Semaine 8 : Série d'exercices sur les signaux [Solutions]

1 Fréquence d'échantillonnage

Rappelons que $f_1 > f_2 > 0$.

a) $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$: la condition ici est que $f_e > 2f_1$ (f_1 étant la plus grande fréquence présente dans le signal, i.e. la bande passante).

b) $X_2(t) = 2\cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$: idem : la condition ici est que $f_e > 2f_1$ (les amplitudes et déphasages ne jouent aucun rôle).

c) $X_3(t) = \sin(4\pi f_1 t) + \sin(2\pi(f_1 + f_2)\, t)$: les deux fréquences des sinusoïdes sont respectivement : $2f_1$ et $f_1 + f_2$. Vu que $f_1 > f_2$; il faut donc échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 4f_1$.

d) $X_4(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$: ici, un petit calcul s'impose (cf. résumé de trigonométrie) :

$$\sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)\right),$$

donc la plus grande fréquence présente dans le signal est $f_1 + f_2$: il faut échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 2(f_1 + f_2)$.

2 Questions-test

1. b) et c) 2. a), c) et d) 3. b) 4. c)

3 Un peu de radio

a) On considère d'abord un système qui transmet directement $S(t)$. La longueur de l'antenne L est donc fixée au minimum à un quart de la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f_s}$, c'est-à-dire

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_s} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 10^3} = \frac{3}{4} \times 10^5 \text{ m} = 75 \text{ km}.$$

Une antenne de 75 km de long ne se prête pas à des applications concrètes ! Par contre, pour le signal $A(t)$ dont les fŕequences sont proches de 300kHz, une longueur d'antenne de

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_p} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 3 \times 10^5} = \frac{1}{4} \times 10^3 \text{ m} = 250 \text{ m}.$$

est suffisante (dans la pratique, on se débrouille avec des antennes plus petites encore).

b) L'intégration sur plusieurs périodes de la porteuse produit une fonction presque nulle car l'amplitude du signal utile se trouve quasiment la même avec un signe opposé à l'intérieur d'une même période de la porteuse. L'intégration donne donc un résultat proche de 0.

c) La multiplication de $A(t)$ par $P(t)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
A(t)\,P(t) &= S(t)\,P(t)\,P(t) = \sin(2\pi f_s t)\sin(2\pi f_p t)\sin(2\pi f_p t) \\
&= 0.5(\sin(2\pi f_s t)\,(\cos(2\pi(f_p - f_p)t) - \cos(2\pi(f_p + f_p)t)) \\
&= 0.5(\sin(2\pi f_s t)\,(1 - \cos(4\pi f_p t)) \\
&= 0.5(\sin(2\pi f_s t) - \sin(2\pi f_s t)\cos(4\pi f_p t) \\
&= 0.5(\sin(2\pi f_s t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p - f_s)t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p + f_s)t))
\end{aligned}$$

Nous observons que nous avons maintenant la somme du signal $S(t) = \sin(2\pi f_s t)$ auquel nous sommes intéressés et de deux termes supplémentaires avec les fréquences respectives

$$2f_p - f_s = 599 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad 2f_p + f_s = 601 \text{ kHz}.$$

Nous pouvons supprimer ces deux termes en appliquant un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure plus basse que 599 kHz (p. ex. $f_c = f_p = 300$ kHz), et ainsi récupérer le signal $S(t)$.

Note : les raisons pour lesquelles on multiplie par $P(t)$ plutôt que de diviser comme on pourrait *a priori* imaginer sont principalement :

— qu'il est problématique de diviser par un signal qui passe par 0 ;

— qu'en pratique il est facile de réaliser la multiplication (par exemple avec des diodes), pas la division...