mai 2015

Test

Chacune des questions 1 à 9 est à choix multiple. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.
Pour chacune des questions à choix multiple, on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 point si la question reste sans réponse, -1 point si la réponse est fausse.
La question 10 (définitions) vaut 4 points (2 points pour chaque définition).
La question 11 (démonstration) vaut 4 points (2 points pour chaque partie).

Total possible : 35 points.

Temps pour faire le test : 2 heures.

Problème 1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ a & -a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$*, où* $a \in \mathbb{R}$ *est fixé. Que vaut son polynôme minimal* $m_A(t)$ *?*

(A) $m_A(t) = t(t-2)^3$ *si* $a = 1$.

(B) $m_A(t) = (t-2)^2$ *si* $a = 0$.

(C) $m_A(t) = t^2(t-2)^2$ *si* $a = 0$.

(D) $m_A(t) = t(t-2)^2$ *si* $a = 2$.

Problème 2. *Soit* V *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de toutes les matrices* 2×2 *triangulaires supérieures, à coefficients réels. Si* $A \in V$*, on désigne par* A_{12} *le coefficient non diagonal de* A *(coefficient à la position* $(1,2)$*). Pour* $A, B \in V$*, on définit une forme bilinéaire symétrique sur* V *par*

$$\beta(A,B) = (AB)_{12} + (BA)_{12}\,.$$

On admet que β *est bien une forme bilinéaire symétrique. Quelle est la signature de* β *?*

(A) $(1,0)$.

(B) $(1,1)$.

(C) $(2,1)$.

(D) $(3,0)$.

Problème 3. *Soit* $\mathbb{F}_5$ *le corps à 5 éléments et soit* $E = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $V = (\mathbb{F}_5)^3$*. Soit* $F = (f_1, f_2, f_3)$ *la base de* V *constituée de* $f_1 = e_1 + e_2$*,* $f_2 = e_2 + e_3$*,* $f_3 = e_3$ *et soit* $F^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ *la base duale de* F *(base de l'espace dual* V^**). Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(A) $\psi_1(e_1) = 0.$

(B) $\psi_2(e_1) = 2.$

(C) $\psi_3(e_1) = 1.$

(D) $\psi_1(e_1) = 4.$

Problème 4. *On considère l'espace hermitien* $\mathbb{C}^4$ *avec produit scalaire standard. Soit* $v = (0, 0, 0, 1)$ *et soit* $W = \mathrm{Vect}\big((1, i, 1, i)\,,\,(0, 2, 0, 2)\big)$*. Lequel des vecteurs suivants est la projection orthogonale de* v *sur* W *?*

(A) $(0\,,\,1\,,\,0\,,\,1).$

(B) $(\frac{i}{10}\,,\,\frac{1}{5}\,,\,\frac{i}{10}\,,\,\frac{1}{5}).$

(C) $(0\,,\,\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}).$

(D) $(\frac{i}{2}\,,\,0\,,\,\frac{i}{2}\,,\,0).$

Problème 5. *On considère l'espace hermitien* $\mathbb{C}^4$ *et la transformation linéaire* $\alpha : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ *dont la matrice, par rapport à la base canonique, est* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4i & 0 \\ 0 & 4i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$*. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(A) *A est diagonalisable, mais ses espaces propres ne sont pas orthogonaux.*

(B) *A est hermitienne, donc unitairement diagonalisable.*

(C) *A n'est pas hermitienne, mais elle est néanmoins unitairement diagonalisable.*

(D) *A n'est pas unitairement diagonalisable, car elle n'est pas hermitienne.*

Problème 6. *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= 7x_1(t) - 6x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 9x_1(t) - 8x_2(t) \end{cases}$$

avec conditions initiales $x_1(0) = 1$ *et* $x_2(0) = 1$. *Que vaut la fonction* $x_2(t)$ *?*

(A) $x_2(t) = e^t + 2e^{-2t}$.

(B) $x_2(t) = e^t - 3e^{2t}$.

(C) $x_2(t) = e^{2t}$.

(D) $x_2(t) = e^t$.

Problème 7. *On considère la matrice réelle* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Quelle est la multiplicité géométrique de la valeur propre 3 ?*

(A) *1.*

(B) *2.*

(C) *3.*

(D) *4.*

Problème 8. *Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(A) *Toute matrice complexe non nilpotente est diagonalisable.*

(B) *Il existe une matrice complexe qui ne peut pas s'écrire comme la somme d'une matrice diagonalisable* D *et d'une matrice nilpotente* N *telles que* $DN = ND$.

(C) *Il existe une matrice complexe qui ne peut pas s'écrire comme la somme d'une matrice diagonale* D *et d'une matrice nilpotente* N *telles que* $DN = ND$.

(D) *Toute matrice complexe est le produit d'une matrice diagonale* D *et d'une matrice nilpotente* N *telles que* $DN = ND$.

Problème 9. *Soit α une transformation linéaire unitaire d'un espace hermitien V de dimension ≥ 2. On suppose que $\alpha \neq \mathrm{id}$. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?*

(A) *Il existe $v_1, v_2 \in V$ tels que $||\alpha(v_1 + v_2)||^2 = ||v_1||^2 + ||v_2||^2$.*

(B) *Pour tous $v_1, v_2 \in V$, $||\alpha(v_1 + v_2)||^2 = ||v_1||^2 + ||v_2||^2$.*

(C) *Etant donné $v \in V$, l'équation $||\alpha(v)|| - ||v|| = 0$ est correcte si et seulement si $v = 0$.*

(D) *Pour toute valeur propre λ de α et pour tout vecteur v dans l'espace propre E_λ, $||\alpha(v)|| - \lambda||v|| = 0$.*

Problème 10. *Donnez une réponse précise à chacune des questions suivantes.*

a) *Qu'est-ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?*

b) *Qu'est-ce que les valeurs singulières d'une matrice $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$?*

Problème 11. *Soit V et W deux espaces euclidiens. Soit $\alpha : V \to W$ une application linéaire et soit $\alpha^* : W \to V$ son adjointe.*

a) *Montrer que* $\mathrm{Im}\,(\alpha)^\perp = \mathrm{Ker}\,(\alpha^*)$.

b) *Montrer que $\alpha^*\alpha$ est auto-adjointe.*

(On demande des démonstrations claires. Justifiez vos raisonnements.)
