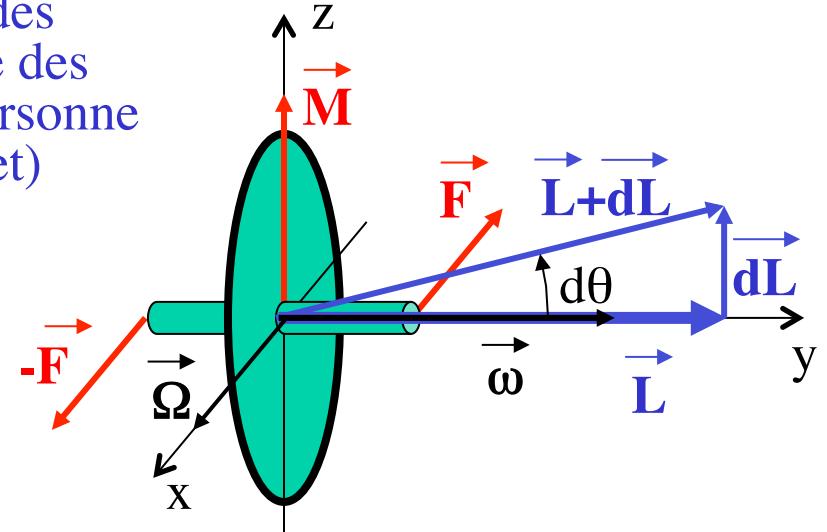
- Conservation de  $\vec{L}$ : si le tabouret peut tourner sans frottements sur son socle, la composante z du moment cinétique du système roue+personne+tabouret est conservée ( $L_{z,\text{tot}} = 0$ )
- 3ème loi: si la personne applique des forces sur la roue, la roue applique des forces égales et opposées sur la personne (qui la font tourner sur son tabouret)

$$M = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\vec{L} d\theta}{dt} = \vec{L} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

Attention: axe de rotation modifié !

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \cong \vec{\omega}$$



# Effets gyroscopiques (3)

demos: roue sur support réglable toupie

- Toupie symétrique avec un point fixe:

- Le moment du poids par rapport au point fixe est constamment perpendiculaire au moment cinétique (supposé selon l'axe de rotation propre)  $\Rightarrow$  la norme du moment cinétique reste constante:  $L_c = I_\Delta \omega$
- L'axe de rotation propre a un **mouvement de précession** autour de l'axe vertical (de vitesse angulaire  $\Omega$ )

$$\vec{M}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_c$$

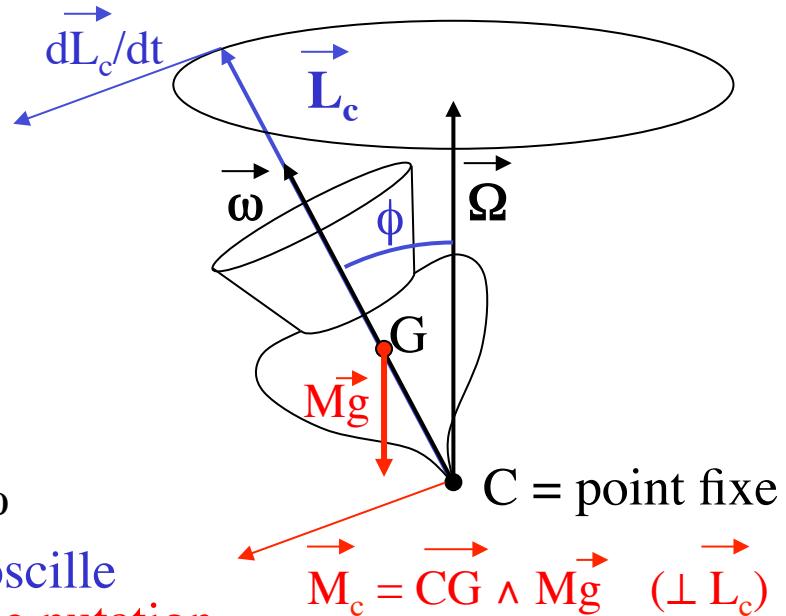
$$\overline{CG} Mg \sin\phi = \Omega L_c \sin\phi$$

$$\Omega = \frac{Mg \overline{CG}}{L_c} = \frac{Mg \overline{CG}}{I_\Delta \omega}$$

- Note: on a négligé le moment cinétique causé par la rotation  $\Omega$  !  
Résultat approximatif valable si  $\Omega \ll \omega$

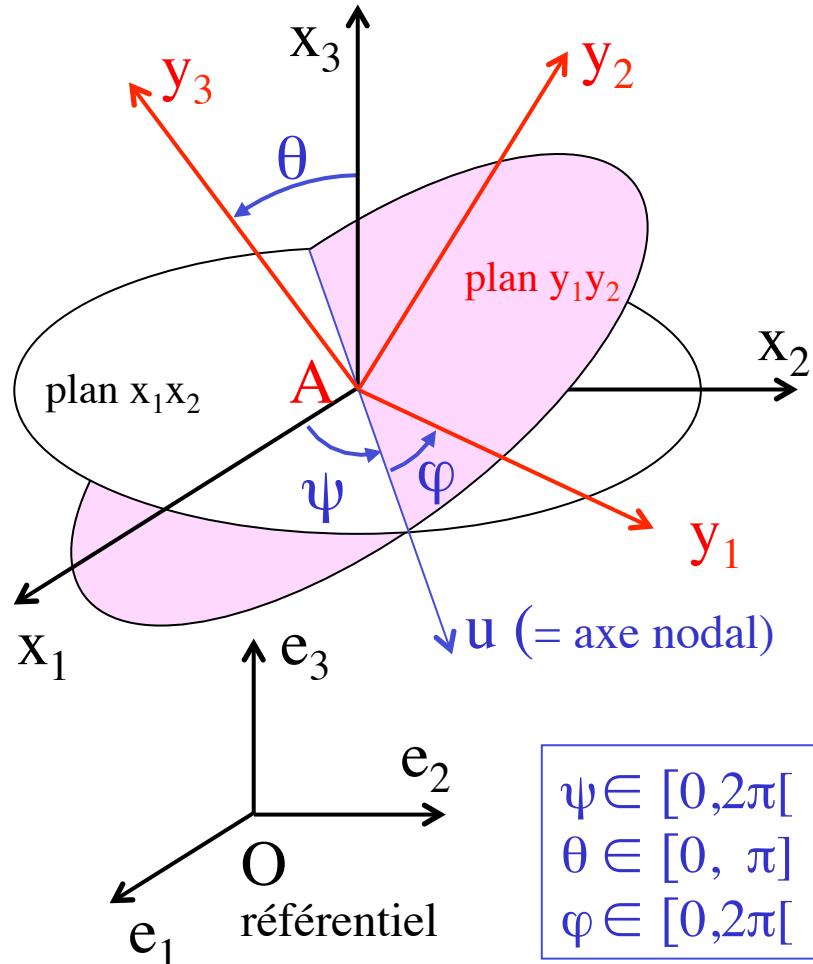
- Cas général:  $\phi$  n'est pas constant mais oscille entre deux extrêmes et un **mouvement de nutation** se superpose encore

- Toupie sans point d'appui fixe, avec frottement sur le sol



# Position d'un solide et angles d'Euler

- Repère lié au référentiel  $Oe_1e_2e_3$
- Repère lié au solide  $Ay_1y_2y_3$
- Repère  $Ax_1x_2x_3$  tel que  $x_i \parallel e_i$



- La position d'un point P du solide est donnée par

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \sum a_i(t) \hat{e}_i + \sum y_i \hat{y}_i(t)$$

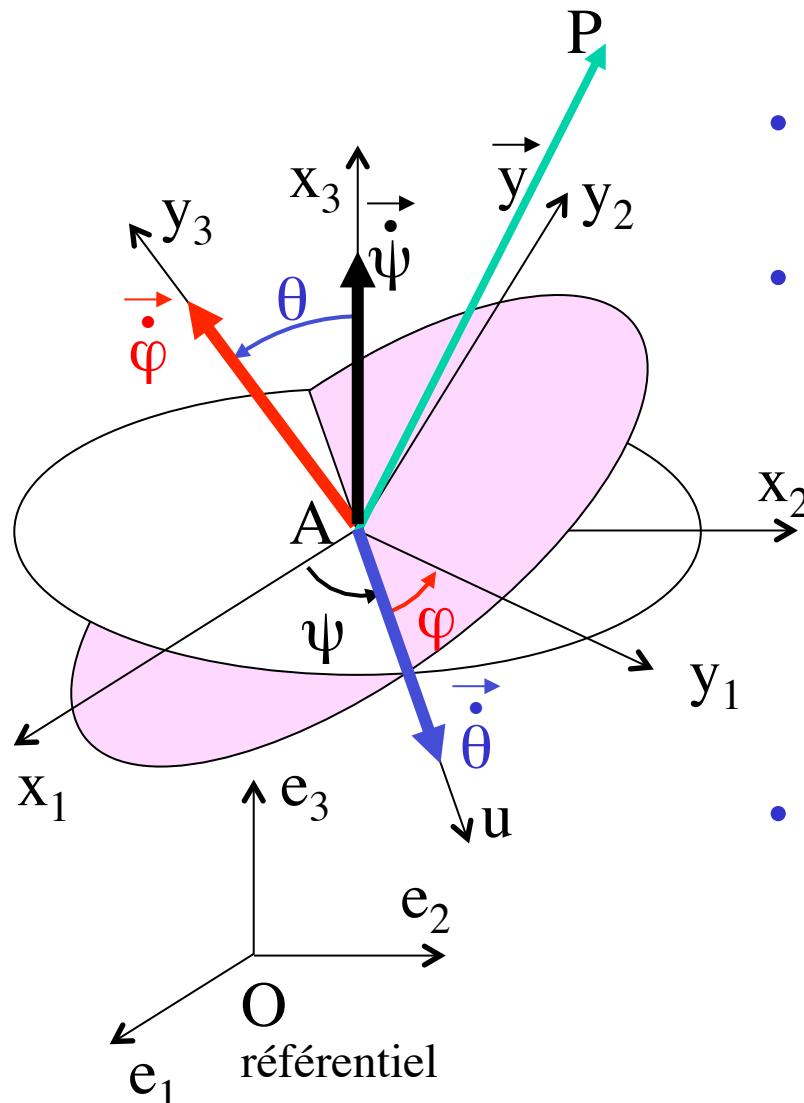
c'est-à-dire par les trois coordonnées du point A dans le repère  $Oe_1e_2e_3$  et par l'orientation du repère  $Ay_1y_2y_3$  par rapport au repère  $Ax_1x_2x_3$ .

- Cette orientation peut être caractérisée par les **trois angles d'Euler ( $\psi, \theta, \varphi$ )**; on passe de  $Ax_1x_2x_3$  à  $Ay_1y_2y_3$  par les trois rotations successives suivantes:

- Rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $x_3$  amenant  $x_1$  sur  $u$  (=axe nodal)
- Rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $u$  amenant  $x_3$  sur  $y_3$
- Rotation d'angle  $\varphi$  autour de l'axe  $y_3$  amenant  $u$  sur  $y_1$

# $\vec{\omega}$ en fonction des angles d'Euler

démo: gyroscope à air  
roue suspendue à un fil



- Un point P du solide est fixe par rapport au repère  $Ay_1y_2y_3$ :  

$$\overrightarrow{AP} \cdot \hat{y}_i = \text{constante}$$
- Vitesse de P par rapport à  $Oe_1e_2e_3$ :  

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \frac{d}{dt} \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$
- Vitesse de P par rapport à  $Ax_1x_2x_3$ :  

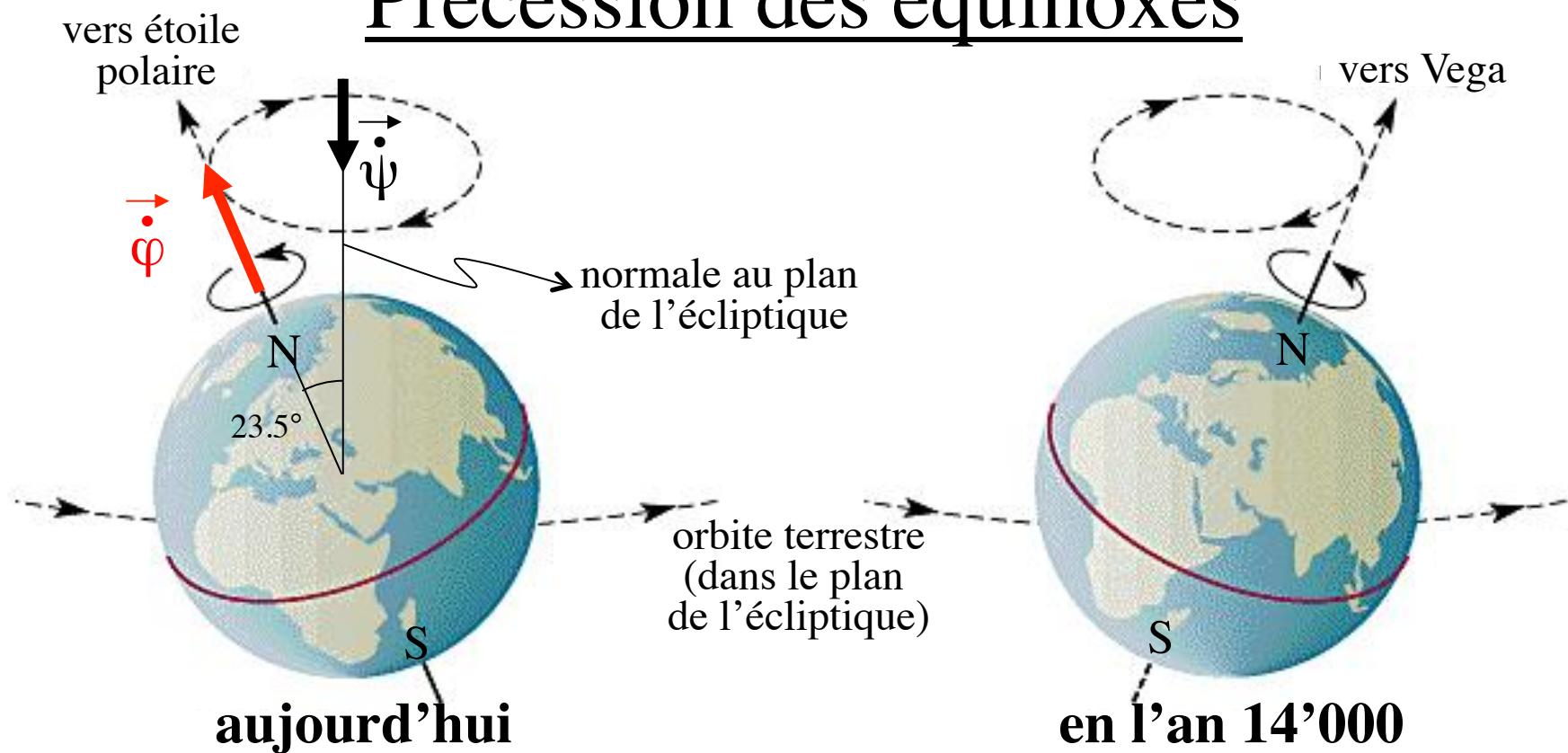
$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{AP} = \frac{d\vec{y}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \psi} \dot{\psi}}_{\vec{v}_\psi} + \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \theta} \dot{\theta}}_{\vec{v}_\theta} + \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \varphi} \dot{\varphi}}_{\vec{v}_\varphi}$$
  - vitesse de P si  $\psi$  varie seul:  $\vec{v}_\psi = \dot{\psi} \hat{x}_3 \wedge \overrightarrow{AP}$
  - vitesse de P si  $\theta$  varie seul:  $\vec{v}_\theta = \dot{\theta} \hat{u} \wedge \overrightarrow{AP}$
  - vitesse de P si  $\varphi$  varie seul:  $\vec{v}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{y}_3 \wedge \overrightarrow{AP}$
- Donc: 
$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{u} + \dot{\varphi} \hat{y}_3 = \boxed{\vec{\psi} + \vec{\theta} + \vec{\varphi}}$$

$\vec{\psi}$  = vitesse angulaire de précession

$\vec{\theta}$  = vitesse angulaire de nutation

$\vec{\varphi}$  = vitesse angulaire de rotation propre

# Précession des équinoxes



- Mise en évidence déjà par Hipparque ( $\sim 135$  av. J-C):
  - La position du Soleil à l'équinoxe de printemps se déplace par rapport aux étoiles fixes de  $1.5^\circ$  par siècle
- Précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique: période  $\sim 26'000$  ans
- Egalement petite nutation de  $9.2''$  d'arc: période  $\sim 19$  ans

Cause = moment des forces exercées par la lune et le soleil sur la Terre par rapport au centre de masse de la Terre

Au tableau

pour un système quelconque (pas forcément un solide)

## Moment cinétique par rapport à un point quelconque

- Le moment cinétique  $\vec{L}_Q$  est défini par rapport à un point O du référentiel lié au laboratoire. Si on choisit un autre point de référence Q quelconque (au repos ou en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire):

$$\begin{aligned}\vec{L}_Q &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{QP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \\ &= \overrightarrow{QO} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \underbrace{\vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}_{\vec{L}_{O,\alpha}}\end{aligned}$$

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_O + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{Mv}_G$$

Théorème du transfert

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{d}{dt} (\overrightarrow{QO} \wedge \vec{Mv}_G) = \vec{M}_O^{\text{ext}} + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \wedge \vec{Mv}_G$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{\text{ext}} + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \overrightarrow{QO} \wedge \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\ &= \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{QP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{Q,\alpha}^{\text{ext}} = \vec{M}_Q^{\text{ext}}\end{aligned}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point Q quelconque

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{M}_Q^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \wedge \vec{Mv}_G$$

- Si et seulement si  $\vec{v}_Q \parallel \vec{v}_G$ , en particulier si  $Q = G$  ou  $v_Q = 0$  (Q est un point du référentiel)

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{M}_Q^{\text{ext}}$$

## Moment cinétique par rapport à un point quelconque (suite)

- Soit un point Q quelconque (qui peut être en mouvement):

$$\begin{aligned}\vec{L}_Q &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{QP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GP}_{\alpha}) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QG} + \vec{r}_{\alpha}^*) \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_G + \vec{v}_{\alpha}^*) \\ &= \overrightarrow{QG} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_G + \overrightarrow{QG} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \wedge \vec{v}_G}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*}_{= \vec{L}_G^*}\end{aligned}$$

$$\vec{L}_Q = \overrightarrow{QG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_G^*$$

moment cinétique du centre de masse par rapport à Q

Théorème de König 1

Cas particulier où Q=G:

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

- Le moment cinétique total d'un système par rapport à Q est égal au moment cinétique du centre de masse (CM), considéré comme un point matériel, par rapport à Q plus le moment cinétique du système par rapport au CM. Ce dernier peut être évalué indifféremment dans le référentiel du laboratoire ou celui du CM.

# Moment cinétique d'un solide

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge \vec{v}_A + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha})\end{aligned}$$

Rappel:  
 $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) =$   
 $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\boxed{\vec{L}_A = \underbrace{\overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}_A}_{=} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AP}_{\alpha} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right]}$$

=0 si A=G (centre de masse)  
ou si  $v_A=0$  (point fixe)

- Par rapport à un point Q quelconque:  $\vec{L}_Q = \vec{L}_A + \overrightarrow{QA} \wedge M \vec{v}_G$   
(théorème du transfert)

Rappel:

si le solide est « continu », il faut remplacer  
la somme sur les points matériels  
par une intégrale sur le volume du solide

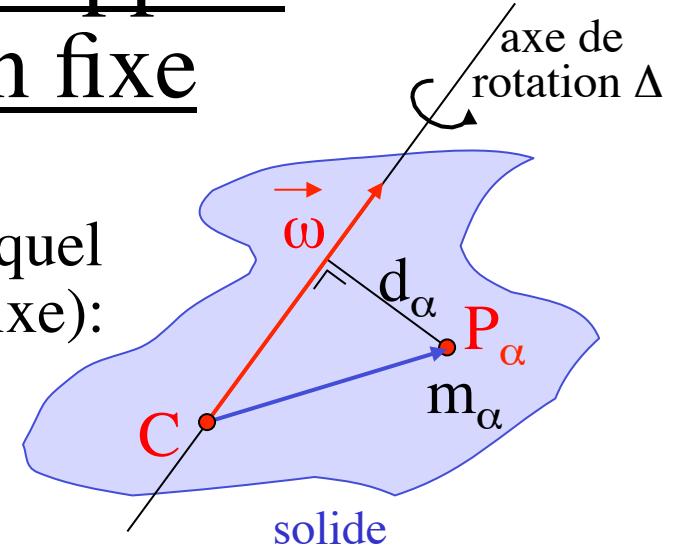
$\rho(\vec{r})$  = masse volumique

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AP}_{\alpha} = \overrightarrow{QP}_{\alpha} - \overrightarrow{QA} \rightarrow \vec{r} - \overrightarrow{QA} \\ m_{\alpha} \rightarrow dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) d^3r \\ \sum_{\alpha} \rightarrow \int_{\text{volume du solide}} \end{array} \right.$$

# Moment d'inertie par rapport à un axe de rotation fixe

- Moment cinétique par rapport à n'importe quel point C sur l'axe de rotation  $\Delta$  (point fixe):

$$\vec{L}_C = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{CP_{\alpha}}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{CP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{CP_{\alpha}} \right]$$



- Projection sur l'axe de rotation  $\Delta$ :

$$L_{\Delta} = \vec{L}_C \cdot \frac{\hat{\omega}}{\vec{\omega}/\omega} = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{CP_{\alpha}}^2 - (\overrightarrow{CP_{\alpha}} \cdot \hat{\omega})^2 \right] = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \quad \text{ne dépend plus de } C !$$

- Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta$ :
- Remarques:

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

$$L_{\Delta} = I_{\Delta} \omega$$

- $I_{\Delta}$  ne dépend pas du mouvement (ni du choix d'un repère), mais seulement de la distribution de masse par rapport à l'axe  $\Delta$
- Si  $\Delta$  est un axe de symétrie du solide, alors  $L_C$  est parallèle à  $\vec{\omega}$
- En général,  $L_C$  n'est pas parallèle à  $\vec{\omega}$

# Tenseur d'inertie

- Moment cinétique par rapport au centre de masse G:  $\vec{L}_G = \sum m_\alpha \left[ \overrightarrow{GP}_\alpha^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{GP}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{GP}_\alpha \right]$
- En coordonnées cartésiennes, dans un repère orthonormé quelconque:

$$\begin{aligned}
 L_{G,i} &= \sum_\alpha m_\alpha \left[ \overrightarrow{GP}_\alpha^2 \omega_i - \left( \sum_j (\overrightarrow{GP}_\alpha)_j \omega_j \right) (\overrightarrow{GP}_\alpha)_i \right] \\
 &= \sum_\alpha m_\alpha \left[ \overrightarrow{GP}_\alpha^2 \sum_j \delta_{ij} \omega_j - \sum_j (\overrightarrow{GP}_\alpha)_j \omega_j (\overrightarrow{GP}_\alpha)_i \right] \\
 &= \sum_j \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \left[ \overrightarrow{GP}_\alpha^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP}_\alpha)_i (\overrightarrow{GP}_\alpha)_j \right]}_{= (\tilde{I}_G)_{ij}} \omega_j = \sum_j (\tilde{I}_G)_{ij} \omega_j
 \end{aligned}$$

(éléments d'une matrice  $3 \times 3$ )

- En notation matricielle:  $\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$   
(vecteur = matrice · vecteur)
- $\tilde{I}_G$  = tenseur d'inertie au centre de masse (G)**

Note: comparaison entre dynamique de translation et de rotation:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{p} = M \vec{v}_G \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} \end{cases}$$

« le tenseur d'inertie est aux rotations ce que la masse est aux translations »

# Tenseur d'inertie (suite)

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

$\tilde{I}_A$  = tenseur d'inertie au point A

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right]$$

matrice  $3 \times 3$

symétrique:

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_A)_{ji}$$

définie positive:  $(\tilde{I}_A)_{ii} \geq 0$

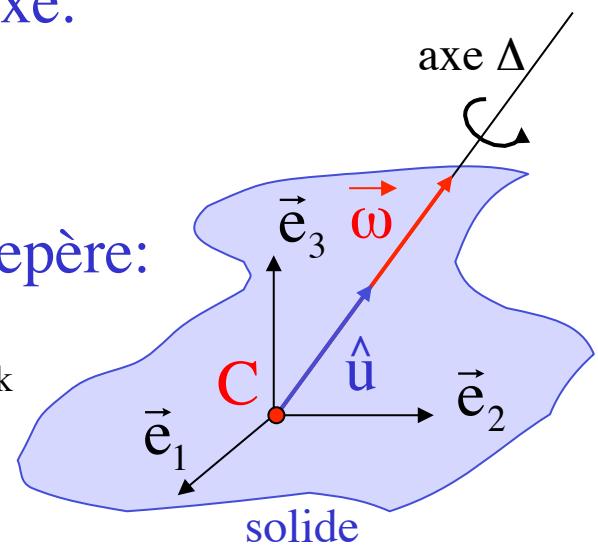
- Moment d'inertie  $I_{\Delta}$  par rapport à un axe fixe  $\Delta$  quelconque de direction  $\hat{u} = \vec{\omega}/\omega$  passant par un point C fixe:

$$I_{\Delta} = \frac{L_{\Delta}}{\omega} = \frac{\vec{L}_C}{\omega} \cdot \hat{u} = (\tilde{I}_C \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u} = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} u_i u_j$$

- Moment d'inertie  $I_k$  par rapport à l'axe k du repère:

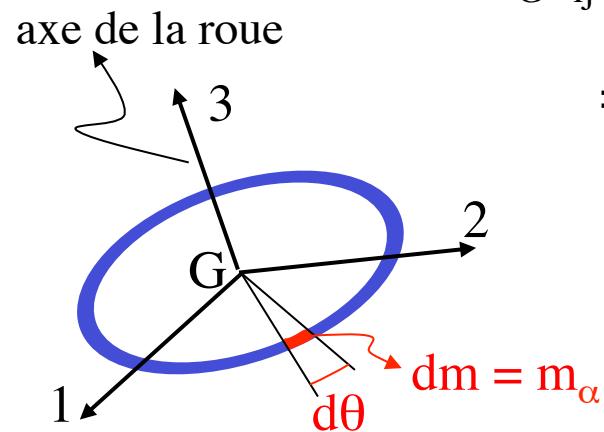
$$\hat{u} = \vec{e}_k \Rightarrow u_i = \delta_{ik} \Rightarrow I_k = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = (\tilde{I}_C)_{kk}$$

Les éléments diagonaux de la matrice représentant le tenseur d'inertie au point C sont les moments d'inertie par rapport aux axes du repère choisi au point C



## Exemple de calcul d'un tenseur d'inertie

- Roue modélisée par un anneau mince de rayon R, de masse M:



$$\begin{aligned}
 (\tilde{I}_G)_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j \right] \\
 &= \int_{\text{roue}} (R^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm = MR^2 \delta_{ij} - \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_i x_j d\theta
 \end{aligned}$$

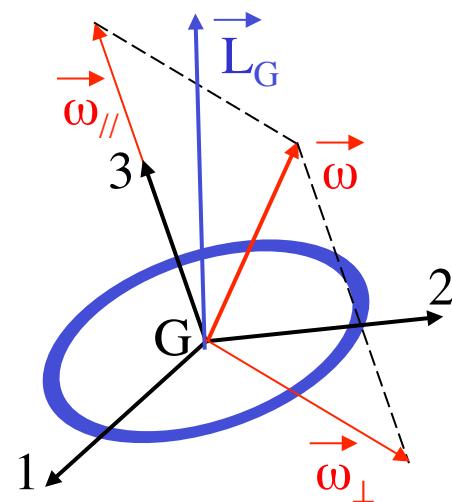
avec  $x_1 = R \cos\theta, x_2 = R \sin\theta, x_3 = 0$

$$\text{On obtient } \tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix}$$

- Roue en rotation autour d'un axe quelconque passant par G:

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_G &= \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \tilde{I}_G \cdot (\vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}) \\
 &= MR^2 \left( \frac{1}{2} \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel} \right)
 \end{aligned}$$

- $\vec{L}$  n'est pas parallèle à  $\vec{\omega}$ , mais dans le plan défini par  $\vec{\omega}$  et l'axe de la roue



# Axes principaux d'inertie

- **Théorème:**

- se démontre en algèbre linéaire

Pour tout point C d'un solide, il est toujours possible de choisir un repère orthonormé au point C tel que la matrice représentant le tenseur d'inertie soit diagonale:

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

( $\tilde{I}_C$  est diagonalisable)

- Définitions (au point C):

- Repère d'inertie: repère dans lequel  $\tilde{I}_C$  est une matrice diagonale
  - Axes principaux d'inertie: axes du repère d'inertie
  - Moments d'inertie principaux: moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d éléments diagonaux de  $\tilde{I}_C$  dans le repère d'inertie

- Dans le repère d'inertie:  $\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$

- Axe fixe  $\Delta$  passant par C:  $\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \Delta$  est un axe principal d'inertie

# Recherche des axes principaux d'inertie

- Il faut trouver les valeurs et vecteurs propres de  $\tilde{I}_C$ , donc les moments d'inertie  $I$  et les vecteurs  $\vec{\omega}$  tels que :

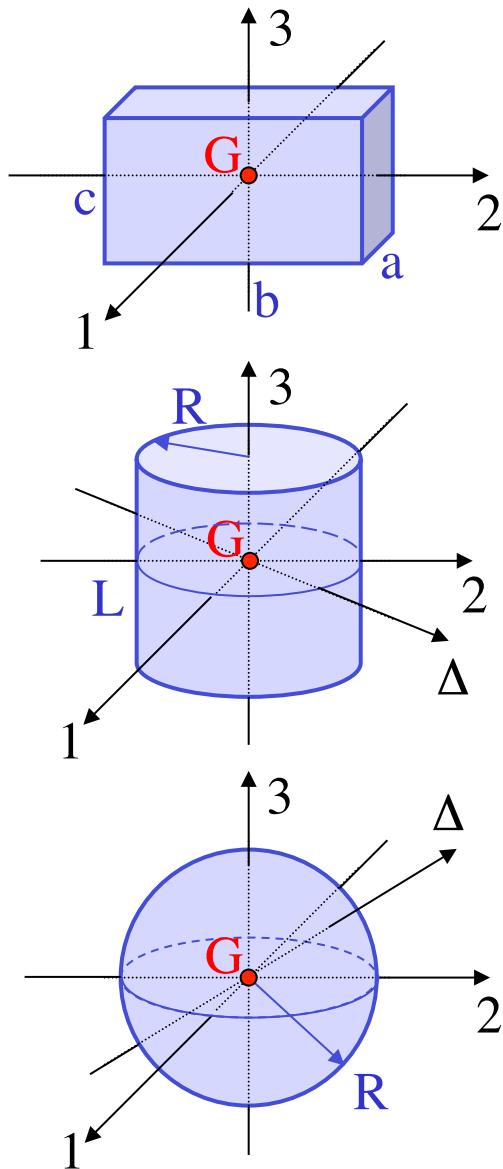
$$\begin{aligned}\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = I \vec{\omega} \Rightarrow (\tilde{I}_C - I) \cdot \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{équation polynomiale de degré 3 pour } I \\ \Rightarrow \text{en général, 3 solutions } I_1, I_2 \text{ et } I_3 \\ \Rightarrow (\tilde{I}_C - I_i) \cdot \vec{e}_i = 0 \text{ donne l'axe principal } \vec{e}_i\end{aligned}$$

- Si le solide est symétrique, les axes suivants sont des axes principaux d'inertie au point C:
  - Tout axe de symétrie passant par C
  - L'axe passant par C et perpendiculaire à un plan de symétrie
  - Tout axe passant par C et perpendiculaire à un axe de symétrie d'ordre  $n \geq 3$

démo: anagyre

# Cas particuliers simples

Axes et moments d'inertie principaux par rapport au centre de masse G de quelques solides homogènes de masse M



- Parallélépipède rectangle plein (plaquette rectangulaire si a, b ou c → 0):

$$I_1 = \frac{1}{12}M(b^2+c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12}M(c^2+a^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

« toupie asymétrique »:  
seulement trois axes principaux par G

démo: hélices bipales et tripales

- Cylindre de révolution (tige si R → 0, disque si L → 0):

plein:  $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, I_3 = \frac{1}{2}MR^2$

vide:  $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, I_3 = MR^2$

sans masse sur les bases circulaires

« toupie symétrique »:  
tout axe Δ par G dans le plan 12 est principal

- Sphère:

pleine:  $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$

vide:  $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3}MR^2$

« toupie sphérique »:  
tout axe Δ par G est principal

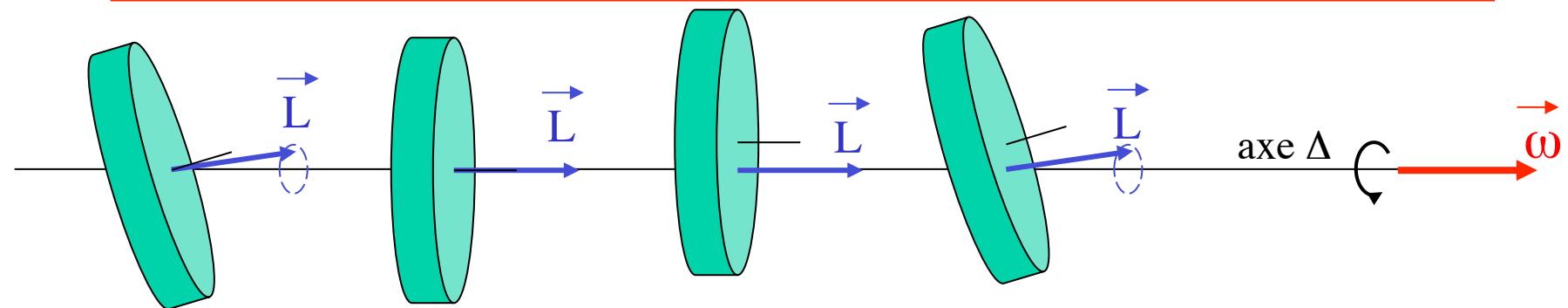
# Application: équilibrage d'un solide en rotation

démo: rotation autour d'un axe non-principal  $\Rightarrow$  moment

- Dans beaucoup de situations, il est nécessaire qu'un solide en rotation soit « équilibré »
  - Exemples: roues de voiture, hélices d'avion, pâles de ventilateur, turbines, arbres de transmission, ...
- Pour un axe de rotation  $\Delta$ :

**Solide équilibré statiquement  $\Leftrightarrow G \in \Delta$**

**Solide équilibré dynamiquement  $\Leftrightarrow \Delta$  est un axe principal d'inertie**



- Si le solide n'est pas équilibré dynamiquement, le moment cinétique précessse autour de  $\Delta$ , et un moment de force perpendiculaire à  $\Delta$  doit être appliqué pour garder  $\Delta$  fixe:  
 $\Rightarrow$  vibrations, usure des coussinets et supports, ...

# Roue mal équilibrée en rotation

- Axe de rotation fixe faisant un angle  $\theta$  avec l'axe de symétrie
- On choisit un repère d'inertie (lié à la roue, donc en mouvement):
  - Origine au centre de masse G
  - Axe 3 selon l'axe de la roue
  - Axe 1 dans le plan défini par l'axe de la roue et l'axe de rotation  $\Delta$
- Dans le repère d'inertie:

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} I_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{//} \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \sin\theta \\ 0 \\ \omega \cos\theta \end{pmatrix}$$

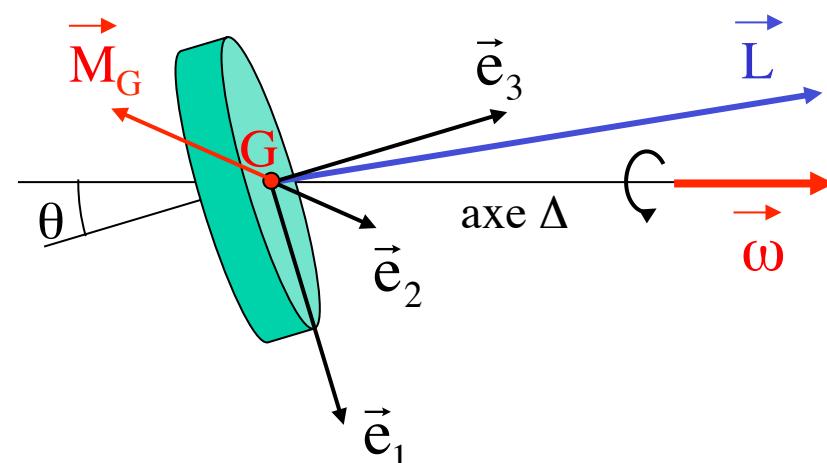
$$\vec{L}_G = I_{\perp} \omega \sin\theta \vec{e}_1 + I_{//} \omega \cos\theta \vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{\perp} \omega \sin\theta (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_1) + I_{//} \omega \cos\theta (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_3)$$

$$= I_{\perp} \omega \sin\theta (\omega \cos\theta \vec{e}_2) + I_{//} \omega \cos\theta (-\omega \sin\theta \vec{e}_2)$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = (I_{\perp} - I_{//}) \omega^2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_2 = \vec{M}_G$$

$M_G = 0$  si et seulement si  
 $\theta = 0, \theta = \pi/2$  ou  $I_{\perp} = I_{//}$



# Théorème de Steiner

- Par rapport à un point A du solide:

$$\begin{aligned}(\tilde{I}_A)_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{AP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{AP_{\alpha}})_j \right] \\&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \delta_{ij} - ((\overrightarrow{AG})_i + (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i)((\overrightarrow{AG})_j + (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j) \right] \\&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ (\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 + 2 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GP_{\alpha}}) \delta_{ij} \right. \\&\quad \left. - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{AG})_j - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{AG})_j \right] \\&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{AG})_j \right]\end{aligned}$$

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_G)_{ij} + M \left[ \overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{AG})_j \right]$$

permet de calculer le tenseur d'inertie au point A quelconque d'un solide connaissant celui au centre de masse G

= tenseur d'inertie au point A  
d'une masse M au point G

# Théorème de Steiner (applications)

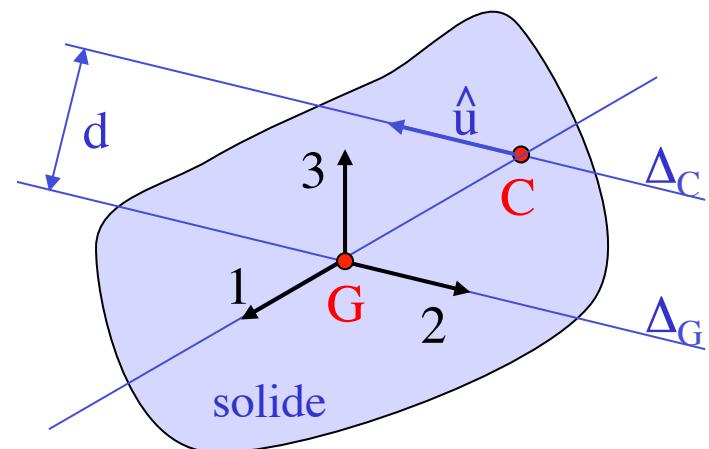
- Formule de Steiner pour les moments d'inertie:

- $\Delta_C$  = axe de direction  $\hat{u}$  passant par un point C quelconque
- $\Delta_G$  = axe de direction  $\hat{u}$  passant par le centre de masse G
- d = distance entre les deux axes  $\Delta_C$  et  $\Delta_G$

$$\begin{aligned} I_{\Delta_C} &= \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} (\tilde{I}_G)_{ij} u_i u_j + \sum_{i,j} M \left[ \overrightarrow{CG}^2 u_i u_j \delta_{ij} - (\overrightarrow{CG})_i u_i (\overrightarrow{CG})_j u_j \right] \\ &= I_{\Delta_G} + M \left[ \overrightarrow{CG}^2 - (\overrightarrow{CG} \cdot \hat{u})^2 \right] \end{aligned}$$

$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + M d^2$$

= moment d'inertie d'une masse M à une distance d de  $\Delta_C$



- Axes principaux:

Si les axes  $\Delta_G$  et CG sont des axes principaux d'inertie au point G alors les axes  $\Delta_C$  et CG sont des axes principaux d'inertie au point C

# Meule

- Description et hypothèses:
  - Meule: disque mince de masse  $M$ , rayon  $R$ , centre de masse  $G$
  - Axe de la meule  $CG$ : horizontal, sans masse, longueur  $d$
  - Roulement sans glissement sur le sol avec point  $C$  fixe sur un axe vertical
  - $\omega$  = rotation propre de la meule,  $\Omega$  = rotation autour de l'axe vertical
- Vecteur instantané de rotation total =  $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$
- $$\begin{cases} \vec{0} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} \\ \vec{0} = \vec{v}_C = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC} \end{cases}$$

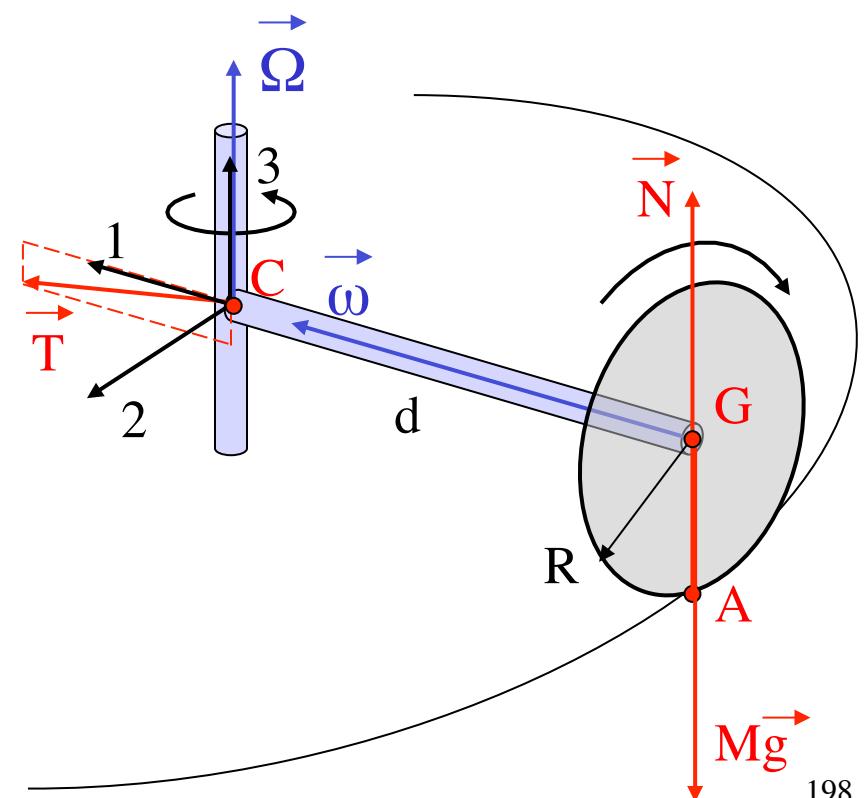
$$\Rightarrow (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega R = \Omega d}$$
- Equations du mouvement:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_G = \vec{T} + \vec{N} + M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \overrightarrow{CG} \wedge (\vec{N} + M\vec{g})$$



# Meule (suite)

démo

- Tenseur d'inertie:  
(dans repère d'inertie  
d'axes 1, 2, et 3,  
en rotation avec l'axe  
de la meule autour de 3)

$$\tilde{I}_{Cij} = (\tilde{I}_G)_{ij} + M \left[ \overrightarrow{CG}^2 \delta_{ij} - (CG)_i (CG)_j \right]$$

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Moment cinétique:

$$\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{I}_C)_{11} \vec{\omega} + (\tilde{I}_C)_{33} \vec{\Omega}$$

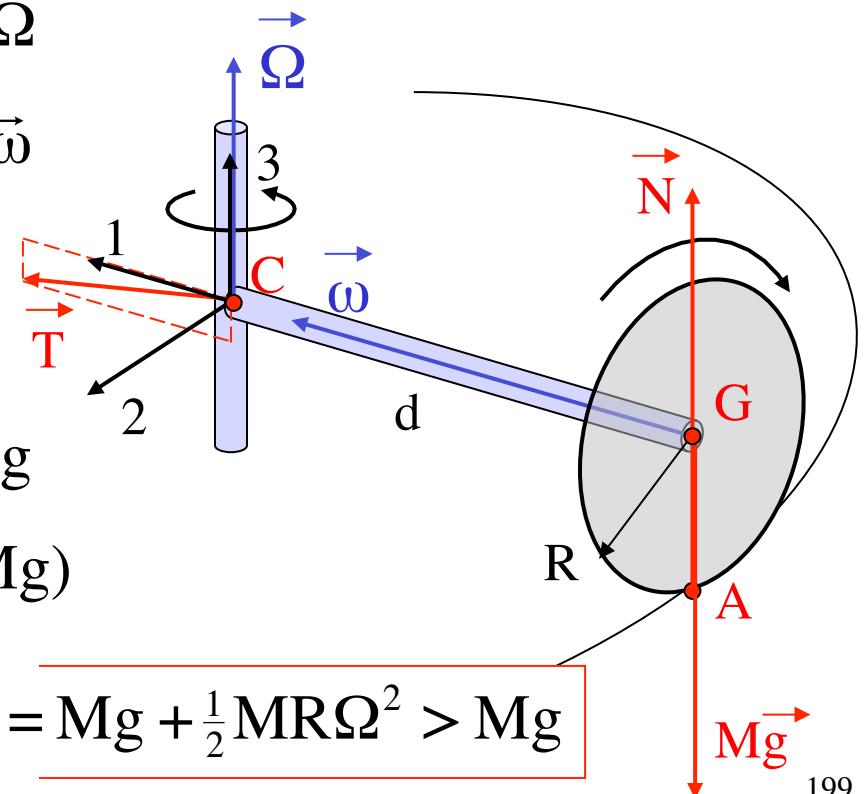
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = (\tilde{I}_C)_{11} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}$$

- Équations du mouvement:

$$M\vec{a}_G = \sum \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} M\Omega^2 d = T_1 \\ 0 = T_2 \\ 0 = T_3 + N - Mg \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\Omega\omega = d(N - Mg)$$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg + \frac{1}{2}MR^2\Omega \frac{\omega}{d} = Mg + \frac{1}{2}MR\Omega^2 > Mg}$$



# Roulement sans glissement sur plan incliné

- Cylindre de révolution roulant sans glisser:**  $\Rightarrow v_A = 0 \Rightarrow v_G = \omega R$
- Moment d'inertie:**  $I_{G,y} = kMR^2$ 
  - $k$  = nombre caractérisant la « forme », indépendamment de la masse et de la dimension
    - $k=1/2$  si cylindre homogène plein
    - $k=1$  si cylindre homogène vide
- Moment cinétique:**

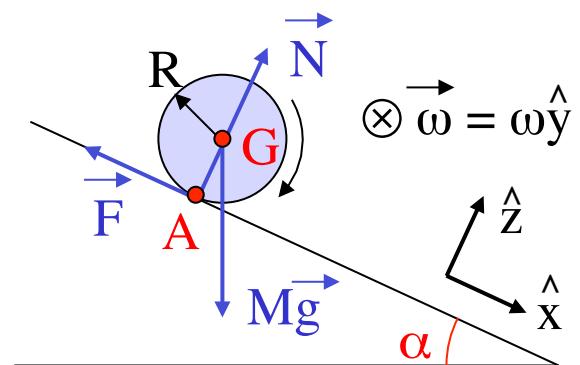
$$\vec{L}_G = I_{G,y} \vec{\omega} \Rightarrow L_G = I_{G,y} \omega = kMR^2 \frac{v_G}{R} = kRMv_G$$

- Équations du mouvement:**

$$\begin{aligned} M\vec{a}_G &= M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ma_G = Mg \sin\alpha - F \\ 0 = 0 \\ 0 = N - Mg \cos\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = Mg \cos\alpha \\ F = Mg \sin\alpha \frac{k}{k+1} \\ a_G = \frac{g \sin\alpha}{k+1} \end{array} \right. \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \vec{M}_G \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ kRMa_G = FR \\ 0 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

– Accélération  $a_G$  ne dépend que de  $k$ , pas de  $M$  ni de  $R$  !

démo



# Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cin}} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 \\
 \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \vec{\omega}^2 \overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 - \left( \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \delta_{ij} \overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 - \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \left( AP_{\alpha} \right)_i \left( AP_{\alpha} \right)_j \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ \overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - \left( AP_{\alpha} \right)_i \left( AP_{\alpha} \right)_j \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \tilde{I}_A_{ij} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega})
 \end{aligned}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + \underbrace{M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG})}_{=0 \text{ si } A=G \text{ (centre de masse)} \\ \text{ou si } v_A=0 \text{ (point fixe)}} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega})$$

Si rotation selon axe principal d'inertie  $\Delta$  par un point fixe:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$$

# Roulement sans glissement sur pente

- Energie cinétique (en utilisant le point A):

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{G,y} + MR^2) \omega^2$$

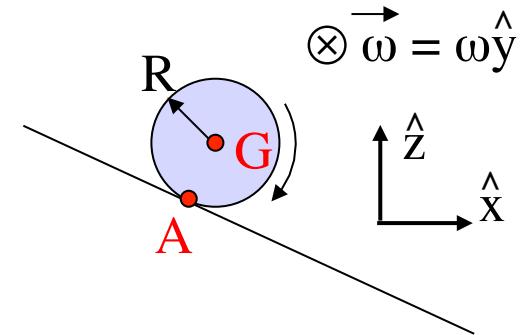
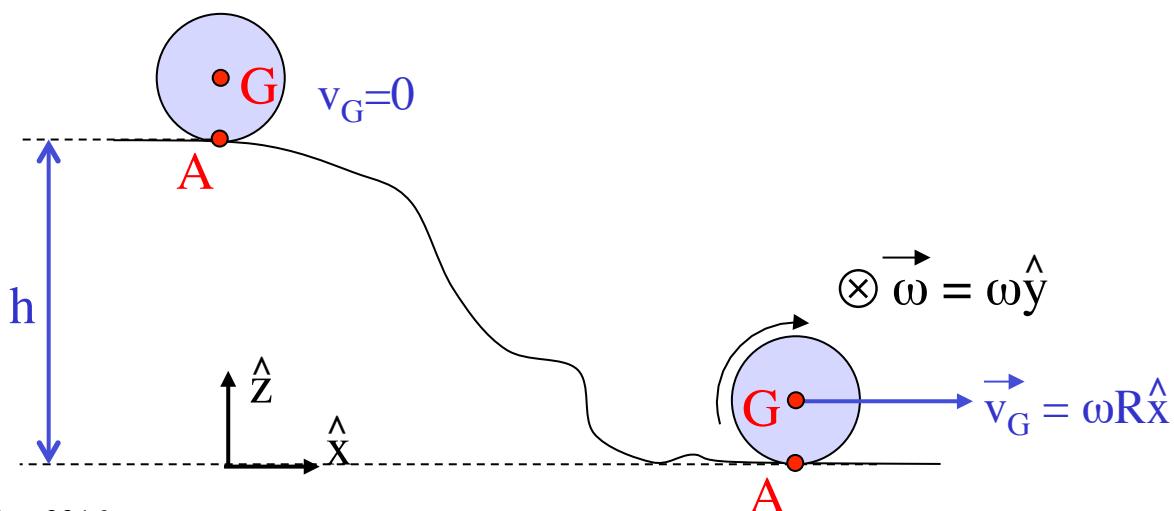
- Energie cinétique (en utilisant le point G):

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} Mv_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2 = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2$$

- Energie mécanique totale:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2(t) + Mg z_G(t) = \text{constante}$$

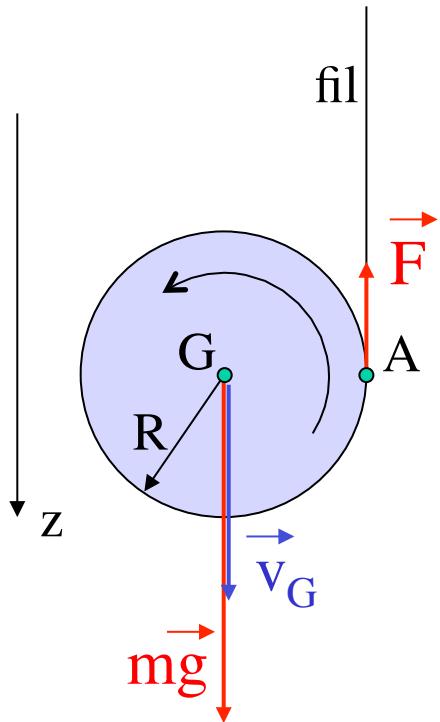
- Exemple:



La force de frottement en A ne travaille pas ! ( $v_A=0$ )

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= Mgh = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2 \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{2Mgh}{I_{A,y}}} \end{aligned}$$

# Yoyo



- Equations du mouvement:
 
$$\vec{M}_G = d\vec{L}_G / dt \Rightarrow RF = I_G \dot{\omega} = \frac{1}{2} mR^2 (a_G/R)$$

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2} m\vec{a}_G \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow F = \frac{1}{2} m a_G \\ \Rightarrow F = mg - m a_G \end{array} \right\} \Rightarrow a_G = \frac{2}{3} g$$
- Conditions initiales (à  $t=0$ ):  $v_G = 0$  et  $z = 0$
- Solution:  $\begin{cases} v_G(t) = a_G t \\ z(t) = \frac{1}{2} a_G t^2 \end{cases} \Rightarrow v_G = \sqrt{2a_G z} = \sqrt{\frac{4}{3} g z}$

- Le poids est conservatif et  $F$  ne travaille pas  
 $\Rightarrow$  le problème peut être résolu par la conservation de l'énergie:

$$K^* = \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m R^2 \right) (v_G/R)^2 = \frac{1}{4} m v_G^2$$

$$K = \frac{1}{2} m v_G^2 + K^* = \frac{3}{4} m v_G^2$$

$$E = \frac{3}{4} m v_G^2 - mgz = E_0 = 0 \Rightarrow v_G = \sqrt{\frac{4}{3} g z}$$

# Dynamique du solide avec axe fixe

démo

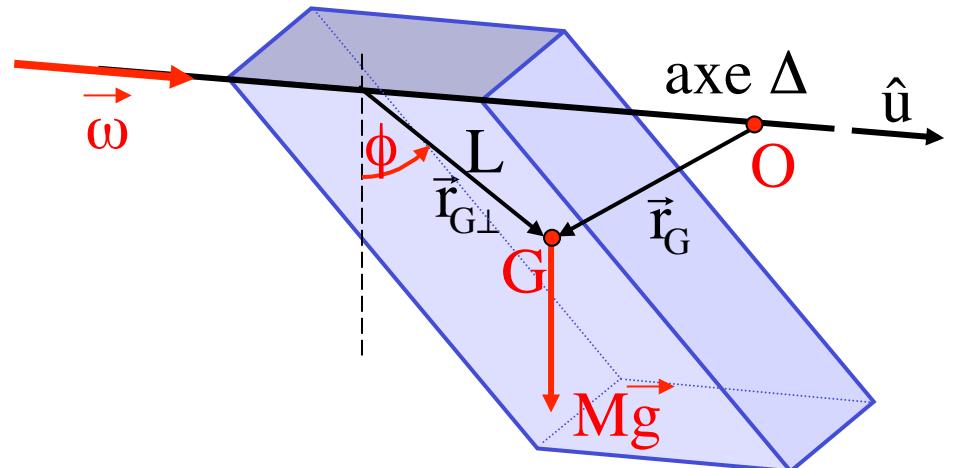
- Quand un axe de rotation  $\Delta$  est fixe (et qu'on ne s'intéresse pas aux forces et moments qui maintiennent cet axe fixe), il est utile de projeter le théorème du moment cinétique sur cet axe:

- Pour tout point O sur l'axe  $\Delta$  de direction  $\hat{u}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_O &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \hat{u}) &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (I_{\Delta} \omega) &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \\ \Rightarrow I_{\Delta} \ddot{\omega} &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha, \perp} \wedge \vec{F}_{\alpha, \perp}^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \end{aligned}$$

où  $\vec{r}_{\alpha, \perp}$  et  $\vec{F}_{\alpha, \perp}^{\text{ext}}$  sont les composantes de  $\vec{r}_{\alpha}$  et  $\vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$  perpendiculaires à  $\hat{u}$

- Exemple: pendule physique** = solide soumis à la pesanteur et libre de se mouvoir autour d'un axe fixe horizontal



$$\begin{aligned} I_{\Delta} \ddot{\omega} &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha, \perp} \wedge m_{\alpha} \vec{g}) \cdot \hat{u} \\ I_{\Delta} \ddot{\phi} &= (\vec{r}_{G, \perp} \wedge M \vec{g}) \cdot \hat{u} = -L M g \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= -\frac{L M g}{I_{\Delta}} \sin \phi \end{aligned}$$

- Si toute la masse M est en G ( $I_{\Delta} = M L^2$ ):

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

**pendule mathématique**

# Pendule physique tournant

démo

- Rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par O
- Dans repère d'inertie  $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$$\vec{\omega} = \omega \sin\alpha \hat{e}_1 - \omega \cos\alpha \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = I_{\perp} \omega \sin\alpha \hat{e}_1 - I_{\parallel} \omega \cos\alpha \hat{e}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}_G = (I_{\perp} - I_{\parallel}) \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \hat{e}_3$$

- Théorème du moment cinétique:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \overrightarrow{GO} \wedge \vec{T} \Rightarrow (I_{\perp} - I_{\parallel})\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = TL \sin(\alpha - \beta) \\ &= L(T \cos\beta \sin\alpha - T \sin\beta \cos\alpha) \end{aligned}$$

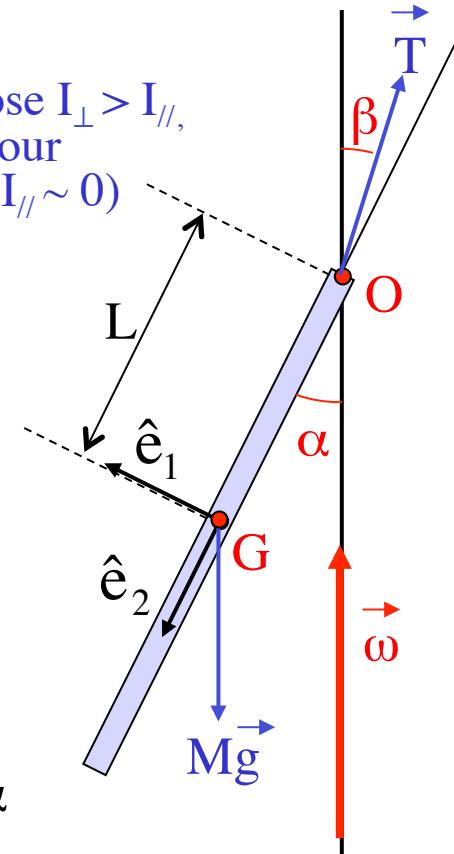
- Théorème du centre de masse:

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_G \Rightarrow \begin{cases} T \cos\beta = Mg \\ T \sin\beta = M\omega^2 L \sin\alpha \end{cases}$$

- $\Rightarrow (I_{\perp} - I_{\parallel})\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = L(Mg \sin\alpha - M\omega^2 L \sin\alpha \cos\alpha)$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{g / (\omega^2 L)}{1 + \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{ML^2}} < \frac{g}{\omega^2 L}$$

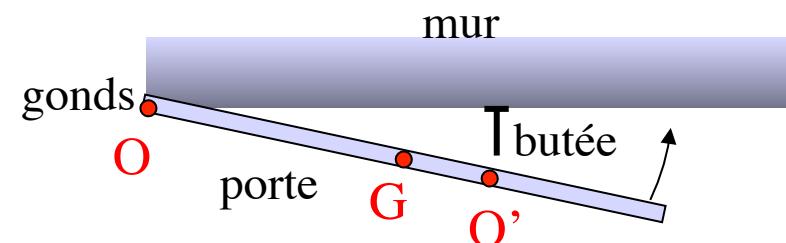
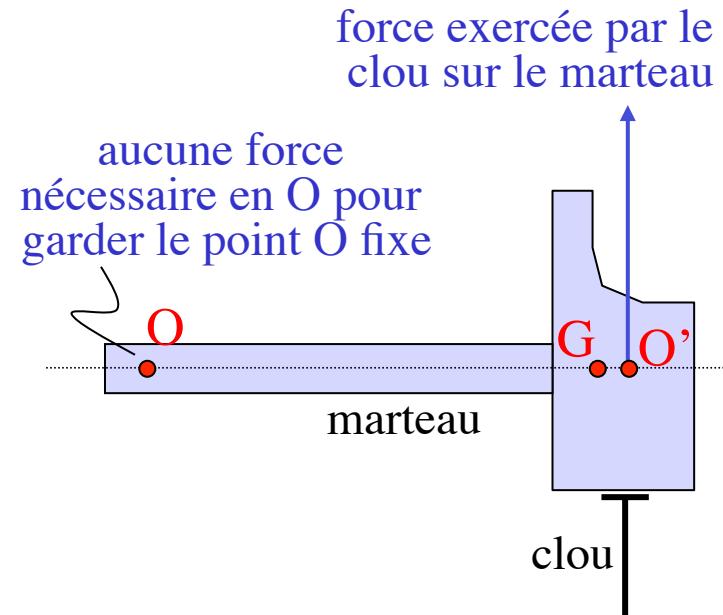
On suppose  $I_{\perp} > I_{\parallel}$ , comme pour une tige ( $I_{\parallel} \sim 0$ )



cas du pendule mathématique  
(masse M en G), avec  $I_{\perp}=I_{\parallel}=0$  et  $\alpha=\beta$

# Dynamique du solide avec axe fixe (suite)

- Solide libre de tourner autour d'un axe fixe passant par O
- Centre de percussion:
  - point  $O'$  sur la droite OG tel qu'un choc (percussion) appliqué en ce point (perpendiculairement à OG) n'engendre aucune réaction (répercussion) de l'axe de rotation sur le solide
- Exemples et applications:
  - Marteau
    - où le tenir ?
  - Batte de baseball
    - où frapper la balle ?
  - Butée de porte
    - où la placer ?



butée placée au centre de percussion:  
merci pour les gonds

# Calcul du centre de percussion

- Batte de baseball frappée par une balle avec une force  $F(t)$  au centre de percussion  $O'$  par rapport à l'emplacement des mains en  $O$ :
  - Juste avant le choc ( $t=0$ ):  $v_G = 0, \omega = 0$  (batte au repos)
  - Juste après le choc ( $t=\Delta t$ ):  $v_G = \omega d \neq 0$  (point  $O$  fixe)
  - Pas de force appliquée par les mains en  $O$ , donc:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \int_{t=0}^{\Delta t} \vec{F}(t) dt \quad \Rightarrow \quad Mv_G = \int_{t=0}^{\Delta t} F(t) dt \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \vec{M}_G^{\text{ext}} \Rightarrow \Delta\vec{L}_G = \int_{t=0}^{\Delta t} \vec{M}_G^{\text{ext}}(t) dt \Rightarrow I_G \omega = d' \int_{t=0}^{\Delta t} F(t) dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow Mv_G d' = I_G \omega$$

$\downarrow$

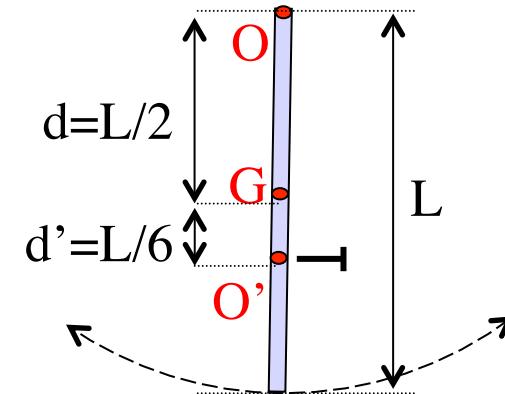
$I_G = Mdd'$

- Pendule physique interrompu dans sa course:

- Point  $O$  à l'extrémité d'une barre mince homogène de masse  $M$  et de longueur  $L$ :

$$\frac{1}{12}ML^2 = I_G = Mdd' = M \frac{L}{2} d' \Rightarrow d' = \frac{L}{6}$$

démo



# Axes en rotation: équations d'Euler

- $C = \text{point fixe du solide (ou centre de masse)} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}}$
- $C\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3 = \text{repère d'inertie au point } C \text{ (lié au solide)}$

$$\vec{L}_C = \sum_i L_i \hat{e}_i \quad \text{avec} \quad L_i = I_i \omega_i$$

$I_i = \text{moments d'inertie principaux}$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_i (\dot{L}_i \hat{e}_i + L_i \dot{\hat{e}}_i) = \sum_i (I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + L_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i) = \sum_i I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_C$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \quad \left( \text{Note: } \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}_C \Leftrightarrow \omega_i \text{ constants} \right)$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à  $C$ , en composantes dans le repère d'inertie:

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_{C,1}^{\text{ext}}$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_{C,2}^{\text{ext}}$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_{C,3}^{\text{ext}}$$

équations d'Euler

équ. différentielles couplées  
pour  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  et  $\omega_3(t)$

# Solide en rotation libre

- Par exemple, solide en chute libre:
  - Le centre de masse G suit une parabole (si on néglige les frottements)
  - On a  $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = 0$
- Cas particulier d'une rotation autour d'un axe proche de l'axe principal d'inertie  $\hat{\mathbf{e}}_1$ :  $\omega_2 \ll \omega_1$  et  $\omega_3 \ll \omega_1$ 
  - Equations d'Euler (où on a négligé  $\omega_2\omega_3$ ):

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1(t) = \omega_1 = \text{constante} \\ I_2 \dot{\omega}_2(t) = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3(t) \\ I_3 \dot{\omega}_3(t) = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_3 I_2 \ddot{\omega}_2(t) = (I_3 - I_1)(I_1 - I_2) \omega_1^2 \omega_2(t) \\ I_2 I_3 \ddot{\omega}_3(t) = (I_1 - I_2)(I_3 - I_1) \omega_1^2 \omega_3(t) \end{cases}$$

- $\omega_2(t)$  et  $\omega_3(t)$  vont osciller autour de 0 (et donc rester petits) si et seulement si

$$(I_3 - I_1)(I_2 - I_1) > 0 \Leftrightarrow (I_1 = \min(I_i) \text{ ou } I_1 = \max(I_i))$$

# Septième partie:

## Mouvement relatif et changement de référentiel en mécanique newtonienne

### Notions abordées:

- Référentiel
- Vitesse et accélération relatives
- Forces d'inertie
- Loi d'inertie et référentiels d'inertie
- Dynamique terrestre

### Buts:

- comprendre la différence entre référentiel et repère
- comprendre la notion de référentiel d'inertie
- assimiler les bases de la mécanique Newtonienne classique

# Mouvement et référentiel

démos: jet d'eau tournant  
fusil tournant  
table tournante + feutre

- La description du mouvement d'un point matériel ou d'un système (vitesses, accélérations, forces, ...) se fait nécessairement par rapport à un certain référentiel:
  - Référentiel = ensemble d'au moins 4 points non coplanaires et immobiles les uns par rapport aux autres (= solide indéformable !)
  - Note:
    - on peut associer à chaque référentiel un observateur et ses instruments de mesure, immobiles dans ce référentiel (ils « font partie » du référentiel)
    - décrire un mouvement dans un certain référentiel consiste alors à se mettre à la place de cet observateur
  - Exemples:
    - le laboratoire (= la Terre)
    - un carrousel
    - un ascenseur
- Le choix du référentiel est a priori arbitraire, mais ...
  - ... tous les référentiels sont-ils équivalents ?
  - ... les lois de la physique sont-elles les mêmes dans tous les référentiels ?
  - ... permettent-elles de mettre en évidence des référentiels privilégiés ?

# Changement de référentiel

- Point matériel P décrit dans deux référentiels différents:

- Dans un référentiel R auquel est lié le repère  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  :

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}, \quad \vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt}, \quad \vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} \quad \text{où } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \text{ sont considérés constants}$$

$$\vec{r}_P = \sum x_i \hat{e}_i, \quad \vec{v}_P = \sum \frac{dx_i}{dt} \hat{e}_i, \quad \vec{a}_P = \sum \frac{d^2x_i}{dt^2} \hat{e}_i$$

- Dans un autre référentiel R' auquel est lié le repère  $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ :

$$\vec{r}'_P = (\overrightarrow{O'P})', \quad \vec{v}'_P = \frac{d\vec{r}'_P}{dt'}, \quad \vec{a}'_P = \frac{d\vec{v}'_P}{dt'} \quad \text{où } \hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3 \text{ sont considérés constants}$$

$$\vec{r}'_P = \sum x'_i \hat{e}'_i, \quad \vec{v}'_P = \sum \frac{dx'_i}{dt'} \hat{e}'_i, \quad \vec{a}'_P = \sum \frac{d^2x'_i}{dt'^2} \hat{e}'_i$$

- Postulats de la mécanique classique (non-relativiste):

① Le temps est un absolu:  $t' = t + \text{constante} \Rightarrow \frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$

② L'espace est un absolu:  $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \vec{r}'_Q - \vec{r}'_P \quad \forall P, Q$

- Conséquence:

- R' est aussi un « solide » dans R;  
son mouvement est décrit par les vitesses instantanées  
de translation et de rotation de R' par rapport à R:

$$\vec{v}_{0'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO'} \quad \text{et} \quad \vec{\omega}$$

# Transformation des vitesses

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{Q'P}$$

$\vec{r}_P$        $\vec{r}_{O'}$        $\vec{r}'_P$

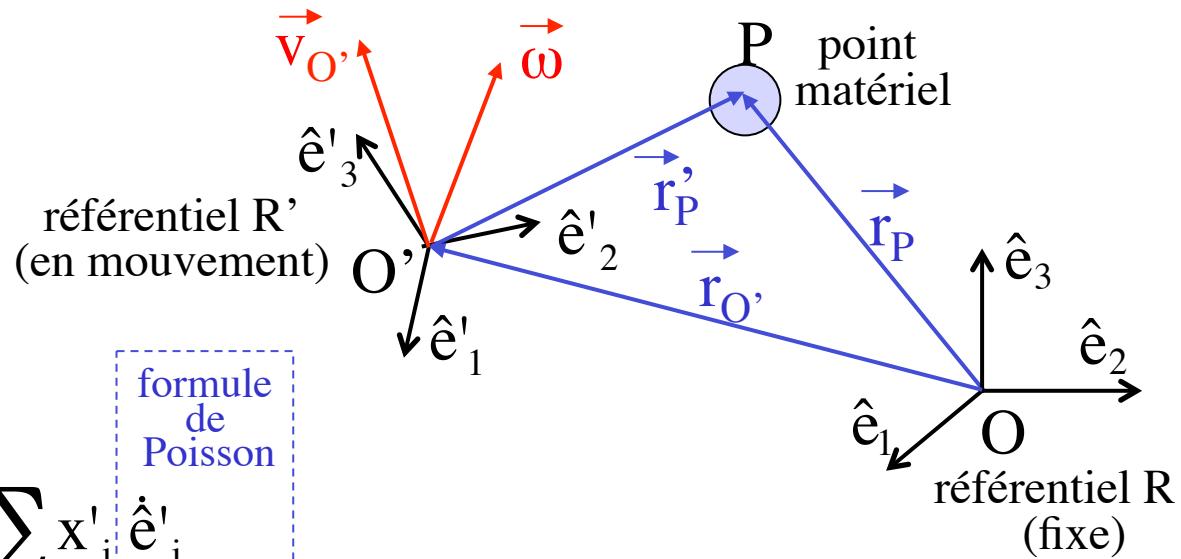
$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt} \sum x'_i \hat{e}'_i \\ &= \vec{v}_{O'} + \sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i + \sum x'_i \hat{\dot{e}}'_i \\ &= \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \sum x'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i\end{aligned}$$

formule de Poisson

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

↓            ↓            ↓  
 vitesse d'entraînement  
 vitesse de P par rapport à R' (relative)  
 vitesse de P par rapport à R (absolue)



## Cas particuliers:

- Si  $v'_P = 0$ , i.e.  $P \in R'$ , on trouve la **relation du solide indéformable**:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

- Si  $\omega = 0$ , i.e.  $R'$  est en translation par rapport à  $R$ , on obtient la **loi d'addition des vitesses**:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P}$$

Au tableau

## Transformation des accélérations

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'_P}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{a}_{O'} + \frac{d}{dt} \sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \sum x'_i \hat{e}'_i + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= \vec{a}_{O'} + \sum (\ddot{x}'_i \hat{e}'_i + \dot{x}'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \vec{\omega} \wedge \sum (\dot{x}'_i \hat{e}'_i + x'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= \vec{a}_{O'} + \underbrace{\sum \ddot{x}'_i \hat{e}'_i}_{\vec{a}'_P} + 2\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i}_{\vec{v}'_P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum x'_i \hat{e}'_i}_{\overrightarrow{O'P}}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$



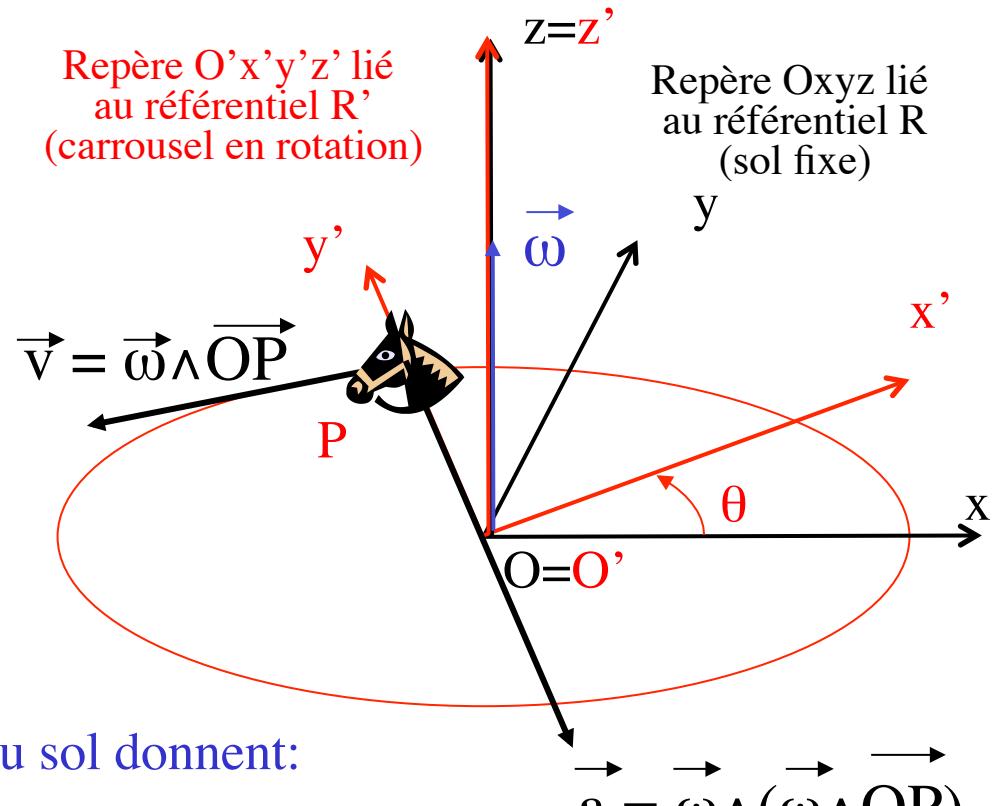
Cas particuliers:  $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Si } v'_P = a'_P = 0, \text{ i.e. } P \in R', \text{ on retrouve le solide indéformable} \\ - \text{Si } \omega = \dot{\omega} = 0, \text{ i.e. } R' \text{ est en translation par rapport à } R, \\ \text{on obtient la loi d'addition des accélérations} \end{array} \right.$

# Exemple: cheval de carrousel (1)

- Carrousel (= référentiel  $R'$ ) en rotation de vitesse angulaire  $\omega$  constante par rapport au sol (= référentiel  $R$ )
  - Repères de mêmes origines ( $O=O'$ ) au centre du carrousel:
- $$\vec{v}_{O'} = 0 \text{ et } \vec{a}_{O'} = 0$$
- Cheval  $P$  au repos par rapport au carrousel:
- $$\vec{v}'_P = 0 \text{ et } \vec{a}'_P = 0$$
- Les expressions pour la vitesse et l'accélération du cheval par rapport au sol donnent:

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$



→ mouvement circulaire uniforme ✓

## Exemple: cheval de carrousel (2)

- Sol (= référentiel  $R'$ ) en rotation de vitesse angulaire  $-\vec{\omega}$  constante par rapport au carrousel (= référentiel  $R$ )

- Repères de mêmes origines ( $O=O'$ ) au centre du carrousel:

$$\vec{v}_{O'} = 0 \text{ et } \vec{a}_{O'} = 0$$

- Cheval P en mouvement circulaire uniforme par rapport au sol:

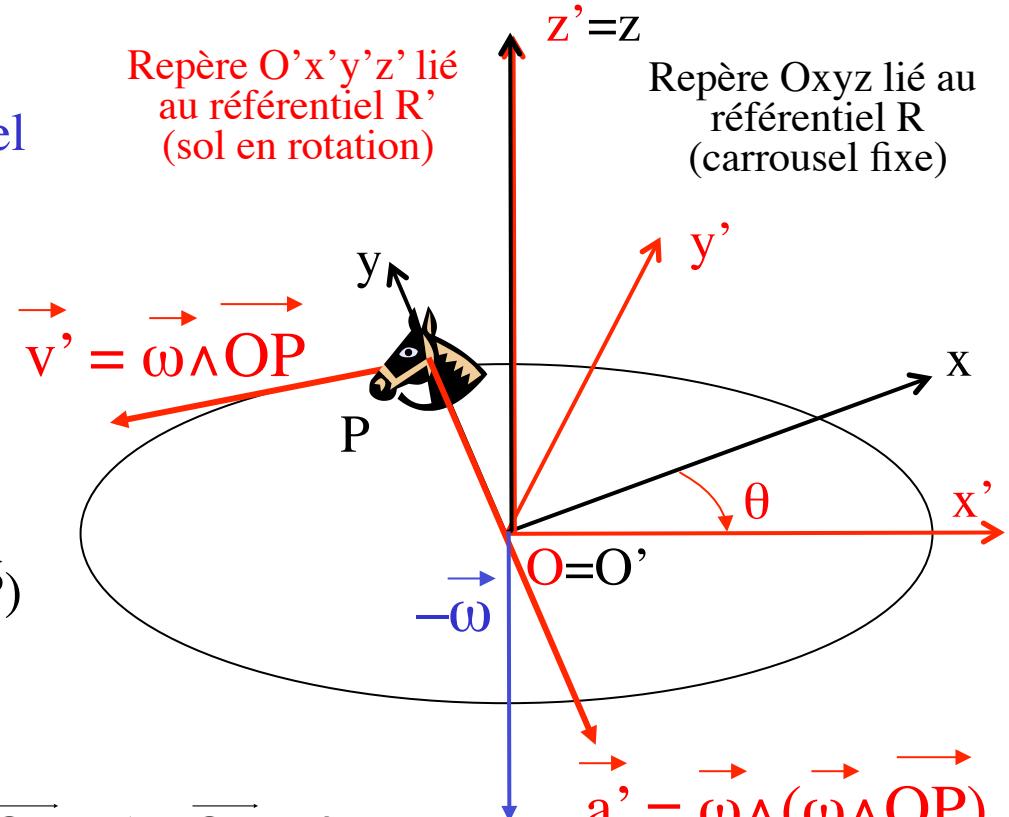
$$\vec{v}'_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \text{ et } \vec{a}'_P = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

- Les expressions pour la vitesse et l'accélération du cheval par rapport au carrousel donnent:

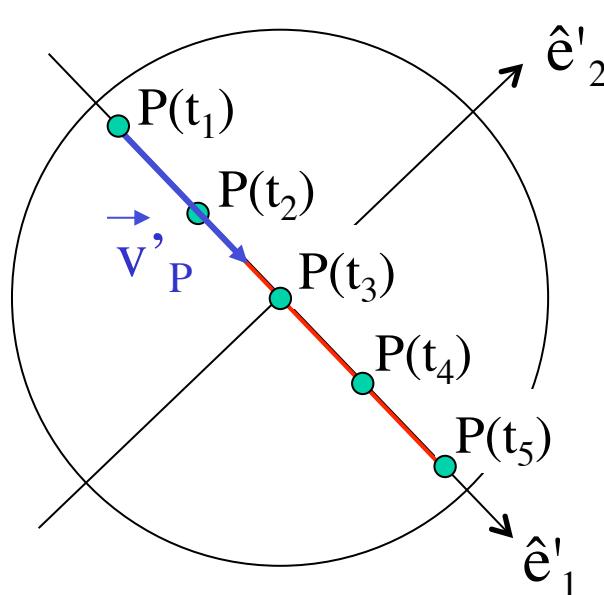
$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + (-\vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{O'P} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}'_P + 2(-\vec{\omega}) \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + (-\vec{\omega}) \wedge (-\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + (-\vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + 2(-\vec{\omega}) \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + (-\vec{\omega}) \wedge (-\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = 0 \end{aligned}$$

→ repos ✓



# Exemple: mouvement rectiligne uniforme sur un carrousel

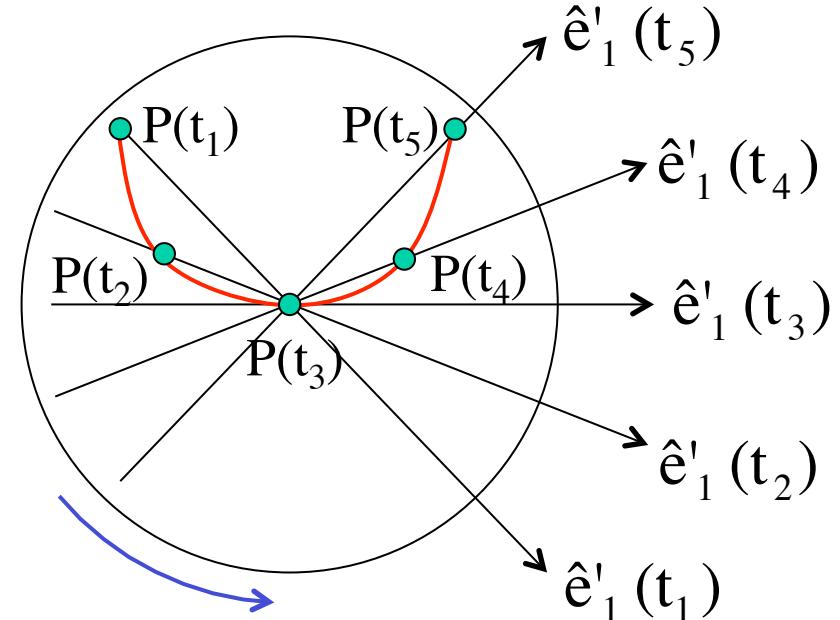


Mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel relatif  $R'$  lié au carrousel:

$$\vec{v}'_P = v' \hat{e}'_1 = \text{constante}$$

$$\vec{a}'_P = 0$$

accélération de Coriolis selon  $\hat{e}'_2$   
(dévie la trajectoire sur la gauche)



Accélération dans le référentiel absolu  $R$  lié au sol:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

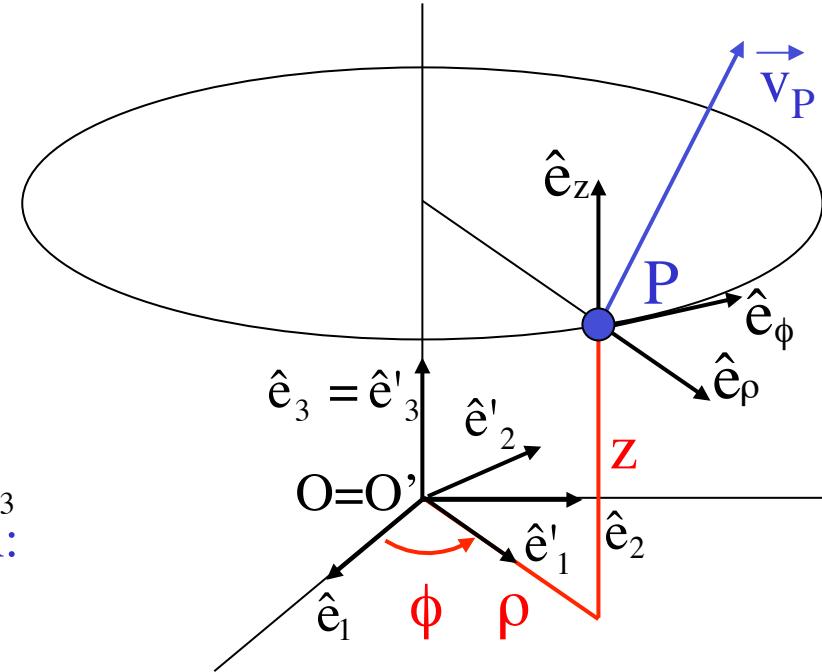
$$\begin{aligned} \vec{a}_P(t) &= 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P(t) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP(t)}) \\ &= 2\omega \hat{e}'_3(t) \wedge v' \hat{e}'_1(t) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge x'(t) \hat{e}'_1(t)) \\ &= \underbrace{2\omega v' \hat{e}'_2(t)}_{\text{accélération de Coriolis selon } \hat{e}'_2} - \underbrace{\omega^2 x'(t) \hat{e}'_1(t)}_{\text{accélération centripète selon } -\hat{e}'_1} \end{aligned}$$

# Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Repère lié à un référentiel absolu R:  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$
- Repère lié à un référentiel R' suivant le mouvement azimutal du point P  
 $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$  avec  $O'=O$  et  $\hat{e}'_3=\hat{e}_3$
- Vitesse de rotation:  $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_3$
- Repère lié au point P (coord. cyl.):  $P\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$  avec  $\hat{e}_\rho=\hat{e}'_1$ ,  $\hat{e}_\phi=\hat{e}'_2$ ,  $\hat{e}_z=\hat{e}'_3$
- Vitesse et accélération du point P dans R:

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= (\dot{\rho}\hat{e}'_1 + \dot{z}\hat{e}_3) + \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3) \\ &= \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= (\ddot{\rho}\hat{e}'_1 + \ddot{z}\hat{e}_3) + 2\dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\dot{\rho}\hat{e}'_1 + \dot{z}\hat{e}_3) + \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3)) + \ddot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3) \\ &= \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \ddot{z}\hat{e}_z + 2\dot{\phi}\dot{\rho}\hat{e}_\phi + \dot{\phi}\hat{e}_z \wedge \dot{\phi}\hat{e}_\phi + \ddot{\phi}\hat{e}_\phi \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z\end{aligned}$$



# Dynamique dans référentiel en mouvement

- Soit un référentiel R (absolu) dans lequel la deuxième loi de Newton est valable.  
Pour le point matériel P, auquel s'appliquent des forces  $\vec{F}^{\text{ext}}$ :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_P$$

- Dans un référentiel R' accéléré par rapport à R, on a:

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m \left( \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \right)$$
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P - m\vec{a}_{O'}}_{\text{force de Coriolis}} - \underbrace{m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) - m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}}_{\sum \vec{F}^{\text{inertie}}} = m\vec{a}'_P - \text{force centrifuge}$$

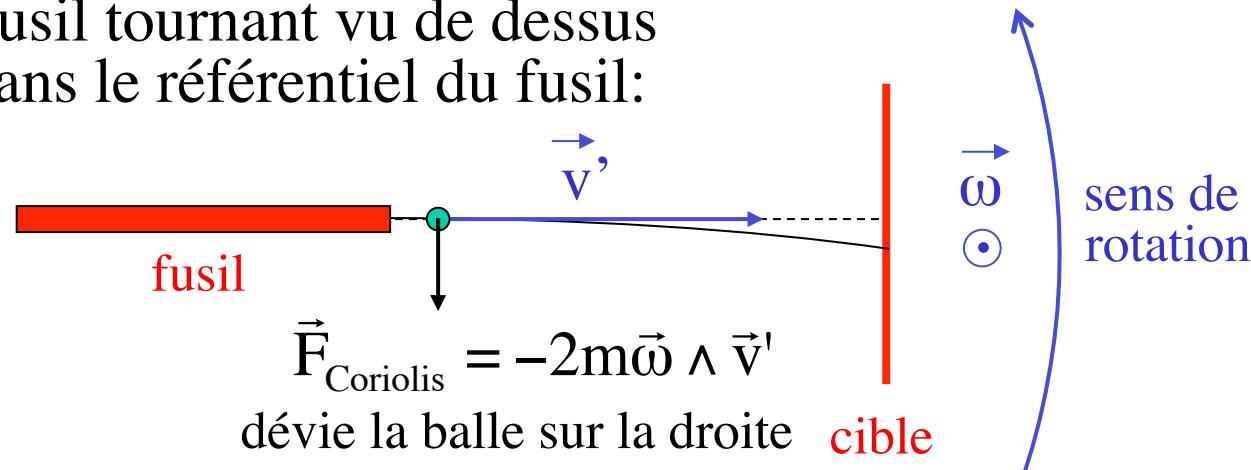
- les “forces d’inertie” ne sont pas des vraies forces; il s’agit d’un concept introduit pour rétablir la loi  $\sum F = ma$  dans les référentiels accélérés !



démos: jet d'eau ou fusil tournant

## Force de Coriolis

- Fusil tournant vu de dessus dans le référentiel du fusil:

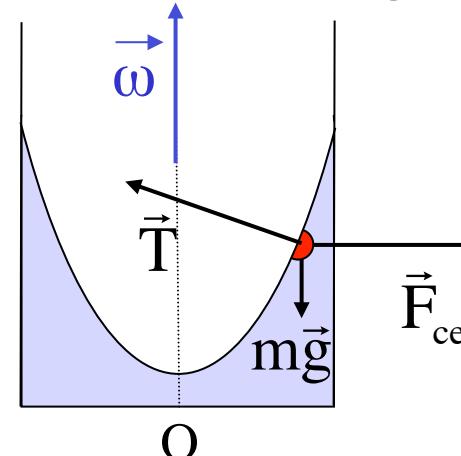


Gaspar Coriolis  
(1792–1843)

démos: récipients de liquide en rotation

## Force centrifuge

- Récipient vu du côté dans le référentiel du récipient (liquide immobile)



Equilibre d'une goutte P à la surface du liquide:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} = 0$$

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

# Loi d'inertie et référentiels d'inertie

- Première loi de Newton (loi d'inertie):

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état

NB: cette loi n'est pas valable dans tous les référentiels !

- On appelle **référentiel d'inertie** (ou absolu) un référentiel dans lequel la loi d'inertie est valable
- Propriétés:
  - Il n'y a pas de « forces d'inertie » dans un référentiel d'inertie; la deuxième loi de Newton y est valable
  - Un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est un référentiel d'inertie
  - Tous les référentiels d'inertie sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres

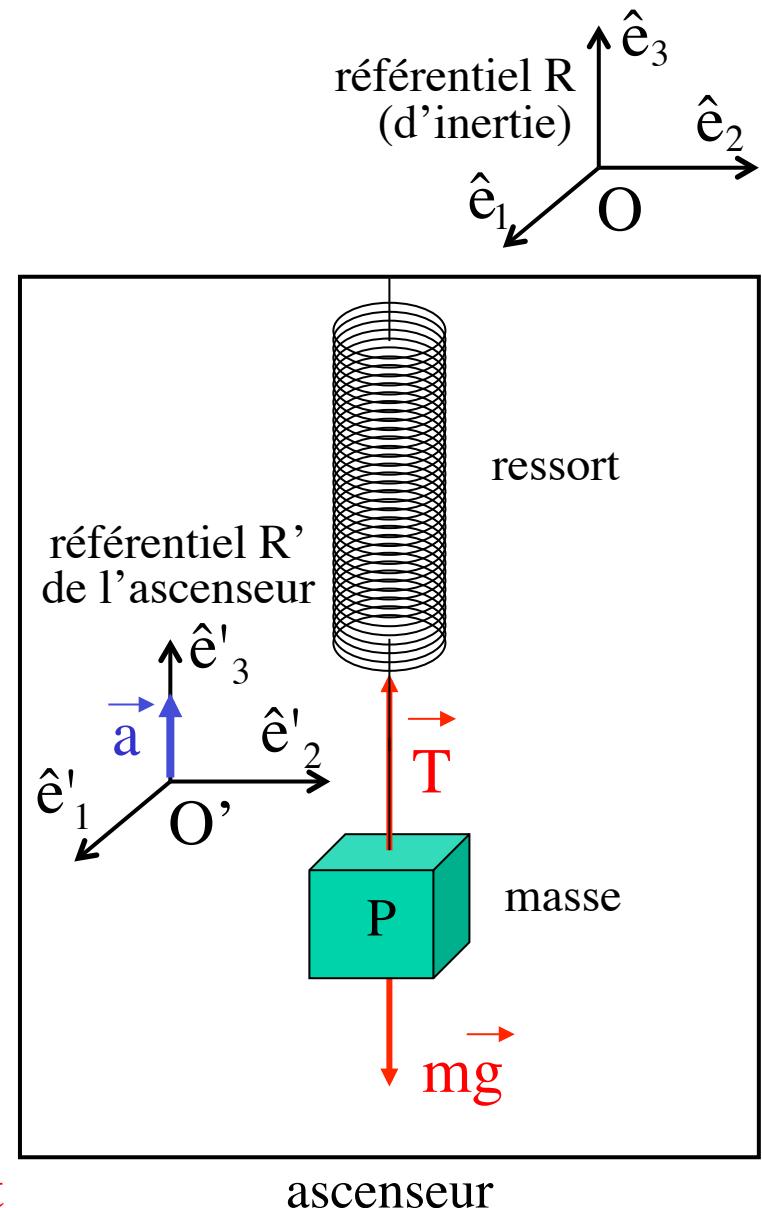
# Référentiel en translation non-uniforme

- Poids apparent dans un ascenseur accéléré vers le haut:
  - On mesure le poids par l'extension du ressort
  - Dans le référentiel R' de l'ascenseur, la masse m est immobile:
$$\vec{a}'_P = 0$$
  - Dans le référentiel d'inertie R:
$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} = \vec{a}$$
  - 2ème loi de Newton appliquée à la masse m dans le référentiel R:
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_P$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

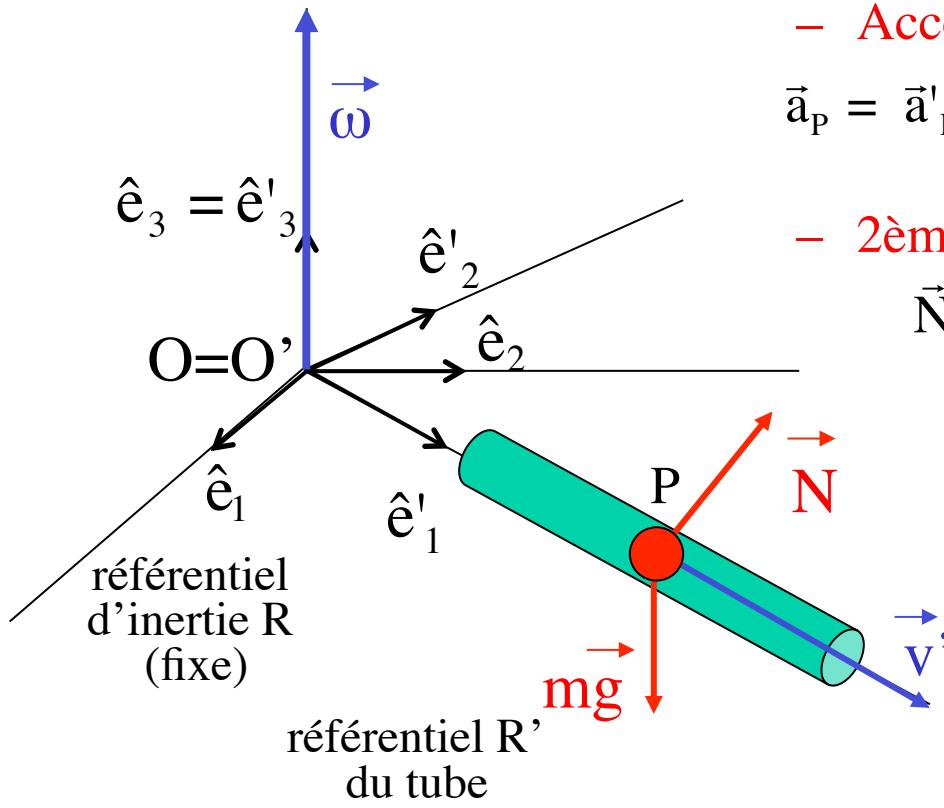
$$T - mg = ma$$

$$\underline{T = m(a + g) \quad \text{poids apparent}}$$



# Centrifugeuse

- Point matériel dans un tube horizontal en rotation uniforme autour d'un axe vertical (pas de frottements)
  - Contraintes:  $\vec{a}'_P$ ,  $\vec{v}'_P$  et  $\vec{r}'_P = \overrightarrow{O'P}$  selon  $O'\hat{e}'_1$
  - Force de liaison (réaction du tube) normale au tube:  $\vec{N} = N'_2 \hat{e}'_2 + N'_3 \hat{e}'_3$



- Accélération absolue (dans  $R$ ):  

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

- 2ème loi de Newton:

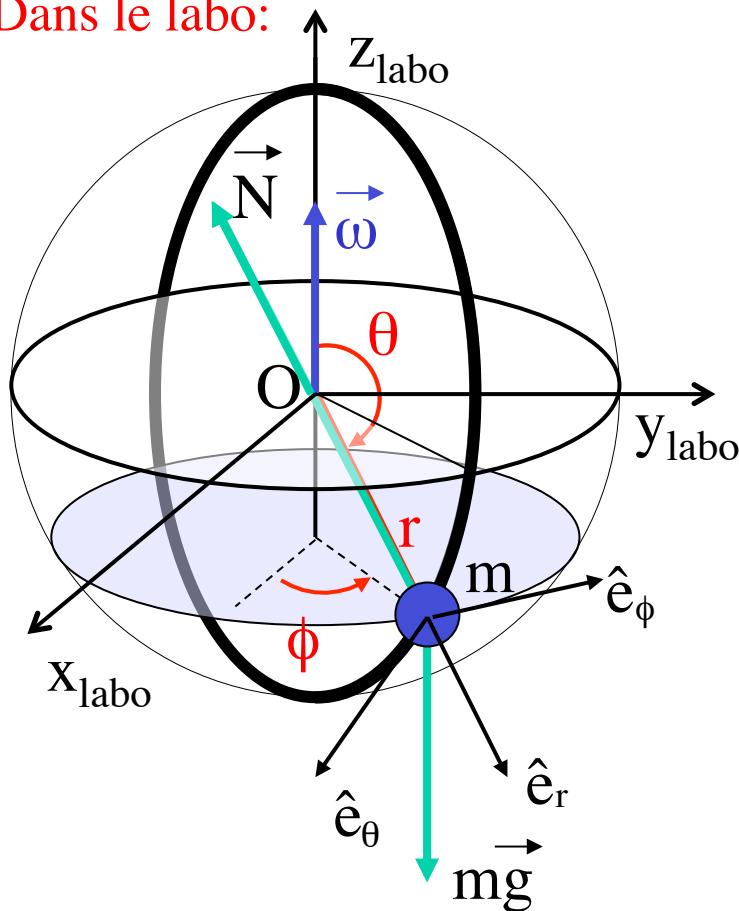
$$\begin{aligned} \vec{N} + m\vec{g} &= m\vec{a}_P \\ &= m\vec{a}'_P + 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) \\ &= m\ddot{x}'\hat{e}'_1 + 2m\omega\dot{x}'\hat{e}'_2 - m\omega^2x'\hat{e}'_1 \end{aligned}$$

- En projection sur les axes du réf.  $R'$ :

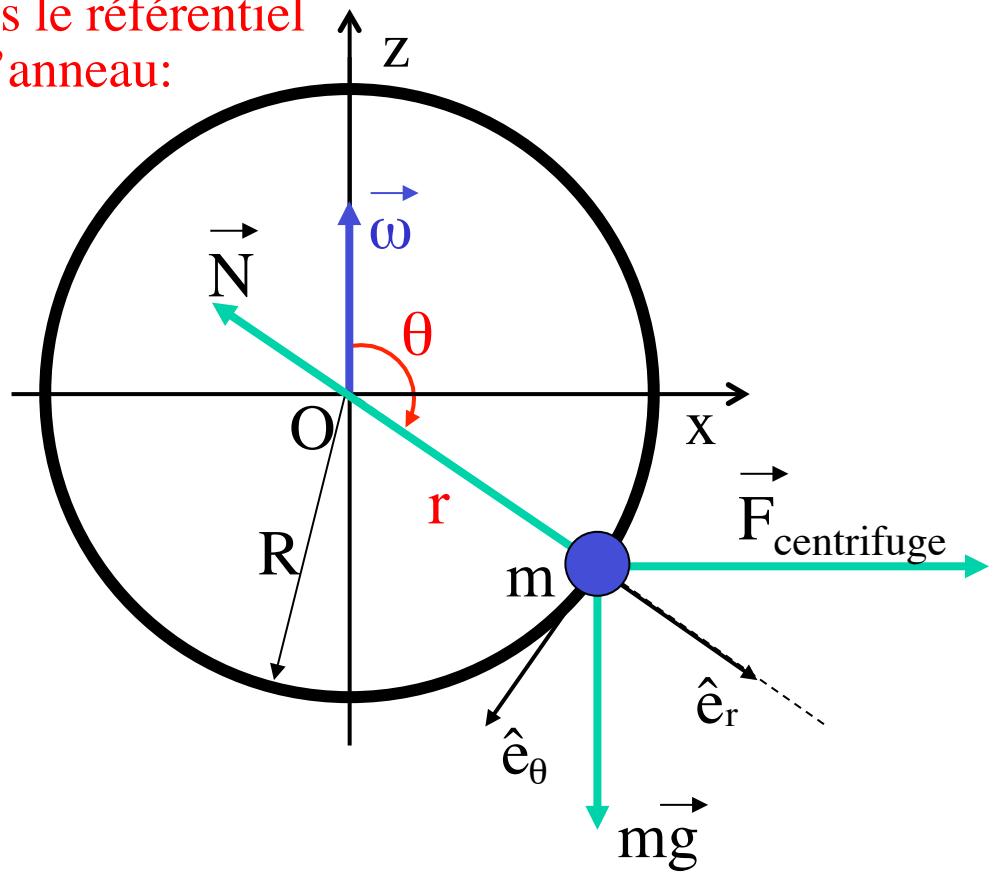
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = m\ddot{x}' - m\omega^2x' \\ N'_2 = 2m\omega\dot{x}' \\ N'_3 - mg = 0 \end{array} \right.$$

# Equilibre dans un anneau en rotation uniforme

Dans le labo:



Dans le référentiel de l'anneau:



Contraintes :

$$r = R, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0, \dot{\phi} = \omega, \ddot{\phi} = 0$$

Conditions d'équilibre relatif :

$$\dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\vec{g} = -mg \hat{e}_z \Rightarrow V_{\text{pesanteur}} = mgz \\ \vec{F}_{\text{centrifuge}} = m\omega^2 x \hat{e}_x \Rightarrow V_{\text{centrifuge}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ \vec{N} \text{ ne travaille pas} \end{array} \right.$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{pesanteur}} + V_{\text{centrifuge}} = mgR\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\theta$$

# Equilibre et petites oscillations

## dans un anneau en rotation uniforme

- On a:  $V_{\text{total}} = V(\theta) = mgR \left( \cos\theta - \frac{q}{2} \sin^2 \theta \right)$  où  $q = \frac{\omega^2 R}{g} > 0$

- Coordonnée curviligne:  
 $s = R\theta$  = position sur la circonference de l'anneau

- Points d'équilibre:

$$0 = -F_\theta = \frac{dV}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dV}{d\theta} = mg(-\sin\theta - q \sin\theta \cos\theta)$$

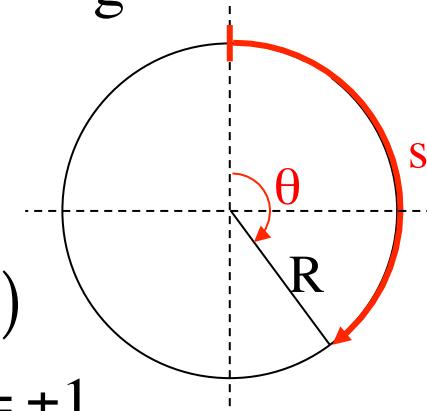
$$0 = \sin\theta (1 + q \cos\theta) \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \pm 1 \\ \cos\theta = -1/q \text{ (seulement si } q > 1) \end{cases}$$

- Stabilité:  $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{mg}{R} (-\cos\theta - q(2\cos^2\theta - 1))$

- Si  $\cos\theta = +1$ :  $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{mg}{R} (-1 - q) < 0 \Rightarrow$  instable

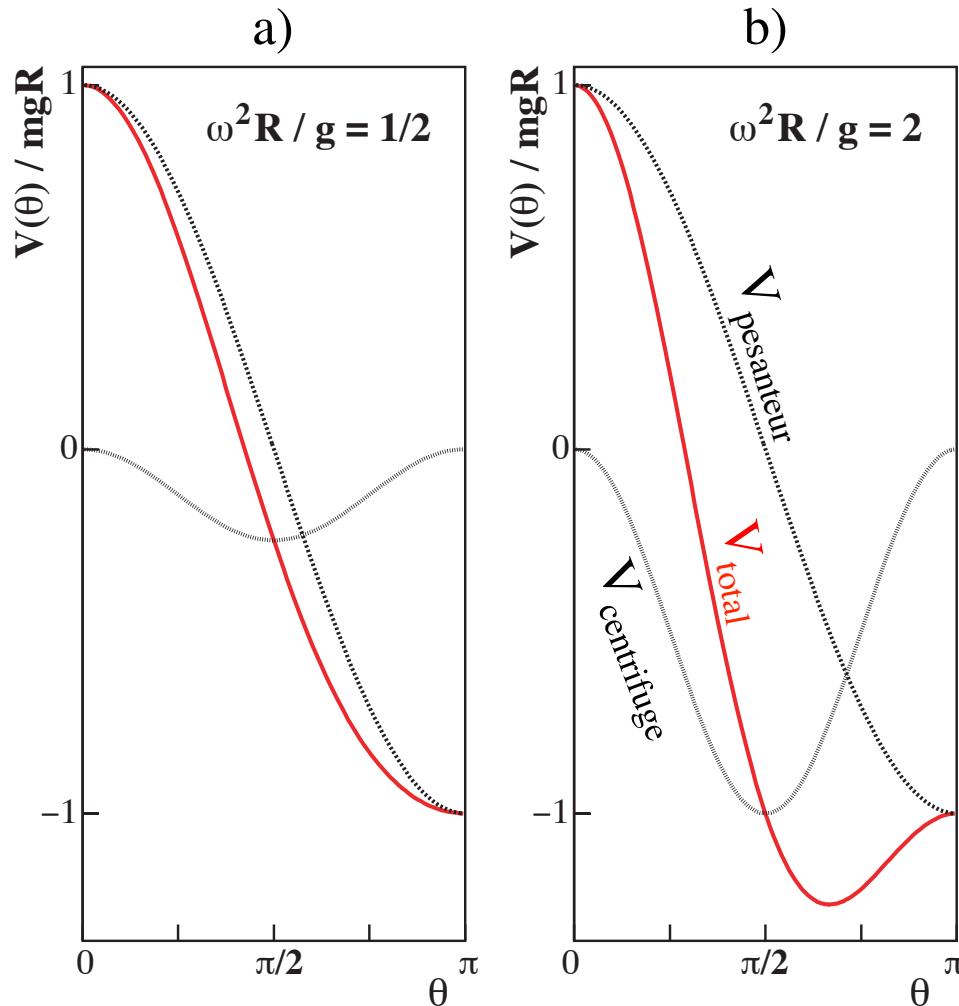
- Si  $\cos\theta = -1$ :  $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{mg}{R} (1 - q) \Rightarrow$  stable si  $q < 1$ , instable si  $q > 1$

- Si  $\cos\theta = -1/q$ :  $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{mg}{R} \left( \frac{1}{q} - q \left( \frac{2}{q^2} - 1 \right) \right) = \frac{mg}{R} \left( q - \frac{1}{q} \right) \Rightarrow$  stable car  $q > 1$



# Equilibre et petites oscillations

## dans un anneau en rotation uniforme (2)



$$V_{\text{total}} = mgR \left( \cos\theta - \frac{\omega^2 R}{2g} \sin^2 \theta \right)$$

a) Si  $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$ :

- équilibre instable en  $\theta = 0$
- équilibre stable en  $\theta = \pi$

$$\omega_{\text{petites oscillations}} = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$$

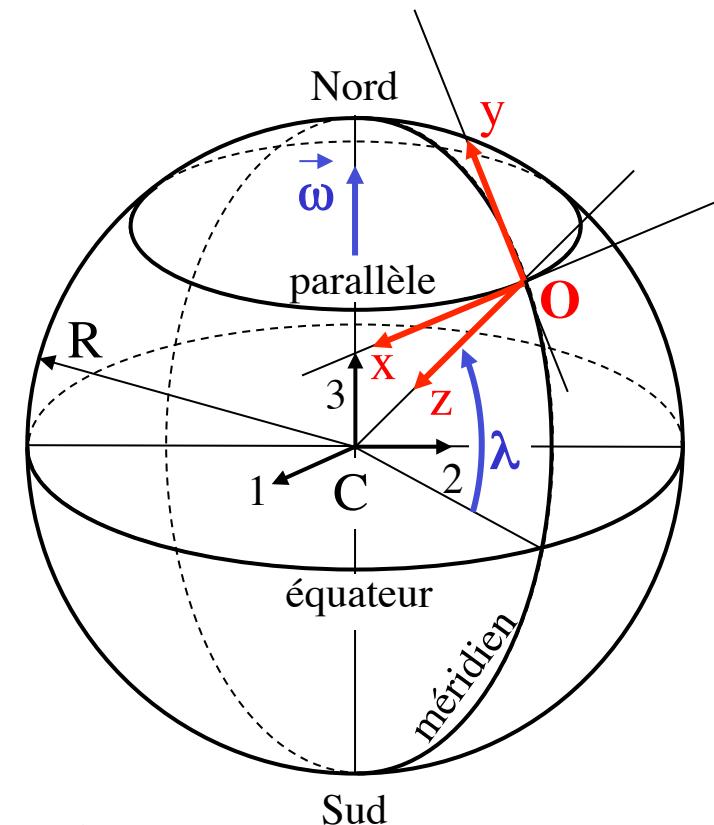
b) Si  $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ :

- équilibre instable en  $\theta = 0$
- équilibre instable en  $\theta = \pi$
- équilibre stable en  $\cos\theta = -\frac{g}{\omega^2 R} < 0$

$$\omega_{\text{petites oscillations}} = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}}$$

# Référentiel terrestre

- On considère la Terre comme un « référentiel relatif » en mouvement de rotation uniforme  $\omega$  par rapport à un « référentiel absolu » défini par le centre de la Terre et trois étoiles fixes (on néglige le mouvement de la Terre autour du Soleil, ...)
- $C$  = centre de la Terre
- $O$  = point sur la Terre à la latitude  $\lambda$
- Repère Oxyz lié à la Terre (référentiel terrestre)
  - Ox pointe vers l'ouest, Oy vers le nord, et Oz vers C
- Repère C123 lié au référentiel absolu
  - C3 pointe vers le nord
- Valeurs numériques:
  - rayon  $R = 6.37 \times 10^6$  m
  - vitesse angulaire  $\omega = 2\pi / \text{jour} = 7.29 \times 10^{-5}$  s<sup>-1</sup>



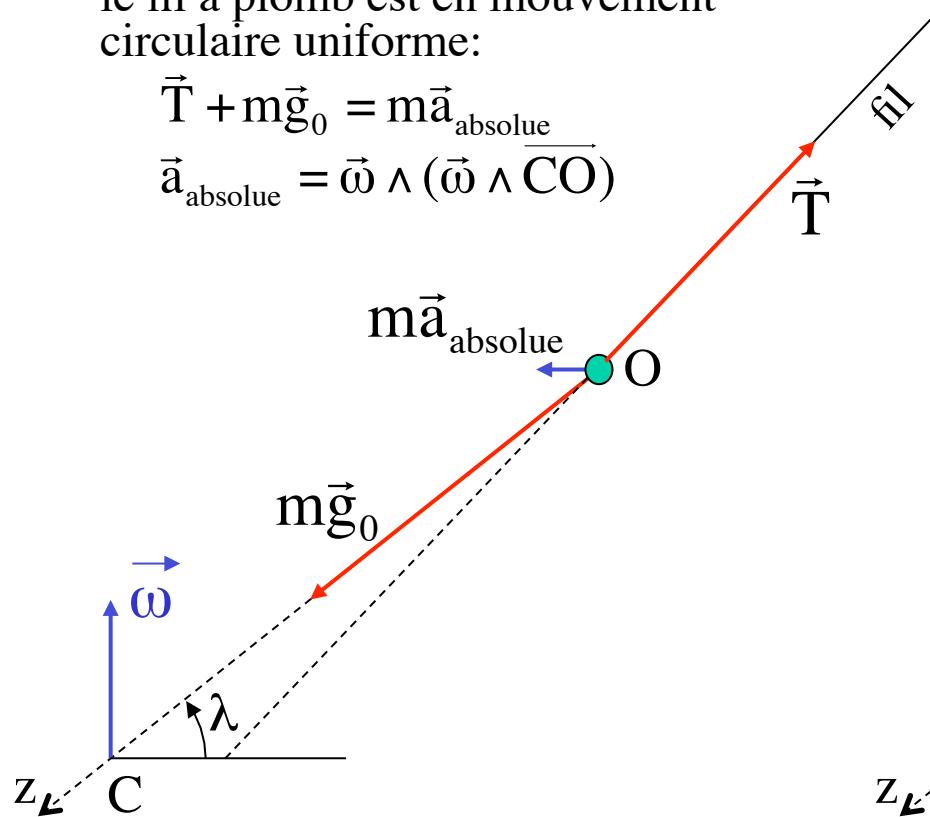
# Champ de pesanteur terrestre

- Fil à plomb installé au point O:
  - soumis à son « poids absolu »  $m\vec{g}_0$  (dirigé selon Oz) et à la tension du fil  $\vec{T}$  ( $g_0$  est le champ de gravitation dû à la masse de la Terre)

Dans le référentiel absolu,  
le fil à plomb est en mouvement  
circulaire uniforme:

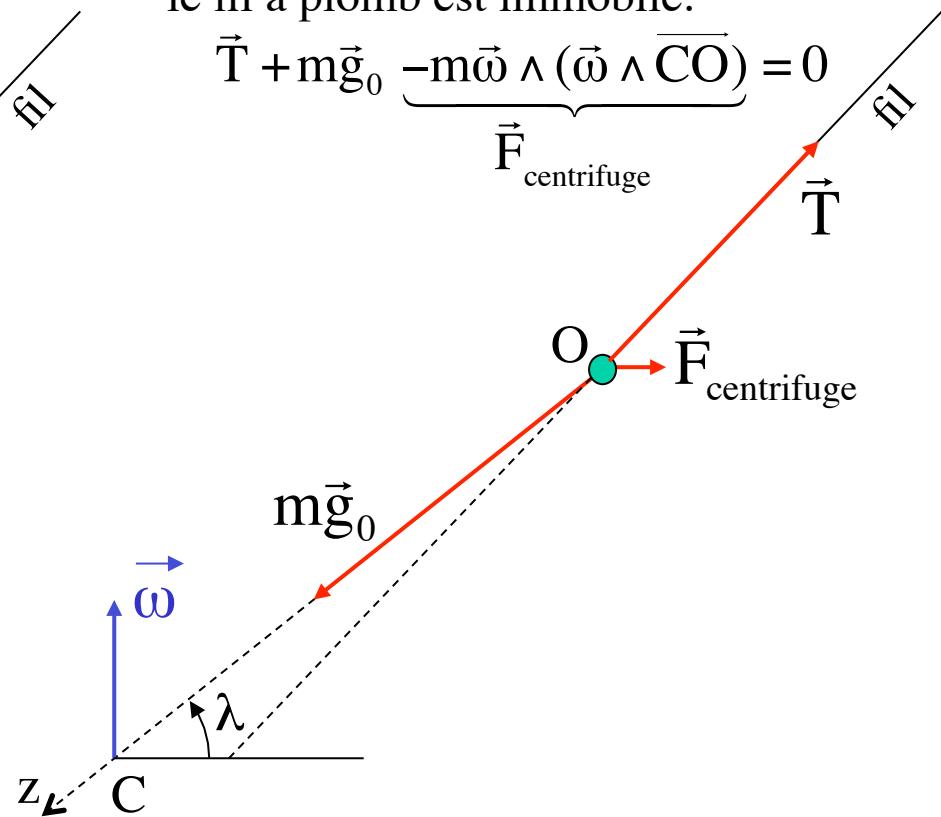
$$\vec{T} + m\vec{g}_0 = m\vec{a}_{\text{absolue}}$$

$$\vec{a}_{\text{absolue}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO})$$



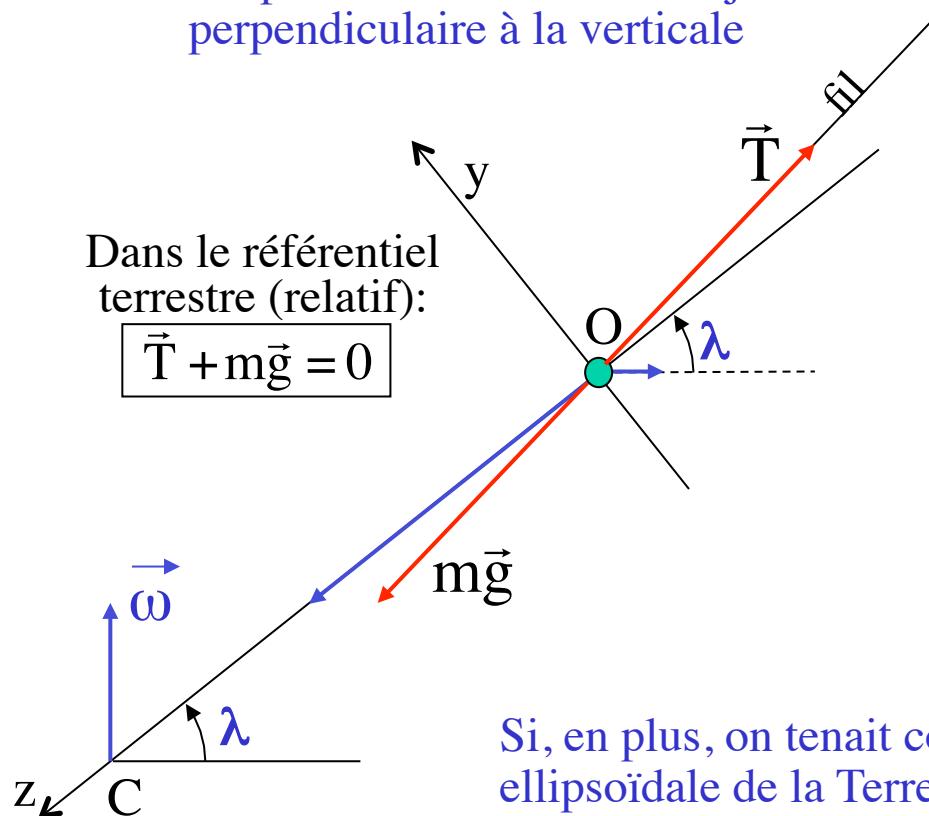
Dans le référentiel terrestre (relatif),  
le fil à plomb est immobile:

$$\vec{T} + m\vec{g}_0 - \underbrace{m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO})}_{\vec{F}_{\text{centrifuge}}} = 0$$



# Champ de pesanteur terrestre (2)

- On définit le « poids apparent »  $mg$  comme l'opposé de la tension du fil
- Ce poids apparent définit la verticale au point O:
  - La verticale ne passe pas par le centre de la Terre (sauf si O est aux pôles ou à l'équateur)
  - Un plan d'eau calme est toujours perpendiculaire à la verticale



Champ de pesanteur apparent:

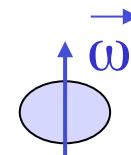
$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO})$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 R}{g_0} \approx \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{9.8} \approx 0.0035$$

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \vec{g}_0 - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO}) \\ &= g_0 \hat{z} - (\omega^2 R \cos \lambda)(\cos \lambda \hat{z} + \sin \lambda \hat{y}) \\ &= g_0 [(1 - \varepsilon \cos^2 \lambda) \hat{z} - \varepsilon \cos \lambda \sin \lambda \hat{y}] \\ g &\approx g_0 (1 - \varepsilon \cos^2 \lambda) \approx g_{\text{éq}} (1 + \varepsilon \sin^2 \lambda)\end{aligned}$$

Si, en plus, on tenait compte de la légère déformation ellipsoïdale de la Terre due à la force centrifuge:

$$g \cong g_{\text{éq}} (1 + 0.0053 \sin^2 \lambda) \quad \text{avec } g_{\text{éq}} \cong 9.78 \text{ m/s}^2$$

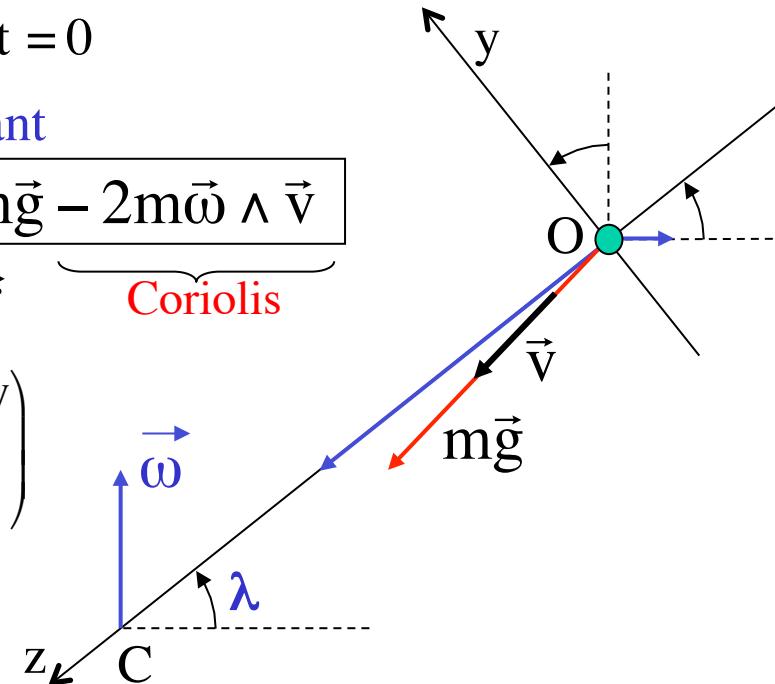


# Dynamique terrestre: chute libre

- On se place dans le référentiel terrestre (repère Oxyz)
- Une masse  $m$  est lâchée au point O sans vitesse initiale
  - conditions initiales:  $\vec{r} = 0$  et  $\vec{v} = 0$  à  $t = 0$
  - approximation: on considère  $g$  constant
- Equation du mouvement:  $m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$   
 ou, par intégration:  $\vec{v} = \vec{g}t - 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}$  Coriolis

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ -\omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cos \lambda z + \omega \sin \lambda y \\ -\omega \sin \lambda x \\ -\omega \cos \lambda x \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = g_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \cos \lambda \sin \lambda \\ 1 - \epsilon \cos^2 \lambda \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega \cos \lambda z - 2\omega \sin \lambda y \\ \dot{y} = -\epsilon \cos \lambda \sin \lambda g_0 t + \underbrace{2\omega \sin \lambda x}_{\text{n\'eglige}} \\ \dot{z} = (1 - \epsilon \cos^2 \lambda) g_0 t + \underbrace{2\omega \cos \lambda x}_{\text{n\'eglige}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cong -\omega \cos \lambda (1 - \epsilon) \frac{1}{3} g_0 t^3 \\ y \cong -\epsilon \cos \lambda \sin \lambda \frac{1}{2} g_0 t^2 \\ z \cong (1 - \epsilon \cos^2 \lambda) \frac{1}{2} g_0 t^2 \cong \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

# Dynamique terrestre: chute libre (2)

- Si la masse tombe d'une hauteur  $z = h$ :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \begin{cases} x \approx -\frac{2}{3}\omega \cos\lambda (1-\varepsilon) h \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx -\frac{2}{3}\cos\lambda h \sqrt{\frac{2\varepsilon h}{R}} \\ y \approx -\varepsilon \cos\lambda \sin\lambda h \\ z \approx h \end{cases}$$

- Déviations de la trajectoire par rapport à la direction Oz:

- Selon x (direction est-ouest), à cause de la **force de Coriolis**

- vers l'est:  $x < 0$  quel que soit  $\lambda$

- Selon y (direction sud-nord), à cause de la **force centrifuge**:

- vers le sud dans l'hémisphère nord:  $y < 0$  si  $\lambda > 0$
    - vers le nord dans l'hémisphère sud:  $y > 0$  si  $\lambda < 0$

Cette déviation correspond à celle du fil à plomb, c-à-d la masse tombe verticalement dans le plan Oyz

- Exemple:

- $h = 100$  m et  $\lambda = 46.5^\circ$  (Lausanne)  $\Rightarrow x \approx -1.5$  cm et  $y \approx -17.5$  cm

# Dynamique terrestre: mouvement horizontal

- Mouvement dans un plan ~horizontal ( $\dot{z} \approx 0$ ,  $\ddot{z} \approx 0$ ), maintenu par une force de liaison  $T$  verticale:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Coriolis

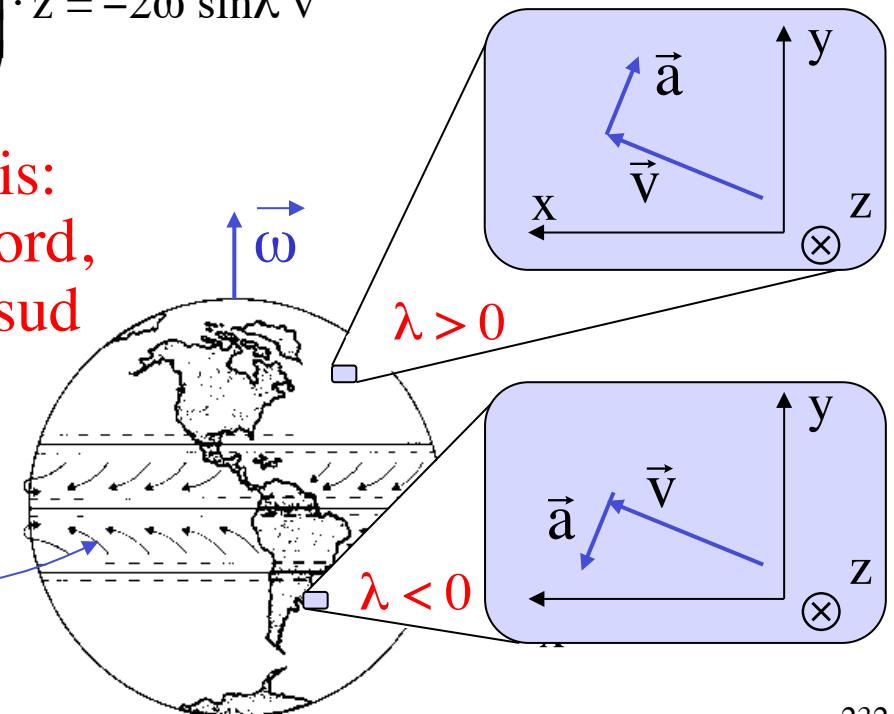
$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + T/m \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ -\omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ 2\omega \sin \lambda \dot{x} \\ g + T/m + 2\omega \cos \lambda \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } (\vec{a} \wedge \vec{v}) \cdot \hat{z} = \left( \begin{pmatrix} -2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ 2\omega \sin \lambda \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \hat{z} = -2\omega \sin \lambda v^2$$

- Déviation due à la force de Coriolis: vers la droite dans l'hémisphère nord, vers la gauche dans l'hémisphère sud

– Exemples:

- Tourbillonnement dans un cyclone
- Erosion des berges d'un fleuve
- Vents alizés
- Pendule de Foucault



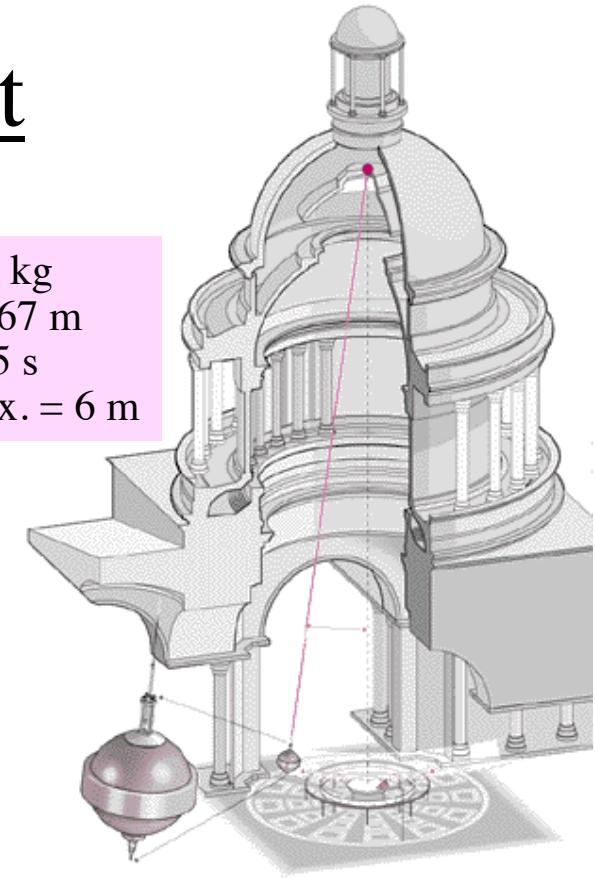
# Pendule de Foucault

« Venez voir tourner la Terre »:

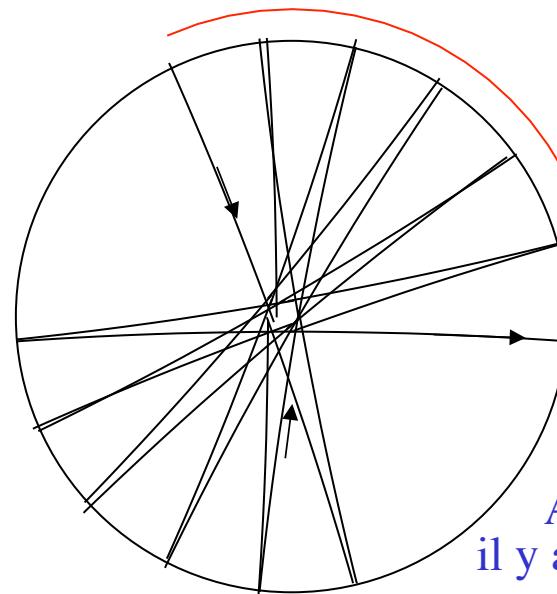
Démonstration de Léon Foucault,  
le 31 mars 1851 au Panthéon de Paris,  
en présence de Napoléon Bonaparte



masse  $m = 28 \text{ kg}$   
longueur  $L = 67 \text{ m}$   
période = 16.5 s  
amplitude max. = 6 m



Trajectoire  
vue de dessus



A chaque oscillation  
il y a déflexion sur la droite

démo

## Pendule de Foucault (2)

Pendule suspendu à l'origine du repère terrestre Oxyz, muni des coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$ :

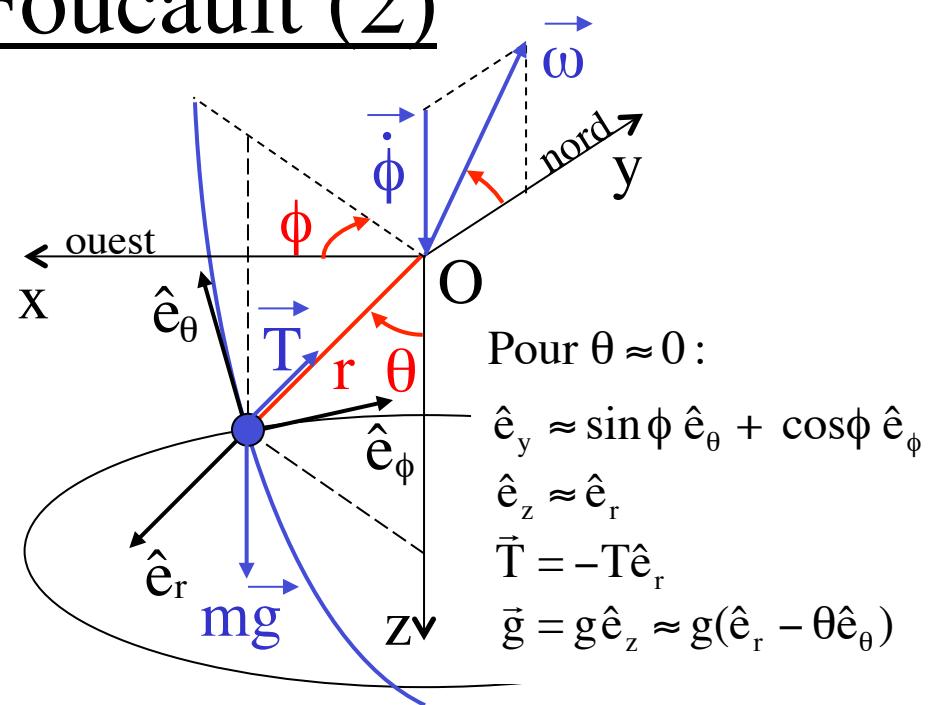
- On néglige le terme centripète (ou on redéfinit z selon la verticale)
- $\theta \ll 1 \rightarrow \sin\theta \approx 0$  et  $\cos\theta \approx 1$
- Contraintes:  $r = L, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0, \ddot{\phi} = 0$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi \approx L\dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \hat{e}_r \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta) \hat{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta) \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\approx -L\dot{\theta}^2 \hat{e}_r + L\ddot{\theta} \hat{e}_\theta + 2L\dot{\phi}\dot{\theta} \hat{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \cos\lambda \hat{y} - \omega \sin\lambda \hat{z} \\ &\approx \omega \cos\lambda (\sin\phi \hat{e}_\theta + \cos\phi \hat{e}_\phi) - \omega \sin\lambda \hat{e}_r \\ \vec{\omega} \wedge \vec{v} &\approx -\omega L\dot{\theta} (\sin\lambda \hat{e}_\phi + \cos\lambda \cos\phi \hat{e}_r) \end{aligned}$$



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_r : -mL\dot{\theta}^2 &= mg - T + 2m\omega L\dot{\theta} \cos\lambda \cos\phi \\ \hat{e}_\theta : mL\ddot{\theta} &= -mg\theta \quad \Rightarrow \ddot{\theta} = -(g/L)\theta \\ \hat{e}_\phi : m2L\dot{\phi}\dot{\theta} &= 2m\omega L\dot{\theta} \sin\lambda \quad \Rightarrow \dot{\phi} = \omega \sin\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \frac{24 \text{ h}}{\sin\lambda} = 33 \text{ h à Lausanne} \quad (\sim 11^\circ/\text{h})$$

# Aborder un problème de mécanique

- **définir le (ou les) système(s)** (point matériel, ensemble de points matériels, solide indéformable, ensemble de solides, ...)
- **choisir un référentiel** pour la description du (ou des) système(s)
- **identifier les forces extérieures** s'appliquant sur chaque système; prendre en compte les forces d'inertie si le référentiel n'est pas d'inertie
- **faire un grand dessin** pour chaque système, indiquant les forces
- décider de résoudre le problème en partant des **lois fondamentales de la dynamique (2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique)** ou bien des **lois de conservation**; pour cela, identifier l'existence éventuelle de constantes du mouvement:
  - si la résultante des forces extérieures n'a pas de composante selon une certaine direction  $u$ , la composante  $u$  de la **quantité de mouvement totale** est conservée
  - si la résultante des moments des forces extérieures par rapport à un certain point  $O$  n'a pas de composante selon une certaine direction  $u$ , la composante  $u$  du **moment cinétique total** par rapport à  $O$  est conservée
  - si chacune des **forces extérieures et intérieures** est conservative (ou bien ne travaille pas, ou bien compense le travail d'une autre force), l'**énergie mécanique** est conservée; son expression doit contenir l'énergie potentielle dont dérive chaque force conservative

# Application des lois de la dynamique

1. Choisir les **variables** qui déterminent la position du système
2. Exprimer les **contraintes** dues aux forces de liaison (conditions sur, ou relations entre, les variables de position et/ou leurs dérivées temporelles)
3. Choisir un **repère** orthonormé droit
  - pour un solide, un repère selon les axes principaux d'inertie est conseillé
4. Etablir la liste des **forces extérieures** et de leurs **points d'application**
5. Choisir un **point de référence** pour le calcul des moments
  - le centre de masse G ou un point fixe est conseillé
6. Calculer les moments des forces, la quantité de mouvement totale, et le moment cinétique total en fonction des coordonnées et de leur dérivées par rapport au temps
7. Appliquer le **théorème du centre de masse (2ème loi de Newton)** et le **théorème du moment cinétique** par rapport au point de référence
  - pour un point matériel, la deuxième loi de Newton suffit
8. **Projeter** ces deux relations vectorielles sur les axes du repère
9. **Résoudre** les 6 équations différentielles pour trouver les coordonnées et les forces de liaison inconnues en fonction du temps

# Indications pratiques

- Examen écrit:
  - Vendredi 20 janvier 2017, de 8:15 à 11:15
    - vous recevrez une information de la section de physique concernant l'auditoire où chacun/e est attendu/e
  - consignes exactes:
    - sont à disposition sur le site Moodle
- S'il reste des questions urgentes sur le cours ou les exercices:
  - dernière séance d'exercices vendredi 23 décembre
  - puis votre tuteur (à défaut, Fred Blanc) est encore à disposition par e-mail
  - séance de question & réponses le vendredi 13 janvier, de 13:00 à 16:00
    - salles: CO 015, CO 016, CO 017

Bonnes fêtes de fin d'année !