Série 3

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 10 octobre.
L'exercice 4 ($\star$) peut être rendu le jeudi 13 octobre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Determiner si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Étant donné un entier n, on définit

$$K_n[t] := \{p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n \mid \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K\},$$

  l'ensemble des pôlynomes de degré inférieur ou égal à n. Alors $(K_n[t], \cdot)$, où $(p \cdot q)(t) := p(t)q(t)$, est un monoïde.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $G_{n\times n}(K)$ l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$. Alors $(G_{n\times n}(K), +)$ est un groupe.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $C_{n\times n}$ l'ensemble des matrices réelles $n \times n$ qui commutent avec toutes les matrices dans $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Donc $(C^*_{n\times n}, \cdot)$ est un groupe abélien.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et soit $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A. Donc $(C(A)^*, \cdot)$ est un groupe abélien.

  ◯ vrai ◯ faux

(b) Determiner les énoncés corrects.

1. Soit $\mathrm{triu}_0(n)$ l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures strictes $n \times n$, c-á-d l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Lequelles des assertions suivantes sont correctes ?
   - ◯ $(\mathrm{triu}_0(n), +)$ est un monoïde.
   - ◯ $(\mathrm{triu}_0(n), +)$ est un groupe.
   - ◯ $(\mathrm{triu}_0(n), \cdot)$ est un monoïde.
   - ◯ $(\mathrm{triu}_0(n), \cdot)$ est un groupe.
2. Soit $\mathrm{Sym}_{n\times n}(K)$ l'ensemble des matrices symétriques $n\times n$ et soit $f(A) = A+A^T$. Lequelles des assertions suivantes sont correctes ?
   - ◯ f est un morphisme de $(M_{n\times n}(K), \cdot)$ dans $(\mathrm{Sym}_{n\times n}(K), \cdot)$.
   - ◯ f est un isomorphisme entre $(M_{n\times n}(K), \cdot)$ et $(\mathrm{Sym}_{n\times n}(K), \cdot)$.

- ◯ f est un morphisme de $(M_{n\times n}(K),+)$ dans $(\mathrm{Sym}_{n\times n}(K),+)$.
- ◯ f est un isomorphisme entre $(M_{n\times n}(K),+)$ et $(\mathrm{Sym}_{n\times n}(K),+)$.

Exercice 2
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse de A (s'il existe).
Indice : résoudre le problème pour $n = 2$ et $n = 3$ pour obtenir une idée de la formule générale.

Exercice 3
Pour quel ensemble G muni de la lois de composition $\circ$, le couple $(G\,,\circ)$ est un groupe ?

a) $G = \mathbb{R}$ et $x \circ y := x + y - xy$.

b) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \;:\; a \in \mathbb{R}\,, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$ et $\circ$ est la multiplication matricelle ordinaire.

c) $G = \mathbb{R}$ et $x \circ y := (x^n + y^n)^{1/n}$ pour un nombre impair naturel n.

d) $G = \mathbb{Z}$ et $x \circ y := (x + y)^2$.

e) $G = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\,;$ où A est une matrice diagonale avec des éléments non nuls sur la diagonale$\}$ et $\circ$ est la multiplication matricelle ordinaire.

Exercice 4 ($\star$)
Soit $SO(2)$ l'ensemble composé des matrices de rotations

$$SO(2) = \left\{ G(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \;;\, \vartheta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que $(SO(2),\circ)$ est un sous-groupe de $(GL(2),\circ)$, ou $\circ$ est la multiplication matricelle ordinaire.

Exercice 5
Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Soit $f : G \to G$ l'application définie par $f(x) = x^{-1}$ (l'inverse de $x \in G$) et soit $h : G \to G$ l'application définie par $h(x) = x^2$.

a) Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

b) Montrer que h est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

c) En déduire que si dans un groupe tout élément est son propre inverse, alors ce groupe est abélien.

Exercice 6
Soit $G = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ muni de la loi de composition $\star$ donnée par

$$x \star y := \begin{cases} x+y & \text{si } x+y < 1 \\ x+y-1 & \text{si } x+y \geq 1 \end{cases}$$

a) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

b) Soit $SO(2)$ le groupe des matrices de rotations. Montrer que l'application $f : G \to SO(2)$ définie par

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) & \sin(2\pi x) \\ -\sin(2\pi x) & \cos(2\pi x) \end{pmatrix}$$

est un morphisme de groupes entre $(G\,,\star)$ et $(SO(2)\,,\circ)$, ou $\circ$ est la multiplication matricelle ordinaire.

Exercice 7
Montrer que l'ensemble des matrices réelles definies par blocs

$$A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

muni de la multiplication matricielle ordinaire, est un groupe. On suppose que A_{11} est une matrice inversible $n_1 \times n_1$, A_{12} une matrice $n_1 \times n_2$ et A_{22} est une matrice inversible $n_2 \times n_2$, avec $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Calculer l'inverse de A.
Remarque : vous pouvez utiliser la règle pour la multiplication de matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} \\ X_{21}Y_{11} + X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12} + X_{22}Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8
Soient $\pi, \sigma \in S_5$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer la composition $\pi \circ \sigma$.

b) Trouver les inverses de π et $\pi \circ \sigma$.

c) Montrer que $\mathrm{Card}(S_n) = n!$, $n \in \mathbb{N}$, où $\mathrm{Card}(\mathrm{S_n})$ est le nombre d'éléments de S_n.