Algèbre linéaire avancée I — Jeudi 8 decembre 2016
Prof. D. Kressner — EPFL

Série 12 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 12 decembre.
L'exercice 6 ($\star$) peut être rendu le jeudi 15 decembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM
Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit $n \geq 2$ un entier positif. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ est une matrice inversible telle que $A^{-1} = A^*$, alors $\det(A) \in \mathbb{R}$.

  ○ vrai ○ faux
- Soit $n \geq 2$ un entier positif. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible telle que $A^{-1} = A^T$, alors $\det(A) = \pm 1$.

  ○ vrai ○ faux
- Soit $n \geq 2$ un entier positif, K un corps et $A \in M_{n\times n}(K)$ telle que $A^T = -A$. Alors $\det(A) = 0$.

  ○ vrai ○ faux
- Soit $n \geq 2$ un entier positif, R un anneau commutatif avec $1_R \neq 0_R$, et $A \in M_{n\times n}(R)$. Si $\det(A^2) = 0$, alors A n'est pas inversible.

  ○ vrai ○ faux
- Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

  ○ vrai ○ faux
- Deux matrices carrées équivalentes ont le même déterminant.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soit $n \geq 2$ un entier positif. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ est une matrice inversible telle que $A^{-1} = A^*$, alors* $\det(A) \in \mathbb{R}$.

  ○ *vrai* ● *faux*
- *Soit $n \geq 2$ un entier positif. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible telle que $A^{-1} = A^T$, alors* $\det(A) = \pm 1$.

  ● *vrai* ○ *faux*
- *Soit $n \geq 2$ un entier positif, K un corps et $A \in M_{n\times n}(K)$ telle que $A^T = -A$. Alors* $\det(A) = 0$.

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit $n \geq 2$ un entier positif, R un anneau commutatif avec $1_R \neq 0_R$, et $A \in M_{n\times n}(R)$. Si $\det(A^2) = 0$, donc A n'est pas inversible.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Deux matrices carrées équivalentes ont le même déterminant.*

  ○ *vrai* ● *faux*

Exercice 2

Sachant que $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 10$, calculer $\det\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix}$.

Sol.:

En utilisant la multilinéarité du déterminant, on trouve

$$\det\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix}$$

$$= 12\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = -12\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -12\cdot 10 = -120\,.$$

Exercice 3

Calculer le déterminant des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol.: *Rappelons que les opérations élémentaires ont l'effet suivant sur le déterminant.*

Type I : Si on échange deux lignes, le déterminant change de signe.

Type II : Si on multiplie une ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$, le déterminant est multiplié par λ. On peut éviter le type II pour le calcul des déterminants.

Type III : Si on ajoute à une ligne un multiple scalaire d'une autre, le déterminant ne change pas.

Pour la matrice A, on obtient

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 1 & a^2 & c-a \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} && \textit{via} \;\; G_{21}(1),\; G_{31}(-a),\; G_{41}(-1) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & c-a-b-1 \\ 0 & 0 & -2 & -2-b \end{pmatrix} && \textit{via} \;\; G_{32}(-1),\; G_{42}(-1) \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2-b \\ 0 & 0 & a^2-1 & c-a-b-1 \end{pmatrix} && \textit{via} \;\; P_{34} \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b-1-\frac{(2+b)(a^2-1)}{2} \end{pmatrix} && \textit{via} \;\; G_{43}(\tfrac{a^2-1}{2}) \\
&= -1\cdot 1\cdot(-2)\cdot\Big(c-a-b-1-\tfrac{(2+b)(a^2-1)}{2}\Big) \\
&= 2c-2a-2b-2+(2+b)-(2+b)a^2 \;=\; 2c-2a-b-(2+b)a^2
\end{aligned}
$$

Pour la matrice B, on obtient

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} && \textit{via}\ \ G_{21}(-1),\ G_{31}(-1),\ G_{41}(-\lambda) \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} && \textit{via}\ \ P_{23} \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} && \textit{via}\ \ G_{42}(1) \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} && \textit{via}\ \ G_{43}(1) \\
&= (\lambda-1)^3(\lambda+3)
\end{aligned}$$

Pour la matrice C, on utilise la expansion de Laplace et obtient

$$\det(C) = (-1)^{2+2}\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 34.$$

Exercice 4

Calculer le déterminant des matrices suivantes sur les anneaux spécifiés. Déterminer en plus si la matrice est inversible.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 2 & 2t-1 & t^2 \\ 3 & 3t & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}[t])$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 2t & t^2+1 & t \\ 2t^2 & t^3 & t^2+t \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}[t])$.

Sol.:

1. *D'après la règle de Sarrus, le déterminant de A est* $\det(A) = 12+8-12-10 = -2$. *Le déterminant n'est pas inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}$, d'où A n'est pas inversible non plus dans $M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$.*

2. Avec des opérations sur les lignes, ou la règle de Sarrus, on calcule $\det(B) = -1$. *Alors* $\det(B)^{-1} = (-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{R}[t]$ *et donc* B *est inversible dans* $M_{3\times3}(\mathbb{R}[t])$.

3. On calcule avec des opérations sur les lignes

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 2t & t^2+1 & t \\ 2t^2 & t^3 & t^2+t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = 2t$$

Mais vu que $\det(C) = 2t$ *n'est pas inversible dans* $\mathbb{R}[t]$*, la matrice* C *n'est pas inversible dans* $M_{3\times3}(\mathbb{R}[t])$.

Exercice 5

Soit K un corps et A une matrice-blocs donnée par

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \in M_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}(K),$$

où A_{11} est une matrice de taille $n_1 \times n_1$, A_{12} est une matrice de taille $n_1 \times n_2$, et A_{22} est une matrice de taille $n_2 \times n_2$, avec $n_1, n_2 \geq 1$ des entiers positifs.

i) Montrer que si A_{11} ou A_{22} n'est pas inversible, alors

$$\det(A) = 0.$$

ii) Montrer que

$$\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22}).$$

iii) Supposons que les matrices A_{11} et A_{22} sont inversibles. Donner une formule pour :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\right).$$

Sol.:

i) Tout d'abord, nous considérons le cas A_{11} *ou* A_{22} *est pas inversible, i.e.* $\det(A_{11}) = 0$ *ou* $\det(A_{22}) = 0$*, et nous montrons que*

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Soit $C_{11} = B_{11}A_{11}$ *et* $C_{22} = B_{22}A_{22}$ *les formes échelonnées de* A_{11} *et* A_{22}*, et de plus nous définissons*

$$B := \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Comme B_{11} et B_{22} sont inversibles, B est aussi inversible et donc $\det(B) \neq 0$. *Si nous montrons que* $\det(BA) = \det(B)\det(A) = 0$ *est vrai, alors on a* $\det(A) = 0$. *On a que*

$$\det(BA) = \det\left(\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \det\begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & B_{11}A_{12} \\ 0 & B_{22}A_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_{11} & B_{11}A_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, si A_{22} n'est pas inversible, alors C_{22} a une ligne de zéros, et donc $\det(BA) = 0$. *Si A_{22} est inversible, alors nous pouvons annuler $B_{11}A_{12}$ en appliquant des opérations sur les lignes, pour obtenir*

$$\det\begin{pmatrix} C_{11} & B_{11}A_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}.$$

De même, si A_{11} n'est pas inversible, alors C_{11} a une ligne de zéros, et donc $\det(BA) = 0$.

ii) *D'abord on montre que* $\det(A) = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = \det(A_{11})$, *où A_{11} est une matrice de taille n_1, I la matrice identité de taille n_2, et A_{12} une matrice de taille $n_1 \times n_2$. Ceci suit par le développement de A par rapport à les dernières n_2 lignes.*
On note que l'assertion similaire $\det\begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{22})$ *peut être démontrée de manière analogue, pour toute A_{22} de taille $n_2 \times n_2$ et la matrice identité I_{n_1}.*
On continue avec la preuve. Si A_{11} n'est pas inversible, i.e. $\det(A_{11}) = 0$, *donc les colonnes de A_{11} sont linéairement dépendantes. Comme le bloc inférieur gauche est nulle, il suit que les n_1 premières colonnes de A sont linéairement dépendantes $\Rightarrow$* $\det(A) = 0$. *Donc la formule est vraie si A_{11} n'est pas inversible.*
On peut donc supposer que A_{11} est inversible. Dans ce cas, on a

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11})\det(A_{22})$$

iii) *Cela découle directement du Corollaire 6.12 et ii) :*

$$\det\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\right)^{-1} = \det(A_{11})^{-1}\det(A_{22})^{-1}.$$

Exercice 6 ($\star$)
Soit $n \geq 2$ un entier positif, R un anneau commutatif et $A, B \in M_{n\times n}(R)$. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\mathrm{com}(I_n) = I_n$, où I_n est la matrice d'identité.
2. $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B)$, si A, B sont inversibles.

3. $\operatorname{com}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \operatorname{com}(A)$, où $\lambda \in R$.
4. $\operatorname{com}(A^T) = \operatorname{com}(A)^T$.
5. $\det(\operatorname{com}(A)) = (\det(A))^{n-1}$, si A est inversible.
6. $\operatorname{com}(A^{-1}) = \operatorname{com}(A)^{-1}$, si A est inversible.

Sol.:

1. *Comme* $[\operatorname{com}(I_n)]_{ij} = (-1)^{i+j} \det(I_n(i,j))$, *on voit que* $[\operatorname{com}(I_n)]_{ij} = 0$, *si* $i \neq j$, *car* $I_n(i,j)$ *contient une ligne nulle. Si* $i = j$, $I_n(i,j)$ *est la matrice d'identité de taille* $n-1$, *donc* $[\operatorname{com}(I_n)]_{ii} = 1$. *Alors* $\operatorname{com}(I_n) = I_n$.
2. *Si A et B sont inversibles, on utilise que* $\operatorname{com}(A) = \det(A)A^{-T}$ *et* $\operatorname{com}(B) = \det(B)B^{-T}$. *Alors,*
$$\begin{aligned}\operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B) &= \det(A)A^{-T}\det(B)B^{-T} = \det((AB)^T)(B^TA^T)^{-1}\\ &= \det(AB)(AB)^{-T}\\ &= \operatorname{com}(AB).\end{aligned}$$
3. *L'assertion suit de* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. *L'assertion suit de* $\det(A^T) = \det(A)$.
5. *Comme* $\operatorname{com}(A)^T A = \det(A) I_n$, *on a que* $\det(\operatorname{com}(A)^T)\det(A) = \det(A)^n$. *Si A est inversible, on obtient que* $\det(\operatorname{com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.
6. *Supposons A est inversible. Comme* $\operatorname{com}(A) = \det(A)A^{-T}$, *on obtient :* $\operatorname{com}(A^{-1}) = \det(A^{-1})A^T = 1/\det(A)A^T = (\operatorname{com}(A))^{-1}$.

Exercice 7

1. Soit $n \geq 2$ un entier positif et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Démontrer l'identité
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$
Ce déterminant est apellé *déterminant de Vandermonde.*
Indication : utiliser récurrence sur n. Pour cela, des opérations sur les colonne et/ou la formule de développement de Laplace peuvent être utiles.
2. Calculer le déterminant de la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Sol.:

1. *Nous prouvons l'identité par recurrence sur n. Pour $n=2$, on a*
   $\underline{n=2}$:
   $\det\begin{pmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{pmatrix} = x_2 - x_1$, *comme souhaité.*
   $\underline{n-1\to n}$:
   Soustraire ($x_n\cdot$ avant-dernière colonne) de la dernière colonne, et de même soustraire ($x_n\cdot$ l-ème colonne) de la $l+1$-ème colonne pour $l=n-2,\ldots,1$. On en obtient la matrice
$$\begin{pmatrix}1 & x_1-x_n & x_1^2-x_1x_n & \ldots & x_1^{n-2}-x_1^{n-3}x_n & x_1^{n-1}-x_1^{n-2}x_n\\ 1 & x_2-x_n & x_2^2-x_2x_n & \ldots & x_2^{n-2}-x_2^{n-3}x_n & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_n\\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}^2-x_{n-1}x_n & \ldots & x_{n-1}^{n-2}-x_{n-1}^{n-3}x_n & x_{n-1}^{n-1}-x_{n-1}^{n-2}x_n\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}$$
   En définissant $\varepsilon_i := x_i - x_n$,
$$\begin{pmatrix}1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1x_1 & \ldots & \varepsilon_1x_1^{n-3} & \varepsilon_1x_1^{n-2}\\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2x_2 & \ldots & \varepsilon_2x_2^{n-3} & \varepsilon_2x_2^{n-2}\\ \vdots & & & & & \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}x_{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}x_{n-1}^{n-3} & \varepsilon_{n-1}x_{n-1}^{n-2}\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}$$
   Par la formule de développement de Laplace, le déterminant de cette matrice est
$$\begin{aligned}
& (-1)^{n+1}\cdot\det\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_1x_1 & \ldots & \varepsilon_1x_1^{n-3} & \varepsilon_1x_1^{n-2}\\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2x_2 & \ldots & \varepsilon_2x_2^{n-3} & \varepsilon_2x_2^{n-2}\\ \vdots & & & & \\ \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}x_{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}x_{n-1}^{n-3} & \varepsilon_{n-1}x_{n-1}^{n-2}\end{pmatrix}\\
= {} & (-1)^{n+1}\cdot\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-3} & x_1^{n-2}\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2}\end{pmatrix}\\
= {} & (-1)^{n+1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}\cdot\prod_{1\le i<j<n}(x_j-x_i)\\
= {} & (-1)^{n+1}\prod_{1\le i<n}(x_i-x_n)\cdot\prod_{1\le i<j<n}(x_j-x_i)\\
= {} & (-1)^{n+1}\prod_{1\le i<j=n}(x_i-x_j)\cdot\prod_{1\le i<j<n}(x_j-x_i)\\
= {} & (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\prod_{1\le i<j=n}(x_j-x_i)\cdot\prod_{1\le i<j<n}(x_j-x_i)\\
= {} & \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).
\end{aligned}$$
   Où l'on a utilisé l'hypothèse de rérurrence dans la troisième ligne.
2. *B est précisement dans la forme d'un déterminant de Vandermonde, avec $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,-1,2,-2)$. Alors*
$$\begin{aligned}\det B &= ((-1)-1)\cdot(2-1)\cdot((-2)-1)\cdot(2-(-1))\cdot((-2)-(-1))\cdot((-2)-2)\\ &= (-2)\cdot 1\cdot(-3)\cdot 3\cdot(-1)\cdot(-4) = 72.\end{aligned}$$

Exercice 8

[**Formule de Cramer**] Soit $n \geq 2$ un entier positif, K un corps, $A \in M_{n\times n}(K)$ et $b, x \in K^n$. On considère le système linéaire $Ax = b$.

a) Montrer que ce système admet une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

On suppose désormais que $\det(A) \neq 0$, auquel cas le système linéaire s'appelle une système de Cramer. Soit $s \in K^n$ l'unique solution du système et écrivons $s^\top = (s_1\ s_2\ \ldots\ s_n)$.

b) A l'aide de s, exprimer le vecteur-colonne b comme combinaison linéaire des colonnes de A.

c) Pour $1 \leq k \leq n$, désignons par C_k la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la k-ème colonne de A par la colonne b. Montrer la **formule de Cramer**

$$s_k = \frac{\det(C_k)}{\det(A)} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Notons que cette formule est intéressante du point de vue théorique, mais qu'elle est très peu efficace pour les calculs.

Sol.:

a) Soit r le rang de la matrice A. Il y a une solution unique $\Longleftrightarrow$ le nombre d'inconnues libres vaut $0 \Longleftrightarrow n - r = 0 \Longleftrightarrow r = n \Longleftrightarrow$ le rang de A est maximum $\Longleftrightarrow$ A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

(Dans ce cas, en multipliant par A^{-1} l'équation du système, on voit que l'unique solution du système vaut $s = A^{-1}b$.)

b) Comme s est la solution du système, $As = b$, donc $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{in}s_n = b_i$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$ (où les a_{ij} désignent les coefficients de A). En désignant par A^j la j-ème colonne de A, cela donne $A^1 s_1 + \ldots + A^n s_n = b$. Ainsi $b = \sum_{j=1}^n s_j A^j$.

c) Comme A est inversible, on a que $A^{-1} = 1/\det(A)\,\mathrm{com}(A)^T$ et $s = A^{-1}b$ est la solution du systéme $Ax = b$. En regardant les éléments de s, on obtient

$$\begin{aligned} s_k = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{com}(A)^T b)_k &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} \det(A(k,j)) b_j \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det\left(\underbrace{\begin{pmatrix} A^1 & \ldots & A^{k-1} & b & A^k & \ldots & A^n \end{pmatrix}}_{C_k} \right) \\ &= \frac{\det(C_k)}{\det(A)} \end{aligned}$$