Série 7 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 7 novembre.
L'exercice 3 ($\star$) peut être rendu le jeudi 10 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit V un K-espace vectoriel muni de l'addition $+$ et de la multiplication par un scalaire $\cdot$. Alors $(V, +, \cdot)$ est un anneau.

  ○ vrai ○ faux

- Soit V un K-espace vectoriel muni de l'addition $+$ et de la multiplication par un scalaire $\cdot$. Alors tout sous-espace vectoriel de V muni de $+$ est un sous-groupe de $(V, +)$.

  ○ vrai ○ faux

- Dans un espace vectoriel, tout multiple scalaire d'un vecteur non nul est un vecteur non nul.

  ○ vrai ○ faux

- Soient l'espace vectoriel K et les suites $z_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, 0 \ldots), i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dans K. Les suites $z_i, i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, engendrent le sous-espace des suites convergentes sur K.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soit V un K-espace vectoriel muni de l'addition $+$ et de la multiplication par un scalaire $\cdot$. Alors $(V, +, \cdot)$ est un anneau.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit V un K-espace vectoriel muni de l'addition $+$ et de la multiplication $\cdot$ par un scalaire. Alors tout sous-espace vectoriel de V muni de $+$ est un sous-groupe de $(V, +)$.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Dans un espace vectoriel, tout multiple scalaire d'un vecteur non nul est un vecteur non nul.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient l'espace vectoriel K et les suites $z_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, 0 \ldots), i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dans K. Donc les suites $z_i, i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, engendrent le sous-espace des suites convergentes sur K.*

  ○ *vrai* ● *faux*

(b) Determiner les énoncés corrects.

1. Soient $A, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $b, d \in \mathbb{R}^n$. Supposons que les systèmes $Ax = b$ et $Cx = d$ ont une infinité de solutions. Que peut-on dire sur le nombre de solutions du système $(A + C)x = b + d$?

   ○ Le système a une infinité de solutions.

   ○ On ne peut rien dire sur l'ensemble des solutions.

   ○ Le système a soit une infinité de solutions soit une seule solution.

   Sol.:

   1. Soient $A, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $b, d \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Supposons que les systèmes $Ax = b$ et $Cx = d$ ont une infinité de solutions. Que peut-on dire sur le nombre de solutions du système $(A + C)x = b + d$?

   ○ *Le système a une infinité de solutions.*

   ● *On ne peut rien dire sue l'ensemble de solutions.*

   ○ *Le système a soit une infinité de solutions soit une seule solution.*

2. Soit l'ensemble des matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\, a + d = 0 \right\}$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

   ○ S n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   ○ $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = S.$

   ○ Aucun des énoncés ci-dessus n'est correct.

   Sol.:

   2. Soit l'ensemble des matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\, a + d = 0 \right\}$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

   ○ *S n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

   ● $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = S.$

   ○ *Aucun des énoncés ci-dessus n'est correct.*

Exercice 2

Pour chacun des systèmes linéaires suivants :

1) Calculer l'ensemble des solutions.

2) Si on écrit ce système sous la forme $Ax = b$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, indiquer le rang de la matrice A.

a) $$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 &=& 1 \\ x_3 &=& 2 \\ x_4 &=& -1. \end{array}$$

Sol.: *La matrice augmentée $(A|b)$:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

est déjà sous forme échelonnée réduite et on voit que $\mathrm{rang}(A) = 3$*. On voit que* $x_3 = 2, x_4 = -1$ *et* $x_1 = 1 - 2x_2$*. Donc, on a une variable libre. Si* $s := x_2$*, l'ensemble de solutions est la droite* $\left\{ \begin{pmatrix} 1-2s \\ s \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$.

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 &=& 1 \\ 2x_1 &+& 4x_2 &+& 2x_3 &=& 3. \end{array}$$

Sol.: *La matrice augmentée $(A|b)$ est donnée par :*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Comme $\mathrm{rang}(A|b) = 2 \neq 1 = \mathrm{rang}(A)$*, le système n'a pas de solution.*

Exercice 3 ($\star$)

Soit $C = BA$ la forme échelonnée réduite d'une matrice $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$, où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner l'ensemble des solutions du système $Ax(\alpha) = b(\alpha)$ en fonction de la valeur α, où le vecteur

$$b(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 4 & 2 & (\alpha-1)(\alpha+1)+1 \end{pmatrix}^\top$$

est paramétré par $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sol.: *Vu que la matrice de transformation B est inversible, on peut multiplier les deux côtés de l'équation par B et obtenir*

$$\underbrace{BA}_{C}\,x(\alpha) = \underbrace{Bb(\alpha)}_{=:d(\alpha)}.$$

On calcule

$$d(\alpha) = Bb(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha & (\alpha-1)(\alpha+1) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Le système $Cx = d$ devient ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \\ (\alpha-1)(\alpha+1) \end{pmatrix}.$$

La lecture de la dernière ligne établit que le systéme est résoluble seulement si $\alpha = \pm 1$, autrement l'ensemble de solutions est vide. Pour $\alpha = \pm 1$, la derniére ligne $0 = 0$ est satisfaite trivialement, donc on peut l'ignorer. On voit que les variables libres sont x_3 et x_4. En posant $s := x_3$ et $t := x_4$, l'ensemble de solutions est

$$\begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } \alpha = \pm 1, \\ \emptyset & \text{autrement.} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions pour $\alpha = \pm 1$ correspond à deux plans parallèles dans un espace à 5 dimensions.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{F}_5$ le système suivant.

$$\begin{aligned} x + 3y + 2t &= 1 \\ y + 3z + t &= 0 \\ 3x + z + t &= 0 \\ x + 2y + 4z + 2t &= 4. \end{aligned}$$

Sol.: *Ramenons la matrice du système à une forme échelonnée dans $\mathbb{R}$:*

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{G_{13}(-3) \\ G_{14}(-1)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{G_{23}(9) \\ G_{24}(1)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{P_{34}}{\underset{\rightsquigarrow}{G_{34}(-4)}} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right).$$

Comme $\operatorname{rang}((A \mid b)) = 4 \neq 3 = \operatorname{rang}(A)$*, il n'y a aucun solution dans* $\mathbb{R}$*.*

Si on travail dans $\mathbb{F}_5$ *on obtient*

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{G_{13}(2)}{\underset{\rightsquigarrow}{G_{14}(4)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{G_{21}(2) \\ G_{23}(4)}}{\underset{\rightsquigarrow}{G_{24}(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{G_{34}(1)}{\underset{\rightsquigarrow}{M_3(2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Alors, on a une variable libre $t \in \mathbb{F}_5$ *et l'ensemble de solutions est donnée par* $\left\{ \begin{pmatrix} 2+4t \\ 3+3t \\ 4+2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{F}_5 \right\}$.

Exercice 5

Un **carré magique** d'ordre n est composé de n^2 entiers strictement positifs, écrits dans une matrice carrée. Ces nombres sont disposés de sorte à ce que leurs sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne, sur la diagonale et l'anti-diagonale soient égales, et vaille une valeur fixe $c \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ un carré magique d'ordre 3. Déterminer la relation entre a_{22} et c.
Indication : Convertir la définition de carré magique en un système d'équations, et en déterminer l'ensemble des solutions correspondant.

(b) Remplir cette matrice, pour en faire un carré magique.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sol.: *On cherche une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

avec $a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = c$*. Cela correspond à un système de 8 équations sur les 9 variables* $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$*. Nous les écrivons dans la* *notation matricielle usuelle :*

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1&0&0&1&0&0&1&0&0&c\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&c\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&c\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&c\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&c\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&c\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1&c\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&0&c \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1&0&0&1&0&0&1&0&0&c\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&c\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&c\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&c\\ 0&0&0&0&1&-1&1&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&-1&0&1&\frac{c}{3}\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&c\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

On a calculé la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée. Il y a 2 variables libres, $a_{3,2}$ et $a_{3,3}$, et si on définit $\lambda := a_{3,2}$ et $\mu := a_{33}$, alors

$$\begin{aligned} a_{31} &= -a_{32} - a_{33} + c = -\lambda - \mu + c \\ a_{23} &= a_{31} - a_{33} + \frac{1}{3}c = \frac{4}{3}c - 2\mu - \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= a_{23} - a_{31} + a_{33} = \frac{1}{3}c \\ a_{21} &= -a_{22} - a_{23} + c = -\frac{2}{3}c + \lambda + 2\mu \\ a_{13} &= -a_{23} - a_{33} + c = -\frac{1}{3}c + \lambda + \mu \\ a_{12} &= -a_{22} - a_{32} + c = \frac{2}{3}c - \lambda \\ a_{11} &= -a_{21} - a_{31} + c = \frac{2}{3}c - \mu \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$A = \frac{c}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous voyons en particulier que $a_{22} = \frac{1}{3}c$ est uniquement déterminé par c.
Pour notre exemple, $c = 90$ et donc $16 = 60 - \lambda, 24 = -60 + \lambda + 2\mu$. Il s'ensuit que $\lambda = 44, \mu = 20$, et finalement

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 16 & 34 \\ 24 & 30 & 36 \\ 26 & 44 & 20 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, l'ensemble V est-il un K-espace vectoriel pour la loi d'addition classique et la multiplication scalaire $\cdot$ donnée ?

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(x, y) \in V$.

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(x, y) \in V$.

c) $K = \mathbb{F}_3$, $V = K^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(x, y) \in V$.

d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{p \in \mathbb{R}[t] : p(0) = a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, et la multiplication scalaire est la même que pour les polynômes (et restreinte à V).

e) $K = \mathbb{R}$, $V = \{p \in \mathbb{R}[t] : \deg p = 4\}$ et la multiplication scalaire est la même que pour les polynômes (restreinte à V).

f) $K = \mathbb{C}$, $V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2|\}$, et $\lambda \cdot (z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$ pour tous $\lambda \in K$ et $(z_1, z_2) \in V$.

Sol.: *Si la réponse est oui, on doit vérifier tous les axiomes de la définition d'un espace vectoriel. Si la réponse est non, il suffit de trouver un contre-exemple pour l'un des axiomes.*

a) Non, car, par exemple, $v = (1,1) \in V$ *et* $1 \cdot v = (1,0) \neq v$. *Donc l'axiome* $1 \cdot v = v$ *n'est pas satisfait.*

b) Non, car, par exemple, $(2+1) \cdot (1,1) = 3 \cdot (1,1) = (27,27)$, *mais* $2 \cdot (1,1) + 1 \cdot (1,1) = (8,8) + (1,1) = (9,9) \neq (27,27)$.

c) Oui. Constatons que pour tout élément $\lambda \in \mathbb{F}_3$, $\lambda^3 = \lambda$, *puisque* $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8 = 2 \in \mathbb{F}_3$. *Donc* $\lambda \cdot (x,y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y) = (\lambda x, \lambda y)$. *Il s'agit donc de l'espace vectoriel usuel* $(\mathbb{F}_3)^2$ *(pour lequel les axiomes d'espace vectoriel sont faciles à verifier).*

d) Si $a \neq 0$ *alors ce n'est pas un espace vectoriel, car, pour* $f(t) \in V$, *le polynôme* $0 \cdot f(t)$ *est le polynôme nul, qui vaut* 0 *en* 0, *donc n'appartient pas à* V.

Si $a = 0$, *c'est un espace vectoriel. En effet, pour* $f(t), g(t) \in V$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $f(t) + g(t)$ *et* $\lambda \cdot f(t)$ *valent* 0 *en* 0, *donc* V *est stable pour les deux lois interne et externe. Tous les axiomes d'espace vectoriel sont faciles à verifier, car ils sont vrais pour les polynômes, donc en particulier aussi pour les éléments de* V. *En fait,* V *est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}[t]$.

e) Ce n'est pas un espace vectoriel V *parce qu'il n'a pas d'élément zéro. Il devrait y avoir l'élément* $o \in V$ *de la forme* $o = \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x^1 + \alpha_0$ *ainsi fait* $o + p = p$ *est satisfaite pour tout* $p \in V$. *Ceci est équivalent à* $\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Un tel polynôme* $o \in V$ *ne peut pas exister parce que polynômes de degré* 4 *ont un maximum de* 4 *zéros.*

f) Non, car, par exemple, $(1,-1) \in V$, $(i,1) \in V$, *mais* $(1,-1) + (i,1) = (1+i, 0) \notin V$. *Donc* V *n'est pas stable pour l'addition.*

Exercice 7

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel indiqué ?

a) $\{(0, x, 2x, 3x)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

b) $\{(x^3, x^2, x)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

c) $\{(x, x+y, x-y)^\mathsf{T} : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

d) $\{(x, 0, 0)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0)^\mathsf{T} : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

e) $\{(a, b, a, b)^\mathsf{T} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 = b^2, ab \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

f) $\{(x, y, z)^\mathsf{T} : x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 + z^2 = 0, x - y + z = 0, x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$,

g) $\{\ln\left(\frac{p}{q}\right) \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Sol.:

a) On note par $E = \{(0, x, 2x, 3x)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\}$*. D'abord, on voit que* $E \neq \emptyset$*, parce-que* $0 \in E$*. Soit* $v = (0, x, 2x, 3x), w = (0, y, 2y, 3y) \in E$*. Comme*

$$v + w = (0, x + y, 2x + 2y, 3x + 3y) = (0, z, 2z, 3z)$$

avec $z = x + y$*, donc* $v + w \in E$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Donc,* $\lambda v = \lambda(0, x, 2x, 3x) = (0, \lambda x, 2(\lambda x), 3(\lambda x)) \in E$*. Donc,* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*.*

b) On note par $E = \{(x^3, x^2, x)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\}$*. On montre que* E *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *: soit* $v = (1, 1, 1) \in E$*, et* $\lambda = 2$*. Le vecteur* $\lambda v = (2, 2, 2)$ *n'est pas dans* E*, parce-que il n'existe pas* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $(2, 2, 2) = (x^3, x^2, x)$*.*

c) On note par $E = \{(x, x + y, x - y)^\mathsf{T} : x, y \in \mathbb{R}\}$*. On montre que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*. D'abord, on voit que* $E \neq \emptyset$*, parce-que* $0 \in E$*. Soit* $v = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1)$ *et* $w = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$ *dans* E*. Donc,*

$$v + w = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2).$$

Ce vecteur est dans E *(avec* $x := x_1 + x_2$*,* $y := y_1 + y_2$*). De manière analogue, on montre que* $\lambda x \in E$*, pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x \in E$*.*

d) L'ensemble $E = \{(x, 0, 0)^\mathsf{T} : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0)^\mathsf{T} : y \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*. Par exemple, les vecteurs* $(1, 0, 0)$ *et* $(0, 1, 0)$ *sont les éléments de* E*, mais leur somme* $(1, 1, 0)$ *n'est pas dans* E*.*

e) L'ensemble $E = \{(a, b, a, b)^\mathsf{T} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 = b^2, a \cdot b \leq 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*. D'abord,* $E \neq \emptyset$*, car* $0 \in E$*. L'équation* $a^2 = b^2$ *est équivalente à* $a = \pm b$*, et la condition* $ab \leq 0$ *dit qu'exactement un de* a, b *est négatif, si elles ne sont pas* 0*. Donc* $b = -a$*, et l'ensemble peut s'écrire comme* $E = \{(a, -a, a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$*. En vérifiant les conditions, il suit facilement que* E *un sous-espace de* $\mathbb{R}^4$*.*

f) L'ensemble $E = \{(x, y, z)^\mathsf{T} : x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 + z^2 = 0, x - y + z = 0, x + y = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*.* $E \neq \emptyset$*, car* $0 \in E$*. De* $x + y = 0$*, on obtient* $y = -x$*, ce qui donne dans la première équation* $x^2 - (-x)^2 + z^2 = z^0 = 0$*, soit* $z = 0$*. Dans la deuxième équation on obtient* $x - y = 0$*, dont* $y = -x$ *immédiatement* $x = y = 0$*. Donc, le seul élément de cet ensemble est le vecteur* 0*. Alors, l'ensemble* E *forme un sous-espace de* $\mathbb{R}^3$*.*

g) L'ensemble $E = \{\ln\left(\frac{p}{q}\right) \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}$*. Pour la multiplication scalaire on obtient, par exemple,*

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

Mais $\sqrt{2}$ *n'est pas un nombre rationnel, donc il ne peut pas être représenté par* p/q*, où* $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$*.*