Série 10

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le mardi 29 novembre.
L'exercice 5 ($\star$) peut être rendu le jeudi 1 decembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient V un K-espace vectoriel, $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille génératrice de V et $A, B \in L(V,V)$. Si $A(v_i) = B(v_i), i = 1, \ldots, n$, donc $A = B$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $A, B \in L(V,V)$ telles que $A \circ B = 0$ et $\dim \operatorname{Ker}(B) = 0$. Alors A est l'application nulle.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $F : V \to W$ une application linéaire, où V, W sont deux K-espaces vectoriels avec $\dim(V) = n$ et $\dim(W) = m$. Si $n < m$, donc F ne peut pas être surjective.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $V = \mathbb{F}_2^{10}$. Il existe une application linéaire $F : V \to V$ telle que la cardinalité (le nombre d'éléments) de $\operatorname{Ker}(F)$ est 128.

  ◯ vrai ◯ faux

- L'opérateur de décalage à droite $\Sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \Sigma(v_1, v_2, \ldots, v_n) := (0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ est une application injective.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit V l'espace vectoriel des suites réelles. L'opérateur de décalage à droite $\Sigma : V \to V, \Sigma(v_1, v_2, v_3, \ldots) := (0, v_1, v_2, \ldots)$ est une application injective.

  ◯ vrai ◯ faux

(b) Soit $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie comme $F : X \mapsto X - X^T$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

◯ $\operatorname{rang}(F) = 0$.
◯ $\operatorname{rang}(F) = n - 1$.
◯ $\operatorname{rang}(F) = n^2 - 1$.
◯ $\operatorname{rang}(F) = n(n-1)/2$.

Exercice 2
Resultat 1 : Si $p \in \mathbb{R}_n[t]$ a $n+1$ racines différentes, $n \in \mathbb{N}$, donc p est le polynôme nul.
Soient I l'intervalle $[0,1]$, $n \geq 1$ un entier positif et $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$ des nombres différents.
En utilisant le **Resultat 1**, montrer que la matrice de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

est inversible.

Exercice 3
Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie et $T \in L(V,V)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $V = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Im}\,(T)$.
ii) $\mathrm{Ker}\,(T) = \mathrm{Ker}\,(T^2)$, où $T^2 = T \circ T$.

Exercice 4
Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un système linéaire de n équations et n variables tel que son ensemble de solutions est exactement U.

Exercice 5 ($\star$)
Considèrer l'intervalle $[0,1]$ et l'application $I : f \mapsto F$, telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ et affines par morceaux, et W l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ et quadratiques par morceaux.

i) Trouver des bases pour V et W.
ii) Calculer la matrice de I par rapport à ces bases.
iii) Calculer le rang de cette matrice.

Exercice 6
Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et F une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

i) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et F (d'arrivée).

ii) Même question pour les bases F (de départ) et E (d'arrivée).

iii) Même question pour les bases F (de départ) et F (d'arrivée).

Exercice 7

Soit $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$S(x, y, z) = (3x - y + 2z,\ x + 3y - z,\ x - 3y + 5z,\ 2x - y)$$

et soit $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(f(t)) = (f(0), 0, f(2))$.

a) Déterminer la matrice de T par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[t]$ et $\mathbb{R}^3$, ainsi que la matrice de S par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

b) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice de $S \circ T$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[t]$ et $\mathbb{R}^4$.

c) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice du vecteur $T(t^2 - 3t + 4)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice du vecteur $S(T(t^2 - 3t + 4))$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8 (avancée)

Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie comme $F : X \mapsto AX - XB$. Déterminer la matrice de F par rapport à la base canonique de l'espace vectoriel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Indication : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_Kronecker`.