Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 28 au 2 décembre 2016

Corrigé 11 du mardi 29 novembre 2016

Exercice 1.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} exp(-1/x^2), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer en détails que toutes les dérivées de f existent en $x = 0$ et s'annulent.

On utilise pour cela les deux résultats suivants:

1. Pour tout polynôme p, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \dfrac{f(x)}{p(x)} = 0$.

   Il suffit de montrer cela pour $p(x) = x^m$, $m \geq 0$. On a
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x\to+\infty} exp(-x^2)x^m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{exp(x^2)}.$$
   En appliquant m fois B-H, on obtient le résultat.
2. Pour tout entier $k > 0$, il existe deux polymônes p et q tels que pour $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = f(x)\dfrac{q(x)}{p(x)}$.

   On montre cela simplement par induction, avec pour $x \neq 0$, $f'(x) = f(x)\dfrac{2}{x^3}$.

On procède alors par inducton:

1.) On a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \dfrac{f(h)}{h} = 0$, ce qui montre que $f^{(1)}(0)$ existe et vaut 0.

2.) On a suppose que $f^{(k)}(0)$ existe et vaut 0 et on étudie $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \dfrac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \dfrac{f^{(k)}(h)}{h}$.

Il existe deux polynômes p et q tels que pour $x \neq 0$, $f^{(k)}(x) = f(x)\dfrac{q(x)}{p(x)}$.

On a donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \dfrac{f^{(k)}(h)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \dfrac{f(h)q(h)}{h\,p(h)} = q(0) \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \dfrac{f(h)}{h\,p(h)} = 0$. On a alors $f^{(k+1)}(0)$ existe et vaut 0.

Ceci montre que pour tout entier $k \geq 0$, $f^{(k)}(0) = 0$.

Exercice 2.

On utilise systématiquement le fait que, dans son rayon de convergence, une série entière peut se dériver "terme à terme" et que le rayon de convergence de la série dérivée est le même.

- La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} n^0 x^n$ a comme rayon de convergence $R = 1$ et on a pour $|x| < 1$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$
- Si on dérive cette série, on obtient:
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

et donc
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

- Si on dérive $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$, et multiplie par x, on obtient
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,x^n = x\frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big).$$
- ...

Exercice 3.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit les deux séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-x_0)^n$ de rayon de convergence non nuls R_1 et R_2 respectivement.
Montrons que si $R = \min(R_1, R_2)$ et si $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, alors la série $\displaystyle\sum_{k,j=0}^{\infty} a_k b_j\,(x-x_0)^{k+j}$ converge.

Démonstration : Soit $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$. Puisque $|x-x_0| < R_1$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ converge absolument.
De même, puisque $|x-x_0| < R_2$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-x_0)^n$ converge absolument.
Pour $N, M \in \mathbb{N}$, posons $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a_n(x-x_0)^n|$ et $T_M = \displaystyle\sum_{m=0}^{M} |b_m(x-x_0)^m|$. Il existe $S, T \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ et $\lim_{M\to\infty} T_M = T$ et on peut écrire $|S\cdot T - S_N \cdot T_M| \leq |S - S_N|T + S_N|T - T_M|$.
On en tire que

$\forall \epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $N, M \geq N_0$, alors
$$\Big|S\cdot T - \sum_{j,k=0}^{j=N,k=M} |a_j b_k|\,|x-x_0|^{k+j}\,\Big| \leq \epsilon.$$
Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{k,j=0}^{\infty} a_k\,b_j\,(x-x_0)^{k+j}$ converge absolument. On peut donc aussi l'écrire en permutant ses termes $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} (x-x_0)^m \sum_{k+j=m} a_k\,b_j$.

$\square$

Exercice 4.

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et f est convexe, alors $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Il suffit d'écrire la relation de convexité:
- pour $n-1 < x < n$ pour obtenir $f(x) \leq x$, et
- pour $x < n < n+1$ pour obtenir $f(x) \geq x$.