ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Douchet & J.Rappaz

Propédeutique automne 2008

Lundi 1er septembre 2008, **08:15 - 12:15**
Salle MA C2 642

Exercice 1 (6 points) .

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement contractante et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné. On définit la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ par

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1°) Démontrer qu'il existe une constante positive $k < 1$ telle que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|,\ n = 1, 2, 3, \dots$$

2°) Démontrer que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|,\ n = 1, 2, 3, \dots$$

3°) Démontrer que

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|,\ n, m = 1, 2, 3, \dots$$

4°) Démontrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et que l'on a $a = f(a)$.

Exercice 2 (6 points) .

Soient I_1, I_2 deux intervalles ouverts, $(a, b) \in I_1 \times I_2$ et $M, N : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 telles que $N(a, b) \neq 0$ et pour tout $(x, y) \in I_1 \times I_2$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

Soit encore $\chi : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\chi(x, y) = \int_a^x M(t, y)\ dt + \int_b^y N(a, t)\ dt.$$

1°) Calculer $\nabla\chi(x, y)$.

2°) Montrer qu'il existe localement une unique fonction $\phi :]a - \delta, a + \delta[\to I_2$, de classe C^1, telle que $\phi(a) = b$ et pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$:

$$\chi(x, \phi(x)) = 0.$$

3°) En déduire que la fonction ϕ est localement l'unique solution de la forme différentielle exacte

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$.

Exercice 3 (6 points) .

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos(\cos(x)).$$

Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 6 autour de 0.

Exercice 4 (6 points) .

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1.) Vérifier que f satisfait l'équation

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.) En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}.$$

Exercice 5 (6 points) .

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}},$$

est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 6 (6 points) .

Soit $D = [1, \sqrt{3}] \times [0, 1]$. Calculer

$$\iint_D \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \, dxdy.$$