Série 8

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 14 novembre.
L'exercice 2 ($\star$) peut être rendu le jeudi 17 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors $U_1 \backslash U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors $U_1 \cup U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Si les familles (v_1, v_2), (v_1, v_3) et (v_2, v_3) sont linéairement indépendantes, alors la famille (v_1, v_2, v_3) est aussi linéairement indépendante.

  ◯ vrai ◯ faux

- Si $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est une base d'un K-espace vectoriel V, alors la famille (v_1, v_2, v_5) est linéairement indépendante.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soient $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base d'un K-espace vectoriel V et $(w_1, \ldots, w_m) \in V$ une famille telle que $\text{span}(w_1, w_2, \ldots, w_m) = V$. Alors $n \leq m$.

  ◯ vrai ◯ faux

(b) Soit V un K-espace vectoriel de dimension 5. Soient U, W deux sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim(U) = 3$ et $\dim(W) = 4$. Combien vaut $\dim(U \cap W)$?

◯ Cette dimension vaut nécessairement 2.

◯ Cette dimension vaut 2 ou 3.

◯ Cette dimension peut valoir n'importe quel entier entre 0 et 4.

Exercice 2 ($\star$)

Soit V un K-espace vectoriel et U, W deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer que $U \cap W$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 3
Soit $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ une famille dans $\mathbb{R}^n$, où $m \leq n$. Soit $A = (v_1|v_2|\dots|v_m) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rang}(A) = \dim(\text{span}(v_1, \dots, v_m))$.
Indication : Voir l'Exemple 4.11 dans le polycopié.

Exercice 4
Vérifier si chacun des ensembles suivant est linéairement indépendant. Vérifier également s'ils engendrent l'espace vectoriel correspondant ou s'ils en sont une base.

1. L'ensemble $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$ dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{F}_2^3$.
2. L'ensemble $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ dans l'espace vectoriel $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\{(x-i)(x+i), x(x^2+1), 1\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_3[x]$.
4. L'ensemble $\{x+1, x^2+x+1, x^3+x, x^3+x^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 5
Considérer ces cinq vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^5$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

a) Trouver la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
b) Est-ce que la réponse change si on considère v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 comme des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{F}_2^5$ et $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ comme un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel ?

Exercice 6
Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. Les solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système suivant
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}.$$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
4. L'espace des polynômes harmoniques homogènes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Indication : un polynôme homogène de degré inférieur ou égal à 2 dans $\mathbb{R}^3$ est une fonction de la forme
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz, \text{ pour certains } a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Une fonction u est appelé harmonique si

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0\,,$$

où u_{xx} est la dérivée seconde de u par rapport à la première variable, u_{yy} est la dérivée seconde de u par rapport à la deuxième variable, et u_{zz} est la dérivée seconde de u par rapport à la troisième variable.

Exercice 7
Considérer les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z + t = 0 \text{ et } z + 3t = 0\}\,,$$
$$W = \operatorname{span}((1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))\,.$$

1. Calculer la dimension de U et W.
2. Montrer que $U + W = \mathbb{R}^4$.

Exercice 8
Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit U un sous-espace vectoriel de V. Montrer qu'il existe une base de V qui contient une base de U.