Corrigé 12 du mardi 6 décembre 2016

Exercice 1.

On a, utilisant les dérivées de sin et cos
$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\,(x) = 1 + \mathrm{tg}\,(x)^2 > 0.$$
Ainsi, la fonction tg est strictement croissante et donc injective sur un intervalle ouvert contenant le point 0 qu'on peut supposer $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Elle y admet donc un inverse qui est aussi une fonction dérivable et qu'on notera Arctg .

Exercice 2.

On pose
$$\begin{aligned} a_n &= \sup\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots\}, \\ b_n &= \sup\{\beta_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \ldots\}, \\ c_n &= \sup\{\alpha_n\beta_n, \alpha_{n+1}\beta_{n+1}, \alpha_{n+2}\beta_{n+2}, \ldots\}. \end{aligned}$$
On a
$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \limsup_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n\beta_n) = \lim_{n\to\infty} c_n.$$
Par définition de a_n et b_n, on a pour $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \le \alpha_j \le a_n, \quad \forall j \ge n, \qquad 0 \le \beta_j \le b_n, \quad \forall j \ge n.$$
Ainsi, $0 \le \alpha_j\beta_j \le a_nb_n$, $\forall j \ge n$ et donc $c_n \le a_nb_n$. Puisque $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ et $(c_n)_{n=0}^\infty$ sont des suites décroissantes et bornées, on a
$$\lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$
d'où le résultat.

Exercice 3.

On définit la fonction f par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

(1) Calculer le rayon de convergence de cette série.
Le critère de d'Alembert pour un x fixé donne immédiatement $|x| < 1$.

(2) Montrer que sur le domaine de convergence, on a $f(x) = \ln(1+x)$.
Si on dérive la série dans son domaine de convergence, on obtient
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$
De la série géométrique $\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$, on tire $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et donc, puisque $f(0) = 0 = \ln(1+0)$:
$$f(x) = \ln(1+x).$$

Exercice 4.

Soit F_n la suite de Fibonacci $0,1,1,2,3,5,8,\dots$ définie par la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$ et $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Soit $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$.

1.) Montrer que F a un rayon de convergence au moins $1/2$.
(indication: montrer que $F_n \leq 2^n$)
On a clairement $F_n \leq 2^n$. Si F_n était égal à 2^n pour tout n, on aurait, par d'Alembert, un rayon de convergence $1/2$. Puisque $0 \leq F_n \leq 2^n$, on a que ce rayon est plus grand que $1/2$.

2.) Montrer que $F(x) = xF(x) + x^2F(x) + x$.
Puisque $F_0 =$ et $F_1 = 1$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(F_{n-1} + F_{n-2}\Big) x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\ &= x + x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} = x + xF(x) + x^2F(x). \end{aligned}$$

3.) Déduire que $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$. On a $F(x)(1-x-x^2) = x$.

4.) Ecrire $F(x) = \frac{A}{x+\varphi} + \frac{B}{x+\psi}$ avec $\varphi > \psi$, $A, B \in \mathbb{R}$.
On a $1 - x - x^2 = -(x+\varphi)(x+\psi)$ avec

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

et on trouve

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{\psi}{x+\psi} - \frac{\varphi}{x+\varphi}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\psi x}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n x^n\Big).$$

5.) En déduire une formule générale pour F_n en termes de φ et ψ.
De la dernière égalité, on tire

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varphi^n - \psi^n\Big) x^n$$

d'où

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - \psi^n\Big).$$

6.) Montrer que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi$ lorsque n tend vers l'infini.
On a

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n} = \frac{\varphi^{n+1}(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}})}{\varphi^n(1 - \frac{\psi^n}{\varphi^n})}.$$

Il suffit de vérifier que $|\frac{\psi}{\varphi}| < 1$. Or,

$$\Big|\frac{\psi}{\varphi}\Big| = \Big|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big| = \Big|\frac{1-5}{(1+\sqrt{5})^2}\Big| < \frac{4}{6} < 1.$$

Notons que φ est **le nombre d'or** $\simeq 1.61803398875$.