Corrigé 1 du jeudi 22 septembre 2016

Exercice 1.

Trouver un corps qui a exactement 4 éléments: 0 1 x y (ce qui suppose implicitement que x et y sont différents de 0 et de 1 ainsi que entre eux).

Indication: Réfléchissez à la multiplication d'abord, à l'addition ensuite. Que vaut 1+1? (oui, sérieusement!)

Un peut utiliser deux résultats:

1.) le groupe multiplicatif K^* est cyclique d'ordre 3.
2.) le groupe additif de K est abélien d'ordre 4.

Par le résultat 1, on a alors $x \cdot x = y$, $x \cdot x \cdot x = 1 = x \cdot y$, $y \cdot y = x$.

Par le résultat 2, on a que l'ordre de 1 divise 4. Ainsi, on a $1+1+1+1 = 0$. Puisque $1+1+1+1 = (1+1)(1+1) = 0$ et comme K est intègre, on doit avoir $1+1 = 0$. Par conséquent, on a aussi $x + x = 0$ et $y + y = 0$.
On considère x et on s'intéresse à $x+1$. Clairement $x+1 \neq 0$, sinon on aurait $x = -1 = 1$. De même, $x+1 \neq 1$, sinon on aurait $x = 0$ et $x+1 \neq x$, sinon on aurait $1 = 0$. Il reste $x+1 = y$. D'où on tire aussi $y+1 = x$ et $x + y = 1$.

On peut donner comme exemple un corps constitué de 4 matrices 2×2 sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$\left\{ 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ avec addition et multiplication standard des matrices.

Exercice 2.

1.) Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On a, en développant

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k &= (1 + 2 + \cdots + n) + \big(n + (n-1) + \cdots + 1\big) \\ &= (1+n) + \big(2 + (n-1)\big) + \cdots + \big((n-1) + 2\big) + (n+1) \\ &= (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

2.) Montrons que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Démonstration : Procédons par récurrence.

- Pour $n = 1$, on a simplement
$$\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1 = \sum_{k=1}^{1} k^3.$$
- Supposons à présent que
$$\left(\sum_{k=1}^{j} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{j} k^3, \quad \forall\ 1 \leq j \leq n,$$
et montrons que ça reste vrai pour $j = n + 1$. On a
$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 &= \left((n+1) + \sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1)^2 \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3.
\end{aligned}$$

□

Exercice 3.

Pour chacun des ensembles suivants dire s'il est majoré, minoré ou borné. S'il est majoré, donner son supremum. S'il est minoré, donner son infimum. Justifier votre réponse.

1.) S=$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$: S est majoré par 1 et minoré par 0 et donc borné; on a $\inf S = 0$ et $\sup S = 1$ puisque 0 et 1 appartiennent à S.

2.) S=$\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$: S est majoré par 1 et minoré par 0 et donc borné; on a $\inf S = 0$ et $\sup S = 1$ et 0 et 1 n'appartiennent pas à S; mais S contient en particulier $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ pour $n = 2, 3, \ldots$ ce qui montre qu'on ne peut pas trouver de minorant > 0 ni de majorant < 1.

3.) $S = \{x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$: S est borné; on a $\inf S = -1$ et $\sup S = 1$ puisque -1 et $1 \in S$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4.) $S = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$: S n'est pas minoré, mais S est majoré par $\sqrt{2}$; si $M = \sup S$, on a $M \leq \sqrt{2}$; si on avait $M < \sqrt{2}$, il existerait a rationnel (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) tq $M < a < \sqrt{2}$; on aurait donc $a \in S$ et $M < a$ ce qui serait une contradiction du fait que M est un majorant de S; on a donc $\sup S = \sqrt{2}$.

5.) $S = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$: S est borné; $\sup S = 1$ puisque $1 \in S$ et $x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\inf S = 0$ car $0 < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \epsilon$ tq $0 < \epsilon < 1$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} = x_n < \epsilon$ et donc $x_n \in S$ et $x_n < \epsilon$; ϵ n'est pas un minorant de S.

6.) $S = \{x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$: S est borné; on a $\inf S = -1$ et $\sup S = \frac{1}{2}$, les deux nombres sont dans S.