Corrigé 8 du mardi 8 novembre 2016

Exercice 1 (* A rendre) .

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Alors il existe α, β tels que $\forall x, y \in [0,\infty[$ on a $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$.

Démonstration :

1.) En prenant $\varepsilon = 1$, par continuité uniforme, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq 1$ si $|x - y| \leq \delta$, $x, y \in [0,+\infty[$.

2.) Si $n \in \mathbb{N}$ on a en utilisant le point 1.),

$$|f(n\delta) - f(0)| \leq |f(n\delta) - f((n-1)\delta)| + |f((n-1)\delta) - f((n-2)\delta)| + \ldots + |f(\delta) - f(0)| \leq n.$$

3.) Si $x \in [0,+\infty[$ et si $m = [\frac{x}{\delta}]$, on a $|x - m\delta| \leq \delta$ et donc $|f(x) - f(m\delta)| \leq 1$. Ainsi

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(m\delta)| + |f(m\delta)| \leq 1 + |f(m\delta)| \leq 1 + m + |f(0)| \leq 1 + \frac{x}{\delta} + |f(0)|.$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \frac{1}{\delta}$ et $\beta = 1 + |f(0)|$.

$\square$

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \ell_2.$$

Montrons que f est uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$.

- Puisque $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell_2$, il existe $\beta > a$ tel que $\forall t \geq \beta, |f(t) - \ell_2| \leq \frac{\epsilon}{4}$.
  On en tire alors que $\forall x, y \geq \beta, |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

- Puisque $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1$, la fonction f se prolonge par continuité à droite en a. Ainsi, f est uniformément continue sur $]a, \beta]$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in]a, \beta]$ avec $|x - y| \leq \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

- Pour $a < x \leq \beta \leq y$ avec $y - x \leq \delta$, on a:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\beta)| + |f(\beta) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Finalement, $\forall x, y \in]a,\infty[$ avec $|x - y| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, ce qui montre que f est uniformément continue sur $]a,\infty[$.

Exercice 3.

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ croissante. Alors f admet un point fixe.

Démonstration : Posons $E = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) \leq x\}$. Puisque $f(b) \leq b$, on a que $b \in E$ et donc $E \neq \varnothing$. En outre, $x \in E \Rightarrow a \leq x$; E est donc minoré par a. On peut alors poser $c = \inf E$. Montrons que c est le point fixe cherché. Clairement $c \in [a, b]$ et on a soit $c = f(c)$, soit $c > f(c)$, soit $c < f(c)$.

1) Supposons que $c < f(c)$. On a donc $a \leq c < f(c) \leq b$, ainsi que $c \notin E$ puisque $f(c) > c$.
Par les propriétés de l'inf, il existe $d \in E$ tq $c < d < f(c)$.
Puisque f est croissante, on a $f(c) \leq f(d)$, et avec $d < f(c)$, il vient $d < f(d)$. Ce qui contredit le fait que $d \in E$.

2) Supposons maintenant que $c > f(c)$. On a donc $a \leq f(c) < c \leq b$. Soit d tel que $f(c) < d < c$. Puisque $d < c = \inf E$, $d \notin E$. Puisque f est croissante, on a $f(d) \leq f(c)$ et donc $f(d) < d$ et alors $d \in E$. Contradiction.

3) Il reste donc $c = f(c)$, donc c est un point fixe.

$\square$

Le résultat est faux si f est décroissante. En effet, la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/2, \\ 1/4, & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

n'a pas de point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique, continue. On pose $g(x) = f(x+\pi) - f(x)$.

1.) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $g(\alpha) = 0$.
Si $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, c'est fini.
Sinon, soit $x \in \mathbb{R}$ tq $g(x) \neq 0$. Alors $g(x+\pi) = f(x+2\pi) - f(x+\pi) = f(x) - f(x+\pi) = -g(x)$. Puisque g est continue sur $[x, x+\pi]$ et que $g(x)g(x+\pi) < 0$, il existe par le TVI un $\alpha \in [x, x+\pi]$ tq $g(\alpha) = 0$.

2.) En déduire que sur l'équateur terrestre, il y a toujours au moins 2 points diamétralement opposés avec la même température. On suppose que la température en fonction de la longitude sur l'équateur est continue; elle est trivialement périodique.