Série 2 (Corrigé)

L'exercise 1 sera discuté pendant le cours le lundi 3 octobre.
L'exercice 10 ($\star$) peut être rendu le jeudi 6 octobre aux assistants jusqu'à 15h.

Exercice 1 - QCM

(a) Determiner si les énoncés proposés sont vrais ou faux.

- Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A et B commutent, alors A^T et B^T commutent.
  ◯ vrai ◯ faux
- Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A et B commutent, et B et C commutent, alors A et C commutent.
  ◯ vrai ◯ faux
- Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors $(ABC)^T = C^T A^T B^T$.
  ◯ vrai ◯ faux
- Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice à la fois symétrique et antisymétrique. Alors A est une matrice diagonale non nulle.
  ◯ vrai ◯ faux
- Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diagonale, et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
  ◯ vrai ◯ faux
- Soit $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Si A est inversible, alors la sous-matrice principale $A(\{1, 2\}, \{1, 2\})$ est inversible.
  ◯ vrai ◯ faux
- Soit $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Si A est inversible, alors la sous-matrice principale $A(\{1, 2\}, \{1, 2\})$ est inversible.
  ◯ vrai ◯ faux

(b) Determiner les énoncés corrects. Pour chaque question il n'y a qu'une seule réponse correcte.

1. Pour calculer le produit d'une matrice $m \times n$ par une matrice $n \times p$, on a besoin de $2mnp$ opérations arithmétiques (additions et multiplications).

   Soient $A_1 \in M_{n_1\times n_2}(\mathbb{R}), A_2 \in M_{n_2\times n_3}(\mathbb{R}), A_3 \in M_{n_3\times n_4}(\mathbb{R})$. En utilisant l'associativité de la multiplication, le produit $C = A_1A_2A_3$ peut être obtenu de deux manières différentes :

   i) d'abord calculer $B_1 = A_1A_2$, et puis $C_1 = B_1A_3$. Ou
   ii) d'abord calculer $B_2 = A_2A_3$, et puis $C_2 = A_1B_2$.

   Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ◯ Les deux possibilités nécessitent toujours le même nombre d'opérations.
- ◯ Une possibilité peut nécessiter plus d'opérations que l'autre. Cela dépend de n_1, n_2, n_3.
- ◯ Les deux possibilités ne donnent pas la même matrice ; C_1 peut être différente de C_2. Cela dépend de n_1, n_2, n_3.

2. Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, où B est inversible, et $k \geq 1$ un entier naturel. Alors,
   - ◯ $(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$, où $C^k = \overbrace{C \cdot C \cdots C}^{k \text{ fois}}$, pour $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
   - ◯ $(B^{-1}A)^k = (B^{-1})^k A^k$.
   - ◯ Aucun des énoncés ci-dessus n'est correct.

Sol.:

(a) *Determiner si les énoncés proposés sont vrais ou faux.*

- *Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A et B commutent, alors A^T et B^T commutent.*

  ● *vrai* ◯ *faux*

- *Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A et B commutent, et B et C commutent, alors A et C commutent.*

  ◯ *vrai* ● *faux*

- *Soient $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors $(ABC)^T = C^TA^TB^T$.*

  ◯ *vrai* ● *faux*

- *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice à la fois symétrique et antisymétrique. Alors A est une matrice diagonale non nulle.*

  ◯ *vrai* ● *faux*

- *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diagonale, et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.*

  ● *vrai* ◯ *faux*

- *Soit $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Si A est inversible, alors la sous-matrice principale $A(\{1,2\},\{1,2\})$ est inversible.*

  ◯ *vrai* ● *faux*

- *Soit $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Si A est inversible, alors la sous-matrice principale $A(\{1,2\},\{1,2\})$ est inversible.*

  ● *vrai* ◯ *faux*

(b) *Determiner les énoncés corrects. Pour chaque question il n'y a qu'une seule réponse correcte.*

1. *Pour calculer le produit d'une matrice $m \times n$ par une matrice $n \times p$, on a besoin de $2mnp$ opérations arithmétiques (additions et multiplications).*

   Soient $A_1 \in M_{n_1\times n_2}(\mathbb{R}), A_2 \in M_{n_2\times n_3}(\mathbb{R}), A_3 \in M_{n_3\times n_4}(\mathbb{R})$. En utilisant l'associativité de la multiplication, le produit $C = A_1A_2A_3$ peut être obtenu de deux manières différentes :

i) d'abord calculer $B_1 = A_1A_2$*, et puis* $C_1 = B_1A_3$*. Ou*

ii) d'abord calculer $B_2 = A_2A_3$*, et puis* $C_2 = A_1B_2$*.*

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

○ *Les deux possibilités nécessitent toujours le même nombre d'opérations.*

● *Une possibilité peut nécessiter plus d'opérations que l'autre. Cela dépend de* n_1, n_2, n_3*.*

○ *Les deux possibilités ne donnent pas la même matrice ;* C_1 *peut être différente de* C_2*. Cela dépend de* n_1, n_2, n_3*.*

2. *Soient* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, où* B *est inversible, et* $k \geq 1$ *un entier naturel. Alors,*

● $(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$.

○ $(B^{-1}A)^k = (B^{-1})^kA^k$.

○ *Aucun des énoncés ci-dessus n'est correct.*

Exercice 2

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants s'ils existent et s'ils n'existent pas, expliquer pourquoi.

$$AB, \quad BA, \quad Ax, \quad A^2 := AA, \quad B^2 := BB, \quad y^Tx, \quad yx, \quad xy^T, \quad B^Ty, \quad y^TB.$$

Sol.:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 0 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

BA *n'existe pas :* $(3\times 2)\times(3\times 3)$ *nbr de colonnes* $B \neq$ *nbr de lignes* A

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & 19 \\ -6 & 2 & -17 \\ -4 & -16 & 23 \end{pmatrix}$$

B^2 *n'existe pas :* $(3\times 2)\times(3\times 2)$

$$y^Tx = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = -10$$

yx *n'existe pas :* $(3\times 1)\times(3\times 1)$

$$xy^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & -8 & 4 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^T y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^T B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Écrire le système suivant sous la forme $Ax = b$:

$$\begin{aligned} 8 &= x_1 + x_2 \\ x_2 + x_4 &= 3 + x_3 \\ 5 - x_4 &= x_5 \\ x_1 - 6 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Sol.: *On peut ecrire le système comme*

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1+ & x_2+ & 0 \cdot x_3+ & 0 \cdot x_4+ & 0 \cdot x_5 & = & 8 \\ 0 \cdot x_1+ & x_2- & x_3+ & x_4+ & 0 \cdot x_5 & = & 3 \\ 0 \cdot x_1+ & 0 \cdot x_2+ & 0 \cdot x_3+ & x_4+ & x_5 & = & 5 \\ x_1+ & 0 \cdot x_2+ & 0 \cdot x_3+ & 0 \cdot x_4+ & x_5 & = & 6. \end{array}$$

Alors, la matrice A et le vecteur b sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

(a) Calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (ii) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On considère le vecteur

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Écrivez les systèmes linéaires $Ax = b$ et $Bx = b$ correspondants aux matrices du point (a). Que peut-on dire de leur(s) solution(s) ?

Sol.:

(a) *(i)* *Considérons*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ a+g & b+h & c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux équations $a+g=1$ et $a+g=0$ ne sont jamais vraies simultanément $\Rightarrow$ A n'est pas inversible.

(ii) *Considérons*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient directement $a=c=g=h=0$ et $b=i=1$. Les trois équations de la première ligne donnent

$$\begin{aligned} 1 &= a+d = 0+d && \Rightarrow d = 1, \\ 0 &= b+e = 1+e && \Rightarrow e = -1, \\ 0 &= c+f = 0+f && \Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *(i)* *Le système $Ax=b$ est équivalent à*

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1, \\ x_2 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Donc, $x_2 = 0$ et la seule condition sur x_1 et x_3 est $x_1 + x_3 = 1$. Alors, pour chaque $x_3 \in \mathbb{R}$ on a $x_1 = 1 - x_3$. Vérifiez que tous les triplets $(1-x_3, 0, x_3)$ satisfont le système.

(ii) *Puisque B est inversible, la seule solution de $Bx=b$ est $x = B^{-1}b$. Alors,*

$$x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2. Si $ad - bc \neq 0$, montrer que l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Sol.: *Soit* $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$*. On vérifie que* $AB = BA = I_2$*, ou* I_2 *est la matrice d'identité en dimension 2. Alors,*

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

De manière analogue, on montre $BA = I_2$*. Donc,* $B = A^{-1}$*.*

Exercice 6
En deux dimensions, les matrices de rotation $Q(\varphi) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ont la forme suivante

$$Q(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

où $\varphi \in \mathbb{R}$ est l'angle de rotation.

(i) Calculer l'inverse de $Q(\varphi)$.

(ii) Montrer que le produit matriciel $Q(\varphi_1)Q(\varphi_2)$ de deux matrices de rotation est aussi une matrice de rotation $Q(\varphi)$ et déterminer l'angle de rotation associé φ par rapport aux angles φ_1, φ_2.

Sol.:

(i) En utilisant l'exercice 5*, on obtient*

$$Q(\varphi)^{-1} = \frac{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(ii) En utilisant les théorèmes d'addition des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
Q(\varphi_1)Q(\varphi_2) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 & \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le produit $Q(\varphi_1)Q(\varphi_2)$ est donc une matrice de rotation $Q(\varphi)$ avec l'angle de rotation $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
On remarque que le produit de deux matrices de rotation commute :

$$Q(\varphi_1)Q(\varphi_2) = Q(\varphi_1+\varphi_2) = Q(\varphi_2+\varphi_1) = Q(\varphi_1)Q(\varphi_1).$$

Attention : le produit matriciel n'est pas commutatif en général ($AB \neq BA$).

Exercice 7
Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que A commute avec toutes les matrices $n \times n$ si et seulement si A est scalaire.
Sol.:

- *Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice scalaire. Donc, il faut montrer que A commute avec toutes les matrices de taille n. Comme A est une matrice scalaire, il existe un scalaire $c \in \mathbb{R}$ telle que $A = cI_n$, ou I_n est la matrice d'identité en dimension n. Soit $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors,*
$$AB = cI_nB = cBI_n = B(cI_n) = BA.$$
- *Maintenant on suppose que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ commute avec toutes les matrices de taille n. Il faut montrer que A est scalaire. Soit $D_{jj} = \operatorname{diag}(0, 0, \ldots, d_{jj}, \ldots, 0)$ une matrice $n \times n$ diagonale, avec $d_{jj} = 1$. D'abord on considère des colonnes de AD_{jj}*
$$AD_{jj} = \left(0\cdot a_1 \,\middle|\, 0\cdot a_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, 1\cdot a_j \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, 0\cdot a_n\right),$$
ou $a_1, a_2, \ldots a_n$ représentent les colonnes de A. D'autre part, on calcule $D_{jj}A$:
$$D_{jj}A = \begin{pmatrix} 0\cdot\tilde{a}_1 \\ \vdots \\ 1\cdot\tilde{a}_j \\ \vdots \\ 0\cdot\tilde{a}_n \end{pmatrix},$$
ou $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots \tilde{a}_n$ représentent les lignes de A.
Puisque A commute avec toutes les matrices, on a $AD_{jj} = D_{jj}A$, c'est-à-dire
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nj} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, on voit que $a_{ij} = a_{ji} = 0$, pour $i \neq j$. Comme j est arbitraire, on obtient que A est une matrice diagonale. Il faut encore montrer que tous ses coefficients diagonaux sont eqaux.
Soit D_{ij}, $i \neq j$ une matrice $n \times n$ telle que tous ses éléments sont nuls, sauf d_{ij} et d_{ji}, qui vaut $d_{ij} = d_{ji} = 1$. On a

$$D_{ij}A = \left(a_{11} \cdot 0 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_{ii} \cdot d_i \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_{jj} \cdot d_j \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_{nn} \cdot 0\right),$$

ou $0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, d_i est i-ième et d_j est j-ième colonne de D_{ij}. D'autre part,

$$AD_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 \\ \vdots \\ a_{ii} \cdot \tilde{d}_i \\ \vdots \\ a_{jj} \cdot \tilde{d}_j \\ \vdots \\ a_{nn} \cdot 0 \end{pmatrix},$$

avec $0 \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, $\tilde{d}_i$ est i-ième et $\tilde{d}_j$ est j-ième ligne de D_{ij}. On obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, tous les éléments diagonaux de A sont égaux.

Exercice 8
Trouver des matrices $A, B, C, D, E, F \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ telles que

(i) $A^2 = -I_2$,
(ii) $B^2 = 0$, mais $B \neq 0$,
(iii) $CD = -DC$, mais $CD \neq 0$,
(iv) $EF = 0$, mais aucun élément de E n de F n'est nul.

On note la matrice d'identité en dimension 2 par $I_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et 0 est une matrice 2×2 complètement nulle.
Sol.:

(i) Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad \text{d'où} \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2a_3 & a_1a_2 + a_2a_4 \\ a_3a_1 + a_4a_3 & a_3a_2 + a_4^2 \end{pmatrix}.$$

Le système $A^2 = -I_2$ *est équivalent à*

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2a_3 &= -1, \\ a_2(a_1 + a_4) &= 0, \\ a_3(a_1 + a_4) &= 0, \\ a_3a_2 + a_4^2 &= -1. \end{aligned}$$

La première équation implique que $a_2a_3 = -1 - a_1^2 < 0$ *et donc que* $a_2 \neq 0$ *et* $a_3 \neq 0$*. Alors, on peut simplifier la deuxième et troisième équation, on obtient* $a_1 + a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = -a_1$*. On arrive à*

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2a_3 &= -1, \\ a_4 &= -a_1. \end{aligned}$$

On peut donc choisir $a_1 \in \mathbb{R}$ *(sans restriction) et* $a_2 \in \mathbb{R}$ *(avec* $a_2 \neq 0$*) et calculer* $a_3 = (-1 - a_1^2)/a_2$ *et* $a_4 = -a_1$*. Par exemple, si* $a_1 = 0$ *et* $a_2 = 1$ *on a* $a_3 = -1$*,* $a_4 = 0$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $A^2 = -I_2$*.*

(ii) Comme avant, posons

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},$$

le système $B^2 = 0$ *est équivalent à*

$$\begin{aligned} b_1^2 + b_2b_3 &= 0, \\ b_2(b_1 + b_4) &= 0, \\ b_3(b_1 + b_4) &= 0, \\ b_3b_2 + b_4^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si $b_1 + b_4 \neq 0$ *la deuxième et la troisième équation impliquent* $b_2 = b_3 = 0$*. La première et la quatrième équation simplifient à* $b_1^2 = b_4^2 = 0$ *et donc* $B = 0$*, qui n'est pas acceptable par hypothèse. Alors, on a* $b_1 + b_4 = 0$ *et le système est simplifié à*

$$\begin{aligned} b_1^2 + b_2b_3 &= 0, \\ b_4 &= -b_1. \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons choisir $b_1 \in \mathbb{R}$ *et* $b_2 \in \mathbb{R}$ *(*$b_2 \neq 0$*) et calculer* $b_3 = -b_1^2/b_2$ *et* $b_4 = -b_1$*. Par exemple, si* $b_1 = 1$ *et* $b_2 = 1$ *on a* $b_3 = -1$*,* $b_4 = -1$ *et*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $B^2 = 0$*.*

(iii) Posons

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix},$$

on obtient le système

$$CD = \begin{pmatrix} c_1d_1 + c_2d_3 & c_1d_2 + c_2d_4 \\ c_3d_1 + c_4d_3 & c_3d_2 + c_4d_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d_1c_1 + d_2c_3 & d_1c_2 + d_2c_4 \\ d_3c_1 + d_4c_3 & d_3c_2 + d_4c_4 \end{pmatrix} = -DC.$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} c_1d_1 + c_2d_3 &= -d_1c_1 - d_2c_3, \\ c_1d_2 + c_2d_4 &= -d_1c_2 - d_2c_4, \\ c_3d_1 + c_4d_3 &= -d_3c_1 - d_4c_3, \\ c_3d_2 + c_4d_4 &= -d_3c_2 - d_4c_4. \end{aligned}$$

Pour trouver une solution (on n'a pas besoin de toutes les trouver), nous simplifions le système en posant $c_1 = c_4 = d_1 = d_4 = 0$. Par conséquent, la deuxième et la troisième équation sont toujours satisfaites et la première et la quatrième sont équivalentes à

$$c_2d_3 = -d_2c_3.$$

Une solution simple de cette équation est $c_2 = c_3 = d_3 = 1, d_2 = -1$, qui donne

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) Nous pouvons simplement choisir $E = F = B$.

Commentaire. *Les quatre énoncés sont intéressants parce que ces propriétés apparaissent pour les matrices, mais sont fausses pour les nombres réels. Pour $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, on a*

1. $a^2 \neq -1$
2. $b^2 = 0 \Rightarrow b = 0,$
3. $cd = -dc \Rightarrow cd = 0,$
4. $ef = 0 \Rightarrow e = 0$ *ou* $f = 0$

Exercice 9

Lesquelles des matrices suivantes valent l'expression $(A + B)^2$?

$$\begin{gathered} (B + A)^2, \qquad A^2 + 2AB + B^2, \qquad A(A + B) + B(A + B), \\ (A + B)(B + A), \qquad A^2 + AB + BA + B^2. \end{gathered}$$

Sol.: *On a*

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = \underline{(A + B)(B + A)} \\ &= (B + A)(B + A) = \underline{(B + A)^2} \\ (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = \underline{A(A + B) + B(A + B)} \\ &= \underline{A^2 + AB + BA + B^2} \\ &= \underline{A^2 + 2AB + B^2} + (BA - AB) \end{aligned}$$

Nous avons vu que $AB - BA \neq 0$ en général, alors $(A+B)^2$ est différent de $A^2+2AB+B^2$.

Exercice 10 ($\star$)

Soient A, B, C des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$. Dans chaque cas ci-dessous donner les dimensions des matrices afin que les sommes et produits soient bien définis puis montrer les égalités suivantes

(i) $A(B+C) = AB + AC$,

(ii) $(AB)^T = B^T A^T$.

Sol.:

(i) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *et* $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. *Si* $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, $B = (b_{jk})_{1\leq j\leq n, 1\leq k\leq p}$, *et* $C = (c_{jk})_{1\leq j\leq n, 1\leq k\leq p}$ *on a*

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(B+C)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}),\\ (AB+AC)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = (A(B+C))_{ik}.\end{aligned}$$

(ii) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *et* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. *Alors,* $(AB)^T \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$.*On a*

$$\begin{aligned}((AB)^T)_{ki} &= (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\\ (B^T A^T)_{ki} &= \sum_{j=1}^{n} (B^T)_{kj}(A^T)_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij} = ((AB)^T)_{ki}.\end{aligned}$$

Exercice 11

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que A peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Sol.: *On cherche* $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *où* $B^T = B$ *(symétrique) et* $C^T = -C$ *(antisymétrique) telles que* $A = B + C$. *On prend les deux équations équivalentes*

$$\begin{aligned}A &= B + C,\\ A^T &= B^T + C^T\end{aligned}$$

et leurs sommes et différences

$$\begin{aligned}A + A^T &= (B + B^T) + (C + C^T) = 2B,\\ A - A^T &= (B - B^T) + (C - C^T) = 2C.\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}B &= (A + A^T)/2,\\ C &= (A - A^T)/2.\end{aligned}$$