Corrigé 14 du jeudi 22 décembre 2016

Exercice 1.

(1.) Montrer que, pour $x > 1$:

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

existe.
Indication: utiliser le fait que $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ pour t assez grand.

On peut écrire $t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2}$ et on sait que $t^{x-1}e^{-t/2}$ converge vers 0 si t tend vers l'infini; il est donc plus petit que 1 pour x assez grand. On a ainsi $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ avec $e^{-t/2}$ intégrable (au sens $\lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t/2}dt = \lim_{N\to\infty} -2e^{-t/2} \mid_0^N = 2$ existe). On pose alors

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

(2.) Calculer $\Gamma(1)$ et montrer ensuite que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall \alpha > 1$
Indication: intégrer par parties.

On a

$$\Gamma(1) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-t}\, dt = \lim_{N\to\infty} -e^{-t}\Big|_0^N = 1$$

ainsi que, en intégrant par parties:

$$\int_0^N t^{\alpha}e^{-t}\, dt = -t^{\alpha}e^{-t}\Big|_0^N + \alpha \int_0^N t^{\alpha-1}e^{-t}\, dt$$

ce qui donne à la limte

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

On en déduit

$$\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3.) Montrer que :

$$\ln\Gamma\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(\ln\Gamma(x) \ + \ \ln\Gamma(y)\Big).$$

Indication: utiliser Cauchy-Schwarz.

On a, et puisque tout est positif:

$$\int_0^N t^{\frac{x+y}{2}-1}e^{-t}\, dt = \int_0^N t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\, t^{\frac{y-1}{2}}e^{-t/2}\, dt \leq \Big\{\int_0^N t^{x-1}e^{-t}\, dt\Big\}^{1/2}\Big\{\int_0^N t^{y-1}e^{-t}\, dt\Big\}^{1/2}.$$

Faisant tendre N vers l'infini, puis en prenant le ln, on a le résultat.

(4.) Soit $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$, pour $x, y > 1$. Montrer que:

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y) \qquad \text{ainsi que} \qquad B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y).$$

Indication: intégrer par parties.

Montrons le premier par intégration par parties. On a:

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \int_0^1 t^{(x+1)-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 \underbrace{\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^x}_{u(t)} \underbrace{(1-t)^{x+y-1}}_{v'(t)}\,dt \\ &= -\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^x\Big(-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\Big)\Big|_0^1 + \int_0^1 x\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\,dt \\ &= \frac{x}{x+y}B(x,y). \end{aligned}$$

Un changement de variable simple $u = 1-t$ montre $B(x,y) = B(y,x)$.

(5.) En déduire que:

$$B(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}, \quad \forall m,n \in \mathbb{N}^*.$$

Indication: par récurrence.

Il suffit de remarquer que le terme de droite et le terme de gauche coïncident pour $(1,1)$ (en effet, $B(1,1) = 1$, $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$) et obéissent aux mêmes règles de récurrences. En effet:

$$B(n+1,m) = \frac{n}{n+m}B(n,m) \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+1+m)} = \frac{n\Gamma(n)\Gamma(m)}{(n+m)\Gamma(n+m)} = \frac{n}{n+m}\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}.$$

Exercice 2.

Montrer que si f est continue sur $[a,b]$ alors:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\big(a + (k-\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\big).$$

Si on appelle σ_n la subdivision de $[a,b]$ en n intervalles égaux, alors on a clairement

$$\underline{S}_{\sigma_n}(f) \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\big(a + (k-\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\big) \le \overline{S}_{\sigma_n}(f).$$

Et, puisque f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n > N$ on ait

$$\overline{S}_{\sigma_n}(f) - \underline{S}_{\sigma_n}(f) < \varepsilon.$$

D'où le résultat.