EPFL Automne 2017
Geometrie, MATH-120

Série 12

Exercice 1. 1. Calculer les parametres complexes des symetries axiales, s_1 et s_2 par rapport aux droites d'equation

$$3x + 4y = 2,\ -2x + 5y = 3.$$

2. A quoi est egale la composee

$$s_1 \circ s_2?$$

quels sont ses parametres complexes ?

3. Meme question pour les droites

$$3x + 4y = 2,\ 6x + 8y = 6.$$

Exercice 2. Soit $r_{\alpha,\mu}$ et $s_{\beta,\nu}$ des isometries affines (rotation et symetrie) associees aux parametres complexes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^1, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

1. Calculer les parametres de l'isometrie conjuguee

$$r_{\alpha,\mu} \circ s_{\beta,\nu} \circ r^{-1}_{\alpha,\mu};$$

interpreter geometriquement le resultat.

2. Que dire si $s_{\beta,\nu}$ est une symetrie axiale ? Si $s_{\beta,\nu}$ est une symetrie glissee ?

Exercice 3. Soit r_ρ la rotation lineaire de parametre complexe $\rho \in \mathbb{C}^1$ et s_1 la symetrie lineaire de parametre complexe 1 (la symetrie par rapport a l'axe reel).

1. Trouver les parametre complexe ρ' tel que

$$r_\rho = s_{\rho'} \circ s_1.$$

2. Que vaut $r^2_{\rho'}$? Comment interpretez vous geometriquement ce resultat (c'est bien connu.)

Exercice 4. Soit φ une isometrie et

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(P) = P\}$$

l'ensemble des points fixes de φ. Plus generalement pour $\Phi \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ un ensemble quelconque d'isometries, soit

$$\mathrm{Fix}(\Phi) = \{P \in \mathbb{R}^2,\ \forall\varphi \in \Phi,\ \varphi(P) = P\}$$

l'ensemble des points qui sont fixes par tous les element de Φ (l'intersection des $\mathrm{Fix}(\varphi)$ pour $\varphi \in \Phi$.)

1. Soit ψ une autre isometrie, et $\varphi' = \mathrm{Ad}(\psi)(\varphi) = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ l'isometrie conjuguee ; que vaut $\mathrm{Fix}(\varphi')$ en fonction de $\mathrm{Fix}(\varphi)$. Meme question pour $\mathrm{Ad}(\psi)(\Phi)$.
2. Montrer (sans calcul) que le conjugue d'une symetrie axiale par une isometrie est une symetrie axiale ; meme question pour une symetrie glisssseeeee.
3. Montrer que toute droite (affine) peut etre envoyee sur toute autre droite par une rotation (affine). En deduire que toute symetrie axiale est conjuguee a la symetrie lineaire $s_1 = s_{1,0}$.
4. Etant donne $s_{\beta,\nu}$ une symetrie axiale ou glissee donner une condition necessaire et suffisante sur (β, ν) pour que $s_{\beta,\nu}$ soit conjuguee a $s_{1,0}$ par une rotation ; quand c'est le cas quels sont les parametres de cette rotation et retrouver ainsi les formules qui donnent l'axe d'une symetrie axiale en fonction de (β, ν).