Série 4

L'exercice 1 sera discuté pendant le cours du lundi 17 octobre.
L'exercice 3 ($\star$) peut être rendu le jeudi 20 octobre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Il existe un anneau $(A, +, \cdot)$ tel que A contient un seul élément.

  ◯ vrai ◯ faux
- Il existe un corps $(K, +, \cdot)$ tel que K contient un seul élément.

  ◯ vrai ◯ faux
- Dans l'anneau des polynômes $A[t]$, les polynômes de degré pair avec le polynôme zéro forment un sous-anneau.

  ◯ vrai ◯ faux
- Dans l'anneau des polynômes $A[t]$, les polynômes de degré impair avec le polynôme zéro forment un sous-anneau.

  ◯ vrai ◯ faux
- Soit $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$. Alors $(D, \cdot)$ et $(SO(2), \cdot)$ sont isomorphes.

  ◯ vrai ◯ faux
- Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $z^k \in \mathbb{R}$.

  ◯ vrai ◯ faux

(b) Déterminer les énoncés corrects.

1. Supposons que $a^2 = a$ pour tous les éléments a d'un anneau A. Lesquelles des assertions suivantes sont correctes ?
   - ◯ $a^3 = a$, pour tout a.
   - ◯ L'anneau est commutatif.
   - ◯ $a^3 = 0$, pour tout a.
2. Combien de solutions a l'équation $z^{-1} = z$ dans $\mathbb{C}$?
   - ◯ 0.
   - ◯ 1.
   - ◯ 2.
   - ◯ ∞.
3. Combien de solutions a l'équation $z^{-1} = \bar{z}$ dans $\mathbb{C}$?
   - ◯ 0.
   - ◯ 1.

- ◯ 2.
- ◯ ∞.

4. Combien de solutions a l'équation $\exp(z) = -1$ dans $\mathbb{C}$?
   - ◯ 0.
   - ◯ 1.
   - ◯ ∞.
5. Combien de solutions a l'équation $\exp(z) = -1 + \mathrm{i}$ dans $\mathbb{C}$?
   - ◯ 0.
   - ◯ 1.
   - ◯ ∞.

Exercice 2

Montrer que $(M_{n\times n}(K), +, \cdot)$, $n > 1$, est un anneau non-commutatif, où K est un corps, $+$ l'addition matricelle et $\cdot$ la multiplication matricelle.

Remarque : Vous pouvez utiliser le matériel déjà montré dans le polycopié et les exercices. Par exemple, il ne faut pas montrer que $(M_{n\times n}(K), +)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 ($\star$)

Montrer que $\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot\big)$ n'est pas un anneau, où les opérations $\oplus$ et $\odot$ sont définies par

$$a \oplus b = \min\{a, b\}, \quad a \odot b = a + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

En testant tous les axiomes, déterminer lesquels sont satisfaits et lesquels ne le sont pas.

Exercice 4

Montrer que l'ensemble $A[t]$ avec les opérations $+$ et $\cdot$, définies dans le cours, est un anneau. Montrer de plus que si A est un anneau commutatif, alors $A[t]$ est aussi un anneau commutatif.

Exercice 5

a) Soient $u = -2 + \mathrm{i}$, $v = 2 + 3\mathrm{i}$ et $w = 7 - 11\mathrm{i}$. Calculer

$$u + v, \qquad u + \bar{v} + w, \qquad u \cdot v, \qquad v \cdot w \cdot \mathrm{i}, \qquad \frac{w}{v}, \qquad \frac{v}{u}.$$

b) Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument :

$$\sqrt{5} + 2\mathrm{i}, \qquad (3 + 3\mathrm{i})^9, \qquad \frac{5 - \mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i}}, \qquad \left(\frac{-1}{\mathrm{i}}\right)^{57}.$$

Exercice 6

On considère le sous-ensemble $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{C} \right\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

i) Montrer que $(H, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(M_{2\times 2}(\mathbb{C}), +, \cdot)$, où $+$ et $\cdot$ sont l'addition et la multiplication usuelle des matrices.

ii) Montrer que tous les éléments de $H \setminus \{0\}$ sont inversibles pour la multiplication. Est-ce que $(H, +, \cdot)$ est un corps ?

iii) (**optionnel**) Construire un isomorphisme entre $(H, +, \cdot)$ et un sous-anneau de $(M_{4\times 4}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Indice : Pour l'inverse d'un élément non nul de H, on a une formule similaire (mais pas identique) à l'inverse d'une matrice réelle 2×2 inversible.

NB : L'ensemble H muni des opérations $+$ et $\cdot$ s'appelle l'ensemble des quaternions.

Exercice 7

Soit $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ et $\circ : G \times G \to G$ une loi de composition donnée par la table de Cayley (incomplète)

$\circ$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Par exemple, si y est dans la ligne c et la colonne b, cela signifie que $c \circ b = y$. Tous les éléments de G apparaissent au plus une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne (la règle du Sudoku).

Compléter la table afin que $(G\,, \circ)$ soit un groupe, c-à-d vérifier

- la stabilité de G,
- l'associativité de $\circ$,
- l'existence de l'élément neutre,
- l'inversibilité.

Remarque : Vous pouvez compléter la table de sorte à ce que les 4 points ci-dessus soient vérifiés. Vous n'avez alors pas besoin à la fin de vérifier si, par exemple, l'associativité est satisfaite pour toutes les paires d'éléments de G.