Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 10 au 14 octobre 2016

Corrigé 4 du jeudi 13 octobre 2016

Exercice 1.

Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite bornée et désignons par E l'ensemble de ses points d'accumulation.

Montrons que

$$\sup E = \lim_{n\to\infty} \sup x_n.$$

Démonstration :

(1) Comme $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{n_j})_{j\geq 0} \subset (x_n)_{n\geq 0}$ convergente et donc il existe au moins un point d'accumulation. Ainsi $E \neq \varnothing$. De plus, comme $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est bornée, E l'est aussi.

(2) Posons $\alpha = \sup E$, $\beta = \lim_{n\to\infty}\sup x_n$. On rappelle que

$$\text{si } y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \dots\}, \text{ alors } \beta = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

On va montrer que $\beta \in E$:

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de y_n et du sup, il existe $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \geq n$ tel que

$$0 \leq y_n - x_{k_n} \leq \frac{1}{n}.$$

(b) On a $x_{k_n} = x_{k_n} - y_n + y_n$ et puisque

$$\lim_{n\to\infty}(x_{k_n} - y_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta,$$

on a bien

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \beta.$$

Ainsi $\beta \in E$ et donc $\beta \leq \alpha$.

Remarquons que la suite d'entiers $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ ainsi construite n'est pas nécessairement strictement croissante et donc que $\{x_{k_n}\}_{n=0}^{\infty}$ ne définit pas forcément une sous-suite de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Cependant, puisque $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, on peut en extraire une sous-suite de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers β.

(3) Soit $\lambda \in E$; il existe une sous-suite $(x_{n_j})_{j\geq 0} \subset (x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers λ, i.e. $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \lambda$.

Rappelant que $y_{n_j} = \sup\{x_{n_j}, x_{n_j+1}, x_{n_j+2}, \dots\}$, on a $x_{n_j} \leq y_{n_j}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ ainsi

$$\beta = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} \geq \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \lambda.$$

Vu le caractère arbitraire du choix de λ, on en déduit que

$$\beta \geq \alpha.$$

Les étapes (2) et (3) montrent que $\alpha = \beta$.

$\square$

Exercice 2.

La suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est donnée par

$$x_0 = 0, \qquad x_{\frac{q(q-1)}{2}+p} = \frac{p}{q},$$

pour $1 \leq p \leq q, \quad q = 1, 2, \dots.$

(1) En prenant successivement $q=1, p=1$ puis $q=2$ avec $p=1,2$, $q=3$ avec $p=1,2,3,\dots$ etc, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ s'écrit:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1,\ \dots.$$

(2) Points d'accumulation de la suite:

- Soit $\lambda \in \mathbb{Q}\cap]0,1]$. Alors, il existe $p,q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq q$ et $\lambda = \frac{p}{q}$. Si $k=1,2,3,\dots$, posons
$$m_k = \frac{kq(kq-1)}{2} + kp.$$
Par définition de la suite, nous obtenons
$$x_{m_k} = \frac{kp}{kq} = \lambda.$$
Ainsi, la sous-suite $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers λ ce qui prouve que λ est un point d'accumulation.

- Si on pose
$$m_q = \frac{q(q-1)}{2} + 1$$
où $q=1,2,\dots$, on obtient $x_{m_q} = \frac{1}{q}$ et la sous-suite $(x_{m_q})_{q=1}^{\infty}$ de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers $\lambda = 0$ ce qui montre que $\lambda = 0$ est un point d'accumulation.

Conclusion 1: L'ensemble $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est un ensemble de points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

- Soit $\lambda \in]0,1[$. Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, alors on a vu que λ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Si $\lambda \notin \mathbb{Q}$, alors par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe deux suites d'entiers $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ et $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ tels que $1 \leq p_k \leq q_k$ et $\lim_{k\to\infty} \dfrac{p_k}{q_k} = \lambda$. Posons
$$m_k = \frac{kq_k(kq_k-1)}{2} + kp_k, \quad k = 1,\dots,\infty.$$
On a donc
$$x_{m_k} = \frac{p_k}{q_k}.$$
La suite des entiers $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ ainsi construite n'est pas nécessairement strictement croissante, mais elle tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini. Ainsi, on peut extraire une sous-suite $(m_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ qui est strictement croissante et qui tend vers l'infini lorsque j tend vers l'infini. Ainsi donc, $(x_{m_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers λ puisque $x_{m_{k_j}} = \frac{p_{k_j}}{q_{k_j}}$, ce qui prouve que λ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Conclusion 2: L'ensemble des points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est donné par l'intervalle fermé $[0,1]$.

(3) injection de $\mathbb{Q}\cap]0,1[$ dans $\mathbb{N}$: pour $x \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$, il suffit de prendre le plus petit indice i de la suite tel que $x_i = x$.

Remarque : Si on considère l'ensemble
$$A = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\},$$
alors l'adhérence de A (= l'ensemble des points adhérents à l'ensemble A) est aussi l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 3.

On utilise encore une fois la formule de la "série géométrique": pour $0 < r$, on a

$$r^0 + r^1 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

La limite lorsque $n \to \infty$ existe si $0 < r < 1$ et vaut $\dfrac{1}{1-r}$.

1.) Soit $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ pour $k = 1, 2, \ldots$. On définit la suite (x_n) par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}.$$

Montrer que la suite x_n est de Cauchy.
La suite x_n est trivialement croissante. Montrons qu'elle est majorée. On a

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = 9\Big(\frac{1 - \frac{1}{10}^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} - 1\Big) \leq 9\Big(\frac{10}{9} - 1\Big) = 1.$$

La suite est donc convergente, donc de Cauchy.
On peut aussi le montrer directement. Pour $n, m > 0$, on a:

$$|x_n - x_{n+m}| = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^n} \sum_{k=1}^{m} \frac{9}{10^k} \leq 9 \frac{1}{10^n}.$$

Et donc, pour $\epsilon > 0$ donné on peut trouver N tq si $n \geq N$, $9\frac{1}{10^n} < \epsilon$.

2.) Soit $x \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe une suite de $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ telle que la suite x_n formée comme en 1.) converge vers x.
On suit l'indication et on partitionne $[0, 1[$ en 10 intervalles égaux: $[0, \frac{1}{10}[, [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}[, \ldots, [\frac{9}{10}, 1[$.
On choisit alors $a_1 = i$ si $x \in [\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}[$ (on a alors $i \leq 10x < (i + 1)$).
Il suffit de procéder de même pour $[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}[$ pour a_2, etc. . . .

3.) Montrer que l'expansion décimale d'un nombre n'est pas toujours unique. Il suffit de vérifier que $x = \frac{1}{2}$ admet les deux expansions 0.5 et 0.4999999.