Propédeutique été 2007

Lundi 16 juillet 2007, 14:15 - 18:00

Salles CE1, CE3, polyvalente

Exercice 1.

Cherchons une fonction $v \in C^1\left(]0,\infty[\right)$ qui ne s'annule pas, sauf pour $x = 1$ et qui vérifie

$$\int_1^x v(t)\,dt = \frac{(v(x))^2}{x}, \quad \forall x \in]0,\infty[.$$

En dérivant cette égalité de part et d'autre, on obtient :

$$v(x) = \frac{2v(x)\,v'(x)}{x} - \frac{v(x)^2}{x^2}$$

ou, en simplifiant par $v(x)$:

$$v'(x) - \frac{v(x)}{2x} = \frac{x}{2}.$$

Considérons l'équation sans second membre :

$$w'(x) - \frac{w(x)}{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{1}{2x}.$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\ln w(x) = \frac{1}{2}\ln x + C \quad \Leftrightarrow \quad w(x) = \alpha\sqrt{x}, \quad \text{avec } \alpha = e^C.$$

Si on fait varier la constante α, i.e en posant $v(x) = \alpha(x)\sqrt{x}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} = v'(x) - \frac{v(x)}{2x} &= \left(\alpha'(x)\sqrt{x} + \frac{\alpha(x)}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{\alpha(x)\sqrt{x}}{2x} \\
&= \alpha'(x)\sqrt{x} \\
\Leftrightarrow \qquad \alpha'(x) &= \frac{\sqrt{x}}{2} \\
\Leftrightarrow \qquad \alpha(x) &= \frac{x^{3/2}}{3} + d,
\end{aligned}$$

où d est une constante. Ainsi

$$v(x) = \left(\frac{x^{3/2}}{3} + d\right)\sqrt{x}.$$

Pour $x = 1$, il faut que $v(1) = 0$. On obtient $d = -\frac{1}{3}$ et finalement

$$v(x) = \frac{-\sqrt{x} + x^2}{3}, \qquad x \in]0,\infty[.$$

Exercice 2.

Pour quels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a-t-on

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{(\alpha^2-1)(\beta-2)+4x+x^3}{\alpha^2(\beta+2)x+\alpha\beta x^2} = 1 \ ?$$

Solution : Si on regarde séparemment les limites du numérateur et du dénominateur on a:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} (\text{num}) = (\alpha^2-1)(\beta-2) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} (\text{den}) = 0.$$

La limite ne peut exister (condition nécessaire) que si

$$(\alpha^2-1)(\beta-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm 1 \ \text{ ou } \ \beta = 2.$$

Dans ce cas l'équation se ramène à

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{4+x^2}{\alpha^2(\beta+2)+\alpha\beta x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2(\beta+2) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm 1 \ \text{ et } \ \beta = 2.$$

On trouve finalement deux solutions : soit $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, soit $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

Exercice 3.

a) 1^o) f est continue sur $]a, b[$ si
$\forall x \in]a, b[, \forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in]a, b[$ avec $|x - y| \leq \delta$ on ait
$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

2^o) f est uniformément continue sur $]a, b[$ si
$\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in]a, b[$ avec $|x - y| \leq \delta$ on ait
$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

3^o) f est bornée sur $]a, b[$ s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que
$|f(x)| \leq M, \forall x \in]a, b[$.

b) 1^o) Puisque f est bornée sur $]a, b[$, on obtient pour $x, y \in]a, b[$
$|g(x) - g(y)| = |\int_y^x f(t)dt| \leq M|x - y|$ où $M = \sup\limits_{t \in]a,b[} |f(t)|$.
Soit $\epsilon > 0$ et posons $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Si $x, y \in]a, b[$ sont tels que $|x - y| \leq \delta$, on obtient $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$, ce qui prouve que g est uniformément continue sur $]a, b[$.

2^o) Soit $x, y \in]a, b[, x \neq y$.
Si x est fixé, par le thm de la moyenne on a $\displaystyle\int_y^x f(t)dt = f(z)(x-y)$ où $z = z(y)$ est dans l'intervalle d'extrémités x et y. Ainsi, $\lim\limits_{y \to x} z(y) = x$. On obtient donc:

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{\int_y^x f(t)dt}{x - y} = f(z(y)) \text{ et par suite } g'(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ \neq}} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = f(x).$$

Exercice 4.

1°) La suite $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ et donnée par la suite de nombres suivante:

$$c_0 = b_0, c_1 = a_0, c_2 = b_1, c_3 = a_1, c_4 = b_2, \ldots.$$

Supposons que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a = b$.
Si $\epsilon > 0$ est donné, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|b - b_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$ et $|a - a_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$.
Ainsi on obtient lorsque $a = b$:

$$|a - c_{2n}| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |a - c_{2n+1}| \leq \epsilon, \forall n \geq N$$

ce qui prouve que $|a - c_m| \leq \epsilon, \forall m \geq 2N \underset{def}{=} M$.
Ainsi $\forall \epsilon > 0$, on a l'existence de M tel que $|a - c_m| \leq \epsilon$ si $m \geq M$ ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

2°) Supposons maintenant que $a = \lim_{n\to\infty} a_n \neq b = \lim_{n\to\infty} b_n$.
Par l'absurde, si la suite $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ était convergente vers c i.e., $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existerait M tel que

$$|c - c_m| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad m \geq M.$$

Prenons $\epsilon = \frac{|a-b|}{8}$ et soit N tel que $|b - b_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$ et $|a - a_n| \leq \epsilon, \forall n \geq N$.
Si on prend n tel que $n \geq N$ et $2n + 1 \geq M$ on obtient:

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - c| + |c - b_n| + |b_n - b| \leq \frac{|a - b|}{2}$$

ce qui montre que $a = b$. On obtient une contradiction.

3°) On a $\limsup_{n\to\infty} c_n = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \sup\{c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots\}$. Comme $\sup\{c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots\} = d_n$ est une suite décroissante et bornée (car $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ sont bornées), on a

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots\}.$$

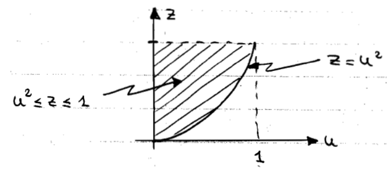
- Si $a > b$, il existe $N > 0$ tel que $a_n > b_n, \forall n \geq N$. Ainsi, si $n \geq N$ on aura $\sup\{c_{2n}, c_{2n+1}, \ldots\} = \sup\{a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \ldots\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ et donc

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty}\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

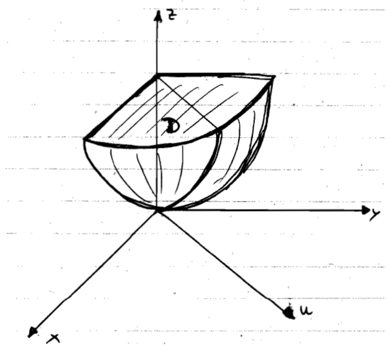
- De même, si $a < b$, on a $\limsup_{n\to\infty} c_n = b$ et si $a = b$ on a $\limsup_{n\to\infty} c_n = a = b$

Exercice 5.

1^o) Si on pose $u = \sqrt{x^2+y^2}$ et si $z \in [u^2, 1]$ avec $u^2 \leq 1$, on a le graphique suivant dans le plan (u, z):



Ainsi la représentation graphique de D est la suivante:



Paramétrisation de D:

$$F \begin{cases} x = u\cos v & 0 \leq u \leq 1 \\ y = u \sin v & 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \\ z = w & u^2 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

2^o) $D_{(u,v,w)}F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J(u,v,w) = u$.

Ainsi

$$\iiint_D f dxdydz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^1 du \int_{u^2}^1 u^3 \cos v \sin vw \ dw$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v \sin v \ dv \int_0^1 u^3 \left. \frac{w^2}{2} \right|_{w=u^2}^{w=1} du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v \sin v \ dv \int_0^1 \left(\frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u^7 \right) du.$$

Si on pose $s = \sin v, ds = \cos v dv$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v \sin v \ ddv = \int_0^1 sds = \frac{1}{2}.$$

D'autre part

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(u^3 - u^7\right) du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16}.$$

Ainsi

$$\iiint_D f dxdydz = \frac{1}{32}.$$

Exercice 6.

Construisons le lagrangien:

$$L(\lambda, x, y, z) = x^2 + yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

En cherchant les points stationnaires du lagrangien L on a:

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial L}{\partial y} = z + 2\lambda y = 0;$$

$$(4) \quad \frac{\partial L}{\partial z} = y + 2\lambda z = 0.$$

On obtient donc 4 équations pour 4 inconnues λ, x, y, z. De l'équation (2) on tire $x = 0$ ou $\lambda = -1$.

1^{er} cas: $x = 0$. De l'équation (3) on a $z = -2\lambda y$ et en remplaçant dans (4) on obtient $y - 4\lambda^2 y = 0$. Deux cas se présentent: $y = 0$ et $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.
Si $y = 0$, on obtient par (3) $z = 0$ et on obtient une incompatibilité avec (1). Ainsi $y \neq 0$.
Si $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ on obtient en remplaçant dans (3) (4) $z \pm y = 0$ et $y \pm z = 0$ et ainsi $z = \pm y$. En mettant $x = 0, z = \pm y$ dans (1) on obtient $2y^2 = 1$ et donc $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
En résumé, on a donc les solutions:

- $x = 0, y = +\frac{1}{\sqrt{2}}, z = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = +\frac{1}{2}$;
- $x = 0, y = +\frac{1}{\sqrt{2}}, z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = -\frac{1}{2}$;
- $x = 0, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, z = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = -\frac{1}{2}$;
- $x = 0, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui implique que $f(x, y, z) = +\frac{1}{2}$.

2^{eme} cas: $x \neq 0$ et $\lambda = -1$. Dans les équations (3) et (4) nous avons avec $\lambda = -1$, $z - 2y = 0$ et $y - 2z = 0$ qui implique $y = z = 0$. En remplaçant dans (1) on obtient $x = \pm 1$ qui dans f donne $f(\pm 1, 0, 0) = 1$.
On obtient finalement

$$\max_{x^2+y^2+z^2=1} f(x, y, z) = 1 \quad \text{et} \quad \min_{x^2+y^2+z^2=1} f(x, y, z) = -\frac{1}{2}.$$