Série 12 du mardi 6 décembre 2016

Exercice 1.

On définit $\operatorname{tg}(x) = \sin(x)/\cos(x)$. Montrez qu'il existe un voisinage de 0 où c'est une fonction croissante (et bien définie).

Exercice 2.

Soit $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ deux suites numériques bornées telles que $\alpha_n, \beta_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que

$$\limsup_{n\to\infty}(\alpha_n\beta_n) \leq \left(\limsup_{n\to\infty}\alpha_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty}\beta_n\right).$$

Exercice 3(à rendre).

On définit la fonction f par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

(1) Calculer le rayon de convergence de cette série.

(2) Montrer que sur le domaine de convergence, on a $f(x) = \ln(1+x)$.
Indication: dériver...

Exercice 4.

Soit F_n la suite de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ définie par la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Soit $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$.

1.) Montrer que F a un rayon de convergence au moins $1/2$.
(indication: montrer que $F_n \leq 2^n$)

2.) Montrer que $F(x) = xF(x) + x^2F(x) + x$.

3.) Déduire que $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

4.) Ecrire $F(x) = \frac{A}{x+\varphi} + \frac{B}{x+\psi}$ avec $\varphi > \psi$, $A, B \in \mathbb{R}$.

5.) En déduire une formule générale pour F_n en termes de φ et ψ.

6.) Montrer que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi$ lorsque n tend vers l'infini.