Analyse avancée I — Semaine du 3 au 7 octobre 2016

Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année

Prof. Cl. Hongler

Série 3 du jeudi 6 octobre 2016

Exercice 1.

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$ on a la formule (**binôme de Newton**):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \qquad (\text{ convention } 0! = 1)$$

Indications:

1^o) Montrer que la formule est vraie pour $n = 1$.

2^o) Supposer que la formule est vraie pour $n = 1, 2, \ldots, N$ et montrer qu'elle reste encore vraie pour $n = N + 1$, où $N \geq 1$ (**raisonnement par induction ou par récurrence**).

Exercice 2.

On définit $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est convergente et que $\lim_{n\to\infty} x_n > 2$.

(Le nombre $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est important en analyse; c'est le nombre e).

Indications:

1^o) En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}. \qquad (\text{rappel: } 0! = 1 \text{ par convention})$$

2^o) Sachant que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2$, en déduire que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

3^o) En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et conclure ensuite.

Exercice 3.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{5^n}$.

Indication: Utiliser la relation $\ln k \leq k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 (* A rendre) .

Montrer que si les deux sous-suites $(x_{2n})_{n=0}^{\infty}$ et $(x_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ convergent vers la même limite ℓ, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers ℓ.