Série 14

Exercice 1. On a defini un polygone generalise $\mathbf{P}$ a $n \geqslant 3$ cotes comme etant le polygone generalise donc les sommets (ordonnes) sont les points

$$P_1 = P, P_2 = r(P),\ P_3 = r^2(P), \cdots, P_n = r^{n-1}(P),\ P_{n+1} = r^n(P) = P$$

ou r est une rotation qui engendre un groupe fini G^+ de rotations affines d'ordre n,

$$G^+ = r^{\mathbb{Z}} = \{\mathrm{Id}, r, r^2, \cdots, r^{n-1}\}$$

et $P \in \mathbb{R}^2$ n'est pas le centre de la rotation r (et donc de toutes les rotations de G^+).

1. Montrer que $\mathbf{0}$ est le barycentre des sommets de $\mathbf{P}$.
2. Montrer que le translate $\mathbf{P}$ est l'image par une translation convenable d'un polygone generalise regulier dont tous les sommets sont situes sur un cercle centre en l'origine $\mathbf{0}$. On peut donc se ramener et on supposera dans la suite que $\mathbf{P}$ est de cette derniere forme.
3. Soit s la symetrie d'axe $(\mathbf{0}, z)$. Pour tout entier i que vaut sr^is^{-1} ?
4. Montrer (sans avoir a faire de calculs trop explicites) que $\mathbf{P}$ est invariant par s puis par tout le groupe dihedral d'ordre $2n$, $G = \langle s, r \rangle$; on commencera par remarquer que P est invariant par s, puis que l'ensemble des sommets est globalement invariant par s et qu'un cote est envoye sur un (autre) cote.
5. Soit $z_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ le nombre complexe representant P, quels sont les nombres complexes
$$z_2, \cdots, z_n, z_{n+1} = z_1$$
representant les autres sommes de $\mathbf{P}$?
6. Montrer que pour tout $i = 1, \cdots, n$ les cotes $[P_iP_{i+1}]$ sont de meme longueur.
7. Montrer que pour tout $i = 1, \cdots, n$, les angles (representes par des complexes de module 1) $P_i\widehat{P_{i+1}}P_{i+2}$ (on pose $P_{n+2} = P_2$) sont tous egaux.

Exercice 2. (sur les Polygones reguliers generalises)

1. Le logo suivant est le logo de la London Mathematical Society : qu'est ce qu'il represente geometriquement ? et en terme de groupes ?

2. Combien existe-t-il de (formes geometriques de) polygones generalises reguliers (croises ou non) a 10 cotes inscrits dans le cercle unite et dont un des sommets est le nombre complexe 1 ?.
3. Meme question pour 17 cotes ?
4. Pour un nombres quelconque n de cotes ?

Définition 1. *Soint $\{P_0, \cdots, P_n\}$ un ensemble fini de points du plan (qu'on identifiera au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$). On dit qu'un point P est constructible a la regle et au compas (ou simplement constructible) a partir des points $P_1, \cdots, P_n$ si il est a l'intersection de deux droites, deux cercles ou de une droite et un cercle tels que*

— *les droites passent par deux points distincts de $\{P_0, \cdots, P_n\}$,*
— *les cercles sont centres sur l'un des P_i et de rayon l'une des distance $d(P_j, P_k)$ pour $i, j, k \leqslant n$.*

On dit qu'un point P est constructible a la regle et au compas (ou simplement constructible) si il existe une suite de points $\{P_0, \cdots, P_n\}$ telle que

— *$P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$,*
— *Pour $i \geqslant 1$, P_{i+1} est constructible a partir de $\{P_0, \cdots, P_i\}$,*
— *P est constructible a partir de $\{P_0, \cdots, P_n\}$.*

Un nombre complexe $z = x + iy$ est dit constructible si le point $P = (x, y)$, l'est.

Exercice 3. Expliquer pourquoi les dessins ci-dessous fournit une construction a la regle et au compas du pentagone regulier . Pour cela, on pourra se reporter a l'exercice de la serie precedent qui montre que si

$$\omega_5 = \exp(2\pi i/5)$$

est la racine 5-ieme de l'unite la plus proche de 1 et de partie imaginaire positive $\Re e(\omega_5)$ est une racine du polynome

$$4X^2 + 2X - 1.$$

Exercice 4. Montrer que

— Si x et $x' \neq 0$ des reels, sont constructibles alors $x+x', x-x', xx', x/x'$ le sont.
— Si z et $z' \neq 0$ des complexes, sont constructibles alors $z + z', z - z', zz', z/z'$ le sont.
— Montrer que si b, c des nombres reels sont constructibles, les racines dans $\mathbb{C}$ du polynome

$$X^2 + bX + c$$

sont constructibles.

LONDON
MATHEMATICAL
SOCIETY
150 YEARS

Figure 1 – Logo de la ...

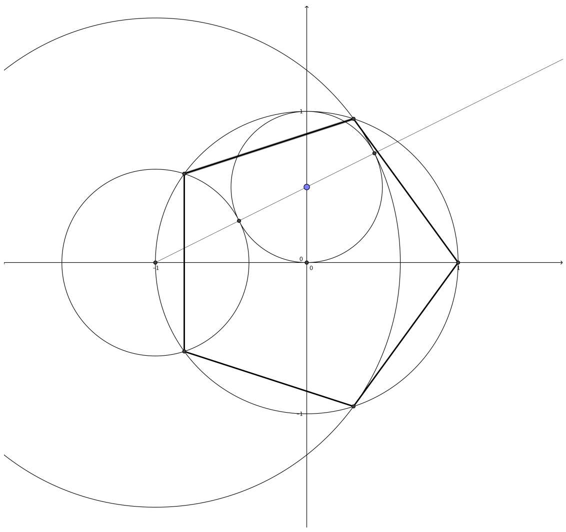

Figure 2 – Construction de Duerer

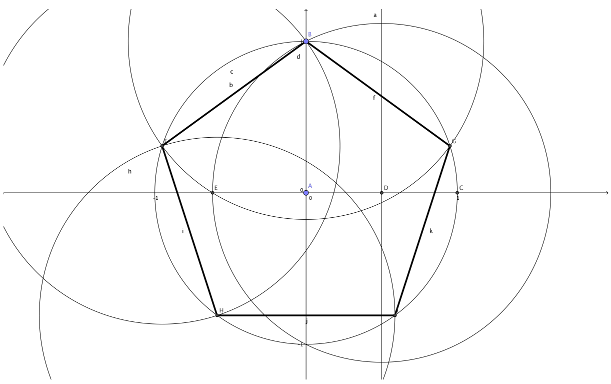

Figure 3 – Une autre Construction