Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 24 au 28 octobre 2016

Série 6 du jeudi 27 octobre 2016

Exercice 1.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x}{x} = 1$ à partir des inégalités:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Exercice 2.

Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ \neq}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$ dans les cas où $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont définis par:

a) $D = \mathbb{R} - \{-1, +1\}, \qquad f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \qquad x_0 = 1;$

b) $D = \mathbb{R} - \{-1, +1\}, \qquad f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \qquad x_0 = -1;$

c) $D = \mathbb{R}, \qquad f(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \qquad f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}, \qquad x_0 = 0;$

d) $D = \mathbb{R}, \qquad f(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \qquad f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}, \qquad x_0 = 1.$

Exercice 3 (* A rendre) .

Soit $A \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par:

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\},$$

et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in A, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \notin (\mathbb{Q} \cup A). \end{cases}$$

a) Montrer que f admet une limite en tous les points de A et calculer la valeur de cette limite.

b) Est-ce que f admet une limite en $x_0 = 0$? Si oui, calculer cette limite; sinon, justifier votre réponse.

c) Trouver les points de $\mathbb{R}$ où f n'a pas de limite.