# PROPEDEUTIQUE ALGEBRE LINEAIRE

J. Thévenaz

Juin 2012

I) (10 points)
On considère l'espace hermitien $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire standard.
Soit $\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ la transformation linéaire suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) On affirme que $A$ est unitairement diagonalisable. Qu'est-ce que cela signifie ? Pourquoi est-ce le cas ?

b) Effectuez explicitement la diagonalisation en question. Justifiez votre démarche et vos réponses.

c) Quelle est la matrice adjointe de $\alpha$ ?

II) (8 points)
Soit $V$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les matrices $2 \times 2$ triangulaires supérieures à coefficients réels.
Si $A, B \in V$, on définit : $c(A)$ = coefficient non diagonal de $A$, et $\beta(A, B) = c(AB) + c(BA)$.

a) Montrer que $\beta$ est une forme linéaire symétrique sur $V$ sachant que $c$ est linéaire.

b) Trouver la signature de $\beta$. Justifiez votre démarche.

III) (10 points)
Soit $p \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ p & p & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Quel est le polynôme minimal de $A$ ? Justifiez votre réponse.

b) Est-ce que $A$ est diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

c) $r^3 \cdot (t-1)^5 \cdot (t-2)$ est-il un polynôme annulateur de $A$ ? Justifiez votre réponse

IV) (6 points)
Soit $V$ un $\mathbb{C}$-espace hermitien et soit $\alpha : V \to V$ une transformation linéaire auto-adjointe.

Montrer que deux espaces propres distincs sont orthogonaux sans utiliser le théorème spectral.

V) (6 points)
Soit $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soient $W$ un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires de $V$ dans $\mathbb{K}$ avec $\varphi$ et $\psi$ nulles sur $W$.

Montrer que $\varphi$ et $\psi$ sont linéairement dépendantes.

VI) (4 points)
Répondez de manière précise aux questions suivantes :

a) Qu'est-ce qu'une forme sesquilinéaire hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

b) Quand dit-on que deux matrices sont congruentes ?

VII) (6 points)
Choisir la bonne réponse parmi les propositions suivantes. Vous n'avez pas besoin de justifier vos réponses.

a ) On travaille dans un espace hermitien. Soit $\alpha$ unitaire, et $||v||$ la norme de $v$. $||\alpha(v)|| - ||v|| = 0$ ?

- ☐ Oui toujours.
- ☐ Si l'espace hermitien est de dimension paire.
- ☐ Si $v = 0$, sinon non.
- ☐ Si $v = 0$ ou vecteur propre, sinon non.

b ) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale. La somme des carrés des coefficients de $A$ vaut :

- ☐ N'importe quel réel positif.
- ☐ 1.
- ☐ $n$.
- ☐ $n^2$.

c ) Soit $A \in M_5(\mathbb{R})$ et $m_A(t) = t^3 - t + a$, $a \in \mathbb{C}$. $A$ est-elle inversible ?

- ☐ Toujours.
- ☐ Si $a \in \mathbb{C}$, sinon non.
- ☐ Si $a \neq 0$, sinon non.
- ☐ Jamais.