Série 11 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 5 decembre.
L'exercice 3 ($\star$) peut être rendu le jeudi 8 decembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient $m, n > 1$ des entiers positifs et $F : M_{m\times n}(K) \to M_{m\times n}(K)$ une application linéaire. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\dim \operatorname{Ker}(F) = km$ ou $\dim \operatorname{Ker}(F) = kn$.

  ○ vrai ○ faux

- Soient $m, n > 1$ des entiers positifs et $F : K^m \to K^n$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_1, \tilde{\mathcal{B}}_1$ deux bases de K^m et $\mathcal{B}_2, \tilde{\mathcal{B}}_2$ deux bases de K^n. Alors $\dim \operatorname{Ker}([F]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}) = \dim \operatorname{Ker}([F]_{\tilde{\mathcal{B}}_1,\tilde{\mathcal{B}}_2})$.

  ○ vrai ○ faux

- Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de V, et $I : V \to V$ l'application identité. Alors $[I]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ est toujours la matrice d'identité.

  ○ vrai ○ faux

- On considère l'opérateur de décalage à droite $\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Sigma(v_1, \dots, v_n) := (0, v_1, \dots, v_{n-1})$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors $[\Sigma]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ est une matrice triangulaire inférieure.

  ○ vrai ○ faux

- Soient $n > 1$ un entier positif et $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Donc $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

  ○ vrai ○ faux

- Soient $n > 1$ un entier positif, $A \in M_{n\times n}(K)$ et $\alpha \in K$. Donc $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soient $m, n > 1$ des entiers positifs et $F : M_{m\times n}(K) \to M_{m\times n}(K)$ une application linéaire. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que* $\dim \operatorname{Ker}(F) = km$ *ou* $\dim \operatorname{Ker}(F) = kn$.

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient $m, n > 1$ des entiers positifs et $F : K^m \to K^n$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_1, \tilde{\mathcal{B}}_1$ deux bases de K^m et $\mathcal{B}_2, \tilde{\mathcal{B}}_2$ deux bases de K^n. Alors* $\dim \operatorname{Ker}([F]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}) = \dim \operatorname{Ker}([F]_{\tilde{\mathcal{B}}_1,\tilde{\mathcal{B}}_2})$.

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de V, et $I : V \to V$ l'application identité. Alors $[I]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ est toujours la matrice d'identité.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *On considère l'opérateur de décalage à droite $\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Sigma(v_1, \ldots, v_n) := (0, v_1, \ldots, v_{n-1})$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors $[\Sigma]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ est une matrice triangulaire inférieure.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient $n > 1$ un entier positif et $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Donc* $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient $n > 1$ un entier positif, $A \in M_{n\times n}(K)$ et $\alpha \in K$. Donc* $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$.

  ○ *vrai* ● *faux*

(b) Soient U, V, W des K-espaces vectoriels de dimension finie.
Quelle condition est nécessaire pour que l'application suivante soit surjective ?

$$\begin{array}{ccc} L(U,V) \times L(V,W) & \longrightarrow & L(U,W) \\ (F,G) & \longmapsto & G \circ F. \end{array}$$

○ $\dim(W) \leq \dim(U)$ et $\dim(W) \geq \dim(V)$.
○ $\dim(V) \leq \dim(U)$ et $\dim(V) \geq \dim(W)$.
○ $\dim(V) \geq \dim(U)$ ou $\dim(V) \geq \dim(W)$.
○ Aucun des autres assertions n'est correcte.

Sol.: ● $\dim(V) \geq \dim(U)$ *ou* $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Exercice 2
Soient K un corps, $n \geq 1$ un entier positif, et $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ l'application trace. Soient E la base canonique de $M_{n\times n}(K)$ et $G = (1)$ la base canonique de K. Trouver la matrice de Tr par rapport à ces bases.

Sol.: *Comme la base canonique E est $E = (E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{nn})$, où $E_{ij} \in M_{n\times n}(K), i, j = 1, \ldots, n$ par*

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & \overset{j}{\downarrow} & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

on voit que $\mathrm{Tr}(E_{ii}) = 1$, *et* $\mathrm{Tr}(E_{ij}) = 0$, *si $i \neq j$. Donc,* $[\mathrm{Tr}]_{E,G} \in K^{n^2}$ *et*

$$[\mathrm{Tr}]_{E,G} = (\underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{0, 1 \ldots 0}_{n}, \ldots, 1)$$

Exercice 3 ($\star$)
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

décrit une application linéaire $F_A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4$. Décrire la matrice $[F_A]_{P,P}$ dans la base

$$P = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \right).$$

Sol.: *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ *la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base* P*. On utilise l'identité* $[F]_{P,P} = [I]_{\mathcal{B},P}[F]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}[I]_{P,\mathcal{B}}$ *pour* $[F]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} := A$*. On peut montrer que* $[I]_{P,\mathcal{B}} = M$*, et* $[I]_{\mathcal{B},P} = [I]_{P,\mathcal{B}}^{-1} = M^{-1}$*. On a*

$$[F]_{P,P} = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+2i \end{pmatrix},$$

On remarque que

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Exercice 4
On considère les polynômes suivants dans $\mathbb{R}_2[t]$:

$$r_1(t) = t^2, \qquad r_2(t) = (t-1)^2, \qquad r_3(t) = (t+1)^2,$$

et

$$q_1(t) = 1, \qquad q_2(t) = t+1, \qquad q_3(t) = t^2+t+1.$$

i) Montrer que $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ et $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[t]$. Si B est la base canonique de $\mathbb{R}_2[t]$, déterminer les deux matrices de passage $[I]_{R,B}$ et $[I]_{Q,B}$.

ii) Déterminez la matrice de passage $[I]_{R,Q}$.

iii) Déterminez les coordonnées du polynôme

$$w(t) := 3r_1(t) + 2r_2(t) - r_3(t)$$

dans la base Q.

Sol.:

i) Les éléments de la base B on les appelle $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$, $e_3(t) = t^2$. On a

$$\begin{aligned} r_1(t) =& t^2 && = 1e_3(t) \\ r_2(t) =& 1 - 2t + t^2 && = 1e_1(t) - 2e_2(t) + 1e_3(t) \\ r_3(t) =& 1 + 2t + t^2 && = 1e_1(t) + 2e_2(t) + 1e_3(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Ainsi la matrice de passage $[I]_{R,B}$ est

$$[I]_{R,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme cette matrice est inversible on peut affirmer que R est une base et du coup $[I]_{R,B}$ une matrice de changement de base. La première colonne de $[I]_{R,B}$ correspond à r_1, la deuxième à r_2 et la troisième à r_3. On peut voir ceci comme produit vecteur-matrice :

$$\begin{pmatrix} r_1(t) & r_2(t) & r_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $[I]_{R,B}$ convertis les vecteurs coordonnées ξ_r (dans la base R) en coordonnées ξ_e (en base B) :

$$\xi_e = [I]_{R,B}\xi_r$$

Pareillement on trouve $[I]_{Q,B}$:

$$[I]_{Q,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible donc Q est une base de $\mathbb{R}_2[t]$.

ii) La matrice $[I]_{Q,B}$ fait le changement de coordonnées de Q vers B. Donc $[I]_{Q,B}^{-1}$ est aussi une matrice de passage, en effet on a

$$\xi_e = [I]_{Q,B}\xi_q \iff \xi_q = [I]_{Q,B}^{-1}\xi_e$$

On trouve

$$[I]_{B,Q} = [I]_{Q,B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant passer des coordonnées ξ_r de R aux coordonnées ξ_q de Q. Pour ceci on passe de ξ_r à ξ_e avec $[I]_{R,B}$ et ensuite de ξ_e vers ξ_q avec $[I]_{B,Q}$. Donc la transformation $\xi_q = [I]_{R,Q}\xi_r$ est donnée par $\xi_q = [I]_{B,Q}[I]_{R,B}\xi_r$, i.e. $[I]_{R,Q} = [I]_{B,Q}[I]_{R,B}$. On trouve

$$[I]_{R,Q} = [I]_{B,Q}[I]_{R,B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Les coordonnées ξ_r de w sont $\xi_r = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^\top$ donc

$$\xi_q = [I]_{R,Q}\xi_r = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 4 \end{pmatrix}^\top.$$

Exercice 5

Soit $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}_2[t]$ l'application linéaire définie par

$$A(z_1, z_2) = (2+i)z_1 + iz_2t + (z_1+z_2)t^2.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et B la base canonique de $\mathbb{C}_2[t]$. Soient

$$F = (f_1, f_2) = \big((1,-i), (-2, 1+i)\big)$$

et

$$G = (g_1,\, g_2,\, g_3) = (t-1,\, it+t^2,\, 2-t+it^2).$$

a) Montrer que F est une base de $\mathbb{C}^2$ et que G est une base de $\mathbb{C}_2[t]$.

b) Déterminer la matrice $[A]_{E,B}$.

c) Déterminer les matrices de passage $[I]_{F,E}$, $[I]_{G,B}$ et $[I]_{B,G}$.

d) Déterminer $[A]_{F,G}$.

Sol.:

a) Pour montrer que F est libre, on se donne $a,\, b \in \mathbb{C}$ tels que $a(1,-i) + b(-2, 1+i) = (0,0)$. Ceci donne le système d'équations :

$$\begin{cases} a - 2b &= 0 \\ -ia + (1+i)b &= 0 \end{cases}$$

Multipliant la première équation par i et additionnant à la deuxième on obtient $(1-i)b = 0$, donc $b = 0$ et aussi $a = 0$. Ceci prouve l'indépendance linéaire des 2 vecteurs $(1,-i)$ et $(-2,1+i)$. Comme on connaît la dimension de $\mathbb{C}^2$, qui vaut 2 (comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel), il en résulte que F est une base de $\mathbb{C}^2$ (par le théorème de complétion en une base).

(Alternativement, on peut voir que ces deux vecteurs ne sont pas des multiples scalaires l'un de l'autre. Par conséquent, ils sont linéairement indépendants.)

Pour montrer que G est une base de $\mathbb{C}_2[t]$, il suffit de nouveau (par le théorème de complétion en une base) de montrer l'indépendance linéaire, car il y a 3 vecteurs *dans G et $\mathbb{C}_2[t]$ est de dimension 3. Supposons donc qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $ag_1 + bg_2 + cg_3 = 0$, c'est-à-dire $a(t-1) + b(it+t^2) + c(2-t+it^2) = 0$. En identifiant les coefficients de $1, t, t^2$, on trouve le système*

$$\begin{cases} -a + 2c &= 0 \\ a + bi - c &= 0 \\ b + ci &= 0 \end{cases}$$

qu'on peut résoudre de bien des façons. Par exemple, en additionnant les 2 premières équations, on trouve $ib + c = 0$, puis, en multipliant par i, on obtient $-b + ic = 0$. Avec la 3ème équation, cela implique $b = c = 0$, puis on obtient aussi $a = 0$, ce qui démontre l'indépendance linéaire des 3 vecteurs de G.

b) On calcule

$$\begin{aligned} A(e_1) &= A((1,0)) = 2 + i + t^2 = (2+i)\cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2\,, \\ A(e_2) &= A((0,1)) = it + t^2 = 0 \cdot 1 + i \cdot t + 1 \cdot t^2\,. \end{aligned}$$

En mettant les coefficients en colonnes, on trouve $[A]_{E,B} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pour calculer $[I]_{F,E}$ on écrit les vecteurs de F en fonction de ceux de E :

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,-i) = 1 \cdot (1,0) - i \cdot (0,1) = e_1 - ie_2\,, \\ f_2 &= (-2, 1+i) = -2 \cdot (1,0) + (1+i) \cdot (0,1) = -2e_1 + (1+i)e_2\,. \end{aligned}$$

En mettant les coefficients en colonnes, on trouve $[I]_{F,E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$.

De même, comme

$$\begin{cases} g_1 = -1 + t \\ g_2 = it + t^2 \\ g_3 = 2 - t + it^2 \end{cases} \qquad \text{on a} \qquad [I]_{G,B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Pour calculer $[I]_{B,G}$, on doit trouver l'inverse de $[I]_{G,B}$. Si on connaît des méthodes d'inversion de matrices, on peut trouver :

$$[I]_{B,G} = ([I]_{G,B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2i \\ -i & -i & 1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Nous allons toutefois expliquer comment trouver $[I]_{B,G}$ colonne par colonne, en partant tout simplement de sa définition.

Pour la première colonne, il s'agit d'exprimer 1 dans la base G, donc de trouver $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $1 = ag_1 + bg_2 + cg_3$, c'est-à-dire $1 = a(t-1) + b(it+t^2) + c(2-t+it^2)$. Ceci revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} -a + 2c &= 1 \\ a + bi - c &= 0 \\ b + ci &= 0 \end{cases}$$

qu'on peut résoudre de bien des façons. Par exemple, la troisième équation donne $b = -ci$, que l'on remplace dans la deuxième pour trouver $a + c - c = a = 0$. On a alors $c = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}i$, donc $1 = 0 \cdot g_1 - \frac{1}{2}i \cdot g_2 + \frac{1}{2} \cdot g_3$. On trouve ainsi la première colonne de la matrice ci-dessus.

Pour la deuxième colonne, il s'agit d'exprimer t dans la base G, donc de trouver $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $t = ag_1 + bg_2 + cg_3$, c'est-à-dire $t = a(t-1) + b(it+t^2) + c(2-t+it^2)$. Ceci revient à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} -a+2c & = 0 \\ a+bi-c & = 1 \\ b+ci & = 0 \end{array}\right.$$

qu'on peut résoudre de bien des façons. Par exemple, la troisième équation donne $b = -ci$, que l'on remplace dans la deuxième pour trouver $a + c - c = a = 1$. On a alors $c = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}i$, donc $t = 1 \cdot g_1 - \frac{1}{2}i \cdot g_2 + \frac{1}{2} \cdot g_3$. On trouve ainsi la deuxième colonne de la matrice ci-dessus.

Pour la troisième colonne, il s'agit d'exprimer t^2 dans la base G, donc de trouver $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $t^2 = ag_1 + bg_2 + cg_3$, c'est-à-dire $t^2 = a(t-1) + b(it+t^2) + c(2-t+it^2)$. Ceci revient à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} -a+2c & = 0 \\ a+bi-c & = 0 \\ b+ci & = 1 \end{array}\right.$$

qu'on peut résoudre de bien des façons. Par exemple, la troisième équation donne $b = -ci+1$, que l'on remplace dans la deuxième pour trouver $a+i+c-c = a+i = 0$, donc $a = -i$. On a alors $c = -\frac{1}{2}i$ et $b = \frac{1}{2}$, donc $t^2 = -i \cdot g_1 + \frac{1}{2} \cdot g_2 - \frac{1}{2}i \cdot g_3$. On trouve ainsi la troisième colonne de la matrice ci-dessus.

d) *Pour trouver $[A]_{F,G}$, on utilise la formule de changement de base. D'après le cours,*

$$\begin{aligned}
[A]_{F,G} &= [I]_{B,G} \cdot [A]_{E,B} \cdot [I]_{F,E} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2i \\ -i & -i & 1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -i & 2i \\ 1-2i & -1+3i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On pourrait aussi utiliser la définition de A_{FG} et calculer directement les expressions de $A(1, -i)$ et $A(-2, 1+i)$ dans la base G. Toutefois, les calculs deviennent assez pénibles car, pour chaque colonne à trouver, il y a un système linéaire à résoudre. D'où l'utilité de la formule de changement de base.

Exercice 6

Soit $\pi, \sigma \in S_6$ avec

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer $\pi \circ \sigma$, $\sigma \circ \pi$, π^{-1}, σ^{-1}.

ii) Écrire π comme composition de transpositions.

iii) Calculer $\mathrm{sgn}(\pi)$ et $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Sol.:

i) Lors de la composition des deux permutations $\pi \circ \sigma$, un indexe est d'abord pris par σ et ensuite par π. Alors les séquences sont $1 \overset{\sigma}{\mapsto} 2 \overset{\pi}{\mapsto} 5$, $2 \overset{\sigma}{\mapsto} 6 \overset{\pi}{\mapsto} 2$, $3 \overset{\sigma}{\mapsto} 3 \overset{\pi}{\mapsto} 3$, ainsi on obtient la permutation

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir l'inverseil est suffisant d'inverser les lignes et de réordonner les indices (dans la première ligne) :

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Il y a plusieurs moyens d'écrire π comme produit de transpositions. Une manière est de commencer avec l'identité et de graduellement changer les indices jusqu'à obtenir la permutation voulue. Comme 1 doit être envoyé sur 4, on prend d'abord la transposition (14). Ensuite, on a la paire 2 et 5, donc on a $(25)(14)$. L'indice 3 reste à la même place, 4 est déjà à la bonne position grâce à (14). Il reste la paire 5 et 6. L'indice 5 va sur 2 par (25), et ainsi on obtient (26). Ce qui nous donne, $\pi = (26)(25)(14)$, et on vérifie facilement que ça marche.

On donne quand même toutes les manières possibles d'obtenir π :

$$\begin{aligned} \pi &= (26)(25)(14) = (56)(26)(14) = (25)(56)(14) \\ &= (26)(14)(25) = (56)(14)(26) = (25)(14)(56) \\ &= (14)(26)(25) = (14)(56)(26) = (14)(25)(56). \end{aligned}$$

iii) Comme π est composée de trois transpositions, sa signature est $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^3 = -1$. Pour la permutation σ, un produit de transpositions possible est $\sigma = (15)(14)(16)(12)$, ainsi sa signature est $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

Exercice 7

i) Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

ii) Calculer le déterminant de la matrice en utilisant la définition.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

i) En utilisant la règle de Sarrus on obtient $\det A = 0 - 4 + 6 - 0 + 4 - 24 = -18$.

ii) En utilisant la définition de $\det$, *on voit que des permutations* σ *telles que* $\sigma(1) = 3$, *ou* $\sigma(1) = 4$, *ou* $\sigma(2) = 3$, *ou* $\sigma(2) = 4$, *ou* $\sigma(4) = 4$, *ne contribuent pas à la somme, puisque les entrées* $a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{44}$, *sont nulles. Donc, seulement deux permutations contribuent à la somme*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

et on obtient $\det B = -40$.