EPFL Automne 2016
Geometrie, MATH-120

Série 12

Exercice 1. 1. Calculer les parametres complexes des symetries axiales, s_1 et s_2 par rapport aux droites d'equation

$$3x + 4y = 2,\ -2x + 5y = 3.$$

2. A quoi est egale la composee

$$s_1 \circ s_2?$$

quels sont ses parametres complexes ?

3. Meme question pour les droites

$$3x + 4y = 2,\ 6x + 8y = 6.$$

Exercice 2. Soit $r_{\alpha,\mu}$ et $s_{\beta,\nu}$ des isometries affines (rotation et symetrie) associees aux parametres complexes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^1, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

1. Calculer les parametres de l'isometrie conjuguee

$$r_{\alpha,\mu} \circ s_{\beta,\nu} \circ r_{\alpha,\mu}^{-1};$$

interpreter geometriquement le resultat.

2. Que dire si $s_{\beta,\nu}$ est une symetrie axiale ? Si $s_{\beta,\nu}$ est une symetrie glissee ?

Exercice 3. Soit φ une isometrie et

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(P) = P\}$$

l'ensemble des points fixes de ϕ. Plus generalement pour $\Phi \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ un ensemble quelconque d'isometries, soit

$$\mathrm{Fix}(\Phi) = \{P \in \mathbb{R}^2,\ \forall\varphi \in \Phi,\ \varphi(P) = P\}$$

l'ensemble des points fixes de Φ.

1. Soit ψ une autre isometrie, et $\varphi' = \mathrm{Ad}(\psi)(\varphi) = \psi\circ\varphi\circ\psi^{-1}$ l'isometrie conjuguee ; que vaut $\mathrm{Fix}(\varphi')$ en fonction de $\mathrm{Fix}(\varphi)$. Meme question pour $\mathrm{Ad}(\psi)(\Phi)$.
2. Montrer (sans calcul) que le conjugue d'une symetrie axiale par une isometrie est une symetrie axiale ; meme question pour une symetrie glisssseeeee.

3. Montrer que toute droite (affine) peut etre envoyee sur toute autre droite par une rotation (affine). En deduire que toute symetrie axiale est conjuguee a la symetrie lineaire $s_1 = s_{1,0}$.
4. Etant donne $s_{\beta,\nu}$ une symetrie axiale ou glissee donner une condition necessaire et suffisante sur (β, ν) pour que $s_{\beta,\nu}$ soit conjuguee a $s_{1,0}$ par une rotation ; quand c'est le cas quels sont les parametres de cette rotation et retrouver ainsi les formules qui donnent l'axe d'une symetrie axiale en fonction de (β, ν).

Retour sur les angles

On a vu que la mesure d'un angle etait la longueur d'arc du cercle unite. Grace au theoreme suivant (admis) on a une construction plus algebrique et abstraite de cette mesure d'angle. On va l'utiliser pour revoir la trigonometrie.

Théorème 1. *Il existe un morphisme de groupe non-trivial (non-constant egal a* 1*)*

$$\phi : (\mathbb{R}, +) \mapsto (\mathbb{C}^1, \times)$$

qui est derivable (la fonction $t \mapsto \phi(t) = x(t) + iy(t)$ *est derivable c'est a dire que* $x(t)$ *et* $y(t)$ *le sont) Ce morphisme est surjectif et son noyau est de la forme*

$$\ker \phi = \lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

ou $\lambda \neq 0$.

Exercice 4. Admettons le theoreme precedent

1. Que vaut $\phi(0)$?
2. Montrer que $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$ et en deduire que $x(t)$ est paire et $y(t)$ est impaire.
3. Montrer que $\phi'(0) = i\nu$ avec $\nu \in \mathbb{R}^\times$.
4. Montrer que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$
$$\phi'(s + t) = \phi'(s)\phi(t).$$
5. Trouver une relation simple entre la derivee $x'(t)$ et $y(t)$ et entre $y'(t)$ et $x(t)$. Montrer que $t \mapsto |\phi'(t)|^2$ est constante.
6. Montrer que pour $\nu' \in \mathbb{R}^\times$, $t \in (\mathbb{R}, +) \mapsto \phi(\nu' t) \in \mathbb{C}^1$ est un morphisme de groupe non-trivial, derivable, surjectif, de noyau
$$\ker \phi = \lambda'\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$
ou $\lambda' \neq 0$.

7. Montrer qu'on peut trouver $\phi = \phi_1$ tel que $\nu = 1$.

On note habituellement le morphisme ϕ_1 sous la forme

$$\exp(i\ \cdot) : t \mapsto \exp(it) \text{ ou bien } e^{i\ \cdot} : t \mapsto e^{it}$$

et sa partie reelles et imaginaire $x_1(t)$ et $y_1(t)$, sont notees

$$\cos(t) \text{ et } \sin(t)$$

et sont appellees fonctions cosinus et sinus.

Dans ce cas le parametre λ associe a $\ker \phi_1$ est note 2π ou $\pi = 3,14159\cdots$ et 2π est la longueur du cercle unite convenablement defini.

7. Montrer que tout autre morphisme de groupe derivable $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^1$ est de la forme $\phi_\mu(t) = e^{i\mu t}$. Pour cela on pourra etudier l'application $t \mapsto \phi(t) \times e^{-i\mu t}$, montrer que c'est un morphisme de groupes qui est constant pour μ bien choisi.

Exercice 5 ($\star$)**.** Le but de cet exercice est de montrer le resultat suivant :*Soit un morphisme de groupe continu*

$$\phi : (\mathbb{R}, +) \mapsto (\mathbb{C}^1, \times)$$

(la fonction $t \mapsto \phi(t) = x(t) + iy(t)$ est continue c'est a dire que $x(t)$ et $y(t)$ le sont) alors ϕ est derivable.

Pour demontrer ce resultat on procede comme suit : on pose

$$\Phi(u) = \int_0^u \phi(t)dt = \int_0^u x(t)dt + i \int_0^u y(t)dt.$$

Comme ϕ est continue sa primitive $\Phi(u)$ existe, est derivable de derivee

$$\Phi'(u) = \phi(u).$$

1. Montrer que
$$\Phi(u+1) = \Phi(u) + \phi(u)\Phi(1)$$
(on pourra ecrire $\int_0^{u+1} \cdots = \int_0^u \cdots + \int_u^{u+1} \cdots$, effectuer un changememtn de variable et utiliser la propriete principale de ϕ).
2. Montrer que ϕ est derivable.

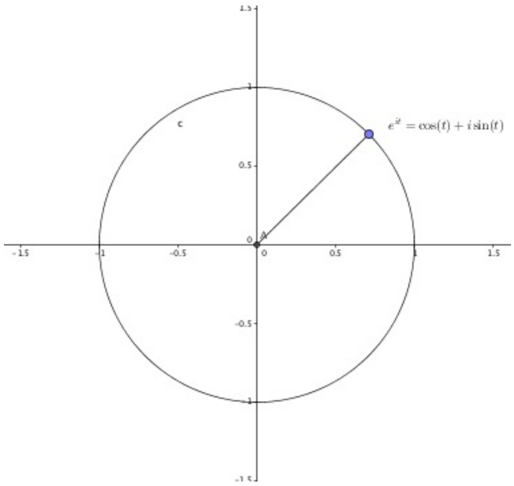

FIGURE 1 – Le cercle trigonometrique

Trigonometrie

Ainsi tout nombre complexe de module 1, $z = x + iy$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, est represente de maniere unique par un nombre reel $t \in [0, 2\pi[$: l'unique element t dans cet intervalle tel que

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) = z;$$

alternativement z est represente de maniere unique par le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (l'ensemble des translates de t par les elements du sous-groupe $(2\pi\mathbb{Z}, +)$)

$$t \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) = t + 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

(si si $t' \in t \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $t' \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) = t \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$.) Ce nombre t (ou cet classe) est appelle l'argument de z et est note $\arg(z)$.

Si on considere l'angle forme par les deux vecteurs $(1, 0)$ sur (x, y) ; le parametre complexe qui envoie le premier vecteur sur le second est precisement z qu'on identifie avec t. On parlera "d'angle de mesure t ou egal a t".

Exercice 6 ($\star$)**.** A partir de l'exercice precedent on va retrouver les proprietes bien connues des fonctions cosinus et sinus. On doit repondre aux questions sans utiliser les resultats qu'on a admis au gymnase mais par deduction a partir de l'exercice precedent a l'aide de manipulations algebriques, en utilisant les proprietes du morphisme de groupe $e^{i\,\cdot}$ qu'on vient d'etablir et en resolvant des equations polynomiales et en utilisant les resultats de bases de l'etude des fonctions derivables.

1. Montrer que

$$\cos(t + t') = \cos(t)\cos(t') - \sin(t)\sin(t'),$$

$$\sin(t+t') = \sin(t)\cos(t') + \cos(t)\sin(t').$$

2. Montrer que $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$.
3. Montrer que $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ (utiliser que $\pi = \frac{2\pi}{2}$ et trouver une equation polynomiale satisfaite par $e^{i\pi}$).
4. Montrer que pour tout t,
$$\cos(\pi - t) = -\cos(t),\ \sin(\pi - t) = \sin(t)$$
5. Montrer que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{3\pi}{2}) = \pm 1$.
6. Montrer que cos ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, \pi/2[$ et en deduire que $\cos(t)$ puis $\sin(t)$ sont strictement positive sur ce meme intervalle.
7. Montrer que $e^{i\pi/2} = i$.
8. Soit $\omega_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que ω_3 verifie
$$\omega_3^2 + \omega_3 + 1 = 0$$
(factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynome $X^3 - 1$) puis que
$$\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2},\ \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
9. Soit $\omega_5 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Montrer que
$$\omega_5^4 + \omega_5^3 + \omega_5^2 + \omega_5 + 1 = 0$$
puis que
$$\omega_5^2 + \omega_5^{-2} + \omega_5 + \omega_5^{-1} + 1 = 0$$
et enfin que
$$4\cos(\frac{2\pi}{5})^2 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$$
et en deduire la valeur de ω_5.
10. $\star\star$(a faire bien plus tard) Expliquer comment construire a la regle et au compas un pentagone regulier inscrit dans le cercle unite.