EPFL Automne 2017
Geometrie, MATH-120

Série 11

Exercice 1. On rappelle qu'on a defini l' angle entre deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non-nuls comme etant l'unique rotation $r = \widehat{\vec{u}\vec{v}}$ qui envoie la demi-droite $\mathbb{R}_{\geqslant 0}\vec{u}$ sur la demi-droite $\mathbb{R}_{\geqslant 0}\vec{v}$.

1. A quoi correspondent (quels sont les matrices) les angles de mesure (dans le langage traditionnel)

$$0, 30, 45, 60, 90 \text{ et } 180 \text{ degres?}$$

2. Enoncer et demontrer dans le language du cours le resultat bien connu suivant : *etant donne un triangle ABC (delimite par trois points distincts non alignes) la somme des angles aux sommets A, B, C vaut 180 degres.*

Exercice 2. Soit $r,' r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^+_{\mathbf{0}}$ deux rotations (lineaires) et $s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)^-_{\mathbf{0}}$ une symetrie (lineaire.) Donner une expression simple de

$$\mathrm{Ad}(r')(r) = r' \circ r \circ r'^{-1} \text{ et } \mathrm{Ad}(s)(r) = s \circ r \circ s^{-1}$$

en fonction de r (passer aux matrices).

Exercice 3. 1. Montrer que les isometries affines preservent les angles au sens suivant : soient $P \neq Q$ et $R \neq S$ des points du plan et soit ϕ une isometrie et

$$P' = \phi(P),\ Q' = \phi(Q), \cdots$$

les image de ces points par ϕ, alors on a

$$\widehat{\overrightarrow{P'Q'}\overrightarrow{R'S'}} = \pm\widehat{\overrightarrow{PQ}\overrightarrow{RS}}$$

ou ± 1 depend de ce que ϕ est une rotation ou une symetrie.
On pourra utiliser la relation

$$\overrightarrow{P'Q'} = \phi_0(\overrightarrow{PQ}) \tag{0.1}$$

ou ϕ_0 designe la partie lineaire et utiliser l'exercice precedent.

Exercice 4. Soient $\phi, \psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ deux isometries affines. Montrer les enonces suivants

1. On suppose qu'il existe trois points non-alignes $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\phi(P_i) = \psi(P_i), \ i = 1, 2, 3.$$

   Montrer qu'alors $\phi = \psi$.

2. On suppose qu'il existe deux points distincts $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\phi(P_i) = \psi(P_i), \ i = 1, 2.$$

   Montrer qu'alors ou bien $\phi = \psi$ ou bien $\phi = s \circ \psi$ avec s est la symetrie affine d'axe la droite passant par P_1 et P_2.

Indication : On pourra commencer par supposer que $\psi = \mathrm{Id}$ et on utilisera ce qu'on sait des divers ensembles de points fixes des diverses isometries affines (cf. Section 4 du chapitre 3 du cours sur les isometries du plan).

ATTENTION : les exercices qui suivent peuvent etre tres long et tres compliques du point de vue calculatoire si on ne s'y prend pas correctement mais sont bien plus simple si on reflechit a ce qui ce passe. Pour les resoudre il est important de penser au resultats vus en cours sur la structure des differentes isometries ; il sera egalement tres utile d'utiliser la decomposition d'une isometrie en translation/partie lineaire et de se souvenir que l'application "partie lineaire" est un morphisme de groupes.

Exercice 5.

1. Donner la matrice de la partie lineaire de la symetrie axiale s d'axe la droite d'equation

$$2x + 3y = 4$$

   et donner l'expression analytique de cette isometrie ((X, Y) en fonction de (x, y) avec

$$s(x, y) = (X, Y).)$$

2. Soit $\vec{v} = (1, 1)$ et $s' = t_{(1,1)} \circ s$. Quelle a la nature de s' ?
3. Calculer s'^2 et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, s'^{2n}.
4. Donner pour tout $n \geqslant 1$, la partie lineaire et le vecteur de translation de s'^{2n+1}.

Exercice 6.

1. Quelle est la matrice de (la partie lineaire r_0 de) la rotation affine r qui envoie P sur P' et Q sur Q' avec

$$P = (2, 2), \ Q = (-2, 6), \ P' = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \ Q' = (-2 - 3\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})?$$

   (penser a utiliser (0.1)). Quel est l'angle de cette rotation exprime en radians.

2. Donner l'expression analytique de cette isometrie

$$r(x, y) = (X, Y).$$

Quel est le centre de cette rotation ?

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, r^n possede toujours au moins un point fixe et $r^{\mathbb{Z}}$ est un groupe fini d'ordre 6 exactement.
4. Decomposer r^3 sous forme d'une translation et d'une rotation lineaire.
5. Soit s la symetrie de l'exercice precedent. l'expression analytique associe a l'isometrie composee $s \circ r$? Quelle est la nature (rotation, symetrie axiale ou glissee), les parametres geometriques (centre, axe de symetrie ou axe pour une symetrie glisse et vecteur de translation paralelle a l'axe).
6. Quel est l'ordre de $s \circ r$?