RAPPORT TP 2

ASSEMBLAGE DE LA MATRICE D'ELEMENT FINI

Desmond Roussel Nzoyem Ngueguin

1ère PARTIE : Lecture d'un fichier Gmsh

Le fichier correspondant à cette partie se nomme **GmeshRead.py**. Pour vérifier que le programme fonctionne correctement, nous effectuons un test sur les maillages d'un triangle et d'un disque triangulés régulièrement.

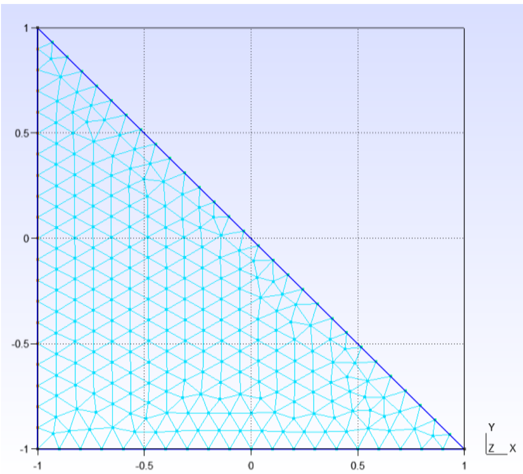


Figure 1 : Triangle triangulé avec gmsh

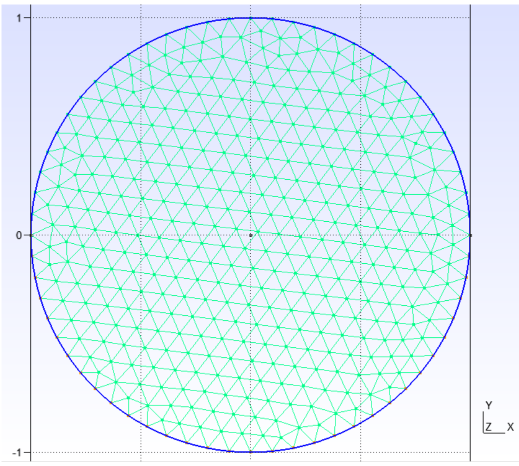


Figure 2 : Disque triangulé avec gmsh

On vérifie que l'aire totale du grand triangle est égale à la somme des aires des petits triangles (***./maillage/triangle.msh***).

$$aire\ du\ grand\ triangle = \frac{2.0 * 2.0}{2} = \mathbf{2.0}$$
$$somme\ des\ aires\ des\ petits\ triangles = \mathbf{2.0}$$

On fait de même pour le disque (***./maillage/new_disque.msh***).

$$aire\ du\ disque = \pi * 1^2 \approx \mathbf{3.141592653589793}$$
$$somme\ des\ aires\ des\ petits\ triangles \approx \mathbf{3.136548490545939}$$

On constate bien que la somme des aires est exactement égale à l'aire totale dans le cas du triangle et n'est qu'approximative dans le cas du disque.

$2^{\text{ème}}$ PARTIE : Base de l'élément fini P1

Afin de vérifier que la construction de la base et la formule de quadrature sont bien exactes, nous testons notre programme du fichier **BaseP1.py** sur le calcul de $\int_{\hat{K}} x^2$, ou $\hat{K}$ est le triangle de référence, de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

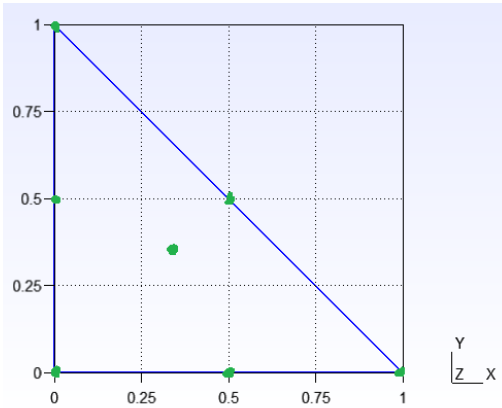


Figure 3 : Triangle de référence et points de quadrature

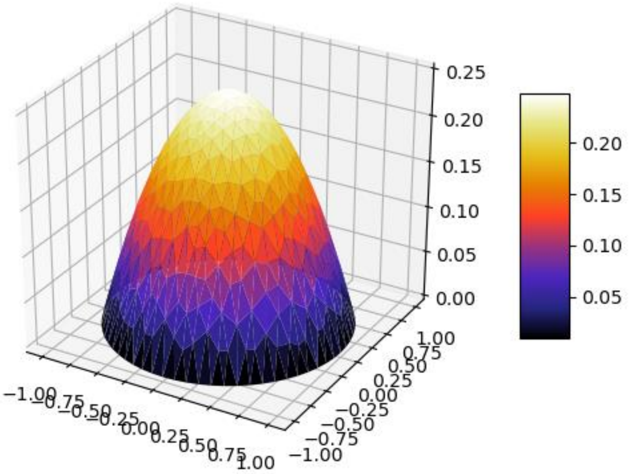
Par un calcul direct, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{K}} x^2 d\hat{K} &= \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{1-y} dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-y)^3 \, dy \\
&= \frac{1}{3\times 4}[-(1-y)]_0^1 \\
&= \frac{1}{12} \approx \mathbf{0.083333}
\end{aligned}$$

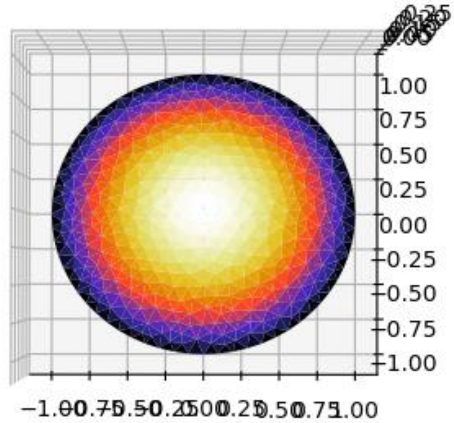
Par la formule de quadrature, on obtient bien $\int_{\hat{K}} x^2 d\hat{K} \approx \mathbf{0.083333}$

$3^{\text{ème}}$ PARTIE : Assemblage de la matrice.

Après avoir assemblé la matrice A (méthode ***assemble_matrix()***) et le second membre rhs (méthode ***assemble_rhs()***), correspondant aux conditions aux bords de Dirichlet $g = 0$ (obtenus par élimination), nous testons le script **MatAssembly.py** sur un maillage du disque correspondant à la fonction de second membre $f = 1$.



(a) : Vue 3D

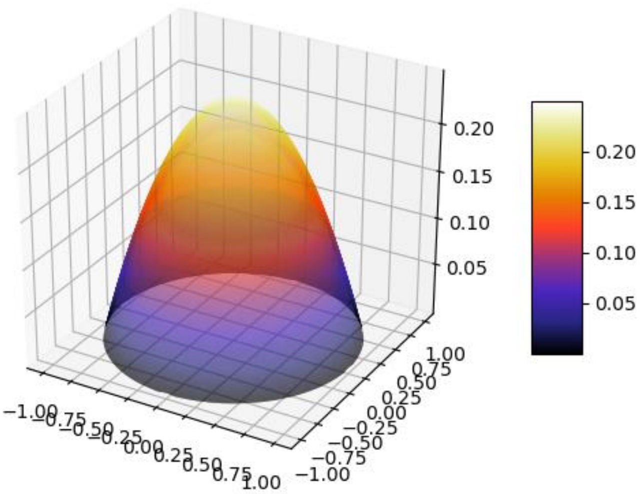


(b) : Vue 2D

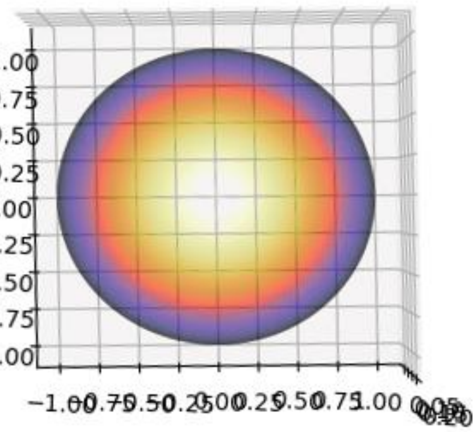
Figure 4 : Solution numérique avec h = 0.13

Avec une géométrie de disque, le calcul d'une solution exacte nous donne : $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})$. D'où $\nabla \mathrm{u} = \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right)$, et on a bien $-\Delta u = 1$. En plus les conditions au bord de Dirichlet sont vérifiées. En effet, sur le cercle de centre l'origine et de rayon 1 (i.e. $x^2 + y^2 = 1$) frontière du disque, on a bien $u_{|\partial\Omega} = g = 0$

On en profite pour faire une illustration de cette solution analytique, et on constate que la solution numérique trouvée à la figure 4 correspond bien à celle recherchée.



(a): Vue 3D



(b): Vue 2D

Figure 5 : Solution analytique

Afin de vérifier l'ordre de convergence numérique, on calcule la solution numérique u_h sur un maillage disque pour différentes valeurs du diamètre du maillage h. On prend pour cela $h\_gmsh =$

$0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ dans le fichier ***./maillage/new_disque.geo***. Après génération du maillage par GMSH, on calcule les valeurs de h à utiliser pour l'étude de convergence. On retrouve la colonne **h** de la table 1. (*On note que les valeurs de h sont bien différentes de* h_gmsh *entrées dans le fichier* ***.geo***). Ensuite on récupère les erreurs de convergence en norme L2 et H1 (obtenus par interpolation de degré 1 de la solution exacte u) :

h_gmsh	h	norme L2	norme H1
0.400	0.514	3.34E-03	3.09E-02
0.200	0.250	8.89E-04	1.56E-02
0.100	0.132	2.12E-04	7.27E-03
0.050	0.071	5.70E-05	3.69E-03
0.025	0.037	1.40E-05	1.83E-03

Table 1 : Erreur de convergence

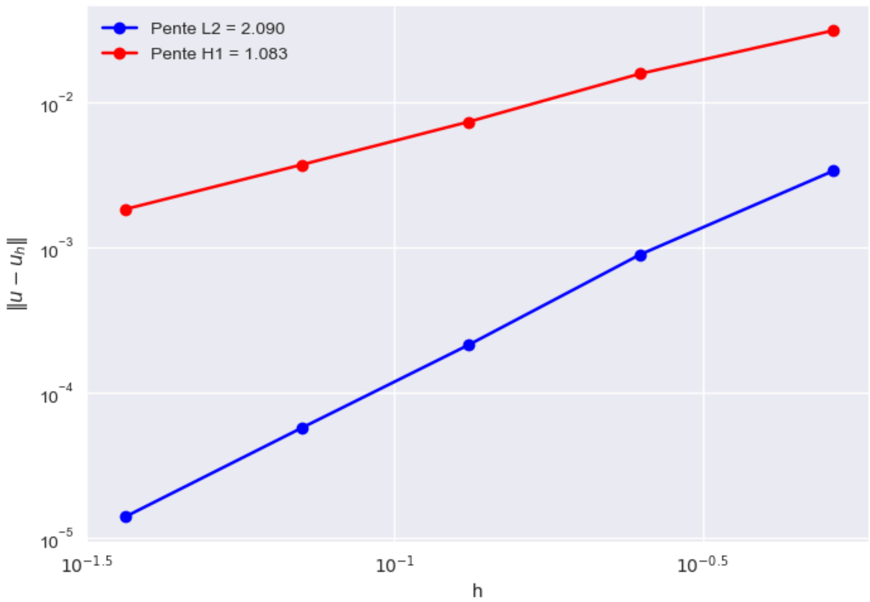


Figure 6 : Illustration

En mode ***loglog***, on obtient des pentes de **2.090** et **1.083** respectivement pour les normes **L2** et **H1**. Ces résultats sont exactement ceux attendus. En effet, puisque la solution exacte u est dans $H^1(\Omega)$, le théorème 1 de la page 39 du document "*Notes de cours sur la méthode des éléments finis*" nous indique que la pente pour l'erreur L2 est proche de **2=1+1** et pour l'erreur H1 est proche de **1**.