Analyse avancée I — Semaine du 21 au 25 novembre 2016
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Corrigé 10 du jeudi 24 novembre 2016

Exercice 1.

Calculons les limites suivantes:

1.) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{1-\cos x^6}{x^{12}}$: Le développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction $\cos(x)$ autour de 0 donne:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(|x^2|), \quad \text{si } x \to 0$$

et donc aussi

$$\cos(x^6) = 1 - \frac{1}{2}x^{12} + o(|x^{12}|), \quad \text{si } x \to 0.$$

On a donc immédiatement $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{1-\cos x^6}{x^{12}} = \frac{1}{2}$.

2.) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$: On a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\substack{y\to 0\\ >}} \left(1+y\right)^{\frac{1}{y}} = \lim_{\substack{y\to 0\\ >}} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}$.
Puisque

$$\ln(1+y) = y + o(|y|), \quad \text{si } y \to 0$$

on a donc

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = 1 + r(y)$$

avec $\displaystyle\lim_{\substack{y\to 0\\ >}} r(y) = 0$. Puisque la fonction e^x est continue au point 1, on a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Exercice 2.

Calculons les limites suivantes par la règle de Bernoulli-L'Hôspital:

(1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{(\sin x)^m}{(1-\cos x)^n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq m, n \leq 2$:

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\cos x}{\sin x}$ n'existe pas.

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\cos x}{2(1-\cos x)\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\cos x}{2\sin x - \sin 2x}$ n'existe pas.

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = 2$.

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{\sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{2\sin x\cos x}{2(1-\cos x)\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{2\cos x}{2(1-\cos x)} = +\infty$.

(2) Pour $\alpha > 0$:
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^\alpha \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$.

(3) Pour $\alpha > 0$: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$.

Exercice 3.

Cherchons le polynôme de Taylor d'ordre m autour de 0 des fonctions suivantes:

1.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \cos(x^2)$ et $m = 4$:
Le développement de Taylor d'ordre 2 de $\cos(y)$ autour de $y = 0$ s'écrit:

$$\cos(y) = 1 - \frac{1}{2}\, y^2 + r(y),$$

où $r(z) = \mathcal{O}(|z|^4)$ si $z \to 0$, i.e., il existe $\delta > 0, C > 0$ tels que $|r(z)| \leq C|z|^4$, si $|z| \leq \delta$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} x^2 = 0$, on peut substituer y par x^2 dans le développement ci-dessus pour obtenir

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}\, x^4 + r(x^2).$$

Si $|x| \leq \sqrt{\delta}$ alors $|x|^2 \leq \delta$ et ainsi $|r(x^2)| \leq C|x|^8$.

Finalement, on obtient $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}\left(|x|^8\right)$ si $x \to 0$.

2.) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\cos(x))$ et $m = 6$:
Si $x = 0$, on a $\cos 0 = 1$. Développons donc $\cos z$ autour de $z = 1$. On obtient

$$\cos z = \cos(1) - \sin(1)(z-1) - \frac{\cos(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}(z-1)^3 + \mathcal{O}\left(|z-1|^4\right), \text{ si } z \to 1.$$

Mais le développement de la fonction cos autour de $x = 0$ donne

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}\left(|x|^8\right), \text{ si } x \to 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\cos(\cos x) &= \cos(1) - \sin(1)\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(|x|^8)\right) \\
&\quad - \frac{\cos(1)}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(|x|^6)\right)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(|x|^4)\right)^3 + \mathcal{O}\left(|x|^8\right) \\
&= \cos(1) + \frac{\sin(1)}{2}\, x^2 + x^4\left(-\frac{\sin(1)}{4!} - \frac{\cos(1)}{2!(2!)^2}\right) + x^6\left(\frac{\sin(1)}{6!} + \frac{2\cos(1)}{2!4!} - \frac{\sin(1)}{(2!)^3 3!}\right) + \mathcal{O}(|x|^8) \\
&= \cos(1) + \frac{\sin(1)}{2}\, x^2 - \left(\frac{\sin(1)}{24} + \frac{\cos(1)}{8}\right)x^4 + \left(\frac{\cos(1)}{48} - \frac{7\sin(1)}{360}\right)x^6 + \mathcal{O}(|x|^8).
\end{aligned}$$

3.) $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\cos(x))$ et $m = 4$:
Puisque $\cos 0 = 1$, on va développer la fonction $\ln(z)$ autour de 1. On a

$$\ln(z) = (z-1) - \frac{1}{2!}(z-1)^2 + \mathcal{O}(|z-1|^3), \quad \text{si } z \to 1,$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(|x|^6), \quad \text{si } x \to 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(|x|^6)\right) - \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(|x|^4)\right)^2 + \mathcal{O}(|x|^6) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathcal{O}(|x|^6), \quad \text{si } x \to 0.
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Supposons qu'on ait une quantité $x > 0$ d'une certaine ressource que l'on veut partager en n parties $x_1, \ldots, x_n$ avec $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ et $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq x$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On veut maximiser $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$.

Montrer que si f est strictement concave, alors la seule solution optimale est le choix $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{x}{n}$. Indication: montrer que si $x_i \neq x_j$, alors on peut trouver une meilleure solution en remplaçant x_i et x_j par $x'_i = x'_j = \frac{x_i + x_j}{2}$.

Clairement si on a $\alpha = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ avec, par exemple $x_i \neq x_j$, alors on définit une nouvelle configuration $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ avec $x'_k = x_k$ pour tout k sauf $x'_i = x'_j = \frac{x_i + x_j}{2}$. Alors, par la concavité stricte, on a clairement $\beta = f(x'_1) + f(x'_2) + \ldots + f(x'_n) > \alpha$. Notons qu'on a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n$. On en conclut qu'il n'y a pas de configuration maximale avec deux x_i différents. Et vu la croissance de la fonction f, on a que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{x}{n}$ est la solution optimale.