EPFL Automne 2016
Geometrie, MATH-120

Série 5

Exercice 1. Soit $\phi : G \to H$ un morphisme de groupes. On suppose que H est un groupe commutatif. Montrer que si deux element $g_1, g_2 \in G$ sont congugues (il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Ad}_g(g_1) = g.g_1.g^{-1} = g_2$) alors

$$\phi(g_1) = \phi(g_2).$$

Exercice 2. Soit G un groupe fini ordre N.

1. Montrer que tout element g de G verifie

$$g^N = e_G.$$

(appliquer le Theoreme de Lagrange a $g^{\mathbb{Z}}$)

Exercice 3. Soit $\phi : G \hookrightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. On suppose ϕ injectif. Montrer que pour tout $g \in G$

$$\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\phi(g)).$$

2. Etablir une relation de divisibilite entre $\mathrm{ord}(g)$ et $\mathrm{ord}(\phi(g))$ si ϕ n'est pas suppose injectif.

Définition 1. *Un groupe fini G est cyclique si il est engendre par un seul element : il existe $g \in G$ tel que*

$$G = \langle g \rangle = g^{\mathbb{Z}}.$$

Exercice 4. Soit G un groupe fini cyclique d'ordre $|G| = N$. Montrer que G est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit G un groupe cyclique. On va montrer que tout sous-groupe H de G est cyclique.

1. Soit $\phi : G' \to G$ un morphisme de groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. Montrer que la preimage $\phi^{-1}(H) \subset G'$ est un sous-groupe de G'.
2. Supposons G cyclique de generateur g :$G = g^{\mathbb{Z}}$. Soit $H \subset G$ un sous-groupe ; en considerant l'application exponentielle

$$\exp_g : \mathbb{Z} \to G$$

montrer que H est cyclique (on montrera que H est engendre par un element).

Exercice 6. Soit $G = \langle g \rangle$ un groupe cyclique d'ordre $N \geqslant 1$ et de generateur g.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ montrer que g^n est d'ordre $N/(N, n)$ (on commencera par montrer que $\mathrm{ord}(g)|N/(N, n)$).
2. Montrer que les generateurs de G (les $g' \in G$ tels que $(g')^{\mathbb{Z}} = G$) sont exactement les g^n avec $1 \leqslant n \leqslant N-1$ et $(n, N) = 1$.
3. Montrer que l'application
$$\{d|N\} \to (g^d)^{\mathbb{Z}}$$
est une bijection entre l'ensemble des diviseurs de N et l'ensemble des sous-groupes de G.

Exercice 7. (Unicite de la signature) Soit
$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{\{1,2,\cdots,n\}} = \mathrm{Bij}(\{1, 2, \cdots, n\})$$
le groupe symetrique de n elements (le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$, muni de la composition)

La "signature" est un morphisme de ce groupe vers le group multiplicatif $\{\pm 1\}$ qui est *non-trivial* (qui nest pas le morphisme constant $\sigma \to 1$). On note se morphisme
$$\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\{\pm 1\}, \times).$$
On peut montrer l'existence d'un tel morphisme soit par des arguments de theorie des groupes, soit par des methodes d'algebre lineaire (a partir du determinant).

Dans cet exercice on va montrer qu'un tel morphisme (en admettant qu'il existe) est en fait unique.

Pour $l \geqslant 2$ et $n_i \in \{1, \cdots, n\}$ des entiers tous distincts on note
$$(n_1, n_2 \cdots, n_l) =$$
la permutation σ telle que
$$\sigma(n_1) = n_2,\ \sigma(n_2) = n_3, \cdots, \sigma(n_{l-1}) = n_l,\ \sigma(n_l) = n_1$$
et qui laisse fixe tous les elements $m \in \{1, 2, \cdots, n\}$ differents des n_i ($\sigma(m) = m$). Une telle permutation est dite cyclique (ou est un cycle) de longueur l.

Une transposition est une permutation cyclique de longueur 2 : de la forme $(n_1 n_2)$, c'est a dire qu'elle echange n_1 et n_2 et laisse tous les autres elements $\neq n_1, n_2$ fixes.

On admettra (et on montrera plus tard au deuxieme semestre) que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut s'ecrire comme la composee de permutations cycliques.

1. Quel est l'ordre de $(n_1, n_2 \cdots, n_l)$?
2. Pour une permutation τ donnee calculer le conjugue par tau du cycle $(1, 2 \cdots, l)$:

$$\tau \circ (1, 2 \cdots, l) \circ \tau^{-1}$$

   (que vaut $\tau \circ (1, 2 \cdots, l) \circ \tau^{-1}(\tau(1))$.)
3. Montrer que tous les cycles d'une longueur donnee sont conjugues entre eux : si $(n_1, n_2 \cdots, n_l)$ et $(m_1, m_2 \cdots, m_l)$ sont deux cycles de longueur l il existe un permutation τ telle que

$$(m_1, m_2 \cdots, m_l) = \mathrm{ad}_\tau(n_1, n_2 \cdots, n_l) = \tau \circ (n_1, n_2 \cdots, n_l) \circ \tau^{-1}.$$

4. Montrer par recurrence (sur la longueur) que tout cycle peut s'ecrire comme compose de transpositions (commencer par considerer un cycle de la forme $(12 \cdots l)$). Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendre par les $\frac{n(n-1)}{2}$ transpositions transpositions,

$$(n_1 n_2),\ 1 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant n.$$

5. Soit

$$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$$

   un morphisme de groupes ($\{\pm 1\}$ est muni de la multiplication). Montrer que ε prend la meme valeur pour toute les transpositions (cf. Exercice 1.
6. En deduire qu'il n'existe pas plus de deux morphismes de groupes $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$.