Corrigé 6 du jeudi 27 octobre 2016

Exercice 1.

Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Démonstration : Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x < \quad x \quad < \frac{\sin x}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow \qquad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a également pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$$\cos(x) = \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Donc, pour tout $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, nous avons la relation : $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \cos x = 1$, on obtient, par le théorème des deux gendarmes, le résultat cherché.

$\square$

Exercice 2.

a) On a

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \quad \text{et} \quad (x^2-1) = (x-1)(x+1).$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \ \forall x \in D.$$

Si $x_0 = 1$, on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \frac{3}{2}.$$

b) En reprenant la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ ci-dessus, on constate que

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ \neq}} (x^2+x+1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ \neq}} (x+1) = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty,$$

et donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ \neq}} f(x)$ n'existe pas.

c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$|x - 0| \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0| \le \epsilon.$$

En posant donc $\ell = 0$, $x_0 = 0$ et $\delta = \epsilon$, on obtient:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon \text{ tel que si } |x - x_0| \le \delta \text{ alors } |f(x) - \ell| \le \epsilon,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = 0$ lorsque $x_0 = 0$.

Ainsi donc

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = 0.$$

d) En reprenant la fonction ci-dessus et en posant $x_0 = 1$, on constate:

1°) Si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ et $a_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.
2°) Si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ et $b_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$.

Les propriétés (1°) et (2°) prouvent que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ n'existe pas.

Il en est de même pour $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ \neq}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$.

Exercice 3.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par:

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\},$$

et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in A, \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \notin (\mathbb{Q} \cup A). \end{cases}$$

Remarquons pour commencer que, puisque f est définie sur tout $\mathbb{R}$, on a que f est définie au voisinage de x_0 pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) *Montrons que f admet une limite en tous les points de A.*

Soit donc $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ et posons $x_0 = \frac{1}{k\pi}$. Si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ est une suite de nombres réels telle que $a_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, on va montrer que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$$

ce qui montrera que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x) = 0.$$

Si $\delta > 0$ est tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A = \{x_0\}$, alors il existe $N > 0$ tel que $\forall n \geq N$ on a $a_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Puisque on a supposé que $a_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$, on obtient si $n \geq N$: $a_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et $a_n \notin A$. Ainsi, lorsque $n \geq N$:

$$f(a_n) = \begin{cases} a_n \sin\left(\dfrac{1}{a_n}\right) & \text{si } a_n \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } a_n \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{x_0} = k\pi$ et ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = \sin k\pi = 0$. On conclut que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0.$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$. Il existe $M > N$ tel que $\forall n \geq M$ on a

$$\left| a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \right| \leq \epsilon.$$

Si $n \geq M$, alors ou bien $a_n \in \mathbb{Q}$ et alors $f(a_n) = 0$, ou bien $a_n \notin \mathbb{Q}$ et dans ce cas $|f(a_n)| = \left| a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \right| \leq \epsilon$. Dans tous les cas on a bien

$$|f(a_n)| \leq \epsilon, \forall n \geq M$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ et donc que

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f(x) = 0.$$

b) *Montrons que f n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$.*

En effet,

- Si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite telle que

$$a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \notin (\mathbb{Q} \cup A), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

  on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.
- Par contre, si $a_n = \frac{1}{n\pi}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.

Ceci prouve (c.f. remarque 3.4 p. 34) que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f(x)$ n'existe pas.

c) *Montrons que si $x_0 \notin A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f(x)$ n'existe pas.*

On a déjà montré que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ \neq}} f(x)$ n'existe pas.

Posons $g(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R}^*$. Si $x_0 \notin A$ et $x_0 \neq 0$, on montre que

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} g(x) = x_0 \sin(1/x_0) \neq 0.$$

- Si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite telle que $a_n \notin (\mathbb{Q} \cup A), \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = x_0 \sin(1/x_0) \neq 0$.
- Par contre, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}, a_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ et on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

Ce qui implique, encore une fois (c.f. remarque 3.4 p. 34) , que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ \neq}} f(x)$ n'existe pas.