



Ens: D. Kressner - Algèbre Linéaire Avancée I - (n/a)

28 novembre 2016 - durée : 2 heures




n/a

n/a


SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Respectez les consignes suivantes pour **marquer vos réponses** :

 oui | ja | sì | yes



 non | nein | non | no





Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : On considère le système linéaire

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0.$$

Soit W l'ensemble de toutes les solutions de ce système dans \mathbb{F}_5^4 . Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ W contient un nombre infini d'éléments.
- ☐ W contient 1 élément.
- ☐ W contient 25 éléments.
- ☐ W contient 16 éléments.

Question 2 : Pour un nombre fixe $\alpha \in \mathbb{R}$, soit S_α l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 dont le premier et le second éléments sont des nombres réels quelconques, et dont le troisième élément est α . Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ Il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que S_α est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- ☐ Il y a une infinité de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que S_α est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- ☐ Il existe un seul $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que S_α est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- ☐ Si S_α est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , alors la dimension de S_α est 1.

Question 3 : Soit $K[t]$ l'espace vectoriel des polynômes. Laquelle des assertions suivantes est fausse ?

- ☐ La famille $(p_i)_{i=0}^\infty$ où $p_0(t) = 1$ et $p_i(t) = 1 + t + \dots + t^i$, $i \geq 1$, engendre $K[t]$.
- ☐ La famille $(p_i)_{i=0}^\infty$ où $p_0(t) = 1 + t + t^2 + \dots$ et $p_i(t) = t^i + t^{i+1} + t^{i+2} + \dots$, $i \geq 1$, engendre $K[t]$.
- ☐ Si $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots \in K[t]$ où $\alpha_0 \neq 0$, alors le degré de p est fini.
- ☐ La famille $(1, t, t^2, t^3, \dots)$ engendre $K[t]$.

Question 4 : Soit $A \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$. Laquelle des affirmations suivantes équivaut à dire que $\text{rang}(A) = 3$?

- ☐ Aucune des autres assertions n'est correcte.
- ☐ Il existe au moins une ligne de A qui est une combinaison linéaire des autres lignes.
- ☐ A a une ligne nulle.
- ☐ A a deux colonnes nulles.
- ☐ Il existe au moins une colonne de A qui est une combinaison linéaire des autres colonnes.



Question 5 : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $n > 1$, la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On note $x_n = (A^n)_{1n}$, le coefficient $(1, n)$ de la matrice A^n . Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

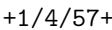
- ☐ $x_{n+1} = \frac{n+1}{n}x_n + \lambda(n-2)$.
- ☐ $x_n = (\lambda+1)^n - \lambda^n - 1$.
- ☐ Aucune des autres assertions n'est correcte.
- ☐ $x_n = n\lambda$.

Question 6 : Soient V un K -espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et H un sous-espace vectoriel de V . Laquelle des assertions suivantes est fausse ?

- ☐ Si (v_1, \dots, v_n) engendre H , alors cette famille engendre V aussi.
- ☐ $\dim(H) \leq \dim(V)$.
- ☐ Une famille linéairement indépendante dans H est linéairement indépendante dans V aussi.
- ☐ Si (v_1, \dots, v_n) engendre V , alors cette famille est linéairement indépendante.

Question 7 : Un groupe abélien satisfait les axiomes suivants : la stabilité (A1), l'associativité (A2), l'existence de l'élément neutre (A3), l'existence des inverses (A4) et la commutativité (A5). Soit $G = \mathbb{R}$ et la loi de composition \circ définie dans $G \times G$ par $x \circ y = -x - y + xy$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

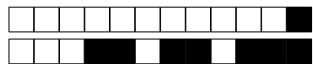
- ☐ Les axiomes A1, A3, A4 sont satisfaits, et les axiomes A2, A5 ne sont pas satisfaits.
- ☐ Les axiomes A1, A2, A5 sont satisfaits, et les axiomes A3, A4 ne sont pas satisfaits.
- ☐ Les axiomes A1, A5 sont satisfaits, et les axiomes A2, A3, A4 ne sont pas satisfaits.
- ☐ Les axiomes A1, A3, A5 sont satisfaits, et les axiomes A2, A4 ne sont pas satisfaits.



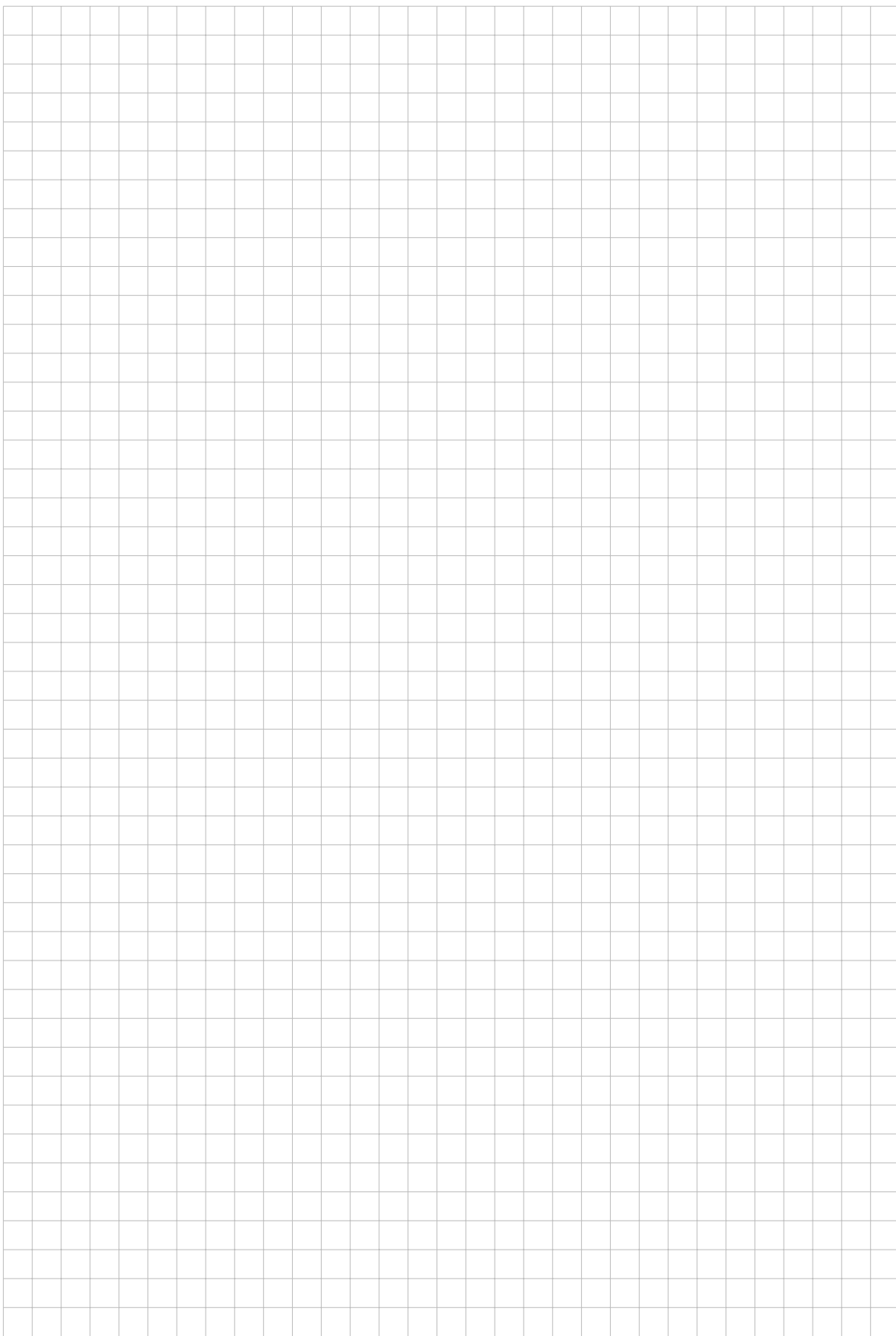


+1/5/56+





+1/6/55+





Question B : *Cette question est notée sur 4 points.*

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Réservé au correcteur

Soient V un K -espace vectoriel de dimension finie, et L, M deux sous-espaces vectoriels de V tels que $V = L \oplus M$. On définit $P : V \rightarrow V$ par $P(x) = a$, où $x = a + b, a \in L, b \in M$. Montrer que :

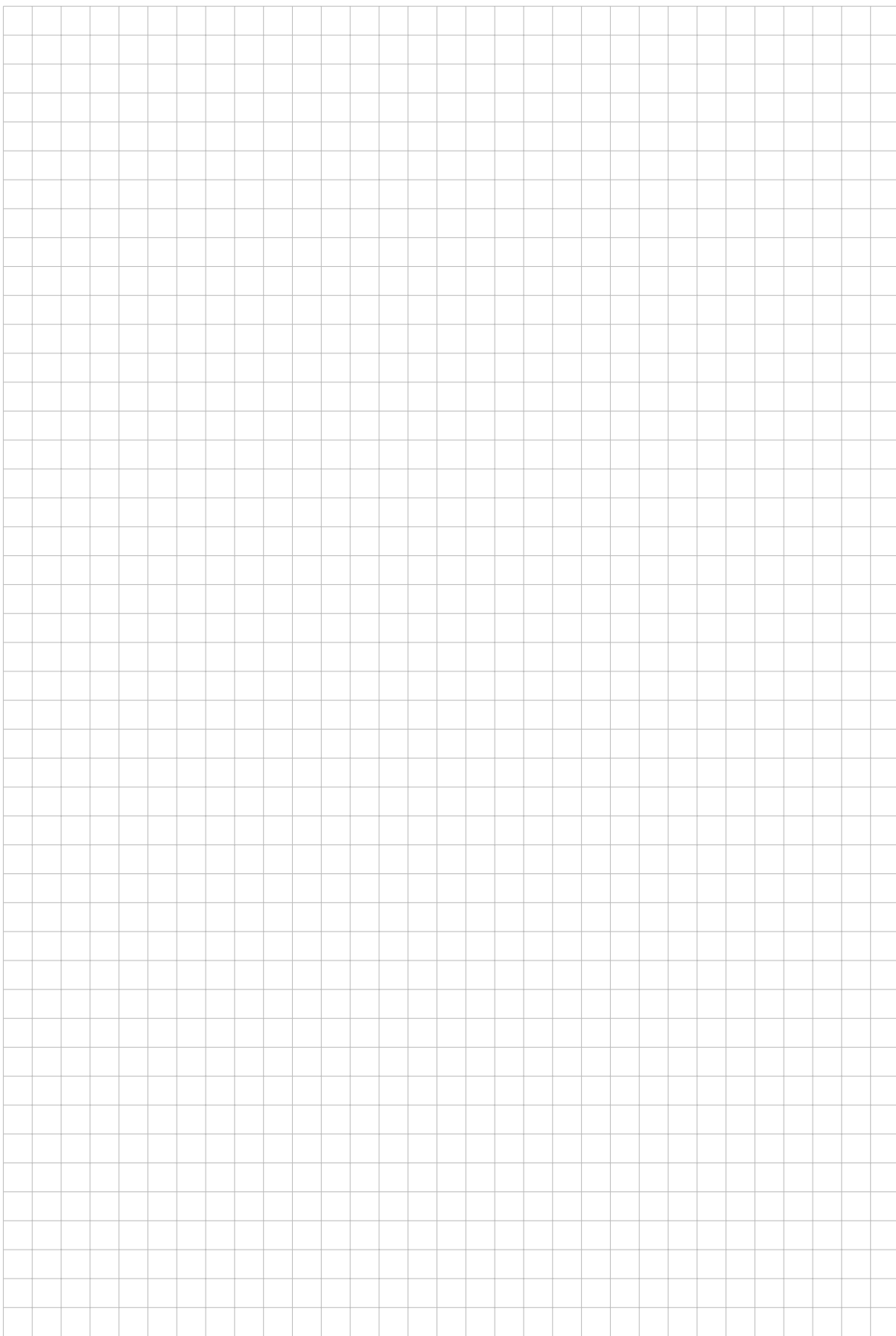
- i) P est une application linéaire,
- ii) $P \circ P = P$.

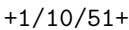




+1/8/53+



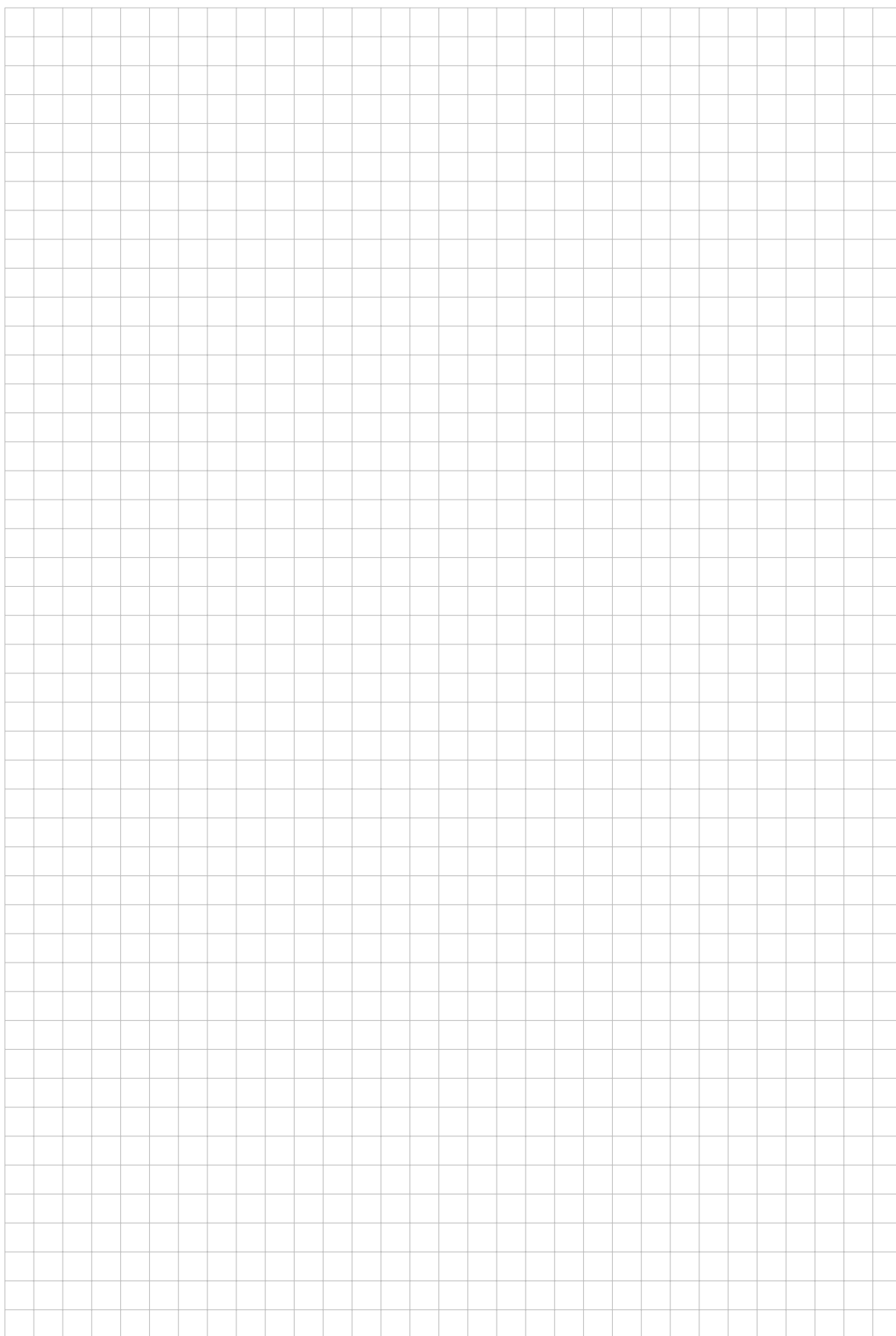




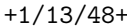
☐ ☐ ☐ ☐ ☐
☐ ☐ ☐ ☐ ☐
☐ ☐ ☐ ☐ ☐
Réservé au correcteur



+1/11/50+



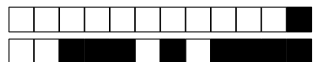




☐ ☐ ☐ ☐ ☐
☐ ☐ ☐ ☐ ☐
☐ ☐ ☐ ☐ ☐
Réservé au correcteur

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 + i \\ 2i & 1 & -2 \\ -1 & 2 + i & -1 - i \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$$

- Calculer une base de $\text{Ker}(F_A)$ et une base de $\text{Im}(F_A)$.
- Déterminer si F_A est surjective, injective ou bijective.



+1/14/47+



