Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 14 au 18 novembre 2016

Série 9 du mardi 15 novembre 2016

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Vérifier que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

L'existence de cette dernière limite entraîne-t-elle celle de $f'(a)$?

Exercice 2 (* A rendre) .

On considère $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 \neq x \in [-1,1],\ f(0) = 0.$$

Pour quel entier positif m a-t-on $f \in C^m([-1,1])$?

Exercice 3.

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1([a,b])$, deux fois dérivable sur $]a,b[$.
Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2.$$

Exercice 4.

Montrer que si la dérivée d'une fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ n'est pas bornée alors f n'est pas Lipschitz.
En déduire que la fonction $x \sin \frac{1}{x}$ sur $]0,1[$ n'est pas Lipschitz.

Indication: Montrer que si $|f'(x)| > K$, alors il existe $y \in]0,1[$ tq $|f(x) - f(y)| > K|x-y|$.