

# COMPTE RENDU DU TP N°3

**Roussel Desmond NZOYEM NGUEGUIN**

N° étudiant : 21911823

Courriel : roussel-desmond.nzoyem-ngueguin@etu.unistra.fr

Université de Strasbourg

UFR de Mathématique et d'informatique

Master 1 CSMI

**Méthodes numériques pour les EDP 1**

Sous la supervision du Pr. **Christophe PRUD'HOMME**

18 juin 2020

## Contenu

I.	ELASTICITE LINEAIRE.....	3
■	PARTIE 1 .....	3
1.	Création du maillage avec GMSH.....	3
2.	Formulation variationnelle.....	3
3.	Visualisation de la déformation du maillage.....	3
4.	Norme de Frobenius, champs Von-Mises et Tresca du tenseur des contrainte. ....	4
■	PARTIE 2 : Perte de coercivité .....	5
1.	Maillage avec GMSH .....	5
2.	Solutions obtenues pour $\lambda/\mu = 1$ .....	5
3.	Solution obtenue pour $\lambda/\mu = 1000$ .....	7
II.	STOKES.....	9
■	PARTIE 1 : Eléments finis stables .....	9
1.	Déterminons $f$ et $p$ .....	9
2.	Création du maillage .....	10
3.	Formulation variationnelle .....	10
4.	Implémentation avec les éléments $P2/P1$ .....	11
5.	Analyse de convergence en vitesse et pression .....	12
■	PARTIE 2 : Navier-Stokes instationnaire .....	13
1.	Semi-discrétisation en temps .....	14
2.	Programmation de la méthode.....	15
3.	Calcul de la trainée et de la portance .....	15
4.	Diminution de la viscosité .....	16
III.	ANNEXE .....	19
	Formulation variationnelle pour un problème d'élasticité linéaire.....	19
IV.	REFERENCES .....	21

# I. ELASTICITE LINEAIRE

## PARTIE 1

Le problème d'élasticité linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(u) = f & \text{avec } \sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda(\nabla \cdot u)I_d \\ u = 0 & \text{dans } \Omega = ]0, L[ \times ]0, 1[ \\ \sigma(u)n = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases}$$

### 1. Création du maillage avec GMSH

Nous notons  $\Gamma_i$  les quatre côtés du bord, numérotés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre avec  $\Gamma_1$  le bord du bas.

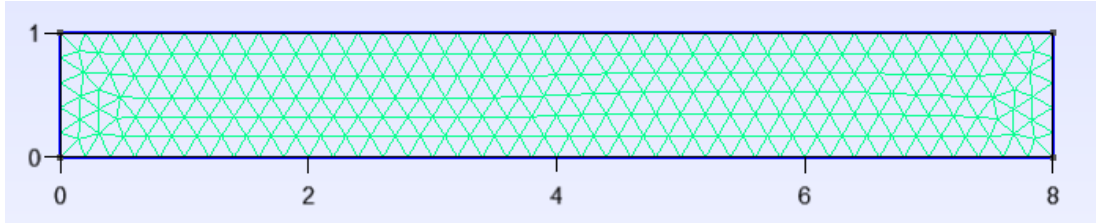


Figure 1 : Maillage pour L=8

### 2. Formulation variationnelle

On a  $f = (0,1)^T \in (L^2(\Omega))^d$  (dans notre cas, la dimension  $d = 2$ ). On pose  $V = \{v \in (H^1(\Omega))^d, v|_{\Gamma_1} = 0\}$ . La formulation variationnelle consiste à trouver  $u \in V$  telle que l'on ait :

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

Avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \lambda\nabla \cdot u \nabla \cdot v \, dx && \text{ou de façon équivalente,} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu(\nabla u + \nabla u^T) : (\nabla v + \nabla v^T) + \lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v) \, dx && \text{car } \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \\ l(v) &= - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \end{aligned}$$

Les détails de la formulation sont donnés en [ANNEXE](#).

### 3. Visualisation de la déformation du maillage

Pour cette section, on considère la densité  $\rho = 7800 \times 10^{-9} \text{ kg/m}^3$ . On prend  $\lambda = \mu = 1 \text{ Pa}$  et  $f = (0,1)^T$ . En utilisant la fonction **WarpByVector** de Paraview, on obtient la figure 2.

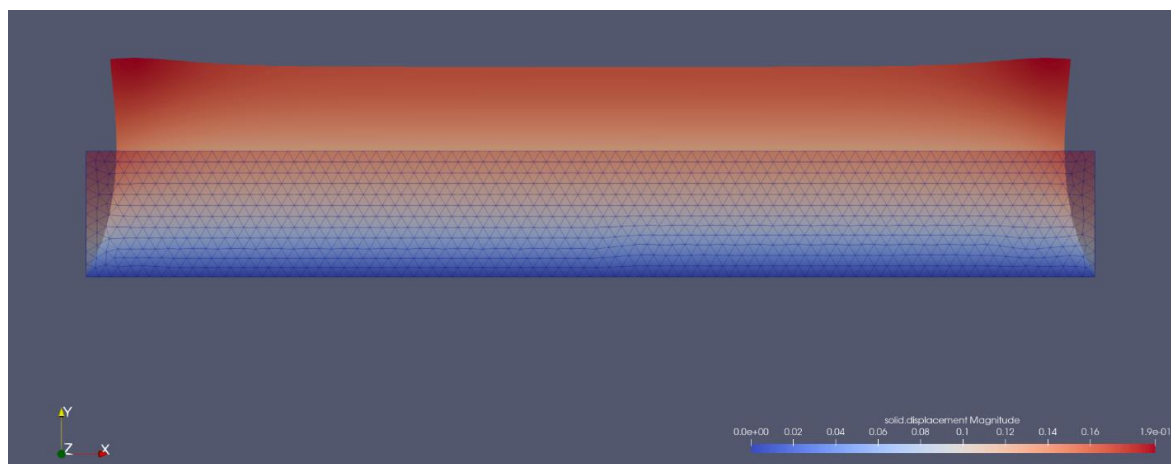


Figure 2 : Déformation de la structure avec un facteur d'échelle de 4

#### 4. Norme de Frobenius, champs Von-Mises et Tresca du tenseur des contrainte.

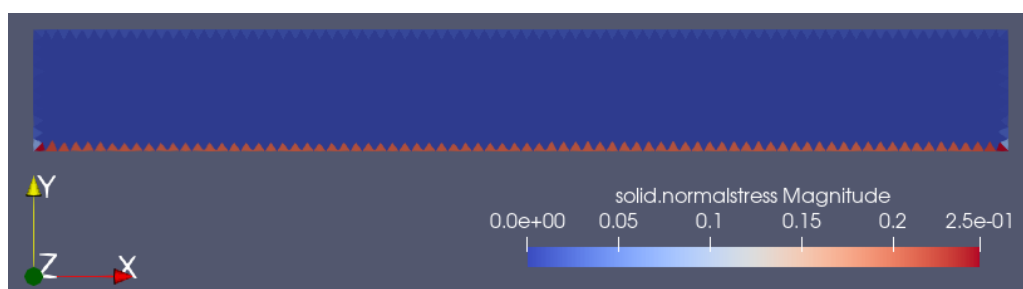


Figure 3 : Visualisation de la norme de Frobenius (magnitude du champ "normal-stress")

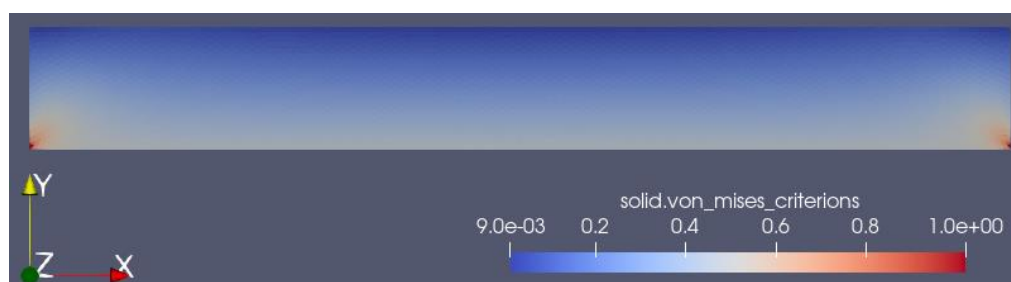


Figure 4 : Critère de Von-Mises

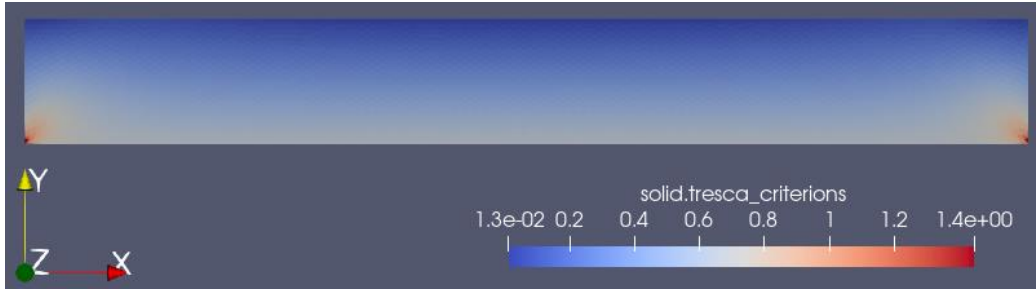


Figure 5 : Critère de Tresca

Le critère de Von-Mises représente la valeur critique de l'énergie de déformation élastique. Le critère de Tresca traduit la valeur critique du maximum de la force de cisaillement (Christensen, 2019). Ces deux valeurs traduisent les limites de plasticité du matériau. Sur les figures 4 et 5, l'analyse de ces critères montre que les contraintes les plus importantes sont exercées sur les coins du bas à gauche et à droite de la poutre. Ces points sont les plus susceptibles d'entrer en déformation plastique, et de rompre.

## **PARTIE 2 : Perte de coercivité**

### **1. Maillage avec GMSH**

Pour cette section, on ajoute deux trous circulaires dans le domaine de la figure 1.

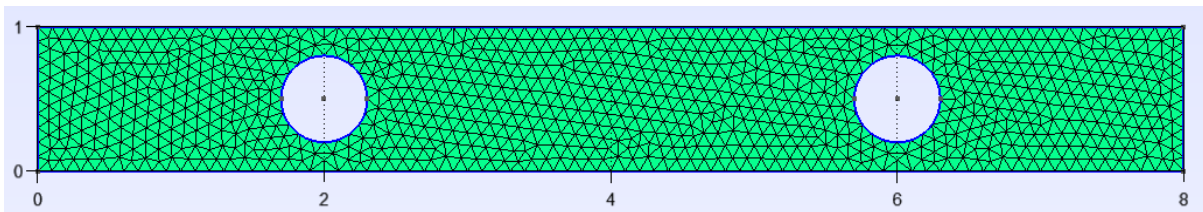


Figure 6 : Poutre trouée pour  $L = 8$

### **2. Solutions obtenues pour $\lambda/\mu = 1$**

Les bords gauche et droit sont fixes, et on pince la poutre, c'est-à-dire qu'on applique une force  $(0,1)^T$  sur  $\Gamma_1$ , et une force  $(0, -1)^T$  sur  $\Gamma_3$ . Aussi, on supprime la force volumique  $f$  qui s'appliquait précédemment au solide. On considère la densité  $\rho = 8100 \text{ kg/m}^3$  et on teste pour différentes valeurs de  $E$  et  $\nu$  de façon à toujours avoir  $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ . On rappelle que les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  (donnés ici en  $GPa$ ) sont obtenus à partir du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  par les formules :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sauf indication contraire, le diamètre du maillage utilisé est de  $h = 0.05$ . À l'aide du filtre **ExtractComponent** de Paraview, on affiche les lignes de niveau du déplacement vertical  $u_2$  avec un facteur d'échelle qu'on ajustera en fonction de l'intensité des déformations.

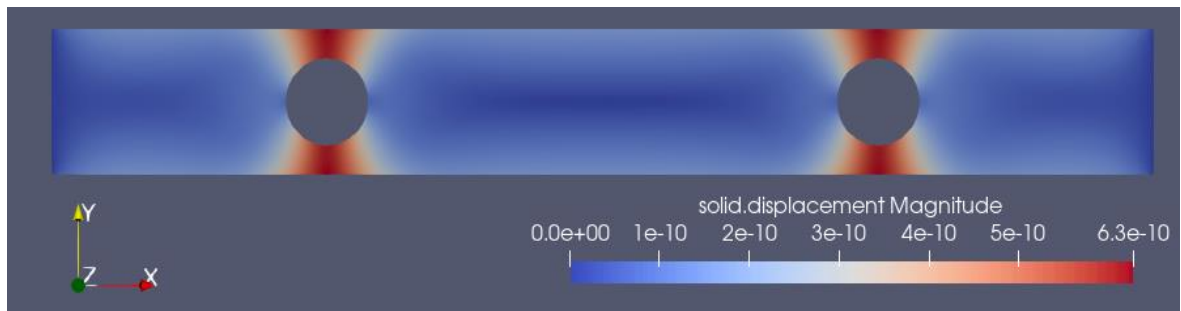


Figure 7 : Solution pour  $\lambda = \mu = 1$

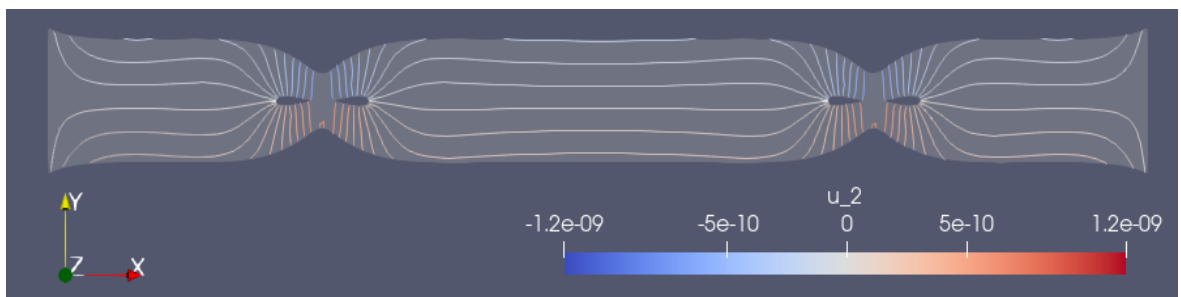


Figure 8 : Déformation verticale pour  $\lambda = \mu = 1$  avec un facteur d'échelle de  $5 \times 10^8$

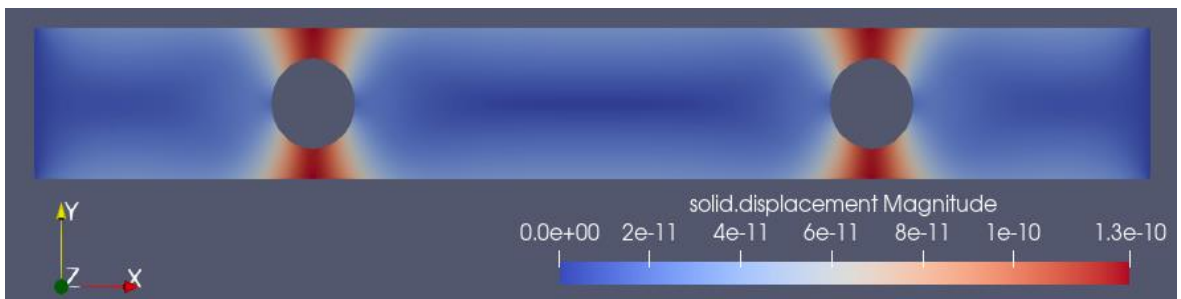


Figure 9 : Solution pour  $\lambda = \mu = 5$

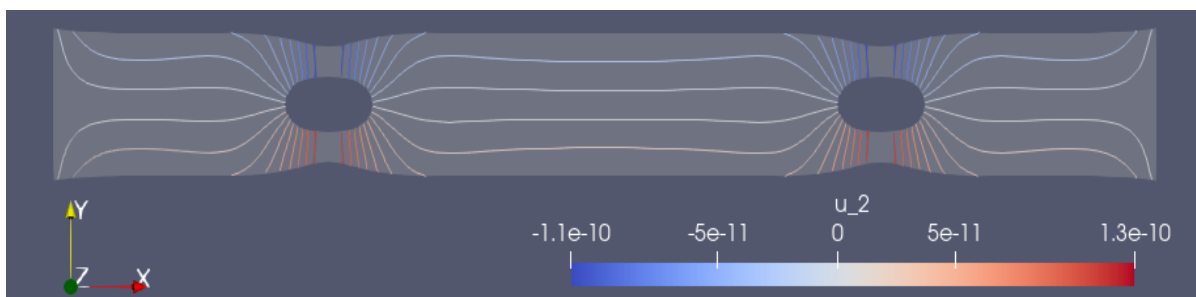


Figure 10 : Déformation verticale pour  $\lambda = \mu = 5$  avec un facteur d'échelle de  $10^9$

### 3. Solution obtenue pour $\lambda/\mu = 1000$

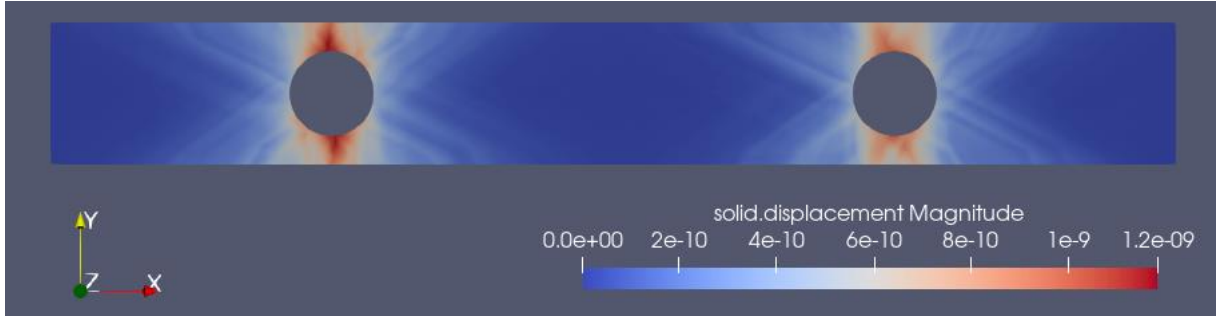


Figure 11 : Solution pour  $\lambda = 99.9$ ,  $\mu = 0.1$  et  $h = 0.05$

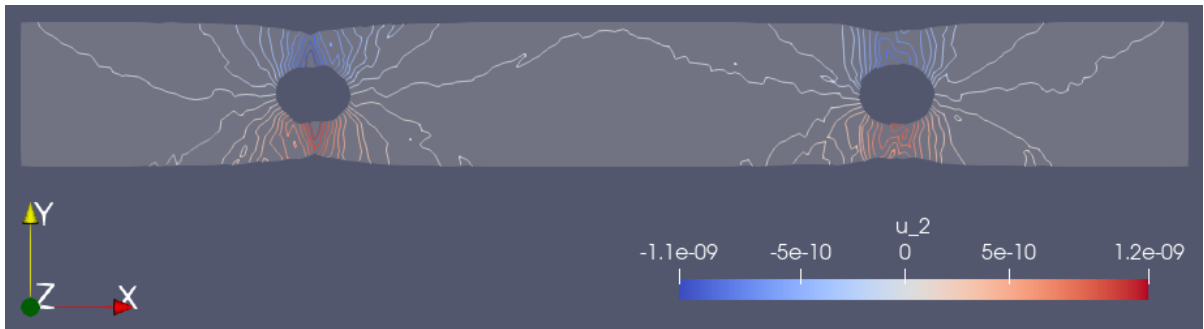


Figure 12 : Déformation verticale pour  $\lambda = 99.9$ ,  $\mu = 0.1$  et  $h = 0.05$  avec un facteur d'échelle de  $10^8$

Lorsque  $\lambda/\mu = 1$  (figures 8 et 10), on observe des déformations parfaitement symétriques avec des lignes de niveau lisses. En revanche lorsque  $\lambda/\mu = 1000$ , les lignes de niveau sont moins lisses et moins stables (figure 12). On observe une norme KSP résiduelle de l'ordre de  $10^{-16}$  pour les cas  $\lambda/\mu = 1$  alors qu'on a  $10^{-13}$  pour  $\lambda/\mu = 1000$ .

On s'attendait à ces résultats de stabilité car le cas  $\lambda/\mu = 1000$  correspond à un coefficient de Poisson  $\nu = 0.4995$  très proche de 0.5. Cette valeur critique correspondant à une limite d'incompressibilité, qui conduit à la perte de coercivité. En effet, la constante de coercivité de la forme bilinéaire  $a$  (voir Formulation variationnelle de la partie 1), qui dépend directement de  $\lambda$  et  $\mu$ , reste strictement positive mais se rapproche fortement de 0. Bien que le problème reste bien posé analytiquement, la stabilité du problème sur le plan numérique ne s'observe que pour des maillages relativement fins. On retrouve effectivement cette stabilité numérique à la figure 14, lorsque nous prenons cette fois un maillage plus fin ( $h = 0.01$ ) que celui des figures précédentes, où l'on avait  $h = 0.05$ . Pour éviter de tels maillages très coûteux, on pourrait opter pour une reformulation du problème sous forme de point selle admettant une condition de type inf-sup (Ern, Guermond, 2002, p. 5).

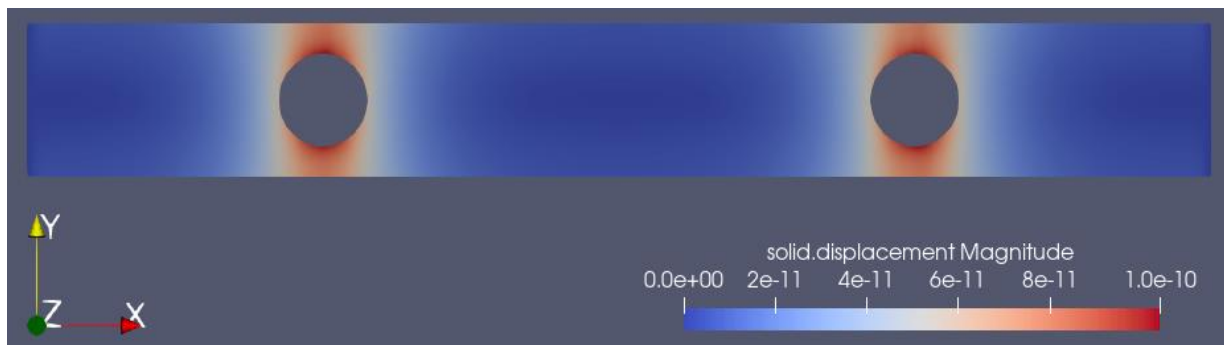


Figure 13 : Solution pour  $\lambda = 99.9$ ,  $\mu = 0.1$  et  $h = 0.01$

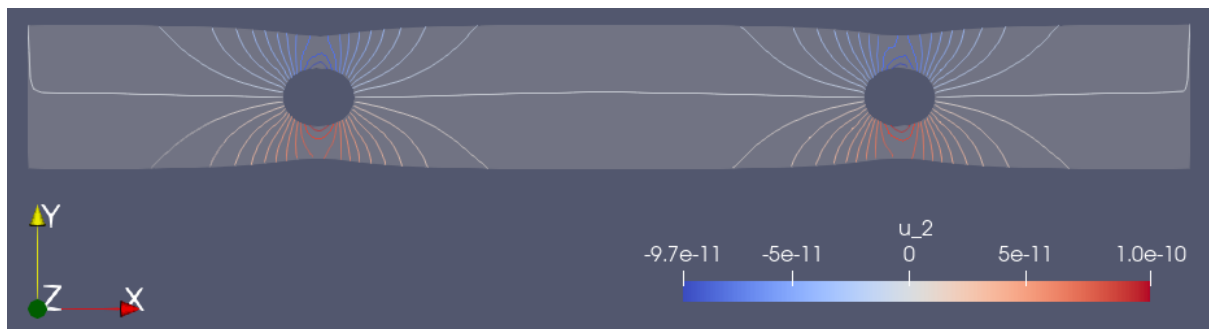


Figure 14 : Déformation verticale pour  $\lambda = 99.9$ ,  $\mu = 0.1$  et  $h = 0.01$  avec un facteur d'échelle de  $10^9$



## II. STOKES

### PARTIE 1 : Éléments finis stables

L'équation de Stokes est donnée par :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Et la solution de Kovasznay

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \\ \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{bmatrix}, \quad p(x, y) = -\frac{e^{2\lambda x}}{2} + C$$

Avec

$$\lambda = \frac{1}{2\nu} - \sqrt{\frac{1}{4\nu^2} + 2\pi^2} \quad \text{et } C \in \mathbb{R}$$

#### 1. Déterminons $f$ et $p$

En calculant le laplacien de  $u$  et le gradient de  $p$ , on trouve facilement que  $(u, p)$  est solution du système si:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \nu(\lambda^2 - 4\pi^2)e^{\lambda x} \cos(2\pi y) - \lambda e^{2\lambda x} \\ -\frac{\lambda\nu}{2\pi}(\lambda^2 - 4\pi^2)e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \end{pmatrix}$$

Pour avoir  $p$  à moyenne nulle, il faut choisir  $C$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} p(x, y) \, d\Omega = 0 &\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left( -\frac{e^{2\lambda x}}{2} + C \right) dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dy = 0 \\ &\Rightarrow \frac{3}{2}C - \left[ -\frac{1}{4\lambda} e^{2\lambda x} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = 0 \\ &\Rightarrow C = \frac{1}{6\lambda} (e^{2\lambda} - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

## 2. Création du maillage

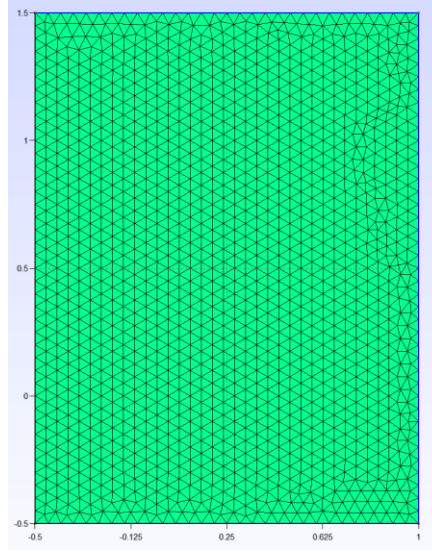


Figure 15 : Maillage avec GMSH

## 3. Formulation variationnelle

On suppose  $f \in (L^2(\Omega))^d$  et  $g \in (L^2(\Gamma))^d$ . Mais a priori,  $g \neq 0$  sur  $\partial\Omega = \Gamma$ . On suppose donc qu'il existe  $H \subset (H^2(\Omega))^d$  telle que  $\gamma_\Gamma(H) = g$  (ou  $\gamma$  désigne l'application trace) (d'après Lucquin, p. 58).

Trouvons  $u \in H + (H_0^1(\Omega))^d$  telle que,  $\forall v \in (H_0^1(\Omega))^d$ , on ait

$$\int_{\Omega} -v \Delta u \cdot v + \int_{\Omega} \Delta p \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v \quad (1)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \cdot v &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \Delta u_i v_i && \text{car } (\Delta u)_i = \Delta u_i \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \Delta u_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^d \left( - \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i + \int_{\Gamma} (\nabla u_i \cdot n) v_i d\Gamma \right) \\ &= - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i && \text{car } v_i|_{\Gamma} = 0 \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \nabla u_i \cdot \nabla v_i \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \end{aligned}$$

De même,

$$\int_{\Omega} \Delta p \cdot v = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v$$

L'équation (1) devient donc :

$$v \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

En ce qui concerne la condition d'incompressibilité du fluide, il suffit de trouver  $q \in L_*^2 = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q = 0\}$  telle que

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot u = 0$$

On pose

$$a(u, v) = v \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \quad b(v, q) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v$$

Et on obtient la formulation variationnelle, qui consiste à chercher  $u \in H + (H_0^1(\Omega))^d$  et  $p \in L_*^2$  telle que:

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = l(v) & \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d \\ b(u, q) = 0 & \forall q \in L_*^2 \end{cases}$$

#### 4. Implémentation avec les éléments P2/P1

On prend la densité du fluide  $\rho = 1$  et sa viscosité dynamique  $\mu = 0.035$  pour nos simulations. En évaluant la solution exacte sur les bords du domaine, on obtient la valeur de  $g$  pour les conditions de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ .

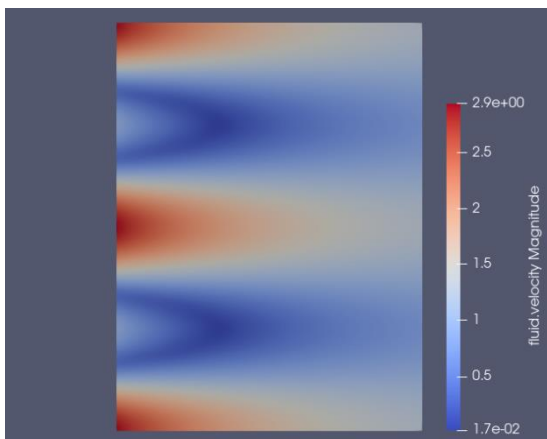


Figure 16 : Vitesse pour  $h=0.025$

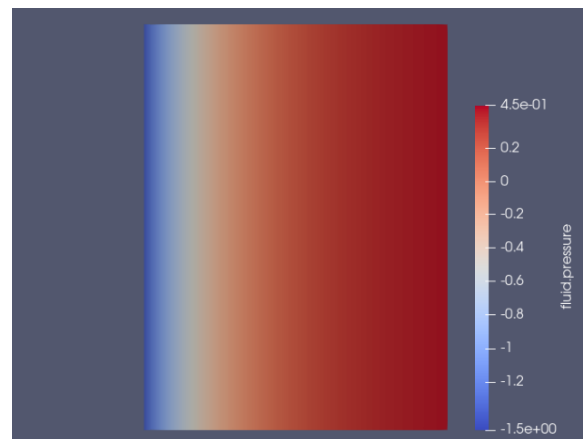


Figure 17 : Pression pour  $h=0.025$

En mode stationnaire avec  $h = 0.05$ , on obtient une pression moyenne de  $-1.58 \times 10^{-14} \text{ Pa}$ . Cette moyenne est effectivement nulle comme imposée par la constante  $C$ .

## 5. Analyse de convergence en vitesse et pression

Après avoir défini la constante  $C = \frac{1}{6\lambda}(e^{2\lambda} - e^{-\lambda})$  comme demandé à la question 1, on obtient les résultats ci-dessous (ces données sont présentes dans le fichier **src/fluid/partie1/ana\_cvg.py** du repository Github associé à ce travail).

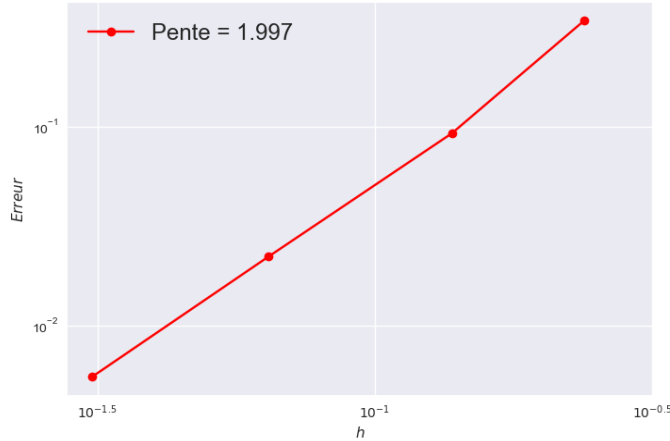
<b>h_gmsh</b>	<b>h</b>	<b>erreur L2 de u</b>	<b>erreur H1 de u</b>	<b>erreur L2 de p</b>
0.200	0.238468	7.83E-03	3.32E-01	8.80E-03
0.100	0.137755	1.08E-03	9.01E-02	2.23E-03
0.050	0.064325	1.13E-04	2.16E-02	5.65E-04
0.025	0.030949	1.39E-05	5.37E-03	1.41E-04

*Table 1: Erreur de convergence*

Les colonnes du tableau sont définies de la sorte :

- **h\_gmsh** : diamètre du maillage définie dans le fichier de configuration de la toolbox *feelp\_toolbox\_fluid*
- **h** : diamètre du maillage donné par la valeur *hMax* du champ *Space Discretization* exporté par la toolbox
- **erreur L2 de u** :  $\|u - u_h\|_{(L^2)^d}$
- **erreur H1 de u** :  $\|u - u_h\|_{(H^1)^d}$
- **erreur L2 de p** :  $\|p - p_h\|_{L^2}$

Nous traçons donc le graphe de  $\|u - u_h\|_{(H^1)^d} + \|p - p_h\|_{L^2}$  en fonction  $h$  en mode loglog.



*Figure 18 : Illustration de  $\|u - u_h\|_{(H^1)^d} + \|p - p_h\|_{L^2}$*

On décide aussi de tracer le graphe de  $\|u - u_h\|_{(L^2)^d}$  en fonction  $h$  toujours en mode loglog.

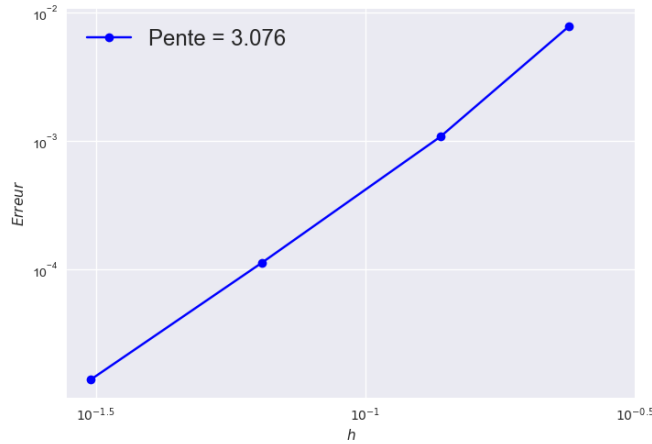


Figure 19 : Illustration de  $\|u - u_h\|_{(L^2)^d}$

Ces résultats sont exactement ceux prédits par la théorie. En effet, l'estimation de l'erreur d'un problème mixte bien posé pour un élément de Taylor-Hood  $P2/P1$  s'écrit (Prud'homme, 2020):

Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $(u, p)$  la solution du problème de Stokes. Soit  $(u_h, p_h)$  la solution approchée.

Si  $u \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^d$  et  $p \in H^2(\Omega) \cap L_*^2$ , alors  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall h > 0$  :

$$\|u - u_h\|_{(H^1)^d} + \|p - p_h\|_{L^2} \leq ch^2 \left( \|u\|_{(H^3)^d} + \|p\|_{H^2} \right)$$

Si de plus le problème est régularisant, alors :

$$\|u - u_h\|_{(L^2)^d} \leq ch^3 \left( \|u\|_{(H^3)^d} + \|p\|_{H^2} \right)$$

On vérifie facilement que la solution  $(u, p)$  de Kovasnay définie à la question 1 est bien dans  $(H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^d \times H^2(\Omega) \cap L_*^2(\Omega)$ , et le second membre calculé  $f \in L^2(\Omega)$ . Ce théorème est la raison pour laquelle nous obtenons des pentes très proches de 2 et 3 respectivement sur les figures 18 et 19.

## **PARTIE 2 : Navier-Stokes instationnaire**

Le problème à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u = g_D \\ u = 0 \\ \nu \partial_n u - pn = g_N \\ u(0, x) = u_{init}(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \text{dans } \Gamma_{in} \times [0, T] \\ \text{dans } \Gamma_0 \times [0, T] \\ \text{dans } \Gamma_{out} \times [0, T] \\ \text{dans } \Omega \end{array}$$

## 1. Semi-discrétisation en temps

On suppose que  $u_{init} \in (H^2(\Omega))^d$  et qu'à chaque pas de temps  $t$ ,  $f \in (L^2(\Omega))^d$ ,  $g_D \in (L^2(\Gamma_{in}))^d$ ,  $g_0 \in (L^2(\Gamma_0))^d$ , et  $g_N \in (L^2(\Gamma_{out}))^d$ . On pose  $\Delta t$  le pas du temps, et  $n$  l'indice de l'iteration en temps tel que  $0 \leq n \leq nb_{iter}$ . Au temps  $t_n = n\Delta t$ , on fait l'approximation  $u^n(x) \approx u(t_n, x)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (u^{n+1} \cdot \nabla)u^{n+1} - \nu \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= f \\ \Rightarrow u^{n+1} + \Delta t(u^{n+1} \cdot \nabla)u^{n+1} - \nu \Delta t \Delta u^{n+1} + \Delta t \nabla p^{n+1} &= u^n + \Delta t f \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation  $(u^{n+1} \cdot \nabla)u^{n+1} \approx (u^n \cdot \nabla)u^{n+1} = (\nabla u^{n+1})u^n$ , on obtient

$$u^{n+1} + \Delta t(\nabla u^{n+1})u^n - \nu \Delta t \Delta u^{n+1} + \Delta t \nabla p^{n+1} = u^n + \Delta t f$$

Afin de relever les conditions de Dirichlet non homogènes sur le bord  $\Gamma_{in}$ , on suppose qu'il existe une fonction  $u_g \in (H^2(\Omega))^d$  telle que  $\gamma_{\Gamma_{in}} u_g = g_D$  (ou  $\gamma$  désigne l'application trace de  $\Omega$  dans  $\Gamma_{in}$ ). Ceci revient à supposer l'existence de  $H \subset (H^2(\Omega))^d$  telle que  $\gamma_{\Gamma_{in}}(H) = g_D$  (d'après Lucquin, p. 58). On pose  $X = \{v \in (H^1(\Omega))^d, v|_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_0} = 0\}$ . Pour tout  $n \in \llbracket 0, nb_{iter} \rrbracket$ , on cherche  $u^{n+1} \in H + X$  telle que pour tout  $v \in X$  et on ait :

$$\int_{\Omega} u^{n+1} \cdot v + \Delta t \int_{\Omega} [(\nabla u^{n+1})u^n] \cdot v - \nu \Delta t \int_{\Omega} \Delta u^{n+1} \cdot v + \Delta t \int_{\Omega} \nabla p^{n+1} \cdot v = \int_{\Omega} (u^n + \Delta t f) \cdot v \quad (1)$$

Or d'après les formules de Green,

$$\int_{\Omega} \Delta u^{n+1} \cdot v = - \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} : \nabla v + \int_{\Gamma_{out}} (\nabla u^{n+1} n) \cdot v \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p^{n+1} \cdot v = - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v + \int_{\Gamma_{out}} (p^{n+1} n) \cdot v \quad (3)$$

On introduit (2) et (3) dans (1)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{n+1} \cdot v + \Delta t \int_{\Omega} [(\nabla u^{n+1})u^n] \cdot v + \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \Delta t \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v \\ - \Delta t \left\{ \int_{\Gamma_{out}} \{(\nabla u^{n+1} n) - p^{n+1} n\} \cdot v \right\} = \int_{\Omega} (u^n + \Delta t f) \cdot v \end{aligned}$$

Or  $(\nabla u^{n+1} n) - p^{n+1} n = \nu \partial_n u^{n+1} - p^{n+1} n = 0$  sur  $\Gamma_{out}$ . On a donc

$$\int_{\Omega} [u^{n+1} + \Delta t(\nabla u^{n+1})u^n] \cdot v + \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} : \nabla v - \Delta t \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v = \int_{\Omega} (u^n + \Delta t f) \cdot v$$

Avec  $H = (\gamma_{\Gamma_{in}})^{-1}(g_D)$ ,  $X = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_0} = 0\}$ , et  $M = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q = 0\}$ , on obtient le problème variationnelle qui, à chaque pas de temps, consiste à trouver  $(u^{n+1}, p^{n+1}) \in (H + X) \times (M)$  tels que

$$\begin{cases} a(u^{n+1}, v) + b(v, p^{n+1}) = l(v) & \forall v \in X \\ b(u^{n+1}, q) = 0 & \forall q \in M \end{cases}$$

Avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [u + \Delta t(\nabla u)u^n] \cdot v + \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \quad \text{ou aussi}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} [u + \Delta t(u^n \cdot \nabla)u] \cdot v + \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \\
b(v, q) &= -\Delta t \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \\
l(v) &= \int_{\Omega} (u^n + \Delta t f) \cdot v
\end{aligned}$$

## 2. Programmation de la méthode

On effectue cette simulation avec  $\rho = 1$ , et  $\mu = 0.05$ .

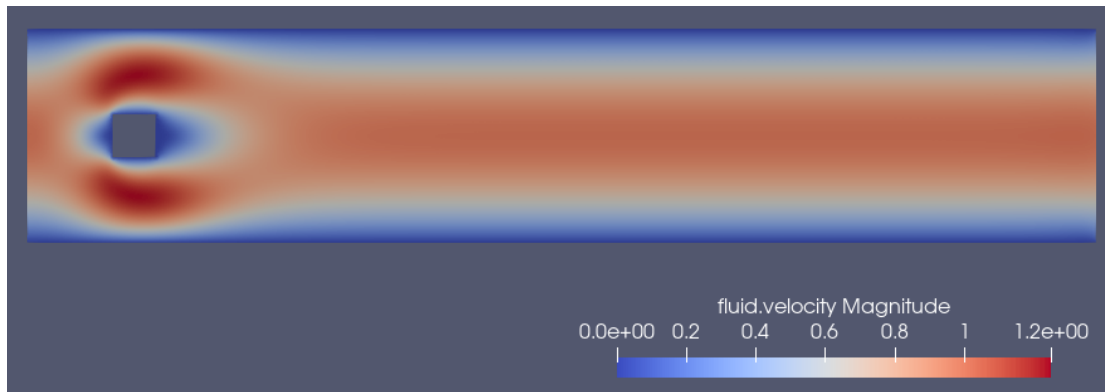


Figure 20 : Vitesses à l'instant  $t = 10s$

## 3. Calcul de la trainée et de la portance

On exporte les forces qui s'appliquent sur la surface de l'obstacle **Gamma\_0\_2** et on obtient le tableau suivant.

<b>Variable</b>	<b>Maximum</b>	<b>Mean</b>	<b>Minimum</b>
<b>drag</b>	1.36027	-1.03735	-12.9142
<b>lift</b>	0.00226552	-0.00106062	-0.0148719

Table 2 : Description de la trainée (drag) et de la portance (lift) pour une viscosité de 0.05

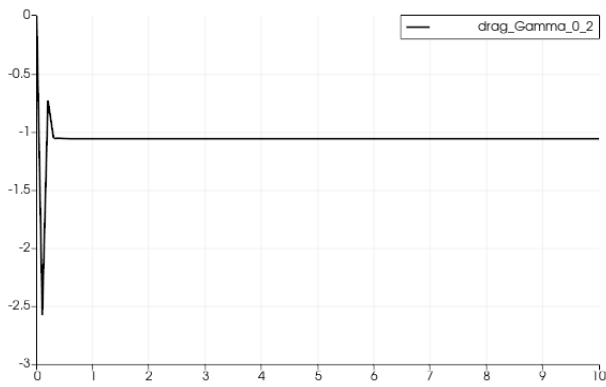


Figure 21 : Drag pour une viscosité  $\mu = 0.05$

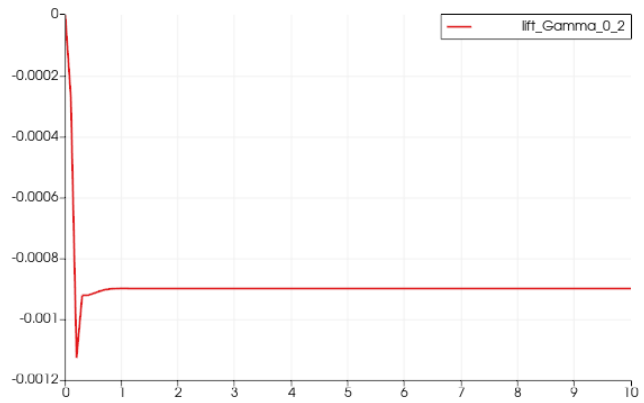


Figure 22 : Lift pour une viscosité  $\mu = 0.05$

On observe que la traînée et la portance atteignent leurs valeurs extrêmes au tout début de la simulation. Après cette subite impulsion (correspondant au profil de vitesse imposé à l'instant initial), elles prennent des valeurs stables. Tandis que la portance vaut approximativement 0 (qui correspond au maintien de l'obstacle sur l'horizontale), il est intéressant de remarquer que la traînée elle, n'est pas nulle.

#### 4. Diminution de la viscosité

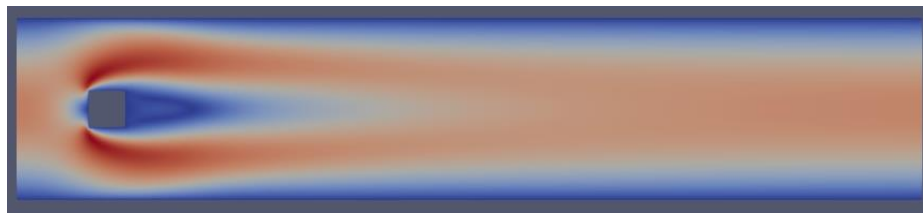


Figure 23 : Vitesse pour  $\mu = 5 \times 10^{-3}$  à  $t = 10s$

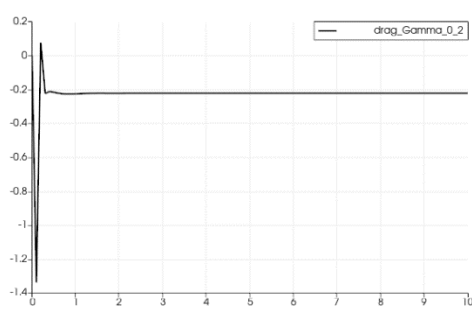


Figure 24 : Trainée pour  $\mu = 5 \times 10^{-3}$

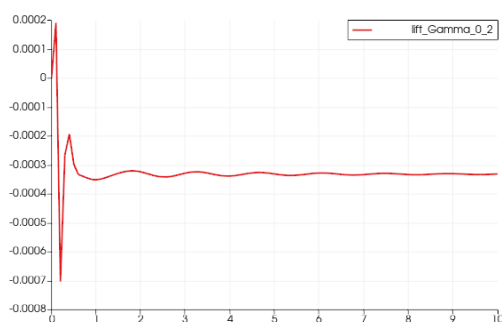


Figure 25 : Portance pour  $\mu = 5 \times 10^{-3}$



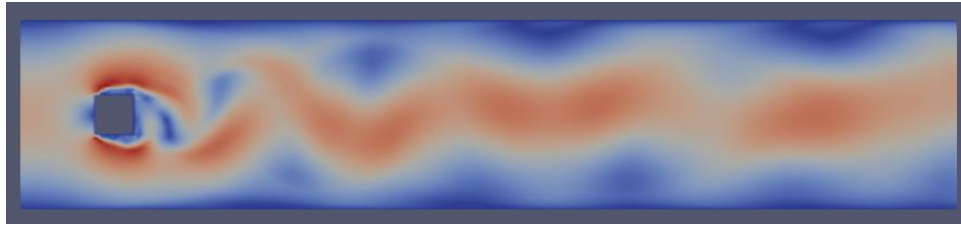


Figure 26 : Vitesse pour  $\mu = 5 \times 10^{-4}$  à  $t = 10s$

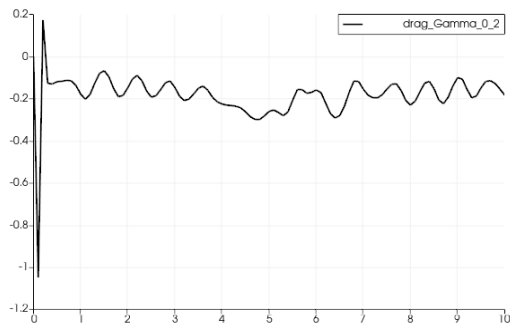


Figure 27 : Trainée pour  $\mu = 5 \times 10^{-4}$

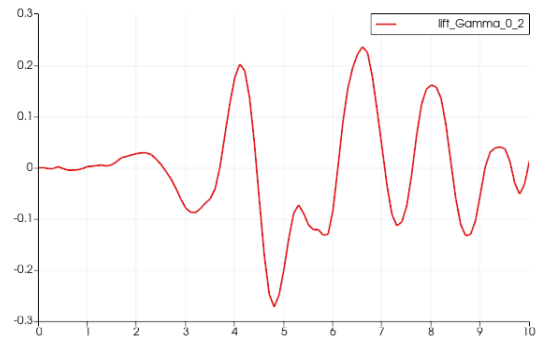


Figure 28 : Portance pour  $\mu = 5 \times 10^{-4}$

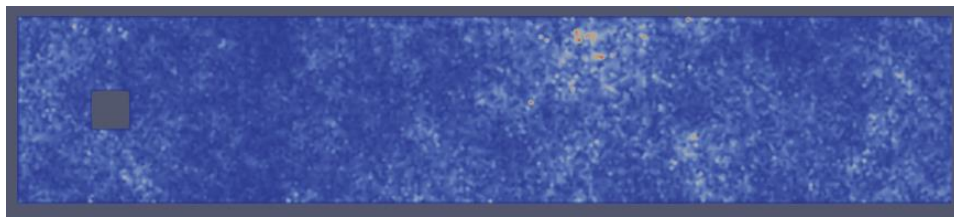


Figure 29 : Vitesse pour  $\mu = 5 \times 10^{-5}$  à  $t = 10s$

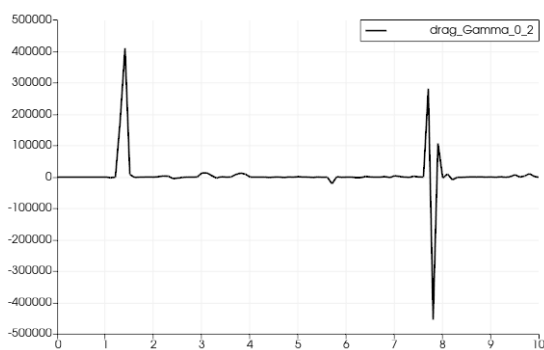


Figure 30 : Trainée pour  $\mu = 5 \times 10^{-5}$

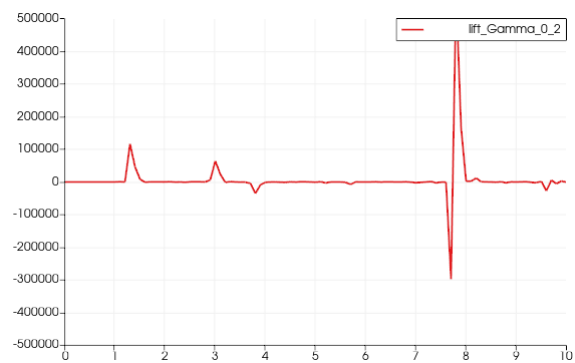


Figure 31 : Portance pour  $\mu = 5 \times 10^{-5}$

On constate qu'au fur et à mesure que la viscosité diminue, il devient de plus en plus difficile d'avoir une trainée et une portance fixe. Les fluctuations très importantes de ces valeurs (figures 30 et 31) traduisent un déplacement très turbulent du fluide autour de l'obstacle. On aurait pu déduire ces résultats en interprétant le

nombre de Reynolds. En effet,  $Re = \frac{\rho UL}{\nu}$  permet de prédire le régime d'écoulement d'un fluide. Pour  $Re = 8,80,800 < 2300$  (cas  $\nu = \mu = 5 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-3}$ , et  $5 \times 10^{-4}$ ) on est dans un régime **laminaire** comme le traduisent les figures 20, 23, et 26. En revanche, pour  $Re = 8000 > 4000$  (cas  $\nu = \mu = 5 \times 10^{-5}$ ), on se retrouve dans un régime **turbulent** (figure 29) ce qui explique les valeurs non déterministes de la trainée et de la portance.

### III. ANNEXE

#### Formulation variationnelle pour un problème d'élasticité linéaire

On a le système :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(u) = f & \text{avec } \sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda(\nabla \cdot u)Id \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u)n = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases}$$

Ou  $u$  désigne le déplacement. Soit  $v \in V = \{v \in (H^1(\Omega))^d, v|_{\Gamma_1} = 0\}$ . On a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma(u) = f &\Rightarrow \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} = f_i & i = 1, 2, \dots, d \\ &\Rightarrow \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i = f_i v_i \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx \\ &\Rightarrow - \int_{\Omega} \sum_j \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma} \sum_j \sigma_{ij}(u) n_j v_i d\Gamma(x) = \int_{\Omega} f_i v_i dx \quad \text{d'après la formule de Green} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sum_j \sigma_{ij}(u) n_j v_i d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma_1} \sum_j \sigma_{ij}(u) n_j v_i d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} \sum_j \sigma_{ij}(u) n_j v_i d\Gamma(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $v_i = 0$  sur  $\Gamma_1$ , et  $\sum_j \sigma_{ij}(u) n_j = \sigma_i(u) \cdot n = (\sigma(u)n)_i = 0$  sur  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  pour  $i = 1, 2, \dots, d$

En revenant à la formulation variationnelle, on a :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma(u) = f &\Rightarrow - \int_{\Omega} \sum_j \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx & i = 1, 2, \dots, d \\ &\Rightarrow - \int_{\Omega} \sigma_i(u) \cdot \nabla v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx \\ &\Rightarrow - \int_{\Omega} \sigma_i(u) \cdot (\nabla v)_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx \end{aligned}$$

On somme suivant  $i$  et on utilise à notation  $tr(AB^T) = \sum_i A_i \cdot B_i = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij} = A : B$  pour obtenir

$$\int_{\Omega} tr(\sigma(u) (\nabla v)^T) dx = - \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

On remplace  $\sigma(u)$  par son expression et on obtient

$$\int_{\Omega} tr((2\mu\varepsilon(u) + \lambda(\nabla \cdot u)Id) (\nabla v)^T) dx = - \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

$$\Rightarrow 2\mu \int_{\Omega} \text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v^T) dx + \lambda \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) \text{tr}(\text{Id} \nabla v^T) dx = - \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad (1)$$

D'une part, avec  $\varepsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T)$ , on a

$$\begin{aligned} 2\text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v^T) &= \text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v^T) + \text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v^T) \\ &= \text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v^T) + \text{tr}(\nabla v \varepsilon(u)^T) \quad \text{car } \text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) \\ &= \text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v^T) + \text{tr}(\nabla v \varepsilon(u)) \quad \text{car } \varepsilon(u) \text{ est symétrique} \\ &= \text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v^T) + \text{tr}(\varepsilon(u) \nabla v) \quad \text{car } \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \\ &= 2\text{tr}(\varepsilon(u) \varepsilon(v)) \end{aligned} \quad (2)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot u) \text{tr}(\text{Id} \nabla v^T) &= (\nabla \cdot u) \text{tr}(\nabla v) \\ &= \nabla \cdot u \nabla \cdot v \quad \text{car } \text{tr}(\nabla v) = \nabla \cdot v \end{aligned} \quad (3)$$

En remplaçant les expressions en (2) et (3) dans l'équation (1), on obtient

$$2\mu \int_{\Omega} \text{tr}(\varepsilon(u) \varepsilon(v)) dx + \lambda \int_{\Omega} \nabla \cdot u \nabla \cdot v dx = - \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

On peut mettre cette expression sous la forme

$$\int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \lambda \text{div } u \text{div } v dx = - \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

On obtient le problème variationnelle qui consiste à trouver  $u \in V = \{v \in (H^1(\Omega))^d, v|_{\Gamma_1} = 0\}$

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

Avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \lambda \nabla \cdot u \nabla \cdot v dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu (\nabla u + \nabla u^T) : (\nabla v + \nabla v^T) + \lambda \nabla \cdot u \nabla \cdot v dx \\ l(v) &= - \int_{\Omega} f \cdot v dx \end{aligned}$$

[Retour au problème d'élasticité linéaire.](#)

## IV. REFERENCES

- Prudhomme, C. (2020). "MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES EDP". Récupéré de [https://feelpp.github.io/csmi-edp/ch5-stokes.html#/\\_hatp\\_umathbbp\\_2\\_quad\\_hatp\\_pmathbbp\\_1](https://feelpp.github.io/csmi-edp/ch5-stokes.html#/_hatp_umathbbp_2_quad_hatp_pmathbbp_1)
- Lucquin, B. (2004). "Equations aux dérivées partielles et leurs approximations : Niveau M1". Récupéré de [https://books.google.fr/books/about/Equations\\_aux\\_d%C3%A9riv%C3%A9es\\_partielles\\_et\\_l.html?id=y0V8AAAACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.fr/books/about/Equations_aux_d%C3%A9riv%C3%A9es_partielles_et_l.html?id=y0V8AAAACAAJ&redir_esc=y)
- Christensen, R. (2019). "How Do Mises and Tresca Fit In". Récupéré de <https://failurecriteria.com/misescriteriontr.html>
- Ern, A., Guermond, J-L (2002). "Éléments finis: théorie, applications, mise en oeuvre". Récupéré de <https://books.google.fr/books?id=SHhnLz0EMywC&pg=PA5&lpg=PA5&dq=perte+de+coercivit%C3%A9+%C3%A9lasticit%C3%A9+lineaire&source=bl&ots=C2ulMT0iXm&sig=ACfU3U0jYlqW5wdoqpmKcTyPaJ-JT4B8hA&hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwih7bY1ovqAhXDSUIHbVXBqIQ6AEwA3oECAoQAQ#v=onepage&q=perte%20de%20coercivit%C3%A9%20%C3%A9lasticit%C3%A9%20lineaire&f=false>