EPFL Automne 2016
Geometrie, MATH-120

Série 5

Exercice 1. Soit G un groupe fini ordre N.

1. Montrer que tout element g de G verifie

$$h^N = e_G.$$

Exercice 2. Soit $\phi : G \hookrightarrow H$ un morphisme de groupes.

1. On suppose ϕ injectif. Montrer que pour tout $g \in G$

$$\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\phi(g)).$$

2. Etablir une relation de divisibilite entre $\mathrm{ord}(g)$ et $\mathrm{ord}(\phi(g))$ si ϕ n'est pas suppose injectif.

Exercice 3 (Le Theoreme des restes chinois)**.** Soient m et n des entiers. Dans cet exercice on compare le groupe $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ avec le groupe produit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (equippe de la loi de groupe produit definie par

$$(a, b) \oplus' (a', b') = (a \oplus a', b \oplus b')$$

ou les deux derniers $\oplus$ sont les lois de groupes usuelles sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ respectivement.

1. Quel est l'ordre de l'element $(1, 1)$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?
2. En deduire que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est isomorphe a $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
3. Montrer que en revanche $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
4. On suppose m, n generaux. Montrer que l'ordre de l'element $(1, 1)$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ divise le ppmc $[m, n]$.
5. Montrer que si $(m, n) = 1$ (m et n sont premier entre eux) alors $\mathrm{ord}(1, 1) = mn$. Par exemple on pourra montrer que $k.(1, 1) \neq (0, 0)$ pour tout $0 < k < mn$.
6. En deduire que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe a $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit G un groupe fini d'ordre $p \geqslant 2$ un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, $\mathrm{ord}(g) = 1$ ou $\mathrm{ord}(g) = p$.
2. En deduire que $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit G un groupe cyclique. On va montrer que tout sous-groupe H de G est cyclique.

1. Soit $\phi : G' \to G$ un morphisme de groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. Montrer que la preimage $\phi^{-1}(H) \subset G'$ est un sous-groupe de G'.
2. Supposons G cyclique de generateur g :$G = g^{\mathbb{Z}}$. Soit $H \subset G$ un sous-groupe ; en considerant l'application exponentielle
$$\exp_g : \mathbb{Z} \to G$$
montrer que H est cyclique (on montrera que H est engendre par un element).

Exercice 6. Soit $G = \langle g \rangle$ un groupe cyclique d'ordre $N \geqslant 1$ et de generateur g.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ montrer que g^n est d'ordre $N/(N, n)$ (on commencera par montrer que $\mathrm{ord}(g)|N/(N, n)$).
2. Montrer que les generateurs de G (les $g' \in G$ tels que $(g')^{\mathbb{Z}} = G$) sont exactement les g^n avec $0 \leqslant n \leqslant N-1$ et $(n, N) = 1$.
3. Montrer que l'application
$$\{d|N\} \to (g^d)^{\mathbb{Z}}$$
est une bijection entre l'ensemble des diviseurs de N et l'ensemble des sous-groupes de G.