

EDP1: TP1 - Problème de Poisson

Desmond Ngueguin

roussel-desmond.nzoyem-ngueguin@etu.unistra.fr

Université de Strasbourg — March 26, 2020

1 Le Laplacien

Question 1

Création du maillage avec gmsh.

Voir figure 1 - (a)

Question 2

Formulation variationnelle.

On a le problème aux limites:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_N \\ u + \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_F \end{aligned} \tag{1}$$

Posons $V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_D} = 0\}$. V est de Hilbert car l'application $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_D)$ est continue et linéaire d'après le théorème de la trace. $V = \gamma_0^{-1}(\{0\})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. V est donc un sous-espace fermé d'un Hilbert, soit un Hilbert.

Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de (1) et $v \in V$, on a:

$$\begin{aligned} -\Delta u = 1 &\Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u v \, d\Omega = \int_{\Omega} v \, d\Omega \\ &\Rightarrow - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} v \, d\Omega \quad (\text{D'après la formule de Green}) \\ &\Rightarrow - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma_D - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma_N - \int_{\Gamma_F} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma_F + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} v \, d\Omega \\ &\Rightarrow - \int_{\Gamma_F} (-u) v \, d\Gamma_F + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} v \, d\Omega \quad (\text{Car } v|_{\Gamma_D} = 0, \text{ et d'après (1)}) \\ &\Rightarrow a(u, v) = l(v) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Gamma_F} u v \, d\Gamma_F + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega \\ l(v) &= \int_{\Omega} v \, d\Omega \end{aligned} \quad \forall v \in V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

Le maillage et la solution sont représentés à la figure 1:

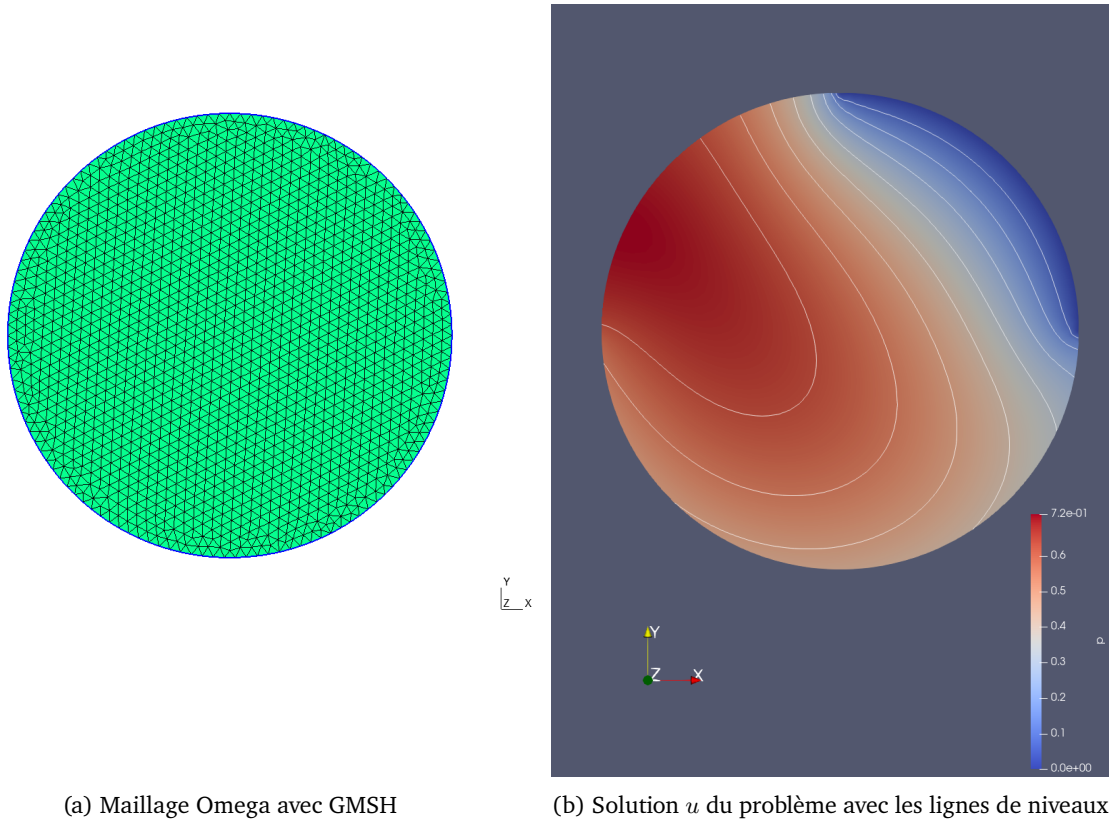


Figure 1: Maillage et Solution

Question 3

Étude de convergence avec $u(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$

Avec la logiciel *feelpqslaplacian*, on obtient les résultats suivant:

$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$g(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

$$m(x, y) = \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) - \pi \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$l(x, y) = \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) - \pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

Les erreurs en normes sont présentées dans le tableau 1.

h	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _{H_1}$
0.400	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$2.70 \cdot 10^{-1}$
0.200	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$7.79 \cdot 10^{-2}$
0.100	$2.17 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-2}$
0.050	$2.75 \cdot 10^{-5}$	$5.21 \cdot 10^{-3}$
0.025	$3.58 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-3}$

Table 1: Erreur de convergence

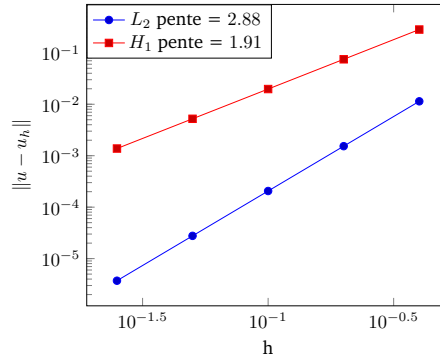


Figure 2: Illustration

Les valeurs présentées sur la figure 2 correspondent bien à celles prédites par le théorème 1 de la page 39. En effet, nous résolvons le problème dans H_2 , et on remarque bien que la pente de la courbe de l'erreur en log-log est proche de 2 pour la norme H_1 et de $3 = 2 + 1$ pour la norme L_2 .

2 Fonction peu régulière

Question

Vérifions que le Laplacien est bien nul.

Sur $\Omega = \{\mathbf{x} = r(\cos \theta, \sin \theta)^T, r \in (0, 1), \theta \in (0, \frac{3\pi}{2})\}$, on a :

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{3} r^{-1/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{2}{3} r^{2/3} \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{2}{9} r^{-4/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{4}{9} r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \end{aligned}$$

Le Laplacien en coordonne polaires est donné par:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\ &= -\frac{2}{9} r^{-4/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) + \frac{1}{r} \left\{ \frac{2}{3} r^{-1/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \right\} + \frac{1}{r^2} \left\{ -\frac{4}{9} r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \right\} \\ &= \left(-\frac{2}{9} + \frac{6}{9} - \frac{4}{9} \right) r^{-4/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Question

Montrons que u est dans $H^1(\Omega)$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \left(r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) \right)^2 (r dr d\theta) \\ &= \int_0^1 r^{2/3} dr \int_0^{3\pi/2} \sin^2\left(\frac{2}{3}\theta\right) d\theta \\ &= \frac{3}{11} \int_0^{3\pi/2} \sin^2\left(\frac{2}{3}\theta\right) d\theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aussi, on a $\nabla u = \left(\frac{2}{3}r^{-1/3}\sin(\frac{2}{3}\theta), \frac{2}{3}r^{2/3}\cos(\frac{2}{3}\theta)\right)^T$, donc:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{2}{3}r^{-1/3}\sin(\frac{2}{3}\theta)\right)^2 (rdrd\theta) \\ &= \frac{4}{9} \int_0^1 r^{1/3} dr \int_0^{3\pi/2} \sin^2(\frac{2}{3}\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} \int_0^{3\pi/2} \sin^2(\frac{2}{3}\theta) d\theta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

On en déduit que $u \in H^1(\Omega)$

Suivant la courbe $\theta = \frac{3\pi}{4}$ par exemple, on voit que $|\nabla u| = \frac{2}{3}r^{-1/3}$, et $\lim_{r \rightarrow 0} |\nabla u| = +\infty$. On conclut que u n'est pas bornée à l'origine.

Pour montrer que $u \notin H^2(\Omega)$, il suffit de remarquer que le ∇u n'est pas continue, donc pas dérivable au voisinage de l'origine. En effet, si ∇u était continue en 0, on aurait $\lim_{r \rightarrow 0} |\nabla u| = 0$.

Question

Créons le maillage avec Gmsh.

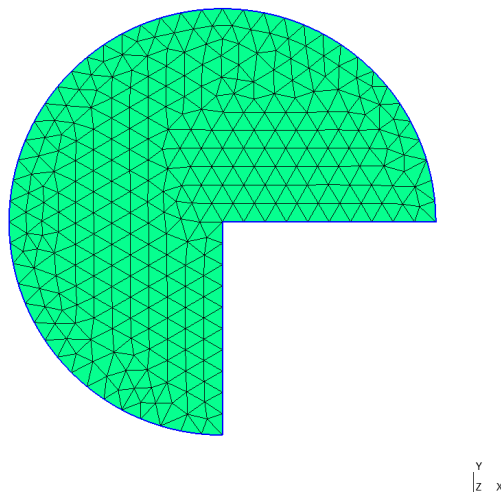


Figure 3: Maillage avec GMSH

Question

Étude de convergence.

h	$\ \cdot\ _{L_2}$	$\ \cdot\ _{H_1}$
0.400	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$4.20 \cdot 10^{-2}$
0.200	$6.94 \cdot 10^{-4}$	$3.00 \cdot 10^{-2}$
0.100	$2.19 \cdot 10^{-4}$	$1.89 \cdot 10^{-2}$
0.050	$6.89 \cdot 10^{-5}$	$1.19 \cdot 10^{-2}$
0.025	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$7.45 \cdot 10^{-3}$

Table 2: Erreur de convergence

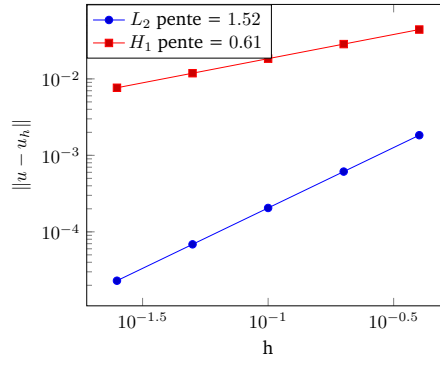


Figure 4: Illustration

Comme le montre la figure 4, on obtient une convergence beaucoup plus lente que dans le cas d'une solution régulière. Mais cela vérifie toujours le théorème 1 de la page 39, car la solution n'est que dans $H^1(\Omega)$, et les pentes des erreurs en norme L^2 et H^1 sont respectivement plus petites que $2=1+1$ et 1 (à une constante près).