EPFL Automne 2016
Geometrie, MATH-120

Série 3

Exercice 1. ($\mathbb{Z}$ et ses sous-groupes.) On rappelle que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (muni de l'addition) sont exactement les ensembles de la forme

$$N\mathbb{Z}$$

avec $N \in \mathbb{Z}$.

- Montrer que $M\mathbb{Z} \subset N\mathbb{Z}$ si et seulement si N divise M.
- Soient m, n des entiers. On considere le sous-ensemble

  $$\langle m, n\rangle = \{am + bn,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

  Montrer que $\langle m, n\rangle$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
- Montrer que $\langle 2, 3\rangle = \mathbb{Z}$.
- Montrer que $\langle m, n\rangle = (m, n)\mathbb{Z}$ ou (m, n) est le pgdc de m et n.
- En deduire (Identite de Bezout) que etant donne $m, n \in \mathbb{Z}$, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que

  $$am + bn = (m, n).$$

Exercice 2. On considere

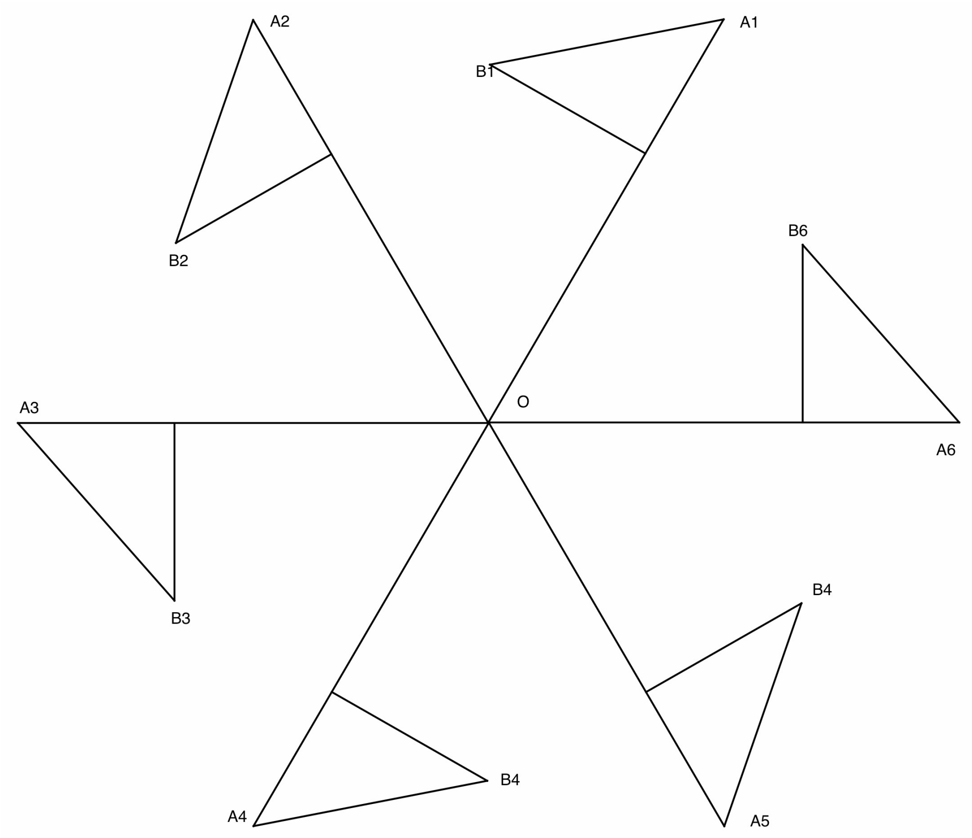
$$\mathbb{Z}^2 = \{(m, n),\ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que $\mathbb{Z}^2$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$.

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, montrer que l'application

   $$\phi : (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \to (am + bn, cm + dn)$$

   est un endomorphisme de $(\mathbb{Z}^2, +)$.
2. Montrer que tout endomorphisme de $(\mathbb{Z}^2, +)$ est de la forme ci-dessus.
3. Montrer que si $ad - bc \neq 0$ alors ϕ est injectif (on pourra considerer l'application similaire dans $\mathbb{R}^2$).
4. Montrer que si $ad - bc = \pm 1$ alors ϕ est un isomorphisme de groupes et donner la reciproque .
5. Montrer que si $ad - bc \neq \pm 1$ alors ϕ n'est pas un isomorphisme.



Exercice 3. Une isometrie du plan $\mathbb{R}^2$est une application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2,\ d(\phi(P), \phi(Q)) = d(P, Q)$$

ou $d(.,.)$ est la distance euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$. On admet que l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ des isometries du plan forme un groupe pour la composition des applications.

En utilisant le fait (admis) qu'une isometrie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui laisse trois points non-alignes P_1, P_2, P_3 invariants ($\phi(P_i) = P_i,\ i = 1, 2, 3$) est l'identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, montrer que l'ensemble des isometries $\mathrm{Isom}_F(\mathbb{R}^2) = \{\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2),\ \phi(F) = F\}$ qui preservent la figure ci-dessous est le groupe des rotations de centre $(0, 0)$ et d'angle un multiple de 60^o.

Pour cela on pourra considerer une telle isometrie, ϕ, considerer les valeurs possibles des points $A_6, 0, A_3, B_6$ et montrer qu'il existe une rotation comme ci-dessus qui envoie ces points sur les meme images.

Exercice 4 ($\star\star$)**.** On rappelle (voir le cours) que etant donne un groupe $(G, .)$ et un element $g \in G$, l'application de translation a gauche

$$t_g : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ g' & \mapsto & t_g(g') = g.g' \end{array}$$

est une application bijective et sa reciproque est $t_{g^{-1}}$ (mais ce n'est pas un morphisme de groupes sauf si $g = e_G$). En d'autres termes $t_g \in \mathrm{Bij}(G)$.

1. Montrer que l'application qui en resulte

$$t_. : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{Bij}(G) \\ g & \mapsto & t_g \end{array}$$

est un morphisme de groupes de $(G, .)$ vers le groupe des bijections sur G, $(\mathrm{Bij}(G), \circ)$.
2. Quel est le noyau de cette application ?
3. On a vu en cours qu'une source importante de groupes est le groupe $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ des bijections d'un ensemble sur lui-meme (les permutations d'un ensemble) et les sous-groupes de ce groupe. Montrer que reciproquement tout groupe $(G, .)$ est isomorphe a un sous-groupe d'un groupe $\mathrm{Bij}(E)$ pour E un ensemble bien choisi.
4. Montrer que si G est un groupe fini de cardinal $|G| = n \geqslant 1$ alors G est isomorphe a un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, \cdots, n\})$ des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$. (on montrera que si E et F sont des ensembles en bijection l'un avec l'autre alors -en utilisant cette bijection- les groupes $\mathrm{Bij}(E)$ et $\mathrm{Bij}(F)$ sont isomorphes).

Exercice 5 ($\star\star$)**.** On rappelle (voir le cours) que etant donne un groupe $(G, .)$ et un element $g \in G$, l'application de conjugaison

$$\mathrm{Ad}_g : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & G \\ g' & \mapsto & \mathrm{Ad}_g(g') = g.g'.g^{-1} \end{array}$$

est un morphisme de groupe bijectif (ie. un isomorphisme) et sa reciproque est $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$.

En d'autres termes $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{Isom}_{Gr}(G)$.

Montrer que l'application qui en resulte

$$\mathrm{Ad}_. : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathrm{Isom}(G) \\ g & \mapsto & \mathrm{Ad}_g \end{array}$$

est un morphisme de groupes de $(G, .)$ vers le groupe des isomorphismes de G, $(\mathrm{Isom}(G), \circ)$.

1. Montrer que le noyau de cette application est le sous-ensemble de G donne par

$$Z_G = \{g \in G,\ \forall g' \in G,\ g.g' = g'.g\}.$$

   C'est a dire l'ensemble des elements de G qui commutent avec tous les elements de g.
2. Montrer que c'est un sous-groupe : on l'appelle le centre de G.