Série 8 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 14 novembre.
L'exercice 2 ($\star$) peut être rendu le jeudi 17 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors $U_1 \backslash U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

  ○ vrai ○ faux

- Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors $U_1 \cup U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

  ○ vrai ○ faux

- Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Si les familles (v_1, v_2), (v_1, v_3) et (v_2, v_3) sont linéairement indépendantes, alors la famille (v_1, v_2, v_3) est aussi linéairement indépendante.

  ○ vrai ○ faux

- Si $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est une base d'un K-espace vectoriel V, alors la famille (v_1, v_2, v_5) est linéairement indépendante.

  ○ vrai ○ faux

- Soient $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base d'un K-espace vectoriel V et $(w_1, \ldots, w_m) \in V$ une famille telle que $\operatorname{span}(w_1, w_2, \ldots, w_m) = V$. Alors $n \leq m$.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. ALors $U_1 \backslash U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient U_1, U_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors $U_1 \cup U_2$ est un sous-espace vectoriel de V.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Si les familles (v_1, v_2), (v_1, v_3) et (v_2, v_3) sont linéairement indépendantes, alors la famille (v_1, v_2, v_3) est aussi linéairement indépendante.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Si* $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ *est une base d'un* K*-espace vectoriel* V*, alors la famille* (v_1, v_2, v_5) *est linéairement indépendante.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soient* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *une base d'un* K*-espace vectoriel* V *et* $(w_1, \ldots, w_m) \in V$ *une famille telle que* $\mathrm{span}(w_1, w_2, \ldots, w_m) = V$*. Alors* $n \leq m$*.*

  ● *vrai* ○ *faux*

(b) Soit V un K-espace vectoriel de dimension 5. Soient U, W deux sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim(U) = 3$ et $\dim(W) = 4$. Combien vaut $\dim(U \cap W)$?

○ Cette dimension vaut nécessairement 2.

○ Cette dimension vaut 2 ou 3.

○ Cette dimension peut valoir n'importe quel entier entre 0 et 4.

Sol.:

○ *Cette dimension vaut nécessairement* 2.

● *Cette dimension vaut* 2 *ou* 3.

○ *Cette dimension peut valoir n'importe quel entier entre* 0 *et* 4.

Exercice 2 (⋆)

Soit V un K-espace vectoriel et U, W deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer que $U \cap W$ est un sous-espace vectoriel de V.

Sol.: *Il faut vérifier (pour un sous-ensemble* W *donné de* V*) les propriétés de sous-espace vectoriel :*

0) W *est non-vide,*

1) $u + v \in W$ *pour tous* $u, v \in W$*,*

2) $\lambda u \in W$ *pour tous* $\lambda \in K$ *et* $u \in W$*,*

a) L'ensemble $U \cap W$ *est un sous-espace vectoriel de* V *:*

0) $0 \in U \cap W$*, car* $0 \in U$ *et* $0 \in W$*.*

1) Soit $u, v \in U \cap W$*. Alors*

$$\left.\begin{array}{ccccc} u \in U & \text{et} & v \in U & \Rightarrow & u+v \in U \\ u \in W & \text{et} & v \in W & \Rightarrow & u+v \in W \end{array}\right\} \Rightarrow u + v \in U \cap W.$$

2) Soit $\lambda \in K$ *et* $u \in U \cap W$*. Alors*

$$\left.\begin{array}{ccc} u \in U & \Rightarrow & \lambda u \in U \\ u \in W & \Rightarrow & \lambda u \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u \in U \cap W.$$

Exercice 3
Soit $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ une famille dans $\mathbb{R}^n$, où $m \leq n$. Soit $A = (v_1|v_2|\dots|v_m) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rang}(A) = \dim(\text{span}(v_1, \dots, v_m))$.
Indication : Voir l'Exemple 4.11 dans le polycopié.

Sol.: *Soit $V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$. On denote par r le nombre de vecteurs $v_i, i = 1, \dots, m$ linéairement indépendants et supposons sans perte de généralité que le vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_r$ sont linéairement indépendants. On montre que $\text{span}(v_1, \dots, v_r) = \text{span}(v_1, \dots, v_r, \dots, v_m)$. Si $r = m$, l'égalité est évidemment vraie. Sinon, l'inclusion $\subseteq$ est trivialement satisfaite. L'inclusion $\supseteq$ découle du fait que $v_1, v_2, \dots, v_r$ sont linéairement indépendants, mais $v_1, \dots, v_m$ ne sont pas. Par conséquent, chaque v_i, $r+1 \leq i \leq m$, peut être écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs $v_1, \dots, v_r$, c-à-d, $v_i \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)$, $r+1 \leq i \leq m$. Alors, $V = \text{span}(v_1, \dots, v_r)$ et $\dim(V) = r$.*

D'abord on considére la matrice $A_r = (v_1|v_2|\dots|v_r)$. Comme $v_1, \dots, v_r$ sont linéairement indépendants, d'apres l'Exemple 4.11, on sait que $\text{rang}(A_r) = r$. Maintenant on considére une matrice augmentée $(A_r|v_i)$, pour un index i arbitraire, $r+1 \leq i \leq m$. Car $v_i \in V$, il existe une seule combinaison linéaire de vecteurs $v_1, \dots, v_r$ telle que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k = v_i \Leftrightarrow A_r x = v_i$ a une seule solution x. Donc, $\text{rang}((A_r|v_i)) = \text{rang}(A_r)$, c-à-d la colonne $r+1$ de forme échelonnée de la matrice $(A_r|v_i)$ ne contient pas un pivot. En répétant cette procédure pour tout $v_i, r+1 \leq i \leq m$, on obtient $r = \text{rang}((A_r|v_{r+1}|\dots|v_m)) = \text{rang}(A)$.

Exercice 4
Vérifier si chacun des ensembles suivant est linéairement indépendant. Vérifier également s'ils engendrent l'espace vectoriel correspondant ou s'ils en sont une base.

1. L'ensemble $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,0)\}$ dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{F}_2^3$.
2. L'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ dans l'espace vectoriel $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\{(x-i)(x+i), x(x^2+1), 1\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_3[x]$.
4. L'ensemble $\{x+1, x^2+x+1, x^3+x, x^3+x^2\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$.

Sol.: *Soit V un espace vectoriel. Un ensemble de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ est linéairement dépendant si la combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ a une solution $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, t.q. α n'est pas le vecteur nul. Un ensemble de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ génère (engendre) l'espace V, si l'equation $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = q$ a une solution α pour chaque $q \in V$. Si l'ensemble est linéairement indépendant et aussi générateur de l'espace V, alors l'ensemble est une base pour V.*

1. *Soient $v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,0)$ et $A = (v_1|v_2|v_3) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. On doit résoudre le système $Ax = 0$:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{G_{12}(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{G_{23}(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Comme $\text{rang}(A) = 3$, le système homogène admet une seule solution - le vecteur nul. Donc, l'ensemble donné est linéairement indépendant. On montre que cet ensemble est aussi un générateur de l'espace $\mathbb{R}^3$. Soit $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour montrer que *l'ensemble est un générateur de l'espace $\mathbb{R}^3$, il faut résoudre le système $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = b$, pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, c-á-d, le système $Ax = b$. Donc,*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \overset{G_{12}(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \overset{G_{23}(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_2 + b_1 \end{array}\right).$$

On voit que $\operatorname{rang}((A|b)) = \operatorname{rang}(A) = 3$, alors le système $Ax = b$ a une solution unique $\Rightarrow$ l'ensemble engendre de l'espace $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'ensemble est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.
Maintenant, on considère l'espace $\mathbb{F}_2^3$. De manière analogue, on obtient que l'ensemble est linéairement indépendant et engendre $\mathbb{F}_2^3 \Rightarrow$ c'est une base de $\mathbb{F}_2^3$.

2. *Comme $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, c'est pas possible que l'ensemble engendre $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, ni qu'il soit une base de l'espace. Donc, il faut seulement vérifier si l'ensemble est linéairement indépendant. Soient $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. On veut résoudre*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, on obtient

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c-à-d,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0, \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Maintenant, on doit résoudre un système de 3 inconnues $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et 4 équations. On l'écrit sous une forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{G_{14}(-1) \\ G_{13}(-2)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{G_{23}(1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Comme rang de cette matrice est 2, le système admet une solution non nulle. Donc, l'ensemble est linéairement dépendant.

3. *Comme $\dim(\mathbb{C}_3[x]) = 4$, l'ensemble n'engendre pas l'espace $\mathbb{C}_3[x]$, et donc il n'est pas une base de cet espace. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Donc, l'équation*

$$\begin{aligned} &\alpha_1((x-i)(x+i)) + \alpha_2(x(x^2+1)) + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad &\alpha_2 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + (\alpha_1 + \alpha_3) \cdot 1 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

admet seulement la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ et l'ensemble est linéairement indépendant.

4. *L'ensemble est linéairement indépendant et aussi générateur de l'espace $\mathbb{R}_3[x]$, et il est donc une base pour $\mathbb{R}_3[x]$. Pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, l'équation*

$$\alpha_1(x+1) + \alpha_2(x^2+x+1) + \alpha_3(x^3+x) + \alpha_4(x^3+x^2) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

admet seulement la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Cela peut être vu par une comparaison des coefficients. Nous devons résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} (\alpha_3+\alpha_4)x^3 = 0x^3 \\ (\alpha_2+\alpha_4)x^2 = 0x^2 \\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x = 0x \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

On l'écrit sous forme matricielle,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

L'ensemble est aussi générateur de l'espace $\mathcal{P}_3(x)$ (et une base aussi), puisque nous pouvons résoudre l'équation

$$\alpha_1(x+1) + \alpha_2(x^2+x+1) + \alpha_3(x^3+x) + \alpha_4(x^3+x^2) = \beta_4 x^3 + \beta_3 x^2 + \beta_2 x + \beta_1,$$

où $q = \beta_4 x^3 + \beta_3 x^2 + \beta_1 x + \beta_1$, avec $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_4)^T \in \mathbb{R}^4$, $q \in \mathbb{R}_3[x]$, et le vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 5

Considérer ces cinq vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^5$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

b) Est-ce que la réponse change si on considère v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 comme des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{F}_2^5$ et $V = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ comme un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel ?

Sol.:

a) *Nous écrivons les cinq vecteurs de colonne dans une matrice et déterminer le rang de cette matrice.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice est donc 4*. Les quatre vecteurs* v_1*,* v_2*,* v_3*,* v_4*, par exemple, forment une base (également* v_1*,* v_2*,* v_4*,* v_5 *serait une base) et donc la dimension* $\dim(V) = 4$*.*

b) Nous procédons comme ci-dessus, cependant, nous utilisons les règles de calcul de $\mathbb{F}_2$*, en particulier* $1 + 1 = 0$*.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Le rang de la matrice est 3*. Les trois vecteurs* v_1*,* v_2*,* v_3 *(par exemple) forment une base et donc la dimension* $\dim(V) = 3$*.*

Exercice 6

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. Les solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système suivant

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}.$$

2. $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
4. L'espace des polynômes harmoniques homogènes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
   Indication : un polynôme homogène de degré inférieur ou égal à 2 dans $\mathbb{R}^3$ est une fonction de la forme

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz, \text{ pour certains } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Une fonction u est appelé harmonique si

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0\,,$$

   où u_{xx} est la dérivée seconde de u par rapport à la première variable, u_{yy} est la dérivée seconde de u par rapport à la deuxième variable, et u_{zz} est la dérivée seconde de u par rapport à la troisième variable.

Sol.:

1. *Nous obtenons un ensemble de solutions pour ce système d'équations donné par* $V := \{(-3z/2, 5z/2, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$*.* V *est de dimension* 1 *et une base de* V *est donnée par* $\{(-3, 5, 2)\}$*.*

2. Soit V l'espace vectoriel $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | x+iy=0\}$ sur $\mathbb{C}$. Soit $(x,y) \in V$. Ensuite $x+iy=0 \Rightarrow y=ix$ et donc $(x,y)=(x,ix)=x(1,i)$ pour tous $(x,y) \in V$. Donc, nous pouvons écrire tous $(x,y) \in V$ comme une combinaison linéaire complexe du vecteur $(1,i)$. Ceci est linéairement indépendant dans $\mathbb{C}$ et donc est une base de V. La dimension de l'espace vectoriel est donc 1.

3. Nous avons montré que chaque élément de V peut être écrit sous la forme $x(1,i)$, $x \in \mathbb{C}$. Nous posons $x=a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, et donc $x(1,i)=(a+ib)(1,i)=a(1,i)+ib(1,i)=a(1,i)+b(i,-1)$. Donc, nous pouvons écrire tous $(x,y) \in V$ comme une combinaison linéaire réelle des vecteurs $(1,i)$ et $(i,-1)$. Le deux vecteurs $(1,i)$ et $(i,-1)$ engendrent l'espace V comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$. Donc les deux vecteurs sont une base pour V sur $\mathbb{R}$ et l'espace est de dimension 2.

4. Nous calculons Δu pour le polynôme $u(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz$, $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, et on obtient

$$\Delta u(x,y,z) = 2a+2b+2c.$$

Nous considerons le polynôme harmonique solution de $\Delta u(x,y,z)=0$, et donc

$$a+b+c=0. \tag{1}$$

La condition (1) doit être satisfaite par le polynôme

$$u(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz, \quad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}\,.$$

Donc pour satisfaire (1) nous posons $a=-b-c$, et donc nous obtenons

$$u(x,y,z)=b(y^2-x^2)+c(z^2-x^2)+dxy+eyz+fxz, \quad b,c,d,e,f \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des polynômes $\{y^2-x^2, z^2-x^2, xy, yz, xz\}$ engendre l'espace vectoriel. Cet ensemble est aussi linéairement indépendant puisque

$$\alpha_1(y^2-x^2)+\alpha_2(z^2-x^2)+\alpha_3 xy+\alpha_4 yz+\alpha_5 xz=0, \qquad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5 \in \mathbb{R},$$

admet comme unique solution

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0.$$

Pour une vérification nous pouvons faire une comparaison des coefficients. Donc $(x^2-y^2, y^2-z^2, xy, yz, xz)$ est une base de l'espace vectoriel, et la dimension de l'espace vectoriel est 5.

Exercice 7

Considérer les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2z+t=0 \text{ et } z+3t=0\}\,,\\ W &= \operatorname{span}((1,0,0,0),(0,-1,0,0),(-1,1,0,0),(0,0,0,1))\,. \end{aligned}$$

1. Calculer la dimension de U et W.
2. Montrer que $U+W=\mathbb{R}^4$.

Sol.:

1. *On va trouver une base de U comme suit. Soit $(x, y, z, t) \in U$. Alors $x - 2z + t = 0$ et $z + 3t = 0$. La deuxième égalité donne $z = -3t$, et si on remplace z par $-3t$ dans la première, on obtient $x = -7t$. Donc $(x, y, z, t) = (-7t, y, -3t, t)$ et y et t sont des variables libres. Si on prend $y = 0$ et $t = 1$, on obtient le vecteur $v_1 = (-7, 0, -3, 1)$. Si on prend $t = 0$ et $y = 1$, on obtient le vecteur $v_2 = (0, 1, 0, 0)$. On montre que (v_1, v_2) est une base de U. Ces deux vecteurs appartiennent clairement à U. On a montré que pour tout $(x, y, z, t) \in U$, on a*

$$(x, y, z, t) = (-7t, y, -3t, t) = t(-7, 0, -3, 1) + y(0, 1, 0, 0) = tv_1 + yv_2 \,.$$

Donc l'ensemble $A = \{v_1, v_2\}$ est générateur de l'espace U. D'autre part, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 = 0$, alors

$$a(-7, 0, -3, 1) + b(0, 1, 0, 0) = (-7a, b, -3a, a) = (0, 0, 0, 0)\,,$$

et donc $a = b = 0$. Donc v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, et donc $A = \{v_1, v_2\}$ est une base pour U. En fin la dimension de U est 2.
Pour l'espace W on pose

$$w_1 = (1, 0, 0, 0) \quad w_2 = (0, -1, 0, 0) \quad w_3 = (-1, 1, 0, 0) \quad w_4 = (0, 0, 0, 1)\,.$$

Par définition de W, l'ensemble $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ est générateur de l'espace W. On va trouver une base de W en extrayant un ensemble $C \subseteq B$. On va a montrer que $C = \{w_1, w_2, w_4\}$ est une base de W. Il est évident que $w_3 = -w_1 - w_2$ et donc tout élément de B est engendré par C (c'est à dire combinaison linéaire des vecteurs de C). Mais comme B est générateur de W, il s'ensuit que C est aussi générateur de W. Maintenant s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aw_1 + bw_2 + cw_4 = 0$, alors

$$aw_1 + bw_2 + cw_4 = (a, -b, 0, c) = (0, 0, 0, 0)\,,$$

et donc $a = b = c = 0$. L'ensemble C est par conséquent linéairement indépendant. On a montré que c'est une base de W, donc W est de dimension 3.

2. *On montre d'abord que l'union $A \cup C = \{v_1, v_2, w_1, w_2, w_4\}$ engendre la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Evidemment e_1, e_2, $e_4 \in A \cup C$, car $e_1 = w_1$, $e_2 = v_2$ et $e_4 = w_4$. De plus, à partir de la définition de v_1, on trouve aisément $e_3 = -(v_1 + 7w_1 - w_4)/3$. Il s'ensuit que $A \cup C$ engendre $\mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, c'est à dire $\mathbb{R}^4 = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq \mathrm{span}\{A \cup C\}$. L'autre inclusion est évidente, vu que tous les vecteurs considérés sont dans $\mathbb{R}^4$, et par conséquent $\mathrm{span}\{A \cup C\} = \mathbb{R}^4$. Or $\mathrm{span}\{A \cup C\} = \mathrm{span}\{A\} + \mathrm{span}\{C\}$, car toute combinaison linéaire de $A \cup C$ est la somme d'une combinaison linéaire de A et d'une combinaison linéaire de C. Par conséquent, $U + W = \mathbb{R}^4$, puisque*

$$U + W = \mathrm{span}\{A\} + \mathrm{span}\{C\} = \mathrm{span}\{A \cup C\} = \mathbb{R}^4\,.$$

Exercice 8
Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit U un sous-espace vectoriel de V.

Montrer qu'il existe une base de V qui contient une base de U.

Sol.: *Puisque V un K-espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $v_1, v_2, \dots, v_n$ de V, où $\dim(V) = n$. De même, il existe une base $u_1, u_2, \dots, u_m$ de U, où $\dim(U) = m$. Comme U est un sous-espace vectoriel de V, il s'ensuit que $U = \text{span}(u_1, u_2, \dots, u_m) \subseteq V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Maintenant, on satisfait les conditions de Lemme de Steinitz $\Rightarrow$ on peut remplacer m vecteurs parmi $v_1, v_2, \dots, v_n$ par $u_1, u_2, \dots u_m$ sans changer l'espace engendré. On note l'ensemble obtenu par E. Donc, l'ensemble E engendre V et a n éléments $\Rightarrow$ E est une base de V. Alors, E est une base de V qui contient une base de U.*