13 décembre 2012

**Corrigé du test**

Chacune des questions 1 à 9 est à choix multiple. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.
Pour chacune des questions à choix multiple, on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 point si la question reste sans réponse, -1 point si la réponse est fausse.
Même si cela ne joue aucun rôle dans le comptage des points, une solution avec justifications est donnée pour chacun des problèmes à choix multiple.
La question 10 (définitions) vaut 4 points (2 points pour chaque définition).
La question 11 (démonstration) vaut 4 points.
Il est très fortement recommandé de corriger les problèmes 10 et 11 de manière très sévère, idéalement par un autre étudiant sans complaisance.

Total possible : 35 points
0 point = note 1,
7 points = note 2,
14 points = note 3,
21 points = note 4,
28 points = note 5,
35 points = note 6.

---

**Problème 1.** *On considère l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire* $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ *définie par*

$$\phi(x, y, z, t) = (x + y + 2z + 3t\,,\; y + t\,,\; x + y + 3t\,,\; 2x + 3y + 2z + 7t\,,\; x + 2y + 2z + 4t)\,.$$

*Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *fixés. Est-ce que* $(0, a, b, b + 1, 5)$ *appartient à* $\mathrm{Im}\,(\phi)$ *?*

$(A)$ *Oui si* $a = 5$ *et* $b = 0$.
$(B)$ *Oui si* $a = 1$ *et* $b = -2$.
$(C)$ *Oui si* $a = 5$ *et tout* $b$.
$(D)$ *Non pour tout* $a$ *et pour tout* $b$.

**Solution 1.** C'est la réponse $(D)$ qui est correcte. On doit résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ b+1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Après échelonnage, on trouve le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ 1-a \\ 5-a \end{pmatrix}$$

Les deux dernières équations sont $0 = 1 - a$ et $0 = 5 - a$, qui ne peuvent jamais être satisfaites, quel que soit $a$. Donc le système n'a aucune solution pour tout $a$ (et pour tout $b$).

---

**Problème 2.** *Soit* $\mathbb{R}[t]$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des polynômes en* $t$ *à coefficients dans* $\mathbb{R}$*. On considère l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire* $\phi : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t]$ *définie par* $\phi(f(t)) = f'(t) - (c^2+1)f(t)$*, où* $c \in \mathbb{R}$ *est fixé et où* $f'(t)$ *désigne la dérivée de* $f(t)$*. Quelle est la dimension de* $\mathrm{Ker}\,(\phi)$ *?*

$(A)$ $\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) = 0$.
$(B)$ $\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) = 1$.
$(C)$ $\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) = \infty$.
$(D)$ *Cela dépend de* $c$.

**Solution 2.** C'est la réponse $(A)$ qui est correcte. Si $f(t) \in \mathrm{Ker}\,(\phi)$, alors $f'(t)-(c^2+1)f(t) = 0$ et on montre aisément que $f(t)$ doit être alors le polynôme nul. En effet, dans le cas contraire, $f(t)$ aurait un terme dominant $a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$ et on trouverait $-(c^2+1)a_n t^n$ comme coefficient dominant de $f'(t) - (c^2+1)f(t) = 0$ (car $f'(t)$ est de degré $\leq n-1$). Mais cela forcerait $a_n = 0$ (car $c^2+1 \neq 0$), ce qui est contradictoire. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(\phi) = \{0\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) = 0$.

---

**Problème 3.** *On considère l'application* $\mathbb{F}_3$*-linéaire* $\alpha : (\mathbb{F}_3)^3 \longrightarrow (\mathbb{F}_3)^3$ *définie par*

$$\alpha(x,y,z) = (x, x+2y, y+z)\,.$$

*On considère la base canonique* $E = (e_1, e_2, e_3)$ *de* $(\mathbb{F}_3)^3$ *et la base* $F = (f_1, f_2, f_3)$ *où* $f_1 = e_1$*,* $f_2 = e_1 + e_2$*,* $f_3 = e_1 + e_3$*. Laquelle des matrices suivantes est la matrice de* $\alpha$ *par rapport à la base* $F$ *?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solution 3.** C'est la réponse $(B)$ qui est correcte. Il y a deux méthodes pour trouver la matrice $B$.

**Première méthode.** Par définition, la matrice de $\alpha$ par rapport à $E$ est la matrice $A$, c'est-à-dire $(\alpha)_E^E = A$. Par définition, la matrice de changement de base est $D$, c'est-à-dire $(\mathrm{id})_F^E = D$. Si on connaît une méthode pour inverser une matrice, on trouve $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sinon, on trouve $D^{-1}$ directement par changement de base inverse $(\mathrm{id})_E^F = D^{-1}$, c'est-à-dire en exprimant $E$ en fonction de $F$. Cela donne $e_1 = f_1$, $e_2 = f_2 - f_1 = f_2 + 2f_1$, $e_3 = f_3 - f_1 = f_3 + 2f_1$ (en utilisant que $2 = -1$ dans $\mathbb{F}_3$), et donc on trouve la matrice $D^{-1}$ ci-dessus. Alors, la formule de changement de base nous donne

$$(\alpha)_F^F = D^{-1}AD = \text{ ... calculs ... } = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B\,.$$

**Deuxième méthode.** On trouve directement les images de vecteurs de la base $F$, exprimés dans la base $F$. Explicitement,

$$\begin{aligned}
\alpha(f_1) &= \alpha(e_1) = e_1 + e_2 = f_2 \\
\alpha(f_2) &= \alpha(e_1 + e_2) = \alpha(e_1) + \alpha(e_2) = (e_1 + e_2) + (2e_2 + e_3) = e_1 + e_3 = f_3 \\
\alpha(f_3) &= \alpha(e_1 + e_3) = \alpha(e_1) + \alpha(e_3) = (e_1 + e_2) + e_3 = -f_1 + f_2 + f_3 = 2f_1 + f_2 + f_3
\end{aligned}$$

En mettant ces images en colonnes, cela donne bien la matrice $B$.

On peut noter que la matrice $C$ est la matrice de $\alpha$ par rapport aux bases $F$ et $E$, c'est-à-dire $(\alpha)_F^E = C$. Ce n'est pas cette matrice qui était demandée.

---

**Problème 4.** *Soit $K$ un corps et soit $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, avec une base $F = (f_1, \dots, f_n)$. On suppose que $V = W \oplus U$, où $W$ et $U$ sont des sous-espaces vectoriels de $V$, distincts de $V$ tout entier. Soit $\pi : V \to V$ la projection sur $W$ le long de $U$ (définie par $\pi(w+u) = w$, $\forall\, w \in W$ et $\forall\, u \in U$). Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

($A$) *On peut extraire de $F$ une partie qui est une base de $W$.*
($B$) *On peut extraire de $\pi(F)$ une partie qui est une base de $W$.*
($C$) *$\pi(F)$ est une partie libre de $W$.*
($D$) *$F \cap W$ est une partie génératrice de $W$.*

**Solution 4.** C'est la réponse ($B$) qui est correcte. On va montrer que $\pi(F)$ est une partie génératrice de $W$, et donc on peut en extraire une base de $W$. Tout élément $w \in W$ appartient à $V$ et on peut donc écrire $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ (avec $\lambda_i \in K$, $\forall i$). Alors

$$w = \pi(w) = \pi\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \pi(f_i)\,,$$

ce qui montre bien que $\pi(F) = (\pi(f_1), \dots, \pi(f_n))$ engendre $W$.

Comme il n'y a pas d'hypothèse sur $F$ et $W$, il se pourrait qu'aucun vecteur de $F$ n'appartienne à $W$, si bien que les réponses (A) et (D) ne peuvent pas être correctes. La réponse (C) n'est pas correcte car l'image d'une partie libre n'a aucune raison d'être libre en général (car par exemple deux vecteurs libres pourraient avoir la même image).

---

**Problème 5.** *Soit $\mathbb{C}[t]$ l'ensemble des polynômes en $t$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.*
*Soit $V = \{f(t) \in \mathbb{C}[t] \mid \deg(f(t)) \leq 4\}$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

($A$) *$V$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4.*
($B$) *$V$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.*
($C$) *$V$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\infty$.*
($D$) *$V$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 10.*

**Solution 5.** C'est la réponse ($D$) qui est correcte. Comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $V$ a une base $(1, t, t^2, t^3, t^4)$, donc il est de dimension 5. Mais comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a besoin d'écrire $(a+bi)t^k = at^k + bit^k$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) et donc une base de $V$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel est constituée de $(1, i, t, it, t^2, it^2, t^3, it^3, t^4, it^4)$. Donc $V$ est de dimension 10 comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

---

**Problème 6.** *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par $f_1(x) = \sin^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 3$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

($A$) *$\{f_1, f_2\}$ est une partie liée.*
($B$) *$\{f_1, f_2, f_3\}$ est une partie libre.*
($C$) *$f_3$ est combinaison linéaire de $f_1$ et $f_2$.*
($D$) *$f_2 \notin \operatorname{Vect}(f_1, f_3)$.*

**Solution 6.** C'est la réponse ($C$) qui est correcte. Comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a une combinaison linéaire $3f_1 + 3f_2 - f_3 = 0$. Donc ($B$) est faux, ($C$) est vrai (car $f_3 = 3f_1 + 3f_2$) et ($D$) est faux (car $f_2 = -f_1 + \frac{1}{3} f_3$).

Pour montrer que ($A$) est faux, on considère une combinaison linéaire $af_1 + bf_2 = 0$, ce qui signifie que $a \sin^2(x) + b \cos^2(x) = 0$ , $\forall\, x \in \mathbb{R}$. On choisit successsivement $x = 0$ et $x = \pi/2$ et on obtient $b = 0$ et $a = 0$. Ainsi $\{f_1, f_2\}$ est une partie libre.

---

**Problème 7.** *Soit* $v_1 = (2, 3-7i, i)$, $v_2 = (2i+2, 3i-1, i-1)$, $v_3 = (1, -4, i/2)$ *trois vecteurs dans le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}^3$*. Quelle est la dimension de* $\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)$ *?*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(A)$ | $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 1.$ | $(B)$ | $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 2.$ |
| $(C)$ | $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 3.$ | $(D)$ | $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 4.$ |

**Solution 7.** C'est la réponse $(B)$ qui est correcte. On peut échelonner la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -4 & \frac{i}{2} \\ 2i+2 & 3i-1 & i-1 \\ 2 & 3-7i & i \end{pmatrix}$ et on trouve $\begin{pmatrix} 1 & -4 & \frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc le rang vaut 2.

Une autre méthode. On constate que $v_1$ et $v_3$ sont linéairement indépendants et on cherche à exprimer $v_2$ comme combinaison linéaire $v_2 = \lambda v_1 + \mu v_3$, ce qui mène à un système de 3 équations à 2 inconnues $\lambda$ et $\mu$. On trouve une solution $\lambda = i$, $\mu = 2$. Donc $v_2 \in \mathrm{Vect}\,(v_1, v_3)$, et par conséquent $\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_3)$, qui est de dimension 2 comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

A noter que les dimensions sont doublées si on voyait tout comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais ce n'était pas la question.

---

**Problème 8.** *Soit* $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire définie sur la base canonique* $(e_1, e_2, e_3)$ *par* $\alpha(e_1) = e_2,\ \alpha(e_2) = e_3,\ \alpha(e_3) = 0$*. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

$(A)$ *La somme* $\mathrm{Ker}\,(\alpha) + \mathrm{Im}\,(\alpha)$ *est directe.*
$(B)$ $\mathrm{Ker}\,(\alpha) \subset \mathrm{Im}\,(\alpha)$.
$(C)$ $\dim \mathrm{Ker}\,(\alpha) = 2$.
$(D)$ $\dim \mathrm{Im}\,(\alpha \circ \alpha) + \dim \mathrm{Ker}\,(\alpha) = 3$.

**Solution 8.** C'est la réponse $(B)$ qui est correcte. Explicitement, on trouve aisément les résultats suivants : $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \mathrm{Vect}\,(e_3)$ est de dimension 1 et $\mathrm{Im}\,(\alpha) = \mathrm{Vect}\,(e_2, e_3)$ est de dimension 2. En particulier $(C)$ est fausse. De plus, $\mathrm{Ker}\,(\alpha) \subset \mathrm{Im}\,(\alpha)$, ce qui implique que $(B)$ est vraie. On obtient aussi que $(A)$ est fausse, car $\mathrm{Ker}\,(\alpha) \cap \mathrm{Im}\,(\alpha) = \mathrm{Ker}\,(\alpha) \neq \{0\}$. Finalement, $\mathrm{Im}\,(\alpha \circ \alpha) = \mathrm{Vect}\,(e_3)$ est de dimension 1, et donc $(D)$ est fausse.

---

**Problème 9.** *Soit* $K$ *un corps. On considère l'application* $K$*-linéaire* $\phi : M_2(K) \longrightarrow K^3$ *définie par*

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d, b+c, a)\,, \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)\,.$$

*Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

$(A)$ *L'image de* $\phi$ *est de dimension 2.*
$(B)$ *Le rang de* $\phi$ *vaut 1 de plus que la dimension de* $\mathrm{Ker}\,(\phi)$*.*
$(C)$ $\phi$ *est surjective.*
$(D)$ $\phi$ *est injective.*

**Solution 9.** *La donnée du test contenait une erreur : il fallait lire* $M_2(K)$ *au lieu de* $M_4(K)$*.*

C'est la réponse $(C)$ qui est correcte. La matrice de $\phi$ par rapport aux bases canoniques de $M_2(K)$ et $K^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A noter que $M_2(K)$ est de dimension 4 et que $K^3$ est de dimension 3.

On voit que $e_2, e_1 \in \mathrm{Im}\,(\phi)$ (regarder les colonnes 3 et 4). De plus $e_3 \in \mathrm{Im}\,(\phi)$ (colonne 1 moins colonne 4). Par conséquent $\mathrm{Im}\,(\phi) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) = K^3$. Ainsi $\phi$ est surjective et $\mathrm{rang}(\phi) = \dim \mathrm{Im}\,(\phi) = 3$.

Il s'ensuit que $\dim \mathrm{Ker}\,(\phi) = 4 - 3 = 1$, par le théorème du rang. Donc $(A)$ et $(B)$ sont fausses. Comme $\mathrm{Ker}\,(\phi) \neq \{0\}$, $(D)$ est fausse aussi.

A noter qu'on peut voir directement que $(B)$ est fausse, car si elle était vraie, on aurait

$$4 = \dim(M_2(K)) = \dim \mathrm{Ker}\,(\phi) + \mathrm{rang}(\phi) = 2 \dim \mathrm{Ker}\,(\phi) + 1\,,$$

ce qui donnerait un nombre impair.

A noter aussi qu'on peut aussi voir directement que $(D)$ est fausse, car si $\phi$ était injective, son image serait de dimension 4 (par le théorème du rang), ce qui est impossible pour un sous-espace de l'espace $K^3$, qui est de dimension 3.

---

**Problème 10.** *Soit $K$ un corps. Répondez de manière précise à chacune des questions suivantes.*

*a) Qu'est-ce qu'une partie libre dans un $K$-espace vectoriel $V$ ?*

*b) Qu'est-ce que le sous-espace engendré par deux vecteurs $v_1$ et $v_2$ dans un $K$-espace vectoriel $V$ ?*

**Solution 10.** a) Une partie finie $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre si, pour toute combinaison linéaire $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ (avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$), chacun des scalaires $\lambda_i$ est nul. *Cette partie de la définition vaut 1 point.*

Une partie arbitraire $X$ est libre si toute partie finie de $X$ est libre (au sens de la définition précédente). *Cette partie de la définition vaut 1 point.*

Exemple de définition erronée : $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre si, pour $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0 \in K$, on a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Cet énoncé est toujours vrai et n'a rien à voir avec la liberté.

b) Le sous-espace engendré par deux vecteurs $v_1$ et $v_2$ est le sous-ensemble $\{av_1 + bv_2 \mid a, b \in K\}$. *Cette définition vaut 2 points.*

Exemple de définition erronée : $\{av_1 + bv_2 \mid v_1, v_2 \in V\}$. Ce n'est pas correct car les vecteurs $v_1$ et $v_2$ sont fixés, donc ils ne peuvent pas apparaître comme variables après la barre verticale. Ce sont les scalaires $a$ et $b$ qui doivent varier.

---

**Problème 11.** *Soit $V$ un $K$-espace vectoriel (où $K$ est un corps). On suppose que $V$ se décompose en somme directe $V = U \oplus W$ de deux sous-espaces vectoriels $U$ et $W$. Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une base de $U$ et soit $\{w_1, \ldots, w_q\}$ une base de $W$. Démontrer que $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q\}$ est une base de $V$. Justifiez votre raisonnement et votre démarche.*

*(On demande une démonstration directe, sans utiliser le théorème des dimensions.)*

**Solution 11.** On doit démontrer que c'est une partie libre et que c'est une partie génératrice de $V$.

**Partie libre (3 points).** On doit se donner une combinaison linéaire

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_q w_q = 0\,,$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in K$, et démontrer que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$. *Cette mise en place de la démarche vaut 1 point. Si cela n'est pas dit de manière claire et explicite, le point n'est pas acquis.*

Ensuite, l'équation ci-dessus implique que

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = -\mu_1 w_1 - \ldots - \mu_q w_q$$

et ce vecteur appartient à la fois à $U$ (membre de gauche) et à $W$ (membre de droite). Donc ce vecteur est nul, car $U \cap W = \{0\}$ par définition d'une somme directe. *Cette partie de la preuve vaut 1 point, à condition que tout soit justifié.*

Maintenant $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0$, ce qui implique que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ car la partie $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est libre (vu que c'est une base de $U$). De même $-\mu_1 w_1 - \ldots - \mu_q w_q = 0$, ce qui implique que $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$ car la partie $\{w_1, \ldots, w_q\}$ est libre (vu que c'est une base de $W$). *Cette partie de la preuve vaut 1 point, à condition que tout soit justifié.*

**Partie génératrice (1 point).** On doit se donner un vecteur arbitraire $v \in V$ et démontrer qu'il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in K$ tels que

$$v = a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p + b_1 w_1 + \ldots + b_q w_q \, .$$

Comme $V = U + W$, on peut écrire $v = u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$. Alors il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_p$ tels que $u = a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p$, car $\{u_1, \ldots, u_p\}$ engendre $U$. De même il existe des scalaires $b_1, \ldots, b_q$ tels que $w = b_1 w_1 + \ldots + w_q w_q$, car $\{w_1, \ldots, w_q\}$ engendre $W$. Par conséquent

$$v = u + w = a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p \ + \ b_1 w_1 + \ldots + w_q w_q \, ,$$

*Cette deuxième partie vaut 1 point. Si tout n'est pas justifié de manière claire et explicite, le point n'est pas acquis.*

---