Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 10 au 14 octobre 2016

Série 4 du jeudi 13 octobre 2016

Exercice 1.

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un **point d'accumulation** de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ si de celle-ci on peut extraire une sous-suite qui converge vers x.
Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite bornée et désignons par E l'ensemble de ses points d'accumulation.
Montrer que

$$\sup E = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Indications

1.) Montrer que $E \neq \varnothing$.
2.) Si $\alpha = \sup E, \beta = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, montrer que $\beta \leq \alpha$.
3.) Soit $\lambda \in E$, limite de la sous-suite $(x_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$; montrer que $\beta \geq \lambda$.

Exercice 2 (* A rendre) .

On considère la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par

$$x_0 = 0, \qquad x_{\frac{q(q-1)}{2}+p} = \frac{p}{q},$$

pour $1 \leq p \leq q, \quad q = 1, 2, \ldots$.

(1) Écrire les 20 premiers termes de cette suite.

(2) Trouver tous les points d'accumulation de cette suite.

(3) Tirer de cette suite une injection de $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3.

1.) Soit $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ pour $k = 1, 2, \ldots$. On définit la suite (x_n) par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}.$$

Montrer que la suite x_n est de Cauchy.

2.) Soit $x \in [0,1[$. Montrer qu'il existe une suite de $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ telle que la suite x_n formée comme en 1.) converge vers x.
Indication: Partitionner $[0,1[$ *en 10 intervalles égaux:* $[0, \frac{1}{10}[, [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}[, \ldots, [\frac{9}{10}, 1[$ *et bien choisir* a_1. *etc...*

3.) Montrer que l'expansion décimale d'un nombre n'est pas toujours unique.