

Corrigé 7 du mardi 1er novembre 2016

Exercice 1 (* A rendre) .

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction croissante définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \text{ existent.}$$

Il existe $\delta > 0$ tq f est définie et croissante sur $[x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta]$. Et donc, pour x dans $[x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta]$, on a $f(x_0 - \delta) \leq f(x) \leq f(x_0 + \delta)$ ce qui signifie que f est borné sur $[x_0 - \delta, x_0[$ et sur $]x_0, x_0 + \delta]$.

1^o) Puisque $f\big|_{]x_0-\delta,x_0[}$ est bornée, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \sup\limits_{x \in]x_0-\delta,x_0[} f(x)$.

Pour tout $\epsilon > 0$ donné, il existe $\alpha \in]x_0 - \delta, x_0[$ tel que

$$\ell \geq f(\alpha) \geq \ell - \epsilon.$$

Et puisque $f\big|_{]x_0-\delta,x_0[}$ est croissante, on a

$$\ell \geq f(x) \geq f(\alpha) \geq \ell - \epsilon, \ \ \forall x \in [\alpha, x_0[.$$

Par suite $|f(x) - \ell| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [\alpha, x_0[$. On obtient donc, puisque ϵ est quelconque,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell.$$

2^o) Puisque $f\big|_{]x_0,x_0+\delta[}$ est bornée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m = \inf\limits_{x \in]x_0,x_0+\delta[} f(x)$.

Pour tout $\epsilon > 0$ donné, il existe $\beta \in]x_0, x_0 + \delta[$ tel que

$$m \leq f(\beta) \leq m + \epsilon.$$

Et puisque $f\big|_{]x_0,x_0+\delta[}$ est croissante, on a

$$m \leq f(x) \leq f(\beta) \leq m + \epsilon, \ \ \forall x \in]x_0, \beta[$$

ce qui prouve que $|f(x) - m| \leq \epsilon$, $\forall x \in]x_0, \beta[$ et par suite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = m.$$

Exercice 2.

Cherchons pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, on a l'existence de la limite suivante

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ \neq}} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 8\alpha x}{\sin(\alpha^4 - x^4)}.$$

1) *(Existence)* Puisque (*) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, sous reserve d'existence de ces limites, on a

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ \neq}} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 8\alpha x}{\sin(\alpha^4 - x^4)} = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ \neq}} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 8\alpha x}{\alpha^4 - x^4}.$$

Mais puisqu'à la limite le dénominateur tend vers 0, cette limite ne peut exister que si α est racine du numérateur, i.e.

$$\alpha^4 + \alpha\alpha^3 - 8\alpha\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2(\alpha^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \pm 2.$$

2) *(Limites)*

- Si $\alpha = 0$, la limite se ramène à
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{x^4}{\sin(-x^4)} \underset{(*)}{=} -1.$$
- Si $\alpha = 2$, la limite se ramène à
$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ \neq}} \frac{x(x-2)(x^2+4x+8)}{(4+x^2)(2+x)(2-x)} = - \lim_{\substack{x \to 2 \\ \neq}} \frac{x(x^2+4x+8)}{(4+x^2)(2+x)} = -\frac{40}{32} = -\frac{5}{4}.$$
- Si $\alpha = -2$, la limite se ramène à
$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ \neq}} \frac{x(x+2)(x^2-4x+8)}{(4+x^2)(-2-x)(-2+x)} = - \lim_{\substack{x \to -2 \\ \neq}} \frac{x(x^2-4x+8)}{(4+x^2)(x-2)} = -\frac{40}{32} = -\frac{5}{4}.$$

Exercice 3.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout triplet $x \leq y \leq z$ de I on a
$$\left(f(y) - f(x)\right)\left(f(y) - f(z)\right) \leq 0.$$
Montrons que f est monotone.

Démonstration :

On commence par une remarque. Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient $\alpha\beta \leq 0$. Si, de plus, on a $\alpha \geq 0$, on peut conclure ainsi:

- si $\alpha > 0$, alors β doit être ≤ 0,
- si $\alpha = 0$, on ne peut rien dire sur β.

En conclusion, des relations $\alpha\beta \leq 0$ et $\alpha \geq 0$ on ne peut rien dire sur β.

1.) On considère tout d'abord un intervalle fermé $I = [a, b]$ avec $a < b$.

- Si $f(a) = f(b) = C$, on a, pour tout $t \in I$:
$$\begin{aligned} \left(f(t) - f(a)\right)\left(f(t) - f(b)\right) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(f(t) - C\right)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(t) = C, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$
- Si $f(a) < f(b)$ on va montrer que f est croissante.

  Prenons c tel que $a \leq c \leq b$. On a
$$\left(f(c) - f(a)\right)\left(f(c) - f(b)\right) \leq 0. \tag{1}$$
  De plus
$$\begin{aligned} f(a) < f(b) \quad &\Leftrightarrow \quad -f(a) > -f(b) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(f(c) - f(a)\right) > \left(f(c) - f(b)\right). \end{aligned}$$
  Par (1), $(f(c) - f(a))$ et $(f(c) - f(b))$ ne peuvent être tous deux > 0. Le plus petit de ces deux nombres, soit $(f(c) - f(b))$, est donc ≤ 0, d'où on tire $f(c) \leq f(b)$.

  De plus, $(f(c) - f(a))$ ne peut être < 0, sinon $(f(c) - f(a))$ et $(f(c) - f(b))$ seraient tous les deux < 0 ce qui contredirait (1). On a donc $(f(c) - f(a)) \geq 0$ et ainsi $f(a) \leq f(c)$.

  Finalement, on a $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$.

  Prenons maintenant d tel que $c < d \leq b$. Par le même raisonnement, appliqué cette fois à l'intervalle $[c, b]$, on a $f(c) \leq f(d) \leq f(b)$.

  On a ainsi montré que pour tous c, d tels que $a \leq c < d \leq b$, on a $f(c) \leq f(d)$. La fonction f est donc croissante sur $[a, b]$.

- Si $f(a) > f(b)$, on montre la monotonie en remplaçant f par $-f$ dans le raisonnement ci-dessus.

2.) Si I est un intervalle quelconque on montre la monotonie en raisonnant par l'absurde.
Supposons que f ne soit pas monotone sur I, alors il existe 4 éléments $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$ de I tels que

$$f(a_1) < f(b_1) \quad \text{et} \quad f(a_2) > f(b_2).$$

On pose alors $a = \min\{a_1, a_2\}$ et $b = \max\{b_1, b_2\}$ et on remarque que la fonction f n'est pas monotone sur $[a, b]$, ce qui contredit la partie 1.).

□

Corollaire : Si f n'est pas monotone sur I, alors il existe un triplet $x < y < z \in I$, tel que

$$(f(y) - f(x))\,(f(y) - f(z)) > 0.$$

Exercice 4.

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ bornée. On définit la fonction $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ par $g(x) = \sup\{f(y) : y \in [0, x]\}$.

1.) Montrer que g est croissante.
Si $0 \leq x_1 < x_2$, alors $[0, x_1] \subset [0, x_2]$ et on a $g(x_1) \leq g(x_2)$.

2.) Montrer que si f est continue, g l'est aussi.
Si f est continue, alors le sup est un max. Soit $x > 0$ et montrons que g est continue à x.
On a $g(x) \geq f(y)$, $\forall y \in [0, x]$.
Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\delta > 0$ tq $y - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ et donc $f(y) < f(x) + \epsilon$.
Montrons que si $y - x < \delta$ on a $g(y) \leq g(x) + \epsilon$.
$g(y) = \max_{z \in [0,y]} f(z)$. Si $z \in [0, x]$ alors $g(x) \geq f(z)$. Si $z \in [x, y]$ alors $f(z) < f(x) + \epsilon \leq g(x) + \epsilon$.
Donc si $z \in [0, y]$ on a $f(z) \leq g(x) + \epsilon$ ou encore $g(y) \leq g(x) + \epsilon$. Ainsi g est continue à x.