Corrigé 2 du jeudi 29 septembre 2016

Exercice 1 (* A rendre) .

1.) Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel $x^2 = 2$.

On pose pour commencer:

$$A = \{y \in \mathbb{R}, y > 0 : y^2 < 2\}.$$

L'ensemble A n'est pas vide, car il contient 1. De plus il est majoré par 2. En effet, si $y \leq 1$, on a $y < 2$; si $1 < y$, on a $y < y^2 < 2$.

On pose alors $x = \sup A$, ce qui est équivalent à:

$$\begin{aligned} &1.)\ \forall y \in A, y \leq x, \\ &2.)\ \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x] \cap A \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Rappelons que le point 1.) assure que x est un majorant de A alors que le point 2.) assure que tout nombre $x - \varepsilon$ plus petit que x n'est pas un majorant de A puisqu'il y a un élément de A plus grand que $x - \varepsilon$. x est donc bien le plus petit majorant de A.

Montrons maintenant que $x^2 = 2$. On montre pour cela que si on suppose que x^2 est différent de 2, on aboutit à une contradiction.

- Supposons $x^2 > 2$. On va contredire le point 2.) en exhibant un $\varepsilon > 0$ tel que l'intersection est vide. On pose $\beta = x - \alpha(x^2 - 2)$, avec $0 \leq \alpha$. On a alors:
  $$\beta^2 - 2 = x^2 - 2 - 2\alpha x(x^2 - 2) + \alpha^2(x^2 - 2)^2 = (x^2 - 2)\big[1 - 2\alpha x + \alpha^2(x^2 - 2)\big],$$
  et on a $\beta^2 - 2 > 0$ si $0 \leq \alpha < \frac{1}{2x}$.
  Ainsi, si on pose
  $$\varepsilon = \frac{x^2 - 2}{2x}$$
  on a $]x - \varepsilon, x] \cap A = \varnothing$.

- Supposons maintenant que $x^2 < 2$. On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $(x + \varepsilon)^2 < 2$, ou encore, de façon équivalente:
  $$2\varepsilon x + \varepsilon^2 < 2 - x^2.$$
  Posons $\varepsilon = min\Big\{1, \dfrac{2 - x^2}{2(2x + 1)}\Big\}$. Ainsi, on a $2\varepsilon x + \varepsilon^2 \leq 2\varepsilon x + \varepsilon = \varepsilon(2x + 1) \leq \frac{2 - x^2}{2} < 2 - x^2$, car $0 < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow 0 < \varepsilon^2 \leq \varepsilon$. Ainsi $(x + \varepsilon)^2 < 2$ et donc $(x + \varepsilon) \in A$, ce qui contredit 1.) car on n'a pas $(x + \varepsilon) \leq x$.

On conclut finalement que $x^2 = 2$.

2.) Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $n > 0$, il existe un rationnel $x_n \in [\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2}[$. La suite ainsi construite converge trivialement vers $\sqrt{2}$.

Exercice 2.

Soit $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(1) Montrons que $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2n^2}$.

Démonstration : Commençons par montrer l'indication. Pour tout $\delta > 0$ on a

$$(\sqrt{1+\delta})^2 = 1+\delta < 1+\delta+\frac{\delta^2}{4} = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

et donc, en prenant la racine,

$$\sqrt{1+\delta} < 1+\frac{\delta}{2}.$$

On a alors:

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - 1\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - 1\right)$$

et donc en utilisant l'indication:

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} - 1\right) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}-1\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

$\square$

(2) Soit $\varepsilon > 0$ donné. En choisissant $N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ on a par l'étape précédente:

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2N^2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Exercice 3.

Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \cos(n)$ n'existe pas.

Démonstration : Ab absurdo, supposons que $\lim_{n\to\infty} \cos(n) = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Pour $n \geq 0$ on a

$$\underbrace{\cos(n+2)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \ell} = \underbrace{\cos(n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \ell} - 2\sin(1)\sin(n+1)$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n) = 0.$$

b) Pour $n \geq 0$ on a

$$\underbrace{\sin(n+2)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} = \underbrace{\sin(n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + 2\sin(1)\cos(n+1)$$

et on doit donc avoir

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n) = 0.$$

Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sin^2(n) + \cos^2(n) = 1$, en passant à la limite, on a

$$0 = 1.$$

D'où la contradiction.

$\square$

Remarque: On peut montrer que l'ensemble $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.