Corrigé 9 du jeudi 17 novembre 2016

Exercice 1.

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$ telle que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty.$$

Montrons qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Puisque f est dérivable sur $]a,b[$, alors f est continue sur $]a,b[$.

- Commençons par montrer que f est minorée sur $]a,b[$. Puisque $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$, il existe $\delta > 0$, $\delta < \frac{b-a}{4}$ tel que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in]a, a+\delta] \cup [b-\delta, b[$. D'autre part, comme f est continue sur l'intervalle compact $[a+\delta, b-\delta]$, alors f est minorée sur cet intervalle. On conclut donc que $m = \inf_{x \in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$.
- Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset]a,b[$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty} \subset (x_n)_{n=0}^{\infty}$ et $c \in [a,b]$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$ (B.W.). Puisque $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = m < \infty$, on a nécessairement $c \in]a,b[$ (car $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$). Puisque f est continue sur $]a,b[$, on a

$$m = f(c) \leq f(x), \ \forall x \in]a,b[.$$

  Ainsi, f admet un minimum local en c et donc $f'(c) = 0$ par le théorème 4.1.

Exercice 2.

Soit $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell > 0$. Montrons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Démonstration :

- Puisque f est dérivable sur $]a,\infty[$, elle est continue.
- Puisque $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell > 0$, il existe $M > 0$ tel que $f'(x) \geq \frac{\ell}{2} > 0$, $\forall x \geq M$. Ainsi f est croissante sur $]M, +\infty[$.
- Ab absurdo, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$, alors f est bornée sur $[M, +\infty[$ et on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in [M, +\infty[$, par le théorème des accroissements finis, il existe alors $\xi = \xi(x) \in]x, x+1[$ tel que

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(\xi).$$

- En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = \dfrac{\alpha - \alpha}{1} = \ell$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\ell > 0$.

$\square$

Exercice 3.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Calculer

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

On a par Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2),$$
$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2).$$

En additionnant et en faisant tendre h vers 0, on obtient

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

Exercice 4.

On a

1.) Il y a plusieurs façons de calculer $\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\sin 2x - \sin 4}{x-2}$.

- La plus simple est de remarquer que la dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin 2x$, au point $x = 2$, vaut:
$$f'(2) = 2 \cos 4 = \lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\sin 2x - \sin 4}{x-2}.$$
Ainsi
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\sin 2x - \sin 4}{x-2} = 2 \cos 4.$$
- Une autre façon d'obtenir ce résultat est de considérer le développement limité à l'ordre 1 autour de $x = 2$ de la fonction f ci-dessus. On obtient
$$\sin 2x = \sin 4 + 2(x-2) \cos 4 + r(x), \qquad \text{où } r(x) = o(|x-2|) \text{ lorsque } x \to 2,$$
ce qui implique $\frac{\sin 2x - \sin 4}{x-2} = 2 \cos 4 + \frac{r(x)}{|x-2|}$.
Puisque $r(x) = o(|x-2|)$ si $x \to 2$ signifie que $\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{|r(x)|}{|x-2|} = 0$, on obtient
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ \neq}} \frac{\sin 2x - \sin 4}{x-2} = 2 \cos 4.$$
- Une troisième solution est d'utiliser la règle de Bernouilli-L'Hospital.
- Une quatrième solution est d'écrire que:
$$\sin 2x - \sin 4 = 2 \sin \frac{2x-4}{2} \cos \frac{2x+4}{2}.$$
On en tire:
$$\frac{\sin 2x - \sin 4}{x-2} = 2\frac{\sin(x-2)}{x-2} \cos(x+2) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 2 \cos 4.$$

2.) Si on pose $f(x) = 6 \sin x - 6x + x^3$ et $g(x) = x^5$ on obtient
$$f'(x) = 6 \cos x - 6 + 3x^2 \text{ et } g'(x) = 5x^4$$
et donc $f'(0) = g'(0) = 0$.
En calculant $f''(x) = -6 \sin x + 6x$ et $g''(x) = 20x^3$ on obtient $f''(0) = g''(0) = 0$.
En calculant $f'''(x) = -6 \cos x + 6$ et $g'''(x) = 60x^2$ on obtient $f'''(0) = g'''(0) = 0$.
En calculant $f^{IV}(x) = 6 \sin x$ et $g^{IV}(x) = 120x$ on obtient $f^{IV}(0) = g^{IV}(0) = 0$.
Ainsi, en appliquant 4 fois la règle de Bernouilli-L'Hôspital, on obtient:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f^{IV}(x)}{g^{IV}(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{6 \sin x}{120x} = \frac{1}{20}.$$