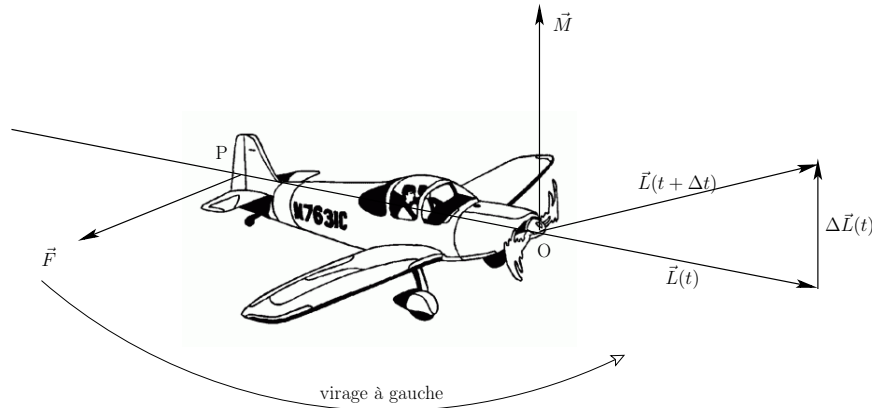


## Corrigé Série 10 : Gyroscope, rotation des solides

### Questions conceptuelles

- a) En vol horizontal, l'hélice a un moment cinétique  $\vec{L}$  dirigé dans le sens du mouvement de l'avion (voir figure). Pour tourner à gauche, le pilote imprime à l'avion un mouvement de rotation. En manœuvrant la dérive, il applique une force  $\vec{F}$  et celle-ci impose sur l'hélice un moment  $\vec{M} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$ , orienté vers le haut. D'après le théorème du moment cinétique  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ , on détermine  $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$ . Ceci implique que la variation du moment cinétique  $\Delta\vec{L}$  est colinéaire au moment exercé, et s'oriente vers le haut dans ce cas. Ainsi, si le pilote ne compense pas, l'avion aura tendance à monter lors d'un virage à gauche.



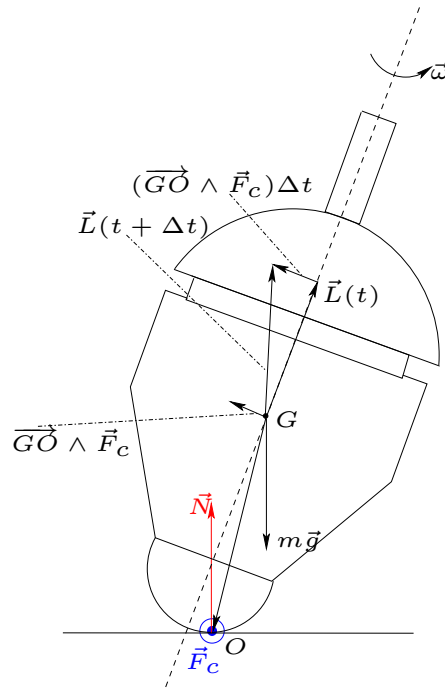
- b) Lorsque la toupie est penchée, elle roule sur le sol. Les frottements au point de contact  $O$  induisent une force  $\vec{F}_c$  qui s'oppose au mouvement de rotation (ralentissement de la rotation par dissipation d'énergie). La force  $\vec{F}_c$  est donc dans le plan du sol, colinéaire au mouvement de translation de la toupie.

L'évolution du moment cinétique ( $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ) est donnée par le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse  $G$  :

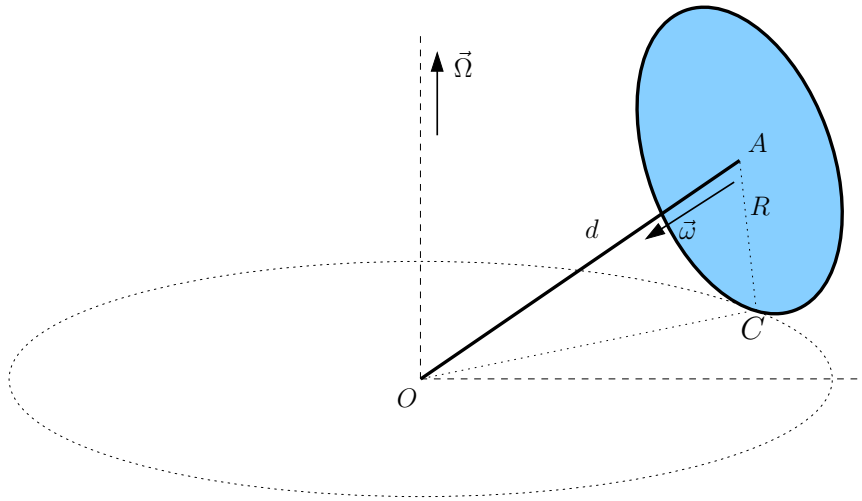
$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{F}_c + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{N}. \quad (1)$$

Le moment exercé par la pesanteur en  $G$  est nul car  $\overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$ .

- i) On observe que la variation du moment cinétique a une composante due au moment de la force de soutien  $\vec{N}$ . Ce moment est parallèle à  $\vec{F}_c$  et est responsable de la précession de la toupie : l'axe de rotation de la toupie va tourner autour de la direction de la force  $\vec{N}$ .
- ii) Une autre composante de la variation du moment cinétique est colinéaire au moment exercé par la force de frottement  $\vec{F}_c$ , et qui tend à aligner  $\vec{L}$  avec la verticale : la toupie se redresse (voir figure). En position verticale, la toupie n'a plus de mouvement de translation (le centre de masse est devenu immobile). Les frottements n'exercent plus aucun moment en dehors de l'axe : l'orientation de  $\vec{L}$  ne varie plus : la position est stable.



## 1 Roue sur axe incliné



- a) En considérant l'axe  $OA$  comme un solide de vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ , la vitesse du point  $A$  peut s'exprimer à partir de la vitesse du point  $O$  comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}, \quad (2)$$

où l'on a utilisé le fait que le point  $O$  est fixe, et a donc une vitesse nulle.

La rotation propre de la roue se fait autour de l'axe  $OA$  avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  parallèle au vecteur  $\overrightarrow{AO}$ . Par contre la roue est également entraînée par le mouvement de rotation de son axe, donné par le vecteur  $\vec{\Omega}$  vertical. La roue est ainsi un solide de vitesse angulaire totale  $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$ . Comme le roulement est sans glissement, le point  $C$  de la roue en contact avec le sol a une vitesse nulle. La vitesse du centre  $A$  de la roue peut s'exprimer à partir de la vitesse de son point  $C$  comme

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA} = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \overrightarrow{CA}. \quad (3)$$

En égalisant les expressions (2) et (3) pour  $\vec{v}_A$ , on obtient

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{OA} = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{CA} = \vec{\Omega} \wedge \vec{CA} + \vec{\omega} \wedge \vec{CA} \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge (\vec{OA} - \vec{CA}) = \vec{\omega} \wedge \vec{CA},$$

c'est-à-dire

$$\vec{\omega} \wedge \vec{CA} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OC}. \quad (4)$$

Les vecteurs  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{OC}$  sont perpendiculaires, de même que les vecteurs  $\vec{\omega}$  et  $\vec{CA}$ . Comme tous sont dans un même plan vertical contenant l'axe de la roue, les produits vectoriels sont dirigés selon un axe horizontal  $\hat{e}_\phi$  perpendiculaire à ce plan. L'expression (4) devient ainsi

$$\omega R \hat{e}_\phi = \Omega \sqrt{d^2 + R^2} \hat{e}_\phi,$$

où l'on a utilisé le fait que le vecteur  $\vec{OC}$  est de longueur  $\sqrt{d^2 + R^2}$  et le vecteur  $\vec{CA}$  de longueur  $R$ . La vitesse angulaire  $\omega$  vaut donc

$$\omega = \Omega \frac{\sqrt{d^2 + R^2}}{R} = \Omega \sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}}. \quad (5)$$

L'expression (4) implique que le sens du vecteur  $\vec{\omega}$  pointe de  $A$  vers  $O$ .

- b) Le plan tangent commun à la roue et au sol au point  $C$  est le sol lui-même. La vitesse angulaire de roulement  $\omega_{\parallel}$  de la roue est donc la composante parallèle au sol du vecteur  $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$ . Comme le vecteur  $\vec{\Omega}$  est vertical, on a

$$\omega_{\parallel} = \omega \cos(\vec{OC}, \vec{OA}) = \omega \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}} = \Omega \frac{d}{R}.$$

La vitesse angulaire de pivotement  $\omega_{\perp}$  de la roue est la composante perpendiculaire au sol du vecteur  $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$ , donc

$$\omega_{\perp} = \Omega - \omega \sin(\vec{OC}, \vec{OA}) = \Omega - \omega \frac{R}{\sqrt{d^2 + R^2}} = \Omega - \Omega = 0.$$

Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue,

$$\omega_{\text{tot}} = \vec{\Omega} + \vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel} + \vec{\omega}_{\perp},$$

est donc horizontal.

**Note 1 :** On peut aussi considérer la roue et l'axe comme un seul solide de vitesse angulaire  $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$ . Dans ce cas, on doit remplacer  $\vec{\Omega}$  par  $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$  dans l'équation 2, ce qui ne change rien puisque  $\vec{\omega}$  est anti-parallèle au vecteur  $\vec{OA}$ . Par contre, on peut réaliser que ce solide a deux points de vitesse nulle,  $O$  et  $C$ . L'axe instantané de rotation est donc la droite  $OC$ , ce qui signifie que  $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$  doit être horizontal.

**Note 2 :** Il est possible de résoudre cet exercice de façon totalement vectorielle. En effet, en multipliant l'équation (4) par le vecteur  $\vec{CA}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \vec{CA} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{CA}) &= \vec{CA} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OC}) \\ (\vec{CA} \cdot \vec{CA}) \vec{\omega} - (\vec{CA} \cdot \vec{\omega}) \vec{CA} &= (\vec{CA} \cdot \vec{OC}) \vec{\Omega} - (\vec{CA} \cdot \vec{\Omega}) \vec{OC} \\ (R^2) \vec{\omega} - (0) \vec{CA} &= (-R^2) \vec{\Omega} - (\Omega R \cos(\vec{OC}, \vec{OA})) \vec{OC} \\ R^2 \vec{\omega} &= -R^2 \vec{\Omega} - \Omega R d \hat{e}_\phi, \end{aligned}$$

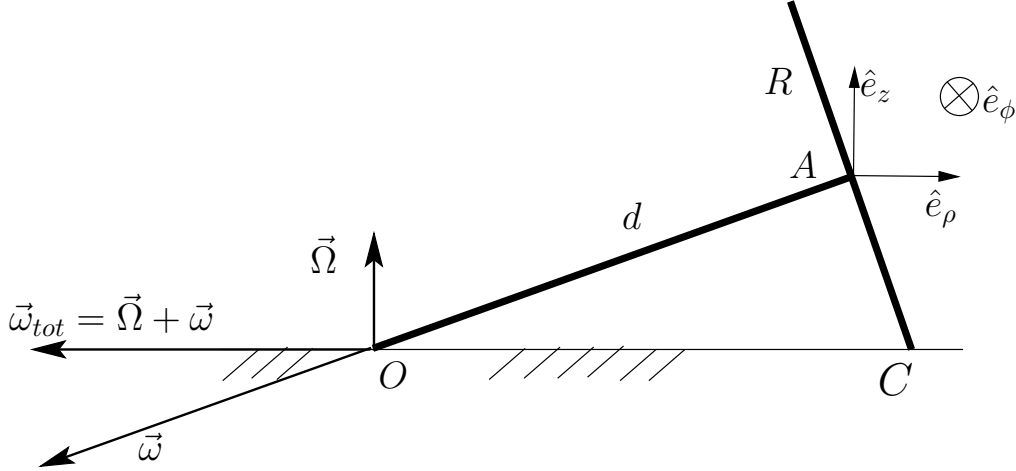
où  $\hat{e}_\rho$  est un vecteur unitaire dans la direction de  $\overrightarrow{OC}$ . La vitesse angulaire de rotation propre de la roue vaut ainsi

$$\vec{\omega} = -\vec{\Omega} - \Omega \frac{d}{R} \hat{e}_\rho$$

et sa norme est bien donnée par l'équation (5). Le vecteur vitesse angulaire totale de la roue vaut

$$\vec{\omega}_{\text{tot}} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} = -\Omega \frac{d}{R} \hat{e}_\rho,$$

d'où il est évident que la vitesse angulaire de pivotement de la roue (composante verticale de  $\vec{\omega}_{\text{tot}}$ ) est nulle et que la vitesse de roulement (composante horizontale) a une norme de  $\Omega d/R$ .



## 2 Equilibre stable

Pour des raisons de symétrie, le centre de masse  $G$  du solide se trouvera quelque part sur l'axe passant par le centre de la demi-boule et le sommet du cône, soit à l'intérieur du cône soit à l'intérieur de la demi-boule. Quand le solide est en position verticale, le moment de la force de pesanteur  $\vec{P}$  par rapport à l'axe instantané de rotation (qui passe par le point de contact  $C$ ) sera nul :

$$\vec{M}_C = \vec{CG} \wedge \vec{P} = \vec{0}. \quad (6)$$

On obtient ce résultat quelque soit la position du centre de masse sur l'axe du solide. La position verticale est donc une position d'équilibre (voir figure). Si le solide sort de cette position d'équilibre, le moment  $\vec{M}_C$  sera orienté dans des directions opposées selon la position du centre de masse :

- Si le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur de la demi-boule,  $\vec{CG} \wedge \vec{P}$  "sort" du plan du dessin et le moment  $\vec{M}_C$  redresse le solide.
- Si le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur du cône,  $\vec{CG} \wedge \vec{P}$  "rentre" dans le plan du dessin et le moment  $\vec{M}_C$  fait tomber le solide.

Dans le cas limite où le centre de masse se trouverait en  $O$ , donc sur la surface de séparation entre le cône et la demi-boule,  $\vec{M}_C$  est toujours nul. L'équilibre sera donc stable si le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur de la demi-boule ou en  $O$ .

On a déjà remarqué que pour des raisons de symétrie, le centre de masse se trouvera quelque part sur l'axe vertical  $z$ . On peut donc se limiter à calculer la composante de  $\vec{r}_G$  selon  $z$  :

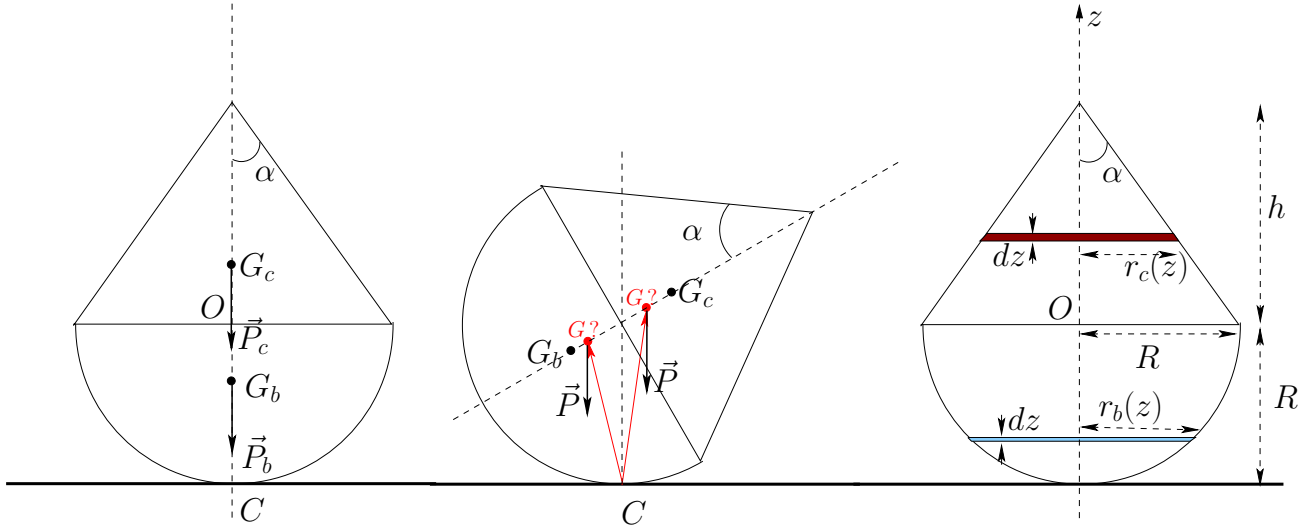
$$z_G = \frac{1}{M} \int_{\text{solide}} z \, dm = \frac{1}{M_c + M_b} \left[ \int_{\text{cône}} z \, dm + \int_{\text{demi-b.}} z \, dm \right] = \frac{1}{M_c + M_b} [M_c z_{G_c} + M_b z_{G_b}] \quad (7)$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{1}{M_c + M_b} \left[ \underbrace{\rho \frac{\pi h R^2}{3}}_{M_c} \frac{h}{4} - \underbrace{\rho \frac{2\pi R^3}{3}}_{M_b} \frac{3R}{8} \right] = \frac{1}{M_c + M_b} \left[ \frac{\pi R^4 \rho}{12 \tan^2 \alpha} - \frac{\pi R^4 \rho}{4} \right], \quad (8)$$

puisque  $\tan \alpha = \frac{R}{h}$ .

Pour que le centre de masse du solide se trouve à l'intérieur de la demi-boule ou en  $O$ , il faut que  $z_G \leq 0$  et donc que la partie entre parenthèse dans l'équation (8) soit négative ou nulle :

$$\frac{\pi R^4 \rho}{12 \tan^2 \alpha} - \frac{\pi R^4 \rho}{4} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{12 \tan^2 \alpha} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \tan^2 \alpha \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \geq 30^\circ. \quad (9)$$



### 3 Centres de masse du problème 2

Nous allons démontrer rigoureusement le calcul des centres de masse du cône et de la demi-boule du problème 2. Le centre de masse d'un solide est donné par

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \int_{\text{volume}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3 \vec{r}.$$

Dans notre cas, les solides sont homogènes donc  $\rho(\vec{r}) = \rho$ . De plus, que ce soit pour la demi-boule ou le cône, l'intégrale sur le volume se réduit à une intégrale selon  $z$  de disques d'épaisseur infinitésimale  $dz$  et de surface  $\pi r^2(z)$  (voir figure de droite ci-dessus). Donc :

$$\begin{aligned} z_{G_c} &= \frac{1}{M_c} \int_0^h \pi \rho r_c^2(z) z dz \text{ avec } r_c(z) = R \left(1 - \frac{z}{h}\right) \\ z_{G_b} &= \frac{1}{M_b} \int_{-R}^0 \pi \rho r_b^2(z) z dz \text{ avec } r_b(z) = \sqrt{R^2 - z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{G_c} &= \frac{\pi\rho}{M_c} \int_0^h z \left[ R \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \right]^2 dz = \frac{\pi\rho R^2}{M_c} \int_0^h \left( z - \frac{2}{h} z^2 + \frac{z^3}{h^2} \right) dz \\
\Rightarrow \quad z_{G_c} &= \frac{\pi\rho R^2}{M_c} \left[ \frac{1}{2} z^2 - \frac{2}{3h} z^3 + \frac{1}{4h^2} z^4 \right]_0^h = \frac{\pi\rho R^2}{M_c} h^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{\pi\rho R^2 h^2}{12M_c} = \frac{\pi\rho R^2 h^2}{12} \frac{1}{M_c} = \frac{\pi\rho R^2 h^2}{12} \frac{3}{\pi h R^2 \rho} = \frac{h}{4}.
\end{aligned} \tag{10}$$

De même, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
z_{G_b} &= \frac{\pi\rho}{M_b} \int_{-R}^0 z \left( \sqrt{R^2 - z^2} \right)^2 dz = \frac{\pi\rho}{M_b} \int_{-R}^0 (R^2 z - z^3) dz \\
\Rightarrow \quad z_{G_b} &= \frac{\pi\rho}{M_b} \left[ \frac{R^2}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_{-R}^0 = \frac{\pi\rho}{M_b} \left( 0 - \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \right) \\
&= -\frac{\pi\rho}{M_b} \frac{R^4}{4} = -\frac{\pi\rho R^4}{4} \frac{1}{M_b} = -\frac{\pi\rho R^4}{4} \frac{3}{\rho 2\pi R^3} = -\frac{3}{8} R.
\end{aligned} \tag{11}$$