Série 13 du jeudi 15 décembre 2016

Exercice 1.

1.) Pour $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, montrer que

$$\int_\alpha^\beta \Big(\int_\gamma^\delta e^{2i\pi(x+y)}\, dy \Big)\, dx = \int_\gamma^\delta \Big(\int_\alpha^\beta e^{2i\pi(x+y)}\, dx \Big)\, dy$$

en les calculant.
On rappelle que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

2.) Montrer que $\displaystyle\int_a^b e^{2i\pi t}\, dt = 0 \Leftrightarrow b - a$ est entier.

3.) Soit $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ un rectangle que l'on peut écrire comme l'union de plus petits rectangles $R_1, \ldots, \mathbb{R}_n$ d'intérieurs disjoints, avec la propriété que chaque R_i a au moins un côté de longueur entière.
Montrer que R a un côté de longueur entière.
Indication: Calculer

$$\int_\alpha^\beta \Big(\int_\gamma^\delta e^{2i\pi(x+y)}\, dy \Big)\, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \Big(\int_{\gamma_i}^{\delta_i} e^{2i\pi(x+y)}\, dy \Big)\, dx.$$

Exercice 2.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x} \cos(2\pi x) dx$.

Exercice 3.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^5(x) \sin(x) dx$.

Exercice 4.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$.