EPFL Automne 2016
Geometrie, MATH-120

Série 6

On considere le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de ces fonctions distances $d(.,.)$, longueur $\|.\|$ et de son produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On rappelle (ou on enonce) les definitions suivantes

— Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires (ou lies, ou paralleles) si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\vec{v} = \lambda \vec{u} \text{ ou bien } \vec{u} = \lambda \vec{v}.$$
Deux droites $D(\vec{u}, P)$ et $D(\vec{v}, Q)$ sont paralleles si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colineaires (ou lies, ou paralleles).

— Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires ou orthogonaux si
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$
Deux droites $D(\vec{u}, P)$ et $D(\vec{v}, Q)$ sont perpendiculaires si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le sont.

— Une droite D est de pente $\lambda \in \mathbb{R}$ si elle admet le vecteur $(1, \lambda)$ comme vecteur directeur. Si elle n'admet aucun vecteur de cette forme, ses vecteurs directeurs sont de la forme $(0, \lambda)$ (la droite est verticale) et on dit que la pente est *infinie.*

— Etant donne $P, Q \in \mathbb{R}^2$, le segment $[PQ]$ est l'ensemble des points R de la forme
$$R = P + t\vec{PQ}, \ t \in [0, 1].$$

— Soit $n \geqslant 2$ un entier, un polygone $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ a n cotes est une reunion de segments (appeles cotes du polygone) de la forme
$$\mathbf{P} = \bigcup_{i=1\cdots n} [P_i P_{i+1}]$$
avec
$$P_1, \cdots, P_n, \ P_{n+1} = P_1$$
un ensemble de n points distincts du plan (qu'on appelle sommets du polygone), tels que deux cotes consecutifs ne sont pas paralleles et tels que deux cotes ne se coupent que s'ils sont consecutifs et alors en un seul point (le sommet bordant les deux cotes). On notera
$$\mathbf{P} = [P_1 \cdots P_n].$$
Un polygone a 3 cotes est un triangle, a 4 un quadrilatere etc... Un triangle rectangle est un triangle dont deux cotes sont perpendiculaires. Un parallelogramme est un quadrilatere $[PQRS]$ tel que les paires $([PQ], [RS])$ et $([QR], [SP])$ sont paralleles, etc...

Les exercices qui suivent sont des problemes classiques de geometrie elementaire a resoudre par des calculs algebriques sur des coordonnes en choisissant convenablement le meilleur moyen de representer les objets geometriques en question.

Exercice 1. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un ensemble de n points. Leur barycentre est le point

$$\mathrm{Bar}(\mathcal{P}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Par exemple si $n = 2$, $\mathrm{Bar}(\mathcal{P})$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$.

1. Montrer que le barycentre d'un triangle $\{P_1, P_2, P_3\}$ est le point d'intersection des trois medianes de ce triangle (droite joignant un sommet au milieu du segment oppose).

Exercice 2.
1. Etant donne P, Q deux points, pourquoi le point $P + \frac{1}{2}\vec{PQ}$ s'appelle-t-il le mileu du segment $[PQ]$?
2. Montrer que

$$[PQ] = \{R \in \mathbb{R}^2 |\ d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)\}.$$

3. Comment pourrait-on appeler les ensembles

$$\{R \in \mathbb{R}^2 |\ d(P,R) - d(R,Q) = d(P,Q)\}$$

et

$$\{R \in \mathbb{R}^2 |\ -d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)\}?$$

Exercice 3. Montrer que (a partir des definitions de la feuille) :
1. les parallelogrammes sont exactement les quadrilateres tels que $d(P,Q) = d(R,S)$ et $d(Q,R) = d(S,P)$.
2. Etant donne un quadrilatere quelconque $[PQRS]$ les milieux des cotes

$$[PQ], [QR], [RS], [SP]$$

forment toujours un parallelogramme (Theoreme de Varignon).

Exercice 4 (Theoreme de l'hypothenuse)**.** Soient $P \neq Q$ deux points et $\mathcal{C}$ le cercle de centre le milieu de $[PQ]$ et de rayon $d(P,Q)/2$. Montrer que pour tout point $R \in \mathcal{C}$ le triangle $[PQR]$ est rectangle en R.

Exercice 5. Soit $\mathcal{D} = P + \mathbb{R}\vec{u} \subset \mathbb{R}^2$ une droite et $Q \in \mathbb{R}^2$ un point.

1. Montrer que la fonction
$$R \in \mathcal{D} \mapsto d(R,Q) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$
qui donne la distance d'un point de $\mathcal{D}$ a Q admet un minimum qu'on appelle distance de Q a la droite $\mathcal{D}$ et qu'on note $d(\mathcal{D},Q)$ et que ce minimum atteint en un unique point R_0 (on pourra parametrer les points de $\mathcal{D}$ sous la forme $P + t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$ et pour simplifier les calculs on pourra considerer le carre de la distance $d(R,Q)^2$).
2. Que dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{R_0Q}$?

Exercice 6. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{C}$ un cercle. Montrez que $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ en 0, 1 ou 2 points. Caracteriser les trois possibilites en fonction de la distance de $\mathcal{D}$ au centre du cercle.

Exercice 7 (Triplets euclidiens)**.** $\star$ Un triplet d'entiers $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ est euclidien si
$$a^2 + b^2 = c^2 :$$
en d'autres termes si le triangle de cotes de longueurs entieres $|a|, |b|, |c|$ est rectangle. Par exemple $(1,0,1)$ est un triplet euclidien, $(3,4,5)$ en est un autre qu'on appelle *triplet des maçons* (pourquoi ?).

Montrer que tout triplet euclidien peut etre obtenu par la recette suivante (s'aider avec un dessin) :

1. Soit $\mathcal{C} = C(\mathbf{0},1)$ le cercle unite centre en l'origine et $P = (-1,0) \in \mathcal{C}$,
2. Montrer que pour tout nombre rationnel $\lambda \in \mathbb{Q}$ la droite $D(P,\lambda)$ passant par P et de pente λ intersecte $\mathcal{C}$ en exactement deux points P et Q_λ et que les coordonnes de ce dernier sont des nombres rationels (x_λ, y_λ).
3. Montrer que (x_λ, y_λ) peut toujours se mettre sous la forme $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ avec $a,b,c \in \mathbb{Z}$ (et ce de multiples manieres) et que (a,b,c) est un triplet euclidien.