EPFL
Géométrie, MATH-120

Examen Blanc

Consignes :

- Les notes de cours et les notes d'exercices ne sont pas autorisées
- Le formulaire standard est autorisé.
- Une calculette simple (sans display graphique) est autorisée.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que le groupe des translations $T(\mathbb{R}^2)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$.
2. Quelle est la forme générale d'une matrice orthogonale non-spéciale.

Exercice 2. Soit G un groupe fini d'ordre un nombre premier p.

1. Quels sont les sous-groupes de G ?
2. Montrer que G est un groupe cyclique.

Exercice 3. Soit D la droite d'équation

$$2x + 3y = 1.$$

1. Soit s_D la symétrie orthogonale d'axe D. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose
$$s_D(x, y) = (X, Y).$$
Calculer (X, Y) en fonction de (x, y).
2. Exprimer s_D sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes.
3. Quelle est la nature de la transformation
$$\varphi(x, y) = (\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y, -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y)?$$
4. Quelle est la nature de la transformation $\varphi \circ s_D$.

Exercice 4. Soit $\omega_3 = e^{i2\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et T_0 le triangle équilatéral $T_0 = [1, \omega_3, \omega_3^2]$.

1. Soit r la rotation de centre $(1, 1)$ et d'angle i (ou $\pi/2$ si on préfère). Exprimer r sous la forme d'une transformation sur les nombres complexes.
2. Soit T le transforme de T_0 par r. Donner les coordonnées des sommets de T.
3. Donner (sous forme complexe ou vectorielle) un élément du groupe des isométries de T qui n'est pas une rotation. (le groupe des isometries du triangle T est l'ensemble des isometries ϕ telles que $\phi(T) = T$ en tant qu'ensemble, pas forcement en fixant chaque point)