EPFL Automne 2016
Geometrie, MATH-120

Série 10

Dans les exercices qui suivent on pourra utiliser avec profit le fait que l'application partie lineaire

$$\mathrm{lin} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) & \mapsto & \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}} \\ \phi & \mapsto & \phi_0 \end{array}$$

est un morphisme de groupe.

On rappelle que

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+ \text{ et } \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$$

designent les ensembles d'isometries du plan dont la partie lineaire est contenue dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ et $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$ respectivement.

Le premier ensemble est appelle *ensemble des rotations affines*, le second l'ensemble des *symetries affines*. On a vu en cours que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ est un sous-groupe distingue de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 1. Montrer que

1. l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$ est le translate (a gauche ou a droite) de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ par un element quelconque de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$ est "distingue" dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ au sens suivant : pour toute symetrie affine $s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$ et toute isometrie affine $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ le conjugue
$$\phi \circ s \circ \phi^{-1}$$
est encore une symetrie affine.
3. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ est engendre par $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-$: tout element de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ s'ecrit comme le compose de 1 ou 2 symetries affines (utiliser le resultat analogue pour $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$)

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_P$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_P$ l'ensemble des isometries ϕ (rotations, symetries) affines qui fixent P, i.e.

$$\phi(P) = P.$$

1. Trouver une translation t telle que
$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P = t \circ \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}} \circ t^{-1}.$$
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ et que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ est un sous-groupe commutatif et distingue dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^-$ est le translate (a gauche ou a droite) de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ par un element quelconque de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^-$.
4. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ n'est pas distingue dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ (bien qu'il le soit dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P$).
5. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+$ n'est pas commutatif (bien que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_P^+$ le soit).

Exercice 3. Etant donne une rotation r, montrer qu'il existe deux rotations $r^{1/2}, -r^{1/2}$ telles que
$$(r^{1/2})^2 = (-r^{1/2})^2 = r;$$
on dira que la paire $\{r^{1/2}, -r^{1/2}\}$ est l'angle moitie.

Exercice 4. 1. Donner la matrice de la symetrie s d'axe la droite d'equation
$$3x + 4y = 0?$$
2. Quelle est la nature (et donner les points fixes) de la composee $\phi \circ s$ ou ϕ est l'application lineaire de matrice
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$
3. Meme question avec la matrice
$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Quelle est l'angle[1] entre la demi-droite $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(1,1)$ et la demi-droite $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(-\sqrt{3},-1)$ (on commencera par chercher les matrices des rotations envoyant $\mathbb{R}(1,0)$ sur respectivement, $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(1,1)$ et $\mathbb{R}_{\geqslant 0}(-\sqrt{3},-1)$).

Exercice 6. On considere la transformation
$$\phi(x,y) = (X,Y)$$
avec
$$X = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1.\ Y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2$$

1. suivant la definition du cours

1. Quelle est la nature de ϕ ?
2. Quels sont ses points fixes.
3. Quelle est la nature de ϕ^6 (on commencera par calculer la partie lineaire) ?

Exercice 7. On considere les transformations

$$\phi_1(x,y) = (y+1, x+1)$$

$$\phi_2(x,y) = (y+1, x-1)$$

1. Quelle est la nature de ϕ_1 et de ϕ_2 ?
2. Quels sont leurs points fixes respectifs.
3. Calculer ϕ_1^2 et ϕ_2^2.
4. Que valent ϕ_1^{2n} et ϕ_2^{2n} pour $n \in \mathbb{Z}$?