Corrigé 8 du jeudi 10 novembre 2016

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en $a \in \mathbb{R}$ et

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.) On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, ce qui implique $f(0) = 0$.

2.) Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a

$$f(x_n + a) = f(x_n) + f(a) \Rightarrow f(x_n) = f(x_n + a) - f(a).$$

On pose $a_n = x_n + a$ et puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Comme f est continue en a, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(a_n) - f(a)\Big) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$.

3.) Si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ converge vers $b \in \mathbb{R}$, on a

$$f(b_n) = f(b_n - b + b) = f(b_n - b) + f(b) \Rightarrow f(b_n) - f(b) = f(b_n - b).$$

Puisque $\lim_{n\to\infty}(b_n - b) = 0$ et f est continue en $x = 0$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty}(f(b_n) - f(b)) = 0.$$

4.) Si $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-2) + 2\,f(1) = \ldots = f(0) + n\,f(1) = n\,f(1).$$

De même on a $f(-n) = -n\,f(1)$. Ainsi $\forall z \in \mathbb{Z}$ on a $f(z) = z\,f(1)$.
Si $x \in \mathbb{Q}$ on a $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ et

$$pf(1) = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f\Bigg(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{q \text{ fois}}\Bigg) = q\,f\left(\frac{p}{q}\right) = q\,f(x).$$

Ainsi $f(x) = x\,f(1),\ \forall x \in \mathbb{Q}$. La fonction g définie par $g(x) = x\,f(1)$ est trivialement continue et de $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Ainsi

$$f(x) = x\,f(1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 (rendre).

Soit $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in [0,1]$, $P_0(x) = 0$.

1.) Montrons que $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1]$.

- Commençons par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1]$.

  Démonstration : Puisque $P_0(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$, on a $0 \leq P_0(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0,1]$. Supposons donc que pour $n \geq 0$ on ait

  $$0 \leq P_j(x) \leq \sqrt{x}, \qquad \forall x \in [0,1], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

  et montrons que

  $$0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0,1].$$

En utilisant la définition de P_{n+1} on a $\sqrt{x}-P_{n+1}(x)=\left(\sqrt{x}-P_n(x)\right)\left(1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+P_n(x)\right)\right)$. Puisque par hypothèse de récurrence on a $0\leq P_n(x)\leq\sqrt{x},\ \forall x\in[0,1]$, les facteurs

$$\sqrt{x}-P_n(x) \text{ et } \left(1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+P_n(x)\right)\right),$$

sont non négatifs pour tout $x\in[0,1]$. Ainsi $\sqrt{x}-P_{n+1}(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,1]$, ce qui montre que $P_{n+1}(x)\leq\sqrt{x}$. De façon évidente, puisque $0\leq P_n(x)\leq\sqrt{x}$, on a $P_{n+1}(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,1]$ qui découle de la définition de P_{n+1}.

$\square$

- Puisque $0\leq P_n(x)\leq\sqrt{x},\ \forall x\in[0,1]$, on a $(x-P_n^2(x))\geq 0$ et donc

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}(x-P_n^2(x))\geq P_n(x),\ \forall x\in[0,1].$$

Ainsi, la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante.

2.) Si $x\in[0,1]$ est fixé, la suite $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ est une suite numérique croissante et bornée par $\sqrt{x}$. Elle est donc convergente et on pose

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x).$$

On obtient ainsi $f(x)=f(x)+\frac{1}{2}\left(x-f^2(x)\right)$, ce qui implique $f^2(x)=x$ et donc $f(x)=\sqrt{x}$ (le signe $-$ est à exclure car $P_n\geq 0$).
Ainsi $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge ponctuellement vers la fonction continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sqrt{x}$. Le théorème de Dini permet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=f$ uniformément sur $[0,1]$.

3.) La fonction $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ est définie par $g(x)=|x|$ (fonction paire). Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=\sqrt{x}$ uniformément sur $[0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x^2)=|x|$ uniformément sur $[-1,1]$ et $P_n(x^2)$ est un polynôme.

Exercice 3.

On a:

1^o) $f'(x)=\dfrac{1+x^4-x\,4x^3}{(1+x^4)^2}=\dfrac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$,

2^o)
- Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, alors il existe $z\in\mathbb{Z}$ tel que $x\in]z,z+1[$. Ainsi $f(x)=x^2z$ et

$$f'(x)=2zx=2[x]\,x \text{ pour tout } x\in]z,z+1[.$$

- Si $x=0$ on a $f(0)=0$. De plus, pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $a_n\neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a_n)}{a_n}=0$, ce qui signifie que $f'(0)=0$.
- Si $z\in\mathbb{Z}^*$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x<z}}f(x)=z^2\,(z-1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x>z}}f(x)=z^3$.
  Ainsi f n'est pas continue en z et donc $f'(z)$ n'existe pas.

  En résumé : $f'(x)=2[x]x$ si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^*$ et $f'(x)$ n'existe pas si $x\in\mathbb{Z}^*$, $f'(0)=0$.

Exercice 4.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

- f est dérivable en zéro car $f'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}}\dfrac{f(x)}{x}=0$.
- f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On montre pour cela que f n'est pas continue $\mathbb{R}^*$.
  En effet, pour tout $x_0\in\mathbb{R}^*$, on peut construire une suite $(a_n)_{n\geq 0}\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et une suite $(b_n)_{n\geq 0}\subseteq\mathbb{Q}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x_0\in\mathbb{R}^*.$$

  Puisque

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=x_0^3\neq 0=\lim_{n\to\infty}f(b_n),$$

  on en déduit que la fonction f n'est pas continue en x_0.