Analyse avancée I — Semaine du 26 au 30 septembre 2016
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Corrigé 2 du mardi 27 septembre 2016

Exercice 1.

Prouver scrupuleusement les énoncés suivants pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

1.) $x^2 \geq 0$:
si $x \geq 0$, alors par l'ax 5), $x^2 = x.x \geq 0$;
si $x \leq 0$, en ajoutant $-x$ de part et d'autre par 4) on a $0 \leq -x$ et par 5) $x^2 = (-x)(-x) \geq 0$.

2.) $x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow x.z \geq y.z$:
on a $y - x \geq 0$ et $-z \geq 0$ par 4); et par 5), $-zy + zx \geq 0$, puis par 4) $xz \geq yz$.

3.) $|xy| = |x|.|y|$:
si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$ et $|x| = x$, $|y| = y$, $|xy| = xy = |x||y|$,
...etc

On rappelle les axiomes pour l'ordre sur $\mathbb{R}$ (c.f Douchet-Zwahlen):

1.) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

2.) $x \leq y$ et $y \leq x \Leftrightarrow x = y$

3.) $\forall x, y,\ x \leq y$ ou $y \leq x$

4.) $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$

5.) $0 \leq x$ et $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

Exercice 2.

On a:

1.) $$\sum_{k=1}^{1006} \frac{1}{(2k)(2(k+1))} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{1006} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{1007} \right) = \frac{1}{4} \frac{1006}{1007}.$$

2.) $$\sum_{k=0}^{1006} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1006} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2015} \right) = \frac{1007}{2015}.$$

Exercice 3.

1.) Soient $\varnothing \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, B majoré. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
$\sup B$ est un majorant de B et donc de A puisque $A \subset B$. Puisque $\sup A$ est le plus petit majorant de A, on a $\sup A \leq \sup B$.

2.) Trouver une suite d'intervalles ouverts $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ tq

   1.) $\cap_{n=1}^{n=\infty} A_n$ est un intervalle ouvert:
   On peut prendre $A_n =]0, 1[$ pour tout n ou encore $A_n =]-n, +n[$.

   2.) $\cap_{n=1}^{n=\infty} A_n$ est un intervalle fermé.
   On peut prendre $A_n =]-1-1/n, 1+1/n[$ pour tout n. L'intersection est alors $[-1, 1]$.

3.) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ une suite d'ensembles bornés.

   1.) est-ce que $\cap A_n$ est borné?
   Oui car $\cap A_n \subset A_1$ qui est borné.

   2.) est-ce que $\cup A_n$ est borné?
   Non, il suffit de prendre $A_n =]-n, +n[$.

4.) Montrer qu'un ensemble fini A est borné et donner $\sup A$ et $\inf A$.
On peut décrire A comme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ où N est le nombre d'éléments de A. On a alors, $|a_i| \leq \max_{1 \leq j \leq N} |a_j|, \forall i$ ce qui prouve que A est borné. On a aussi $\sup A = \max_{1 \leq j \leq N} a_j$ ainsi que $\inf A = \min_{1 \leq j \leq N} a_j$.

5.) Soient $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, majoré et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a = \sup A$ si et seulement:

   1.) a est un majorant de A,

   2.) il existe une suite $(a_n) \subset A$ qui converge vers a.

Le point 2.) est équivalent à: $\forall \epsilon > 0,]a-\epsilon, a] \cap A \neq \varnothing$ si a est un majorant.