

Mini-test 4 : Physique de l'entonnoir

Un point matériel de poids $m\vec{g}$ se déplace sans frottement sur un cône de révolution de sommet O , d'axe vertical Oz , et s'ouvrant vers le haut avec un demi-angle d'ouverture α ($0 < \alpha < \pi/2$, $z > 0$).

- Représenter sur un dessin, dans le plan contenant le point matériel et l'axe Oz , le repère associé aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .
- Ecrire les équations différentielles du mouvement, en projections sur les axes de ce repère.
- En partant de la définition du moment cinétique, calculer, toujours dans le même repère, les composantes du moment cinétique \vec{L} du point matériel par rapport à O . Montrer alors que sa composante verticale, L_z , est égale à $mr^2\dot{\phi}\sin^2\alpha$.
- Démontrer que L_z est une constante du mouvement.
- L'énergie mécanique est-elle conservée (justifier votre réponse) ? Ecrire son expression en fonction de r , \dot{r} ainsi que de m , g , α et L_z . Montrer que l'on peut écrire l'énergie sous la forme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$. Tracer schématiquement la fonction $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction de r , et discuter les trajectoires possibles.
- Trouver les solutions des équations du mouvement avec $r(t) = r_0 = \text{constante}$. A quel type de mouvement cela correspond-il ? Calculer r_0 en fonction de m , g , α et L_z .

