Série 9

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 21 novembre.
L'exercice 3 ($\star$) peut être rendu le jeudi 24 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, est toujours une application linéaire.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(u) = b^T u$ pour tout u.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors, le codomaine de l'application $x \mapsto Ax$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soient U, V deux espaces vectoriels et $F : U \to V$ une application linéaire. Si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre U, alors la famille $(F(u_1), \ldots, F(u_n))$ engendre V.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soient $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Supposons $F(v_i) = 0$, pour $i = 1, \ldots, p$. Donc F est l'application nulle.

  ◯ vrai ◯ faux

b) Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Si v_1, v_2, v_3, $v_4 \in \mathbb{R}^4$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, est-ce que leurs images $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$, $\varphi(v_3)$, $\varphi(v_4)$ sont linéairement indépendantes ?

◯ Non si l'un des vecteurs est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, mais oui sinon.

◯ Oui, toujours.

◯ Non, jamais.

Exercice 2

a) Considérons l'espace vectoriel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, où $n \geq 1$ est un entier positif.

   i) Calculer $\dim(M_{n\times n}(\mathbb{R}))$.

ii) Soit $S_1 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques. Calculer $\dim(S_1)$.

iii) Soit $S_2 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques. Calculer $\dim(S_2)$.

iv) Soit $T = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Calculer $\dim(T)$.

Rappel : Soit K un corps. L'application trace $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ est définie par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ pour toute $A \in M_{n\times n}(K)$.

b) Soit $n \geq 1$ un entier positif. Considérons $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ comme l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et notons-le V.

i) Calculer $\dim(V)$.

ii) Soit $H_1 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes. Est-ce que H_1 est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de V ? Si oui, calculer $\dim(H_1)$.

iii) Soit $H_2 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices anti-hermitiennes. Est-ce que H_2 est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de V ? Si oui, calculer $\dim(H_2)$.

Exercice 3 ($\star$)

Soient $U_1, \ldots, U_s$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors

(i) $U_1 + \cdots + U_s$ est encore un sous-espace vectoriel de V,

(ii) $U_1 + \cdots + U_s = \mathrm{span}(U_1 \cup \cdots \cup U_s)$,

(iii) $\dim(U_1 + \cdots + U_s) \leq \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_s)$.

Exercice 4

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. L'application linéaire $P : V \to V$ est une *Projection*, si $P^2 = P$. Montrer que :

i) $V = \mathrm{Ker}\,(P) \oplus \mathrm{Im}\,(P)$.

ii) Pour deux sous espaces vectoriels $W_1, W_2 \subset V$ tels que $V = W_1 \oplus W_2$, il existe exactement une projection $P : V \to V$ telle que $\mathrm{Ker}\,(P) = W_1$ et $\mathrm{Im}\,(P) = W_2$.

Exercice 5

Lequelles des applications suivantes sont linéaires ? Sauf indication contraire, montrer la linéarité sur le corps $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z \mapsto \overline{z}$.
2. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z \mapsto \overline{z}$, (sur le corps $\mathbb{C}$).
3. $C^0((-2,2)) \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto f(0) + \int_{-1}^{1} f(x)\, e^{x^2}\, dx$.
4. $C^0((0,\infty)) \to C^0((0,\infty))$, $\quad f \mapsto \Big(x \mapsto x\, f(1/x)\Big)$.
5. $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto \int_{f(0)-\frac{\pi}{2}}^{f(0)+\frac{\pi}{2}} f(2x)\, dx$.

6. $(\star\star)$ $\mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, $\qquad p \mapsto p'$.
7. $(\star\star)$ $\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_5[x]$, $\qquad p \mapsto (2 - 3x + x^2)p$.
8. $\mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2$, $\qquad (x, y) \mapsto (x + y, x^2 + y^2)$.
9. $C^0([0, 3]) \to \mathbb{R}$, $\qquad f \mapsto 37f(1) + 58 \int_2^3 f(x)\, dx$.

$(\star\star)$ Pour les points 6. et 7. calculer une base de l'image et du noyau, et dire si les applications sont injectives ou surjectives.
Notation : Pour $I \subseteq \mathbb{R}$, on denote l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur I par $C^0(I)$. De plus $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques.

Exercice 6
On considére les trois applications linéaires $F_A, F_B, F_C : X \to Y$ que l'on décrit par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient $F_A : x \mapsto Ax$. Les espaces vectoriels X et Y sont toujours soit $\mathbb{R}^2$ soit $\mathbb{R}^3$.

i) Déterminer pour les applications linéaires F_A, F_B, F_C si elles sont surjectives, injectives ou bijectives.
ii) Calculer pour les applications linéaires F_A, F_B, F_C une base de le noyau et de l'image.

Exercice 7
Soit la transformation $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix}$.

i) Vérifier que T est linéaire.
ii) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(T)$.
iii) Trouver une base de $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice 8
Soient K un corps et $n \geq 1$ un entier positif. Soit $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ l'application trace.

i) Montrer que Tr est une application linéaire.
ii) Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in M_{n\times n}(K)$.
iii) Montrer que $\mathrm{Tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}(A)$ pour $A, S \in M_{n\times n}(K)$ et S une matrice inversible.

Exercice 9
Calculer pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

le noyau de l'application linéaire $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ définie comme

$$F : X \mapsto AX - XA.$$