Série 9 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 21 novembre.
L'exercice 3 ($\star$) peut être rendu le jeudi 24 novembre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

a) Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, est toujours une application linéaire.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(u) = b^T u$ pour tout u.

  ○ vrai ○ faux

- Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors, le codomaine (l'espace d'arrivé) de l'application $x \mapsto Ax$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A.

  ○ vrai ○ faux

- Soient U, V deux espaces vectoriels et $F : U \to V$ une application linéaire. Si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ engendre U, alors la famille $(F(u_1), \dots, F(u_n))$ engendre V.

  ○ vrai ○ faux

- Soient $(v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Supposons $F(v_i) = 0$, pour $i = 1, \dots, p$. Donc F est l'application nulle.

  ○ vrai ○ faux

Sol.:

- *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, est toujours une application linéaire.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(u) = b^T u$ pour tout u.*

  ● *vrai* ○ *faux*

- *Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors, le codomaine (l'espace d'arrivé) de l'application $x \mapsto Ax$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de A.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient U, V deux espaces vectoriels et $F : U \to V$ une application linéaire. Si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ engendre U, alors la famille $(F(u_1), \dots, F(u_n))$ engendre V.*

  ○ *vrai* ● *faux*

- *Soient* $(v_1, \dots, v_p)$ *une famille génératrice de* $\mathbb{R}^n$ *et* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application linéaire. Supposons* $F(v_i) = 0$*, pour* $i = 1, \dots, p$*. Donc* F *est l'application nulle.*

  ● *vrai* ○ *faux*

b) Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Si v_1, v_2, v_3, $v_4 \in \mathbb{R}^4$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, est-ce que leurs images $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$, $\varphi(v_3)$, $\varphi(v_4)$ sont linéairement indépendantes ?

○ Non si l'un des vecteurs est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, mais oui sinon.

○ Oui, toujours.

○ Non, jamais.

Sol.:

○ *Non si l'un des vecteurs est dans* $\mathrm{Ker}(\varphi)$*, mais oui sinon.*

○ *Oui, toujours.*

● *Non, jamais.*

Exercice 2

a) Considérons l'espace vectoriel $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, où $n \geq 1$ est un entier positif.

   i) Calculer $\dim(M_{n\times n}(\mathbb{R}))$.

   ii) Soit $S_1 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques. Calculer $\dim(S_1)$.

   iii) Soit $S_2 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques. Calculer $\dim(S_2)$.

   iv) Soit $T = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Calculer $\dim(T)$.

   Rappel : Soit K un corps. L'application trace $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ est définie par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ pour toute $A \in M_{n\times n}(K)$.

b) Soit $n \geq 1$ un entier positif. Considérons $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ comme l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et notons-le V.

   i) Calculer $\dim(V)$.

   ii) Soit $H_1 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes. Est-ce que H_1 est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de V ? Si oui, calculer $\dim(H_1)$.

   iii) Soit $H_2 \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices anti-hermitiennes. Est-ce que H_2 est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de V ? Si oui, calculer $\dim(H_2)$.

Sol.:

a) *i) Soit* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, avec les éléments* $a_{ij}, i, j = 1, \dots, n$*. On définit les matrices* $E_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), i, j = 1, \dots, n$ *par*

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{n\times n}(K).$$

Donc, on voit que $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}$*, c-à-d, l'ensemble* $\{E_{ij} : i,j = 1,\ldots,n\}$ *engendre* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Soient $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}, i,j = 1,\ldots,n$ *t.q.* $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}E_{ij} = 0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*. Donc,*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{ij} = 0, i,j = 1,\ldots,n,$$

c-à-d, $\{E_{ij} : i,j = 1,\ldots,n\}$ *est une base pour* $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim(M_{n\times n}(\mathbb{R})) = n^2$.

ii) D'abord on montre que S_1 *est un sous-espace vectoriel de* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$*. La matrice nulle est une matrice symétrique, donc* $S_1 \neq \emptyset$*. Soient* $A, B \in S_1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Comme*

$$\begin{aligned} (A+B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B \in S_1 \\ (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in S_1, \end{aligned}$$

S_1 *est un sous-espace vectoriel de* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
On définit

$$S_{ij} = \begin{cases} E_{ii}, & si\ i = j \\ E_{ij} + E_{ji}, & si\ i < j, \end{cases}$$

c-à-d, $\frac{n(n+1)}{2}$ *matrices* $S_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$*. Soit* $A \in S_1$ *avec les éléments* $a_{ij} = a_{ji}, i,j = 1,\ldots,n$*. On obtient que*

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij} = \sum_{i\leq j} a_{ij}S_{ij}.$$

Alors, l'ensemble des matrices S_{ij} *engendre* S_1*. De même que pour i), on montre que* S_{ij} *sont linéairement indépendantes. Alors,* $\dim(S_1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

iii) Soient $A, B \in S_2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*. La matrice nulle est dans* S_2*. Puisque*

$$\begin{aligned} (A+B)^T = (-A)^T + (-B)^T = -(A+B) \Rightarrow A + B \in S_2 \\ (\alpha A)^T = \alpha A^T = -\alpha A \Rightarrow \alpha A \in S_2, \end{aligned}$$

S_2 *est un sous-espace vectoriel. On a vu dans Série 2 que chaque matrice* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique* $\Rightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$*. De plus, la seule matrice qui est symétrique et antisymétrique est la matrice nulle, c-à-d,* $S_1 \cap S_2 = \{0\}$*. D'après Lemme de Grassmann, on a* $\dim(S_2) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

iv) Soient $A, B \in T$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Comme*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(0) &= 0 \Rightarrow 0 \in T, \\ \mathrm{Tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^n (A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = 0 \Rightarrow A + B \in T \\ \mathrm{Tr}(\alpha A) &= \sum_{i=1}^n (\alpha A)_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0 \Rightarrow \alpha A \in T, \end{aligned}$$

T est un sous-espace vectoriel de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Soit $A \in T$. Alors, comme $a_{11} = -(a_{22} + \cdots + a_{nn})$, on obtient

$$\begin{aligned} A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{i\neq j} a_{ij}E_{ij} \\ &= a_{22}(-E_{11} + E_{22}) + \cdots + a_{nn}(-E_{11} + E_{nn}) + \sum_{i\neq j} a_{ij}E_{ij}. \end{aligned}$$

Du coup, les matrices $-E_{11}+E_{ii}, i = 2,\ldots,n$ et $E_{ij}, i \neq j$, engendrent T et elles sont linéairement indépendantes (la vérification est analogue à i)). On voit que il y a n^2-n matrices $E_{ij}, i \neq j$, et $n-1$ matrices $-E_{11}+E_{ii}, i = 2,\ldots,n$. Donc, $\dim(T) = n^2 - 1$.

b) i) *Soit $A \in V$ avec $A_{ij} = a_{ij} = \alpha_{ij} + \mathrm{i}\beta_{ij}$, où $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,\ldots,n$. Comme*

$$\begin{aligned} A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} \underbrace{\mathrm{i}E_{ij}}_{:=C_{ij}} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}C_{ij}, \end{aligned} \tag{1}$$

on voit que l'ensemble des matrices $\{E_{ij}, C_{ij} : i, j = 1,\ldots,n\}$ engendre V. De plus, les matrices $E_{ij}, C_{ij}, i, j = 1,\ldots,n$ sont linéairement indépendantes car pour $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,\ldots,n$ t.q. $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}C_{ij} = 0 \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}+\mathrm{i}\beta_{11} & \alpha_{12}+\mathrm{i}\beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n}+\mathrm{i}\beta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}+\mathrm{i}\beta_{n1} & \alpha_{n2}+\mathrm{i}\beta_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}+\mathrm{i}\beta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0, i, j = 1,\ldots,n.$$

Alors, $\dim(V) = 2n^2$.

ii) *Soient $A, B \in H_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme*

$$\begin{aligned} 0^H = 0 &\Rightarrow 0 \in H_1, \\ (A+B)^H = A^H + B^H = A + B &\Rightarrow A + B \in H_1, \\ (\alpha A)^H = \bar{\alpha}A^H = \alpha A &\Rightarrow \alpha A \in H_1, \end{aligned}$$

H_1 est un sous-espace vectoriel de V. Sa dimension est $n + n(n-1) = n^2$: on peut le montrer en utilisant les matrices E_{ij} et C_{ij}. Autrement : pour $A \in H_1$, la diagonale doit être réeelle, d'où le n. Puis il faut choisir un nombre complexe (i.e. deux nombres réels) pour chaque élément de la partie triangulaire supérieure, c-à-d, $n(n-1)/2$ nombres complexes, ou $n(n-1)$ nombres réels.

iii) *De manière analogue à ii), on obtient que H_2 est un sous-espace vectoriel de V. La dimension de H_2 est n^2 également (la diagonale doit être imaginaire pure, et pareil pour le reste).*

Exercice 3 ($\star$)
Soient $U_1, \ldots, U_s$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. Alors

(i) $U_1 + \cdots + U_s$ est encore un sous-espace vectoriel de V,

(ii) $U_1 + \cdots + U_s = \operatorname{span}(U_1 \cup \cdots \cup U_s)$,

(iii) $\dim(U_1 + \cdots + U_s) \leq \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_s)$.

Sol.:

i) D'abord, on voit que $0 \in U_1 + \cdots + U_s$. Soient $u, v \in U_1 + \cdots + U_s$. Donc, il existe $u_i, v_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, s$ tels que $u = u_1 + \cdots + u_s$ et $v = v_1 + \cdots + v_s$. On obtient :

$$u + v = (u_1 + \cdots + u_s) + (v_1 + \cdots + v_s) = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in U_2} + \cdots \underbrace{(u_s + v_s)}_{\in U_s},$$

comme $U_i, i = 1, \ldots, s$ sont les sous-espaces vectoriels. Donc, $u+v \in U_1+\cdots+U_s$. De manière analogue, on montre que $\alpha u \in U_1+\cdots+U_s$, pour $\alpha \in K$ and $u \in U_1+\cdots+U_s$.

ii) On voit que $U_i \subseteq U_1+\cdots+U_s$, pour chaque $i = 1, \ldots, s$, puisque tout $u \in U_i$ peut s'écrit comme $u = 0 + \ldots + \underbrace{u}_{i} + \ldots + 0 \in U_1 + \cdots + U_s$. Donc, $U_1 \cup \cdots \cup U_s \subseteq U_1 + \cdots + U_s$.
Comme $U_1 + \cdots + U_s$ est un sous-espace vectoriel, on obtient $\operatorname{span}(U_1 \cup \cdots \cup U_s) \subseteq U_1 + \cdots + U_s$.
Il reste montrer que $U_1 + \cdots + U_s \subseteq \operatorname{span}(U_1 \cup \cdots \cup U_s)$. Soit $u = u_1 + \cdots + u_s \in U_1 + \cdots + U_s$. Donc, u est une combinaison linéaire de vecteurs dans $U_1 \cup \cdots \cup U_s$ $\Rightarrow u \in \operatorname{span}(U_1 \cup \cdots \cup U_s)$.

iii) On utilise la formule de Grassmann, et fait la preuve par récurrence.
Base : pour U_1 et U_2, on a

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

En faisant l'hypothèse de récurrence que l'égalité est vraie pour $k < s$, on a

$$\dim(U_1 + \cdots + U_k) \leq \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_k).$$

Alors, pour $k + 1$ sous-espaces vectoriels, on a

$$\begin{aligned}\dim((U_1 + \cdots + U_k) + U_{k+1}) &\underbrace{\leq}_{\textit{la base}} \dim(U_1 + \cdots + U_k) + \dim(U_{k+1}) \\ &\underbrace{\leq}_{\textit{l'hypothèse}} \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_k) + \dim(U_{k+1}).\end{aligned}$$

Exercice 4
Soit V un espace vectoriel de dimension finie. L'application linéaire $P : V \to V$ est une *Projection*, si $P^2 = P$. Montrer que :

i) $V = \operatorname{Ker}(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.

ii) Pour deux sous espaces vectoriels $W_1, W_2 \subset V$ tels que $V = W_1 \oplus W_2$, il existe exactement une projection $P : V \to V$ telle que $\operatorname{Ker}(P) = W_1$ et $\operatorname{Im}(P) = W_2$.

Sol.:

i) *Soient* $W_1 := \mathrm{Ker}\,(P)$ *et* $W_2 := \mathrm{Im}\,(P)$.

(a) *On montre* $V = W_1 + W_2$ *: Soit* $v \in V$*, alors* $v = (v - P(v)) + P(v)$*. Il est clair que* $P(v) \in W_2$*. De plus* $P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$ *et donc* $v - P(v) \in W_1$*. Il s'ensuit que* $v \in W_1 + W_2$*. On a montré que* $V \subset W_1 + W_2$ *et* $W_1 + W_2 \subset V$ *découle de la définition d'espace vectoriel. Donc* $W_1 + W_2 = V$*.*

(b) *On montre* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ *: Soit* $v \in W_1 \cap W_2$*. Comme* v *est dans* $W_2 = \mathrm{Im}\,(P)$ *alors il existe* $w \in V$*, tel que* $P(w) = v$*. Appliquant* P *on obtient* $P^2(w) = P(w) = P(v)$*. Mais comme on a aussi que* $v \in W_1 = \mathrm{Ker}\,(P)$ *alors* $0 = P(v) = P(w) = v$*.*

ii) *Soient* $W_1, W_2 \subset V$ *deux sous-espace vectoriels de* V *t.q.* $V = W_1 \oplus W_2$*.*

(a) *Existence de* P *: Soient* $\{u_1, ..., u_k\}$ *une base de* W_1 *et* $\{v_1, ...v_l\}$ *une base de* W_2*.* $\{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_l\}$ *est une base de* V*. On définit* $P(u_i) = 0$ *pour* $i = 1, ..., k$ *et* $P(v_j) = v_j$ *pour* $j = 1, ..., l$*. Ainsi* P *est définie pour tout élément de la base, par la linéarité on étend la définition à tout élément de l'espace.*

(b) *Unicité de* P *: Soit* P' *un autre projection telle que* $\mathrm{Ker}\,(P') = W_1$ *et* $\mathrm{Im}\,(P') = W_2$*. Clairement pour tout* $v \in W_1 = \mathrm{Ker}\,(P) = \mathrm{Ker}\,(P')$ *on a* $P'(v) = P(v)$ *(les deux donnent* 0*). Soit* $v \in W_2 = \mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Im}\,(P')$*, donc il existent* w, w' *tels que* $P(w) = P'(w') = v$*, il s'ensuit que*

$$P(v) - P'(v) = P(P(w)) - P'(P'(w')) = P(w) - P'(w') = v - v = 0,$$

donc $P(v) = P'(v)$ *pour tout élément* $v \in W_2$*. Comme* P, P' *sont linéaires et* $W_1 \oplus W_2 = V$ *on a* $P(v) = P'(v)$ *pour tout élément de* V*.*

Exercice 5

Lequelles des applications suivantes sont linéaires ? Sauf indication contraire, montrer la linéarité sur le corps $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z \mapsto \overline{z}$.
2. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad z \mapsto \overline{z}$, (sur le corps $\mathbb{C}$).
3. $C^0((-2,2)) \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto f(0) + \int_{-1}^{1} f(x)\, e^{x^2}\, dx$.
4. $C^0((0,\infty)) \to C^0((0,\infty))$, $\quad f \mapsto \Big(x \mapsto x\, f(1/x)\Big)$.
5. $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto \int_{f(0)-\frac{\pi}{2}}^{f(0)+\frac{\pi}{2}} f(2x)\, dx$.
6. $(\star\star)$ $\mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$, $\quad p \mapsto p'$.
7. $(\star\star)$ $\mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_5[x]$, $\quad p \mapsto (2 - 3x + x^2)p$.
8. $\mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2$, $\quad (x, y) \mapsto (x + y, x^2 + y^2)$.

9. $C^0([0,3]) \to \mathbb{R}$, $\qquad f \mapsto 37f(1) + 58 \int_2^3 f(x)\, dx.$

($\star\star$) Pour les points 6. et 7. calculer une base de l'image et du noyau, et dire si les applications sont injectives ou surjectives.

Notation : Pour $I \subseteq \mathbb{R}$, on denote l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur I par $C^0(I)$. De plus $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques.

Sol.: *Sauf 2., les applications sont toutes linéaires. On note avec h chaque fonction décrite dans les points 1. - 9.*

1. *L'application h est linéaire, car on a*

$$\lambda h(x+iy) = \lambda\overline{(x+iy)} = \lambda(x-iy) = \overline{\lambda(x+iy)} = h(\lambda(x+iy))$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $\lambda = \overline{\lambda}$. De plus, puisque

$$h(a) + h(b) = \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = h(a+b)$$

pour $a, b \in \mathbb{C}$, on a que l'application est linéaire.

2. *L'application n'est pas linéaire car*

$$ih(i) = i\overline{i} = -i^2 = 1 \neq -1 = h(i^2)\,.$$

3. *Pour $f, g \in C^0((-2,2))$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned}
h(\lambda f + \mu g) &= \big(\lambda f + \mu g\big)(0) + \int_{-1}^{1} \big(\lambda f + \mu g\big)(x)\, e^{x^2} dx \\
&= \lambda f(0) + \mu g(0) + \int_{-1}^{1} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, e^{x^2} dx \\
&= \lambda\left(f(0) + \int_{-1}^{1} f(x)\, e^{x^2} dx\right) + \mu\left(g(0) + \int_{-1}^{1} g(x)\, e^{x^2} dx\right) = \lambda h(f) + \mu h(g)
\end{aligned}$$

et donc l'application est linéaire.

4. *Pour $f, g \in C^0((0,\infty))$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned}
h(\lambda f + \mu g) &= x\,\big(\lambda f + \mu g\big)(1/x) = x\lambda f(1/x) + x\mu g(1/x) \\
&= \lambda\big(xf(1/x)\big) + \mu\big(xg(1/x)\big) = \lambda h(f) + \mu h(g)
\end{aligned}$$

et donc l'application est linéaire.

5. *Pour $f \in C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ nous pouvons écrire $h(f)$ comme*

$$h(f) = \int_{f(0)-\frac{\pi}{2}}^{f(0)+\frac{\pi}{2}} f(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{2f(0)-\pi}^{2f(0)+\pi} f(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(y)\, dy = \int_0^{\pi} f(2x)\, dx.$$

Pour $f, g \in C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$h(\lambda f + \mu g) = \int\limits_{\left(\lambda f+\mu g\right)(0)-\frac{\pi}{2}}^{\left(\lambda f+\mu g\right)(0)+\frac{\pi}{2}} \Big(\lambda f + \mu g\Big)(2x)\, dx = \lambda \int\limits_{0}^{\pi} f(2x)\, dx + \mu \int\limits_{0}^{\pi} g(2x)\, dx$$

$$= \lambda \int\limits_{f(0)-\frac{\pi}{2}}^{f(0)+\frac{\pi}{2}} f(2x)\, dx + \mu \int\limits_{g(0)-\frac{\pi}{2}}^{g(0)+\frac{\pi}{2}} g(2x)\, dx = \lambda h(f) + \mu h(g)$$

et donc l'application est linéaire.

6. *Pour $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a*

$$h(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda h(f) + \mu h(g).$$

Aussi dans ce cas h est linéaire. Le noyau contient tous les polynômes p tels que $h(p) = 0$, c'est à dire les polynômes de degré 0. Une base du noyau est par exemple l'ensemble $\{1\}$. L'image contient tous les polynômes p pour lequel il existe un polynôme q de degré ≤ 4 t. q. $h(q) = p$, et donc l'image est donné par tous les polynômes de degré ≤ 3. Une base de l'image est l'ensemble $\{1, x, x^2, x^3\}$. L'application n'est pas injective ni surjective.

7. *Pour $f, g \in \mathbb{R}_3[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned} h(\lambda f + \mu g) &= (2 - 3x + x^2)(\lambda f + \mu g) \\ &= \lambda(2 - 3x + x^2)f + \mu(2 - 3x + x^2)g \\ &= \lambda h(f) + \mu h(g). \end{aligned}$$

L'application h est donc linéaire. Le noyau contient tous les polynômes p tels que $h(p) = 0$, c'est à dire seulement le polynôme $p = 0$, et donc le noyau est de dimension zéro et l'ensemble vide $\emptyset$ est une base. L'image contient tous les polynômes p pour lesquels il existe un polynôme q de degré ≤ 3 tels que $h(q) = p$, et donc une base de l'image est donnée par $\{(2-3x+x^2), (2-3x+x^2)x, (2-3x+x^2)x^2, (2-3x+x^2)x^3\}$. L'application est injective mais elle n'est pas surjective.

8. *L'application n'est pas linéaire sur $\mathbb{R}$.*

9. *L'application est linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C^0([0, 3])$. Alors, en tenant compte du fait que l'intégration est linéaire, on obtient*

$$\begin{aligned} h(\lambda f + \mu g) &= 37(\lambda f + \mu g)(1) + 58 \int\limits_{2}^{3} (\lambda f + \mu g)(x)\, dx \\ &= 37(\lambda f(1) + \mu g(1)) + 58 \int\limits_{2}^{3} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \\ &= \lambda \left(37 f(1) + 58 \int\limits_{2}^{3} f(x)\, dx \right) + \mu \left(37 g(1) + 58 \int\limits_{2}^{3} g(x)\, dx \right) \\ &= \lambda h(f) + \mu h(g)\, . \end{aligned}$$

Exercice 6
On considére les trois applications linéaires $F_A, F_B, F_C : X \to Y$ que l'on décrit par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient $F_A : x \mapsto Ax$. Les espaces vectoriels X et Y sont toujours soit $\mathbb{R}^2$ soit $\mathbb{R}^3$.

i) Déterminer pour les applications linéaires F_A, F_B, F_C si elles sont surjectives, injectives ou bijectives.

ii) Calculer pour les applications linéaires F_A, F_B, F_C une base de le noyau et de l'image.

Sol.:

1. *Pour déterminer si les applications linéaires sont surjectives, injectives ou bijectives, nous calculons la forme échelonné de chaque matrice.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire $F_A : X \to Y$ ($X = Y = \mathbb{R}^3$) est surjective, puisque $\operatorname{rang}(A) = \dim(Y) = 3$*, et est injective car tous les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants. Puisque F_A est surjective et injective, F_A est bijective.*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire $F_B : X \to Y$ ($X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^3$) est injective car tous les vecteurs colonnes de B sont linéairement indépendants. Mais elle n'est pas surjective puisque $\operatorname{rang}(B) = 2 < 3 = \dim Y$*. Donc F_B n'est pas bijective.*

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire $F_C : X \to Y$ ($X = Y = \mathbb{R}^3$) ne est pas surjective ni injective, car $\operatorname{rang}(C) = 2 < 3 = \dim(Y)$ *et a seulement* 2 *vecteurs colonnes qui sont linéairement indépendants. Donc F_C n'est pas bijective.*

2. *Les applications F_A et F_B sont injectives, donc* $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B) = \{0\}$*, et par conséquent le noyau est de dimension* 0 *et l'ensemble vide $\emptyset$ est une base pour le noyau de F_A et F_B. De plus, les vecteurs colonnes de A et B constituent une base de l'image de F_A et F_B respectivement, puisque ils sont linéairement indépendants. Donc la base de l'image de F_A est*

$$\operatorname{Im}(F_A) : \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme F_A est surjective, on peut aussi considérer la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La base de l'image de F_B est

$$\mathrm{Im}(F_B): \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice C a seulement deux vecteurs colonnes qui sont linéairement indépendants, par exemple les vecteurs colonnes 1 et 3, qui forment une base de l'image de F_C

$$\mathrm{Im}(F_C): \quad \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour calculer la base du noyau de F_C nous utilisons le résultat de la première partie de l'exercice. Par définition un élément x de le noyau de F_C satisfait $Cx = 0$. Puisque la solution de $Cx = 0$ ne change pas si nous faisons des opérations sur les lignes de C, nous prenons la forme échelonné de la matrice C. Et donc nous devons résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = 0. \end{cases}$$

L'une des variables x_1 ou x_2 peut être choisi librement, par exemple x_2, et donc $x_1 = -x_2/2$, $x_3 = 0$ et une base du noyau de F_C est donnée par

$$\mathrm{Ker}\,(F_C): \quad \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 7

Soit la transformation $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix}$.

i) Vérifier que T est linéaire.

ii) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(T)$.

iii) Trouver une base de $\mathrm{Im}(T)$.

Sol.:

i) Pour tous $p_1, p_2, p \in \mathbb{R}_2[t]$ et $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$T(p_1 + p_2) = \begin{pmatrix} p_1(0) + p_2(0) \\ p_1'(0) + p_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_1'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(0) \\ p_2'(0) \end{pmatrix} = T(p_1) + T(p_2).$$

$$T(cp) = \begin{pmatrix} cp(0) \\ cp'(0) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix} = cT(p).$$

ii) $T(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0$ et $p'(0) = 0$. Considérons un polynôme $p \in \mathbb{R}_2[t]$ de la forme $p = c_2t^2 + c_1t + c_0$. Donc, $p'(t) = 2c_2t + c_1$. On a $p(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0 \Leftrightarrow p = c_2t^2 + c_1t$. De plus, $p'(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Leftrightarrow p = c_2t^2$.
Ainsi, une base de $\mathrm{Ker}(T)$ est $\{t^2\}$.

iii) Soit p de la forme $p = c_2t^2 + c_1t + c_0$. L'image $\operatorname{Im} T$ *est l'ensemble des vecteurs* $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ainsi, une base de* $\operatorname{Im}(T)$ *est l'ensemble* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 8

Soient K un corps et $n \geq 1$ un entier positif. Soit $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ l'application trace.

i) Montrer que Tr est une application linéaire.

ii) Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in M_{n\times n}(K)$.

iii) Montrer que $\mathrm{Tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}(A)$ pour $A, S \in M_{n\times n}(K)$ et S une matrice inversible.

Sol.:

a) Soient $A, B \in M_{n\times n}(K)$ et $\lambda, \mu \in K$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) & = & \sum_{i=1}^n (\lambda A + \mu B)_{ii} \\ & = & \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ & = & \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B). \end{array}$$

Cela montre que Tr *est une application linéaire.*

b) Par définition, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ et donc

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}\,.$$

On a également $(BA)_{pq} = \sum_{r=1}^n b_{pr}a_{rq}$ et donc

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{p=1}^n (BA)_{pp} = \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n b_{pr}a_{rp} = \sum_{r=1}^n \sum_{p=1}^n a_{rp}b_{pr}.$$

Comme les indices de sommation sont toujours des indices muets (càd qu'on peut les désigner par les symboles de notre choix), on a

$$\sum_{r=1}^n \sum_{p=1}^n a_{rp}b_{pr} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}\,.$$

Cela montre que

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{r=1}^n \sum_{p=1}^n a_{rp}b_{pr} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \mathrm{Tr}(AB)\,.$$

c) $\mathrm{Tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}(S^{-1}(AS)) = \mathrm{Tr}((AS)S^{-1}) = \mathrm{Tr}(A(SS^{-1})) = \mathrm{Tr}(AI_n) = \mathrm{Tr}(A)$, *où on a utilisé b) dans la deuxième égalité et l'associativité du produit des matrices dans la troisième égalité.*

Exercice 9
Calculer pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

le noyau de l'application linéaire $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ définie comme

$$F : X \mapsto AX - XA.$$

Sol.: *On note par X*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

et cherche n^2 paramètres $x_{11}, \dots, x_{nn} \in \mathbb{R}$, t.q. $X \in \mathrm{Ker(F)} = \mathrm{Ker(AX - XA)}$. On calcule les multiplications matricielles

$$AX = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad XA = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

et on résout $AX - XA = 0$. Les équations de la première colonne donnent

$$x_{21} = x_{31} = \cdots = x_{n1} = 0.$$

Les équations de la derniere ligne donnent

$$x_{n1} = x_{n2} = \cdots = x_{n,n-1} = 0.$$

Pour un élément i, j avec $i = 1, 2, \dots, n-1$ et $j = 2, 3, \dots, n$ on obtient $x_{i+1,j} - x_{i,j-1} = 0$. C'est (avec une renumérotation de i) équivalente à

$$x_{i,j} = x_{i-1,j-1} \qquad \textit{pour } i, j \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

Donc si on sait $x_{i-1,j-1}$, l'entrée $x_{i,j}$ suit. Avec ces conditions, cependant, il existe des entrées de X qui ne sont pas définies. Par exemple, les entrées $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$ sont paramètres libres. Le noyau a la dimension n et il tient

$$\mathrm{Ker}\,(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix} : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$