ANALYSE I et II
Math. et Phys. 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. J. Rappaz

Mardi 17 janvier 2012, 8H15-11H15

Propédeutique 1

Exercice 1 (10 points).

Les suites de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ définies ci-dessous convergent-elles uniformément et/ou ponctuellement vers une fonction?
Si oui, donnez la limite avec justification.
Si non, justifiez!

1.) $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(nx)$;

2.) $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f_n(0) = 0; \end{cases}$

3.) $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f_n(x) = \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$

Exercice 2 (10 points).

Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\ln\big(\cos^2(x)\big) + x^2}{x^4}$.

Exercice 3 (10 points).

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose **uniformément continue** sur I.

1.) Donner la définition de l'uniforme continuité de f sur I avec des ϵ et des δ.

2.) Démontrer à partir de cette définition que si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset I$ est une suite convergente vers $a \in \mathbb{R}$, alors la suite $(f(a_n))_{n=0}^{\infty}$ est aussi convergente.

3.) Démontrer que si $I =]a, b[$ avec $a < b$, alors f peut être prolongée en une fonction continue définie sur $[a, b]$.

4.) Démontrer que si $I =]0, 1[$ et $f(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$, alors f est bien uniformément continue sur I. Comment peut-on définir $f(0)$ et $f(1)$ en prolongeant continûment f en zéro et en un?

Tourner la page, s.v.pl.

Exercice 4 (10 points).

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ une **suite** numérique **bornée**.

1.) Donner la définition de $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

2.) Donner la définition de $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

3.) Si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ est définie par:

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{1+n}, \qquad a_{2n+1} = \ln\Big(1 + \frac{1}{1+n}\Big), \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

calculer $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en utilisant les définitions 1.) et 2.).

Exercice 5 (10 points).

Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.

1.) Démontrer que si $\lim_{\substack{x\to a\\>}} f'(x)$ existe, alors il existe une dérivée de f à droite de a notée $f'_d(a)$ et on a

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a\\>}} f'(x).$$

2.) Que penser de la réciproque, c'est-à-dire: si $f'_d(a)$ existe, alors $\lim_{\substack{x\to a\\>}} f'(x)$ existe et on a $f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a\\>}} f'(x)$?

(Si vous pensez l'affirmation correcte, il faut la démontrer; si vous la pensez fausse, il faut donner un contre-exemple!)

Exercice 6 (10 points).

Montrer le résultat suivant:

Théorème: Soit $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite croissante et $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite décroissante qui sont telles que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Alors, on a:

1.) $x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots x_n \le y_n \le y_{n-1} \le y_{n-2} \le \ldots \le y_1 \le y_0$.

2.) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.