EPFL Automne 2017
Geometrie, MATH-120

Série 2

Exercice 1 (Resultats d'unicite)**.** Soit $(G, \star)$ un groupe.

- (Unicite de l'element neutre) Montrer que si $e'_G \in G$ est tel que pour au moins un element $g \in G$ on a $g \star e'_G = g$ alors $e'_G = e_G$.
- (Unicite de l'inverse) Montrer que si h verifie $g \star h = e_G$ alors $h = g^{-1}$.
- Que vaut $(g^{-1})^{-1}$?
- Calculer $(g \star h)^{-1}$ en fonction de g^{-1} et h^{-1}.

Exercice 2 (Groupe additif de l'horloge)**.** Soit $\mathbb{N}_{<N} := \{0, 1, \cdots, N-1\}$; on défini sur cet ensemble la loi

$$a \oplus b = \text{ reste de la division de } a + b \text{ par } N.$$

- Montrer que $\mathbb{N}_{<N}$ forme un groupe commutatif d'element neutre 0 (on pourra utiliser le fait que l'addition est associative sur $\mathbb{Z}$). En particulier calculer les inverses.
- Ecrire pour $N = 5$, la table de multiplication de ce groupe.

On note ce groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Exercice 3 (Groupe de multiplicatif de l'horloge)**.** Soit $N = 12$; on considere l'ensemble

$$\mathbb{N}^{\star}_{<12} = \{0 \leqslant n < 12,\ (n, 12) = 1\},$$

(ie. les entiers positifs ou nuls < 12 et premiers avec 12) on pose

$$a \otimes b = \text{ reste de la division de } a \times b \text{ par } 12.$$

- Montrer que muni de cette loi, $\mathbb{N}^{\star}_{<12}$ est un groupe commutatif d'element neutre 1 (on pourra utiliser le fait que la multiplication est associative dans $\mathbb{Z}$).
- Ecrire la table de multiplication de ce groupe.

Remarque. Plus generalement pour $N \geqslant 1$ on pose

$$\mathbb{N}^{\times}_{<N} = \{1 \leqslant a \leqslant N-1,\ (a, N) = 1\};$$

pour a, b dans cet ensemble, on pose

$$a \otimes b = \text{ reste de la division de } a \times b \text{ par N.}$$

On peut montrer qu'equipe de cette loi, $\mathbb{N}^{\times}_{<N}$ est un groupe commutatif d'element neutre 1 (pour obtenir l'inverse il faut utiliser le fait que $(n, N) = 1$ a travers l'identite de Bezout) On note ce groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$.

Exercice 4. Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble

$$E_n = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

On note Id l'identite de E_n. Pour decrire les elements de $\mathfrak{S}_n$ on utilise la notation suivante : $(1, 2)$ designe la permutation

$$(1, 2) : \ 1 \mapsto 2, \ 2 \mapsto 1, \ 3 \mapsto 3$$

$(1, 2, 3)$ designe la permutation

$$(1, 2, 3) : \ 1 \mapsto 2, \ 2 \mapsto 3, \ 3 \mapsto 1.$$

et on defini de meme $(1, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(1, n, 2, 5)$ ... Bien entendu pour que la notation soit bien definie il faut que tous les entiers apparaissant dans les parentheses soient distincts. Une telle permutation s'appelle un cycle ; soit $(m_1, \cdots, m_k)$ un cycle (les $m_1, \cdots, m_k$ sont distincts) ; l'entier $k \geqslant 2$ est la longueur du cycle et le sous-ensemble $\{m_1, \cdots, m_k\} \subset E_n$ s'appelle le support du cycle. On peut montrer que toute permutation s'ecrit comme produit de cycles a supports disjoints et que cette decomposition est essentiellement unique.

— On considere le cas $n = 3$. Montrer que

$$\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{Id}_3, \ (1, 2), \ (1, 3), \ (2, 3), \ (1, 2, 3), \ (1, 3, 2)\}$$

— Ecrire la table de multiplication de ce groupe.

— Ce groupe est-t-il commutatif ?

— Montrer que pour $n \geqslant 4$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est pas commutatif.

Définition 1. *Un sous-groupe $H \subset G$ d'un groupe $(G, \star)$ est un sous-ensemble de G "stable par rapport a la structure de groupe de G" : ie. qui verifie*

1. $e_G \in H$,
2. $\forall h, h' \in H, \ h \star h' \in H$,
3. $\forall h \in H, \ h^{-1} \in H$.

Alors $(H, \star_{|H \times H})$ (muni de la loi de composition $\star$ restreinte a $H \times H$ et de l'element neutre e_G) forme un groupe.

Exercice 5. On considere les sous-ensembles des matrices inversibles

$$U \subset B \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

avec

$$U = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ a, b, d \in \mathbb{R}, \ ad \neq 0\}$$

1. Montrer que U et B sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. Ces groupes sont-t-ils abeliens ?

Exercice 6. On considere le groupe additif des entiers relatifs $(\mathbb{Z}, +)$.

1. Montrer que pour $N \in \mathbb{Z}$,

$$N\mathbb{Z} = \{Nn,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

   l'ensemble des multiples de N est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ (que vaut ce sous-groupe pour $N = 0$?).
2. On va montrer la reciproque : tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $N\mathbb{Z}$. Soit $H \subset \mathbb{Z}$ un sous-groupe ; on considere $0 < N \in H$ le plus petit entier strictement positif contenu dans H . Que ce passe-t-il si N n'existe pas ?
3. On suppose que N existe. Soit $m \in H$, montrer que $r \geqslant 0$ le reste de la division euclidienne de m par N appartient a H.
4. En deduire que $r = 0$ et conclure.

Exercice 7. Soit $(G, \star, \cdot^{-1}, e_G)$ un groupe et $H, H' \subset G$ des sous-groupes. Montrer que l'intersection $H \cap H'$ est encore un sous-groupe.