EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE – LAUSANNE
POLITECNICO FEDERALE – LOSANNA
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY – LAUSANNE

Faculté Informatique et Communications
Cours ICC aux sections MA et PH
Chappelier J.-C.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

INFORMATIQUE, CALCUL & COMMUNICATIONS

Sections MA & PH

Correction Examen intermédiaire II

20 novembre 2015

SUJET 1

Instructions :

— Vous disposez d'une heure quinze minutes pour faire cet examen (15h15 - 16h30).

— L'examen est composé de 2 parties : un questionnaire à choix multiples, à 12 points, prévu sur 45 minutes, et une partie à questions ouvertes, à 8 points, prévue sur 30 minutes.
Mais vous êtes libres de gérer votre temps comme bon vous semble.

— **AUCUN DOCUMENT N'EST AUTORISÉ, NI AUCUN MATÉRIEL ÉLECTRONIQUE**.

— Pour la première partie (questions à choix multiples), chaque question n'a qu'une seule réponse correcte parmi les quatre propositions.
Indiquez vos réponses en bas de **cette** page en écrivant *clairement* pour chaque question une lettre majuscule parmi A, B, C et D.
Aucune autre réponse ne sera considérée, et en cas de rature, ou de toute ambiguïté de réponse, nous compterons la réponse comme fausse.
(Vous êtes autorisés à dégrafer cette page)

— Pour la seconde partie, répondez directement sur la donnée, à la place libre prévue à cet effet.

— Toutes les questions comptent pour la note finale.

Réponses aux quiz :

Reportez ici *en majuscule* la lettre de la réponse choisie pour chaque question, sans aucune rature.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	D	B	A	B	C	B	A	B	A	D

PARTIE QUIZ

1 – Code perdu [1 point]

Question 1) Les résultats de tests médicaux doivent être transmis codés (sans perte) sous forme de séquences de carrés bleus ou rouges. La table ci-dessous représente trois propositions de codes possibles. Malheureusement, ce sujet est tiré en noir et blanc ; les couleurs rouges/bleues se sont donc perdues...

code I	code II	code III
A - ■■■	A - ■■■■	A - ■■■
B - ■■	B - ■■	B - ■
C - ■■■	C - ■■	C - ■■■
D - ■■	D - ■■■■	D - ■■
E - ■■	E - ■	E - ■

Que pouvez vous quand même dire par rapport à l'emploi de ces codes pour la transmission désirée ?

A] les codes I et II sont faux/mauvais

B] les codes I et III sont faux/mauvais

C] les codes I et II sont bons

✔**D]** les codes II et III sont faux/mauvais

2 – Moins de place [1 point]

Question 2) Un texte d'une longueur de 1000 caractères, d'entropie (telle que définie en classe) de 2.5 bit est comprimé à une taille de 450 octets.

A] La compression s'est faite forcément avec des pertes.

B] Ce n'est pas possible.

✔**C]** On aurait pu comprimer encore plus, même sans perte.

D] C'est le mieux que l'on puisse faire sans perte.

---

3 – Signaux [2 points]

Question 3) Le signal $4\sin(12\pi t) + 2\cos(15\pi t)$ a :

A] une bande passante de 6 Hz

B] une plus petite période de 6 s

C] une amplitude maximale de 4

✔**D]** une fréquence de 6 Hz dans son spectre

Question 4) Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux périodiques de même plus petite période $T > 1$. Le signal $X_1(t) \times X_2(t)$

A] est périodique de plus petite période T^2

✔**B]** est périodique de plus petite période inférieure ou égale à T

C] n'est pas nécessairement périodique

D] est périodique de plus petite période T

4 – Filtres [1 point]

Question 5) Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

✔**A]** Un filtre passe-bas d'amplitude 1 peut diminuer l'amplitude.
B] Un filtre passe-bas avec une plus grande bande passante introduit un plus grand déphasage.
C] Un filtre à moyenne mobile n'affecte pas l'amplitude.
D] Un filtre à moyenne mobile ne modifie que le déphasage.

5 – Entropies [4 points]

Question 6) Laquelle de ces séquences a la plus grande entropie ?

A] ABCE ✔**B]** ABCDEFGH **C]** RABACHEE **D]** AAAHAHAAA

Question 7) On considère les 3 « mots » suivants, constitués uniquement de 'A', 'B', 'C', mais où manquent chaque fois les deux derniers caractères ('*' veut donc dire qu'il manque un caractère) :

① A B C A A A A * * ② A C C B C A A * * ③ B B A A B C B * *

Quels « mots » peuvent atteindre des extrêmes pour l'entropie (telle que définie en cours) ?
Plus précisément :
— Si l'on remplit les caractères manquants de sorte à avoir l'entropie maximale pour chaque « mot », quel est le « mot » d'entropie maximale ?
— Si l'on remplit les caractères manquants de sorte à avoir l'entropie minimale pour chaque « mot », quel est alors le « mot » d'entropie minimale ?

A] max. : mot ①; min. : mot ③
B] max. : mot ③; min. : mot ②
✔**C]** max. : mot ②; min. : mot ①
D] max. : mot ③; min. : mot ③

Question 8) Sachant que $\log_2(3) \simeq 1.58$, quelle est, en bit, l'entropie d'un jeu consistant à deviner la somme d'un tirage de deux dés à 6 faces (non pipés) ?

A] 0.97 ✔**B]** 3.27 **C]** 3.58 **D]** 5.58

Question 9) Si pour des nombres en virgule flottante de taille q
— la complexité de l'addition est en $\mathcal{O}(q)$
— la complexité de la multiplication est en $\mathcal{O}(q \log(q) \log(\log(q)))$
— et la complexité du calcul d'un logarithme est $\mathcal{O}(q^3)$

alors, en utilisant de tels nombres, la complexité du calcul de l'entropie d'un texte de n caractères pour lequel on a déjà calculé les probabilités est en

✔**A]** $\mathcal{O}(n\, q^3)$ mais pas $\mathcal{O}(n\, q^2 \log^2(q))$
B] $\mathcal{O}(q^{3n})$ mais pas $\mathcal{O}(n^{q^4})$
C] $\mathcal{O}(n^{q^3})$ mais pas $\mathcal{O}(n^{q^2})$
D] $\mathcal{O}(n\, q^2 \log(q) \log(\log(q)))$

6 – Echantillons [3 points]

Question 10) Si on échantillonne à une fréquence de 5 Hz le signal défini par :

$$X(t) = 3\,\sin(5\pi\, t) + 4\,\sin(10\pi\, t)$$

puis qu'on le reconstruit à l'aide de la formule vue en cours, le signal résultant est :

A] égal au signal d'entrée ✔**B]** constant **C]** $3\sin(5\pi t)$ **D]** $4\sin(10\pi t)$

suite au dos ☞

Question 11) Soit $X(t)$ un signal quelconque défini sur $\mathbb{R}$, de bande passante $f_{\max}$, et soit $X_I(t)$ sa reconstruction après échantillonnage à une fréquence $f_e = 1/T_e$:

$$X_I(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} X(mT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

✔**A]** $\forall f_e \geq 3f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

B] $\forall f_e \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

C] $\forall f_e \leq 2f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) = X(t)$

D] $\forall f_e \leq f_{\max} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad X_I(t) \neq X(t)$

Question 12) Le signal $X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sin(2^i \pi t + \frac{\pi}{3})$ est échantillonné à une fréquence $f_e = 20$ Hz. *Avant* d'être échantillonné, on lui applique un filtre passe-bas idéal de sorte à éviter le phénomène de « repliement de spectre » (ou « effet stroboscopique »). Quel signal X_I obtient-on après reconstruction à partir du signal échantillonné ?

A] $X_I(t) = \sin(16\,\pi t + \frac{\pi}{3})$

B] $X_I(t) = \sin(8\,\pi t + \frac{\pi}{3})$

C] $X_I(t) = \sum_{i=0}^{10} \sin(2^i \pi t + \frac{\pi}{3})$

✔**D]** $X_I(t) = \sum_{i=0}^{4} \sin(2^i \pi t + \frac{\pi}{3})$

PARTIE EXERCICES

7 – Codons... [4 points]

Question 13) Calculez l'entropie du message « UN PETIT EXEMPLE » en considérant tous les symboles (y compris les espaces). Détaillez votre calcul.

On a les comptes suivants :

U	N	_	P	E	T	I	X	M	L
1	1	2	2	4	2	1	1	1	1

E	_	P	T	U	N	I	X	M	L
4	2	2	2	1	1	1	1	1	1

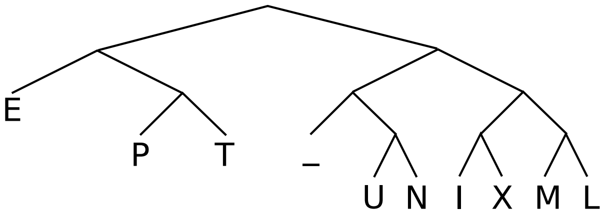
Taille totale : 16.

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum p_i \log(\frac{1}{p_i}) = \frac{4}{16}\log_2(4) + 3\,\frac{2}{16}\log_2(8) + 6\,\frac{1}{16}\log_2(16) \\ &= \frac{1}{4}2 + \frac{3}{8}3 + \frac{3}{8}4 = \frac{25}{8} \simeq 3.125 \text{ bit} \end{aligned}$$

BARÈME : 1 point : 0.25 pour le tableau, 0.25 pour les proba, 0.25 pour la formule de l'entropie et 0.25 pour son calcul (jusqu'à la fraction).

Question 14) Calculez un code de Shannon-Fano pour ce message. Donnez son arbre, puis le mot de code pour chacune des lettres du message précédent. Codez ensuite le début du message : « UN P ».

Par exemple :



P, T et espace sont interchangeables.
U, N, I, X, M et L sont interchangeables.

E	P	T	_	U	N	I	X	M	L
00	010	011	100	1010	1011	1100	1101	1110	1111

`UN P : 10101011100010`

BARÈME : 1.5 point : 0.25 pour le classement des lettres, 0.75 pour l'arbre, 0.25 pour les codes des lettres, 0.25 pour le code de début de phrase.

Question 15) Le code précédent est réutilisé pour encoder le message « UNIX LINUX XML » . L'encodage obtenu est-il de longueur optimale (parmi les codes non ambigus) ? Justifiez pleinement votre réponse.

La réponse à cette question est clairement non car :
- soit on cherche à transmettre différents messages, et il faudrait alors la bonne distribution de probabilité des lettre, qui n'est probablement pas la précédente vu le second message
(en tout cas les 2 messages proposés ont des distributions très différentes) ;
- soit on cherche à transmettre ce second message spécifiquement et, en fonction des hypothèses, on peut soit en faire le code de Shannon-Fano, soit carrément la coder par « `1` » `;-)` si on sait que c'est cette phrase ci !
[cette seconde partie de la réponse n'était évidemment pas attendue]

BARÈME : 0.5 point.

Question 16) Enoncez clairement et précisément le théorème de Shannon vu en cours. Commentez/Expliquez vos résultats précédents au vu de ce théorème.

Réponse : ce que j'attends ici c'est la partie universselle du théorème : quelque soit la source X et quelque soit le code C non ambigu sans perte de cette source, l'entropie de la source ($H(X)$) est inférieure ou égale à la longueur moyenne du code ($l(C)$).

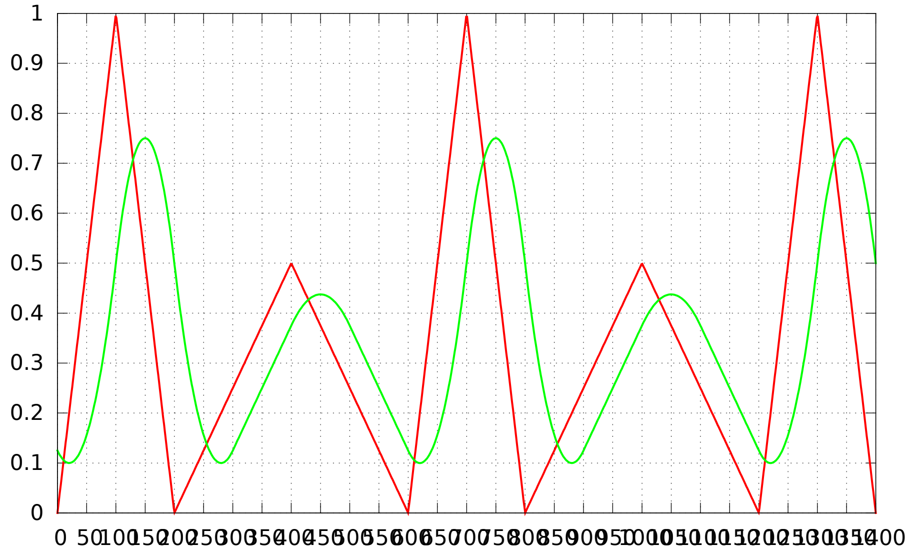
Application ici : calculer la longueur moyenne :

$$l(C) = \frac{4}{16} \times 2 + 3\,\frac{2}{16} \times 3 + 6\,\frac{1}{16} \times 4 = \frac{25}{8} = H(X)$$

BARÈME : 1 point : 0.5 pour le th. dont 0.25 pour les hypothèses et 0.25 pour sa conclusion (−0.125 si mélange les 2 inégalités) ; 0.5 pour sa mise en pratique, pertinente dont 0.25 pour un calcul de longueur moyenne.

8 – Un drôle de signal [4 points]

On considère le signal suivant, périodique sur tout $\mathbb{R}$ (il a aussi la même forme pour $t < 0$) :



auquel on applique un filtre à moyenne mobile de période d'intégration 100 ms.

Question 17) Dessinez sur la figure précédente le signal obtenu après filtrage.

Placez *distinctement* les points aux temps 100, 150, 200, 300, 400, 450, 500 et 600 ms, puis esquissez la forme de la courbe.

BARÈME : 1 point : 7 points corrects à 0.1 chacun, 0.1 pour la périodicité de la courbe (dont 0.05 pour la valeur en 0), 0.1 pour la « rondeur » de la courbe (portions de paraboles) et 0.1 pour la bonne position des extrema (décalés d'envion 50 ms).

Question 18) Le signal obtenu après filtrage est approximé par la fonction

$$X(t) = a\,\sin(2\,\pi\,f\,t + \delta) - b\,\cos(4\,\pi\,f\,t + 2\,\delta) + c$$

Estimez la valeur de f à l'aide de la figure précédente : $f \simeq \frac{1}{0.6} \simeq 1.67$ Hz

Justifiez brièvement votre réponse.

Réponse : ce filtre ne garde donc que la fréquence fondamentale f et sa première harmonique (1^{er} multiple : double). f est donc la fréquence de base, i.e. l'inverse de la période de ce signal.

BARÈME : 1 point : 0.5 pour le résultat et 0.5 pour la justification.

Question 19) On échantillonne ce signal (l'approximation ci-dessus) à une fréquence de 8 Hz. En utilisant la formule de reconstruction vue en cours, pensez-vous qu'on puisse reconstruire ce signal à partir des échantillons ? Justifiez votre réponse.

Réponse : la bande passante du signal filtré est $2f$, soit environ 3.3 Hz, qui est inférieure à $f_e/2 = 4$ Hz. Le signal filtré peut donc être reconstruit parfaitement.

BARÈME : 1 point : 0.25 pour la bande passante, 0.25 pour $f_e/2$ et 0.5 pour l'utilisation du théorème d'échantillonage.

Question 20) On cherche à reconstruire le signal de départ à partir des échantillons du signal filtré. Est-ce possible ? Pour quelle fréquence d'échantillonage ? Justifiez votre réponse.

Réponse : C'est évidemment impossible, puisqu'à partir des échantillons on reconstruit le signal filtré (cf question précédente) : on ne peut pas reconstruire 2 signaux différents à partir des mêmes échantillons.

Une autre explication est qu'en raison des « pics » (points non dérivables) du signal de départ, sa bande passante est infinie. Il est donc impossible de le reconstruire parfaitement (avec les méthodes de reconstruction vues en cours).

BARÈME : 1 point : 0.5 pour la réponse et 0.5 pour la justification.