EPFL Automne 2016
Geometrie, MATH-120

Série 1

Dans cette premiere series on explore la notion de cardinal d'un ensemble. Si l'ensemble est fini c'est bien sur le nombre d'elements de l'ensemble. On va voir comment on definit le cardinal d'un ensemble infini : la methode est intuitive : on compte le nombre d'element d'un ensemble en faisant correspondre ses elements avec les elements d'un autre ensemble ; par exemple les doigts des deux mains...

Définition 1. *Soient E et F deux ensembles.*

— *Si il existe une bijection $\phi : E \simeq F$ entre E et F on dit qu'ils ont le meme cardinal ou sont equipollents et on note cette relation $|E| = |F|$.*
— *Si il existe une application injective entre E et F, $\phi : E \hookrightarrow F$, on dit que le cardinal de E est plus petit que celui de F et on note cette relation $|E| \leqslant |F|$.*

Exercice 1 (Corr)**.** Montrer que la relation "avoir le meme cardinal" est une relation

1. symmetrique :
$$|E| = |F| \Longrightarrow |F| = |E|.$$
2. Transitive : $|E| = |F|$ et $|F| = |G| \implies |E| = |G|$

Exercice 2 ($\star\star\star$ Le Theoreme de Cantor-Bernstein-Schroeder)**.** En pensant au cas des ensembles finis (ci-dessous) il est tres tentant de penser que

$$|E| \leqslant |F| \text{ et } |F| \leqslant |E| \text{ equivaut a } |E| = |F|.$$

Eh bien c'est vrai ! Si il existe une injection $\phi : E \hookrightarrow F$ et une injection $\psi : F \hookrightarrow E$ alors il existe une bijection $\varphi : E \simeq F$.

Ce n'est pas du tout evident et meme plutot astucieux.

Pour cela on associe a chaque element de E (resp. de F) une suite (finie ou infinie) $(a_k)_{k\geqslant 0}$ (resp $(b_k)_{k\geqslant 0}$) d'elements appartenant alternativement a E et F :

— Pour $e \in E$ on pose $a_0 = e$, et on pose $a_1 \in F$ l'unique antecedent de e par ψ si cet antecedent existe ; si cet antecedent n'existe pas on interrompt la suite. Si a_1 existe, on pose $a_2 \in E$ l'unique antecedent de a_1 par ϕ si il existe ; si il n'existe pas on interrompt la suite. Si a_2 existe, on pose $a_3 \in F$ l'unique antecedent de a_2 par ψ si il existe ; si il n'existe pas on interrompt la suite...et on continue ainsi a l'infini ou jusqu'a ce qu'on s'arrete.

— Pour $f \in F$ on pose $b_0 = f$, et on pose $b_1 \in E$ l'unique antecedent de f par ϕ si cet antecedent existe ; si cet antecedent n'existe pas on interrompt la suite. Si b_1 existe, on pose $b_2 \in F$ l'unique antecedent de b_1 par ψ si il existe ; si il n'existe pas on interompt la suite. Si b_2 existe, on pose $b_3 \in E$ l'unique antecedent de b_2 par ϕ si il existe ; si il n'existe pas on interrompt la suite...et on continue ainsi a l'infini ou jusqu'a ce qu'on s'arrete.

On note $E_p, E_i, E_\infty \subset E$ les sous-ensembles formes des elements de E dont la suite associe est soit

— finie et se termine sur un indice n pair (par exemple une suite a un element (e_0) ou e_0 n'a pas d'antecedent par ψ dans F)),

— finie et se termine sur un indice n impair (par exemple une suite a deux elements (e_0, f_1) ou f_1 n'a pas d'antecedent par ϕ dans E),

— infinie.

On note de meme $F_p, F_i, F_\infty \subset F$ les sous-ensembles formes des elements de F dont la suite associe est soit

— finie et se termine sur un indice n pair,

— finie et se termine sur un indice n impair ,

— infinie.

1. Pourquoi les elements a_1, $a_2, a_3, \cdots$, quand ils existent sont ils uniques ?
2. Montrer que E_p et F_i sont en bijection ; que F_p et E_i sont en bijection et que E_∞ et F_∞ egalement (on regardera ce qui ce passe pour les sous-ensemble $E_0, E_2 \subset E_p$, $E_1, E_3 \subset E_i$ et $F_0, F_2 \subset F_p$, $F_1, F_3 \subset F_i$ les elements dont les suites associes se termine a l'indice $0, 2, 1, 3$).
3. Conclure.

Définition 2 (Ensembles finis)**.** *Soit $n \geqslant 1$ un entier non-nul. Si un ensemble E a meme cardinal que l'ensemble*

$$\{1, \cdots, n\}$$

on dit que E est fini de cardinal n. On dit que l'ensemble vide $\emptyset$ est de cardinal 0. Un ensemble E est fini si il est de cardinal n pour $n \geqslant 0$. On note alors ce cardinal $|E|$.

Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Définition 3 (Ensembles denombrables, Corr)**.** *Un ensemble infini qui a meme cardinal que $\mathbb{N}$ est dit denombrable.*

Exercice 3. Quelques ensembles denombrables.

1. Montrer que pour qu'un ensemble infini E soit denombrable il suffit d'exiber une injection $E \hookrightarrow \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est denombrable.
3. Montrer directement que $\mathbb{N}^2$ est denombrable (on pourra faire un dessin).
4. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est denombrable (deuxieme methode) ; soit $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \cdots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que

$$\mathcal{P}^2 \text{ denombrable } \Longrightarrow \mathbb{N}^2 \text{ denombrable .}$$

   Etablir ce dernier fait en considerant l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^2 & \mapsto & \mathbb{N} \\ (p, q) & \mapsto & p^2 q \end{array}$$

5. En deduire que $\mathbb{Q}$ est denombrable.
6. On appliquera un raisonnement par induction pour montrer que pour tout $k \geqslant 3$, $\mathbb{N}^k$ est denombrable.

Exercice 4 (Cantor)**.** L'intervalle $[0, 1[$ n'est pas denombrable. On donne ici le celebre argument diagonal.

On suppose qu'il existe une bijection qu'on note $\phi : \mathbb{N} \simeq [0, 1[$. Ainsi pour tout $n \geqslant 1$, on dispose d'un nombre reel $\phi(n) \in [0, 1[$ dont on note l'ecriture decimale

$$\phi(n) = 0, a_{n,1} a_{n,2} \cdots a_{n,k} \cdots , \ a_{n,k} \in \{0, \cdots, 9\}.$$

On (Cantor) considere le reel

$$C = 0, a_1 a_2 \cdots a_k \cdots \in [0, 1[$$

dont l'ecriture decimale est donnee pour $k \geqslant 1$ par

$$a_k = \begin{cases} a_{k,k} + 1 & \text{si } a_{k,k} < 9 \\ 0 & \text{si } a_{k.k} = 9 \end{cases} .$$

Obtenir une contradiction en etudiant l'entier n correspondant a C via la bijection ϕ et ses liens avec l'ecriture decimale de C.

Exercice 5 (Corr)**.** Soient E et F des ensembles finis et

$$F^E := \{\phi : E \to F\}$$

l'ensemble des applications de E vers F.

1. Montrer que F^E est fini et que son cardinal vaut
$$|F^E| = |F|^{|E|}.$$
2. Montrer que $|\mathcal{P}(E)|$ le nombre de sous-ensembles de E est equal a $2^{|E|}$ (on etablira une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble $\{0,1\}^E$).

Exercice 6 (Corr)**.** On suppose que $|E| = n$; montrer que le cardinal de l'ensemble des bijections $\mathrm{Bij}(E,F)$ vaut soit 0 soit $n! = 1 \cdot .2 \cdot ... \cdot .n$.

Exercice 7 (Corr)**.** Soit $\phi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ des applications entre des ensembles finis E et F.

1. Montrer que si ϕ est injective et $|E| \geqslant |F|$ alors ϕ est bijective.
2. Montrer que si ϕ est surjective et $|E| \leqslant |F|$ alors ϕ est bijective.
3. Montrer que si ϕ et ψ sont toutes les deux injectives alors elles sont bijectives.
4. Montrer que si ϕ et ψ sont toutes les deux surjectives alors elles sont bijectives.

Exercice 8 (Corr)**.** Soient E, F, G des ensembles (pas forcement finis) et $\phi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications entre les ensembles E et F et les ensembles F et G et $\varphi = \psi \circ \phi : E \to G$ l'application composee.

1. Montrer que si ϕ et ψ sont surjectives alors φ l'est.
2. Montrer que si ϕ et ψ sont injectives alors φ l'est.
3. Montrer que si ϕ et ψ sont bijectives alors φ l'est et calculer l'application reciproque φ^{-1} en fonction de celle de ϕ et de celle de ψ.
4. Montrer que si φ est surjective alors ψ est surjective. Donner un exemple montrant que ϕ ne l'est pas forcement.
5. Montrer que si φ est injective alors ϕ est injective. Donner un exemple montrant que ψ ne l'est pas forcement.