EPFL — Automne 2016

Geometrie, MATH-120

Série 9

Exercice 1. On a vu dans le cours que les matrices d' isometries lineaires etaient de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1,\ ab + cd = ac + bd = 0 \tag{0.1}$$

On a egalement vu qu'elle etaient inversible et que leur inverse est donne par

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Verifier que cette expression coincide bien avec l'expression habituelle de l 'inverse d'une matrice 2×2 a savoir

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Comme on'la dit les matrices orthogonales etaient exactement les matrices dont l'inverse est donnee par l'expression

$${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Cette matrice s'appelle la transposee de M et dans cet exercice on considere l'application de transposition :

$${}^t\cdot : M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto {}^tM \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

Montrer que

1. ^{t} est lineaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ M, N \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^tM + {}^tN.$$

2. ^{t} est involutive :

$${}^t\cdot \circ {}^t\cdot = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})},\ {}^t({}^tM) = M.$$

3. La transposition est multiplicative :
$$^{t}M.N = {}^{t}N.{}^{t}M.$$
4. La transposition preserve le determinant $\det(M) = ad - bc$.
$$\det({}^{t}M) = \det(M).$$

Soit M une matrice non-nulle telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ verifiant
$$^{t}M = \lambda.M.$$
Montrer que $\lambda = \pm 1$ (utiliser l'involutivite).

Les matrices telles que ${}^{t}M = +M$ sont dites symetriques et celles telle que ${}^{t}M = -M$ sont dites antisymetriques. Montrer que tout matrice s'ecrit de maniere unique comme somme d'une matrice symetrique et d'une matrice anti-symetrique.

Exercice 3. On a vu dans la feuille precedente que etant donne $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non-nuls perpendiculaires, l'application
$$\mathrm{sym}_{\vec{u}} : \vec{w} \mapsto \vec{w} - 2\frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}.$$
est une isometrie : la symetrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$.

1. Montrer que si $\vec{v} = (C, S)$, la matrice M de $\mathrm{sym}_{\vec{u}}$ est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & -\mathrm{c} \end{pmatrix}$$
avec
$$\mathrm{c} = 1 - 2\frac{C^2}{C^2 + S^2}, \ \mathrm{s} = -2\frac{CS}{C^2 + S^2}. \tag{0.2}$$
2. Reciproquement etant donne une matrice non-speciale
$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & \mathrm{s} \\ \mathrm{s} & -\mathrm{c} \end{pmatrix}$$
montrer que M est la matrice d'une symetrie orthogonale et donne des coordonnees pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Donner la matrice de la symetrie orthogonale par rapport a la droite d'equation
$$3x + 4y = 0.$$

Remarque 0.1. On a vu dans le cours la notion de matrice orthogonale et le groupe associe $O_2(\mathbb{R})$ ainsi que le sous-groupe des matrices speciales $O_2(\mathbb{R})^+$ (matrices orthogonale de determinant 1) et le sous-ensemble des matrices non-speciales $O_2(\mathbb{R})^-$ (matrices orthogonales de determinant -1). Il leur correspond le groupe des isometries lineaires $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{0}}$ qui se decompose en isometries speciales $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ et non-speciales $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$. On le verra les isometries lineaires speciales sont les rotation (de centre $\mathbf{0}$) et non-speciales sont les symetries. Ainsi on remplacera souvent la terminologie speciale/non-speciale par rotation/symetrie.

Exercice 4. Soit $O_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales et $O_2(\mathbb{R})^\pm$ les matrices speciales (aussi matrices de rotations) et non-speciales (aussi matrices de symetries). Montrer que le groupe $O_2(\mathbb{R})$ est engendre par le sous-ensemble $O_2(\mathbb{R})^-$. Plus precisement toute matrice orthogonale o est le produit de une ou deux matrices de symstrie :

$$o = s \text{ ou bien } o = s.s'$$

Dans le second cas on pourra prendre

$$s' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On note

$$\mathbf{C}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle de rayon 1 centre en $\mathbf{0}$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{C}^1$ il existe une unique rotation $r \in \mathrm{Isom}^+$ telle que
$$r(1,0) = (x,y)$$
(on cherchera la matrice de r).
2. Montrer que pour toute paire de vecteurs contenu dans le cercle unite $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbf{C}^1$ il existe une unique rotation $r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ telle que
$$r(\vec{u}) = \vec{v}.$$
3. Etant donne des vecteur non-nuls du plan, $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ il existe une unique rotation $r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ telle que
$$r(\mathbb{R}_{\geqslant 0}\vec{u}) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\vec{v}$$
(la demi-droite engendree par $\vec{u}$ est transformee en la demi-droite engendree par $\vec{v}$).
On dira alors que l'isometrie speciale (la rotation) r est "l'angle" entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4. Etant donne des vecteur non-nuls du plan, $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 - \{\not{\mathbf{0}}\}$ il existe deux isometries speciales $r_1, r_2 \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ telle que

$$r(\mathbb{R}\vec{u}) = \mathbb{R}\vec{v}$$

(la droite engendree par $\vec{u}$ est transformee en la droite engendree par $\vec{v}$). Donner une relation simple entre r_1 et r_2. On dira alors que la paire de rotations (r_1, r_2) est "l'angle" entre les droites $\mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathbb{R}\vec{v}$.