Série 5

L'exercice 1 sera discuté pendant le cours du lundi 24 octobre.
L'exercice 4 ($\star$) peut être rendu le jeudi 27 octobre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}[t])$. S'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}[t])$ telle que $AB = I_n$, alors il existe $\tilde{B} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}[t])$ telle que $\tilde{B}A = I_n$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$. S'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$ telle que $AB = I_n$, alors il existe $\tilde{B} \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$ telle que $\tilde{B}A = I_n$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $f \in \mathbb{C}[t]$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Alors $t - a$ divise $f(t) - f(a)$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Le polynôme $t^4 + 4 \in \mathbb{F}_5[t]$ est scindé dans $\mathbb{F}_5[t]$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Deux polynômes $f, g \in \mathbb{C}[t]$ à coefficients complexes sont premiers entre eux s'ils n'ont aucune racine commune.

  ◯ vrai ◯ faux

(b) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Lesquelles des assertions suivantes sont correctes ?

◯ Supposons que $Ax = b$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^n$ pour un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$. Alors il n'existe pas de $x \in \mathbb{C}^n \backslash \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$.

◯ Supposons que $Ax = b$ a une seule solution dans $\mathbb{R}^n$ pour chaque vecteur $b \in \mathbb{R}^n$. Alors il n'existe pas de $x \in \mathbb{C}^n \backslash \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$.

◯ Supposons que $Ax = b$ a plusieurs solutions dans $\mathbb{R}^n$ pour un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$. Alors il n'existe pas de $x \in \mathbb{C}^n \backslash \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$.

Indice : Considérer les parties réelles et imaginaires de l'expression $A(\mathrm{Re}(x)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(x))$.

Exercice 2

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$. Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.

Exercice 3

i) Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle hermitienne ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+\alpha i & 4-\beta i \\ 1+\alpha i & 0 & \gamma - 3i \\ 4+2i & \beta + 3i & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitiene et $v \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Montrer que v^*Av est réel.

Exercice 4 ($\star$)
Montrer les parties *ii)* et *iv)* du Théorème 2.36 du cours (voir la version du Chapitre 2 actualisée 20.10.2016.).

Exercice 5
Soient $p \in K[t]$ et $c \in K$. Montrer que p s'écrit sous la forme $p(t) = g(t)(t-c) + p(c)$, où $g \in K[t]$. En particulier, déduire que c est une racine de p si et seulement si $p(c) = 0$.

Exercice 6
Décomposer les polynômes ci-dessous en produit de facteurs irréductibles dans chacun des cas suivants : $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{F}_3[t]$ et $\mathbb{F}_7[t]$

$$t^3 + 2t \quad \text{et} \quad t^2 + t + 1.$$

Exercice 7

- Soient $p(t) = 3t^4 - 5t^3 + 2t + 1$ et $q(t) = t - 1$. Effectuer la division euclidienne du polynôme p par q dans $\mathbb{R}[t]$.
- Soient $p(t) = t^4 + t^3 + t + 1$ et $q(t) = t + 1$. Effectuer la division euclidienne du polynôme p par q dans $\mathbb{F}_2[t]$.

Exercice 8

i) Soit $a \in \mathbb{C}$. Définissons $f(t) = (t-a)(t-\bar{a}) \in \mathbb{C}[t]$. Montrer que $f \in \mathbb{R}[t]$.

ii) Soit $g \in \mathbb{R}[t]$. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de g, alors il en est de même pour son conjugé $\bar{z}$.

iii) Déterminer tous les polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[t]$.