Corrigé 5 du mardi 18 octobre 2016

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. Montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)<+\infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ell \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} a_n = \ell.$$

Démonstration : Développons les sommes partielles de la série:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_0.$$

En passant à la limite, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) - a_0.$$

Ainsi, on a bien que la limite de S_n existe si et seulement si la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ existe.

□

Exercice 2.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}<+\infty$.

Démonstration : Pour tout $n>0$ on a

- Si $a_n = 0$, on a, $\displaystyle 0 = \frac{a_n}{1+n^2a_n} < \frac{1}{n^2}$;
- Si $a_n > 0$ on a
$$0 \leq \frac{a_n}{1+n^2a_n} < \frac{a_n}{n^2a_n} = \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, on conclut à la convergence de la série.

□

Exercice 3.

Etudions la convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right)$.

1.) Montrons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ converge.

Démonstration : On a

$$x_n = \frac{1}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

et donc

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Le critère de d'Alembert nous permet de conclure que la série converge.

□

2.) Montrons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ converge.

Démonstration : Si on pose

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2+n+1},$$

on vérifie aisément que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad x_n \cdot x_{n+1} < 0 \text{ et } |x_{n+1}| < |x_n|.$$

Le critère des séries alternées nous permet de conclure que la série converge.

$\square$

Puisque, par les points 1.) et 2.), les deux séries convergent séparemment, leur somme converge également.

Exercice 4.

Identifions les trois constantes α, β et μ telles que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n!} &= \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!} \\ &= \frac{n\alpha + n(n-1)\beta + n(n-1)(n-2)\mu}{n!}. \end{aligned}$$

Les coefficients α, β et μ vérifient donc le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu = 1 \\ \beta - 3\mu = 0 \\ \alpha - \beta + 2\mu = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \mu = 1 \end{array} \right.$$

Ainsi, si $n \geq 3$,

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!}.$$

A présent considérons les sommes partielles

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{n^3}{n!}, \text{ avec } p \geq 3.$$

Par ce qui précède nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=1}^{2} \frac{n^3}{n!} + \sum_{n=3}^{p} \left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \right] \\ &= \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-1)!} + 3\sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-3)!} \\ &= 1 + 4 + \sum_{n=2}^{p-1} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=1}^{p-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} \\ &= 5 + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!} + 3\left(\sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} + \frac{1}{(p-2)!} \right) + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} \\ &= 5\sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} + 4\frac{1}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!}. \end{aligned}$$

En passant à la limite nous obtenons:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} &= \lim_{p\to\infty} S_p = \lim_{p\to\infty} \left[5\sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} + 4\frac{1}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!} \right] \\ &= 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 5e. \end{aligned}$$