

Série 5 du mardi 18 octobre 2016

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

est une série convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente.

Exercice 2.

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$$

converge.

Exercice 3.

Etudier la convergence de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2 + n + 1} \right).$$

Exercice 4 (* A rendre) .

Trouver les trois constantes α, β et μ de sorte que pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

En déduire la somme de la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

Indication: On suppose connu le résultat que l'on verra plus tard:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$