# Série 13 (Corrigé)

**L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 19 decembre.**
**L'exercice 5 ($\star$) peut être rendu le jeudi 22 decembre aux assistants jusqu'à 15h.**

## Exercice 1 - QCM

Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Alors les valeurs propres de $A$ sont réelles.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ une matrice symétrique. Alors les valeurs propres de $A$ sont réelles.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Alors $A$ et $A^H$ ont les mêmes valeurs propres.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Alors $A$ et $A^T$ ont les mêmes valeurs propres.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $n$ un entier positif, $K$ un corps et $A \in M_{n\times n}(K)$. Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda^2$ est une valeur propre de $A^2$.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $n$ un entier positif, $K$ un corps et $A \in M_{n\times n}(K)$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$, alors toutes les valeurs propres de $A$ sont nulles.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $T : V \to V$ une application linéaire, $I : V \to V$ l'application identité et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors l'application $T - \lambda \cdot I$ est injective, sauf pour un nombre fini de valeurs de $\lambda$.

  ○ vrai ○ faux

***Sol.:***

- *Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Alors les valeurs propres de $A$ sont réelles.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ une matrice symétrique. Alors les valeurs propres de $A$ sont réelles.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Alors $A$ et $A^H$ ont les mêmes valeurs propres.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Alors $A$ et $A^T$ ont les mêmes valeurs propres.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit $n$ un entier positif, $K$ un corps et $A \in M_{n\times n}(K)$. Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\lambda^2$ est une valeur propre de $A^2$.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit $n$ un entier positif, $K$ un corps et $A \in M_{n\times n}(K)$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$, alors toutes les valeurs propres de $A$ sont nulles.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $T : V \to V$ une application linéaire, $I : V \to V$ l'application identité et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors l'application $T - \lambda \cdot I$ est injective, sauf pour un nombre fini de valeurs de $\lambda$.*

  ○ *vrai* ● *faux*

**Exercice 2**

i) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes :

- $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta\gamma > 0$, pour $K = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$.
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

ii) Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$.

***Sol.:***

*i) Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ d'une matrice $A$ est défini comme*

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda \cdot I - A).$$

*Nous voulons trouver les racines de $p_A$. Il est parfois plus facile de calculer $\widetilde{p}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$, car dans ce cas il suffit de changer les signes de $\lambda$, et non pas prendre $-A$. Naturellement, $\widetilde{p}_A$ a les mêmes racines que $p_A$, en particulier $\widetilde{p}_A = (-1)^n p_A$, le choix de la méthode est juste une question de préférences.*

- *D'abord on considere $K = \mathbb{C}$.*

$$\tilde{p}_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ -\gamma & \alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \gamma\beta = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \gamma\beta + \alpha^2.$$

  *Les valeurs propres de $A$, $\lambda_1$ et $\lambda_2$, sont les racines de $p_A(\lambda) = 0$. On résout l'équation du deuxième degré pour trouver $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\gamma\beta} = \alpha \pm i\sqrt{\gamma\beta}$. Ainsi, bien que $A$ soit une matrice à coefficients réels, pour toutes valeurs de $\alpha, \beta$, et $\gamma$ avec $\beta\gamma > 0$, les valeurs propres de $A$ sont complexes.*

  *Si $K = \mathbb{R}$, on voit que $A$ n'a pas des valeurs propres dans $K$, car les solutions de $\tilde{p}_A(\lambda) = 0$ sont les nombres complexes.*

- $\tilde{p}_B(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8$. *Les racines sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$.*

*Pour des polynômes de degré plus grand ou égal à 3, il n'existe pas une formule simple pour calculer les racines, comme c'est le cas pour polynômes de degré 1 ou 2. Une procédure que l'on peut essayer est de deviner (avec des* estimations éclairées*) autant de racines que possible, jusqu'à ce que le polynôme résiduel soit de degré 2, et puis utiliser la formule habituelle.*

*ii)*

- $\tilde{p}_C = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1.$

  *Le polynôme $-\lambda^3 + 1 = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ a les racines $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Donc, seulement 1 est une racine réelle. Pour trouver des vecteurs propres, il faut résoudre le système $Cx = x$, i.e. $(C - I)x = 0$, où $I$ est la matrice d'identité de taille 3. Alors, on obtient*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  *Alors,l'ensemble des solutions de ce système est $\{t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, t \in \mathbb{R}\}$. Un vecteur propre est e.g. $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.*

- *Comme $\tilde{p}_D(t) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1)$, la seule valeur propre est $\lambda = 0$. On calcule de(s) vecteur(s) propre(s), en résolvant le système $Dx = \lambda x = 0$ :*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  *Alors on obtient que l'ensemble des solutions de système est $\{t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, t \in \mathbb{F}_2\}$. Pour $t = 0$, on obtient le vecteur nul. Par définition, un vecteur propre ne peut pas être nul. Donc, le seul vecteur propre de $D$ est le vecteur $x = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.*

**Exercice 3**
Soit $K$ un corps et $n$ un entier positif. Montrer que la matrice $A \in M_{n\times n}(K)$, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

a comme polynôme caractéristique $p_A(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$.

***Sol.:*** *On montre cette identité par récurrence. Pour $n = 2$ on obtient le résultat voulu,*

$$p_A(t) = \det(tI_2 - A) = \begin{pmatrix} t & \alpha_0 \\ -1 & t+\alpha_1 \end{pmatrix} = t(t+\alpha_1) + \alpha_0 = t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

*On assume que c'est vrai pour $n-1$ et on montre que le résultat est vrai pour $n$. On a*

$$p_A(t) = \det(tI_n - A) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & t & \ddots & & \vdots & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

*On développe le déterminant par rapport à la première ligne et on obtient*

$$\begin{aligned} p_A(t) &= t \det \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & t & \ddots & & \vdots & \alpha_2 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t & \alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & t+\alpha_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}\alpha_0 \det \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= t(t^{n-1} + \alpha_{n-1}t^{n-2} + \dots + \alpha_2 t + \alpha_1) + (-1)^{n+1}\alpha_0(-1)^{n-1} \\ &= t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0, \end{aligned}$$

*où pour la première matrice on a utilisé l'induction pour $n-1$ et pour la deuxième matrice, il s'agit d'une matrice diagonale avec des $-1$ sur la diagonale.*

**Exercice 4**
Soit $K$ un corps et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ les valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) de $A \in M_{n\times n}(K)$. Démontrer les assertions suivantes :

i) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$,

ii) $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$,

iii) $\operatorname{trace}(P^{-1}AP) = \operatorname{trace}(A)$, où $P$ est une matrice inversible.

***Sol.:*** *On a*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0, \end{aligned}$$

*où* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$.

*i) On a directement que*

$$\det(A) = (-1)^n \det(-A) = (-1)^n p_A(0) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n.$$

*ii) En multipliant les facteurs de* $p_A(\lambda)$, *on remarque que le coefficient* $\alpha_{n-1}$ *est donné par* $\alpha_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. *Par le Lemme 7.6, on a que* $\alpha_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = -\operatorname{trace}(A)$. *Donc,* $\operatorname{trace}(A) = -\alpha_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ *comme voulu.*

*iii) De ii) on a* $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. *En utilisant que* $\operatorname{trace}(P^{-1}AP) = \operatorname{trace}(APP^{-1}) = \operatorname{trace}(A)$, *on obtient l'assertion.*

**Exercice 5 ($\star$)**

Soit $K$ un corps, $n, m$ des entiers positifs et $A \in M_{n\times n}(K)$, $B \in M_{n\times m}(K)$, $C \in M_{m\times n}(K)$ et $D \in M_{m\times m}(K)$.

i) Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

ii) Exprimer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ en fonction de $p_A(t)$ et $p_D(t)$.

***Sol.:***

*a) On a vu dans le Série* 12, *l'exercice* 5 *que*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

*On utilise le fait que le déterminant de la transposée d'une matrice est égal à celui de la matrice d'origine. On obtient*

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} &= \det\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^T\right) = \det\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ 0 & D^T \end{pmatrix} \\ &= \det(A^T)\cdot\det(D^T) = \det(A)\cdot\det(D). \end{aligned}$$

*b) Le polynôme caractéristique de* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *est par définition le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} - t \cdot I_{n+m} = \begin{pmatrix} A - t \cdot I_n & B \\ 0 & D - t \cdot I_m \end{pmatrix}.$$

*D'après a), le polynôme caractéristique de* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *est le produit de* $\det(A - t \cdot I_n)$ *et* $\det(D - t \cdot I_m)$*, donc* $p_A(t) \cdot p_D(t)$*.*

**Exercice 6**

Soit $n$ un entier positif et $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de $A$ et $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de $B$. Soit $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $F : X \mapsto AX - XB^T$. Montrer que les valeurs propres de $F$ sont $\lambda_i - \mu_j, i, j, = 1, \ldots, n$.

***Sol.:*** *On note par* $v_i$ *et* $w_j$ *des vecteurs propres de* $A$ *et* $B$*, associés à les valeurs propres* $\lambda_i$*,* $\mu_j$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*, respectivement, i.e.* $Av_i = \lambda_i v_i$ *et* $Bw_j = \mu_j w_j$*. Soit* $X = v_i w_j^T$*, pour* $i, j = 1, \ldots, n$*. Alors, on obtient*

$$\begin{aligned} F(X) = F(v_i w_j^T) &= A v_i w_j^T - v_i w_j^T B^T \\ &= \lambda_i v_i w_j^T - \mu v_i w_j^T \\ &= (\lambda_i - \mu_j) v_i w_j^T. \end{aligned}$$

*Donc,* $\lambda_i - \mu_j$*,* $i, j = 1, \ldots, n$ *sont des valeurs propres de* $F$ *(mutiples inclus). Comme* $F \in L(M_{n\times n}(\mathbb{R}), M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ *a au plus* $n^2$ *valeurs propres, alors* $\lambda_i - \mu_j, i, j = 1, \ldots, n$ *sont toutes les valeurs propres de* $F$*. De plus, on voit que* $v_i w_j^T$ *sont des vecteurs propres associés.*

**Exercice 7**

i) Vérifier le Théorème de Hamilton-Cayley par rapport à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

ii) Soit $K$ un corps et $A \in M_{2\times 2}(K)$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Calculer l'inverse de $A$ à l'aide du Théorème d'Hamilton-Cayley.

iii) Considérer le Théorème de Hamilton-Cayley et la note de bas de page correspondante. Justifier pourquoi il n'est pas possible d'utiliser l'argumentation $p_A(A) = \det(A \cdot I - A) = 0$ pour montrer le Théorème de Hamilton-Cayley.

***Sol.:***

*i) On calcule le polynôme caractéristique de $A$, on trouve*

$$p_A(t) = \det(tI - A) = t^3 - t^2 + 3.$$

*Si on évalue $p_A$ en $A$ on trouve*

$$\begin{aligned} p_A(A) = A^3 - A^2 + 3I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*et donc le théorème est vérifié.*

*ii) Pour $M \in M_{n\times n}(K)$ on a la formule det$(M) = (-1)^n p_M(0)$, pour $A$ on obtient det$(A) = p_A(0) = a_0 \neq 0$, donc $A$ est bien inversible. Par le théorème de Hamilton-Cayley on a $A^2+a_1A+a_0I = 0$. En appliquant $A^{-1}$ à gauche on a $A+a_1I+a_0A^{-1} = 0$, qui donne $A^{-1} = -(A + a_1I)/a_0$.*

*iii) Soit $R$ un anneau commutatif. Pour $A \in M_{n\times n}(R)$ et $n > 1$, on ne peut pas simplement remplacer $A$ pour $t$ car $\det(tI - A) \in R$ tandis que $p_A(A) \in M_{n\times n}(R)$.*

**Exercice 8**

**Définition** : Soit $K$ un corps, $n$ un entier positif et $A \in M_{n\times n}(K)$. On dit que $A$ est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0$.

Soit $n \geq 2$ un entier positif et $N \in M_{n\times n}(K)$ une matrice nilpotente.

i) Montrer que $\det(I + N) = 1$, montrer que $I - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de $N$.

ii) Soit $A \in M_{n\times n}(K)$ telle que $AN = NA$. Montrer que si $A$ est inversible alors $AN$ et $NA^{-1}$ sont nilpotentes et $\det(A + N) = \det(A)$.

***Sol.:***

*i) Par définition, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $N^m = 0$. On cherche les valeurs propres de $N$. Soit $\lambda$ valeur propre de $N$ associée au vecteur $x$, alors*

$$Nx = \lambda x \Rightarrow \lambda^m \text{ est une valeur propre de } N^m.$$

*Comme $N^m = 0$, on a que $\lambda^m = 0$ ce qui implique que $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de $N$. Les valeurs propres de $N + I$ seront égales à 1, en effet comme chaque valeur propre de $N$ est zéro, on a*

$$(N + I)x = \lambda x \Rightarrow Nx = (\lambda - 1)x \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

*On a vu dans l'exercice 4 que $\det(A) = \Pi_{i=1}^n \lambda_i$ pour toutes matrices $A \in M_{n\times n}(K)$ avec $n$ valeurs propres. Comme $\lambda_i = 1$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a*

$$\det(I + N) = 1.$$

*La matrice* $I - N$ *est inversible car* $\det(I - N) = 1 \neq 0$ *(on procède comme pour* $\det(I + N)$*).*
*Comme Pour un polynôme* $p$ *on a*

$$1 - p(t)^m = (1 - p(t))(1 + p(t) + p(t)^2 + \ldots + p(t)^{m-1}).$$

*En appliquand ceci aux matrices* $I$ *et* $N$ *on a*

$$I - N^m = (I - N)(I + N + N^2 + \ldots + N^{m-1}),$$

*et l'inverse est donné par*

$$(I - N)^{-1} = (I + N + N^2 + \ldots + N^{m-1}).$$

*ii) On suppose que* $A$ *est inversible et que* $N^m = 0$*. Alors*

$$(AN)^m = AN \cdot AN \cdots AN \cdot AN = AN \cdot AN \cdots AANN = \ldots = A^m N^m = 0,$$

*et de même* $NA^{-1}$ *est nilpotente. Par le point i) on a que* $\det(I + N) = 1$ *pour n'importe quelle matrice nilpotente, ainsi*

$$\det(A + N) = \det(AA^{-1}A + NA^{-1}A) = \det(A)\det(I + NA^{-1}) = \det(A).$$