

Cinquième partie: Systèmes de points matériels, lois de conservation

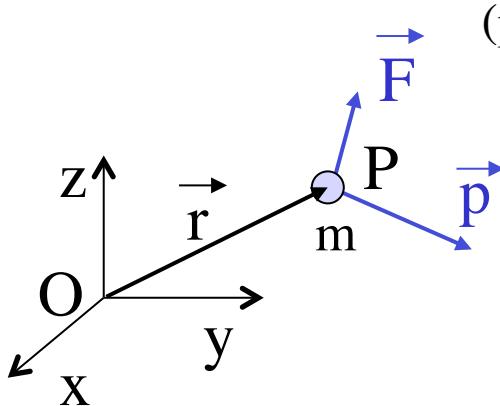
Notions abordées:

- 2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique
- Systèmes de points matériels: énoncé général de la 3ème loi de Newton
- Centre de masse, théorème du centre de masse
- Lois de conservation pour un système isolé
- Chocs et collisions

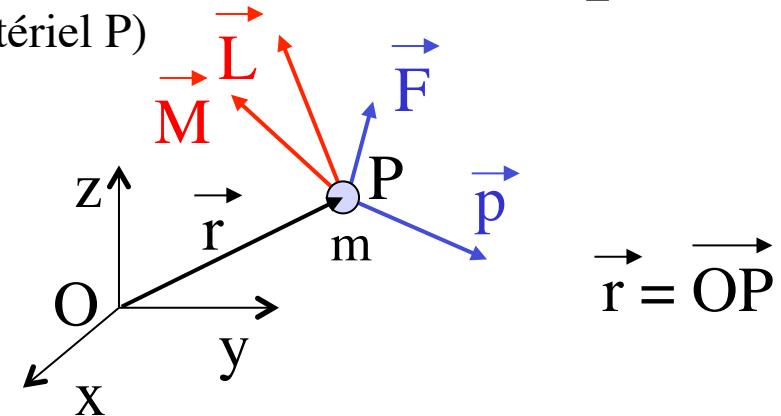
Buts:

- Assimiler et savoir appliquer les lois de la mécanique newtonienne

2ème loi et théorème du moment cinétique



(pour un point matériel P)



$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

- Résultante (somme) des forces appliquées au point matériel P:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

- Quantité de mouvement du point matériel de masse m:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Deuxième loi de Newton**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

équivalente à $\vec{F} = m\vec{a}$, si m constante

- Moment de la force résultante \vec{F} par rapport à un point O du référentiel:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i = 0 \text{ si force centrale}$$

- Moment cinétique du point matériel par rapport au point O:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

- Théorème du moment cinétique**

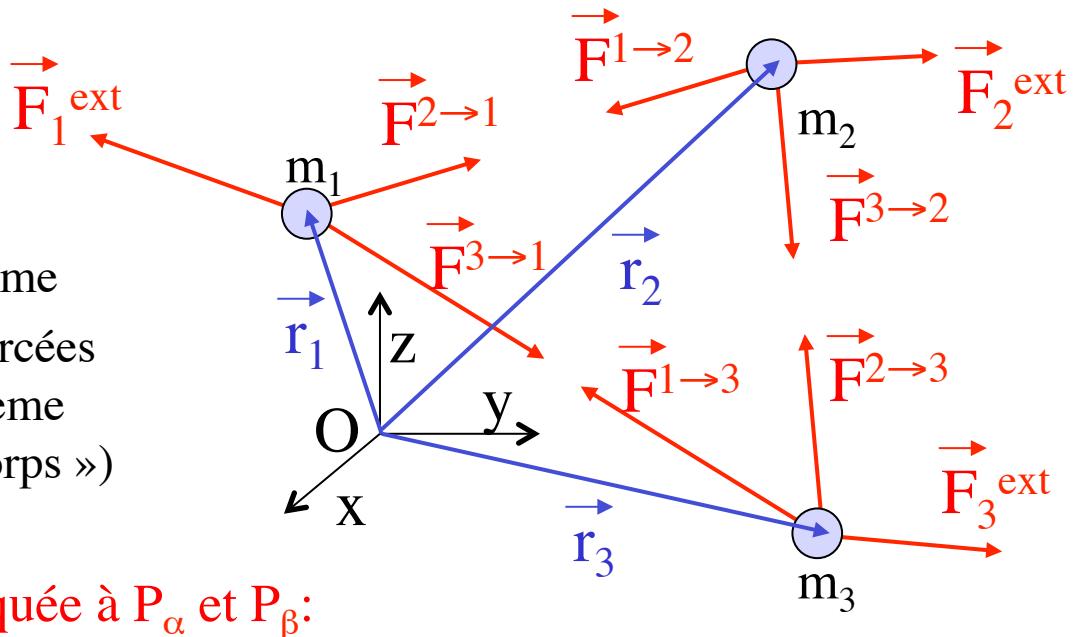
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

= 0 si force centrale

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

Système de points matériels

- On suppose que chaque point matériel P_α du système subit:
 - une force extérieure F_α^{ext} dont l'origine est extérieure au système
 - des forces intérieures $F^{\beta \rightarrow \alpha}$ exercées par les autres points P_β du système (uniquement forces « à deux corps »)



- Troisième loi de Newton, appliquée à P_α et P_β :

action et réaction sont égales, opposées et de même support

$$\vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = 0$$

$$\vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{M}_O^{\alpha \rightarrow \beta} = \vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{r}_\beta \wedge \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \wedge \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

- Troisième loi (énoncé général)**

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

La somme des forces internes est nulle

La somme des moments des forces internes est nulle

Système de points matériels (suite)

- Quantité de mouvement totale: $\vec{p} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{d\vec{p}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \right) = \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}}_{\vec{F}^{\text{ext}}}$$

- Moment cinétique total (par rapport à O): $\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{L}_{O,\alpha}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{d\vec{L}_{O,\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} \right) = \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}}}_{\vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

Lois générales de la dynamique pour un système de points matériels

(pourraient être prises comme postulat fondamental duquel découlerait le principe de l'action et de la réaction)

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O^{\text{ext}}\end{aligned}}$$

Seules les forces exercées par l'extérieur sur le système déterminent l'évolution de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique total

Système à l'équilibre (statique)

- Un système est à l'équilibre si:

$$\begin{cases} \vec{r}_\alpha(t) = \text{constante} \\ \vec{v}_\alpha(t) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout point } \alpha \text{ du système}$$

- Dans ce cas on a:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \\ \vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout point } O \text{ du référentiel}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{array}} \quad \text{pour tout point } O \text{ du référentiel}$$

Conditions d'équilibre
pour un système de points matériels
(en particulier pour un solide rigide)

démo: balances

Centre de masse (ou d'inertie, ou « de gravité »)

- Le centre de masse est un point G défini par:

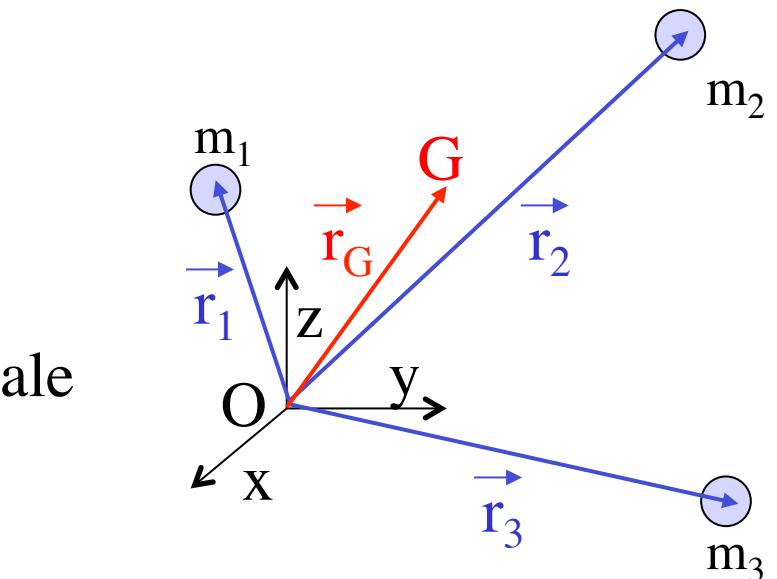
$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

où $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$ = masse totale

- Si les masses m_{α} sont constantes:
 - vitesse du centre de masse

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \frac{\vec{p}}{M} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = M \vec{v}_G}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{M \vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}}$$



**Théorème du
centre de masse**

Le **centre de masse** d'un système **se comporte comme un point matériel** de masse $M = \sum m_{\alpha}$ subissant toutes les forces extérieures appliquées sur les différentes parties du système, comme si ces forces étaient exercées sur ce point matériel

Les bases de la mécanique Newtonienne classique

(résumé)

Les 3 lois de Newton

1. Loi d'inertie

mouvement rectiligne uniforme $\Leftrightarrow \vec{F} = 0$

2. Loi fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ où } \vec{p} = m\vec{v} \quad \left(\begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{a} \\ \text{si } m = \text{cste} \end{array} \right)$$

3. Loi de l'action et de la réaction

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

1. Définit les « bons » référentiels pour la 2ème loi, c'est-à-dire les référentiels d'inertie

2. Introduit les grandeurs physiques importantes; de cette loi découle le théorème du moment cinétique:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \text{ où } \begin{cases} \vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \\ \vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} \end{cases}$$

O = point arbitraire du référentiel

3. Enonce une propriété générale des forces:

Dans un système la somme des forces et des moments internes est nulle
⇒ la 2ème loi de Newton et le théorème du moment cinétique sont valables pour la quantité de mouvement totale et le moment cinétique total en ne considérant que les forces extérieures au système

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{O,\text{tot}}}{dt}$$

Relativité Galiléenne (invariance par changement de référentiel d'inertie)

Les intervalles de temps et d'espace sont les mêmes dans tous les référentiels (d'inertie)

Les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie

Lois de conservation pour un système isolé

- Pour un système isolé (i.e. qui ne subit aucune force de l'extérieur),
 $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$ et $\vec{M}_O^{\text{ext}} = 0$ et donc:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante} \Rightarrow \vec{v}_G = \text{constante}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{constante}$$

par rapport à n'importe quel point O du référentiel

- Pour un système partiellement isolé selon une direction fixe \hat{u} :

$$\vec{F}^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

→ démos: 1) véhicule (initialement à l'arrêt) propulsé par des boulets $\vec{p}_{\text{boulets}} + \vec{p}_{\text{véhicule}} = 0$
2) oscillateur sur rail à air
3) pendule sur roulettes } le centre de masse a un mvt rectiligne uniforme
4) tabouret tournant $\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = \text{constante}$ (si r diminue, ω augmente)

Lois de conservation: remarques, exemples ...

- Il existe encore une autre loi de conservation importante en mécanique: la **conservation de l'énergie**
 - tout aussi fondamentale que la conservation de p et L
 - l'énergie cinétique totale d'un système, même isolé, n'est pas toujours conservée, car il existe des formes « cachées » d'énergie (énergies potentielles, chaleur, énergie électrique ou chimique, masse, ...)
 - cette loi dépasse donc le cadre strict de la mécanique !
- Les lois de conservation sont des concepts et des outils puissants:
 - Analyse simplifiée de situations complexes
- Exemples et démonstrations (pour constater la conservation de \vec{p} et \vec{L} , et chercher les formes d'énergie « cachées »):
 - « voiture à boulets »
 - chocs élastiques, choc mou
 - tabouret tournant

Propriétés du centre de masse (CM)

- Soit G (G') le centre de masse défini à partir de l'origine O (O'):

$$\overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{O'P_{\alpha}} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_{\alpha}}) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}$$

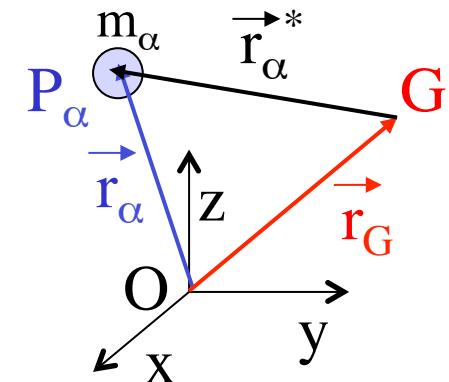
$\Rightarrow G' = G \Rightarrow$ le centre de masse est indépendant de l'origine
(et l'origine n'a même pas besoin d'être un point du référentiel)

- Les positions \vec{r}_{α}^* et les quantités de mouvement $\vec{p}_{\alpha}^* = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*$ des points matériels du système par rapport au CM (dans le référentiel du CM) satisfont à:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* = 0 \text{ où } \vec{r}_{\alpha}^* = \overrightarrow{GP_{\alpha}} = \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_G$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* = 0 \text{ où } \vec{v}_{\alpha}^* = \frac{d\vec{r}_{\alpha}^*}{dt} = \vec{v}_{\alpha} - \vec{v}_G$$

La somme des quantités de mouvement par rapport au centre de masse est nulle



Problème à deux corps

- 2ème loi appliquée à chaque corps

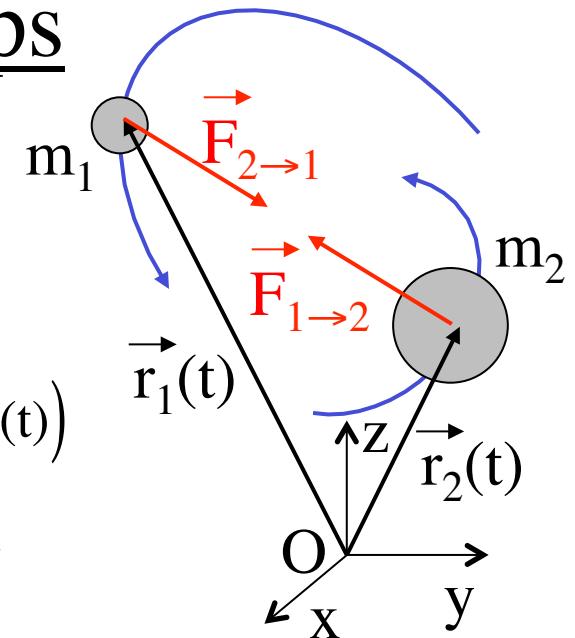
$$\begin{cases} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 & (1) \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 & (2) \end{cases}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = 0$$

(3ème loi)

- Changement de coordonnées: $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) \rightarrow (\vec{R}(t), \vec{r}(t))$

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \text{coord. du centre de masse} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{coord. relatives} \end{cases}$$



$$(1) + (2) \Rightarrow 0 = (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}}$$

Equation du mouvement du centre de masse
(théorème du CM pour $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0$)

$$(1) \times m_2 - (2) \times m_1 \Rightarrow m_2 \vec{F}_{2 \rightarrow 1} - m_1 \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F}_{2 \rightarrow 1} (m_1 + m_2) = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}$$

Equation du mouvement relatif

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \mu \ddot{\vec{r}} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\ M = m_1 + m_2 \end{cases}$$

μ = masse réduite du système
 M = masse totale du système

Problème à deux corps (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{array} \right. \quad \text{référentiel du laboratoire} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{R} = -\frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{array} \right. \quad \text{référentiel du centre de masse}$$

changement de référentiel

- Quantité de mouvement totale: $\begin{cases} \vec{p}_{\text{tot}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{V} \\ \vec{p}_{\text{tot}}^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = 0 \end{cases}$ $\vec{p}_{\text{tot}} = M \vec{V}$ Théorème de la quantité de mvt
- Moment cinétique total:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{L}_{\text{tot},O} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 = \vec{r}_1 \wedge m_1 (\vec{V} + (\mu/m_1) \vec{v}) + \vec{r}_2 \wedge m_2 (\vec{V} - (\mu/m_2) \vec{v}) \\ = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \wedge \vec{V} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \mu \vec{v} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \end{array} \right.$$

$$\left. \vec{L}_{\text{tot},G}^* = \vec{r}_1^* \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \vec{r}_2^* \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \dots = \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \right. \quad \boxed{\vec{L}_{\text{tot},O} = \vec{R} \wedge M \vec{V} + \vec{L}_{\text{tot},G}^*}$$

- Energie cinétique totale: 1er théorème de König

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{V} + (\mu/m_1) \vec{v})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{V} - (\mu/m_2) \vec{v})^2 \\ = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{V}^2 + \frac{1}{2} (1/m_1 + 1/m_2) \mu^2 \vec{v}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \\ K_{\text{tot}}^* = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{*2} = \dots = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \end{array} \right. \quad \boxed{K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + K_{\text{tot}}^*}$$

2ème théorème de König

Chocs ou collisions entre deux corps

- Peuvent être analysés sur la base des lois de conservation et permettent d'étudier les forces en jeu
- Modélisation: le système des deux corps est isolé:

$\Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}}$ et \vec{p}_{tot} conservés

① Bien avant le choc ($t \ll 0$):

- Les corps n'exercent aucune force l'un sur l'autre (ils sont très éloignés et on suppose une force à courte portée)
- Chaque corps est un système isolé

② Pendant le choc ($t \sim 0$):

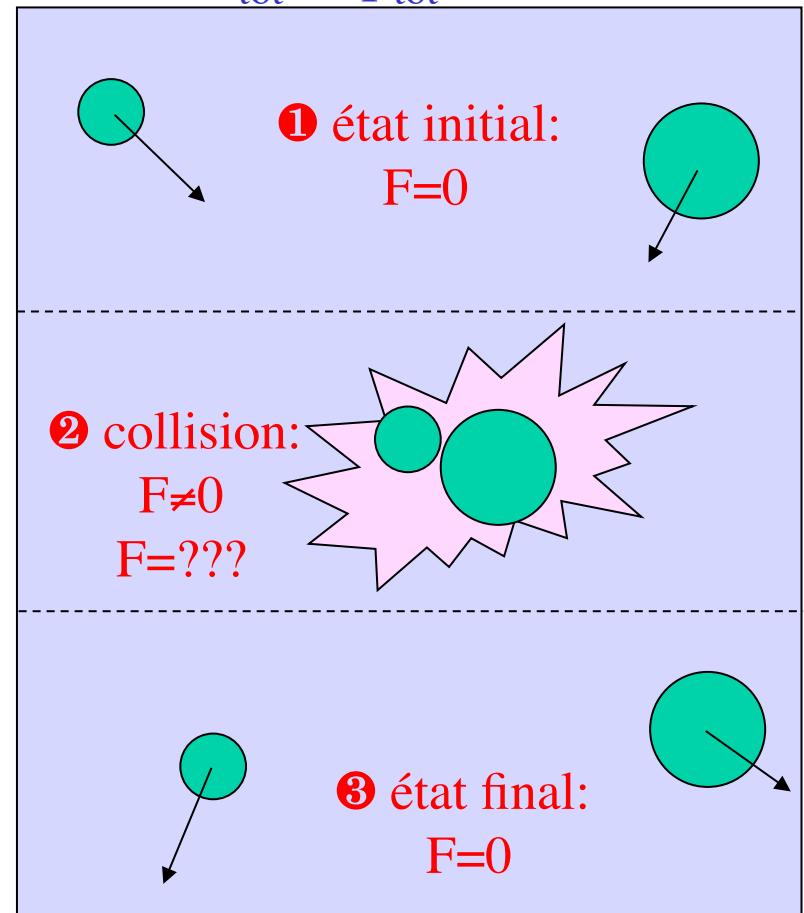
- Les corps interagissent, sous l'effet d'une force F (qu'on ne décrit pas)

③ Bien après le choc ($t \gg 0$):

- Les corps sont à nouveau libres

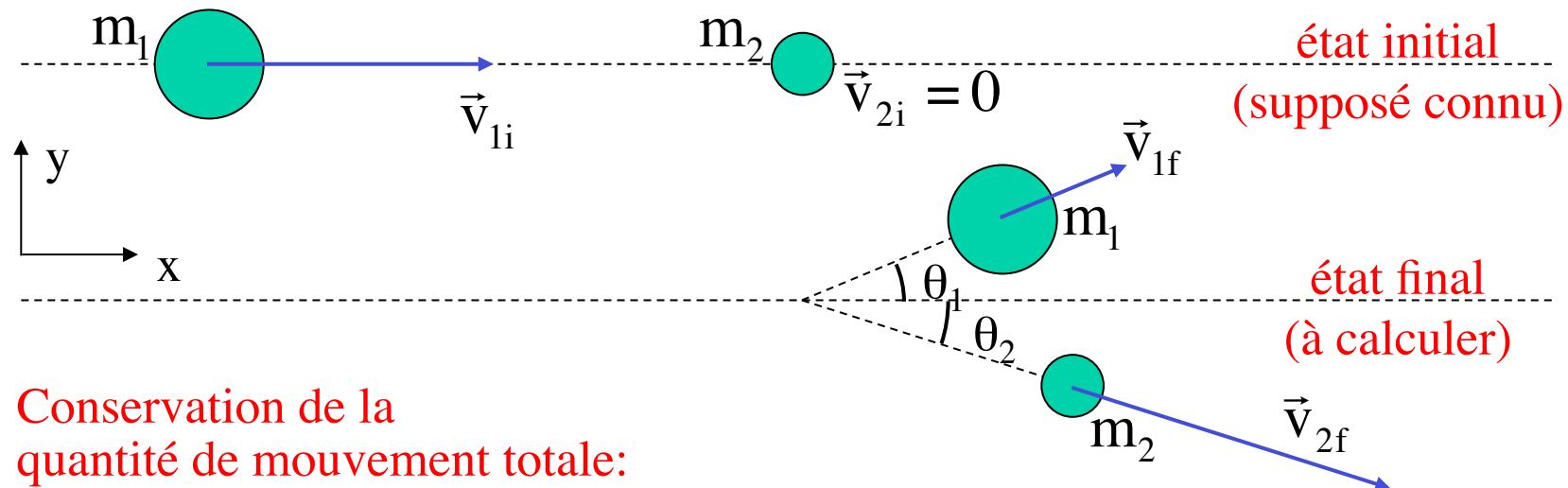
état initial \neq état final: les corps ont échangé, entre autres, de la quantité de mouvement:

$$\Delta \vec{p} = \int_{\text{choc}} \vec{F}(t) dt = \text{impulsion}$$



Choc entre deux points matériels

- On choisit, sans perte de généralité, un référentiel dans lequel l'une des deux boules est initialement au repos



- Conservation de la quantité de mouvement totale:

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \Rightarrow \text{toutes les vitesses sont dans un même plan}$$

Projections x et y

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

- Variation d'énergie cinétique totale:

$$Q \equiv K_{\text{final}} - K_{\text{initial}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2}_{K_{1f}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2}_{K_{2f}} - \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2}_{K_{1i}}$$

Pour un choc entre deux boules (par exemple de billard), il faudrait en plus tenir compte de la conservation du moment cinétique, et de l'énergie cinétique de rotation !
 $(K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2)$

Choc élastique entre deux points matériels

- Définition choc élastique: énergie cinétique conservée $\Leftrightarrow Q=0$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \text{élimination } \theta_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2 v_{1i} v_{1f} \cos\theta_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2f}^2$$

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}} \right)$$

élimination v_{2f}^2

Conditions à satisfaire: $(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\dots}) \geq 0$ et argument de la racine ≥ 0

a) si $m_1 < m_2$:

– signe « - » exclu et l'angle θ_1 n'est pas restreint: $0 \leq \theta_1 \leq \pi$

b) si $m_1 > m_2$:

– les deux signes sont possibles, mais l'angle θ_1 doit satisfaire à:

$$\cos^2\theta_1 > 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2} \text{ et } \cos\theta_1 > 0 \Rightarrow$$

$$\theta_1 < \theta_1^{\max} \text{ où } \sin\theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1}$$

(Exemples: chocs entre balle de ping-pong et boule de pétanque)

Choc élastique entre deux points matériels (2)

- Remarques:
 - Le problème n'est pas complètement soluble sans information sur la force
 - La donnée de la direction finale de la particule 1 permettrait de tout connaître (on obtiendrait $|\vec{v}_{1f}|$ et \vec{v}_{2f} à partir des 4 équ. de conservation)
- Cas particulier d'une collision unidimensionnelle
(entièlement soluble avec les lois de conservation)
 - On reprend les résultats précédents avec $\theta_1 = \theta_2 = 0$, mais v_{1i} , v_{1f} , et v_{2f} sont maintenant les composantes sur l'axe x (et non plus les normes)
 - On obtient:

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} v_{1f} = v_{1i} \\ v_{2f} = 0 \end{cases}}_{\text{pas de choc !}} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$$

- Cas limites:
 - Si $m_1 = m_2$: $v_{1f} = 0$ et $v_{2f} = v_{1i}$ échange des vitesses
 - Si $m_1 \ll m_2$: $v_{1f} \approx -v_{1i}$ et $v_{2f} \approx 0$ rebond sur une masse « infinie »
 - Si $m_1 \gg m_2$: $v_{1f} \approx v_{1i}$ et $v_{2f} \approx 2v_{1i}$ collision avec masse négligeable

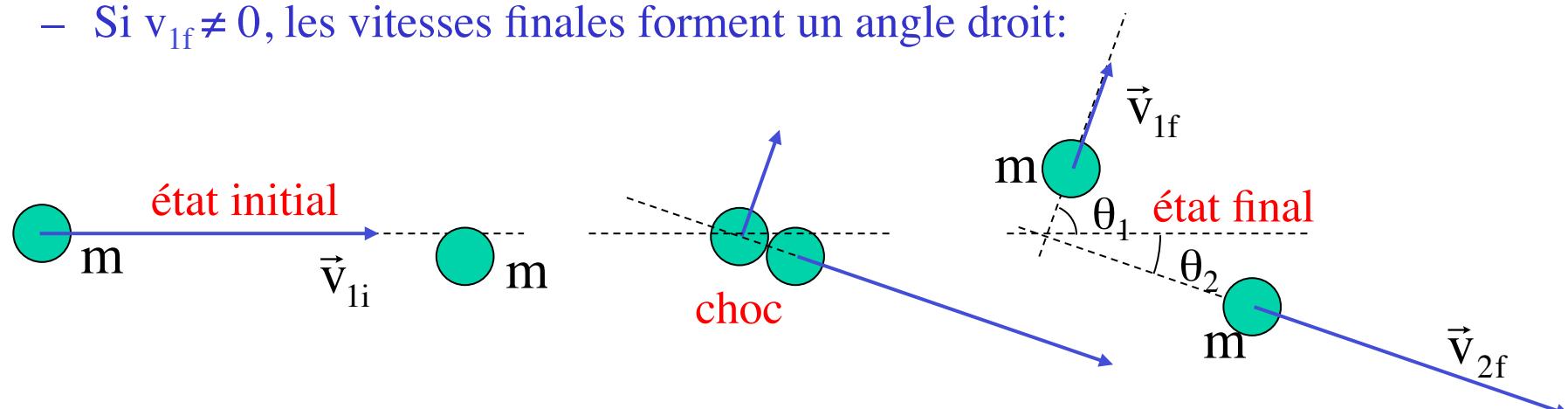
Choc élastique entre deux points matériels (3)

- Cas particulier $m_1=m_2=m$:

- Par exemple boules de billard sans frottements (pour autant que l'approximation du point matériel soit valable, c-à-d billard sans « effets »)

- On obtient: $\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{1}{2}(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1}) \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = 0 : \text{échange des vitesses} \\ v_{1f} = v_{1i} \cos\theta_1 \end{cases}$

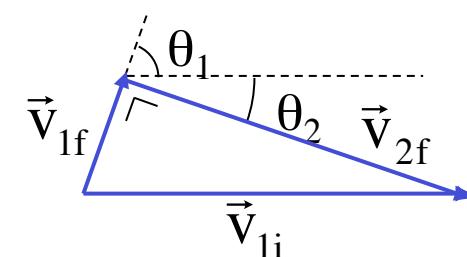
- Si $v_{1f} \neq 0$, les vitesses finales forment un angle droit:



conservation de \vec{p}_{tot} : $\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$ \Rightarrow triangle

conservation de K_{tot} : $v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$ \Rightarrow triangle rectangle

$$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \pi/2$$



Choc inélastique entre deux points matériels

- Définition choc inélastique: énergie cinétique non conservée
 - $Q > 0$: la collision dégage de l'énergie cinétique (exo-énergétique)
 - $Q < 0$: la collision absorbe de l'énergie cinétique (endo-énergétique)
- La variation d'énergie interne du système vaut $-Q$ (par conservation de l'énergie totale):
 - elle peut conduire à un changement de l'identité des particules en interaction, ou du nombre de particules dans l'état final; exemples:
 - Choc entre un marteau et un verre de cristal
 - Collisions entre particules élémentaires, par ex. $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$
- Cas particulier: choc mou (les deux points matériels s'accroissent):
 - $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V}$ = vitesse du centre de masse
 - $m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$
 - $Q \equiv K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right) v_{1i}^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 < 0$

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V} = \text{vitesse du centre de masse}$$

démonstration: rail à air

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

$$Q \equiv K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} - m_1 \right) v_{1i}^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 < 0$$

Vitesse relative et coefficient de restitution

- Quantité de mouvement transférée de m_2 à m_1 :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= m_1 \vec{v}_{1f} - m_1 \vec{v}_{1i} & [\Delta \vec{p} = -(m_2 \vec{v}_{2f} - m_2 \vec{v}_{2i}) \text{ par conservation de } \vec{p}_{\text{tot}}] \\ &= m_1 \left(\vec{V}_f + \frac{\mu}{m_1} \vec{v}_f \right) - m_1 \left(\vec{V}_i + \frac{\mu}{m_1} \vec{v}_i \right) & \left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_i = \vec{V}_f : \text{vitesse du centre de masse} \\ \vec{v}_i \text{ et } \vec{v}_f : \text{vitesses relatives initiale et finale} \\ \text{de } m_1 \text{ par rapport à } m_2 \\ \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) : \text{masse réduite} \\ M = m_1 + m_2 : \text{masse totale} \end{array} \right. \\ &= \mu (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \end{aligned}$$

- Variation d'énergie cinétique totale:

$$\begin{aligned} Q &= K_{\text{tot},f} - K_{\text{tot},i} = \left(\frac{1}{2} M V_f^2 + \frac{1}{2} \mu v_f^2 \right) - \left(\frac{1}{2} M V_i^2 + \frac{1}{2} \mu v_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu (v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}_f - \vec{v}_i) \cdot (\vec{v}_f + \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \Delta \vec{p} \cdot (\vec{v}_f + \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \Delta \vec{p} \cdot \vec{v}_i (1 - e) \end{aligned}$$

- On a défini $e = \text{coefficient de restitution}$

$\text{choc élastique } (Q = 0) \Leftrightarrow e = 1$
 $\text{choc mou } (\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f}) \Rightarrow e = 0$

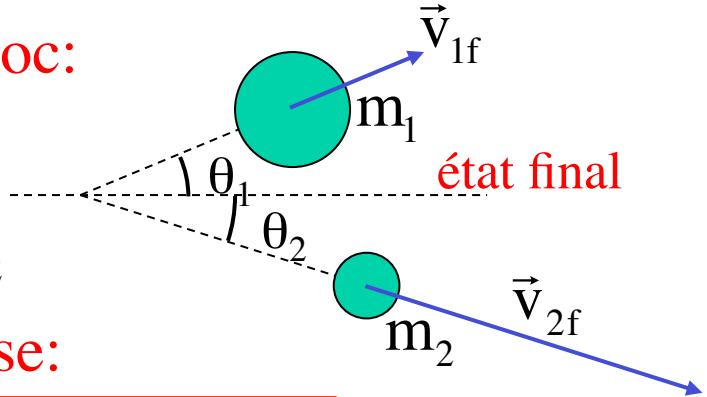
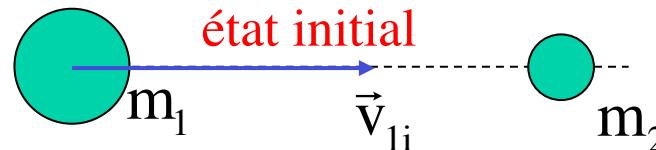
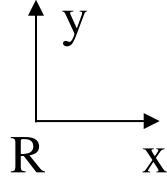
$\vec{v}_f \cdot \hat{u} = -e \vec{v}_i \cdot \hat{u} \quad \text{où } \hat{u} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta p}$

Vitesse relative
d'éloignement
selon direction Δp
dans l'état final

Vitesse relative de
rapprochement
selon direction Δp
dans l'état initial

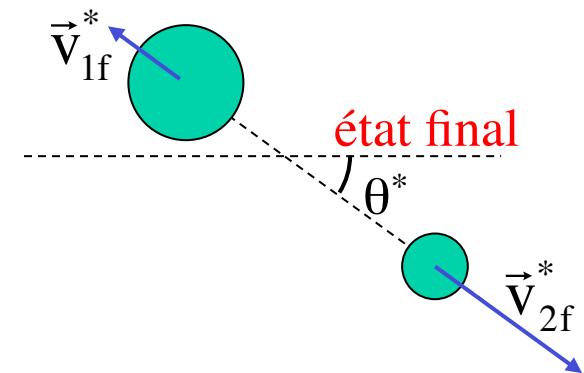
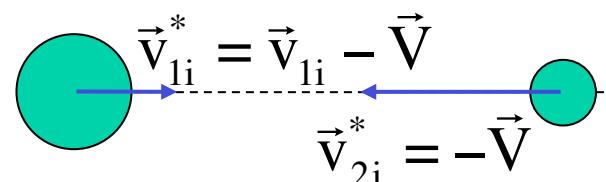
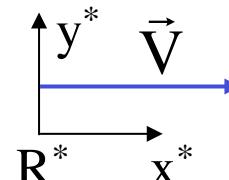
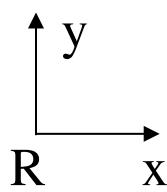
Collision vue du centre de masse

- Dans le référentiel R où $v_{2i} = 0$ avant le choc:



- Dans le référentiel R^* lié au centre de masse:

$$m_1 \vec{v}_{1i}^* + m_2 \vec{v}_{2i}^* = m_1 \vec{v}_{1f}^* + m_2 \vec{v}_{2f}^* = \vec{p}_{\text{tot}}^* = \vec{P}^* = 0$$



- Variation d'énergie cinétique:

$$Q = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}_f^2 - \vec{v}_i^2) \quad \left(\text{si } \theta^* = 0, \text{ alors } v_f = -e v_i \text{ et } Q = \frac{1}{2} \mu (e^2 - 1) v_i^2 \right)$$

- Si un processus demande l'absorption d'une énergie E_{int} :

au seuil: $-E_{\text{int}} = Q = -\frac{1}{2} \mu \vec{v}_i^2 = -\frac{1}{2} \mu \vec{v}_{1i}^2 \Rightarrow K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1i}^2 = \frac{m_1}{\mu} E_{\text{int}} = E_{\text{int}} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$

Système de masse variable (fusée)

- On considère, au temps t , la fusée et son gaz:

$$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$$

$$\begin{aligned}\vec{p}(t + dt) &= (m(t) + dm) (\vec{v}(t) + d\vec{v}) - dm (\vec{v}(t) + \vec{u}) \\ d\vec{p} &= \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = m(t) d\vec{v} - dm \vec{u}\end{aligned}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m(t) \vec{a}(t) - \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

- Fusée au décollage ($g \sim \text{constant}$):

$$\vec{F}(t) = m(t) \vec{g} \Rightarrow m(t) \vec{a}(t) = m(t) \vec{g} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

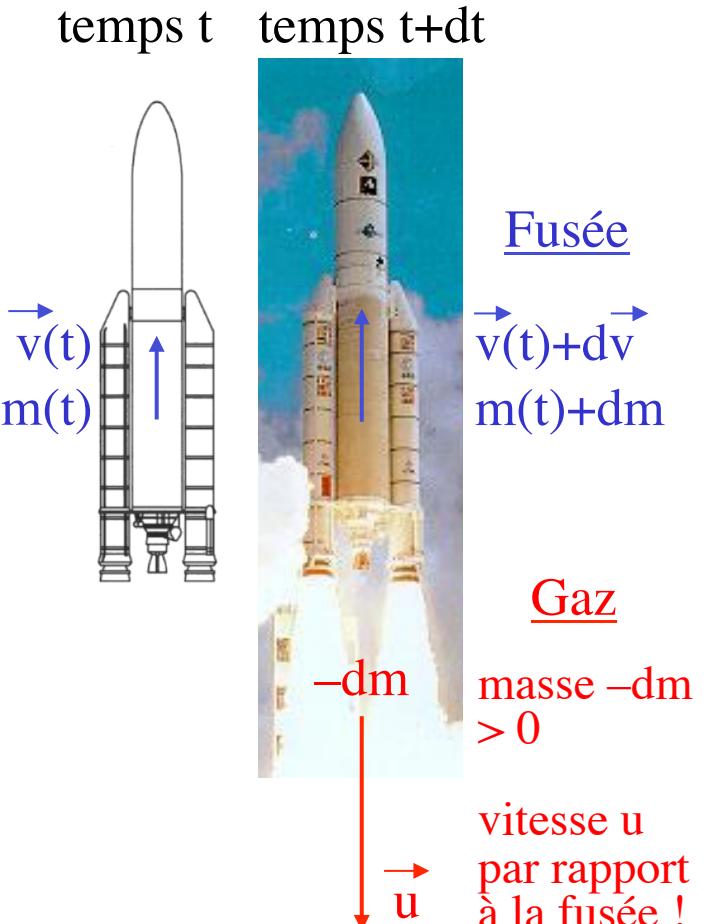
Projection sur axe vertical:

$$m(t) a(t) = -m(t) g - \frac{dm}{dt} u$$

Condition de démarrage ($t=0$):

$$a(0) > 0 \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{dm}{dt} \right|}_{\text{poussée}} u > \underbrace{m(0) g}_{\text{poids}}$$

$$\text{Si } u=\text{constante, on obtient: } v(t) - \underbrace{v(0)}_0 = -gt - u \ln \frac{m(t)}{m(0)} \Rightarrow v(t) = u \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt$$



Sixième partie: Cinématique et dynamique du corps solide indéformable

Notions abordées:

- Cinématique du solide, distribution des vitesses, angles d'Euler
- Dynamique du solide, effets gyroscopiques
- Tenseur d'inertie, axe de rotation fixe, axe de rotation en mouvement, équations d'Euler

Buts:

- apprendre à décrire le mouvement d'un corps solide
- savoir écrire les équations du mouvement d'un corps solide (théorèmes du centre de masse et du moment cinétique)

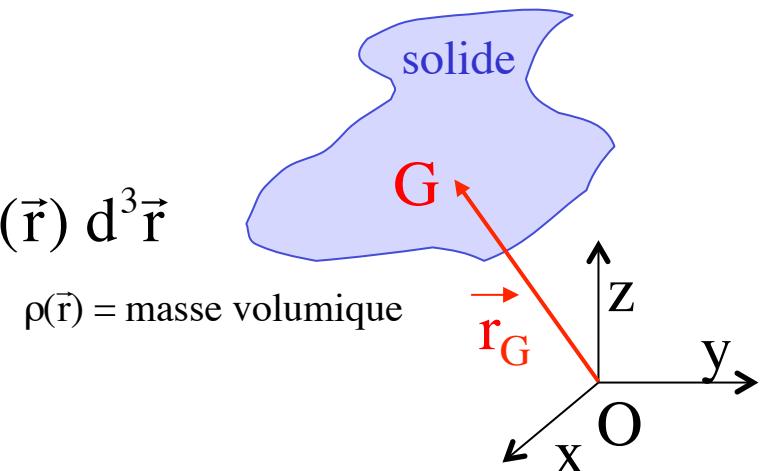
Corps solide indéformable

- Définition: solide indéformable = système de points matériels qui sont fixes les uns par rapport aux autres
- Remarques:
 - Tous les corps solides réels se déforment sous l'effet des forces appliquées; le solide indéformable est un modèle mathématique (bonne approximation si les déformations sont petites par rapport aux dimensions du solide).
 - Le nombre N de points matériels peut être très grand ($N \rightarrow \infty$); on remplace alors les sommes sur ces N points par des intégrales. Par exemple, pour le centre de masse:

Exemple
au tableau

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} m_{\alpha}$$

$$\rightarrow \frac{1}{M} \int \vec{r} dm(\vec{r}) = \frac{1}{M} \int_{\text{volume du solide}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$



- Position d'un solide:
 - 6 coordonnées indépendantes
 - par exemple, on repère 3 points non colinéaires du solide:
 - 3 coord. pour le point 1
 - 2 coord. pour le point 2 (à une distance fixe du premier)
 - 1 coord. pour le point 3 (à des distances fixes des deux premiers)
 - 0 coord. pour tous les autres points (fixes par rapport aux trois premiers)

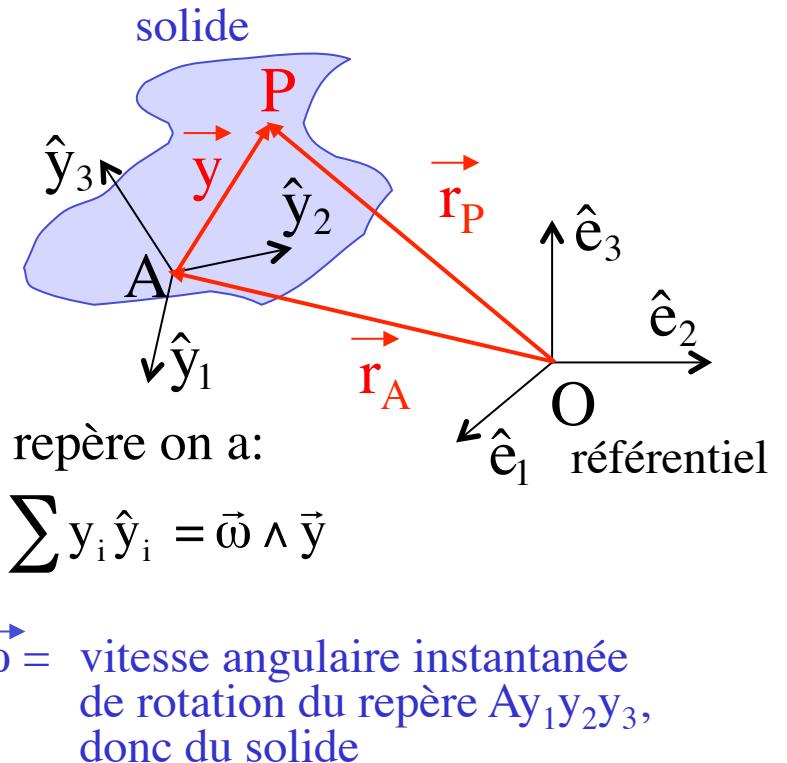
Vitesse et accélération d'un point du solide

- Repère lié au référentiel $Oe_1e_2e_3$
- Repère lié au solide $Ay_1y_2y_3$
(A = point quelconque du solide)

- Tous les points P du solide sont immobiles dans ce repère
- Pour tout vecteur \vec{y} immobile dans ce repère on a:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum y_i \hat{y}_i \right) = \sum y_i \underbrace{\frac{d\hat{y}_i}{dt}}_{\vec{\omega} \wedge \hat{y}_i} = \vec{\omega} \wedge \sum y_i \hat{y}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{y}$$

formule de Poisson



- Pour tout point P du solide:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_A + \overrightarrow{AP}) = \vec{v}_A + \frac{d}{dt} \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})$$

avec $\vec{\omega}$ indépendant de P, de A et du choix du repère $Ay_1y_2y_3$

Mouvement instantané d'un solide

- Soit A un point quelconque du solide:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad \forall P \in \text{solide} \quad \text{où } \vec{\omega} = \begin{array}{l} \text{vitesse instantanée de} \\ \text{rotation du solide} \end{array}$$

- Le mouvement instantané du solide est l'un des quatre suivants:

- $\vec{\omega} = 0$ et $\vec{v}_A = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P = 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$ solide au repos
- $\vec{\omega} = 0$ et $\vec{v}_A \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A \neq 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$ solide en translation
- $\vec{\omega} \neq 0$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$ solide en rotation (axe // $\vec{\omega}$)
- $\vec{\omega} \neq 0$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0 \quad \forall P \Leftrightarrow$ solide en mvt hélicoïdal
(rotation d'axe // $\vec{\omega}$ + translation // $\vec{\omega}$)

- Si $\omega \neq 0$, un point C sur l'axe instantané de rotation est donné par:

En effet :

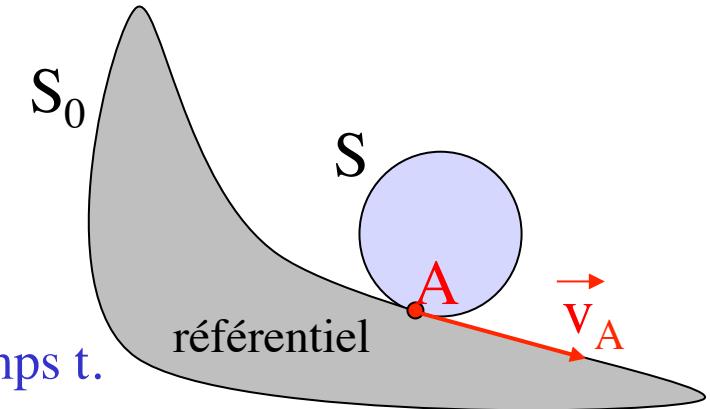
$$\overrightarrow{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\vec{\omega}^2}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{v}_A + \hat{\omega} \wedge (\hat{\omega} \wedge \vec{v}_A) = \vec{v}_A + (\hat{\omega} \cdot \vec{v}_A) \hat{\omega} - (\hat{\omega} \cdot \hat{\omega}) \vec{v}_A = (\hat{\omega} \cdot \vec{v}_A) \hat{\omega}$$

$$\vec{v}_C = \begin{cases} 0 & \text{si solide en rotation} \\ \parallel \vec{\omega} & \text{si solide en mvt hélicoïdal} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} \quad \forall P \in \text{solide}$$

Solides en contact

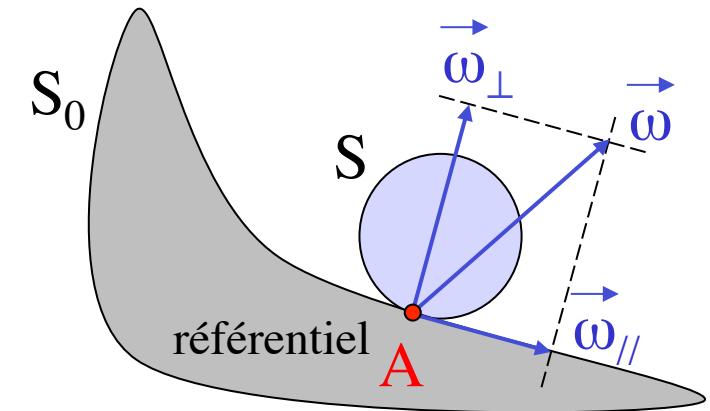
- Soient deux solides S et S_0 restant constamment en contact
 - On choisit l'un des deux solides, S_0 , comme référentiel
 $\Rightarrow S_0$ est immobile et on décrit le mouvement de S par rapport à S_0
 - On admet que le contact est ponctuel.
Soit A le point de S en contact avec S_0 au temps t .



- $\vec{v}_A = \text{vitesse de glissement}$ (de S par rapport à S_0)
- Condition du **roulement sans glissement**: $\vec{v}_A = \vec{0}$

- A est alors sur l'axe instantané de rotation

- Vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$
 - Décomposition en composantes parallèle et perpendiculaire au plan tangent commun à S et S_0 en A :
 $\vec{\omega}_{//} = \text{vitesse angulaire de roulement}$
 $\vec{\omega}_{\perp} = \text{vitesse angulaire de pivotement}$

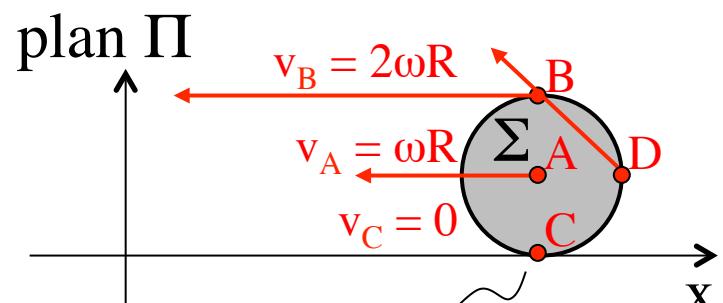
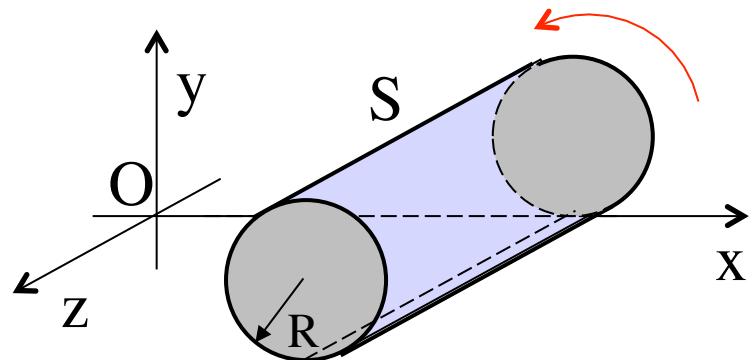


Mouvement « plan-sur-plan »

- Définition: mouvement tel qu'un plan du solide S reste constamment dans un plan fixe Π du référentiel
 \Leftrightarrow
à tout instant les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe Π
- Conséquences:
 - le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ est perpendiculaire à Π
 - on est ramené à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide Σ (section de S) sur un plan Π ;
 - dans ce plan, il y a un centre instantané de rotation (si $\omega \neq 0$)
- Lieu géométrique des centres instantanés de rotation:
 - dans le référentiel lié à Π : la base
 - dans le référentiel lié à Σ : la roulante

« Tout mouvement plan-sur-plan est un roulement sans glissement de la roulante sur la base »

Exemple: cylindre sur un plan sans glissement



Base = axe x
Roulante = circonférence du disque Σ

- En trois dimensions:

- Un cylindre S de rayon R roule sans glisser sur le plan Oxz, avec la génératrice de contact parallèle à l'axe z
- Il s'agit d'un mouvement plan-sur-plan: à chaque instant, toutes les vitesses sont dans le plan Oxy \Leftrightarrow la base du cylindre reste constamment parallèle au plan Oxy
- $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ = vitesse angulaire de roulement (il n'y a pas de pivotement)

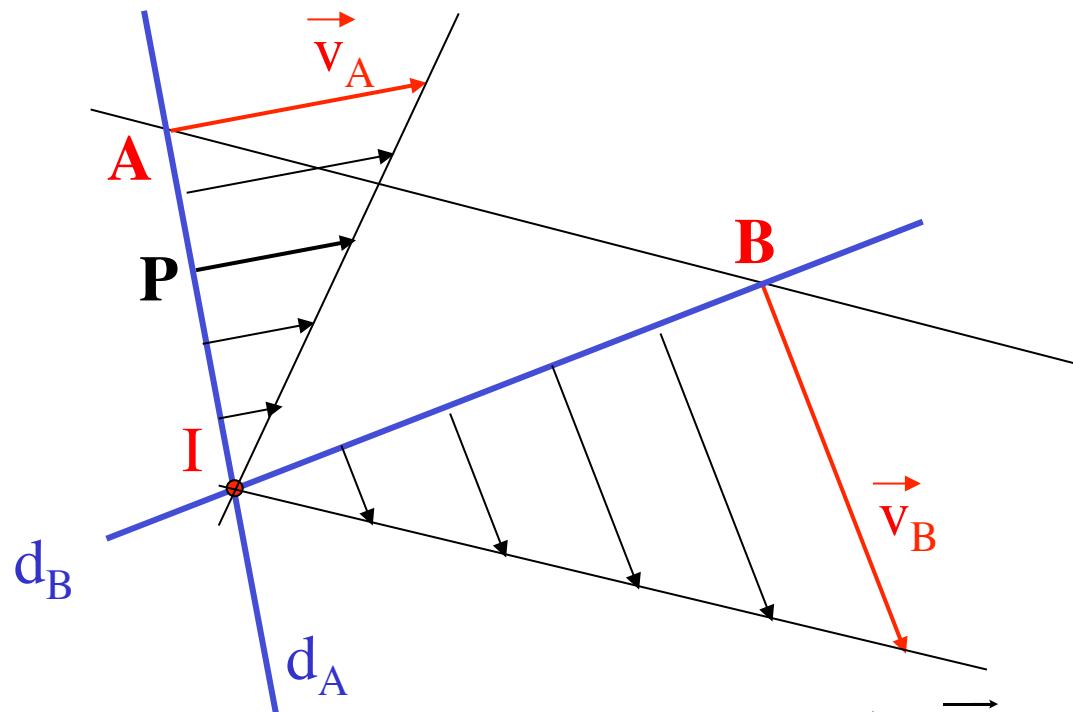
- Dans le plan Oxy (plan Π)

- On considère la section Σ du cylindre
- Le point de contact C a une vitesse nulle (pas de glissement); c'est le centre instantané de rotation
- $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} \quad \forall P \in \Sigma$
par ex. $\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AP}}$$

Les projections des vitesses de deux points quelconques du solide sur la droite qui les relient sont égales

Détermination du centre instantané de rotation pour un solide en mouvement plan-sur-plan dont on connaît les vitesses de deux points A et B



d_A = droite passant par A et perpendiculaire à v_A

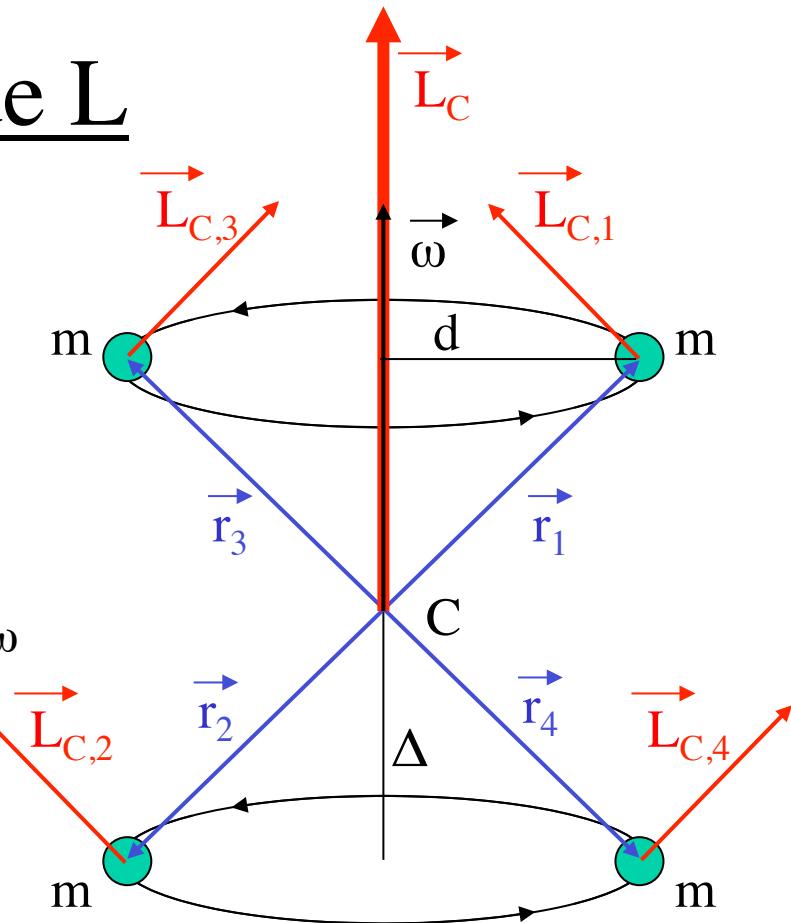
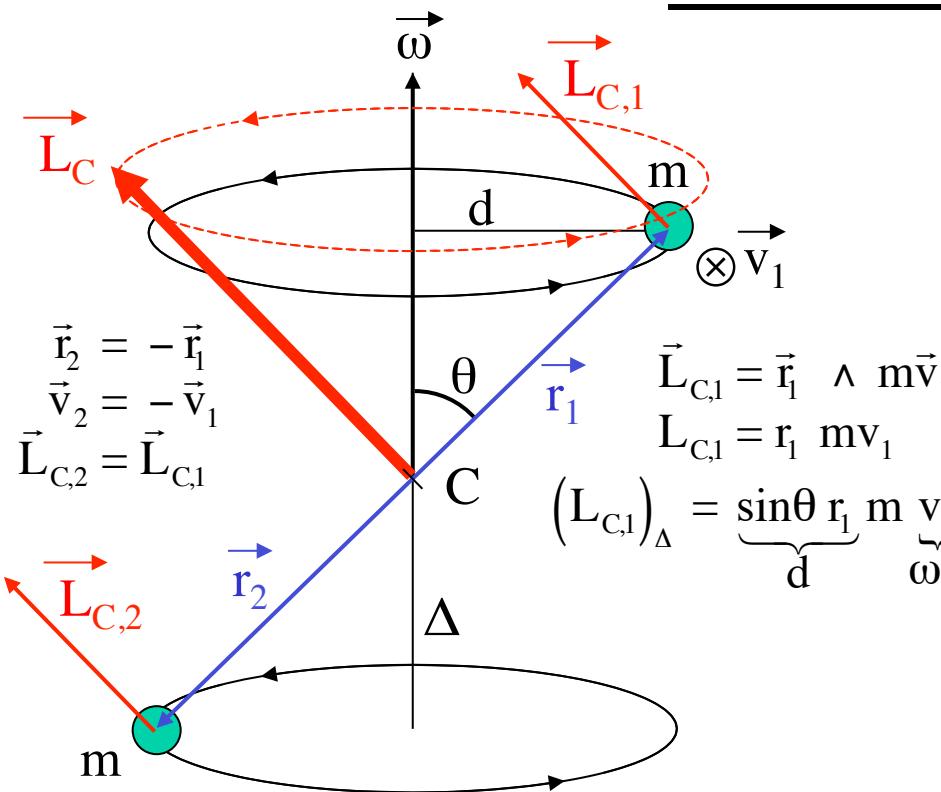
Tous les points P de cette droite ont des vitesses ayant une projection nulle sur cette droite (égale à celle de v_A)

Idem pour la droite d_B

Le point commun à d_A et d_B a donc une vitesse nulle. C'est le centre instantané de rotation I.

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP} \Rightarrow v_P = \omega \overline{IP} \Rightarrow \frac{v_P}{v_A} = \frac{\overline{IP}}{\overline{IA}}$$

Direction de \vec{L}



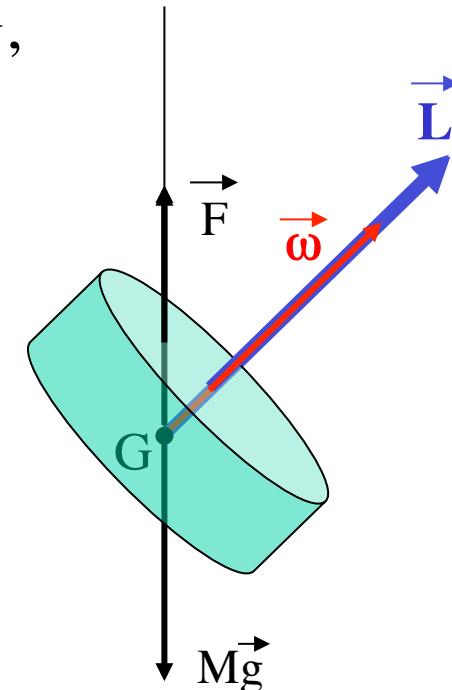
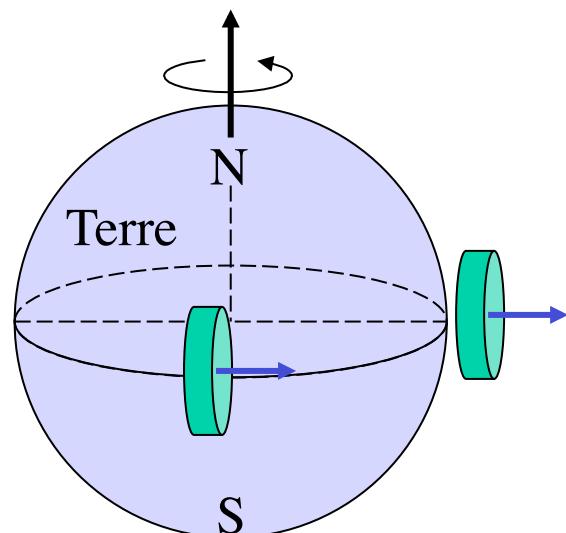
- Deux masses m telles que $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ par rapport à C
- Axe de rotation Δ par C faisant un angle θ quelconque avec \vec{r}_1
- $L_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{\omega} = 2md^2\omega = I_\Delta\omega$
 \vec{L}_C n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$

- On ajoute deux masses m supplémentaires, de sorte à faire un **système symétrique par rapport à l'axe de rotation**
- $L_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{\omega} = 4md^2\omega = I_\Delta\omega$
 \vec{L}_C est parallèle à $\vec{\omega}$: $\boxed{\vec{L}_C = I_\Delta\vec{\omega}}$

Gyroscope

- Solide « suspendu » à son centre de masse G, libre d'adopter n'importe quelle orientation, en rotation autour d'un axe de symétrie (fixe par rapport au solide) tel que $\vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega}$
- Théorème du moment cinétique:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_G = \overbrace{\text{constante}} \\ \text{donc } \vec{\omega} = \overbrace{\text{constante}}$$

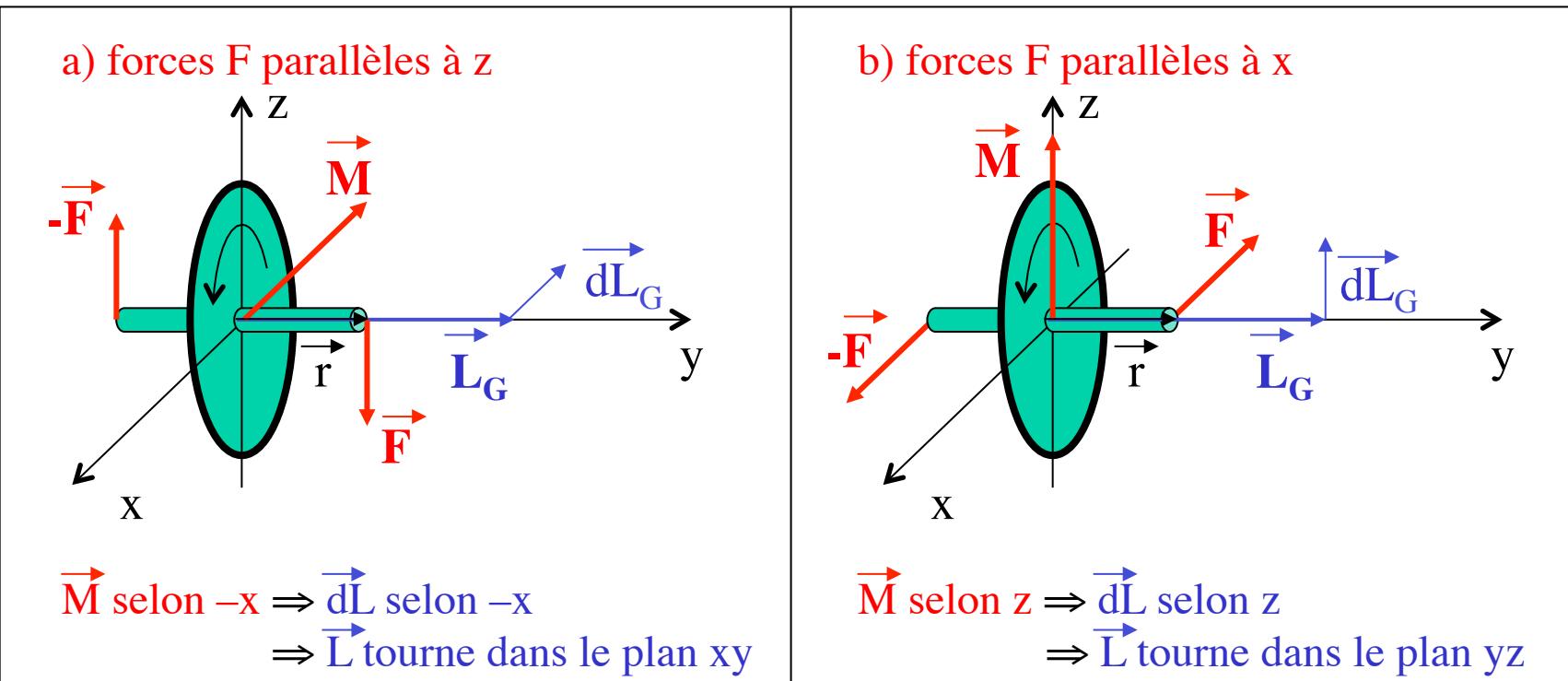


- Gyroscope à l'équateur:
 - axe de rotation horizontal selon la direction est-ouest
 - 6 heures plus tard, l'axe est devenu vertical (à cause du mouvement de la Terre)

démos: roue de vélo simple
gyroscope de Magnus

Effets gyroscopiques (1)

- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$
 - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Ox ? ou de Oz ?



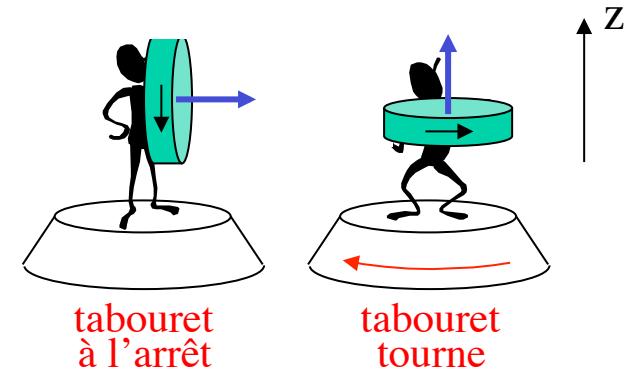
Théorème du
moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = (\vec{r} \wedge \vec{F}) + (-\vec{r} \wedge -\vec{F}) = 2 \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Effets gyroscopiques (2)

démo: roue de vélo et tabouret

- Pourquoi le tabouret tournant (à l'arrêt quand l'axe de la roue est horizontal) se met-il en rotation quand on force l'axe de la roue à être vertical ?



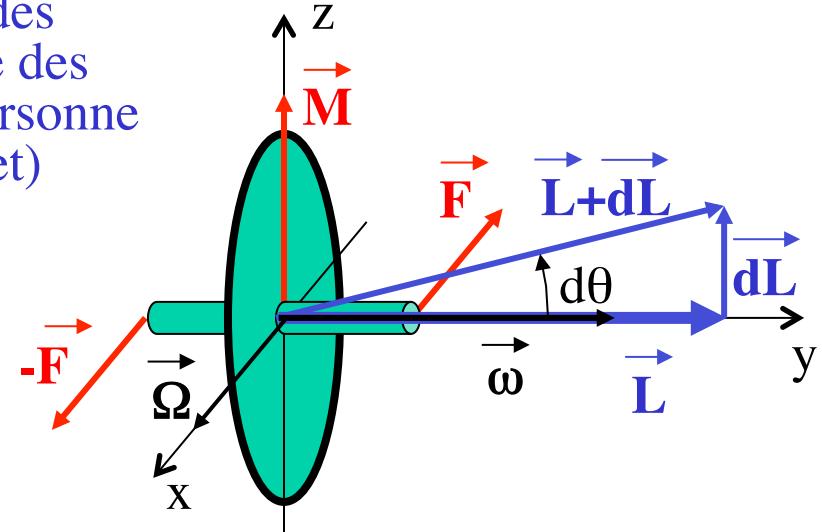
- Conservation de \vec{L} : si le tabouret peut tourner sans frottements sur son socle, la composante z du moment cinétique du système roue+personne+tabouret est conservée ($L_{z,\text{tot}} = 0$)
- 3ème loi: si la personne applique des forces sur la roue, la roue applique des forces égales et opposées sur la personne (qui la font tourner sur son tabouret)

$$M = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\vec{L} d\theta}{dt} = \vec{L} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}$$

Attention: axe de rotation modifié !

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \cong \vec{\omega}$$



Effets gyroscopiques (3)

demos: roue sur support réglable toupie

- Toupie symétrique avec un point fixe:

- Le moment du poids par rapport au point fixe est constamment perpendiculaire au moment cinétique (supposé selon l'axe de rotation propre) \Rightarrow la norme du moment cinétique reste constante: $L_c = I_\Delta \omega$
- L'axe de rotation propre a un **mouvement de précession** autour de l'axe vertical (de vitesse angulaire Ω)

$$\vec{M}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_c$$

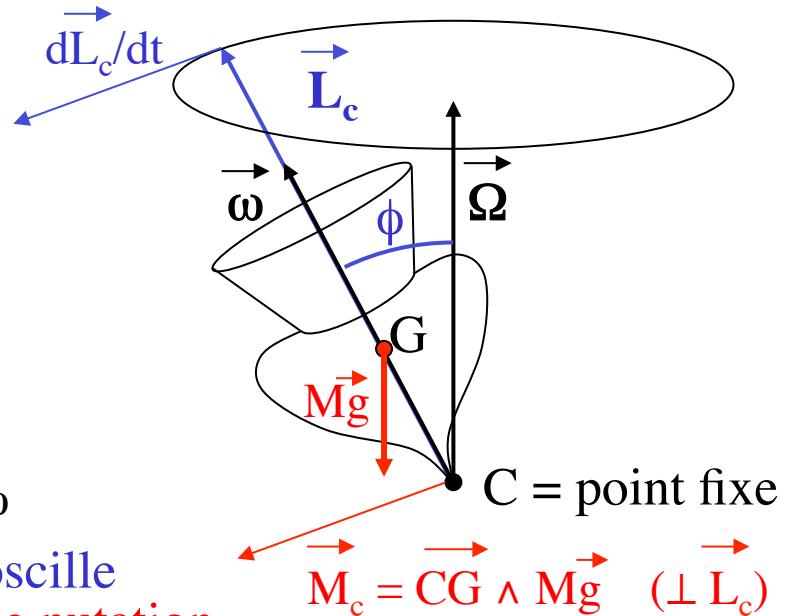
$$\overline{CG} Mg \sin\phi = \Omega L_c \sin\phi$$

$$\Omega = \frac{Mg \overline{CG}}{L_c} = \frac{Mg \overline{CG}}{I_\Delta \omega}$$

- Note: on a négligé le moment cinétique causé par la rotation Ω !
Résultat approximatif valable si $\Omega \ll \omega$

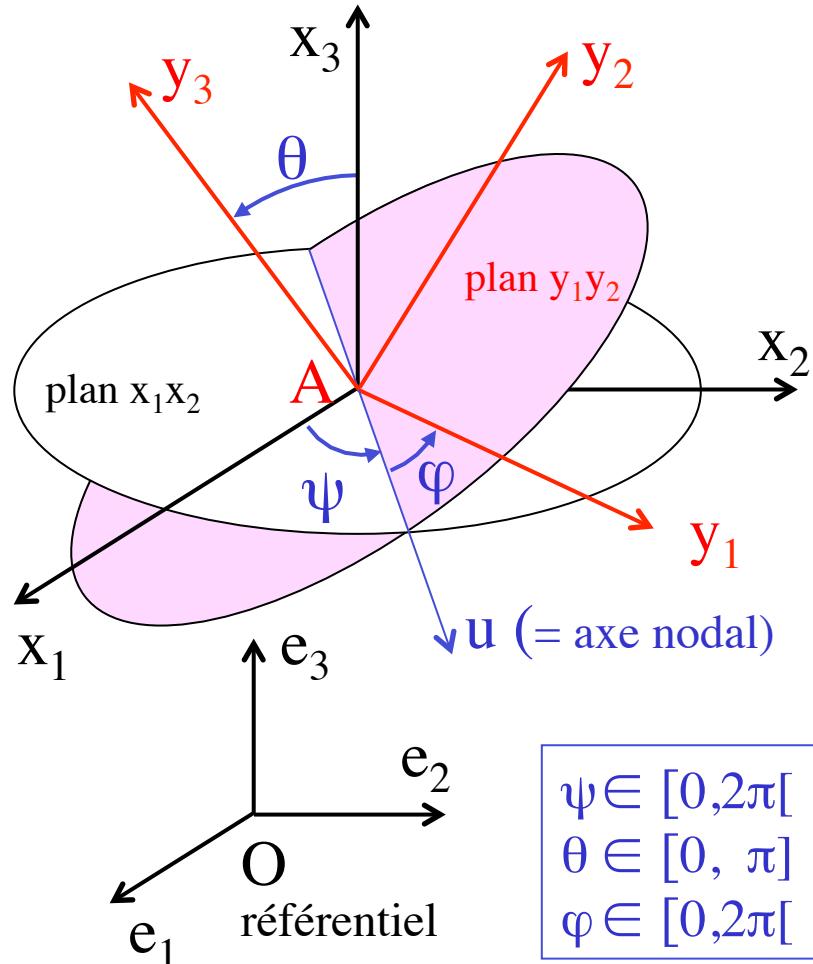
- Cas général: ϕ n'est pas constant mais oscille entre deux extrêmes et un **mouvement de nutation** se superpose encore

- Toupie sans point d'appui fixe, avec frottement sur le sol



Position d'un solide et angles d'Euler

- Repère lié au référentiel $Oe_1e_2e_3$
- Repère lié au solide $Ay_1y_2y_3$
- Repère $Ax_1x_2x_3$ tel que $x_i \parallel e_i$



- La position d'un point P du solide est donnée par

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \sum a_i(t) \hat{e}_i + \sum y_i \hat{y}_i(t)$$

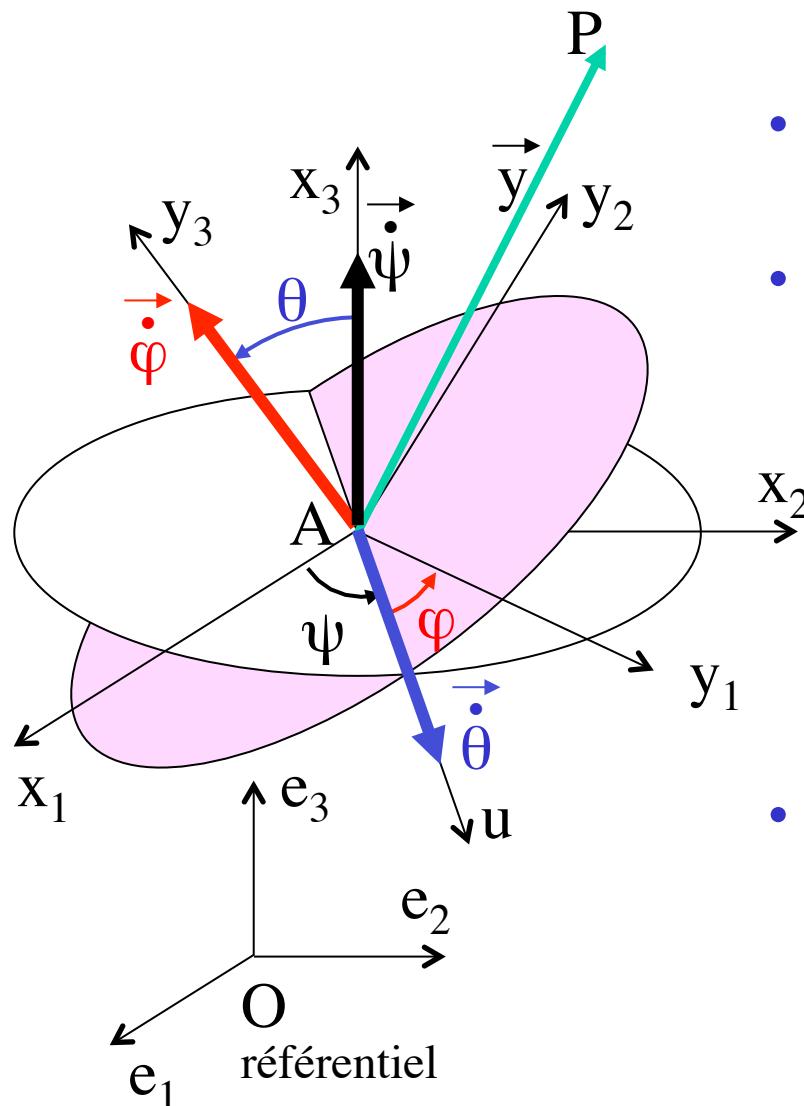
c'est-à-dire par les trois coordonnées du point A dans le repère $Oe_1e_2e_3$ et par l'orientation du repère $Ay_1y_2y_3$ par rapport au repère $Ax_1x_2x_3$.

- Cette orientation peut être caractérisée par les **trois angles d'Euler (ψ, θ, φ)**; on passe de $Ax_1x_2x_3$ à $Ay_1y_2y_3$ par les trois rotations successives suivantes:

- Rotation d'angle ψ autour de l'axe x_3 amenant x_1 sur u (=axe nodal)
- Rotation d'angle θ autour de l'axe u amenant x_3 sur y_3
- Rotation d'angle φ autour de l'axe y_3 amenant u sur y_1

$\vec{\omega}$ en fonction des angles d'Euler

démo: gyroscope à air
roue suspendue à un fil



- Un point P du solide est fixe par rapport au repère $Ay_1y_2y_3$:
 $\overrightarrow{AP} \cdot \hat{y}_i = \text{constante}$
- Vitesse de P par rapport à $Oe_1e_2e_3$:
 $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \frac{d}{dt} \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$
- Vitesse de P par rapport à $Ax_1x_2x_3$:

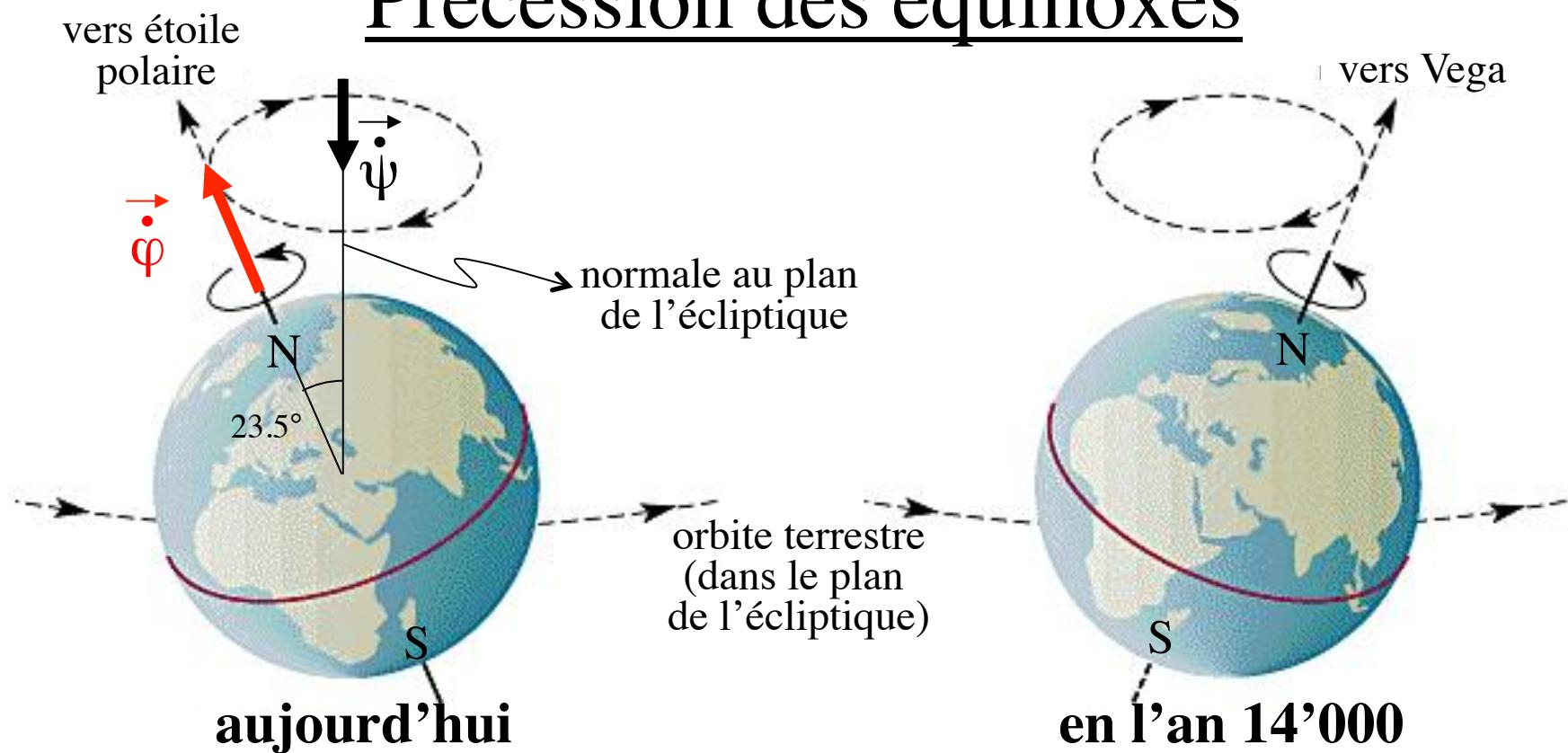
$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{AP} = \frac{d\vec{y}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \psi} \dot{\psi}}_{\vec{v}_\psi} + \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \theta} \dot{\theta}}_{\vec{v}_\theta} + \underbrace{\frac{\partial \vec{y}}{\partial \varphi} \dot{\varphi}}_{\vec{v}_\varphi}$$
 - vitesse de P si ψ varie seul: $\vec{v}_\psi = \dot{\psi} \hat{x}_3 \wedge \overrightarrow{AP}$
 - vitesse de P si θ varie seul: $\vec{v}_\theta = \dot{\theta} \hat{u} \wedge \overrightarrow{AP}$
 - vitesse de P si φ varie seul: $\vec{v}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{y}_3 \wedge \overrightarrow{AP}$
- Donc: $\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{u} + \dot{\varphi} \hat{y}_3 = \boxed{\vec{\psi} + \vec{\theta} + \vec{\varphi}}$

$\vec{\psi}$ = vitesse angulaire de précession

$\vec{\theta}$ = vitesse angulaire de nutation

$\vec{\varphi}$ = vitesse angulaire de rotation propre

Précession des équinoxes



- Mise en évidence déjà par Hipparque (~ 135 av. J-C):
 - La position du Soleil à l'équinoxe de printemps se déplace par rapport aux étoiles fixes de 1.5° par siècle
- Précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique: période $\sim 26'000$ ans
- Egalement petite nutation de $9.2''$ d'arc: période ~ 19 ans

Cause = moment des forces exercées par la lune et le soleil sur la Terre par rapport au centre de masse de la Terre

Au tableau

pour un système quelconque (pas forcément un solide)

Moment cinétique par rapport à un point quelconque

- Le moment cinétique \vec{L}_Q est défini par rapport à un point O du référentiel lié au laboratoire. Si on choisit un autre point de référence Q quelconque (au repos ou en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire):

$$\begin{aligned}\vec{L}_Q &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{QP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \\ &= \overrightarrow{QO} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \underbrace{\vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}_{\vec{L}_{O,\alpha}}\end{aligned}$$

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_O + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{Mv}_G$$

Théorème du transfert

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{QO} \wedge \vec{Mv}_G) = \vec{M}_O^{\text{ext}} + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \wedge \vec{Mv}_G$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{\text{ext}} + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \overrightarrow{QO} \wedge \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\ &= \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}_{\alpha}) \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{QP}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{Q,\alpha}^{\text{ext}} = \vec{M}_Q^{\text{ext}}\end{aligned}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point Q quelconque

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{M}_Q^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \wedge \vec{Mv}_G$$

- Si et seulement si $\vec{v}_Q \parallel \vec{v}_G$, en particulier si $Q = G$ ou $v_Q = 0$ (Q est un point du référentiel)

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{M}_Q^{\text{ext}}$$

Moment cinétique par rapport à un point quelconque (suite)

- Soit un point Q quelconque (qui peut être en mouvement):

$$\begin{aligned}\vec{L}_Q &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{QP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GP}_{\alpha}) \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\overrightarrow{QG} + \vec{r}_{\alpha}^*) \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_G + \vec{v}_{\alpha}^*) \\ &= \overrightarrow{QG} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_G + \overrightarrow{QG} \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^* + \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \wedge \vec{v}_G}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^* \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^*}_{= \vec{L}_G^*}\end{aligned}$$

$$\vec{L}_Q = \overrightarrow{QG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_G^*$$

moment cinétique du centre de masse par rapport à Q

Théorème de König 1

Cas particulier où Q=G:

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

- Le moment cinétique total d'un système par rapport à Q est égal au moment cinétique du centre de masse (CM), considéré comme un point matériel, par rapport à Q plus le moment cinétique du système par rapport au CM. Ce dernier peut être évalué indifféremment dans le référentiel du laboratoire ou celui du CM.

Moment cinétique d'un solide

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge \vec{v}_A + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{AP}_{\alpha} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha})\end{aligned}$$

Rappel:
 $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) =$
 $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\boxed{\vec{L}_A = \underbrace{\overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}_A}_{=} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AP}_{\alpha} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right]}$$

=0 si A=G (centre de masse)
ou si $v_A=0$ (point fixe)

- Par rapport à un point Q quelconque: $\vec{L}_Q = \vec{L}_A + \overrightarrow{QA} \wedge M \vec{v}_G$
(théorème du transfert)

Rappel:

si le solide est « continu », il faut remplacer
la somme sur les points matériels
par une intégrale sur le volume du solide

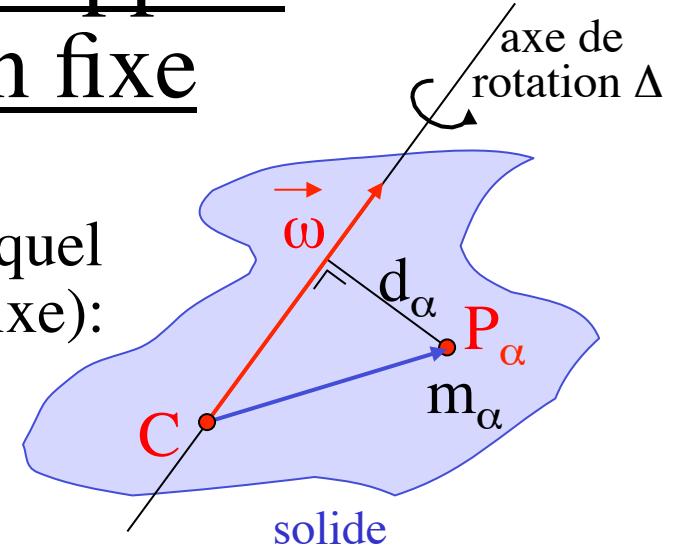
$\rho(\vec{r})$ = masse volumique

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AP}_{\alpha} = \overrightarrow{QP}_{\alpha} - \overrightarrow{QA} \rightarrow \vec{r} - \overrightarrow{QA} \\ m_{\alpha} \rightarrow dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) d^3r \\ \sum_{\alpha} \rightarrow \int_{\text{volume du solide}} \end{array} \right.$$

Moment d'inertie par rapport à un axe de rotation fixe

- Moment cinétique par rapport à n'importe quel point C sur l'axe de rotation Δ (point fixe):

$$\vec{L}_C = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{CP_{\alpha}}^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{CP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{CP_{\alpha}} \right]$$



- Projection sur l'axe de rotation Δ :

$$L_{\Delta} = \vec{L}_C \cdot \frac{\hat{\omega}}{\vec{\omega}/\omega} = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{CP_{\alpha}}^2 - (\overrightarrow{CP_{\alpha}} \cdot \hat{\omega})^2 \right] = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \quad \text{ne dépend plus de } C !$$

- Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ :
- Remarques:

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

$$L_{\Delta} = I_{\Delta} \omega$$

- I_{Δ} ne dépend pas du mouvement (ni du choix d'un repère), mais seulement de la distribution de masse par rapport à l'axe Δ
- Si Δ est un axe de symétrie du solide, alors L_C est parallèle à $\vec{\omega}$
- En général, L_C n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$

Tenseur d'inertie

- Moment cinétique par rapport au centre de masse G: $\vec{L}_G = \sum m_\alpha \left[\overrightarrow{GP}_\alpha^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{GP}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{GP}_\alpha \right]$
- En coordonnées cartésiennes, dans un repère orthonormé quelconque:

$$\begin{aligned}
 L_{G,i} &= \sum_\alpha m_\alpha \left[\overrightarrow{GP}_\alpha^2 \omega_i - \left(\sum_j (\overrightarrow{GP}_\alpha)_j \omega_j \right) (\overrightarrow{GP}_\alpha)_i \right] \\
 &= \sum_\alpha m_\alpha \left[\overrightarrow{GP}_\alpha^2 \sum_j \delta_{ij} \omega_j - \sum_j (\overrightarrow{GP}_\alpha)_j \omega_j (\overrightarrow{GP}_\alpha)_i \right] \\
 &= \sum_j \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \left[\overrightarrow{GP}_\alpha^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP}_\alpha)_i (\overrightarrow{GP}_\alpha)_j \right]}_{= (\tilde{I}_G)_{ij}} \omega_j = \sum_j (\tilde{I}_G)_{ij} \omega_j
 \end{aligned}$$

(éléments d'une matrice 3×3)

- En notation matricielle: $\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$
(vecteur = matrice · vecteur)
- \tilde{I}_G = tenseur d'inertie au centre de masse (G)**

Note: comparaison entre dynamique de translation et de rotation:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{p} = M \vec{v}_G \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} \end{cases}$$

« le tenseur d'inertie est aux rotations ce que la masse est aux translations »

Tenseur d'inertie (suite)

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

\tilde{I}_A = tenseur d'inertie au point A

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right]$$

matrice 3×3

symétrique:

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_A)_{ji}$$

définie positive: $(\tilde{I}_A)_{ii} \geq 0$

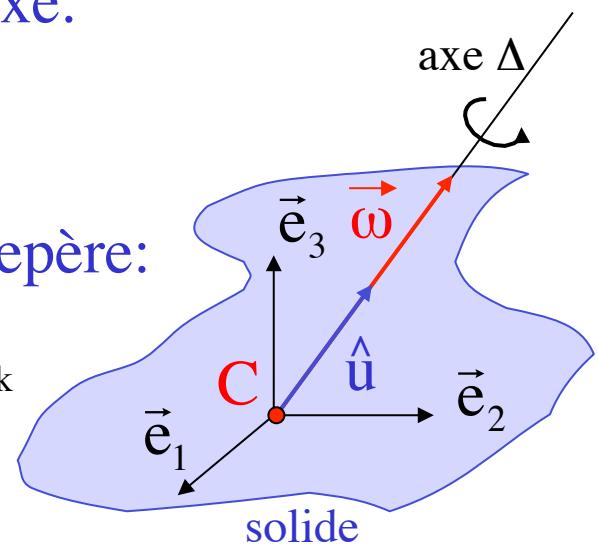
- Moment d'inertie I_{Δ} par rapport à un axe fixe Δ quelconque de direction $\hat{u} = \vec{\omega}/\omega$ passant par un point C fixe:

$$I_{\Delta} = \frac{L_{\Delta}}{\omega} = \frac{\vec{L}_C}{\omega} \cdot \hat{u} = (\tilde{I}_C \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u} = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} u_i u_j$$

- Moment d'inertie I_k par rapport à l'axe k du repère:

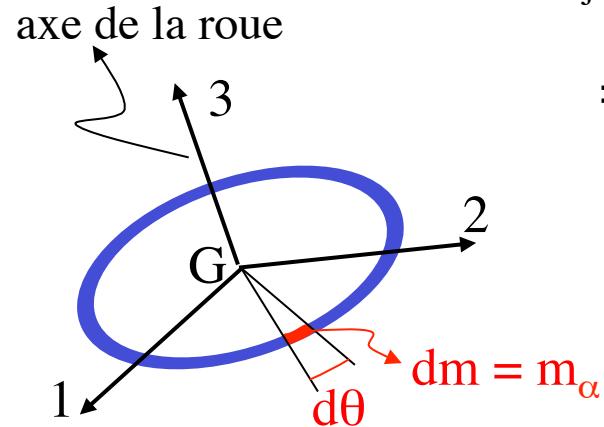
$$\hat{u} = \vec{e}_k \Rightarrow u_i = \delta_{ik} \Rightarrow I_k = \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = (\tilde{I}_C)_{kk}$$

Les éléments diagonaux de la matrice représentant le tenseur d'inertie au point C sont les moments d'inertie par rapport aux axes du repère choisi au point C



Exemple de calcul d'un tenseur d'inertie

- Roue modélisée par un anneau mince de rayon R, de masse M:



$$\begin{aligned}
 (\tilde{I}_G)_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j \right] \\
 &= \int_{\text{roue}} (R^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm = MR^2 \delta_{ij} - \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_i x_j d\theta
 \end{aligned}$$

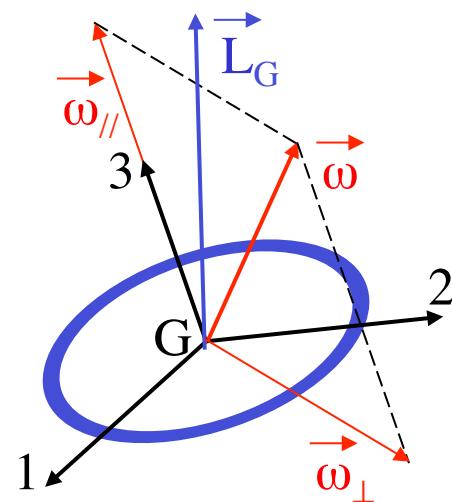
avec $x_1 = R \cos\theta, x_2 = R \sin\theta, x_3 = 0$

$$\text{On obtient } \tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix}$$

- Roue en rotation autour d'un axe quelconque passant par G:

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_G &= \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \tilde{I}_G \cdot (\vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}) \\
 &= MR^2 \left(\frac{1}{2} \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel} \right)
 \end{aligned}$$

- \vec{L} n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$, mais dans le plan défini par $\vec{\omega}$ et l'axe de la roue



Axes principaux d'inertie

- **Théorème:**

- se démontre en algèbre linéaire

Pour tout point C d'un solide, il est toujours possible de choisir un repère orthonormé au point C tel que la matrice représentant le tenseur d'inertie soit diagonale:

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

(\tilde{I}_C est diagonalisable)

- Définitions (au point C):

- Repère d'inertie: repère dans lequel \tilde{I}_C est une matrice diagonale
 - Axes principaux d'inertie: axes du repère d'inertie
 - Moments d'inertie principaux: moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d éléments diagonaux de \tilde{I}_C dans le repère d'inertie

- Dans le repère d'inertie: $\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$

- Axe fixe Δ passant par C: $\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \Delta$ est un axe principal d'inertie

Recherche des axes principaux d'inertie

- Il faut trouver les valeurs et vecteurs propres de \tilde{I}_C , donc les moments d'inertie I et les vecteurs $\vec{\omega}$ tels que :

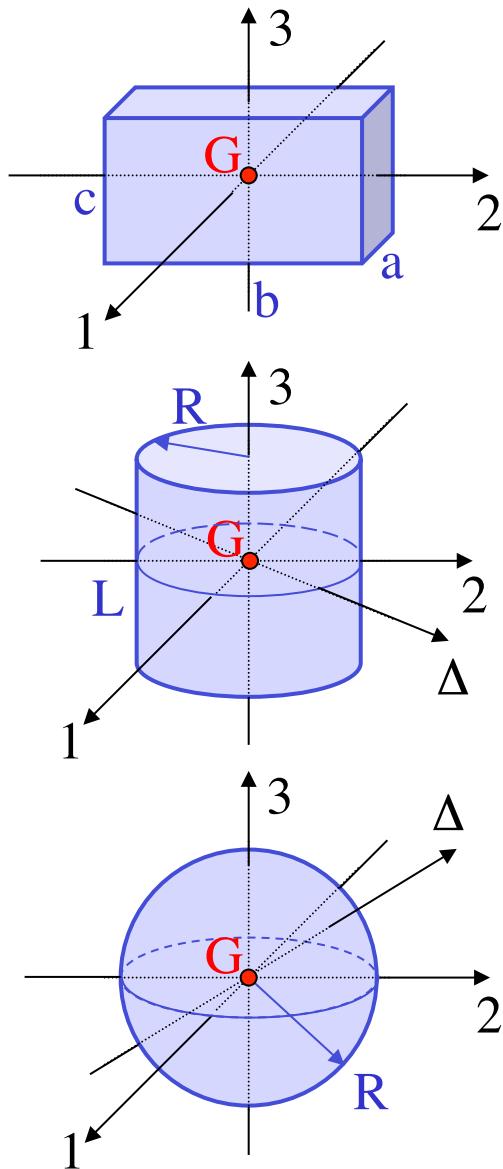
$$\begin{aligned}\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = I \vec{\omega} \Rightarrow (\tilde{I}_C - I) \cdot \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{équation polynomiale de degré 3 pour } I \\ \Rightarrow \text{en général, 3 solutions } I_1, I_2 \text{ et } I_3 \\ \Rightarrow (\tilde{I}_C - I_i) \cdot \vec{e}_i = 0 \text{ donne l'axe principal } \vec{e}_i\end{aligned}$$

- Si le solide est symétrique, les axes suivants sont des axes principaux d'inertie au point C:
 - Tout axe de symétrie passant par C
 - L'axe passant par C et perpendiculaire à un plan de symétrie
 - Tout axe passant par C et perpendiculaire à un axe de symétrie d'ordre $n \geq 3$

démo: anagyre

Cas particuliers simples

Axes et moments d'inertie principaux par rapport au centre de masse G de quelques solides homogènes de masse M



- Parallélépipède rectangle plein (plaquette rectangulaire si a, b ou c → 0):

$$I_1 = \frac{1}{12}M(b^2+c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12}M(c^2+a^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

« toupie asymétrique »:
seulement trois axes principaux par G

démo: hélices bipales et tripales

- Cylindre de révolution (tige si R → 0, disque si L → 0):

plein: $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, I_3 = \frac{1}{2}MR^2$

vide: $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, I_3 = MR^2$

sans masse sur les bases circulaires

« toupie symétrique »:
tout axe Δ par G dans le plan 12 est principal

- Sphère:

pleine: $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$

vide: $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3}MR^2$

« toupie sphérique »:
tout axe Δ par G est principal

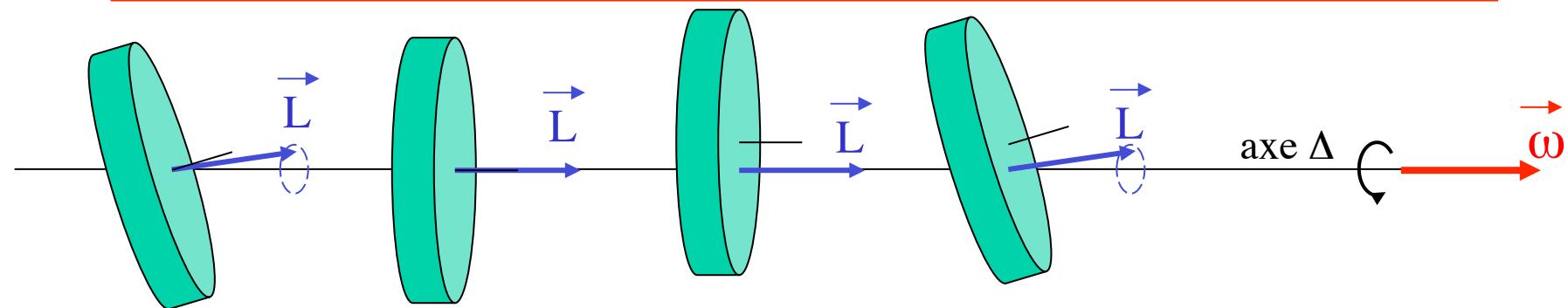
Application: équilibrage d'un solide en rotation

démo: rotation autour d'un axe non-principal \Rightarrow moment

- Dans beaucoup de situations, il est nécessaire qu'un solide en rotation soit « équilibré »
 - Exemples: roues de voiture, hélices d'avion, pâles de ventilateur, turbines, arbres de transmission, ...
- Pour un axe de rotation Δ :

Solide équilibré statiquement $\Leftrightarrow G \in \Delta$

Solide équilibré dynamiquement $\Leftrightarrow \Delta$ est un axe principal d'inertie



- Si le solide n'est pas équilibré dynamiquement, le moment cinétique précessse autour de Δ , et un moment de force perpendiculaire à Δ doit être appliqué pour garder Δ fixe:
 \Rightarrow vibrations, usure des coussinets et supports, ...

Roue mal équilibrée en rotation

- Axe de rotation fixe faisant un angle θ avec l'axe de symétrie
- On choisit un repère d'inertie (lié à la roue, donc en mouvement):
 - Origine au centre de masse G
 - Axe 3 selon l'axe de la roue
 - Axe 1 dans le plan défini par l'axe de la roue et l'axe de rotation Δ
- Dans le repère d'inertie:

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} I_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{//} \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \sin\theta \\ 0 \\ \omega \cos\theta \end{pmatrix}$$

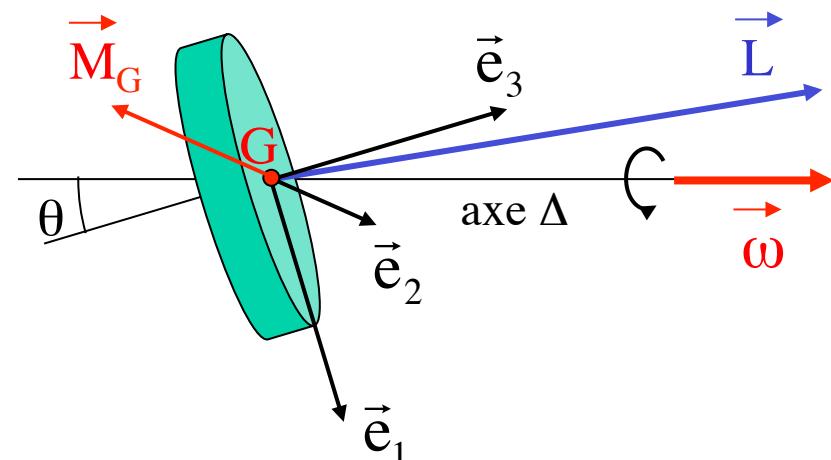
$$\vec{L}_G = I_{\perp} \omega \sin\theta \vec{e}_1 + I_{//} \omega \cos\theta \vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{\perp} \omega \sin\theta (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_1) + I_{//} \omega \cos\theta (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_3)$$

$$= I_{\perp} \omega \sin\theta (\omega \cos\theta \vec{e}_2) + I_{//} \omega \cos\theta (-\omega \sin\theta \vec{e}_2)$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = (I_{\perp} - I_{//}) \omega^2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_2 = \vec{M}_G$$

$M_G = 0$ si et seulement si
 $\theta = 0, \theta = \pi/2$ ou $I_{\perp} = I_{//}$



Théorème de Steiner

- Par rapport à un point A du solide:

$$\begin{aligned}(\tilde{I}_A)_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{AP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{AP_{\alpha}})_j \right] \\&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \delta_{ij} - ((\overrightarrow{AG})_i + (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i)((\overrightarrow{AG})_j + (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j) \right] \\&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 + 2 \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GP_{\alpha}}) \delta_{ij} \right. \\&\quad \left. - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{AG})_j - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{AG})_j \right] \\&= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{GP_{\alpha}}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_i (\overrightarrow{GP_{\alpha}})_j \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{AG})_j \right]\end{aligned}$$

$$(\tilde{I}_A)_{ij} = (\tilde{I}_G)_{ij} + M \left[\overrightarrow{AG}^2 \delta_{ij} - (\overrightarrow{AG})_i (\overrightarrow{AG})_j \right]$$

permet de calculer le tenseur d'inertie au point A quelconque d'un solide connaissant celui au centre de masse G

= tenseur d'inertie au point A
d'une masse M au point G

Théorème de Steiner (applications)

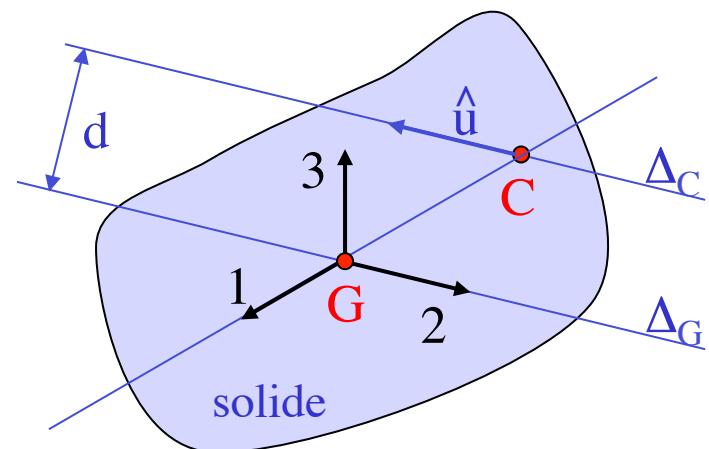
- Formule de Steiner pour les moments d'inertie:

- Δ_C = axe de direction \hat{u} passant par un point C quelconque
- Δ_G = axe de direction \hat{u} passant par le centre de masse G
- d = distance entre les deux axes Δ_C et Δ_G

$$\begin{aligned} I_{\Delta_C} &= \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} (\tilde{I}_G)_{ij} u_i u_j + \sum M \left[\overrightarrow{CG}^2 u_i u_j \delta_{ij} - (\overrightarrow{CG})_i u_i (\overrightarrow{CG})_j u_j \right] \\ &= I_{\Delta_G} + M \left[\overrightarrow{CG}^2 - (\overrightarrow{CG} \cdot \hat{u})^2 \right] \end{aligned}$$

$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + M d^2$$

= moment d'inertie d'une masse M à une distance d de Δ_C



- Axes principaux:

Si les axes Δ_G et CG sont des axes principaux d'inertie au point G alors les axes Δ_C et CG sont des axes principaux d'inertie au point C

Meule

- Description et hypothèses:
 - Meule: disque mince de masse M , rayon R , centre de masse G
 - Axe de la meule CG : horizontal, sans masse, longueur d
 - Roulement sans glissement sur le sol avec point C fixe sur un axe vertical
 - ω = rotation propre de la meule, Ω = rotation autour de l'axe vertical
- Vecteur instantané de rotation total = $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$
- $$\begin{cases} \vec{0} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} \\ \vec{0} = \vec{v}_C = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC} \end{cases}$$

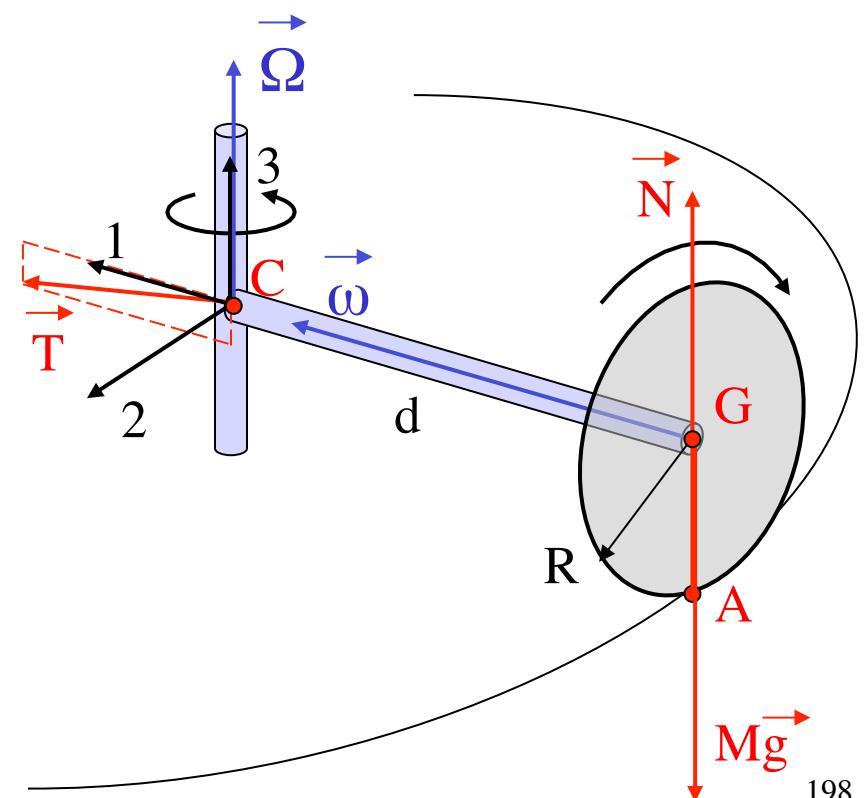
$$\Rightarrow (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GA} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega R = \Omega d}$$
- Equations du mouvement:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_G = \vec{T} + \vec{N} + M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} = \overrightarrow{CG} \wedge (\vec{N} + M\vec{g})$$



Meule (suite)

démo

- Tenseur d'inertie:
(dans repère d'inertie
d'axes 1, 2, et 3,
en rotation avec l'axe
de la meule autour de 3)

$$\tilde{I}_{Cij} = (\tilde{I}_G)_{ij} + M \left[\overrightarrow{CG}^2 \delta_{ij} - (CG)_i (CG)_j \right]$$

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Moment cinétique:

$$\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{I}_C)_{11} \vec{\omega} + (\tilde{I}_C)_{33} \vec{\Omega}$$

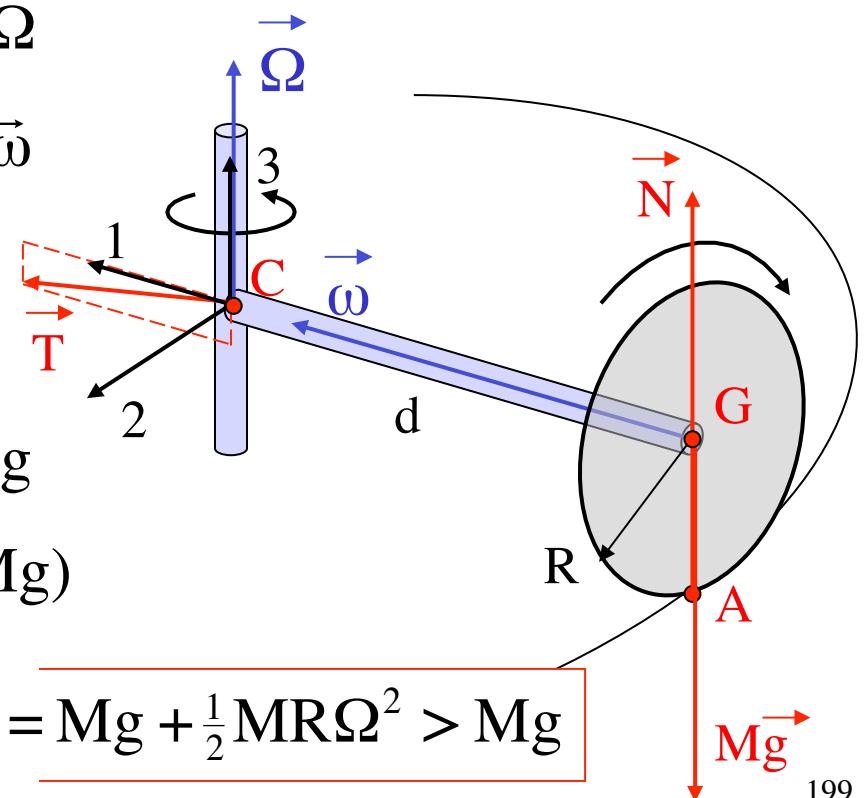
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = (\tilde{I}_C)_{11} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}$$

- Équations du mouvement:

$$M\vec{a}_G = \sum \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} M\Omega^2 d = T_1 \\ 0 = T_2 \\ 0 = T_3 + N - Mg \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}} \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\Omega\omega = d(N - Mg)$$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg + \frac{1}{2}MR^2\Omega \frac{\omega}{d} = Mg + \frac{1}{2}MR\Omega^2 > Mg}$$



Roulement sans glissement sur plan incliné

- Cylindre de révolution roulant sans glisser:** $\Rightarrow v_A = 0 \Rightarrow v_G = \omega R$
- Moment d'inertie:** $I_{G,y} = kMR^2$
 - k = nombre caractérisant la « forme », indépendamment de la masse et de la dimension
 - $k=1/2$ si cylindre homogène plein
 - $k=1$ si cylindre homogène vide
- Moment cinétique:**

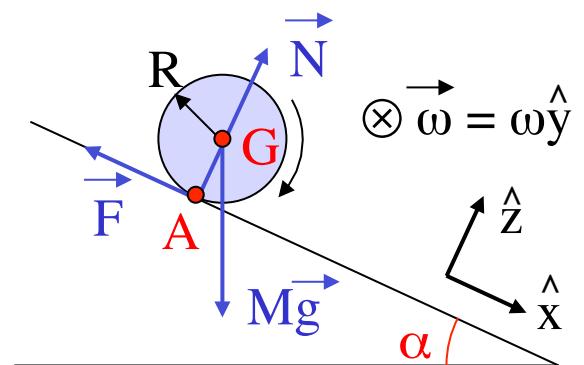
$$\vec{L}_G = I_{G,y} \vec{\omega} \Rightarrow L_G = I_{G,y} \omega = kMR^2 \frac{v_G}{R} = kRMv_G$$

- Équations du mouvement:**

$$\begin{aligned} M\vec{a}_G &= M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ma_G = Mg \sin\alpha - F \\ 0 = 0 \\ 0 = N - Mg \cos\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = Mg \cos\alpha \\ F = Mg \sin\alpha \frac{k}{k+1} \\ a_G = \frac{g \sin\alpha}{k+1} \end{array} \right. \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \vec{M}_G \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ kRMa_G = FR \\ 0 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

– Accélération a_G ne dépend que de k , pas de M ni de R !

démo



Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cin}} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 \\
 \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{\omega}^2 \overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 - \left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP}_{\alpha} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_{i,j} \omega_i \omega_j \delta_{ij} \overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 - \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \left(AP_{\alpha} \right)_i \left(AP_{\alpha} \right)_j \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\overrightarrow{AP}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - \left(AP_{\alpha} \right)_i \left(AP_{\alpha} \right)_j \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \tilde{I}_A_{ij} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega})
 \end{aligned}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + \underbrace{M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG})}_{=0 \text{ si } A=G \text{ (centre de masse)} \\ \text{ou si } v_A=0 \text{ (point fixe)}} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega})$$

Si rotation selon axe principal d'inertie Δ par un point fixe:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$$

Roulement sans glissement sur pente

- Energie cinétique (en utilisant le point A):

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{G,y} + MR^2) \omega^2$$

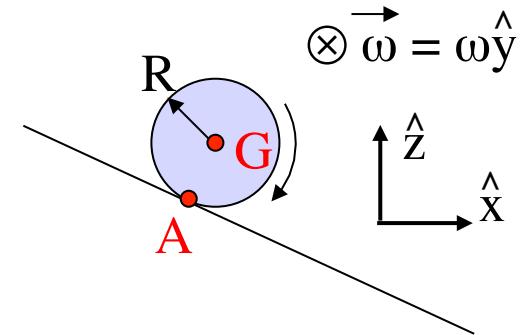
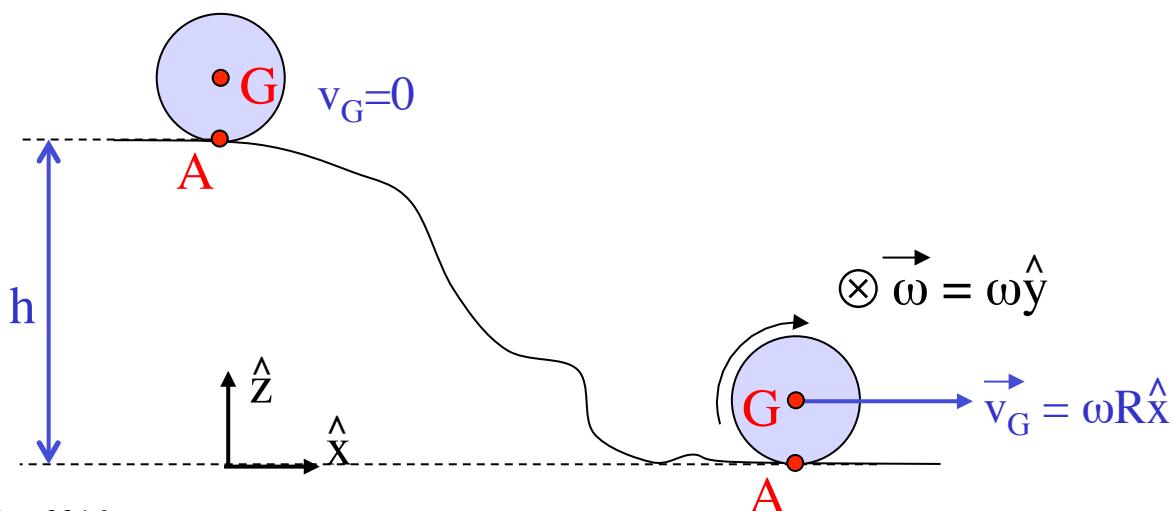
- Energie cinétique (en utilisant le point G):

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} Mv_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2 = \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{G,y} \omega^2$$

- Energie mécanique totale:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2(t) + Mgz_G(t) = \text{constante}$$

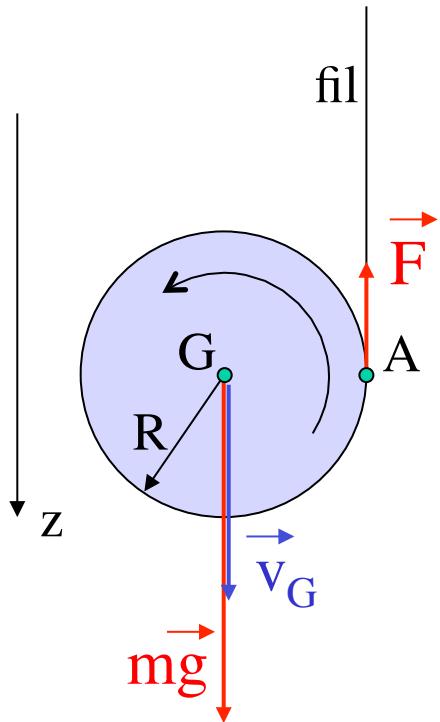
- Exemple:



La force de frottement en A ne travaille pas ! ($v_A=0$)

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= Mgh = \frac{1}{2} I_{A,y} \omega^2 \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{2Mgh}{I_{A,y}}} \end{aligned}$$

Yoyo



- Equations du mouvement:

$$\vec{M}_G = d\vec{L}_G / dt \Rightarrow RF = I_G \dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2(a_G/R)$$

$$m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2}ma_G \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow F = mg - ma_G \\ \Rightarrow F = mg - \frac{1}{2}ma_G \end{array} \right\} \Rightarrow a_G = \frac{2}{3}g$$
- Conditions initiales (à $t=0$): $v_G = 0$ et $z = 0$
- Solution: $\begin{cases} v_G(t) = a_G t \\ z(t) = \frac{1}{2}a_G t^2 \end{cases} \Rightarrow v_G = \sqrt{2a_G z} = \sqrt{\frac{4}{3}gz}$

- Le poids est conservatif et F ne travaille pas
 \Rightarrow le problème peut être résolu par la conservation de l'énergie:

$$K^* = \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)(v_G/R)^2 = \frac{1}{4}mv_G^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + K^* = \frac{3}{4}mv_G^2$$

$$E = \frac{3}{4}mv_G^2 - mgz = E_0 = 0 \Rightarrow v_G = \sqrt{\frac{4}{3}gz}$$

Dynamique du solide avec axe fixe

démo

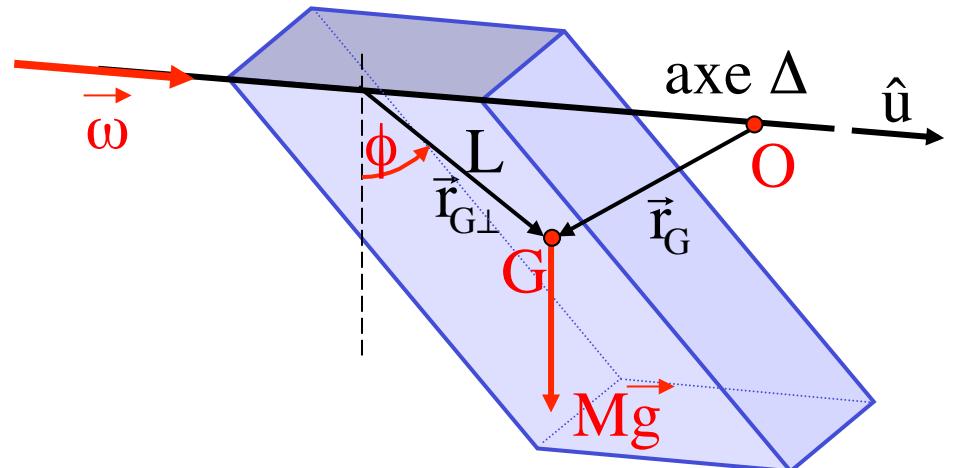
- Quand un axe de rotation Δ est fixe (et qu'on ne s'intéresse pas aux forces et moments qui maintiennent cet axe fixe), il est utile de projeter le théorème du moment cinétique sur cet axe:

- Pour tout point O sur l'axe Δ de direction \hat{u}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_O &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{L}_O \cdot \hat{u}) &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (I_{\Delta} \omega) &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \\ \Rightarrow I_{\Delta} \ddot{\omega} &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha, \perp} \wedge \vec{F}_{\alpha, \perp}^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} \end{aligned}$$

où $\vec{r}_{\alpha, \perp}$ et $\vec{F}_{\alpha, \perp}^{\text{ext}}$ sont les composantes de \vec{r}_{α} et $\vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$ perpendiculaires à \hat{u}

- Exemple: pendule physique** = solide soumis à la pesanteur et libre de se mouvoir autour d'un axe fixe horizontal



$$\begin{aligned} I_{\Delta} \ddot{\omega} &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha, \perp} \wedge m_{\alpha} \vec{g}) \cdot \hat{u} \\ I_{\Delta} \ddot{\phi} &= (\vec{r}_{G, \perp} \wedge M \vec{g}) \cdot \hat{u} = -L M g \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= -\frac{L M g}{I_{\Delta}} \sin \phi \end{aligned}$$

- Si toute la masse M est en G ($I_{\Delta} = M L^2$):

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

pendule mathématique

Pendule physique tournant

démo

- Rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par O
- Dans repère d'inertie $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$$\vec{\omega} = \omega \sin\alpha \hat{e}_1 - \omega \cos\alpha \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = I_{\perp} \omega \sin\alpha \hat{e}_1 - I_{\parallel} \omega \cos\alpha \hat{e}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}_G = (I_{\perp} - I_{\parallel}) \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \hat{e}_3$$

- Théorème du moment cinétique:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \overrightarrow{GO} \wedge \vec{T} \Rightarrow (I_{\perp} - I_{\parallel})\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = TL \sin(\alpha - \beta) \\ &= L(T \cos\beta \sin\alpha - T \sin\beta \cos\alpha) \end{aligned}$$

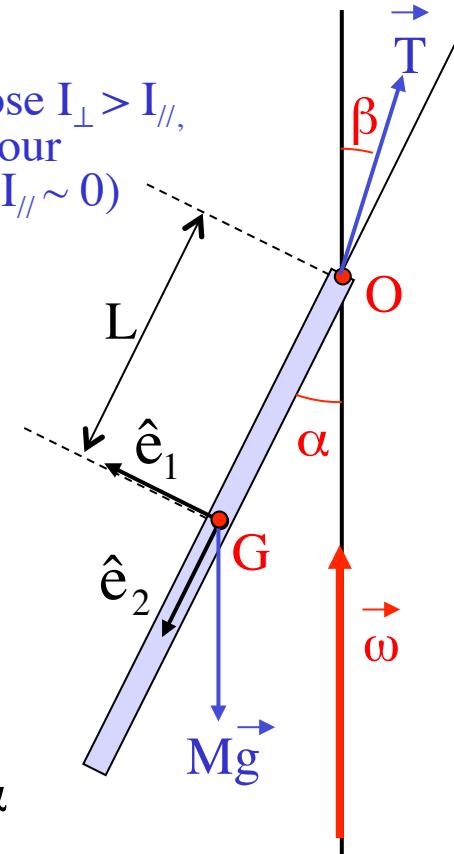
- Théorème du centre de masse:

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_G \Rightarrow \begin{cases} T \cos\beta = Mg \\ T \sin\beta = M\omega^2 L \sin\alpha \end{cases}$$

- $\Rightarrow (I_{\perp} - I_{\parallel})\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha = L(Mg \sin\alpha - M\omega^2 L \sin\alpha \cos\alpha)$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{g / (\omega^2 L)}{1 + \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{ML^2}} < \frac{g}{\omega^2 L}$$

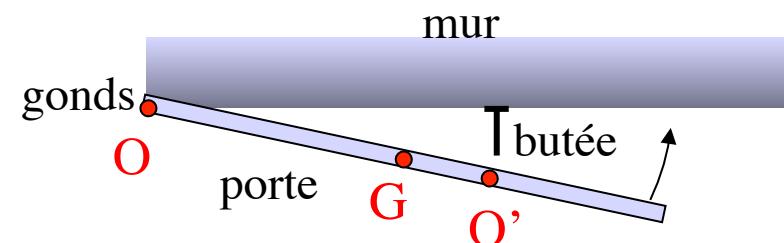
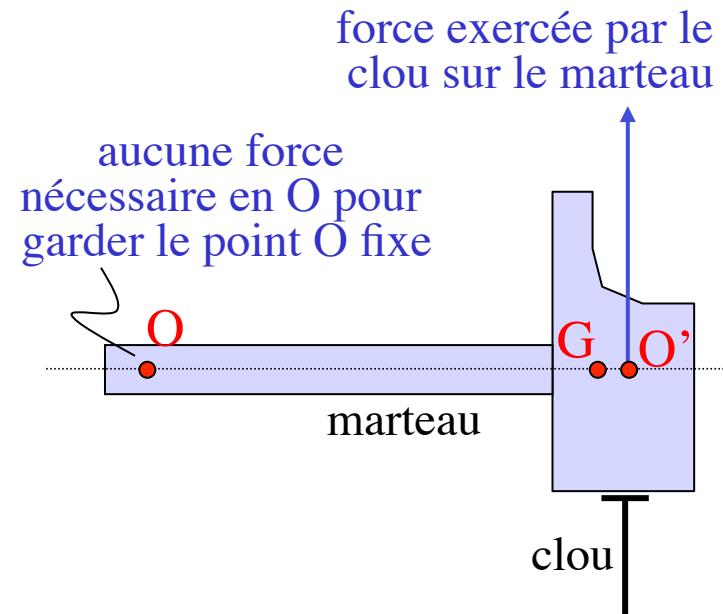
On suppose $I_{\perp} > I_{\parallel}$, comme pour une tige ($I_{\parallel} \sim 0$)



cas du pendule mathématique
(masse M en G), avec $I_{\perp}=I_{\parallel}=0$ et $\alpha=\beta$

Dynamique du solide avec axe fixe (suite)

- Solide libre de tourner autour d'un axe fixe passant par O
- Centre de percussion:
 - point O' sur la droite OG tel qu'un choc (percussion) appliqué en ce point (perpendiculairement à OG) n'engendre aucune réaction (répercussion) de l'axe de rotation sur le solide
- Exemples et applications:
 - Marteau
 - où le tenir ?
 - Batte de baseball
 - où frapper la balle ?
 - Butée de porte
 - où la placer ?



butée placée au centre de percussion:
merci pour les gonds

Calcul du centre de percussion

- Batte de baseball frappée par une balle avec une force $F(t)$ au centre de percussion O' par rapport à l'emplacement des mains en O :
 - Juste avant le choc ($t=0$): $v_G = 0, \omega = 0$ (batte au repos)
 - Juste après le choc ($t=\Delta t$): $v_G = \omega d \neq 0$ (point O fixe)
 - Pas de force appliquée par les mains en O , donc:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \int_{t=0}^{\Delta t} \vec{F}(t) dt \quad \Rightarrow \quad Mv_G = \int_{t=0}^{\Delta t} F(t) dt \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \vec{M}_G^{\text{ext}} \Rightarrow \Delta\vec{L}_G = \int_{t=0}^{\Delta t} \vec{M}_G^{\text{ext}}(t) dt \Rightarrow I_G \omega = d' \int_{t=0}^{\Delta t} F(t) dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow Mv_G d' = I_G \omega$$

\downarrow

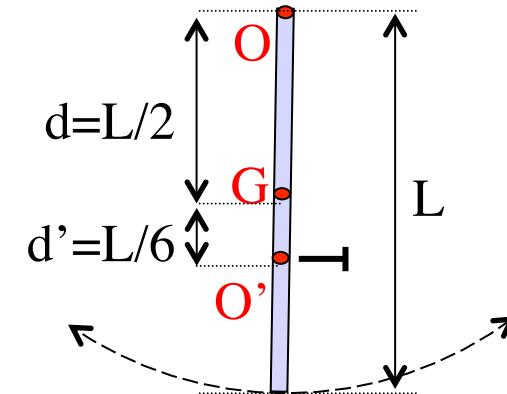
$I_G = Mdd'$

- Pendule physique interrompu dans sa course:

- Point O à l'extrémité d'une barre mince homogène de masse M et de longueur L :

$$\frac{1}{12}ML^2 = I_G = Mdd' = M \frac{L}{2} d' \Rightarrow d' = \frac{L}{6}$$

démo



Axes en rotation: équations d'Euler

- $C = \text{point fixe du solide (ou centre de masse)} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{\text{ext}}$
- $C\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3 = \text{repère d'inertie au point } C \text{ (lié au solide)}$

$$\vec{L}_C = \sum_i L_i \hat{e}_i \quad \text{avec} \quad L_i = I_i \omega_i$$

$I_i = \text{moments d'inertie principaux}$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_i (\dot{L}_i \hat{e}_i + L_i \dot{\hat{e}}_i) = \sum_i (I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + L_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i) = \sum_i I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_C$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \quad \left(\text{Note: } \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{L}_C \Leftrightarrow \omega_i \text{ constants} \right)$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à C , en composantes dans le repère d'inertie:

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_{C,1}^{\text{ext}}$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_{C,2}^{\text{ext}}$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_{C,3}^{\text{ext}}$$

équations d'Euler

équ. différentielles couplées
pour $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ et $\omega_3(t)$

Solide en rotation libre

- Par exemple, solide en chute libre:
 - Le centre de masse G suit une parabole (si on néglige les frottements)
 - On a $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = 0$
- Cas particulier d'une rotation autour d'un axe proche de l'axe principal d'inertie $\hat{\mathbf{e}}_1$: $\omega_2 \ll \omega_1$ et $\omega_3 \ll \omega_1$
 - Equations d'Euler (où on a négligé $\omega_2\omega_3$):

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1(t) = \omega_1 = \text{constante} \\ I_2 \dot{\omega}_2(t) = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3(t) \\ I_3 \dot{\omega}_3(t) = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_3 I_2 \ddot{\omega}_2(t) = (I_3 - I_1)(I_1 - I_2) \omega_1^2 \omega_2(t) \\ I_2 I_3 \ddot{\omega}_3(t) = (I_1 - I_2)(I_3 - I_1) \omega_1^2 \omega_3(t) \end{cases}$$

- $\omega_2(t)$ et $\omega_3(t)$ vont osciller autour de 0 (et donc rester petits) si et seulement si

$$(I_3 - I_1)(I_2 - I_1) > 0 \Leftrightarrow (I_1 = \min(I_i) \text{ ou } I_1 = \max(I_i))$$

Septième partie:

Mouvement relatif et changement de référentiel en mécanique newtonienne

Notions abordées:

- Référentiel
- Vitesse et accélération relatives
- Forces d'inertie
- Loi d'inertie et référentiels d'inertie
- Dynamique terrestre

Buts:

- comprendre la différence entre référentiel et repère
- comprendre la notion de référentiel d'inertie
- assimiler les bases de la mécanique Newtonienne classique

Mouvement et référentiel

démos: jet d'eau tournant
fusil tournant
table tournante + feutre

- La description du mouvement d'un point matériel ou d'un système (vitesses, accélérations, forces, ...) se fait nécessairement par rapport à un certain référentiel:
 - Référentiel = ensemble d'au moins 4 points non coplanaires et immobiles les uns par rapport aux autres (= solide indéformable !)
 - Note:
 - on peut associer à chaque référentiel un observateur et ses instruments de mesure, immobiles dans ce référentiel (ils « font partie » du référentiel)
 - décrire un mouvement dans un certain référentiel consiste alors à se mettre à la place de cet observateur
 - Exemples:
 - le laboratoire (= la Terre)
 - un carrousel
 - un ascenseur
- Le choix du référentiel est a priori arbitraire, mais ...
 - ... tous les référentiels sont-ils équivalents ?
 - ... les lois de la physique sont-elles les mêmes dans tous les référentiels ?
 - ... permettent-elles de mettre en évidence des référentiels privilégiés ?

Changement de référentiel

- Point matériel P décrit dans deux référentiels différents:

- Dans un référentiel R auquel est lié le repère $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$:

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}, \quad \vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt}, \quad \vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} \quad \text{où } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \text{ sont considérés constants}$$

$$\vec{r}_P = \sum x_i \hat{e}_i, \quad \vec{v}_P = \sum \frac{dx_i}{dt} \hat{e}_i, \quad \vec{a}_P = \sum \frac{d^2x_i}{dt^2} \hat{e}_i$$

- Dans un autre référentiel R' auquel est lié le repère $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$:

$$\vec{r}'_P = (\overrightarrow{O'P})', \quad \vec{v}'_P = \frac{d\vec{r}'_P}{dt'}, \quad \vec{a}'_P = \frac{d\vec{v}'_P}{dt'} \quad \text{où } \hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3 \text{ sont considérés constants}$$

$$\vec{r}'_P = \sum x'_i \hat{e}'_i, \quad \vec{v}'_P = \sum \frac{dx'_i}{dt'} \hat{e}'_i, \quad \vec{a}'_P = \sum \frac{d^2x'_i}{dt'^2} \hat{e}'_i$$

- Postulats de la mécanique classique (non-relativiste):

① Le temps est un absolu: $t' = t + \text{constante} \Rightarrow \frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$

② L'espace est un absolu: $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \vec{r}'_Q - \vec{r}'_P \quad \forall P, Q$

- Conséquence:

- R' est aussi un « solide » dans R;
son mouvement est décrit par les vitesses instantanées
de translation et de rotation de R' par rapport à R:

$$\vec{v}_{0'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO'} \quad \text{et} \quad \vec{\omega}$$

Transformation des vitesses

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{Q'P}$$

\vec{r}_P $\vec{r}_{O'}$ \vec{r}'_P

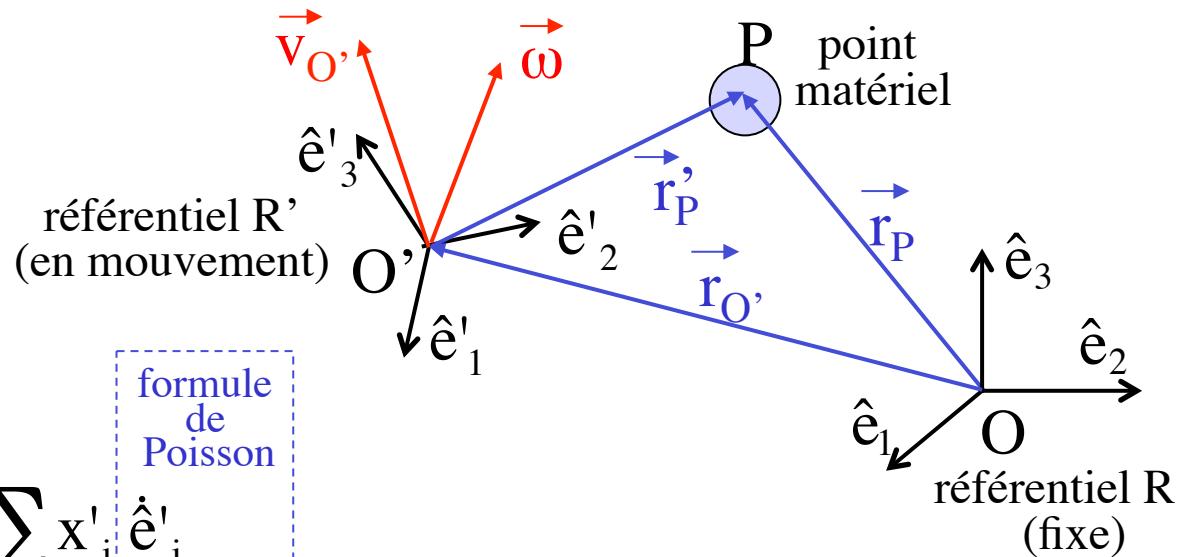
$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt} \sum x'_i \hat{e}'_i \\ &= \vec{v}_{O'} + \sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i + \sum x'_i \hat{\omega}'_i \\ &= \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \sum x'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i\end{aligned}$$

formule de Poisson

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

↓ ↓ ↓
 vitesse d'entraînement
 vitesse de P par rapport à R' (relative)
 vitesse de P par rapport à R (absolue)



Cas particuliers:

- Si $v'_P = 0$, i.e. $P \in R'$, on trouve la **relation du solide indéformable**:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}}$$

- Si $\omega = 0$, i.e. R' est en translation par rapport à R , on obtient la **loi d'addition des vitesses**:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P}$$

Au tableau

Transformation des accélérations

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'_P}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{a}_{O'} + \frac{d}{dt} \sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \sum x'_i \hat{e}'_i + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= \vec{a}_{O'} + \sum (\ddot{x}'_i \hat{e}'_i + \dot{x}'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \vec{\omega} \wedge \sum (\dot{x}'_i \hat{e}'_i + x'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= \vec{a}_{O'} + \underbrace{\sum \ddot{x}'_i \hat{e}'_i}_{\vec{a}'_P} + 2\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i}_{\vec{v}'_P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum x'_i \hat{e}'_i}_{\overrightarrow{O'P}}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}\end{aligned}$$

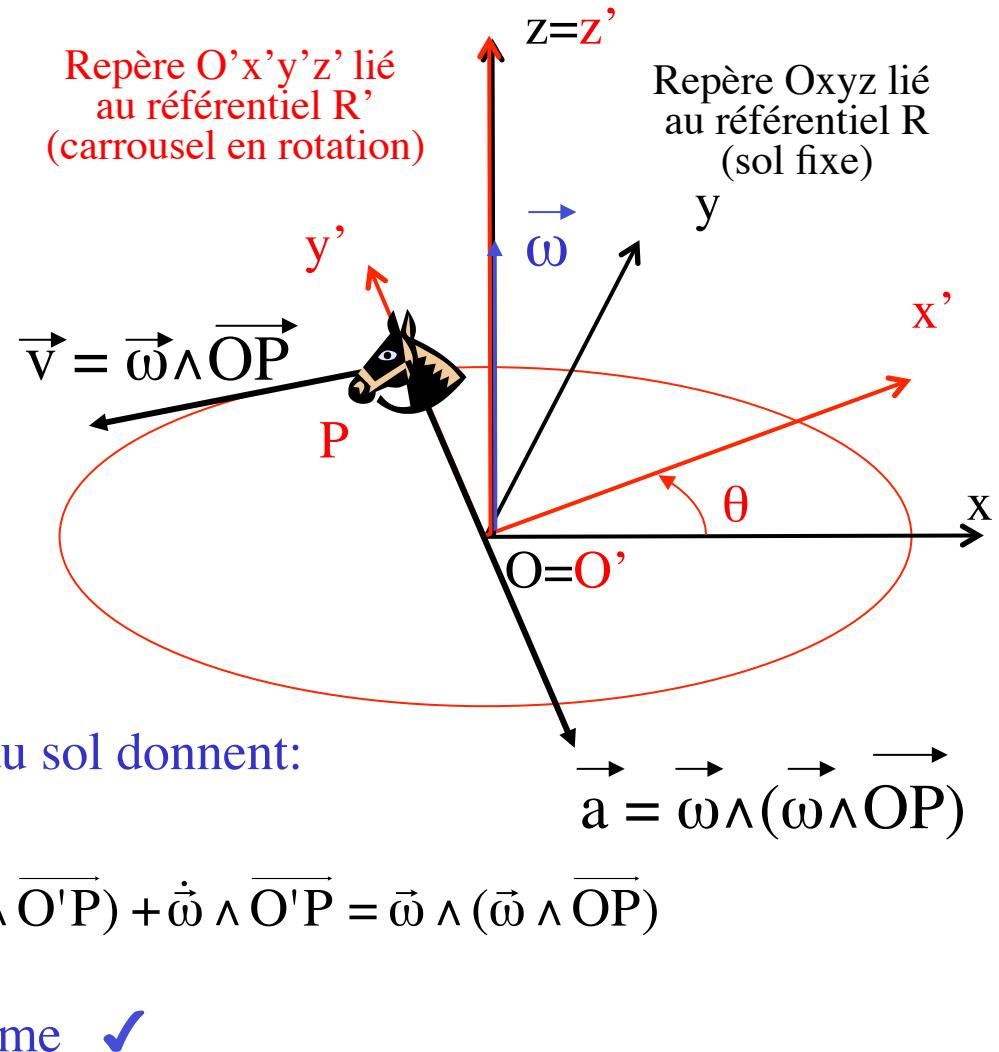
$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$



Cas particuliers: $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Si } v'_P = a'_P = 0, \text{ i.e. } P \in R', \text{ on retrouve le solide indéformable} \\ - \text{Si } \omega = \dot{\omega} = 0, \text{ i.e. } R' \text{ est en translation par rapport à } R, \\ \text{on obtient la loi d'addition des accélérations} \end{array} \right.$

Exemple: cheval de carrousel (1)

- Carrousel (= référentiel R') en rotation de vitesse angulaire ω constante par rapport au sol (= référentiel R)
 - Repères de mêmes origines ($O=O'$) au centre du carrousel:
 $\vec{v}_{O'} = 0$ et $\vec{a}_{O'} = 0$
 - Cheval P au repos par rapport au carrousel:
 $\vec{v}'_P = 0$ et $\vec{a}'_P = 0$
 - Les expressions pour la vitesse et l'accélération du cheval par rapport au sol donnent:
- $$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$
- $$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$



→ mouvement circulaire uniforme ✓

Exemple: cheval de carrousel (2)

- Sol (= référentiel R') en rotation de vitesse angulaire $-\vec{\omega}$ constante par rapport au carrousel (= référentiel R)

- Repères de mêmes origines ($O=O'$) au centre du carrousel:

$$\vec{v}_{O'} = 0 \text{ et } \vec{a}_{O'} = 0$$

- Cheval P en mouvement circulaire uniforme par rapport au sol:

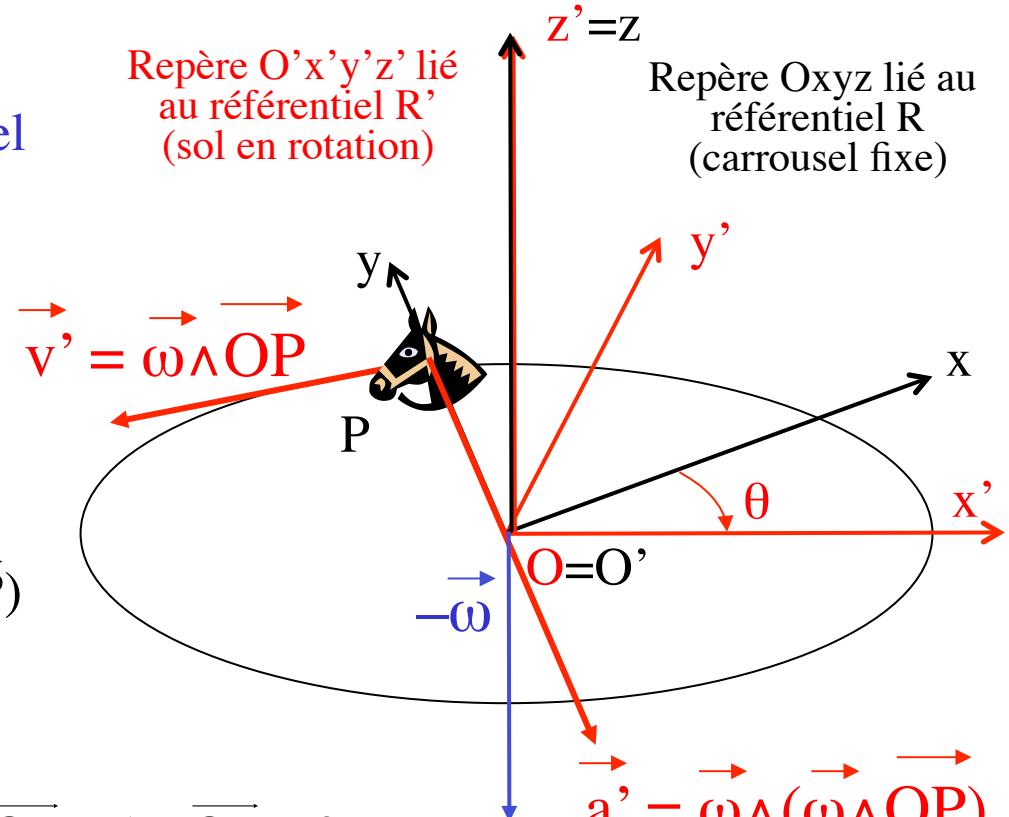
$$\vec{v}'_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \text{ et } \vec{a}'_P = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

- Les expressions pour la vitesse et l'accélération du cheval par rapport au carrousel donnent:

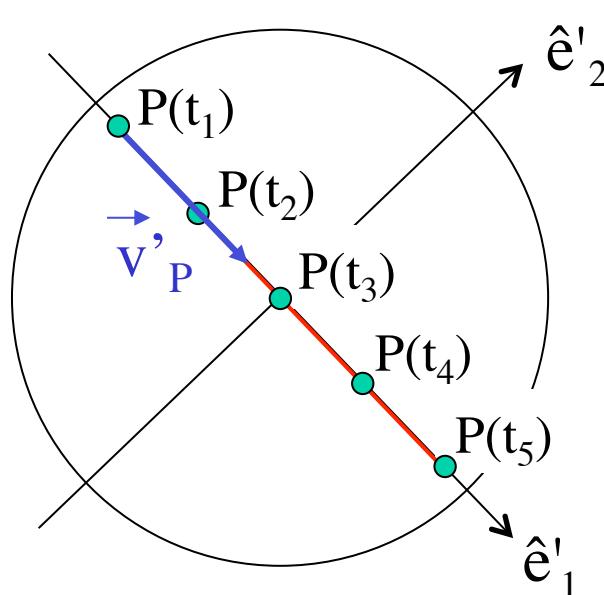
$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + (-\vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{O'P} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}'_P + 2(-\vec{\omega}) \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + (-\vec{\omega}) \wedge (-\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + (-\vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + 2(-\vec{\omega}) \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) + (-\vec{\omega}) \wedge (-\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = 0 \end{aligned}$$

→ repos ✓



Exemple: mouvement rectiligne uniforme sur un carrousel

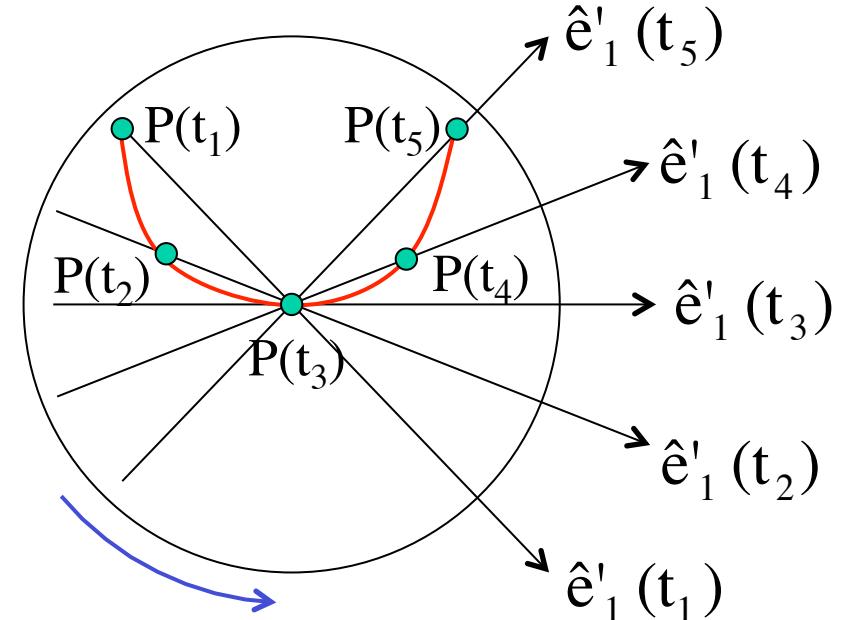


Mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel relatif R' lié au carrousel:

$$\vec{v}'_P = v' \hat{e}'_1 = \text{constante}$$

$$\vec{a}'_P = 0$$

accélération de Coriolis selon \hat{e}'_2
(dévie la trajectoire sur la gauche)



Accélération dans le référentiel absolu R lié au sol:

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

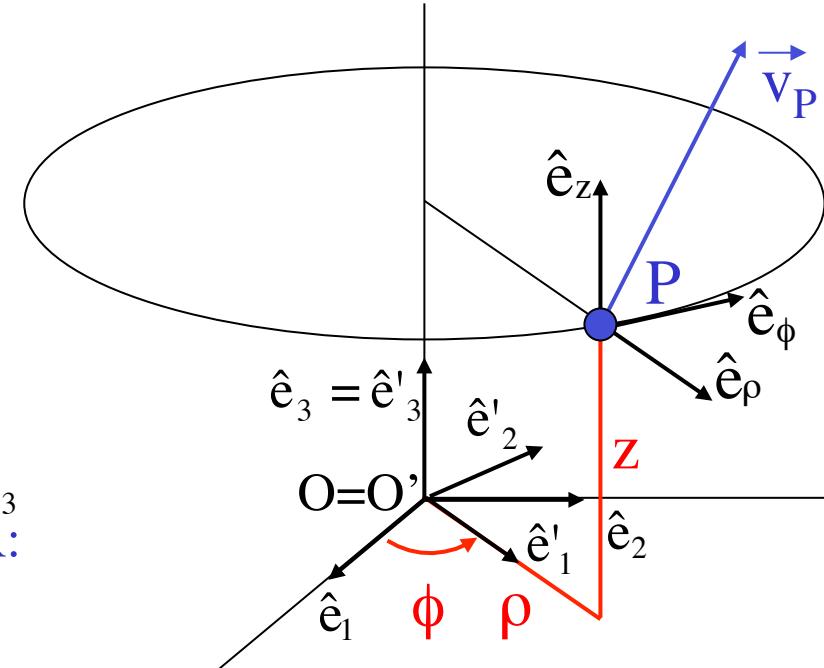
$$\begin{aligned} \vec{a}_P(t) &= 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P(t) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP(t)}) \\ &= 2\omega \hat{e}'_3(t) \wedge v' \hat{e}'_1(t) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge x'(t) \hat{e}'_1(t)) \\ &= \underbrace{2\omega v' \hat{e}'_2(t)}_{\text{accélération de Coriolis selon } \hat{e}'_2} - \underbrace{\omega^2 x'(t) \hat{e}'_1(t)}_{\text{accélération centripète selon } -\hat{e}'_1} \end{aligned}$$

Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

- Repère lié à un référentiel absolu R: $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$
- Repère lié à un référentiel R' suivant le mouvement azimutal du point P
 $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ avec $O'=O$ et $\hat{e}'_3=\hat{e}_3$
- Vitesse de rotation: $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_3$
- Repère lié au point P (coord. cyl.): $P\hat{e}_\rho\hat{e}_\phi\hat{e}_z$ avec $\hat{e}_\rho=\hat{e}'_1$, $\hat{e}_\phi=\hat{e}'_2$, $\hat{e}_z=\hat{e}'_3$
- Vitesse et accélération du point P dans R:

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= (\dot{\rho}\hat{e}'_1 + \dot{z}\hat{e}_3) + \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3) \\ &= \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \\ &= (\ddot{\rho}\hat{e}'_1 + \ddot{z}\hat{e}_3) + 2\dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\dot{\rho}\hat{e}'_1 + \dot{z}\hat{e}_3) + \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3)) + \ddot{\phi}\hat{e}_3 \wedge (\rho\hat{e}'_1 + z\hat{e}_3) \\ &= \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \ddot{z}\hat{e}_z + 2\dot{\phi}\dot{\rho}\hat{e}_\phi + \dot{\phi}\hat{e}_z \wedge \dot{\phi}\hat{e}_\phi + \ddot{\phi}\hat{e}_\phi \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z\end{aligned}$$



Dynamique dans référentiel en mouvement

- Soit un référentiel R (absolu) dans lequel la deuxième loi de Newton est valable.
Pour le point matériel P, auquel s'appliquent des forces \vec{F}^{ext} :

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_P$$

- Dans un référentiel R' accéléré par rapport à R, on a:

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m \left(\vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \right)$$
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} - \underbrace{2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P - m\vec{a}_{O'}}_{\text{force de Coriolis}} - \underbrace{m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) - m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}}_{\sum \vec{F}^{\text{inertie}}} = m\vec{a}'_P - \text{force centrifuge}$$

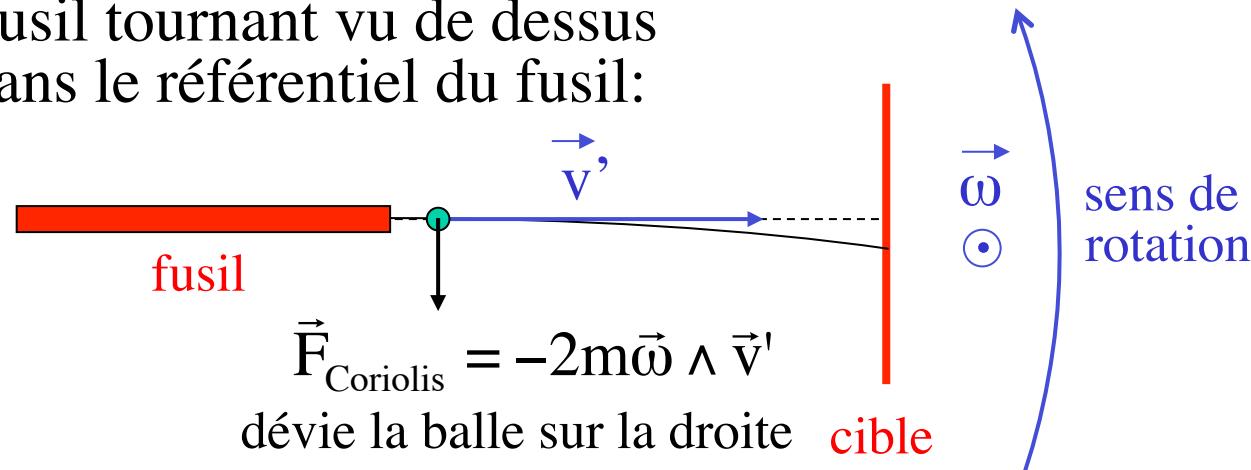
- les “forces d’inertie” ne sont pas des vraies forces; il s’agit d’un concept introduit pour rétablir la loi $\sum F = ma$ dans les référentiels accélérés !



démos: jet d'eau ou fusil tournant

Force de Coriolis

- Fusil tournant vu de dessus dans le référentiel du fusil:

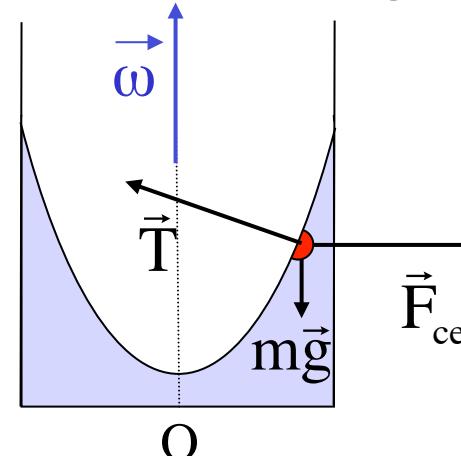


Gaspar Coriolis
(1792–1843)

démos: récipients de liquide en rotation

Force centrifuge

- Récipient vu du côté dans le référentiel du récipient (liquide immobile)



Equilibre d'une goutte P à la surface du liquide:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} = 0$$

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

Loi d'inertie et référentiels d'inertie

- Première loi de Newton (loi d'inertie):

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état

NB: cette loi n'est pas valable dans tous les référentiels !

- On appelle **référentiel d'inertie** (ou absolu) un référentiel dans lequel la loi d'inertie est valable
- Propriétés:
 - Il n'y a pas de « forces d'inertie » dans un référentiel d'inertie; la deuxième loi de Newton y est valable
 - Un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est un référentiel d'inertie
 - Tous les référentiels d'inertie sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres

Référentiel en translation non-uniforme

- Poids apparent dans un ascenseur accéléré vers le haut:
 - On mesure le poids par l'extension du ressort
 - Dans le référentiel R' de l'ascenseur, la masse m est immobile:

$$\vec{a}'_P = 0$$

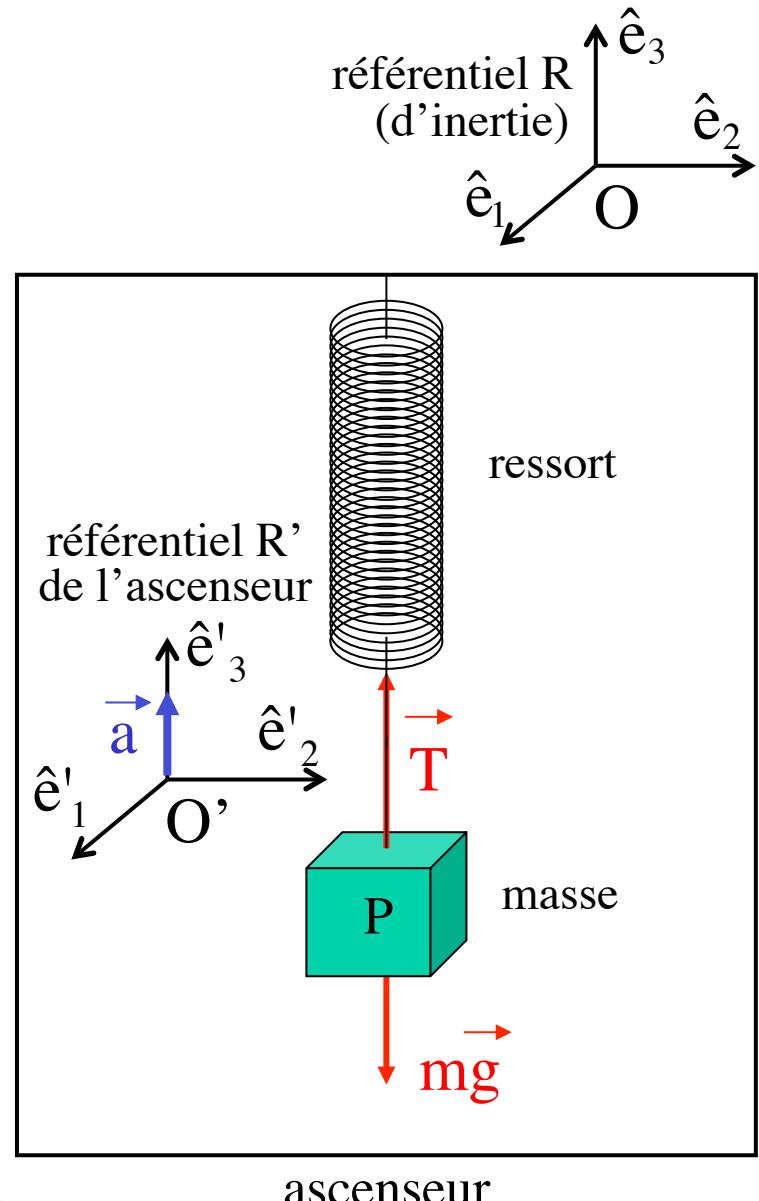
- Dans le référentiel d'inertie R:
 - $\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'} = \vec{a}$
 - 2ème loi de Newton appliquée à la masse m dans le référentiel R:

$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{a}_P$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

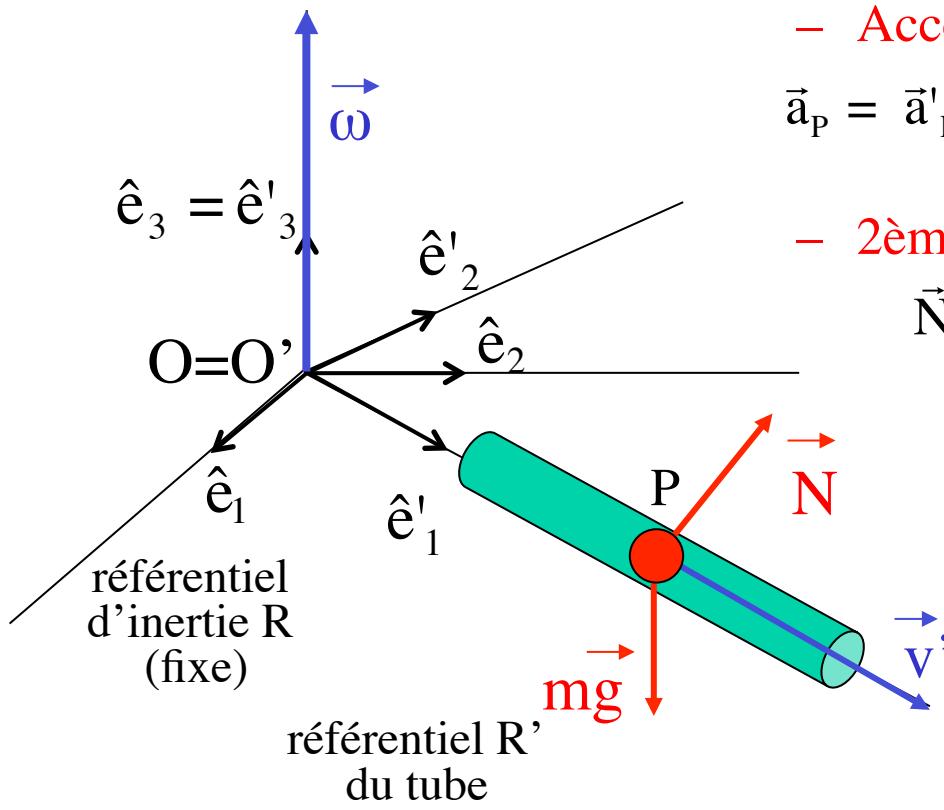
$$T - mg = ma$$

$T = m(a + g)$ **poids apparent**



Centrifugeuse

- Point matériel dans un tube horizontal en rotation uniforme autour d'un axe vertical (pas de frottements)
 - Contraintes: \vec{a}'_P , \vec{v}'_P et $\vec{r}'_P = \overrightarrow{O'P}$ selon $O'\hat{e}'_1$
 - Force de liaison (réaction du tube) normale au tube: $\vec{N} = N'_2 \hat{e}'_2 + N'_3 \hat{e}'_3$



- Accélération absolue (dans R):

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

- 2ème loi de Newton:

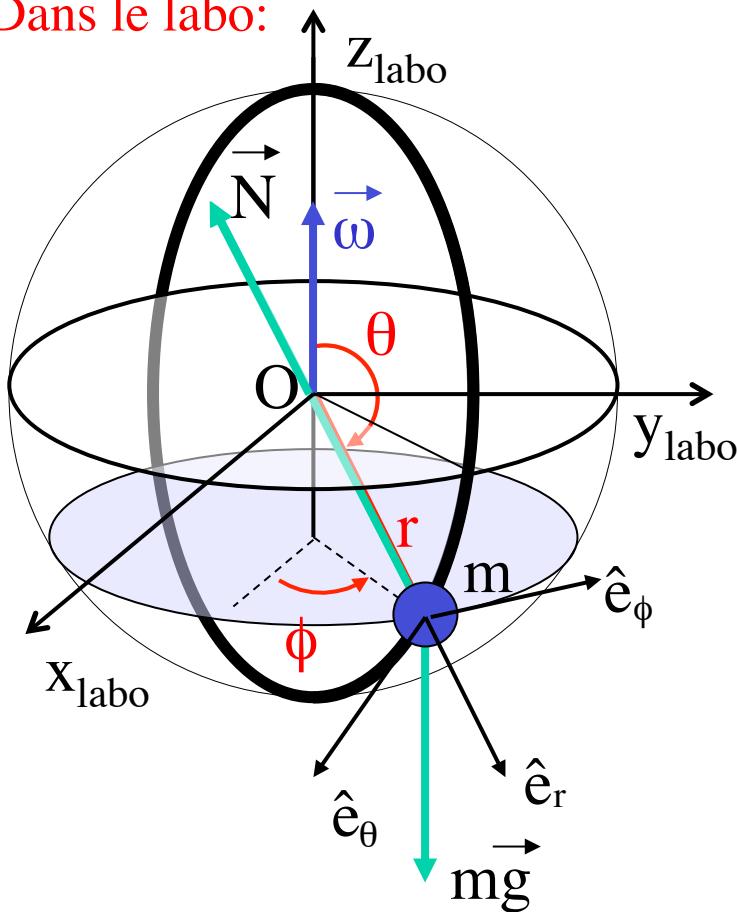
$$\begin{aligned} \vec{N} + m\vec{g} &= m\vec{a}_P \\ &= m\vec{a}'_P + 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) \\ &= m\ddot{x}'\hat{e}'_1 + 2m\omega\dot{x}'\hat{e}'_2 - m\omega^2x'\hat{e}'_1 \end{aligned}$$

- En projection sur les axes du réf. R' :

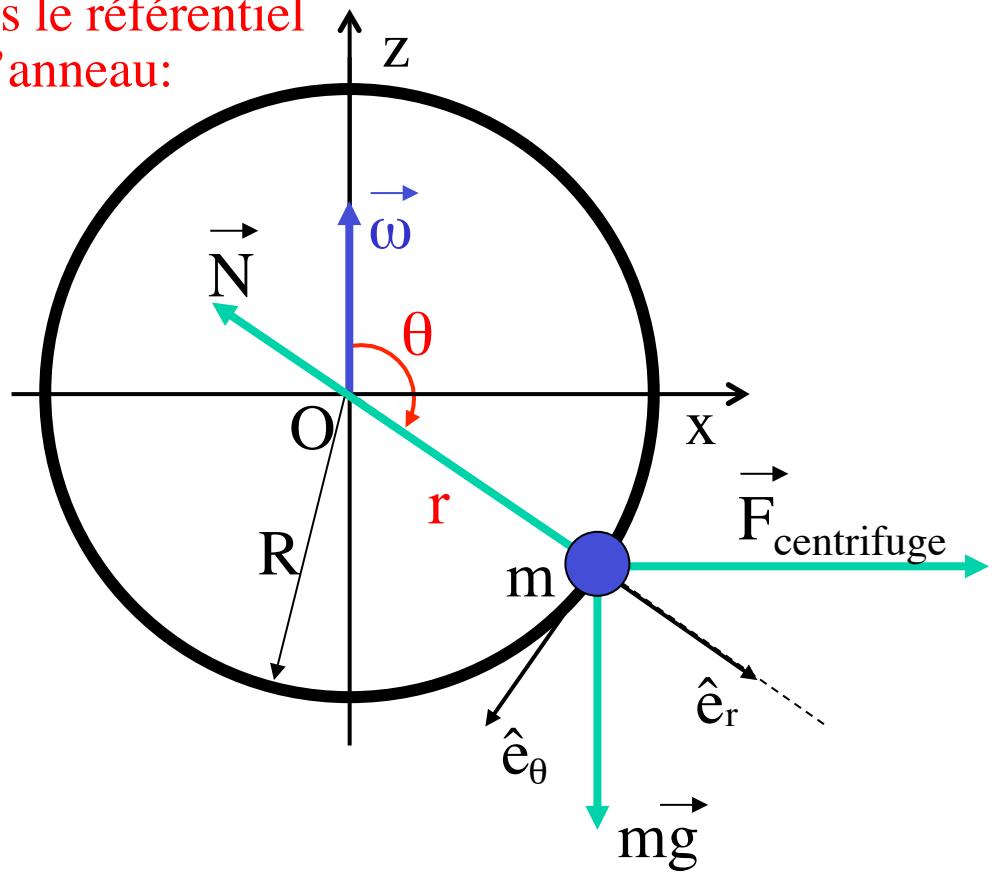
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = m\ddot{x}' - m\omega^2x' \\ N'_2 = 2m\omega\dot{x}' \\ N'_3 - mg = 0 \end{array} \right.$$

Equilibre dans un anneau en rotation uniforme

Dans le labo:



Dans le référentiel de l'anneau:



Contraintes :

$$r = R, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0, \dot{\phi} = \omega, \ddot{\phi} = 0$$

Conditions d'équilibre relatif :

$$\dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$$

$$\begin{cases} m\vec{g} = -mg \hat{e}_z \Rightarrow V_{\text{pesanteur}} = mgz \\ \vec{F}_{\text{centrifuge}} = m\omega^2 x \hat{e}_x \Rightarrow V_{\text{centrifuge}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ \vec{N} \text{ ne travaille pas} \end{cases}$$

$$V_{\text{total}} = V_{\text{pesanteur}} + V_{\text{centrifuge}} = mgR\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\theta$$

Equilibre et petites oscillations

dans un anneau en rotation uniforme

- On a: $V_{\text{total}} = V(\theta) = mgR \left(\cos\theta - \frac{q}{2} \sin^2 \theta \right)$ où $q = \frac{\omega^2 R}{g} > 0$
- Coordonnée curviligne:

$s = R\theta$ = position sur la circonference de l'anneau

- Points d'équilibre:

$$0 = -F_\theta = \frac{dV}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dV}{d\theta} = mg(-\sin\theta - q \sin\theta \cos\theta)$$

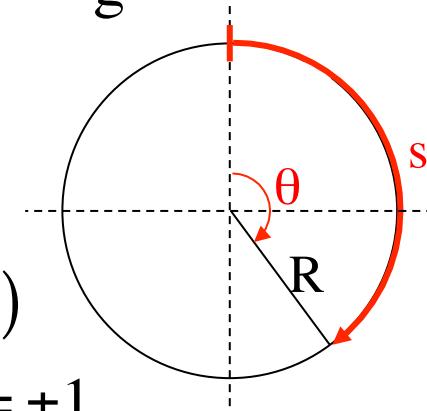
$$0 = \sin\theta (1 + q \cos\theta) \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \pm 1 \\ \cos\theta = -1/q \text{ (seulement si } q > 1) \end{cases}$$

- Stabilité: $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{mg}{R} (-\cos\theta - q(2\cos^2\theta - 1))$

- Si $\cos\theta = +1$: $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{mg}{R} (-1 - q) < 0 \Rightarrow$ instable

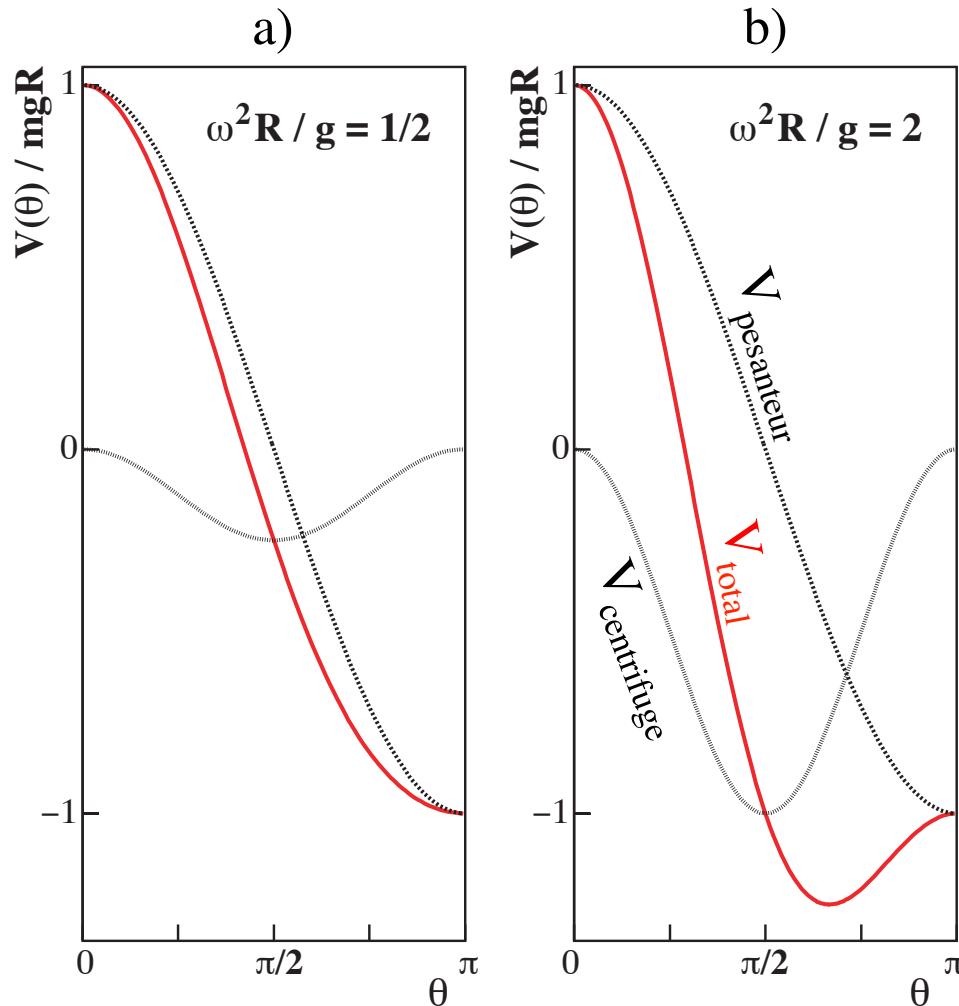
- Si $\cos\theta = -1$: $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{mg}{R} (1 - q) \Rightarrow$ stable si $q < 1$, instable si $q > 1$

- Si $\cos\theta = -1/q$: $\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{mg}{R} \left(\frac{1}{q} - q \left(\frac{2}{q^2} - 1 \right) \right) = \frac{mg}{R} \left(q - \frac{1}{q} \right) \Rightarrow$ stable car $q > 1$



Equilibre et petites oscillations

dans un anneau en rotation uniforme (2)

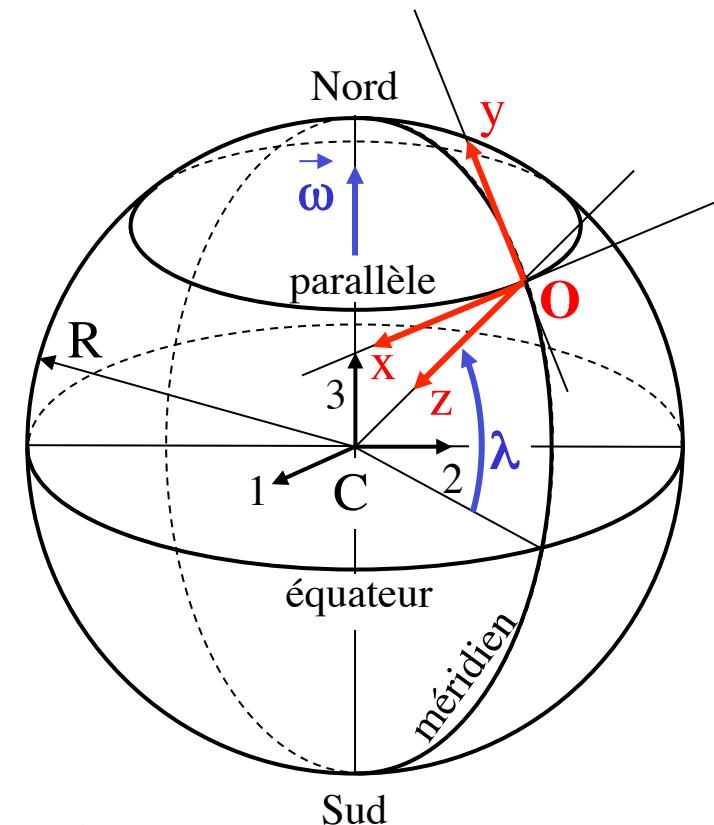


$$V_{\text{total}} = mgR \left(\cos\theta - \frac{\omega^2 R}{2g} \sin^2 \theta \right)$$

- a) Si $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$:
- équilibre instable en $\theta = 0$
 - équilibre stable en $\theta = \pi$:
- $$\omega_{\text{petites oscillations}} = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$$
- b) Si $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$:
- équilibre instable en $\theta = 0$
 - équilibre instable en $\theta = \pi$
 - équilibre stable en $\cos\theta = -\frac{g}{\omega^2 R} < 0$:
- $$\omega_{\text{petites oscillations}} = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}}$$

Référentiel terrestre

- On considère la Terre comme un « référentiel relatif » en mouvement de rotation uniforme ω par rapport à un « référentiel absolu » défini par le centre de la Terre et trois étoiles fixes (on néglige le mouvement de la Terre autour du Soleil, ...)
- C = centre de la Terre
- O = point sur la Terre à la latitude λ
- Repère Oxyz lié à la Terre (référentiel terrestre)
 - Ox pointe vers l'ouest, Oy vers le nord, et Oz vers C
- Repère C123 lié au référentiel absolu
 - C3 pointe vers le nord
- Valeurs numériques:
 - rayon $R = 6.37 \times 10^6$ m
 - vitesse angulaire $\omega = 2\pi / \text{jour} = 7.29 \times 10^{-5}$ s⁻¹



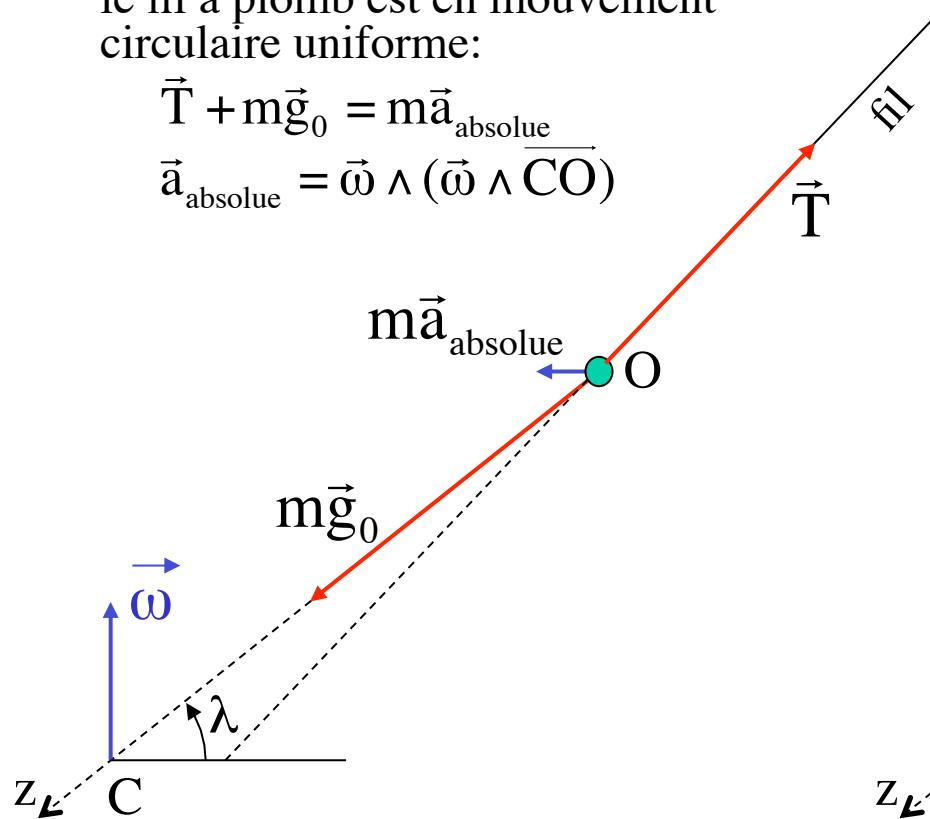
Champ de pesanteur terrestre

- Fil à plomb installé au point O:
 - soumis à son « poids absolu » $m\vec{g}_0$ (dirigé selon Oz) et à la tension du fil \vec{T} (g_0 est le champ de gravitation dû à la masse de la Terre)

Dans le référentiel absolu,
le fil à plomb est en mouvement
circulaire uniforme:

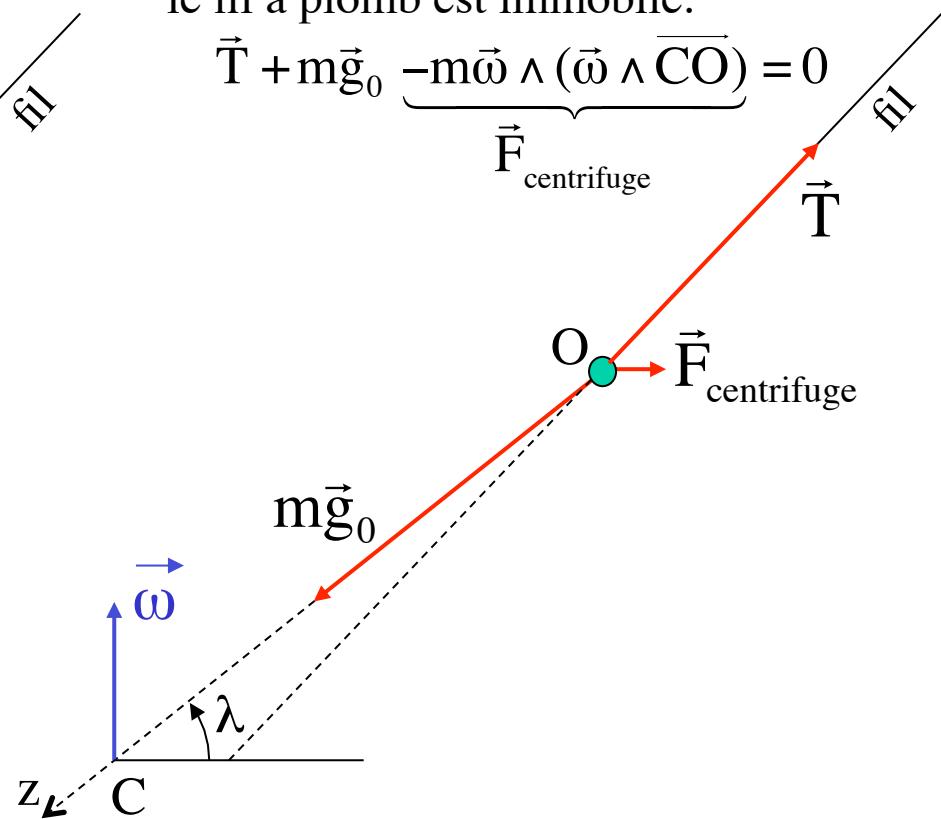
$$\vec{T} + m\vec{g}_0 = m\vec{a}_{\text{absolue}}$$

$$\vec{a}_{\text{absolue}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO})$$



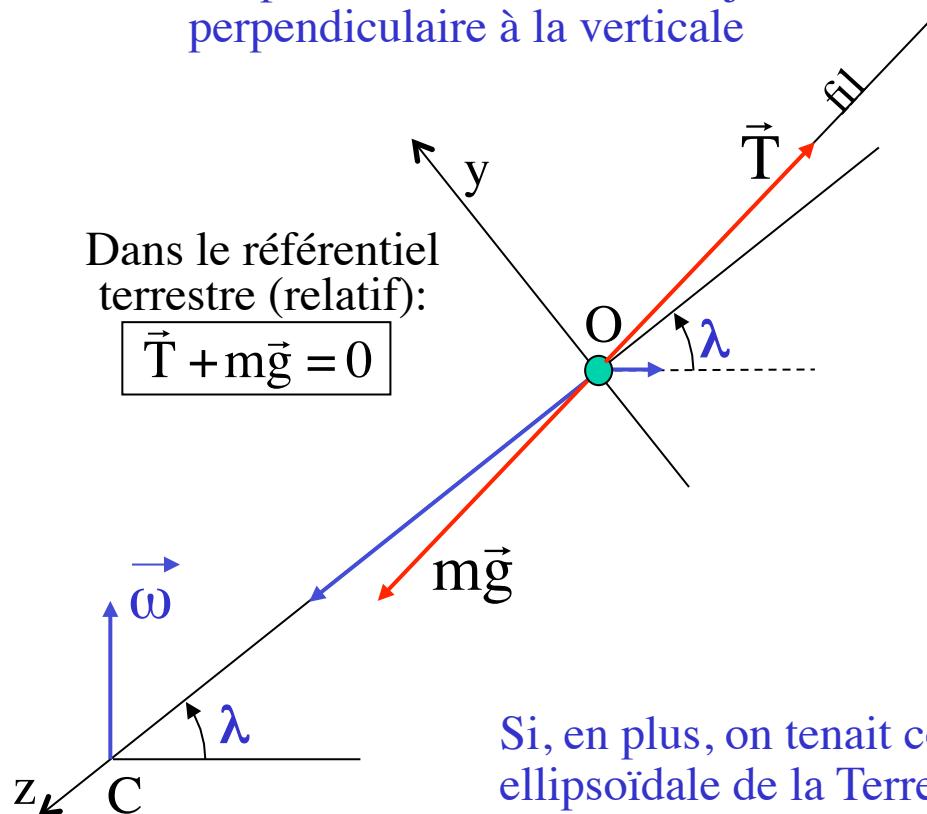
Dans le référentiel terrestre (relatif),
le fil à plomb est immobile:

$$\vec{T} + m\vec{g}_0 - \underbrace{m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO})}_{\vec{F}_{\text{centrifuge}}} = 0$$



Champ de pesanteur terrestre (2)

- On définit le « poids apparent » mg comme l'opposé de la tension du fil
- Ce poids apparent définit la verticale au point O:
 - La verticale ne passe pas par le centre de la Terre (sauf si O est aux pôles ou à l'équateur)
 - Un plan d'eau calme est toujours perpendiculaire à la verticale



Champ de pesanteur apparent:

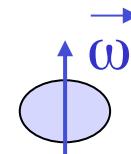
$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO})$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 R}{g_0} \approx \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{9.8} \approx 0.0035$$

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \vec{g}_0 - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CO}) \\ &= g_0 \hat{z} - (\omega^2 R \cos \lambda)(\cos \lambda \hat{z} + \sin \lambda \hat{y}) \\ &= g_0 [(1 - \varepsilon \cos^2 \lambda) \hat{z} - \varepsilon \cos \lambda \sin \lambda \hat{y}] \\ g &\approx g_0 (1 - \varepsilon \cos^2 \lambda) \approx g_{\text{éq}} (1 + \varepsilon \sin^2 \lambda)\end{aligned}$$

Si, en plus, on tenait compte de la légère déformation ellipsoïdale de la Terre due à la force centrifuge:

$$g \cong g_{\text{éq}} (1 + 0.0053 \sin^2 \lambda) \quad \text{avec } g_{\text{éq}} \cong 9.78 \text{ m/s}^2$$

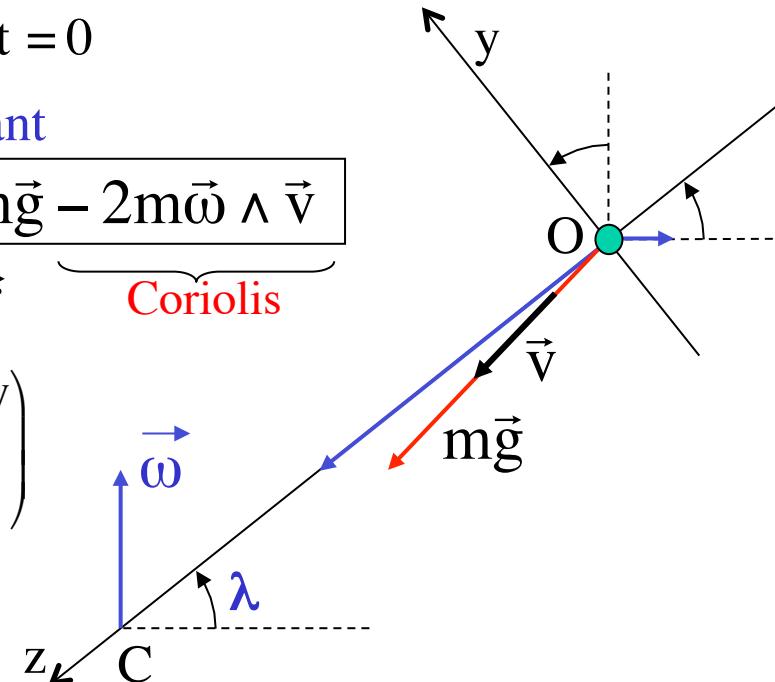


Dynamique terrestre: chute libre

- On se place dans le référentiel terrestre (repère Oxyz)
- Une masse m est lâchée au point O sans vitesse initiale
 - conditions initiales: $\vec{r} = 0$ et $\vec{v} = 0$ à $t = 0$
 - approximation: on considère g constant
- Equation du mouvement: $m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$
 ou, par intégration: $\vec{v} = \vec{g}t - 2\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ Coriolis

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ -\omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cos \lambda z + \omega \sin \lambda y \\ -\omega \sin \lambda x \\ -\omega \cos \lambda x \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = g_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \cos \lambda \sin \lambda \\ 1 - \epsilon \cos^2 \lambda \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = -2\omega \cos \lambda z - 2\omega \sin \lambda y \\ \dot{y} = -\epsilon \cos \lambda \sin \lambda g_0 t + \underbrace{2\omega \sin \lambda x}_{\text{n\'eglige}} \\ \dot{z} = (1 - \epsilon \cos^2 \lambda) g_0 t + \underbrace{2\omega \cos \lambda x}_{\text{n\'eglige}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cong -\omega \cos \lambda (1 - \epsilon) \frac{1}{3} g_0 t^3 \\ y \cong -\epsilon \cos \lambda \sin \lambda \frac{1}{2} g_0 t^2 \\ z \cong (1 - \epsilon \cos^2 \lambda) \frac{1}{2} g_0 t^2 \cong \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Dynamique terrestre: chute libre (2)

- Si la masse tombe d'une hauteur $z = h$:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \begin{cases} x \approx -\frac{2}{3}\omega \cos\lambda (1-\varepsilon) h \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx -\frac{2}{3}\cos\lambda h \sqrt{\frac{2\varepsilon h}{R}} \\ y \approx -\varepsilon \cos\lambda \sin\lambda h \\ z \approx h \end{cases}$$

- Déviations de la trajectoire par rapport à la direction Oz:

- Selon x (direction est-ouest), à cause de la **force de Coriolis**

- vers l'est: $x < 0$ quel que soit λ

- Selon y (direction sud-nord), à cause de la **force centrifuge**:

- vers le sud dans l'hémisphère nord: $y < 0$ si $\lambda > 0$
 - vers le nord dans l'hémisphère sud: $y > 0$ si $\lambda < 0$

Cette déviation correspond à celle du fil à plomb, c-à-d la masse tombe verticalement dans le plan Oyz

- Exemple:

- $h = 100$ m et $\lambda = 46.5^\circ$ (Lausanne) $\Rightarrow x \approx -1.5$ cm et $y \approx -17.5$ cm

Dynamique terrestre: mouvement horizontal

- Mouvement dans un plan ~horizontal ($\dot{z} \approx 0$, $\ddot{z} \approx 0$), maintenu par une force de liaison T verticale:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

Coriolis

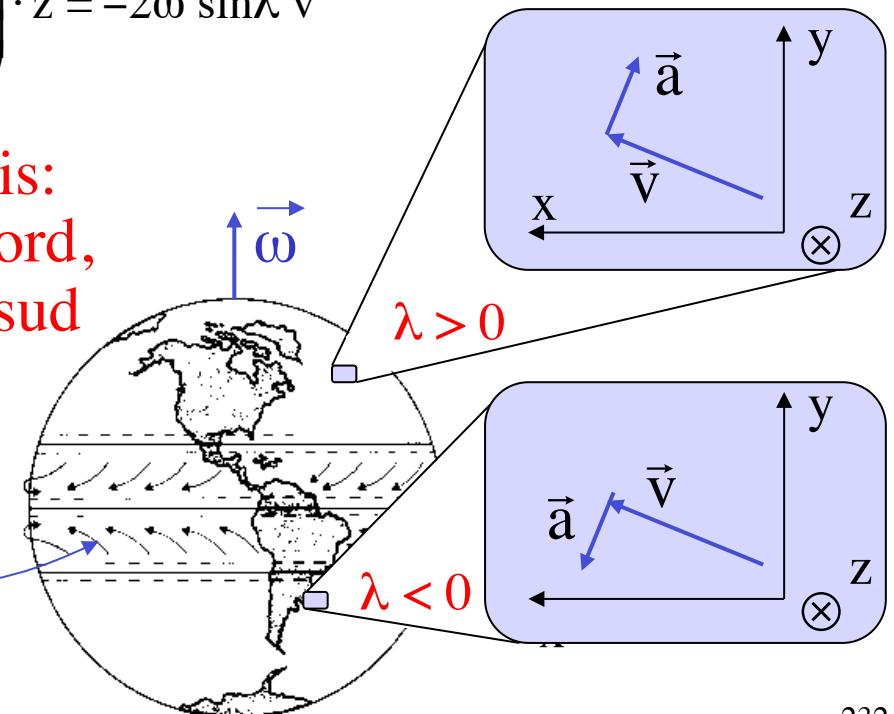
$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{\vec{T}}{m} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g + T/m \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ -\omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ 2\omega \sin \lambda \dot{x} \\ g + T/m + 2\omega \cos \lambda \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } (\vec{a} \wedge \vec{v}) \cdot \hat{z} = \left(\begin{pmatrix} -2\omega \sin \lambda \dot{y} \\ 2\omega \sin \lambda \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \hat{z} = -2\omega \sin \lambda v^2$$

- Déviation due à la force de Coriolis: vers la droite dans l'hémisphère nord, vers la gauche dans l'hémisphère sud

– Exemples:

- Tourbillonnement dans un cyclone
- Erosion des berges d'un fleuve
- Vents alizés
- Pendule de Foucault



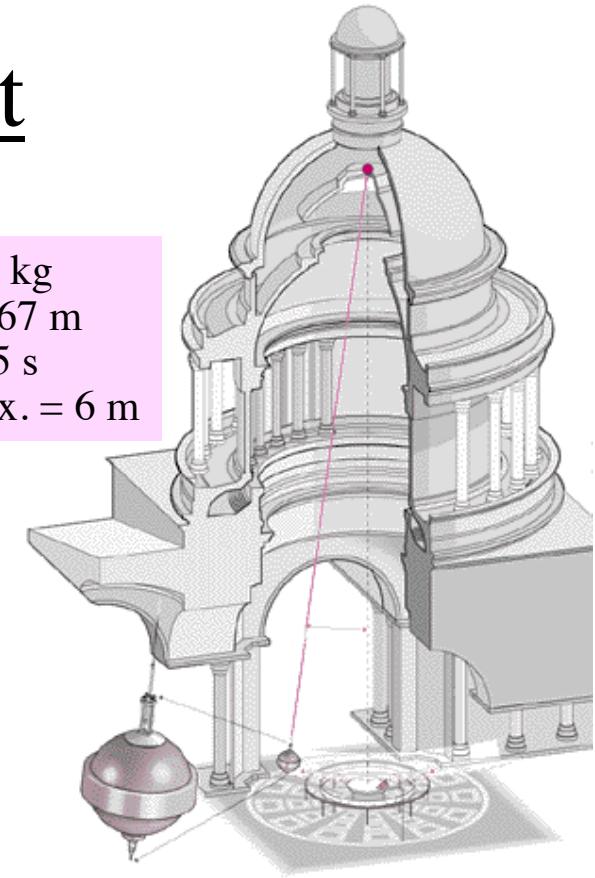
Pendule de Foucault

« Venez voir tourner la Terre »:

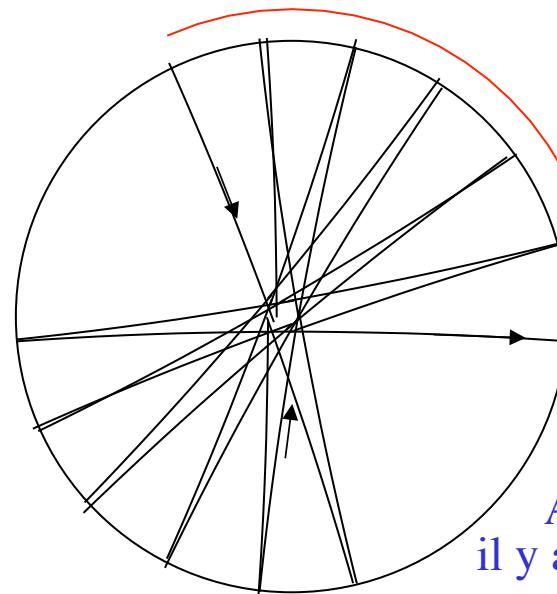
Démonstration de Léon Foucault,
le 31 mars 1851 au Panthéon de Paris,
en présence de Napoléon Bonaparte



masse $m = 28 \text{ kg}$
longueur $L = 67 \text{ m}$
période = 16.5 s
amplitude max. = 6 m



Trajectoire
vue de dessus



A chaque oscillation
il y a déflexion sur la droite

démo

Pendule de Foucault (2)

Pendule suspendu à l'origine du repère terrestre Oxyz, muni des coordonnées sphériques r, θ, ϕ :

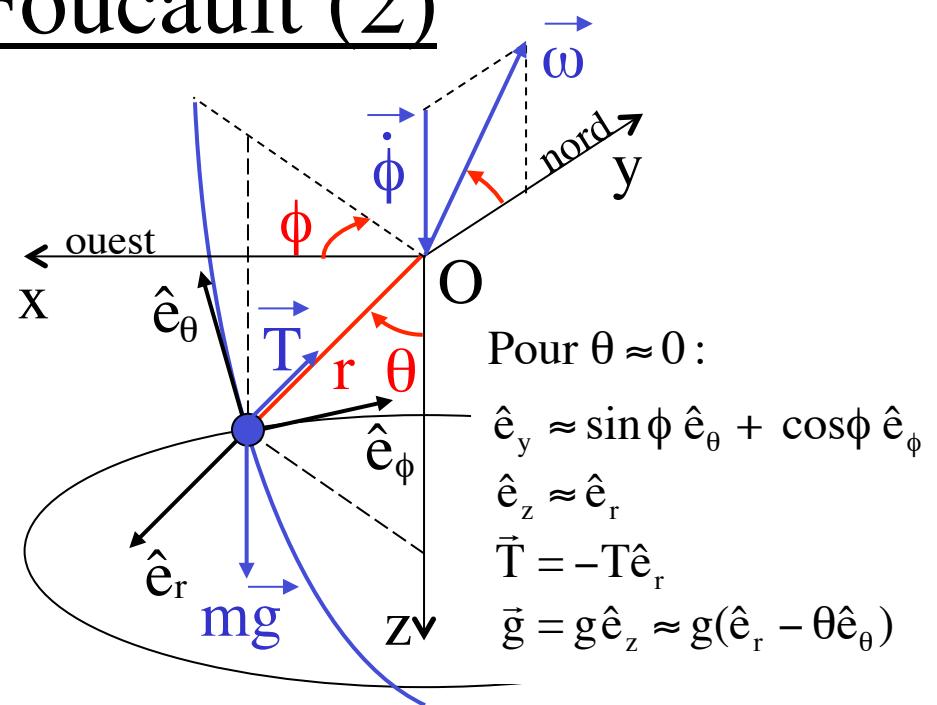
- On néglige le terme centripète (ou on redéfinit z selon la verticale)
- $\theta \ll 1 \rightarrow \sin\theta \approx 0$ et $\cos\theta \approx 1$
- Contraintes: $r = L, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0, \ddot{\phi} = 0$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin\theta \hat{e}_\phi \approx L\dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \hat{e}_r \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta) \hat{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta) \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\approx -L\dot{\theta}^2 \hat{e}_r + L\ddot{\theta} \hat{e}_\theta + 2L\dot{\phi}\dot{\theta} \hat{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \cos\lambda \hat{y} - \omega \sin\lambda \hat{z} \\ &\approx \omega \cos\lambda (\sin\phi \hat{e}_\theta + \cos\phi \hat{e}_\phi) - \omega \sin\lambda \hat{e}_r \\ \vec{\omega} \wedge \vec{v} &\approx -\omega L\dot{\theta} (\sin\lambda \hat{e}_\phi + \cos\lambda \cos\phi \hat{e}_r) \end{aligned}$$



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_r : -mL\dot{\theta}^2 &= mg - T + 2m\omega L\dot{\theta} \cos\lambda \cos\phi \\ \hat{e}_\theta : mL\ddot{\theta} &= -mg\theta \quad \Rightarrow \ddot{\theta} = -(g/L)\theta \\ \hat{e}_\phi : m2L\dot{\phi}\dot{\theta} &= 2m\omega L\dot{\theta} \sin\lambda \quad \Rightarrow \dot{\phi} = \omega \sin\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \frac{24 \text{ h}}{\sin\lambda} = 33 \text{ h à Lausanne} \quad (\sim 11^\circ/\text{h})$$

Aborder un problème de mécanique

- **définir le (ou les) système(s)** (point matériel, ensemble de points matériels, solide indéformable, ensemble de solides, ...)
- **choisir un référentiel** pour la description du (ou des) système(s)
- **identifier les forces extérieures** s'appliquant sur chaque système; prendre en compte les forces d'inertie si le référentiel n'est pas d'inertie
- **faire un grand dessin** pour chaque système, indiquant les forces
- décider de résoudre le problème en partant des **lois fondamentales de la dynamique (2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique)** ou bien des **lois de conservation**; pour cela, identifier l'existence éventuelle de constantes du mouvement:
 - si la résultante des forces extérieures n'a pas de composante selon une certaine direction u , la composante u de la **quantité de mouvement totale** est conservée
 - si la résultante des moments des forces extérieures par rapport à un certain point O n'a pas de composante selon une certaine direction u , la composante u du **moment cinétique total** par rapport à O est conservée
 - si chacune des **forces extérieures et intérieures** est conservative (ou bien ne travaille pas, ou bien compense le travail d'une autre force), l'**énergie mécanique** est conservée; son expression doit contenir l'énergie potentielle dont dérive chaque force conservative

Application des lois de la dynamique

1. Choisir les **variables** qui déterminent la position du système
2. Exprimer les **contraintes** dues aux forces de liaison (conditions sur, ou relations entre, les variables de position et/ou leurs dérivées temporelles)
3. Choisir un **repère** orthonormé droit
 - pour un solide, un repère selon les axes principaux d'inertie est conseillé
4. Etablir la liste des **forces extérieures** et de leurs **points d'application**
5. Choisir un **point de référence** pour le calcul des moments
 - le centre de masse G ou un point fixe est conseillé
6. Calculer les moments des forces, la quantité de mouvement totale, et le moment cinétique total en fonction des coordonnées et de leur dérivées par rapport au temps
7. Appliquer le **théorème du centre de masse (2ème loi de Newton)** et le **théorème du moment cinétique** par rapport au point de référence
 - pour un point matériel, la deuxième loi de Newton suffit
8. **Projeter** ces deux relations vectorielles sur les axes du repère
9. **Résoudre** les 6 équations différentielles pour trouver les coordonnées et les forces de liaison inconnues en fonction du temps

Indications pratiques

- Examen écrit:
 - Vendredi 20 janvier 2017, de 8:15 à 11:15
 - vous recevrez une information de la section de physique concernant l'auditoire où chacun/e est attendu/e
 - consignes exactes:
 - sont à disposition sur le site Moodle
- S'il reste des questions urgentes sur le cours ou les exercices:
 - dernière séance d'exercices vendredi 23 décembre
 - puis votre tuteur (à défaut, Fred Blanc) est encore à disposition par e-mail
 - séance de question & réponses le vendredi 13 janvier, de 13:00 à 16:00
 - salles: CO 015, CO 016, CO 017

Bonnes fêtes de fin d'année !