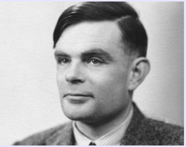
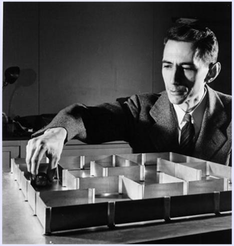
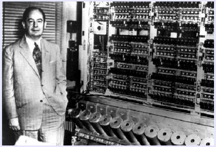






Information, Calcul et Communication

Module 2 : Information et Communication

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Information, Calcul et Communication

Leçon 2.2 : Echantillonnage de signaux (2ème partie)

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Echantillonnage de signaux : rappel

La semaine dernière :

- signaux, fréquences
- filtrage
- échantillonnage

Aujourd'hui :

- reconstruction
- théorème d'échantillonnage
- sous-échantillonnage

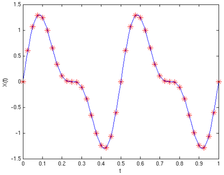
Echantillonnage de signaux : rappel

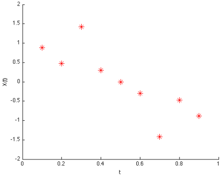
- signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$; p. ex. : sinusoïde
- « tout signal est une somme de sinusoïdes »
- fréquence(s) présente(s) dans un signal (« spectre »), bande passante f_{max}
- filtre passe-bas idéal et filtre à moyenne mobile
- signal échantillonné $\left(X(nT_e), n \in \mathbb{Z}\right)$
  (T_e : période d'échantillonnage; $f_e = 1/T_e$: fréquence d'échantillonnage)
- condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal : $f_e > 2f_{max}$
- sinon ($f_e \leq 2f_{max}$) : effet stroboscopique

Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$
à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$?

- Dans certains cas, c'est assez clair...
- Dans d'autres, ça l'est un peu moins!



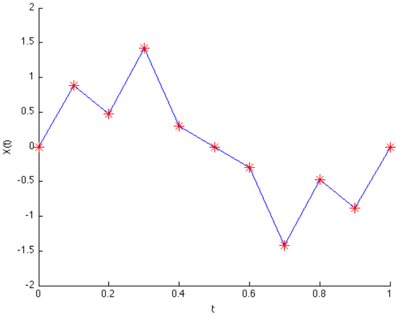


???

Reconstruction d'un signal

On dispose de plusieurs techniques pour interpoler un signal :

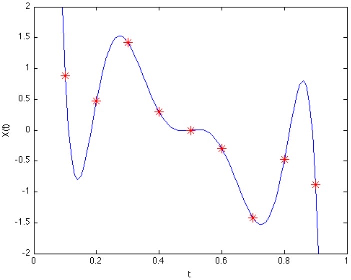
1. « Relier les points » : dans l'exemple précédent, ça donne ceci :

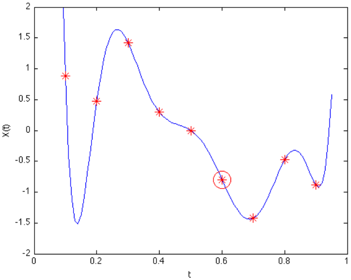


Un défaut principal : la « courbe » obtenue n'est **pas régulière**.

Reconstruction d’un signal

2. Trouver un polynôme qui passe par tous les points.





Deux défauts principaux :

- Avec N points, il faut trouver un polynôme de degré $N-1$: la procédure est **complexe** !
- Elle est également **instable** : si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.

Reconstruction d'un signal

3. *De manière générale*, une formule d'interpolation pour $X(t)$ s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e)\, F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(k) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}^*$$

Cette condition implique en particulier que

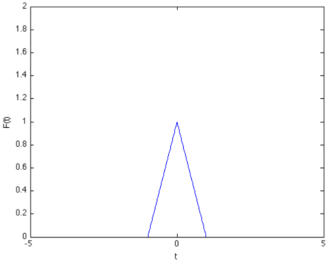
$$X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

Quelle fonction F choisir ?

Reconstruction d'un signal

La fonction F qui permet de « relier les points » est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$



On peut faire mieux en choisissant

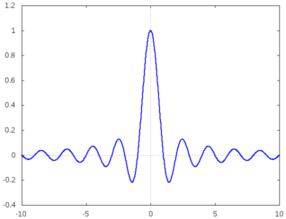
$$F(t) = (1-t)\,(1+t)\,(1-\tfrac{t}{2})\,(1+\tfrac{t}{2})\,(1-\tfrac{t}{3})\,(1+\tfrac{t}{3})\,\ldots$$

Cette fonction est régulière, et on vérifie que $F(0) = 1$ et $F(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.

Reconstruction d’un signal : interpolation

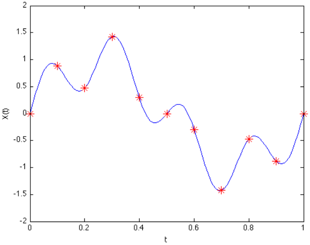
Il se trouve que la fonction F du bas de la page précédente est égale à

$$F(t) = \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Ce qui donne dans notre exemple :

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



Reconstruction d'un signal : interpolation

Pour retrouver un signal à partir de sa version échantillonnée, on a donc maintenant une formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT_e}{T_e}\right)$$

Il nous reste une question cruciale à résoudre : quand est-ce que $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

1. Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), mathématicien anglais, qui publie en 1915 la formule d'interpolation qu'on vient de voir.

Le théorème d’échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l’ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

2. Harry Nyquist (1889-1979), ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1928 un article sur « la théorie de la transmission par le télégraphe ».

Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

3. Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov (1908-2005), pionnier de la radio-astronomie, qui découvre ce résultat indépendamment en 1933 en Union Soviétique.

Le théorème d'échantillonnage

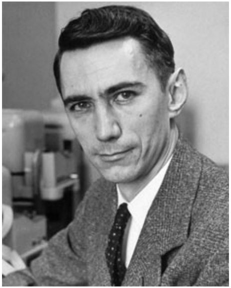
La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

4. Herbert Raabe (1909-2004), qui publie sa thèse sur le sujet en 1939 en Allemagne...

Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

5. Claude Edwood Shannon (1916-2001), également ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1949 un article sur la « communication en présence de bruit », et que nous allons revoir la semaine prochaine...



Le théorème d'échantillonnage

Soient :

- $X(t)$ un signal de bande passante $f_{\max}$;
- $X(nT_e)$, $(n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonage f_e ;
- $X_I(t)$ donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Alors :

$$\text{Si} \quad f_e > 2\, f_{\max} \quad \text{alors} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et

$$\text{Si} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2\, f_{\max}$$

Le théorème d'échantillonnage : illustration

Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f\, t)$$

La version échantillonnée de ce signal est : $X(nT_e) = \sin(2\pi f\, nT_e)$ et la formule d'interpolation devient :

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sin(2\pi f\, mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

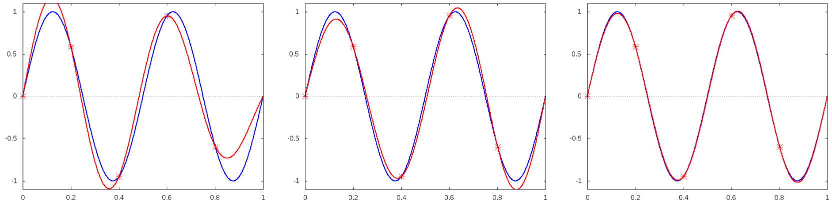
De manière pratique, on se limite à quelques termes de la somme :

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi f\, mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi f\, mT_e)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec) :

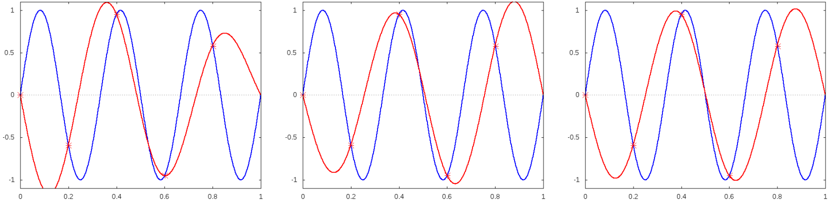


avec $N = 5,\ 10,\ 50$. Si $f_e > 2f$, la reconstruction est bonne.

Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi f\, mT_e)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 3$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec) :

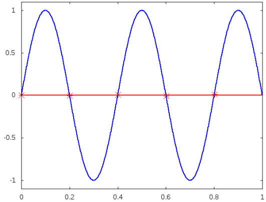


avec $N = 5,\ 10,\ 50$. Ici, par contre, $f_e < 2f$: on a un problème...
Et si $f_e = 2f$?

Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^{N} \sin(2\pi f\, mT_e)\, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2.5$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec) :

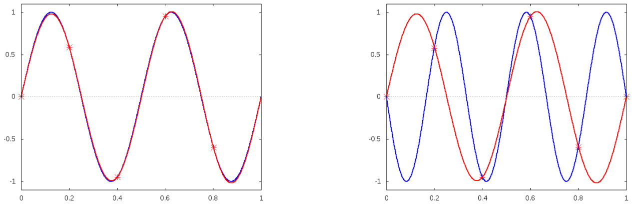


fonction nulle, pour toute valeur de N ! Ici aussi, on a un problème....

Essayons de mieux comprendre cet exemple

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.
- Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.



- Retournons le graphe de droite, juste pour voir...
- Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !
- La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite ! (mais pas le signal d'origine)

Exemple : conclusion

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- A partir des seules valeurs échantillonées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de $f = 2$ Hz ou de $f = 3$ Hz (déphasée).
- Dans une telle situation, notre formule d'interpolation « choisit » la fréquence la plus basse, i.e. $f = 2$ Hz.
- Donc, si on sait dès le départ que la fréquence f de la sinusoïde d'origine est plus petite que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- Si par contre la fréquence f est plus grande que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors la formule d'interpolation « choisit » la mauvaise fréquence : $\widetilde{f} = f_e - f$, c'est l'effet stroboscopique qu'on a vu la semaine dernière.

Le théorème d'échantillonnage

Soient :

- $X(t)$ un signal de bande passante $f_{\max}$;
- $X(nT_e)$, $(n \in \mathbb{Z})$ le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonage f_e ;
- $X_I(t)$ donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Alors :

$$\text{Si} \quad f_e > 2\,f_{\max} \quad \text{alors} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et

$$\text{Si} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2\,f_{\max}$$

Avant les maths: pourquoi la condition $f_e > 2f_{\max}$?

- Dans tous les exemples vus précédemment, on avait à faire à un signal $X(t)$ avec une seule fréquence f.
- On a vu dans ce cas que $f_e > 2f$ est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.

- Et si maintenant le signal $X(t)$ contient deux fréquences f_1 et f_2?
- Dans ce cas, il suffira que $f_e > 2f_1$ *et* $f_e > 2f_2$ pour que le signal soit bien reconstruit, i.e. que $f_e > 2\max\{f_1, f_2\}$.

- En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc intuitivement à la condition $f_e > 2f_{\max}$.

Idée de la démonstration : première partie

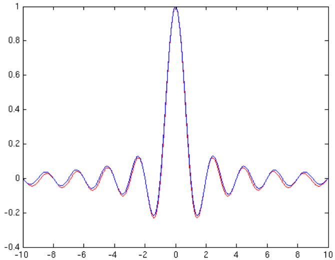
Dans ce qui suit, nous justifions de manière informelle l'affirmation :

$$\text{Si } f_e > 2\, f_{\max}, \quad \text{alors} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

La fonction sinc est le résultat du mélange de plusieurs sinusoïdes :

$$\mathrm{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(2\pi f_j\, t + \pi/2) \quad \text{avec } N \text{ grand et } f_j = \frac{j}{2N}$$

On voit ci-contre (en rouge) ce que vaut cette approximation pour $N = 50$.



Idée de la démonstration : première partie (suite)

Notez que les fréquences $f_j = j/(2N)$ couvrent l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

Donc toutes les fréquences comprises dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ sont présentes dans la fonction $\text{sinc}(t)$.

En conséquence, la fonction $\text{sinc}(t/T_e) = \text{sinc}(f_e\, t)$ contient toutes les fréquences comprises dans l'intervalle $[0, \frac{f_e}{2}]$.

La bande passante du signal $\text{sinc}(f_e\, t)$ est donc $B = \frac{f_e}{2}$.

Or c'est justement la fonction $\text{sinc}(f_e\, t)$ qu'on utilise pour reconstruire le signal :

La bande passante du signal interpolé $X_I(t)$
est donc plus petite ou égale à $\frac{f_e}{2}$.

Idée de la démonstration : première partie (suite)

Etant donné l'hypothèse effectuée ($2\,f_{\max} < f_e$), la bande passante du signal d'origine $X(t)$ est aussi plus petite ou égale à $\frac{f_e}{2}$.

Nous avons vu de plus que $X_I(t)$ et $X(t)$ prennent les mêmes valeurs aux points d'interpolation nT_e, $n \in \mathbb{Z}$.

On peut montrer le résultat suivant :

Deux signaux dont la bande passante est plus petite ou égale à $B = \frac{f_e}{2}$ et qui coïncident aux points nT_e, $n \in \mathbb{Z}$, coïncident en fait partout !

En conclusion :

Sous l'hypothèse que $f_e > 2f_{\max}$, on a bien $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Idée de la démonstration : seconde partie

Vérifions maintenant l'affirmation *réciproque* :

$$\text{Si} \quad X_I(t) = X(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad f_e \geq 2\, f_{\max}.$$

- Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors...
- ...ils ont même bande passante.
  (forcément : ce sont les mêmes signaux).
- Or on a vu que la bande passante de $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $f_e/2$.
- Donc $f_{\max}$ (de X) est inférieure ou égale à $f_e/2$.
  QED.

Sous-échantillonnage d'un signal

Lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence $f_e < 2\,f_{\text{max}}$ apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé la semaine dernière.

En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique !

Une solution simple, mais coûteuse : augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à satisfaire la condition $f_e > 2\,f_{\text{max}}$.

Effet stroboscopique : une autre solution

Cependant, nous avons vu que certains signaux contiennent un nombre infini de fréquences (comme la fonction sinc).

De même, certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique, des fréquences très élevées).

Pour ces signaux, $f_{\max} = +\infty$: des tels signaux sont donc *toujours* sous-échantillonnés, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage f_e.

Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas ?

Effet stroboscopique : une autre solution

Une solution qui minimise les dégâts consiste à :

filtrer le signal *avant* de l'échantillonner !

- on filtre le signal avec un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure f_c est juste un peu plus petite que $\frac{f_e}{2}$.
- puis on échantillonne le signal à la fréquence f_e ;
- et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation.

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite ; on n'a donc pas d'effet stroboscopique.

Echantillonnage de signaux : conclusion

- De façon surprenante, un signal à temps continu $(X(t), t \in \mathbb{R})$ peut sous certaines conditions être reconstruit **parfaitement** à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$.
- Le théorème d'échantillonnage nous donne le **seuil** ($2\,f_{\max}$) au dessus duquel la fréquence d'échantillonnage f_e est suffisante pour permettre une reconstruction parfaite du signal.
- En dessous de ce seuil, l'**effet stroboscopique** apparaît.
- On peut éviter l'apparition d'un tel phénomène en **filtrant** le signal avant de l'échantillonner.

Echantillonnage de signaux : 2^{e} conclusion

L' échantillonnage et la reconstruction de signaux ont permis une transformation profonde des télécommunications :

des signaux analogiques, on est passé aux signaux numériques, qui permettent un transfert bien plus efficace de l'information.