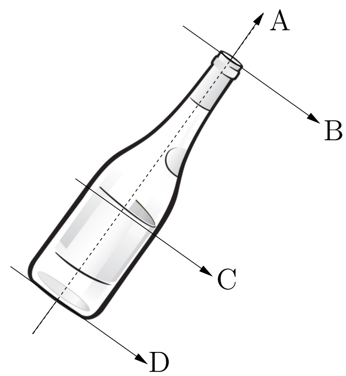
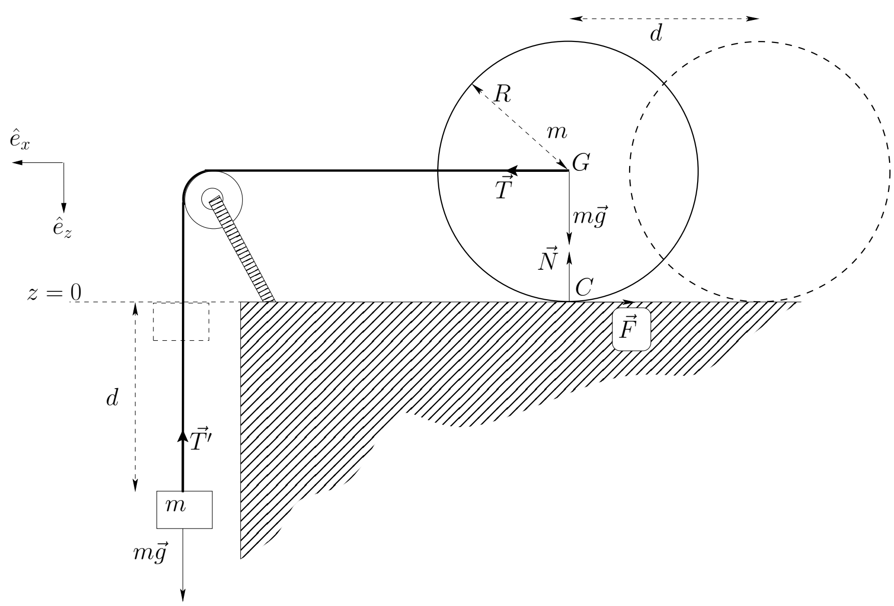
Corrigé Série 12 : Dynamique des solides

Question conceptuelle

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ fixe dépend du carré des distances d_α^2 à l'axe de chacun des éléments de masse m_α selon la relation $I_\Delta = \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$. Dans le cas de la bouteille, c'est par rapport à l'axe A que les carrés des distances sont en moyenne les plus petites, donc $I_1 = I_{\text{A}}$. Par un même raisonnement basé sur la géométrie de la bouteille, on trouve que $I_2 = I_{\text{C}}$, $I_3 = I_{\text{D}}$, et $I_4 = I_{\text{B}}$.



1 Roue tirée par un bloc



a) Les forces subies par la roue sont son poids $m\vec{g}$, la force $\vec{N}$ de soutien de la table, la force de frottement statique $\vec{F}$ (nécessaire au roulement sans glissement) et la force $\vec{T}$ exercée par le fil. Les forces subies par le bloc sont son poids $m\vec{g}$ et la force $\vec{T}'$ exercée par le fil. Le poids de la roue ne travaille pas car il est perpendiculaire au déplacement du centre de masse. Les forces $\vec{N}$ et $\vec{F}$ ne travaillent pas car elles s'appliquent sur le point C de la roue en contact avec la table et $\vec{v}_C = \vec{0}$ (roulement sans glissement). Les travaux des forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont opposés et se compensent donc. Le poids du bloc travaille, mais dérive de l'énergie potentielle $-mgz$ où z est un axe vertical vers le bas. Le système formé de la roue et du bloc est donc conservatif ; son énergie mécanique

$$E = E_{\text{cin,roue}} + E_{\text{cin,bloc}} - mgz \tag{1}$$

est conservée. Soit x un axe horizontal de la roue vers la poulie. Puisque le fil garde toujours la même longueur, la vitesse $\dot{x}$ du centre de masse G de la roue est égale à la vitesse $\dot{z}$ du bloc. La vitesse angulaire de rotation instantanée de la roue est égale à $\omega = \dot{x}/R$ (car $\vec{v_G} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$). Le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de révolution vaut $I = \frac{1}{2}mR^2$. Ainsi :

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgz = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 - mgz\,. \quad (2)$$

On n'a pas inclus le terme d'énergie potentielle de la roue dans l'expression ci-dessus, car le poids de la roue ne travaille pas (donc cette énergie potentielle est une constante qu'on peut arbitrairement mettre à zéro).

On place l'origine de l'axe z de telle sorte que $E = 0$ lorsque $\dot{x} = 0$ (situation initiale). Lorsque la roue a avancé d'une distance d, on a $z = d$ et la vitesse v du centre de masse de la roue doit satisfaire à

$$\frac{5}{4}mv^2 - mgd = 0 \quad (3)$$

pour conserver l'énergie. On a donc

$$v = 2\sqrt{\frac{gd}{5}}\,. \quad (4)$$

b) Pour que la roue ne glisse pas, il faut que la force de frottement statique ne dépasse pas sa valeur maximale,

$$F \leq \mu_s N = \mu_s mg\,, \quad (5)$$

c'est-à-dire que le coefficient de frottement statique doit être suffisamment grand :

$$\mu_s \geq \frac{F}{mg}\,. \quad (6)$$

Afin de déterminer F, on applique les lois fondamentales de la dynamique :

$$m\ddot{z} = mg - T' \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée au bloc,} \quad (7)$$
$$m\ddot{x} = T - F \quad : \quad \text{2ème loi de Newton appliquée à la roue,} \quad (8)$$
$$I\dot{\omega} = RF \quad : \quad \text{théorème du moment cinétique appliqué à la roue.} \quad (9)$$

Avec $\dot{z} = \dot{x}$, $\omega = \dot{x}/R$, $I = \frac{1}{2}mR^2$ et $T' = T$ (la tension du fil est partout la même), ce système d'équations devient

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - T \\ m\ddot{x} = T - F \\ m\ddot{x} = 2F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{2}{5}g \\ T = \frac{3}{5}mg \\ F = \frac{1}{5}mg\,. \end{cases} \quad (10)$$

Ainsi, on doit avoir

$$\mu_s \geq \frac{1}{5} = 0.2\,. \quad (11)$$

2 Tige en rotation

Les forces qui s'appliquent sur la tige sont son poids $M\vec{g}$, appliqué à son centre de masse G situé à une distance $L/2$ du point O, et une force de soutien $\vec{T}$ d'orientation inconnue au point O.

Le théorème du centre de masse s'exprime comme

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_G\,, \tag{12}$$

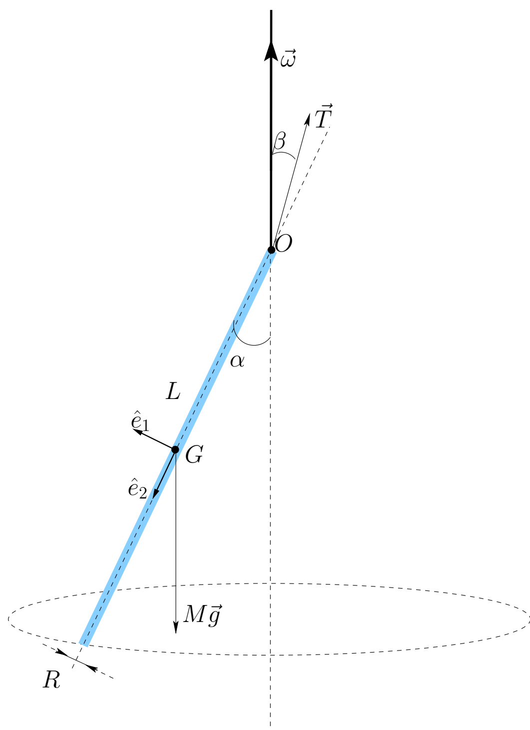
où $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de masse. Puisque le mouvement de G est circulaire uniforme, son accélération est horizontale et de norme $a_G = \frac{v_G^2}{r_G} = \omega^2 r_G = \omega^2 \frac{L}{2}\sin\alpha$. La projection sur des axes verticaux et horizontaux dans le plan de la tige et de l'axe de rotation donne

$$T\cos\beta = Mg\,, \tag{13}$$

$$T\sin\beta = M\omega^2\frac{L}{2}\sin\alpha\,, \tag{14}$$

où l'angle β est l'angle formé par la force $\vec{T}$ et la verticale. On note ici que $\vec{T}$ est dans le plan formé par $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{OG}$, puisque ni le poids de la tige ni l'accélération de son centre de masse n'ont de composante perpendiculaire à ce plan.
Pour exprimer le moment cinétique, on choisit un repère d'inertie au point G défini par $\hat{e}_2 \equiv \frac{\overrightarrow{OG}}{|\overrightarrow{OG}|}$, $\hat{e}_3 \equiv \frac{\vec{\omega}\wedge\hat{e}_2}{|\vec{\omega}\wedge\hat{e}_2|}$ et $\hat{e}_1 \equiv \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$.
Dans ce repère, la vitesse angulaire s'écrit

$$\vec{\omega} = \omega\sin\alpha\,\hat{e}_1 - \omega\cos\alpha\,\hat{e}_2\,. \tag{15}$$



Le moment cinétique $\vec{L}_G$ est donné par

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}\,. \tag{16}$$

La tige est un cylindre de longueur L et de rayon R, et donc son tenseur d'inertie vaut (pour le repère choisi)

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

En injectant les expressions (15) et (17) dans l'équation (16), on obtient :

$$\vec{L}_G = \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2\right)\omega\sin\alpha\hat{e}_1 - \frac{1}{2}MR^2\omega\cos\alpha\hat{e}_2\,. \tag{18}$$

En utilisant la formule de Poisson $\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega}\wedge\hat{e}_i$, on trouve la dérivée par rapport au temps de $\vec{L}_G$:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_3 - \frac{1}{2}MR^2\omega^2\cos\alpha\sin\alpha\,\hat{e}_3\\ &= \left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_3\end{aligned} \tag{19}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{GO}\wedge\vec{T} + \underbrace{\overrightarrow{GG}}_{=\vec{0}}\wedge M\vec{g}\,. \tag{20}$$

Sa projection sur $\hat{e}_3$ donne :

$$\left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}T\sin(\alpha-\beta) = \frac{L}{2}(T\cos\beta\sin\alpha - T\sin\beta\cos\alpha)\,. \tag{21}$$

En utilisant les équations (13) et (14), on trouve une relation qui ne dépend pas de T :

$$\left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}(Mg\sin\alpha - M\omega^2\frac{L}{2}\sin\alpha\cos\alpha)\,. \tag{22}$$

Les solutions de cette équation sont soit $\sin\alpha = 0$, soit

$$\cos\alpha = \frac{6Lg}{(4L^2-3R^2)\omega^2}\,. \tag{23}$$

Cette deuxième solution n'existe que si $\omega^2 > \frac{6Lg}{4L^2-3R^2}$.