29 novembre 2012

Test

Chacune des questions 1 à 9 est à choix multiple. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.
Pour chacune des questions à choix multiple, on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 point si la question reste sans réponse, -1 point si la réponse est fausse.
La question 10 (définitions) vaut 4 points (2 points pour chaque définition).
La question 11 (démonstration) vaut 4 points.

Total possible : 35 points

Exercice 1. *On considère l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire* $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ *définie par*

$$\phi(x,y,z,t) = (x+y+2z+3t\,,\ y+t\,,\ x+y+3t\,,\ 2x+3y+2z+7t\,,\ x+2y+2z+4t)\,.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *fixés. Est-ce que* $(0, a, b, b+1, 5)$ *appartient à* $\mathrm{Im}\,(\phi)$ *?*

(A) *Oui si* $a = 5$ *et* $b = 0$.
(B) *Oui si* $a = 1$ *et* $b = -2$.
(C) *Oui si* $a = 5$ *et tout* b.
(D) *Non pour tout* a *et pour tout* b.

Exercice 2. *Soit* $\mathbb{R}[t]$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des polynômes en* t *à coefficients dans* $\mathbb{R}$*. On considère l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire* $\phi : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t]$ *définie par* $\phi(f(t)) = f'(t) - (c^2+1)f(t)$*, où* $c \in \mathbb{R}$ *est fixé et où* $f'(t)$ *désigne la dérivée de* $f(t)$*. Quelle est la dimension de* $\mathrm{Ker}\,(\phi)$ *?*

(A) $\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) = 0$.
(B) $\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) = 1$.
(C) $\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) = \infty$.
(D) *Cela dépend de* c.

Exercice 3. *On considère l'application* $\mathbb{F}_3$*-linéaire* $\alpha : (\mathbb{F}_3)^3 \longrightarrow (\mathbb{F}_3)^3$ *définie par*

$$\alpha(x,y,z) = (x, x+2y, y+z)\,.$$

On considère la base canonique $E = (e_1, e_2, e_3)$ *de* $(\mathbb{F}_3)^3$ *et la base* $F = (f_1, f_2, f_3)$ *où* $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 + e_3$*. Laquelle des matrices suivantes est la matrice de* α *par rapport à la base* F *?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *Soit* K *un corps et soit* V *un* K*-espace vectoriel de dimension finie, avec une base* $F = (f_1, \ldots, f_n)$*. On suppose que* $V = W \oplus U$*, où* W *et* U *sont des sous-espaces vectoriels de* V*, distincts de* V *tout entier. Soit* $\pi : V \to V$ *la projection sur* W *le long de* U *(définie par* $\pi(w+u) = w$, $\forall\, w \in W$ *et* $\forall\, u \in U$*). Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(A) *On peut extraire de* F *une partie qui est une base de* W.
(B) *On peut extraire de* $\pi(F)$ *une partie qui est une base de* W.
(C) $\pi(F)$ *est une partie libre de* W.
(D) $F \cap W$ *est une partie génératrice de* W.

SUITE AU VERSO

Exercice 5. *Soit* $\mathbb{C}[t]$ *l'ensemble des polynômes en* t *à coefficients dans* $\mathbb{C}$.
Soit $V = \{f(t) \in \mathbb{C}[t] \mid \deg(f(t)) \leq 4\}$. *Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(*A*) V *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension 4.*
(*B*) V *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension 4.*
(*C*) V *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* ∞.
(*D*) V *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension 10.*

Exercice 6. *Soit* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de toutes les fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *définies par* $f_1(x) = \sin^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = 3$. *Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(*A*) $\{f_1, f_2\}$ *est une partie liée.*
(*B*) $\{f_1, f_2, f_3\}$ *est une partie libre.*
(*C*) f_3 *est combinaison linéaire de* f_1 *et* f_2.
(*D*) $f_2 \notin \mathrm{Vect}\,(f_1, f_3)$.

Exercice 7. *Soit* $v_1 = (2, 3-7i, i)$, $v_2 = (2i+2, 3i-1, i-1)$, $v_3 = (1, -4, i/2)$ *trois vecteurs dans le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}^3$. *Quelle est la dimension de* $\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)$ *?*

(*A*) $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 1$. (*B*) $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 2$.
(*C*) $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 3$. (*D*) $\dim \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3) = 4$.

Exercice 8. *Soit* $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire définie sur la base canonique* (e_1, e_2, e_3) *par* $\alpha(e_1) = e_2$, $\alpha(e_2) = e_3$, $\alpha(e_3) = 0$. *Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(*A*) *La somme* $\mathrm{Ker}\,(\alpha) + \mathrm{Im}\,(\alpha)$ *est directe.*
(*B*) $\mathrm{Ker}\,(\alpha) \subset \mathrm{Im}\,(\alpha)$.
(*C*) $\dim \mathrm{Ker}\,(\alpha) = 2$.
(*D*) $\dim \mathrm{Im}\,(\alpha \circ \alpha) + \dim \mathrm{Ker}\,(\alpha) = 3$.

Exercice 9. *Soit* K *un corps. On considère l'application* K*-linéaire* $\phi : M_4(K) \longrightarrow K^3$ *définie par*

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d, b+c, a)\,, \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_4(K)\,.$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

(*A*) *L'image de* ϕ *est de dimension 2.*
(*B*) *Le rang de* ϕ *vaut 1 de plus que la dimension de* $\mathrm{Ker}\,(\phi)$.
(*C*) ϕ *est surjective.*
(*D*) ϕ *est injective.*

Exercice 10. *Soit* K *un corps. Répondez de manière précise à chacune des questions suivantes.*

a) Qu'est-ce qu'une partie libre dans un K*-espace vectoriel* V *?*

b) Qu'est-ce que le sous-espace engendré par deux vecteurs v_1 *et* v_2 *dans un* K*-espace vectoriel* V *?*

Exercice 11. *Soit* V *un* K*-espace vectoriel (où* K *est un corps). On suppose que* V *se décompose en somme directe* $V = U \oplus W$ *de deux sous-espaces vectoriels* U *et* W. *Soit* $\{u_1, \ldots, u_p\}$ *une base de* U *et soit* $\{w_1, \ldots, w_q\}$ *une base de* W. *Démontrer que* $\{u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q\}$ *est une base de* V. *Justifiez votre raisonnement et votre démarche.*

(On demande une démonstration directe, sans utiliser le théorème des dimensions.)