Vérification d'estimation a priori pour le Laplacien

Méthodes numériques pour les EDP

1 Vérification

1.1 Le Laplacien

L'objectif est de vérifier que les différentes formulations du Laplacien en fonction des conditions aux limites (voir chapitre 3 sur les problèmes coercifs)

- Dirichlet non homogène
- Neumann non homogene
- Fourier (ou encore appelée Robin)

satisfont les résultats du théorème 1 page 38 des notes de cours pour des approximations $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_3$ ($k = 1$ et $k = 3$) en 2D.

Afin de vérifier ces résultats, nous allons d'abord considérer le problème suivant : soit Ω le cercle unité tel que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$ avec

- $\Gamma_D = \{\mathbf{x} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in (0, \pi/2)\}$
- $\Gamma_N = \{\mathbf{x} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in (\pi/2, \pi)\}$
- $\Gamma_F = \{\mathbf{x} = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in (\pi, 2\pi)\}$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= m \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} &= l \quad \text{sur} \quad \Gamma_F \end{aligned} \tag{1}$$

1. Créer le maillage d'un domaine Ω quelconque (pas un carré), nommer les bords physiques `Dirichlet`, `Neumann` et `Fourier`.
2. prendre $f = 1$, $g = m = l = 0$ et $h = 0.05$
   - écrire la formulation variationnelle
   - résoudre le problème avec `feelpp_qs_laplacian` et afficher dans le rapport le maillage ainsi que la solution u du problème (1)
3. Ensuite considérez la fonction $u(x, y) = \sin(\pi x)cos(\pi y)$ et calculez f, g, m, l pour que u soit solution de (1). Faites une étude de convergence en échelle log-log et observer les pentes des droites associées aux approximations $\mathbb{P}_2$. Sont elles celles attendues par le théorème 1 page 38 ?

Afin de présenter les résultats, vous rentrerez les erreurs L_2 et H_1 dans un tableau1 et sur une figure 1. Les résultats factices sont dans `res.dat`.

h	$\|\cdot\|_{L_2}$	$\|\cdot\|_{H_1}$
0.400	$1.42 \cdot 10^{-1}$	$4.88 \cdot 10^{-4}$
0.200	$2.63 \cdot 10^{-2}$	$1.66 \cdot 10^{-5}$
0.100	$5.74 \cdot 10^{-3}$	$7.87 \cdot 10^{-7}$
0.050	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$4.31 \cdot 10^{-8}$
0.025	$3.36 \cdot 10^{-4}$	$2.70 \cdot 10^{-9}$

TABLE 1 – Erreur de convergence

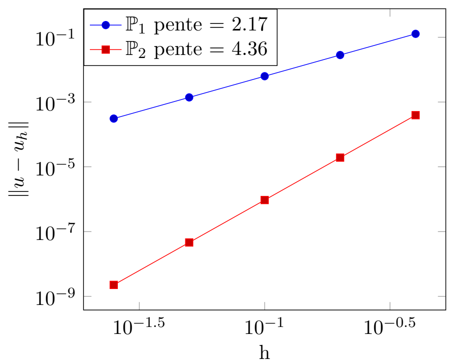

FIGURE 1 – Illustration

1.2 Fonctions peu régulières

Solutions singulières. On considere à présent le domaine $\Omega = \left\{\mathbf{x} = r(\cos\theta, \sin\theta)^T, r \in \ (0,1), \theta \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)\right\}$ et le problème de Poisson avec condition de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= g \text{ sur} \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

avec g définie telle que u définie en coordonnée polaire par

$$u(r,\theta) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$$

soit la solution exacte du problème. Cette fonction est peu régulière proche de l'origine et conduit donc à des approximations peu précises près de l'origine.

— Vérifier que le Laplacien de u est bien nul puis déterminer g telle que u soit solution du problime.
— Montrer que $u \in H^1(\Omega)$ mais que le gradient de u n'est pas borné à l'origine. En déduire que
$$u \notin H^2(\Omega)$$
— Créer le maillage avec Gmsh.
— Faire l'étude de convergence. Qu'observez vous ?