Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 31 octobre au 4 novembre 2016

Série 7 du mardi 1er novembre 2016

Exercice 1 (* A rendre) .

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction croissante définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \text{ existent.}$$

Exercice 2.

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la limite:

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ \neq}} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 8\alpha x}{\sin(\alpha^4 - x^4)}$$

existe-t-elle ? Calculer cette limite lorsqu'elle existe.

Exercice 3.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout triplet $x \leq y \leq z$ de I:

$$(f(y) - f(x))\,(f(y) - f(z)) \leq 0.$$

Montrer que f est monotone.

Indications:

1^o) Démontrer la proposition en supposant que $I = [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On étudiera successivement les cas où $f(a) = f(b), f(a) < f(b)$ et $f(a) > f(b)$.

2^o) Démontrer la proposition en supposant que I est un intervalle quelconque. On supposera par l'absurde que si f n'est pas monotone sur I, alors il existe $a_1 < b_1, a_2 < b_2$, quatre éléments de I, tels que $f(a_1) < f(b_1)$ et $f(a_2) > f(b_2)$.

Exercice 4.

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ bornée. On définit la fonction $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ par $g(x) = \sup\{f(y) : y \in [0, x]\}$.

1.) Montrer que g est croissante.

2.) Montrer que si f est continue, g l'est aussi.