Analyse avancée I
Mathématiques 1ère année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 26 au 30 septembre 2016

Série 2 du jeudi 29 septembre 2016

Exercice 1 (* A rendre) .

1.) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel $x^2 = 2$. Faire une rédaction précise.

2.) Montrer qu'il existe une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 2.

On pose $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

1^o) Démontrer que $\left| x_n - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2n^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Indication: utiliser, après l'avoir démontrée, la relation $\sqrt{1+\delta} < 1 + \dfrac{\delta}{2}$, $\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*$.

2^o) En déduire que $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ en utilisant la définition de la limite.

Exercice 3.

Démontrer que si x_n est défini par $x_n = \cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est divergente.

Indication: Faire la démonstration par l'absurde en utilisant les deux relations

$$\sin(n+2) = \sin(n) + 2\sin(1)\cos(n+1)$$

et

$$\cos(n+2) = \cos(n) - 2\sin(1)\sin(n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$