ANALYSE I et II — Mardi 7 juillet 2011, 8H15-11H00

Math. et Phys. $1^{\text{ère}}$ année

Prof. J. Rappaz

Examen propédeutique pour le semestre de printemps 2011

Exercice 1 (10 points - Michel).

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y e^{x\sin y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y e^{x\sin y}$,
   Ainsi $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{bmatrix} \sin y \\ x\cos y \end{bmatrix} e^{x\sin y}$. On obtient $\vec{\nabla} f(0,0) = 0$.

2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \sin^2 y e^{x\sin y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2\cos^2 y e^{x\sin y} - x\sin y e^{x\sin y}$,
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = x\sin y\cos y e^{x\sin y} + \cos y e^{x\sin y}$.
   Ainsi $S(x,y) = \begin{bmatrix} \sin^2 y & x\sin y\cos y + \cos y \\ x\sin y\cos y + \cos y & x^2\cos^2 y - x\sin y \end{bmatrix} e^{x\sin y}$. On obtient $S(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3) On a $f(0,0) = 1, \vec{\nabla} f(0,0) = 0, S(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et donc

$$p(x,y) = 1 + xy$$

   qui est le développement de Taylor de f à l'ordre 2 autour de $(0,0)$.

   Autre façon de faire: $f(x,y) = e^{x(y+\mathcal{O}(y^3))}$ si $y \to 0$ et si $t = xy$ on a
   $f(x,y) = e^{t+\mathcal{O}(ty^2)} = 1 + t + \mathcal{O}(ty^2) + \mathcal{O}(t^2) = 1 + xy + \mathcal{O}(xy^3) + \mathcal{O}(x^2y^2)$ si $(x,y) \to (0,0)$.

Exercice 2 (10 points - Stéphane).

On a $f(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{x^3} + \int_0^x y^2 e^{xy^2}\,dy \quad \text{et donc} \quad f'(0) = 1 \\
f''(x) &= 3x^2 e^{x^3} + x^2 e^{x^3} + \int_0^x y^4 e^{xy^2}\,dy \quad \text{et donc} \quad f''(0) = 0, \\
f'''(x) &= 8x e^{x^3} + 12x^4 e^{x^3} + e^{x^3} x^4 + \int_0^x y^6 e^{xy^2}\,dy \quad \text{et donc} \quad f'''(0) = 0, \\
f^{(IV)}(x) &= 8e^{x^3} + 24x^3 e^{x^3} + \mathcal{O}(x^3) \text{ si } x \to 0 \quad \text{et donc} \quad f^{(IV)}(0) = 8.
\end{aligned}$$

Ainsi $p(x) = x + \frac{8}{4!}x^4 = x + \frac{1}{3}x^4$.

Autre façon:

$$\begin{aligned}
e^{xy^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xy^2)^n}{n!} = 1 + xy^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(xy^2)^n}{n!}, \\
\int_0^x e^{xy^2}\,dy &= x + \frac{x^4}{3} + \int_0^x \Big(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(xy^2)^n}{n!} \Big) dy.
\end{aligned}$$

Avec un argument de convergence absolue, on obtient

$$\int_0^x \Big(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(xy^2)^n}{n!} \Big) dy = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x \frac{(xy^2)^n}{n!} dy = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)n!} = \mathcal{O}(x^7) \text{ si } x \to 0.$$

Exercice 3 (10 points - Jacques).

L'équation caractéristique est $r^2 + \gamma r + \beta = 0$ et donc $r = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2}$.

Trois cas possibles:

1^o) $\gamma^2 - 4\beta > 0$. Alors la solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

avec $r_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2}$, $r_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\beta}}{2}$. Puisque r_1 et r_2 sont négatifs, on a $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$.

2^o) $\gamma^2 - 4\beta < 0$. Alors la solution générale de l'équation différentielle est

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} t} \Big(c_1 \sin\big(\frac{\sqrt{4\beta - \gamma^2}}{2}\big) + c_1 \cos\big(\frac{\sqrt{4\beta - \gamma^2}}{2}\big) \Big)$$

et donc $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$.

3^o) $\gamma^2 - 4\beta = 0$. Solution générale:

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2} t} + c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2} t} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 4 (5 points - Nouara).

On a $\left(\frac{z}{z-2}\right)^n = i$ et ainsi $\left(\frac{z}{z-2}\right)^n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$ et on obtient

$$\frac{z}{z-2} = e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}.$$

Si $\alpha_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, on a $|\alpha_k| = 1$ et $z = -\frac{2\alpha_k}{1-\alpha_k}$. Ainsi

$$\mathbb{R}e(z) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha_k}{1-\alpha_k} + \frac{2\bar{\alpha}_k}{1-\bar{\alpha}_k}\right) = \frac{2-\alpha_k-\bar{\alpha}_k}{(1-\alpha_k)(1-\bar{\alpha}_k)} = \frac{2-\alpha_k-\bar{\alpha}_k}{2-\alpha_k-\bar{\alpha}_k} = 1.$$

Exercice 5 (5 points - Nouara).

On peut paramétrer Γ par

$$\mathbf{r}(t) = \left\{ \begin{array}{l} x = \cos\, t \\ y = \sin\, t \\ z = \cos\, t + \sin\, t \end{array} \right. \qquad \text{avec } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Ainsi $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t),\ t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ et

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\ |\mathbf{r}'(t)|\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 2(\cos t + \sin t)\cos t + \cos t \sin t(-\sin t + \cos t)]\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin t \cos t - \sin^2 t + 2\cos^2 t - \sin^2 t \cos t + \cos^2 t \sin t\right]\ dt.
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, en faisant le changement de variables $s = \sin t, ds = \cos t\, dt$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}.$$

Enfin si on pose $s = \cos t, ds = -\sin t\, dt$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t\, dt = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}.$$

On conclut ainsi que

$$\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}\ d\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 6 (10 points - Nicolas).

Il s'agit de minimiser $d(P)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ sous les conditions $(x, y, z) \in D_1$ et $(x, y, z) \in D_2$. Le Lagrangien devient:

$$L(\lambda, \mu, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4) + \mu(x + y + z - 1).$$

On a:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y + z - 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z + \mu = 0 \qquad (5)$$

De (5) on obtient $z = -\frac{\mu}{2}$. De (3) et (4) on obtient $(1 + \lambda)x = -\frac{\mu}{2}$ et $(1 + \lambda)y = -\frac{\mu}{2}$.

- Si $\lambda = -1$: on obtient $\mu = 0$ et donc $z = 0$ Dans ce cas, de (1) et (2) on obtient:

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

  Ainsi, $x = 1 - y$, $x^2 = 1 + y^2 - 2y$ et $x^2 + y^2 = 1"2y^2 - 2y = 4, \Rightarrow y^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+6}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$ et $x = \frac{1}{2} \mp \frac{7}{2}$. Dans ce cas on obtient 2 points $\overline{P}$:

  $$\overline{P}_1 = \Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, 0\Big) \text{ et } \overline{P}_2 = \Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}, 0\Big)$$

  et on a dans les 2 cas $d(\overline{P}) = 2$.

- Si $\lambda \neq -1$: on obtient $x = y = -\frac{\mu}{2(1+\lambda)}$. En remplaçant dans (1), (2) on a

  $$\begin{cases} 2\frac{\mu^2}{4(1+\lambda)^2} = 4 \Rightarrow \mu^2 = 8(1 + \lambda)^2 \Rightarrow \left(\frac{\mu}{1+\lambda}\right)^2 = 8, \\ -\frac{\mu}{1+\lambda} - \frac{\mu}{2} = 1. \end{cases}$$

  - Si $\frac{\mu}{1+\lambda} > 0$ alors $\frac{\mu}{1+\lambda} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{2} - \frac{\mu}{2} = 1$
    $\Rightarrow \mu = 2(-1 - 2\sqrt{2}) = -2 - 4\sqrt{2}$ et donc $1 + \lambda = \frac{\mu}{\sqrt{8}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = -3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.
    Dans ce cas $x = y = -\frac{2}{,} z = 1 + 2\sqrt{2}$. Le point $\overline{P}$ devient $\Big(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\Big)$ et $d(\overline{P}) = \sqrt{13 + 4\sqrt{2}} > 2$.

  - Si $\frac{\mu}{1+\lambda} < 0$ alors $1 + \lambda = \frac{\mu}{\sqrt{8}} = \frac{2-4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-2} \Rightarrow \overline{P} = \Big(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 112\sqrt{2}\Big)$ et $d(\overline{P}) = \sqrt{13 - 4\sqrt{2}} > 2$.

<u>Conclusion</u>: On a deux points $\overline{P}$ qui réalisent le minimum cherché:

$$\overline{P}_1 = \Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, 0\Big) \text{ et } \overline{P}_2 = \Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}, 0\Big)$$

dont la distance à l'origine est 2.