Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 31 octobre au 4 novembre 2016

Série 7 du jeudi 3 novembre 2016

Exercice 1.

Parmi les formulations suivantes, lesquelles sont équivalentes à "f est continue en x" (justifier les réponses) :

1.) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y : |x - y| < \epsilon => |f(x) - f(y)| < \delta$

2.) $\forall \delta > 0 \, \exists \epsilon > 0 \, \forall y : |x - y| < \epsilon => |f(x) - f(y)| < \delta$

3.) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y : |x - y| \leq \delta => |f(x) - f(y)| < \epsilon$

4.) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y : |x - y| < \delta => |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

Exercice 2 (* A rendre) .

Soit $I =]0, \infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. Démontrer que f est uniformément continue sur I.

Indication On utilisera le fait que la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$ avec la propriété: $|\sin(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f a la propriété suivante: pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset D$ telle que

$$a_n \neq a, \;\; f(a_n) \neq \alpha, \; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \text{et} \;\; \lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Démontrer que s'il existe un nombre réel ℓ et une fonction $\delta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient $\forall x \in D$, $\forall \epsilon > 0$

$$0 < |x - a| \leq \delta(\epsilon) \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - \ell| \leq \epsilon,$$

alors nécessairement $\lim\limits_{\substack{\epsilon \to 0 \\ >}} \delta(\epsilon) = 0$.

Indication: Supposer par l'absurde que $\delta(\epsilon)$ ne tend pas vers zéro lorsque ϵ tend vers zéro.