Test1.1

1.) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
NON, la série harmonique diverge

2.) Si $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est tq $f(x) > x$, $\forall x$, alors f n'est pas strictement contractante.
OUI, si elle était strictement contractante elle aurait un point fixe dans $[0, \infty[$.

3.) Si f et g sont continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $max(f, g)$ est continue.
OUI, si $f(x) > g(x)$, c'est encore vrai dans un voisinage de x et c'est donc la continuité de f qui s'applique.
Idem pour l'autre inégalité.
si $f(x) = g(x)$, pour toute suite x_n convergeant vers x, $max(f(x_n), g(x_n)$ converge vers $max(f(x), g(x))$ puisque $f/g(x_n)$ converge vers $f/g(x)$.
On peut aussi utiliser la relation $max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$.

4.) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent, alors $\sum_{n=0}^{\infty} min(a_n, b_n)$ converge.
NON, il suffit de prendre $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n = 1, \ldots$.

5.) Si $\exists x_n$ convergeant vers x tq $f(x_n)$ converge vers $f(x)$, alors f est continue en x.
NON, on peut prendre $f(x) = 1$, si $x >= 0, 0$ sinon et f pas continue en 0 alors que toutes les suites "positives" "marchent".

6.) Une suite qui n'est pas bornée n'a pas de sous-suite convergente.
NON, $a_n = n$ si n pair, $a_n = 0$ si n impair n'est pas bornée et admet une sous-suite qui converge vers 0.

7.) Si S est tel que toute suite de S admette une sous-suite convergente, S est borné.
OUI, Si S pas borné, alors $\forall n \geq 0$, il existe $x_n \in S$ tq $|x_n| > n$. La suite n'a pas de sous-suite convergente.

8.) Si f est uniformément continue et si a_n est de Cauchy, alors $f(a_n)$ est de Cauchy.
OUI, Soit $\varepsilon > 0$. f u.c. implique $\exists \delta > 0$ tq $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. a_n de Cauchy, implique $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $m, n > N$ implique $|a_n - a_m| < \delta$ et donc $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$.
On peut aussi dire :
Si a_n est de Cauchy, elle converge, vers a. f continue en a donne $f(a_n)$ converge vers $f(a)$ et donc $f(a_n)$ est de Cauchy.

Test1.2

On définit la suite a_n par

(1) $a_1 = 2$,

(2) $a_{n+1} = a_n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

Indication : $\exists \ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ continue, croissante, tq $\ln(1 + x) \leq x$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
Solution :

(1) $a_1 = 2$,

(2) $a_{n+1} = a_n\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

Indication : $\exists \ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ continue, croissante, tq $\ln(1 + x) \leq x$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
On a $0 < a_0 = 2 < a_1 \ldots < a_n < a_{n+1} \ldots$. On pose $b_n = \ln a_n$ et on a $b_{n+1} = b_n + \ln(1 + \frac{1}{n^2})$. Donc b_n est croissante, et $0 < \ln(1 + \frac{1}{n^2}) < \frac{1}{n^2}$. Ainsi, $b_{n+1} = (b_{n+1} - b_n) + (b_n - b_{n-1}) + \ldots + (b_1 - b_0) < (b_1 - b-) + \frac{\pi^2}{6}$ et donc b_n est bornée. Elle converge et donc $a_n = exp(b_n)$ aussi.

Test1.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$ et la suite $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Solution :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$ et la suite $a_0 = 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Posons $r = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$.
Par le TAF, on a, pour $x, y \in \mathbb{R}$, que $f(y) = f(x) + f'(y_x)(y - x)$ et ainsi $|f(y) - f(x)| \leq r|y - x|$. Appliquant à la suite, il vient :

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq r|a_n - a_{n-1}|.$$

Et donc,

$$|a_{n+1} - a_n| =\leq r^n|a_1 - a_0|.$$

On a donc la convergence de la série par celle de la série géométrique.

Test1.4

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique avec $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, alors f est constante.

Solution :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique avec $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, alors f est constante.
On pose $\ell = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Supposons $x_1 \neq x_2$ tq $f(x_1) \neq f(x_2)$. Posons $\varepsilon = vert f(x_1) - f(x_2)|$. Il exists M tq $\forall x > M$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon/2$ et donc pour $x, y > M$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Or, f est périodique de période T et il existe n tq $x_1 + nT, x_2 + nT > M$.

Test1.5

Si f est C^3 et f a un min en x, et que $f''(x) = 0$, alors $f'''(x) = 0$.
Vous n'avez pas le droit d'utiliser un théorème pas vu au cours!
Solution :

Si f est C^3 et f a un min en x, et que $f''(x) = 0$, alors $f'''(x) = 0$.
Vous n'avez pas le droit d'utiliser un théorème pas vu au cours!
Un théorème du cours, dit que puis que f a un min en x, alors $f'(x) = 0$. Puisque f est C^3, on a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{6} f'''(x) h^3 + o(h^3)$$

et donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^3} = \frac{1}{6} f'''(x)$$