EPFL 1er semestre 2015-16
Géométrie I, MATH-120

Examen

Nom : Prenom : No SCIPER :

Consignes :

— **Les notes de cours et les notes d'exercices ne sont pas autorisées**
— **Le formulaire standard est autorisé.**
— **Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.**
— **Sauf mention explicite du contraire on a le droit d'admettre un résultat d'un autre exercice ou d'une question précédente du même exercice pour répondre à une question.**
— **Dans tout le texte, "symétrie" signifie "symétrie orthogonale".**
— **Les angles seront représentés sous forme de nombres complexes de modules 1.**
— **L'examen est long mais il n'est pas nécéssaire de le faire correctement intégralement pour obtenir la note maximale.**

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Enoncer le Théorème de Lagrange.
2. Esquisser une figure dont le groupe d'isométries est cyclique d'ordre 8.
3. Entourer le label des affirmations qui sont correctes (la détermination de leur véracité devrait, normalement, ne nécessiter que peu de calculs) :
   a) Un groupe dihedral est commutatif.
   b) La composée de la symétrie d'axe la droite d'équation $x + y = 2$ et de la symétrie d'axe la droite d'équation $2x + y = 3$ est une symétrie dont l'axe passe par le point d'intersection des deux droites.
   c) L'image du point $(4, -4)$ par la symétrie d'axe la droite d'équation $2x+3y = 1$ est le point $(6, -2)$.
   d) Le groupe des isométries d'un hexagone régulier est d'ordre 6.

Exercice 2. Soit φ defini par

$$\varphi(x, y) = (\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 1, -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2)$$

1. Quelle est la nature géométrique de φ : type de transformation, angle, points fixes (si ils existent).
2. Ecrire φ sous forme de transformations complexe.
3. Calculer φ^{2016}.

Exercice 3. Soit D la droite d'équation

$$x + y = 1.$$

1. Soit s_D la symétrie orthogonale d'axe D. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

   $$s_D(x, y) = (X, Y).$$

   Calculer (X, Y) en fonction de (x, y).
2. Exprimer s_D sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes.
3. Soit r la rotation d'angle $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de centre $(1, 0)$. Exprimer r sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes. Quel est l'ordre de r ?
4. Soit $D' = r(D)$ la transformée de D par la rotation r. Calculer l'isométrie composée $\varphi = s_{D'} \circ s_D$ en fonction de r (on pourra considérer les points fixes de s_D, r et $s_{D'}$).
5. Montrer que le groupe $G = \langle s_D, s_{D'} \rangle$ engendré par s_D et $s_{D'}$ est aussi le groupe engendré par s_D et φ et calculer son ordre.
6. Donner un polygone explicite $\mathbf{P}$ et une isométrie du plan ψ tel que le groupe d'isométries de $\mathbf{P}' = \psi(\mathbf{P})$ soit G.

Soient $(G, .)$ et $(H, .)$ deux groupes finis (bien que les groupes G et H sont *a priori* distincts, on notera de la même manière leur lois de composition respectives.) Soit $G \times H$ le groupe produit

$$G \times H = \{(g, h),\ g \in G,\ h \in H\}$$

muni de la loi de groupe produit

$$(g, h) \times (g', h') := (g.g', h.h')$$

avec pour element neutre (e_G, e_H). Le but de cet exercice est de montrer de deux manieres differentes l'enonce suivant :

Théorème. *Si G et H sont des groupes finis, cycliques et d'ordres respectifs m et n premiers entre eux ; alors le groupe produit $G \times H$ est egalement un groupe cyclique.*

Bien entendu on ne pourra utiliser les résultats du premier exercice pour démontrer le second.

Exercice 4. (Première méthode) Soit g_0 un génerateur de G et h_0 un génerateur de H.

1. Montrer que l'ordre de (g_0, h_0) dans le groupe produit $G \times H$ divise mn.
2. Montrer que l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que la première coordonnée de $(g_0, h_0)^k = (g_0, h_0) \times \cdots \times (g_0, h_0)$ (k fois) vaut e_G est l'ensemble des multiples de m.
3. Effectuer un raisonnement similaire et en déduire l'ordre de (g_0, h_0).
4. Conclure la preuve du Théorème.

Exercice 5. (Deuxième méthode) Soit $(\mathbb{C}^\times, .) = (\mathbb{C} - \{0\}, .)$ le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ (muni de la multiplication usuelle). Soient $\mu_m, \mu_n \subset \mathbb{C}^\times$ les sous-groupes des racines m-ièmes et n-ièmes de l'unité.

1. Montrer que l'application "produit"

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mu_m \times \mu_n & \mapsto & \mathbb{C}^\times \\ (\zeta, \xi) & \mapsto & \zeta.\xi \end{array}$$

   est un morphisme de groupes.
2. Montrer que l'image $\mathrm{Im}(\pi)$ est un groupe cyclique.
3. Montrer que le noyau $\ker(\pi)$ peut s'identifier à un sous-groupe de μ_m et a un sous-groupe de μ_n. En déduire que $\ker(\pi) = \{(1, 1)\}$.
4. Montrer que $\mu_m \times \mu_n$ est cyclique et conclure la preuve du Théorème.
5. Quel sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ est le groupe $\mathrm{Im}(\pi)$?