Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 19 au 23 décembre 2016

Série 14 du jeudi 22 décembre 2016

Exercice 1.

(1.) Montrer que, pour $x > 1$:

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

existe.
Indication: utiliser le fait que $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ pour t assez grand.

On pose alors

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

(2.) Calculer $\Gamma(1)$ et montrer ensuite que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall \alpha > 1$
Indication: intégrer par parties.
et en déduire

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3.) Montrer que :

$$\ln\Gamma\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(\ln\Gamma(x) \ + \ \ln\Gamma(y)\Big).$$

Indication: utiliser Cauchy-Schwarz.

(4.) Soit $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, pour $x, y > 1$. Montrer que:

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y) \qquad \text{ainsi que} \qquad B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y).$$

Indication: intégrer par parties.

(5.) En déduire que:

$$B(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Indication: par récurrence.

Exercice 2.

Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ alors:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + (k-\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\Big).$$