Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 19 au 23 décembre 2016

Série 14 du mardi 20 décembre 2016

Exercice 1.

1.) Montrer que $\operatorname{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bijective.
On définit la réciproque de la tangente, $\operatorname{arctg}(x) : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2.) Montrer que $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3.) Montrer que:

$$\sin(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}(\theta)}{1+\operatorname{tg}^2(\theta)} \qquad \text{et} \qquad \cos(2\theta) = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\theta)}{1+\operatorname{tg}^2(\theta)}$$

en utilisant les expressions complexes (rappel: $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$).

4.) Calculer:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt.$$

5.) Calculer:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos t}\, dt.$$

Exercice 2.

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, est impaire alors, pour $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Exercice 3.

Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, x^n\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \\ C_{n/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $C_k = \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}$ est le k-ième nombre de Catalan (c.f. série jeudi 1er déc 2016, ex 2) .