Analyse avancée I
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Cl. Hongler

Semaine du 7 au 11 novembre 2016

Série 8 du jeudi 10 novembre 2016

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en a telle que pour tout couple x, y de $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1.) Montrer que la fonction f est continue partout.

2.) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x\, f(1).$$

Indications:
Montrer que $f(0) = 0$ et f est continue en $x = 0$.
Montrer que f est continue partout,
Montrer que $f(n) = n\, f(1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $f(x) = x\, f(1)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2 (rendre).

A chaque entier $n \geq 0$, on associe la fonction polynomiale $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $P_0(x) = 0$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

1.) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}.$$

2.) En déduire que la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

3.) Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $Q_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers la fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x|$.

Indication: Commencer par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n = 0, 1, 2 \ldots.$

Exercice 3.

Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les deux situations suivantes:

1^o) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$,

2^o) $f(x) = x^2\,[x]$, $x \in \mathbb{R}$, où $[x]$ dénote la partie entière de x.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0 nulle part ailleurs.