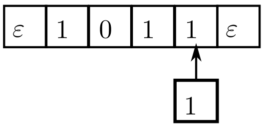
# Semaine 4 : Série d'exercices sur la théorie du calcul

## 1 [N1] Machine de Turing

On considère la machine de Turing à 2 états, d'alphabet { `0`, `1`, $\varepsilon$ } ($\varepsilon$ étant le caractère vide) et de table :

| | `0` | `1` | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 1 | (2, `1`, −) | (1, `0`, −) | (3, `1`, +) |
| 2 | (2, `0`, −) | (2, `1`, −) | (3, $\varepsilon$, +) |

— Que donne cette machine de Turing sur l'entrée :




— Écrire l'algorithme correspondant à cette machine de Turing.

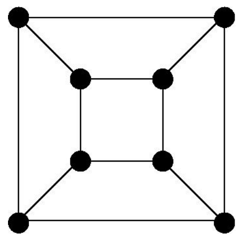
— * Que fait cette machine (en français) ?

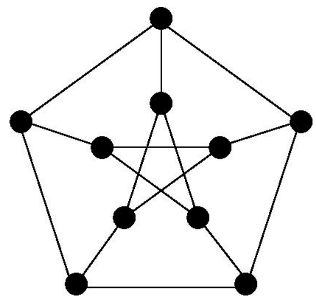
## 2 [N1] Théorie du calcul

1. Donner un exemple :
   — d'un problème appartenant à P ;
   — d'un problème décidable pour lequel on ne sait pas s'il appartient à P ;
   — d'un problème appartenant à NP pour lequel on ne sait pas s'il appartient à P.
2. Si l'ordre de complexité de l'algorithme A est plus grand que celui de l'algorithme B, cela implique t-il qu'il est plus difficile à comprendre ?
3. Que peut on dire de la paire de propositions suivante :
   — la proposition suivante est vraie
   — la proposition précédente est fausse
4. Parmi les affirmations suivantes, laquelle ou lequelles sont vraies ?
   a) Si un problème est dans la classe P, alors il est aussi dans la classe NP.
   b) On sait avec certitude à l'heure actuelle que si un problème est dans la classe NP, alors il est aussi dans la classe P.
   c) Si un problème est dans la classe P, alors il n'est pas dans la classe NP.
   d) On sait avec certitude à l'heure actuelle qu'il existe un problème dans la classe NP qui n'est pas dans la classe P.
   e) Tous les problèmes connus dans le monde sont dans la classe NP.

## 3 [N3] Coloriage de graphes

On considère un graphe avec $n$ sommets et un certain nombre d'arêtes qui relient ces sommets, comme par exemple un des deux graphes suivants :





On se pose la question générale suivante :

*Soit $k \geq 2$ un nombre fixé. Avec $k$ couleurs différentes à disposition, est-il possible de colorier les sommets d'un graphe donné de façon à ce que si deux sommets sont reliés par une arête, alors ils aient toujours des couleurs différentes ?*

Avant d'aller plus loin, voici une petite application pour le cas où $k = 2$ : $n$ joueurs se retrouvent ensemble et désirent former deux équipes (pas forcément de même taille : ça simplifie le problème). Seule contrainte : un graphe comme le graphe ci-dessus indique les joueurs qui ne s'aiment pas et ne veulent donc pas faire partie de la même équipe : plus précisément, $i$ n'aime pas $j$ si et seulement si $i$ et $j$ sont reliés directement par une arête. Est-il possible de former deux équipes avec des joueurs qui n'ont aucune inimitié à l'intérieur de chaque équipe ?

**a)** Quelle est la réponse à cette question pour chacun des graphe ci-dessus (dans le cas où $k = 2$) ?

Faisons maintenant un petit calcul ensemble : pour résoudre la question en général pour un $n$ et un $k$ donnés, on a toujours l'option d'essayer *toutes* les possibilités de coloriages du graphe. Combien sont-elles, ces possibilités ? Vu qu'on a $k$ choix pour chacun des $n$ sommets, on a en tout $k^n$ possibilités, autement dit un nombre qui croît exponentiellement en $n$. Si $n$ est grand, essayer toutes les possibilités prend clairement trop de temps (même pour $k = 2$).

**b)** Considérons tout d'abord le cas particulier $k = 2$ et supposons que vous deviez trouver vous-même un coloriage qui marche, sans aide extérieure. Quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème ? (qu'avez-vous fait pour répondre à la question a ?)

**c)** Toujours dans le cas $k = 2$, combien d'opérations *au pire*[1] seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas), en fonction du nombre de sommets $n$ ? (donner la réponse en utilisant la notation de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$)

**d)** Considérons maintenant le cas plus général $k \geq 2$ et supposons qu'on vous *donne* un coloriage avec $k$ couleurs pour un graphe donné et qu'on vous demande de *vérifier* si ce coloriage fonctionne. En fonction du nombre de sommets $n$, combien d'opérations seront-elles nécessaire pour vérifier que le coloriage fonctionne, dans le pire des cas ? (utiliser à nouveau la notation de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$)

**e)** * Dans le cas particulier $k = 3$, quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème, si on vous laisse la trouver par vous-même ? (à nouveau, essayez d'abord sur les exemples de graphes ci-dessus) Et combien d'opérations seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu'une telle solution n'existe pas) ?

*Attention :* Cette dernière question est (beaucoup) plus difficile qu'il n'y paraît : en fait, même les plus grands scientifiques de la planète n'ont encore trouvé la réponse : ne désespérez donc pas si vous n'y arrivez pas du premier coup !

*Note historique :* C'est grâce à l'informatique qu'on a pu démontrer *mathématiquement* que 4 couleurs suffisent pour colorier tous les graphes dits *planaires*, c'est-à-dire les graphes correspondant à nos bonnes vieilles cartes de géographie (où on identifie les pays avec les sommets du graphe et les frontières communes entre deux pays avec les arêtes du graphe).

1. Imaginez le graphe le plus complexe possible avec $n$ sommets.

## 4 [N3] Dénombrabilité

**a)** L'hôtel infini partie 1 : un hôtel infini avec des chambres numérotées 1, 2, ... est plein et un nouveau client arrive : vérifier qu'on peut lui trouver une chambre bien que toutes les chambres soient utilisées.

**b)** L'hôtel infini partie 2 : l'hôtel est toujours plein ; un bus infini arrive (avec des sièges numérotés 1, 2, ....) ; le bus est plein et tous ses passagers veulent une chambre dans l'hôtel. Vérifier que l'on peut trouver une chambre pour chacun d'entre eux.

**c)** L'hôtel infini partie 3 : l'hôtel est toujours plein. Cette fois une file infinie de bus infinis arrive (les bus sont numérotés 1, 2, ... et les sièges de chaque bus sont numérotés 1, 2, ...) ; chaque bus est plein et chaque passager veut une chambre. Vérifier qu'on peut trouver une chambre pour chacun d'entre eux.

---

**Pour aller plus loin...**

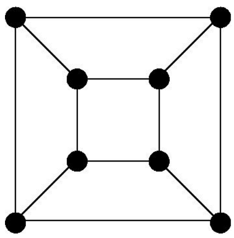
## 5 [N3] Chemins eulériens et hamiltoniens dans un graphe

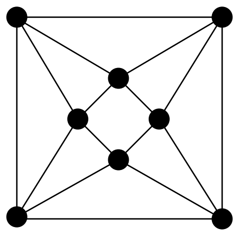
### 5.1 Chemins eulériens

Un chemin eulérien dans un graphe est un chemin qui passe *exactement* une fois par chaque *arête* du graphe et revient au sommet d'où il est parti (un chemin eulérien peut donc passer plusieurs fois par un sommet du graphe). On pose le problème suivant :

Etant donné un graphe avec $n$ sommets, existe-t-il un chemin eulérien qui parcourt celui-ci ?

Quel est l'ordre de complexité de ce problème ? Pour tenter d'y voir plus clair, explorons deux exemples :





Dans lequel des deux graphes ci-dessus existe-t-il un chemin eulérien ? Pouvez-vous en déduire une règle générale simple qui permet de déterminer si un graphe peut être parcouru par un chemin eulérien ou non ?

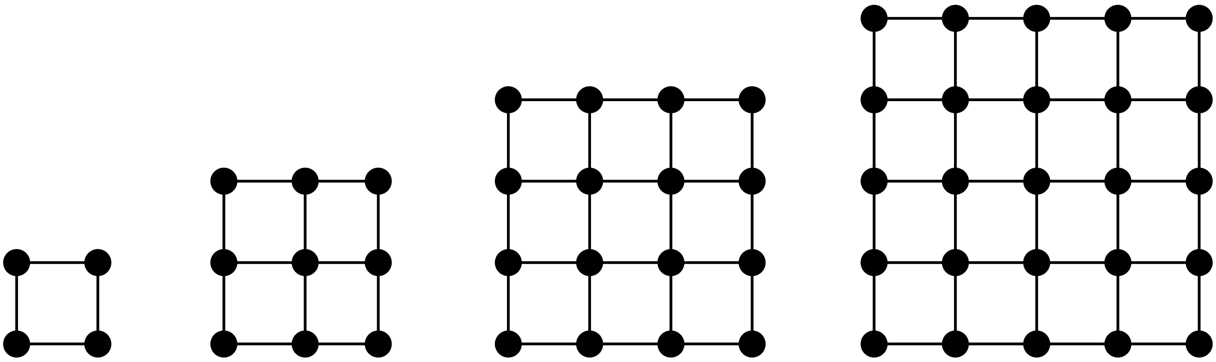
**Note :** Cette dernière question n'est pas facile du tout, donc ne paniquez pas si vous ne trouvez pas la réponse en un clin d'oeil !

### 5.2 Chemins hamiltoniens

Un chemin hamiltonien dans un graphe est un chemin qui passe *au plus* une fois par chaque *arête* du graphe, *exactement* une fois par chaque *sommet* du graphe et revient au sommet d'où il est parti (un chemin hamiltonien ne passe donc pas forcément par chaque arête du graphe). On pose à nouveau le problème suivant :

Etant donné un graphe avec $n$ sommets, existe-t-il un chemin hamiltonien qui parcourt celui-ci ?

Pour tenter d'évaluer l'ordre de complexité de ce problème, essayez de trouver un chemin hamiltonien sur chacun des quatre graphes suivants :



Pouvez-vous en déduire une règle générale simple qui permet de déterminer si un graphe peut être parcouru par un chemin hamiltonien ou non ?

**Note :** Encore une fois, la réponse à cette dernière question n'est pas facile à obtenir !

## Pour le fun...

Trouvez tous les nombres dont l'écriture en lettres dans la phrase suivante :

La longueur de cette phrase est de . . . caractères.

la rende vraie (en comptant les espaces et le point).

## Pour l'amour des maths...

Avez–vous remarqué (i.e. faîtes le lien) que dans le cours d'aujourd'hui nous avons démontré :

a) que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable ?

b) que l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas dénombrable ?

En déduire (facile) :

— que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable ;

— que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (ensemble des nombres irrationnels) n'est pas dénombrable.

Et pourtant $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (i.e. tout nombre réel est la limite d'une suite de rationnels) : il y a « presque partout » dans $\mathbb{R}$ des nombres rationnels, mais ceux-ci restent pourtant négligeables « en nombre » par rapport au reste (les irrationnels)...

Comme quoi, l'infini [2] échape « un peu » à nos intuitions...

## Liens ICC $\longleftrightarrow$ Programmation

— L'exercice 5 de la série 8 de programmation vous proposera de coder une machine de Turing.

2. **LES** infinis devrais-je écrire : $\aleph$, $2^{\aleph}$, ...