CORRIGE SERIE 8

Exercice 1.

Exercice 2. *Proof.*On se rappelle que $\overrightarrow{GP_i} = P_i - G$, alors l'équation

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

est équivalent à

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} &= \sum_i \lambda_i (P_i - G) = \sum_i \lambda_i P_i - \sum_i \lambda_i G \\ &= \sum_i \lambda_i P_i - G \sum_i \lambda_i = \sum_i \lambda_i P_i - G,\end{aligned}$$

comme $\sum_i \lambda_i = 1$, ce qui veut dire que G est le barycentre de $(P_i)_{i=1}^n$ avec de poids $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Donc le barycentre G est le seul point qui vérifie $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$.

Il est clair que la translation préserve le barycentre (vérifiez-le vous-même!), donc il suffit de vérifier la proposition pour les isométries qui préservent l'origine. On sait qu'ils sont des applications linéaires. On a donc

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = 0 \quad \text{implique} \quad \phi\left(\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i}\right) = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{\phi(G)\,\phi(P_i)} = 0.$$

D'après le question (1), cela nous dire que $\phi(G)$ est le barycentre des points $\phi(P_i)_{i=1}^n$ avec de poids $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

□

Exercice 3. *Proof.*1. Par l'exercise 2, on sait déjà que la translation prserve les barycentres, il suffit de vérifier cette propriété pour les transformations linéaires. Soit ϕ_0 une transformation linéaire, soit G le barycentre de $(P_1, \cdots, P_n)$ avec de poids $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Par définition, on a

$$G = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i.$$

Puisque ϕ_0 est linéraire, on a

$$\phi_0(G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_0(P_i),$$

ce qui veut dire que $\phi_0(G)$ est le barycentre de $(\phi_0(P_1), \cdots, \phi_0(P_n))$ avec de poids $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Donc ϕ_0 préserve le barycentre.

2. Soit $\overrightarrow{v} = \varphi(0)$, soit $T_{-\overrightarrow{v}}$ la translation sur $\mathbb{R}^2$ par le vecteur $-\overrightarrow{v}$. On pose $\varphi_0 = T_{-\overrightarrow{v}} \circ \varphi$, alors $\varphi_0(0) = 0$. De plus, puisque la translation $T_{-\overrightarrow{v}}$ et φ préservent les barycentres, leur composé φ_0 les préserve aussi. On va montrer que φ_0 est une application linéaire, ce qui terminera la démonstration car $\varphi = T_{\overrightarrow{v}} \circ \varphi$ sera une application affine par définition.

On va donc montrer que φ_0 satisfait les deux propriétés:

$$\varphi(a\overrightarrow{u}) = a\varphi(\overrightarrow{u}), \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2; \tag{2}$$

$$\varphi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \varphi(\overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{w}), \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

L'idée pour la démonstration est de les lier avec les barycentres. Pour l'équation 2, on va discuter 3 cas:

Pour $0 \leqslant a \leqslant 1$, on peut écrire $a\overrightarrow{u}$ comme un barycentre de 0 et $\overrightarrow{u}$:

$$a\overrightarrow{u} = (1-a)\overrightarrow{0} + a\overrightarrow{u},$$

car $1-a$ et a sont dans l'interval $[0,1]$. Parce que φ_0 préserve le barycentre, on a

$$\varphi_0(a\overrightarrow{u}) = (1-a)\varphi_0(\overrightarrow{0}) + a\varphi_0(\overrightarrow{u}) = a\varphi_0(\overrightarrow{u}).$$

Pour $a > 1$, on peut écrire $\overrightarrow{u}$ comme un barycentre de 0 et $a\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{u} = (1 - \frac{1}{a})\overrightarrow{0} + \frac{1}{a}(a\overrightarrow{u}),$$

car $\frac{1}{a}$ et $1 - \frac{1}{a}$ sont dans l'interval $[0,1]$. Parce que φ_0 préserve le barycentre, on a

$$\varphi_0(\overrightarrow{u}) = (1 - \frac{1}{a})\varphi_0(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{a}\varphi_0(a\overrightarrow{u}) = \frac{1}{a}\varphi_0(a\overrightarrow{u}),$$

ce qui nous donne $\varphi_0(a\overrightarrow{u}) = a\varphi_0(\overrightarrow{u})$.

Pour $a < 0$, le point 0 se situe entre $\overrightarrow{u}$ et $a\overrightarrow{u}$, on va donc écrire $\overrightarrow{0}$ comme un barycentre de $\overrightarrow{u}$ et $a\overrightarrow{u}$: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{u} + (1-\lambda)(a\overrightarrow{u}) = [\lambda + (1-\lambda)a]\overrightarrow{u}. \tag{4}$$

On a donc l'équation

$$\lambda + (1-\lambda)a = 0, \tag{5}$$

ce qui nous donne

$$\lambda = \frac{a}{a-1} = \frac{1}{1-a^{-1}}.$$

Puisque $a < 0$, on a $0 < \lambda = \frac{1}{1-a^{-1}} < 1$. Donc l'équation 6 exprime bien $\overrightarrow{0}$ comme un barycentre de $\overrightarrow{u}$ et $a\overrightarrow{u}$. Appliquant φ_0 à l'équation 6, on trouve

$$\varphi_0(\overrightarrow{0}) = \lambda\varphi_0(\overrightarrow{u}) + (1-\lambda)\varphi_0(a\overrightarrow{u}),$$

ce qui nous donne

$$\varphi_0(a\overrightarrow{u}) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}\varphi_0(\overrightarrow{u}) = a\varphi_0(\overrightarrow{u}),$$

si on utilise la relation 7. On termine ainsi la démonstration de l'équation 2.
Pour l'équation 3, on écrit $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ comme le milieu de $2\overrightarrow{u}$ et $2\overrightarrow{w}$:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}(2\overrightarrow{w}).$$

Parce que φ_0 préserve le barycenter, ceci nous donne

$$\varphi_0(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \frac{1}{2}\varphi_0(2\overrightarrow{u}) + \frac{1}{2}\varphi_0(2\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w},$$

ici pour la deuxième égalité, on a utilisé l'équation 2, déjà montré.

□

Exercice 4.
Exercice 5.
Exercice 6. On cherche une matrice qui fixe les points qui appartiennent a la droite $2x + 3y = 0$. Par exemple, le vecteur $(3, -2)$. On cherche a, b, c, d tels que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De plus, on veut trouver une matrice qui envoie un vecteur perpendiculaire a $(3, -2)$ sur son oppose. Par exemple $(2, 3)$. Donc, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

3a - 2b = 3
3c - 2d = -2
2a + 3b = -2
2c + 3d = -3

On trouve donc $a = 5/13$, $b = c = -12/13$ et $d = -5/13$. La matrice recherchee est :

$$\begin{pmatrix} 5/13 & -12/13 \\ -12/13 & -5/13 \end{pmatrix}$$