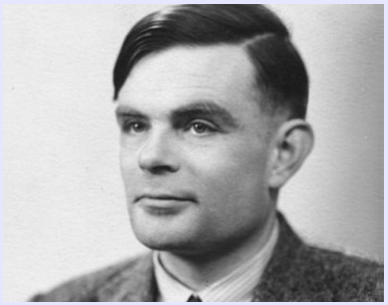
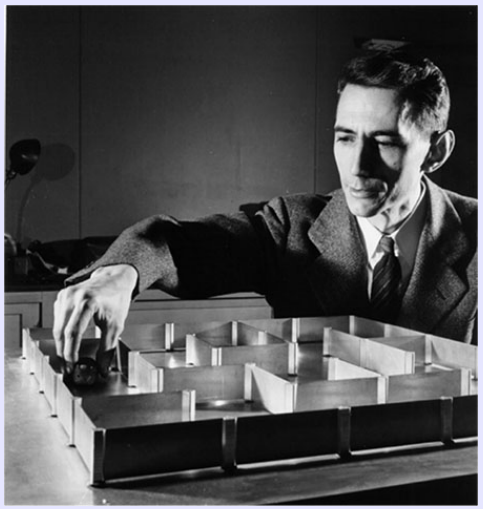
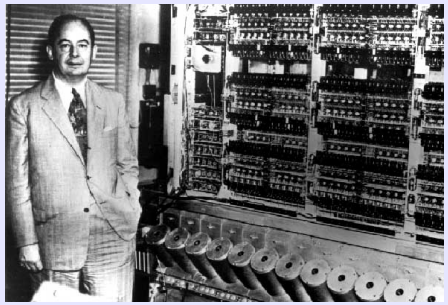




# Information, Calcul et Communication

## Module 2 : Information et Communication

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Information, Calcul et Communication

# Leçon 2.3 : Compression de données (1ère partie)

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Introduction

Lors des deux leçons précédentes, nous avons répondu aux questions suivantes :

- Comment représenter / capter la réalité physique avec des bits ?
  filtrage, échantillonage, quantification
- Comment restituer cette réalité à partir de bits ?
  reconstruction, th. d'échantillonage, importance du filtrage

Lors des deux leçons à venir, nous allons tenter de répondre aux questions suivantes :

- Comment mesurer la quantité d'information présente dans des données ?
- Comment stocker des données en utilisant le moins d'espace possible (sans ou avec pertes) ?

# Introduction

Pourquoi donc vouloir comprimer des données ?

- pour réduire l'espace mémoire utilisé lors du stockage de données
- pour réduire le temps de transmission et les problèmes de congestion lors de la transmission des données

Cependant, avec les progrès de la technique, ne suffit-il pas d'attendre un peu pour avoir de meilleures performances ?

Certes, mais on veut toujours exploiter un système au maximum de ses capacités !

# Introduction

Quel type de données peuvent être comprimées ?

- le langage
- le son (voix/musique), les images (photos), les vidéos
- tout type de données numériques

Le principe de base derrière la compression de données est la **suppression de la *redondance*** présente dans ces données.

# Introduction

Le français est plein de redondance ! Pour preuve, ce texte :

Sleon une édtue de l'Uvinertisé de Cmabrigde, l'odrre des ltteers dnas un mot n'a pas d'ipmrotncae, la suele coshe ipmrotnate est que la pmeirère et la drenèire soinet à la bn-noe pclae. Le rsete peut êrte dans un dsérorde ttoal et vuos puoevz tujoruos lrie snas porlbème. C'est prace que le crea-veu hmauin ne lit pas chuaqe ltetre elle-mmêe, mias le mot comme un tuot.

Pourquoi donc tant de redondance dans la langue française ?

- pour pouvoir se comprendre, tout simplement ! (« capacité du canal »)
- pour être capable de lire un texte même s'il contient des fotes d'ortografe...

# Introduction

On distingue deux types de compression :

- **la compression sans perte**, lorsqu'on désire retrouver l'intégralité des données stockées sous forme comprimée.

  **Exemples :** billets pour un concert, déclaration d'impôts, bulletins de vote, articles scientifiques

- **la compression avec pertes**, lorsqu'on n'est pas tant à cheval que ça sur les détails et qu'on s'autorise un peu de *distorsion*.

  **Exemples :** émissions podcastées et morceaux de musique en format mp3, partage de photos sur le web, vidéos youtube...

# Plan

**Plan détaillé des deux leçons à venir :**

**Aujourd'hui :**

- notion d'entropie
- compression sans perte
- algorithme de Shannon-Fano

**La semaine prochaine :**

- algorithme de Shannon-Fano (bis)
- analyse de performance – théorème de Shannon
- compression optimale : code de Huffman
- compression avec pertes

# Entropie

Voici une séquence de 16 lettres :

A B C D E F G H I J K L M N O P

**Jeu nº 1 :** Vous devez deviner quelle lettre j'ai choisi au hasard en posant un *nombre minimum de questions*, auxquelles je ne peux répondre que par oui ou par non.

**Solution :** 4 questions sont nécessaires (cf. leçon 1.1 : algorithme de dichotomie). On dit que l'entropie de cette séquence est égale à 4.

Remarquez que $16 = 2^4$, autrement dit : $4 = \log_2(16)$

# Entropie

Voici une autre séquence de 16 lettres (sans compter les espaces) :

I L  F A I T  B E A U  A  I B I Z A

**Jeu nº 2 :** Le jeu est le même qu'avant !

**Remarques :**

- Je choisis la *position* de la lettre au hasard, de manière uniforme.
- Vous ne devez deviner que la lettre elle-même, pas sa position.

Combien de questions binaires sont-elles nécessaires en moyenne pour deviner la lettre ?

# Entropie

I L  F A I T  B E A U  A  I B I Z A

**Solution :** *classer* les lettres dans l'ordre décroissant du *nombre d'apparitions* dans la séquence :

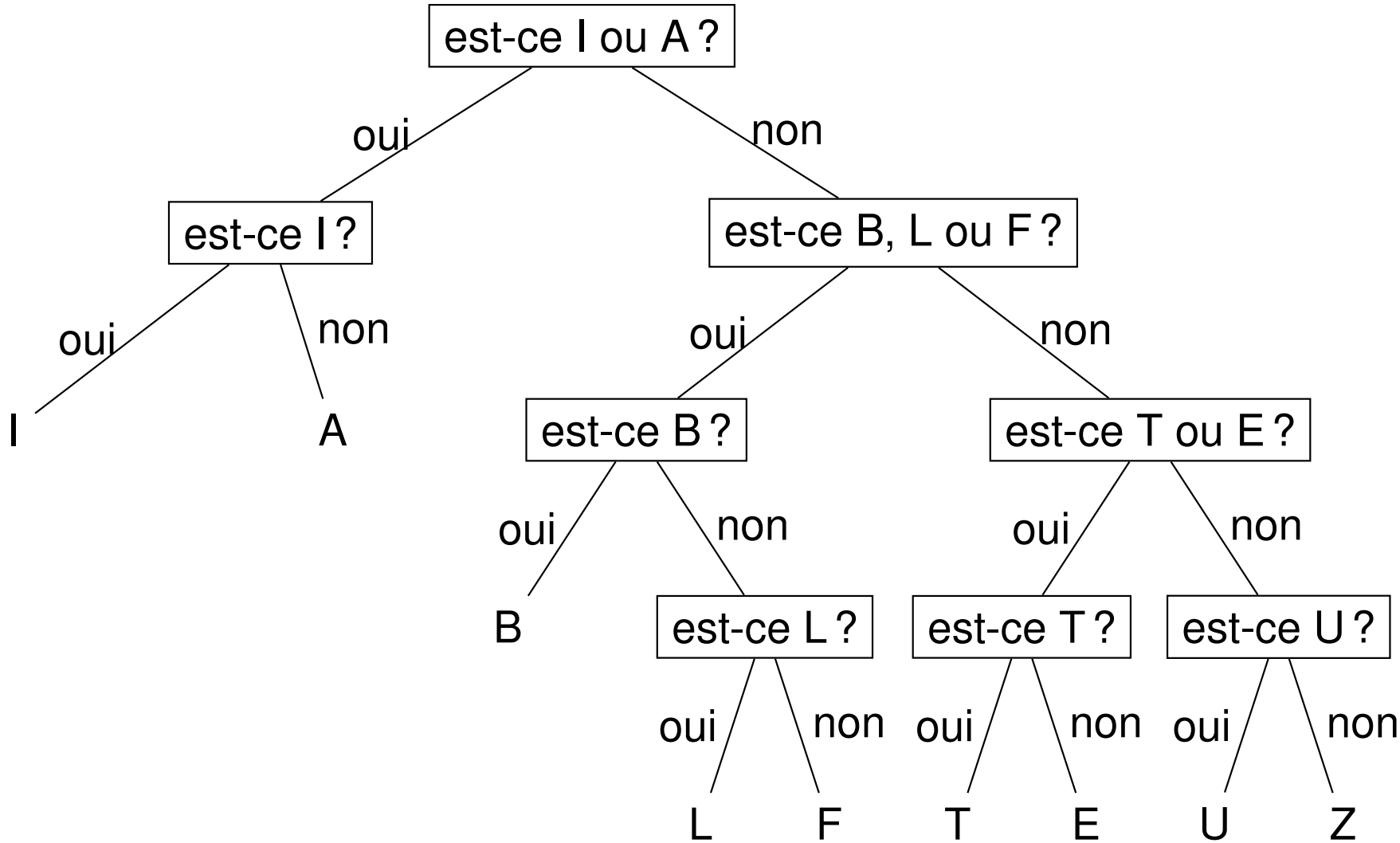
| lettre | I | A | B | L | F | T | E | U | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nb d'apparitions | 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

L'idée est la même que précédemment : on sépare l'ensemble des lettres en deux parties égales en termes de ***nombre d'apparitions***, ce qui donne :

**Question n° 1 :** est-ce que la lettre est un I ou un A ?

- Si la réponse est oui : **question n° 2 :** est-ce que la lettre est un I ?
- Si la réponse est non : **question n° 2 :** est-ce que la lettre est un B, un L ou un F ? etc.

# Arbre des questions



# Entropie

I L  F A I T  B E A U  A  I B I Z A

| lettre | I | A | B | L | F | T | E | U | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nb d'apparitions | 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| nb de questions | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Nombre de questions à poser en moyenne :

$$= 2 \times \frac{4}{16} \times 2 + 1 \times \frac{2}{16} \times 3 + 6 \times \frac{1}{16} \times 4 = \frac{16+6+24}{16} = \frac{46}{16} = 2.875$$

On dit que l'entropie de cette séquence est égale à 2.875.

# Entropie

Voici encore une autre séquence de 16 lettres :

A A A A A A A A A A A A A A A A

**Jeu nº 3** : Le jeu est encore le même qu'avant.

Cette fois-ci, *aucune* question n'est nécessaire pour deviner la lettre choisie !

On dit que l'entropie de cette séquence est égale à 0.

# Entropie

I L  F A I T  B E A U  A  I B I Z A

| lettre | I | A | B | L | F | T | E | U | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nb d'apparitions | 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| nb de questions | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

**Remarques :**

- Pour deviner une lettre qui apparaît 1 fois sur 16, on a besoin de 4 questions. $4 = \log_2(16)$
- Pour deviner une lettre qui apparaît 2 fois sur 16 (i.e. 1/8), on a besoin de 3 questions. $3 = \log_2(8)$
- Pour deviner une lettre qui apparaît 4 fois sur 16 (i.e. 1/4), on a besoin de 2 questions. $2 = \log_2(4)$
- En résumé, pour deviner une lettre qui apparaît avec une probabilité $p$, on a besoin de $\log_2\left(\frac{1}{p}\right)$ questions.

# Entropie – Définition simple

**Définition simplifiée :**

L'entropie est égale au **nombre moyen de questions** nécessaires pour deviner une lettre choisie au hasard dans une séquence :

Soit $X$ une séquence de « lettres » provenant d'un alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Soit $p_j$ la probabilité d'apparition de la lettre $a_j$ dans la séquence $X$ (par construction $0 \leq p_j \leq 1$ pour tout $j$ et $p_1 + \ldots + p_n = 1$).

*L'entropie* de la séquence $X$ est définie par :

$$\begin{aligned} H(X) &= p_1 \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \ldots + p_n \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right) \\ &= -\Big(p_1 \log_2(p_1) + \ldots + p_n \log_2(p_n)\Big) \end{aligned}$$

*Note :* par prolongement par continuité, $p_j \log_2(p_j) = 0$ pour $p_j = 0$.

# Entropie – Définitions plus générales

- La formule précédente reste valable même si les $p_j$ ne sont pas estimés sur la séquence elle-même, mais proviennent d'une estimation sur un texte plus grand ou même de notre connaissance du procédé qui a généré $X$.

  **Tout ce qui compte ce sont simplement les probabilités $p_j$** de chaque lettre (peut importe d'où elles viennent).

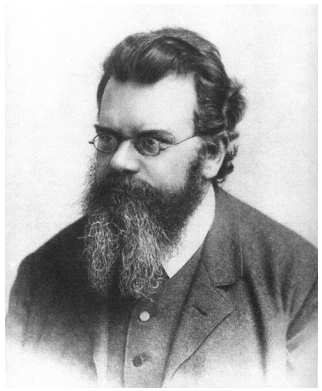
- En réalité, l'**entropie** calculée ici est simplement celle **du « jeu »** consistant à tirer une lettre du « mot » $X$ au hasard.

  Pour de vraies séquences, en tant que telles, la définition de l'entropie est bien plus complexe et intègre toutes les dépendances entre sous-séquences de lettres, i.e. les probabilités de toutes les sous-séquences de $n$ lettres.

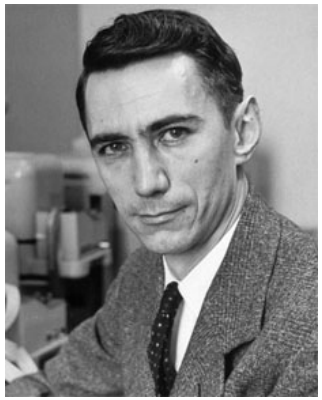
  Mais ceci nécessite des outils mathématiques plus avancés... (probabilités conditionnelles et limites).

# Entropie

- Origine en physique (Boltzmann, 1872) :
- L'entropie mesure le **désordre** dans un système physique.
- Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1905)
- ardent défenseur de l'existence des atomes
- père de la physique statistique



- Théorie de l'information (Shannon, 1948) :
- L'entropie mesure la **« quantité d'information »** contenue dans un signal.
- Claude Edwood Shannon (1916-2001)
- mathématicien, ingénieur électricien, cryptologue,
- père de la théorie de l'information



# Entropie

**Interprétation :**

A B C D E F G H I J K L M N O P $\quad H(X) = 4$

I L F A I T B E A U A I B I Z A $\quad H(X) = 2.875$

A A A A A A A A A A A A A A A A $\quad H(X) = 0$

Plus il y a de lettres différentes, plus il y a de désordre,
plus il y a de *nouveauté*,
plus il y a d'« *information* » dans le message.

Plus il y a de lettres semblables, moins il y a de désordre,
plus il y a de *redondance* et donc moins d'« information » dans le message.

**Redondance :** $R(X) = 1 - \dfrac{H(X)}{\log_2(n)}$ ($n$ : nombre de lettres différentes dans $X$)

# Entropie

**Une remarque, et quelques propriétés de l'entropie :**

$$H(X) = p_1 \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \ldots + p_n \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

- Pour une probabilité d'apparition $0 \leq p \leq 1$ donnée, $\log_2\left(\frac{1}{p}\right) \geq 0$, mais ça n'est pas forcément un nombre entier (p. ex. si $p = 1/3$).

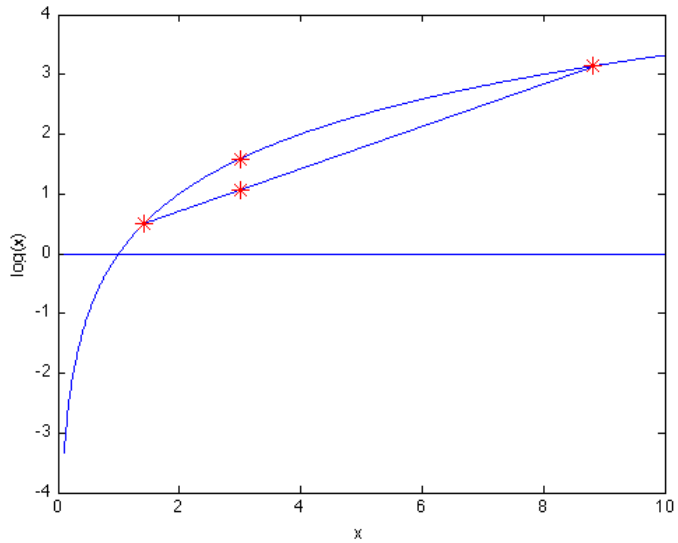
- $H(X) \geq 0$
  et $H(X) = 0$ si et seulement si toutes les lettres sont les mêmes.

- Si $n$ est la taille de l'alphabet utilisé, $H(X) \leq \log_2(n)$
  et $H(X) = \log_2(n)$ si et seulement si toutes les lettres sont différentes (et donc *équiprobables*).

## Démonstrations :

- $H(X) \geq 0$ : Remarquer simplement que $0 \leq p_j \leq 1$ implique que $p_j \log_2\left(\frac{1}{p_j}\right) \geq 0$, et donc que $H(X) \geq 0$.

- $H(X) \leq \log_2(n)$ : Remarquer que la fonction $f(x) = \log_2(x)$ est concave pour $x \geq 0$ :




- En particulier, cela implique que :

$$\alpha \log_2(x_1) + (1-\alpha)\log_2(x_2) \leq \log_2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 > 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$

- Autrement dit, si $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$ et $p_1 + p_2 = 1$, alors :

$$p_1 \log_2(x_1) + p_2 \log_2(x_2) \leq \log_2(p_1 x_1 + p_2 x_2) \quad \text{pour tout } x_1, x_2 > 0$$

## Démonstrations : (suite)

- Plus généralement encore, si $0 \leq p_j \leq 1$ et $p_1 + \ldots + p_n = 1$, alors

$$p_1 \log_2(x_1) + \ldots + p_n \log_2(x_n) \leq \log_2(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n > 0$.

- En appliquant cette inégalité avec $x_j = \dfrac{1}{p_j}$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} H(X) &= p_1 \log_2\left(\frac{1}{p_1}\right) + \ldots + p_n \log_2\left(\frac{1}{p_n}\right) \\ &\leq \log_2\left(\frac{p_1}{p_1} + \ldots + \frac{p_n}{p_n}\right) = \log_2(1 + \ldots + 1) = \log_2(n) \end{aligned}$$

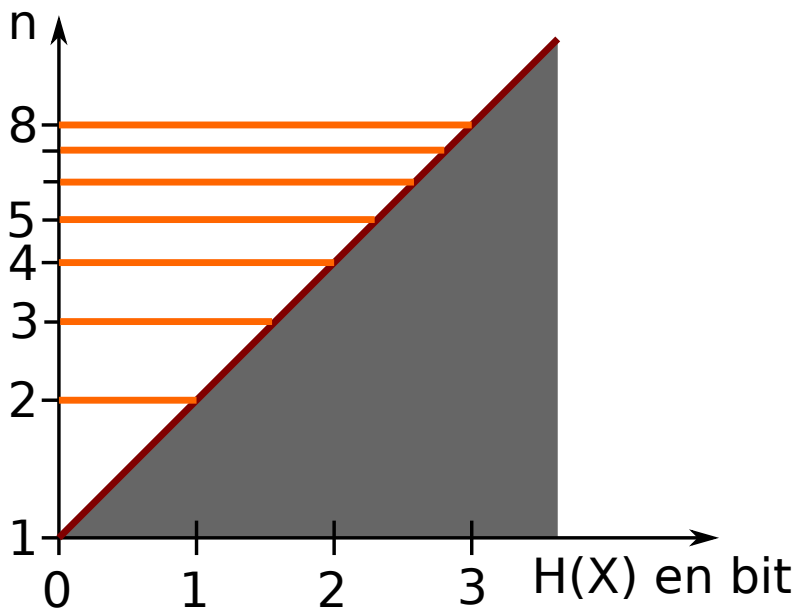
QED

# Propriétés de l'entropie

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(n)$$

Il y a donc 2 façons d'augmenter l'entropie :

- rendre les probabilités plus équilibrées (équiprobable)
- augmenter $n$ (nombre de valeurs possibles)



# Entropie

Mais à quoi tout cela peut-il bien servir ?

# Compression sans perte

Comme on l'a vu dans l'introduction, la compression de données permet :

- de réduire l'espace mémoire utilisé lors du stockage de données
- de réduire le temps de transmission et les problèmes de congestion lors de la transmission des données

Le principe de base derrière la compression de données est la supression de la **redondance** contenue dans ces données ; les lettres ou les mots qui reviennent souvent dans un message sont abrégé(e)s.

Lorsqu'on parle de compression **sans perte**, on demande que le message d'origine puisse être récupéré dans son intégralité après le processus de compression.

# Compression sans perte

**Exemples d'algorithmes de compression sans perte :**

- **Langage SMS :** « slt », « tqt », « mdr », etc ; les mots qui reviennent souvent sont réduits à de courtes séquences de lettres ; mais *normalement* on sait toujours de façon non ambigüe de quel mot d'origine il s'agit

- **Code Morse :** « a » = **.–** « e » = **.** « s » = **...** « t » = **–**
  tandis que « x » = **–..–** « z » = **– –..**

Le concept d'entropie permet de comprimer des données de manière *systématique et optimale*.

# Compression sans perte

Revenons sur la plage à Ibiza, et supposons que vous vouliez envoyer ce message par SMS à un ami :

I L  F A I T  B E A U  A  I B I Z A

Le but du jeu est maintenant de *minimiser le nombre de bits* nécessaires pour représenter ce message.

**Remarque importante :**
La personne qui reçoit votre message doit être capable de le lire !

- ☞ *Avant* l'envoi du message, l'expéditeur et le destinataire se sont mis d'accord sur un code commun.
  Exemple : A='001', B='101', etc.

Voyons comment construire un tel code, qui soit efficace.

# Compression sans perte

I L  F A I T  B E A U  A  I B I Z A

**1re idée :** Utiliser le code ASCII étendu (cf. leçon 1.4) : chaque lettre est représentée par 8 bits ; $16 \times 8 = 128$ bits sont donc nécessaires pour représenter ce message.

**2e idée :** Remarquer que le message à représenter n'est composé que de 9 lettres différentes : on n'a donc besoin que de $\lceil \log_2(9) \rceil = 4$ bits par lettre ; et donc $16 \times 4 = 64$ bits au total.

**3e idée :** Remarquer que certaines lettres sont plus fréquentes que d'autres... Comment en tirer partie ?

# Algorithme de Shannon-Fano

- Robert Fano (1917–2016)
- professeur au MIT
- autre pionnier de la théorie de l'information

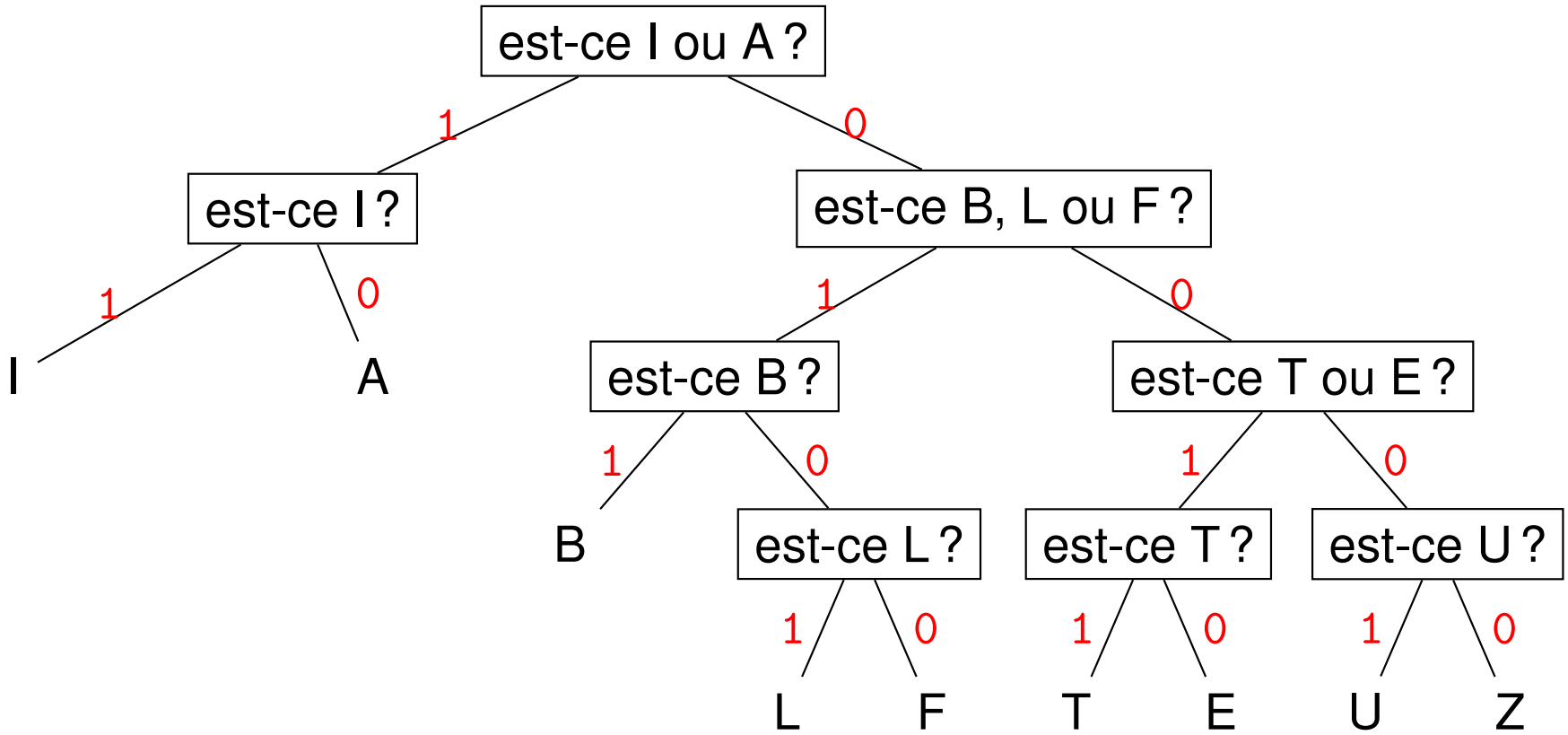
Pour attribuer une séquence de bits (un « mot de code ») à chaque lettre, nous suivons les deux règles ci-dessous :

- **Règle nº 1 :** le nombre de bits attribués à chaque lettre est égal au nombre de questions nécessaires pour la deviner.
- **Règle nº 2 :** les bits 0 ou 1 sont attribués en fonction des réponses obtenues aux questions. Plus précisément, le bit nº j est égal à 1 ou 0 selon que la réponse à la $j^e$ question était oui ou non.

# Algorithme de Shannon-Fano

I L F A I T B E A U A I B I Z A

| lettre | I | A | B | L | F | T | E | U | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nb d'apparitions | 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



# Algorithme de Shannon-Fano

Ce qui donne le code suivant :

| lettre | I | A | B | L | F | T | E | U | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nb de questions | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| mot de code | 11 | 10 | 011 | 0101 | 0100 | 0011 | 0010 | 0001 | 0000 |

Le message « IL FAIT BEAU A IBIZA » s'écrit ainsi :

$$11\,0101\,0100\,10\ldots$$

**Observation n° 1 :** Dans le code, aucun mot de code n'est le préfixe d'un autre. Donc le message reçu est parfaitement décodable, et ceci au fur et à mesure.

# Algorithme de Shannon-Fano

| lettre | I | A | B | L | F | T | E | U | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nb d'apparitions | 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| taille du code | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| mot de code | 11 | 10 | 011 | 0101 | 0100 | 0011 | 0010 | 0001 | 0000 |

**Observation nº 2 :** Le nombre de bits utilisés est égal à :

$$8 \times 2 + 2 \times 3 + 6 \times 4 = 16 + 6 + 24 = 46$$

Par rapport à la représentation « brute » qui nécessite 64 bits, on économise donc environ 25% de bits.

Vu que le message a 16 lettres, le nombre moyen de bits utilisés par lettre est égal à $46/16 = 2.875 = H(X) =$ entropie du message !

Nous montrerons la semaine prochaine que l'entropie est une **borne inférieure** au nombre moyen de bits par lettre dont on a besoin : aucun autre algorithme de codage non ambigu et sans perte ne permet de descendre plus bas que ça.

# En pratique... (1/3)

**Note :** pour décoder, il faut évidemment avoir le même arbre (il faut s'être mis d'accord des deux cotés au préalable : on ne « `unzip` » pas un fichier « `.rar` »).

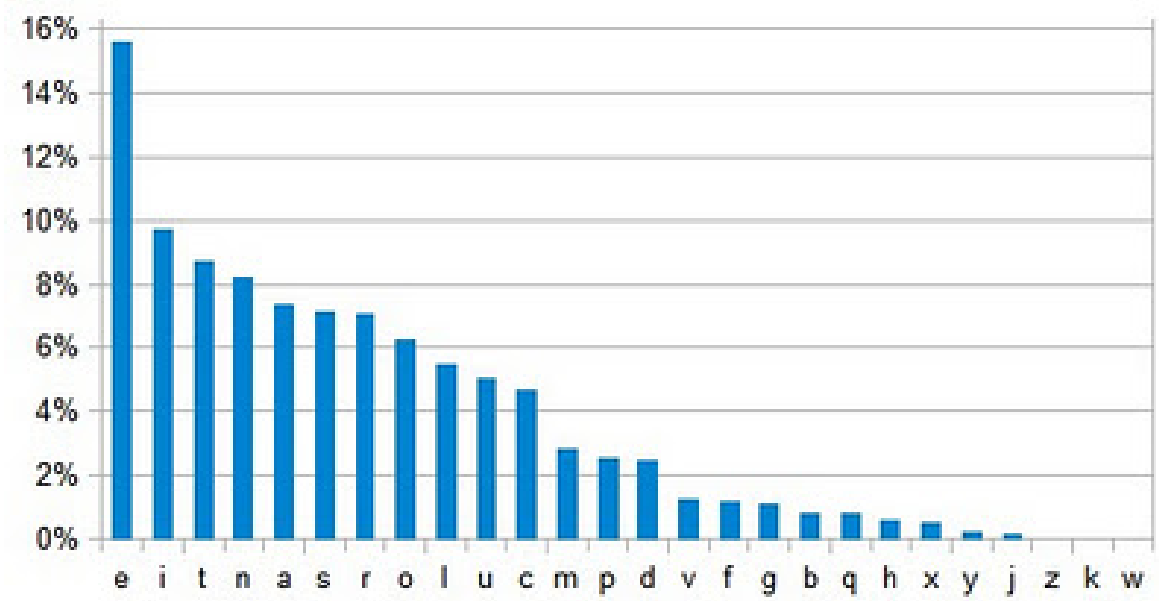
**Question :** Doit-on toujours recréer un code « depuis le début » pour représenter un message ?

**Réponse :** Non ! On peut simplement utiliser un code basé sur les probabilités d'apparition des lettres dans la langue française :

On applique l'algorithme précédent à un très gros texte de référence (plusieurs milliers de romans) pour trouver l'arbre que l'on utilise ensuite dans les algorithmes de codage et de décodage de toute séquence.

# En pratique... (23/3)

En pratique, on applique l'algorithme de calcul des code à un très gros texte de référence (plusieurs milliers de romans) pour trouver l'arbre que l'on utilise ensuite dans les algorithmes de codage et de décodage de toute séquence.




(tiré de la déclaration universelle des droits de l'homme)

Avec cet algorithme, on obtient les performances suivantes :

# Conclusion temporaire

- L'**entropie** mesure la « *quantité d'information* » présente dans un message : **nombre moyen de questions** nécessaires pour deviner une lettre choisie au hasard dans ce message

  *Note :* se généralise :
  - à n'importe quelle distribution de probabilité
  - à l'ensemble des sous-séquences (pas uniquement une seule lettre)

- Pour représenter un message par une séquence de bits, l'**algorithme de Shannon-Fano** exploite les nombres d'apparition.

  *Dans un cas particulier étudié*, il utilise en moyenne un nombre de bits par lettre égal à l'entropie du message.

**La semaine prochaine :**

- algorithme de Shannon-Fano (bis)
- analyse de performance – théorème de Shannon
- compression optimale : code de Huffman
- compression avec pertes