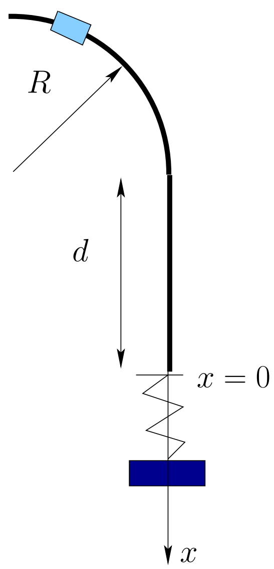
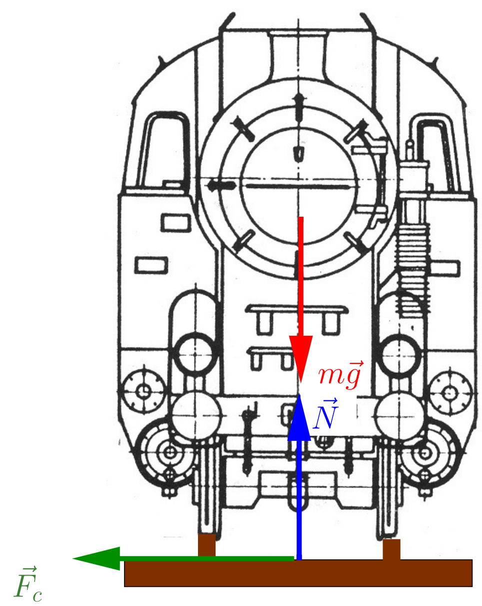
Corrigé du mini-test 2 : Wagon et butoir

(7+6+4 = 17 points au total)

a) (7 points)

Dans la courbe, les forces subies par le wagon sont :
- son poids $m\vec{g}$, dirigé verticalement vers le bas
- une force de soutien $\vec{N}$ de la part des rails, dirigée verticalement vers le haut
- une force de liaison horizontale $\vec{F}_c$ de la part des rails, dirigée perpendiculairement aux rails





$\boxed{\text{1 point pour le poids } m\vec{g} \text{ correctement représenté sur le dessin}}_{\text{A}}$

$\boxed{\text{1 point pour la force } \vec{N} \text{ correctement représentée sur le dessin}}_{\text{B}}$

$\boxed{\text{1 point pour la force } \vec{F}_c \text{ correctement représentée sur le dessin}}_{\text{C}}$

Il n'y a pas de force dirigée dans la direction des rails, car il n'y a ni frottement, ni force motrice. Par la deuxième loi de Newton, ceci signifie que le wagon ne subit pas d'accélération tangentielle, c'est-à-dire que $a_{\text{tangentielle}} = dv/dt = 0$. Sa vitesse scalaire est donc constante ($v(t) = v_0$). $\boxed{\text{1 point}}_{\text{D}}$

En conséquence, l'accélération du wagon $\vec{a}$ est purement normale. Cette dernière est dirigée perpendiculairement aux rails, dans la direction du centre de courbure, en l'occurrence horizontalement dans la direction du centre du cercle. Donc la somme des forces appliquées au wagon $\vec{F}_{\text{tot}}$ est aussi dans la même direction et le même sens, $\boxed{\text{1 point}}_{\text{E}}$ puisque la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c = m\vec{a}\,. \tag{1}$$

La projection de la deuxième loi de Newton sur un axe vertical implique

$$\vec{N} = -m\vec{g} \implies N = mg\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} \tag{2}$$

où N et mg désignent les normes des vecteurs $\vec{N}$ et $m\vec{g}$.
L'équation (1) devient alors

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{c}} = m\vec{a}\,. \tag{3}$$

La somme des forces exercées sur le wagon $\vec{F}_{\text{tot}}$ se réduit à la force de liaison $\vec{F}_{\text{c}}$ exercée par les rails. On sait donc comment dessiner la force $\vec{F}_{\text{c}}$.
Comme la norme de l'accélération normale vaut

$$a = \frac{v_0^2}{R}\,, \tag{4}$$

il vient pour la norme de la force de liaison

$$F_{\text{c}} = \frac{mv_0^2}{R} = F_{\text{tot}}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{G}} \tag{5}$$

b) (6 points)
Dans le tronçon rectiligne et avant de toucher le butoir ($t < 0$), le wagon subit des forces dont la résultante est nulle, $m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$. Son équation du mouvement, projetée sur l'axe x le long des rails est alors

$$\ddot{x} = 0\,, \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\text{H}} \tag{6}$$

dont la solution est

$$x(t) = v_0 t\,, \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{7}$$

où l'on a utilisé les conditions $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.
Lorsque le wagon est en contact avec le butoir ($0 < t < T$), il subit la force du ressort, horizontale dans la direction des rails, dont la composante x est donnée par

$$F_x = -k\Delta x\,, \tag{8}$$

où Δx est le déplacement de l'extrémité libre du ressort par rapport à sa position à vide. Puisque l'origine de l'axe x a été choisie à la position à vide du ressort, on a $\Delta x = x$ et l'équation du mouvement du wagon est

$$m\ddot{x} = -kx\,. \qquad \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}} \tag{9}$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution générale est

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \;\; \text{avec} \;\; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} \tag{10}$$

où les constantes d'intégration A et B sont à déterminer à partir des conditions initiales. La condition $x(0) = 0$ donne

$$B = 0\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{L}} \tag{11}$$

La vitesse vaut alors

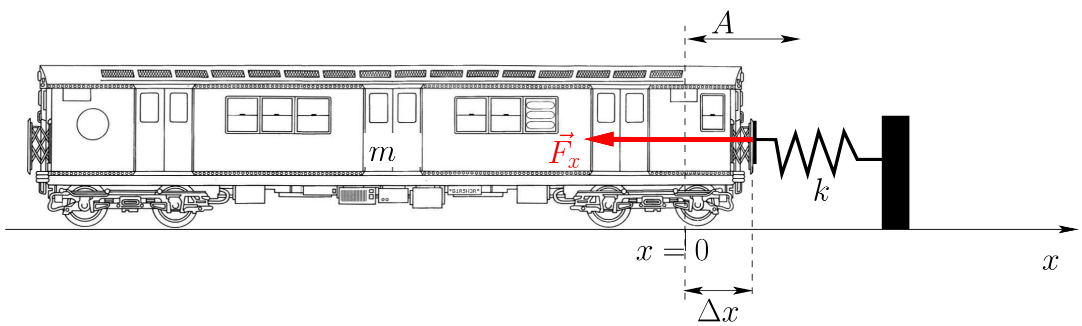
$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) \tag{12}$$

et la condition $\dot{x}(0) = v_0$ donne

$$A = \frac{v_0}{\omega}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{M}} \tag{13}$$

Finalement, pour répondre à la question posée, la solution de l'équation du mouvement s'écrit :

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\,. \tag{14}$$



c) (4 points)

Le wagon restera en contact avec le ressort tant que la force appliquée par le ressort sur le wagon sera dirigée selon $-\hat{e}_x$, c'est-à-dire tant que $x > 0$. Cette condition sera satisfaite pour une demi-période de l'oscillation :

$$T = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{N}} \tag{15}$$

La force maximale est appliquée quand la compression du ressort est maximale, c'est-à-dire quand la position $x(t)$ est maximale et donc égale à A. On a alors :

$$F_{\text{max}} = |F_{\text{max},x}| = |-kA| = \frac{kv_0}{\omega} = v_0\sqrt{km}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{O}} \tag{16}$$

Le système formé des deux équations (15) et (16) peut être résolu par rapport aux deux inconnues m et k. On obtient :

$$m = \frac{F_{\text{max}}T}{\pi v_0}\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{P}} \tag{17}$$

$$k = \frac{\pi F_{\text{max}}}{v_0 T}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{Q}} \tag{18}$$