EPFL Automne 2017
Geometrie, MATH-120

Série 13

Exercice 1. Soit $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble du plan (une "figure"). Le groupe d'isometries de $\mathbf{P}$, est l'ensemble

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}} = \{\varphi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2),\ \varphi(\mathbf{P}) = \mathbf{P}\} \text{ avec } \varphi(\mathbf{P}) = \{\varphi(P),\ P \in \mathbf{P}\}.$$

c'est a dire l'ensemble des isometries laissant $\mathbf{P}$ globalement invariant.

1. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ est bien un groupe.
2. Soit $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, et $\psi(\mathbf{P})$ l'image de $\mathbf{P}$ par cette isometrie. Calculer $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\psi(\mathbf{P})}$ en fonction de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ et ψ.

Exercice 2. Soit $\mathbf{P} = \{P_1, \cdots, P_n\}$ un ensemble de $n \geqslant 3$ points qui ne sont pas tous alignes sur une meme droite et soit $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ son groupe d'isometries.

1. Soit ϕ une isometrie telle que
$$\forall i = 1, \cdots n,\ \phi(P_i) = P_i,$$
montrer que ϕ est l'identite.
2. Montrer que si ϕ, ψ sont des isometries (quelconques) telles que
$$\forall i = 1, \cdots n,\ \phi(P_i) = \psi(P_i),$$
alors $\phi = \psi$.
3. Montrer que le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ est fini (on remarquera que tout element de ce groupe induit une permutation de l'ensemble $\mathbf{P}$) ; en particulier (en vertu du Theorem de classifications des groupes finis d'isometries) il est soit cyclique soit dihedral.
4. Que dire si $n = 2$?
5. Montrer (avec un exemple simple) que si $\mathbf{P}$ est un ensemble de points du plan, qui ne sont pas tous alignes et qui est infini alors $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ peut etre egalement infini.

Définition 1. *Soit $n \geqslant 3$ un entier, un polygone generalise a n cotes $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ est une reunion de segments (appeles cotes du polygone) de la forme*

$$\mathbf{P} = \bigcup_{i=1\cdots n} [P_i P_{i+1}]$$

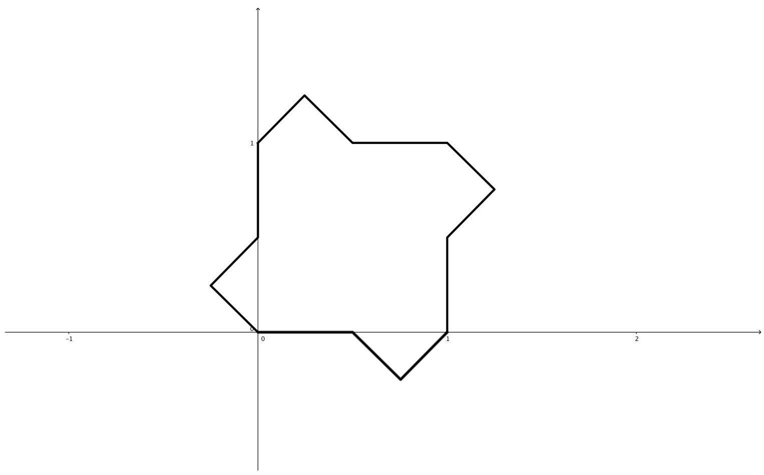

FIGURE 1 – Quel est mon groupe d'isometries ?

avec

$$P_1, \cdots, P_n, \ P_{n+1} = P_1$$

un ensemble de n points **distincts** *du plan (qu'on appelle sommets du polygone), tels que deux cotes consecutifs ne sont pas alignes. On notera*

$$\mathbf{P} = [P_1 \cdots P_n].$$

Exercice 3. Soit $\mathbf{P}$ un polygone generalise. Montrer que $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)_{\mathbf{P}}$ est fini.

Exercice 4 (Un processus de moyenne)**.** Soit $G \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ un groupe fini et $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ un sous ensemble quelconque de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que le groupe d'isometries de l'ensemble

$$G(\mathbf{P}) := \bigcup_{g \in G} g(\mathbf{P}), \text{ avec } g(\mathbf{P}) = \{g(P), \ P \in \mathbf{P}\}$$

   contient G.
2. Quel est la structure du groupe d'isometries de la figure ci-dessus ?
3. Donner les parametres complexes de ses differents elements.
4. Au vu le la premiere question a partir de quel sous-ensemble cette figure a elle ete construite ?