# Série 12

**L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 12 decembre.**
**L'exercice 6 ($\star$) peut être rendu le jeudi 15 decembre aux assistants jusqu'à 15h.**

## Exercice 1 - QCM

Déterminer si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soit $n \geq 2$ un entier positif. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ est une matrice inversible telle que $A^{-1} = A^*$, alors $\det(A) \in \mathbb{R}$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $n \geq 2$ un entier positif. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible telle que $A^{-1} = A^T$, alors $\det(A) = \pm 1$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $n \geq 2$ un entier positif, $K$ un corps et $A \in M_{n\times n}(K)$ telle que $A^T = -A$. Alors $\det(A) = 0$.

  ◯ vrai ◯ faux

- Soit $n \geq 2$ un entier positif, $R$ un anneau commutatif avec $1_R \neq 0_R$, et $A \in M_{n\times n}(R)$. Si $\det(A^2) = 0$, alors $A$ n'est pas inversible.

  ◯ vrai ◯ faux

- Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

  ◯ vrai ◯ faux

- Deux matrices carrées équivalentes ont le même déterminant.

  ◯ vrai ◯ faux

## Exercice 2

Sachant que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 10$ , calculer $\det \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix}$.

## Exercice 3

Calculer le déterminant des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4**
Calculer le déterminant des matrices suivantes sur les anneaux spécifiés. Déterminer en plus si la matrice est inversible.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 2 & 2t-1 & t^2 \\ 3 & 3t & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}[t])$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 2t & t^2+1 & t \\ 2t^2 & t^3 & t^2+t \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}[t])$.

**Exercice 5**
Soit $K$ un corps et $A$ une matrice-blocs donnée par

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \in M_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}(K),$$

où $A_{11}$ est une matrice de taille $n_1 \times n_1$, $A_{12}$ est une matrice de taille $n_1 \times n_2$, et $A_{22}$ est une matrice de taille $n_2 \times n_2$, avec $n_1, n_2 \geq 1$ des entiers positifs.

i) Montrer que si $A_{11}$ ou $A_{22}$ n'est pas inversible, alors

$$\det(A) = 0.$$

ii) Montrer que

$$\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22}).$$

iii) Supposons que les matrices $A_{11}$ et $A_{22}$ sont inversibles. Donner une formule pour :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\right).$$

**Exercice 6 ($\star$)**
Soit $n \geq 2$ un entier positif, $R$ un anneau commutatif et $A, B \in M_{n\times n}(R)$. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\operatorname{com}(I_n) = I_n$, où $I_n$ est la matrice d'identité.
2. $\operatorname{com}(AB) = \operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B)$, si $A, B$ sont inversibles.
3. $\operatorname{com}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\operatorname{com}(A)$, où $\lambda \in R$.
4. $\operatorname{com}(A^T) = \operatorname{com}(A)^T$.
5. $\det(\operatorname{com}(A)) = (\det(A))^{n-1}$, si $A$ est inversible.
6. $\operatorname{com}(A^{-1}) = \operatorname{com}(A)^{-1}$, si $A$ est inversible.

**Exercice 7**

1. Soit $n \geq 2$ un entier positif et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Démontrer l'identité

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

   Ce déterminant est apellé *déterminant de Vandermonde*.
   **Indication :** utiliser récurrence sur $n$. Pour cela, des opérations sur les colonne et/ou la formule de développement de Laplace peuvent être utiles.

2. Calculer le déterminant de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

**Exercice 8**
[**Formule de Cramer**] Soit $n \geq 2$ un entier positif, $K$ un corps, $A \in M_{n\times n}(K)$ et $b, x \in K^n$. On considère le système linéaire $Ax = b$.

a) Montrer que ce système admet une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

On suppose désormais que $\det(A) \neq 0$, auquel cas le système linéaire s'appelle une système de Cramer. Soit $s \in K^n$ l'unique solution du système et écrivons $s^\top = (s_1 \ s_2 \ \ldots \ s_n)$.

b) A l'aide de $s$, exprimer le vecteur-colonne $b$ comme combinaison linéaire des colonnes de $A$.

c) Pour $1 \leq k \leq n$, désignons par $C_k$ la matrice obtenue à partir de $A$ en remplaçant la $k$-ème colonne de $A$ par la colonne $b$. Montrer la **formule de Cramer**

$$s_k = \frac{\det(C_k)}{\det(A)} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

   Notons que cette formule est intéressante du point de vue théorique, mais qu'elle est très peu efficace pour les calculs.