M1 maths Calcul scientifique TP3

Octobre 2018

Résolution de l'équation de transport

1. On considère le problème aux limites (c est une constante réelle positive)

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u + c\partial_x u & = & 0, \quad x \in]0, L[, \quad t \in]0, T[, \\ u(0,t) & = & e^{-t}, \quad t \in]0, T[, \\ u(x,0) & = & 0, \quad x \in]0, L[. \end{array} \tag{1}$$

   Calculer la solution de ce problème.

2. Écrire le schéma aux différences finies décentrées permettant de calculer numériquement la solution de (1). La solution approchée sera notée $u_i^n \simeq u(i\Delta x, n\Delta t)$, $\Delta x = L/N$. Mettre ce schéma sous la forme vectorielle $U^n = (u_1^n \cdots u_N^n)^T$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} A U^n + G^n.$$

   Expliciter la matrice A et le vecteur G^n.

3. Montrer que ce schéma est stable dans L^∞ et dans L^2 sous condition de CFL $c\Delta t \leq \Delta x$ (pour la stabilité L^2 la démonstration est différente de celle du cours...). Pour étudier la stabilité, remplacer la condition à la limite gauche par

$$u(0,t) = 0,$$

   et la condition initiale par

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (u_0 \in L^\infty \text{ ou } L^2).$$

4. Programmer ce schéma. Décrire votre programme. Vérifier que le schéma est instable lorsque la condition de CFL n'est pas vérifiée (tracer un exemple de solution numérique obtenue à l'instant T).

5. Vérifier (numériquement) la convergence du schéma (comparer, à l'instant T, en norme L^1 et L^2, la solution numérique et la solution exacte pour diverses finesses de maillage).

6. Vérifier numériquement que le schéma centré est inconditionnellement instable.

7. Programmer le schéma de Lax-Wendrof. Quel est sa condition de stabilité L^2 ? La vérifier numériquement. Vérifier aussi numériquement que ce schéma n'est pas stable dans L^∞.