Contenu

[I. ELASTICITE LINEAIRE 3](#_Toc43408548)

[A. PARTIE 1 3](#_Toc43408549)

[1. Création du maillage avec GMSH 3](#_Toc43408550)

[2. Formulation variationnelle 3](#_Toc43408551)

[3. Visualisation de la déformation du maillage 3](#_Toc43408552)

[4. Norme de Frobenius, champs Von-Mises et Tresca du tenseur des contrainte. 4](#_Toc43408553)

[B. PARTIE 2 : Perte de coercivité 5](#_Toc43408554)

[1. Maillage avec GMSH 5](#_Toc43408555)

[2. Solutions obtenues pour 5](#_Toc43408556)

[3. Solution obtenue pour 7](#_Toc43408557)

[II. STOKES 9](#_Toc43408558)

[A. PARTIE 1 : Eléments finis stables 9](#_Toc43408559)

[1. Déterminons et 9](#_Toc43408560)

[2. Création du maillage 10](#_Toc43408561)

[3. Formulation variationnelle 10](#_Toc43408562)

[4. Implémentation avec les éléments 11](#_Toc43408563)

[5. Analyse de convergence en vitesse et pression 12](#_Toc43408564)

[B. PARTIE 2 : Navier-Stokes instationnaire 13](#_Toc43408565)

[1. Semi-discrétisation en temps 14](#_Toc43408566)

[2. Programmation de la méthode 15](#_Toc43408567)

[3. Calcul de la trainée et de la portance 15](#_Toc43408568)

[4. Diminution de la viscosité 16](#_Toc43408569)

[III. ANNEXE 19](#_Toc43408570)

[Formulation variationnelle pour un problème d’élasticité linéaire 19](#_Toc43408571)

[IV. REFERENCES 21](#_Toc43408572)

# ELASTICITE LINEAIRE

## PARTIE 1

Le problème d’élasticité linéaire s’écrit :

### Création du maillage avec GMSH

Nous notons les quatre côtés du bord, numérotés dans le sens inverse des aiguilles d’une montre avec le bord du bas.

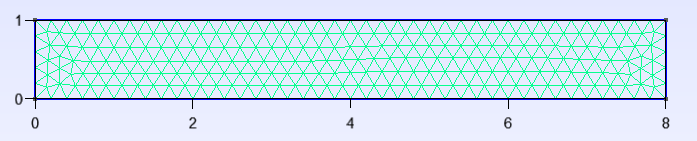


Figure 1 : Maillage pour L=8

### Formulation variationnelle

On a (dans notre cas, la dimension ). On pose . La formulation variationnelle consiste à trouver telle que l'on ait :

Avec

Les détails de la formulation sont donnés en [ANNEXE](#_ANNEXE).

### Visualisation de la déformation du maillage

Pour cette section, on considère la densité . On prend et . En utilisant la fonction **WarpByVector** de Paraview, on obtient la figure 2.

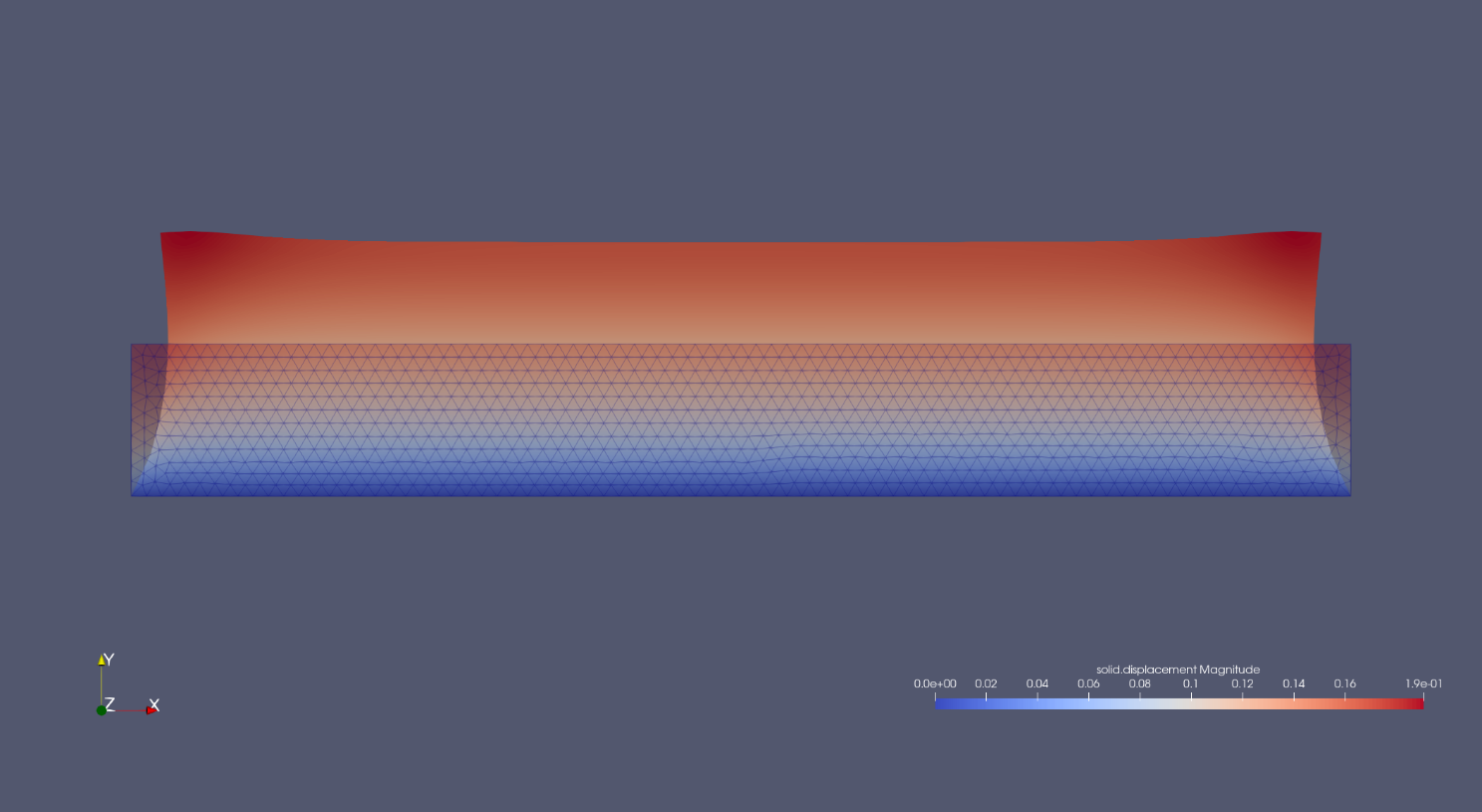


Figure 2 : Déformation de la structure avec un facteur d'échelle de 4

### Norme de Frobenius, champs Von-Mises et Tresca du tenseur des contrainte.

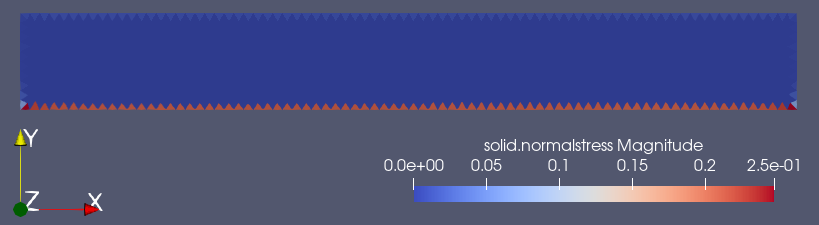


Figure 3 : Visualisation de la norme de Frobenius (magnitude du champ "normal-stress")

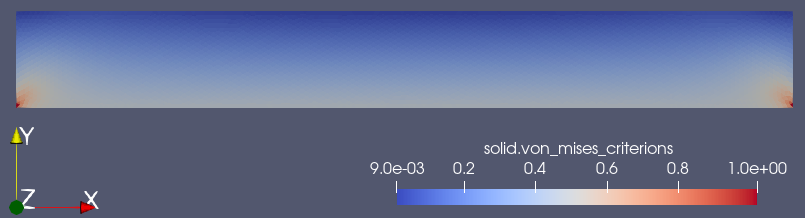


Figure 4 : Critère de Von-Mises

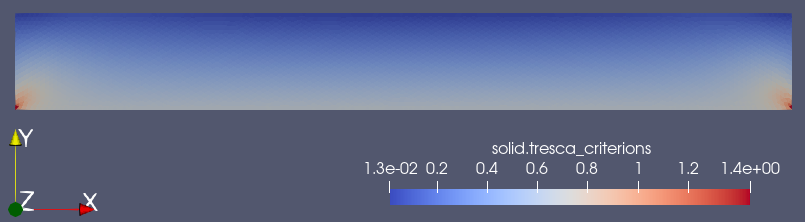


Figure 5 : Critère de Tresca

Le critère de Von-Mises représente la valeur critique de l’énergie de déformation élastique. Le critère de Tresca traduit la valeur critique du maximum de la force de cisaillement (Christensen, 2019). Ces deux valeurs traduisent les limites de plasticité du matériau. Sur les figures 4 et 5, l’analyse de ces critères montre que les contraintes les plus importantes sont exercées sur les coins du bas à gauche et à droite de la poutre. Ces points sont les plus susceptibles d’entrer en déformation plastique, et de rompre.

## PARTIE 2 : Perte de coercivité

### Maillage avec GMSH

Pour cette section, an ajoute deux trous circulaires dans le domaine de la figure 1.

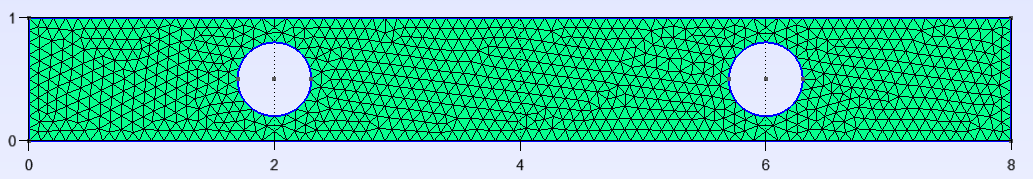


Figure 6 : Poutre trouée pour L = 8

### Solutions obtenues pour

Les bords gauche et droit sont fixes, et on pince la poutre, c’est-à-dire qu’on applique une force sur , et une force sur . Aussi, on supprime la force volumique qui s’appliquait précédemment au solide. On considère la densité et on teste pour différentes valeurs de et de façon à toujours avoir . On rappelle que les coefficients de Lamé et (donnés ici en ) sont obtenus à partir du module de Young et du coefficient de Poisson par les formules :

Sauf indication contraire, le diamètre du maillage utilisé est de . À l’aide du filtre **ExtractComponent** de Paraview, on affiche les lignes de niveau du déplacement vertical avec un facteur d'échelle qu’on ajustera en fonction de l’intensité des déformations.

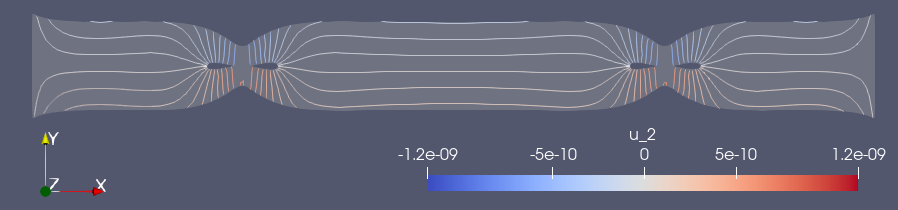


Figure 8 : Déformation verticale pour avec un facteur d'échelle de

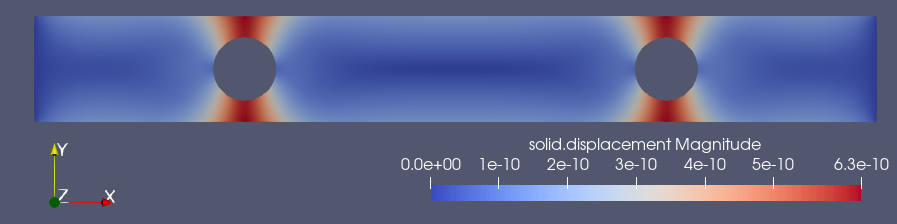


Figure 7 : Solution pour

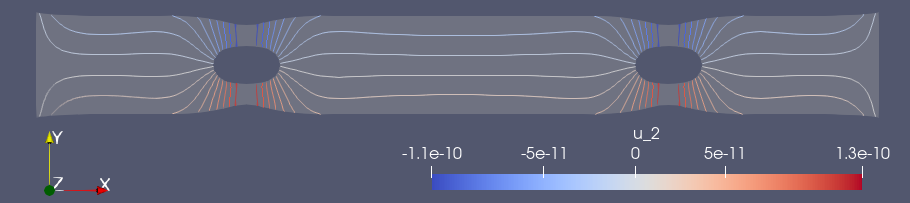


Figure 10 : Déformation verticale pour avec un facteur d'échelle de

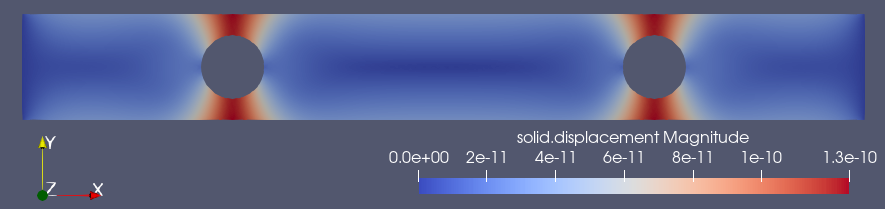


Figure 9 : Solution pour

### Solution obtenue pour



Figure 11 : Solution pour , et

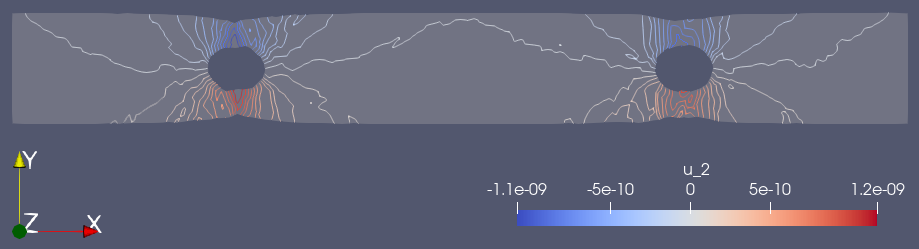


Figure 12 : Déformation verticale pour , et avec un facteur d'échelle de

Lorsque (figures 8 et 10), on observe des déformations parfaitement symétriques avec des lignes de niveau lisses. En revanche lorsque , les lignes de niveau sont moins lisses et moins stables (figure 12). On observe une norme KSP résiduelle de l’ordre de pour les cas alors qu’on a pour .

On s’attendait à ces résultats de stabilité car le cas correspond à un coefficient de Poisson très proche de . Cette valeur critique correspondant à une limite d’incompressibilité, qui conduit à la perte de coercivité. En effet, la constante de coercivité de la forme bilinéaire (voir Formulation variationnelle de la partie 1), qui dépend directement de et reste strictement positive mais se rapproche fortement de . Bien que le problème reste bien posé analytiquement, la stabilité du problème sur le plan numérique ne s’observe que pour des maillages relativement fins. On retrouve effectivement cette stabilité numérique à la figure 14, lorsque nous prenons cette fois un maillage plus fin ( que celui des figures précédentes, ou l’on avait . Pour éviter de tels maillages très coûteux, on pourrait opter pour une reformulation du problème sous forme de point selle admettant une condition de type inf-sup (Ern, Guermond, 2002, p. 5).

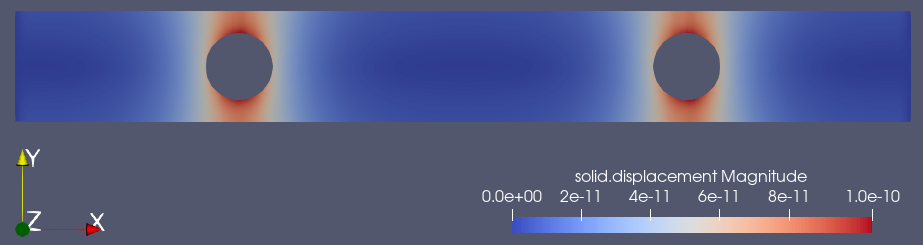


Figure 13 : Solution pour , et

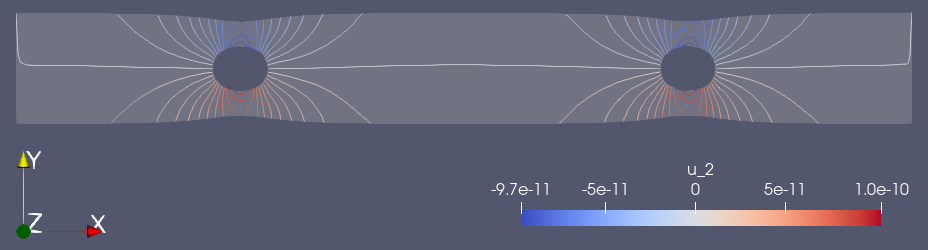


Figure 14 : Déformation verticale pour et avec un facteur d'échelle de

# STOKES

## PARTIE 1 : Eléments finis stables

L’équation de Stokes est donnée par :

Et la solution de Kovasznay

Avec

### Déterminons et

En calculant le laplacien de et le gradient de , on trouve facilement que ( est solution du système si:

Pour avoir à moyenne nulle, il faut choisir telle que :

### Création du maillage

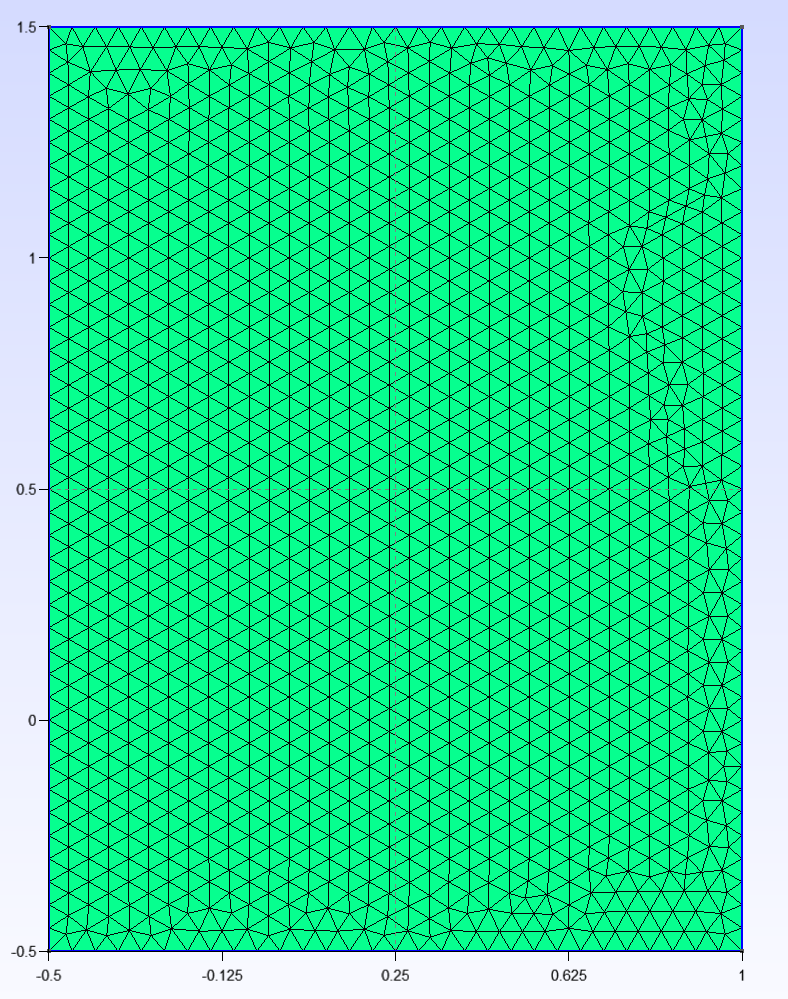


Figure 15 : Maillage avec GMSH

### Formulation variationnelle

On suppose et . Mais a priori, . On suppose donc qu’il existe telle que (ou désigne l’application trace) (d’après Lucquin, p. 58).

Trouvons telle que, , on ait

Or,

De même,

L’équation (1) devient donc :

En ce qui concerne la condition d’incompressibilité du fluide, il suffit de trouver telle que

On pose

Et on obtient la formulation variationnelle, qui consiste à chercher et telle que:

### Implémentation avec les éléments

On prend la densité du fluide et sa viscosité dynamique pour nos simulations. En évaluant la solution exacte sur les bords du domaine, on obtient la valeur de pour les conditions de Dirichlet sur .

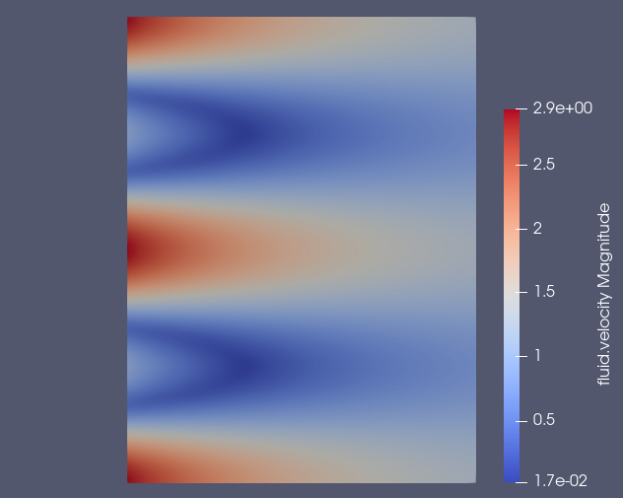


Figure 16 : Vitesse pour h=0.025

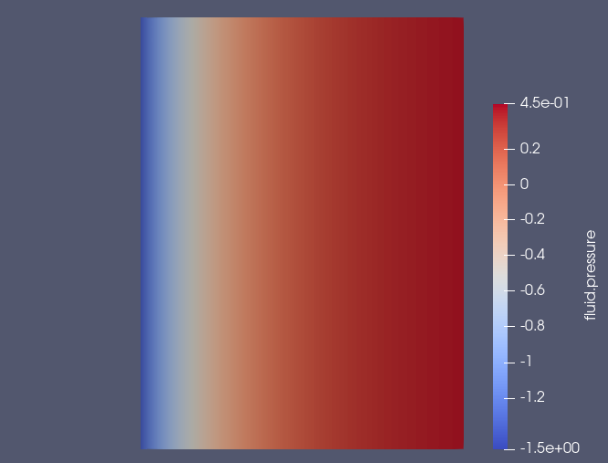


Figure 17 : Pression pour h=0.025

En mode stationnaire avec , on obtient une pression moyenne de . Cette moyenne est effectivement nulle comme imposée par la constante .

### Analyse de convergence en vitesse et pression

Après avoir défini la constante comme demandé à la question 1, on obtient les résultats ci-dessous (ces données sont présentes dans le fichier **src/fluid/partie1/ana\_cvg.py** du repository Github associé à ce travail).



Table 1: Erreur de convergence

Les colonnes du tableau sont définies de la sorte :

* **h\_gmsh** : diamètre du maillage définie dans le fichier de configuration de la toolbox *feelpp\_toolbox\_fluid*
* **h** : diamètre du maillage donné par la valeur *hMax* du champ *Space Discretization* exporté par la toolbox
* **erreur L2 de u** :
* **erreur H1 de u** :
* **erreur L2 de p** :

Nous traçons donc le graphe de en fonction en mode loglog.

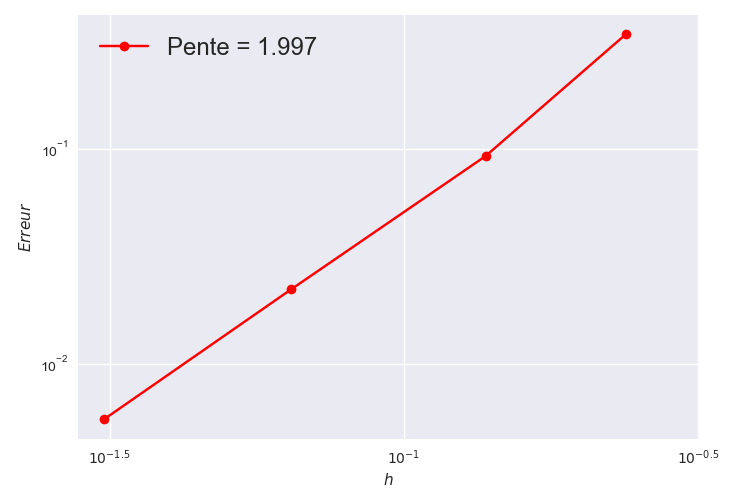


Figure 18 : Illustration de

On décide aussi de tracer le graphe de en fonction toujours en mode loglog.

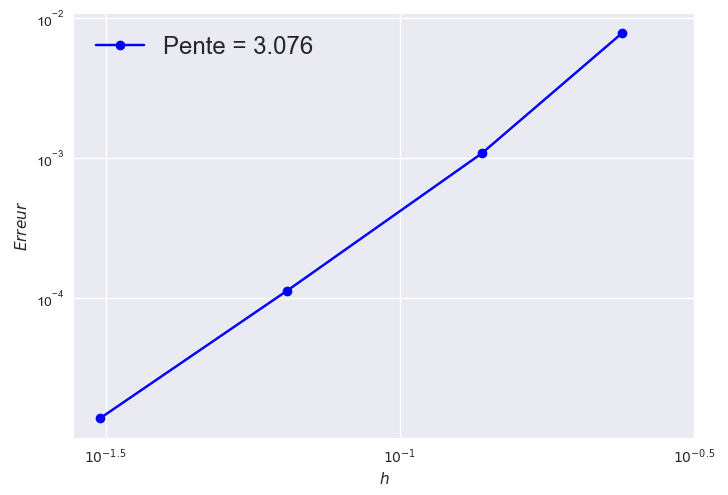


Figure 19 : Illustration de

Ces résultats sont exactement ceux prédits par la théorie. En effet, l’estimation de l’erreur d’un problème mixte bien posé pour un élément de Taylor-Hood s’écrit (Prud’homme, 2020):

Soit et (u, p) la solution du problème de Stokes. Soit la solution approchée. Si et , alors  :

Si de plus le problème est régularisant, alors :

On vérifie facilement que la solution de Kovasnay définie à la question 1 est bien dans , et le second membre calculé . Ce théorème est la raison pour laquelle nous obtenons des pentes très proches de **2** et **3** respectivement sur les figures 18 et 19.

## PARTIE 2 : Navier-Stokes instationnaire

Le problème à résoudre est le suivant :

### Semi-discrétisation en temps

On suppose que et qu’à chaque pas de temps , et . On pose le pas du temps, et n l’indice de l’iteration en temps tel que . Au temps , on fait l’approximation . On a

En utilisant l’approximation , on obtient

Afin de relever les conditions de Dirichlet non homogènes sur le bord , on suppose qu’il existe une fonction telle que (ou désigne l’application trace de dans ). Ceci revient à supposer l’existence de telle que (d’apres Lucquin, p. 58). On pose . Pour tout , on cherche telle que pour tout et on ait :

Or d’après les formules de Green,

On introduit (2) et (3) dans (1)

Or sur . On a donc

Avec , , et , on obtient le problème variationnelle qui, à chaque pas de temps, consiste à trouver (tels que

Avec

### Programmation de la méthode

On effectue cette simulation avec , et .

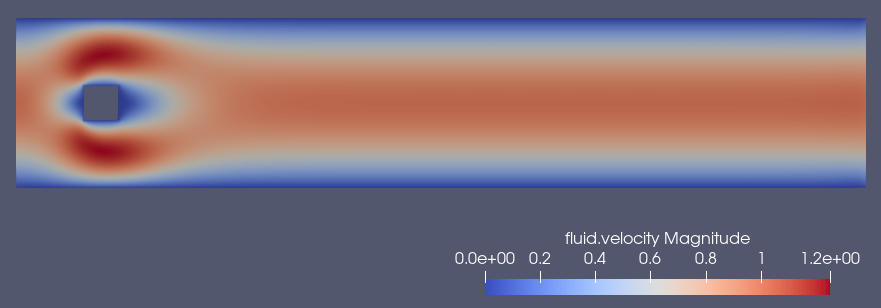


Figure 20 : Vitesses à l'instant t= 10s

### Calcul de la trainée et de la portance

On exporte les forces qui s’appliquent sur la surface de l’obstacle **Gamma\_0\_2** et on obtient le tableau suivant.

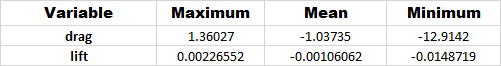


Table 2 : Description de la trainée (drag) et de la portance (lift) pour une viscosité de 0.05

On observe que la trainée et la portance atteignent leurs valeurs extrêmes au tout début de la simulation. Après cette subite impulsion (correspondant au profil de vitesse imposé à l’instant initial), elles prennent des valeurs stables. Tandis que la portance vaut approximativement (qui correspond au maintien de l’obstacle sur l’horizontale), il est intéressant de remarquer que la trainée elle, n’est pas nulle.

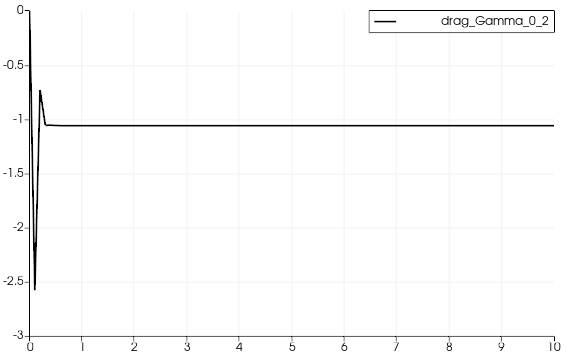


Figure 21 : Drag pour une viscosité

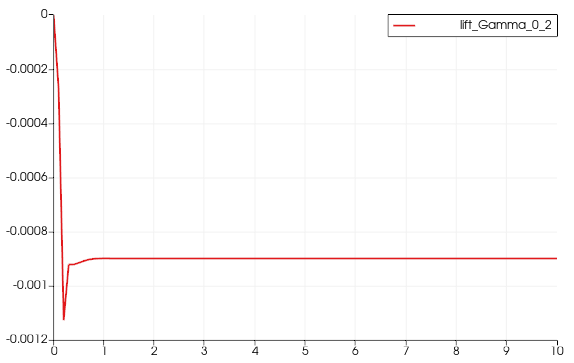


Figure 22 : Lift pour une viscosité

### Diminution de la viscosité

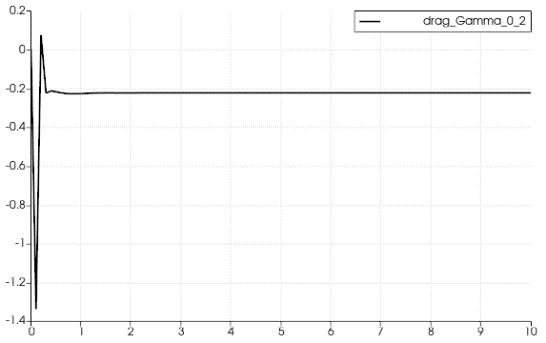


Figure 24 : Trainée pour

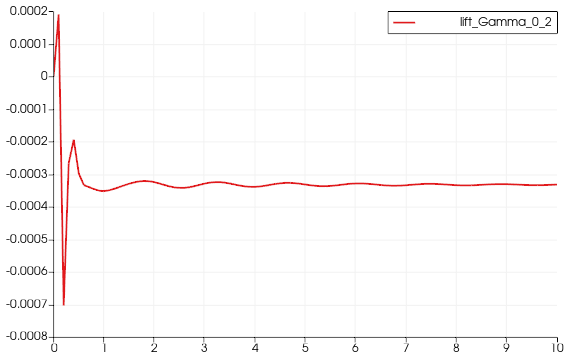


Figure 25 : Portance pour

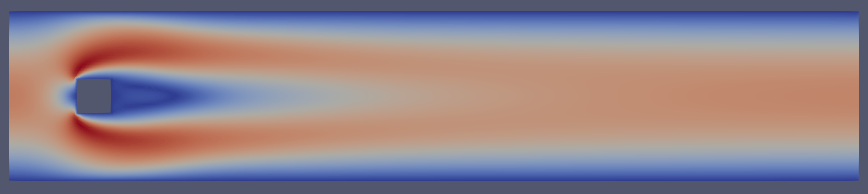


Figure 23 : Vitesse pour à

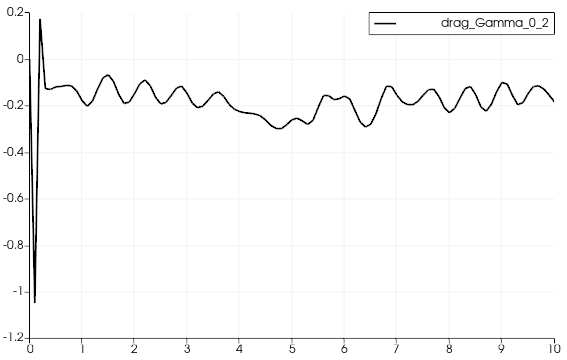


Figure 27 : Trainée pour

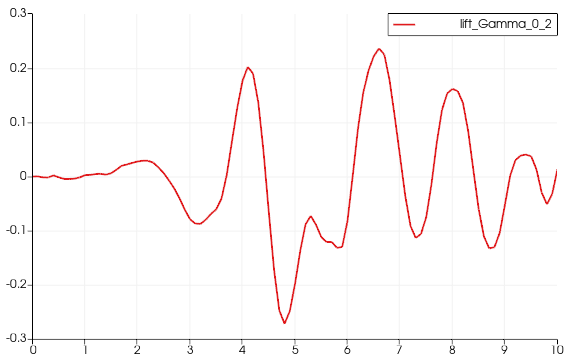


Figure 28 : Portance pour

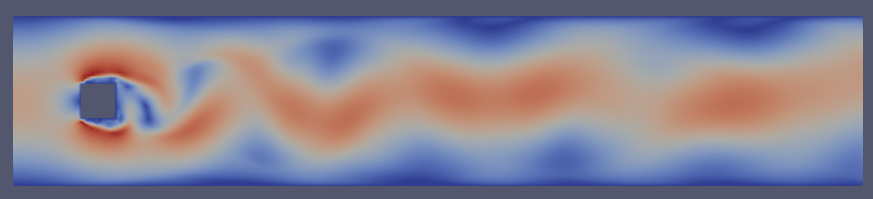


Figure 26 : Vitesse pour à

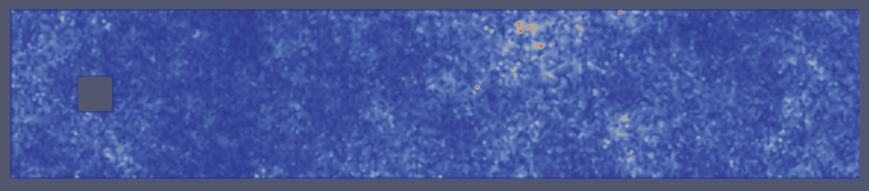


Figure 29 : Vitesse pour à

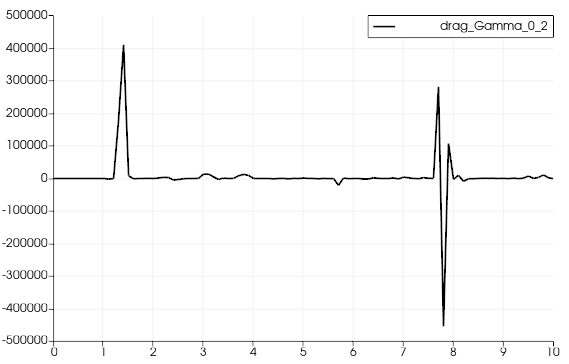


Figure 30 : Trainée pour

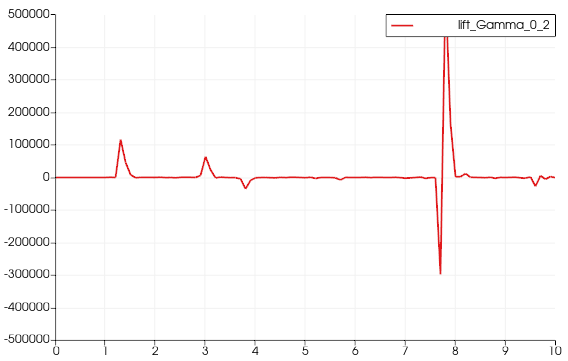


Figure 31 : Portance pour

On constate qu’au fur et à mesure que la viscosité diminue, il devient de plus en plus difficile d’avoir une trainée et une portance fixe. Les fluctuations très importantes de ces valeurs (figures 30 et 31) traduisent un déplacement très turbulent du fluide autour de l’obstacle. On aurait pu déduire ces résultats en interprétant le nombre de Reynolds. En effet, permet de prédire le régime d'écoulement d’un fluide. Pour (cas et) on est dans un régime **laminaire** comme le traduisent les figures 20, 23, et 26. En revanche, pour (cas ), on se retrouve dans un régime **turbulent** (figure 29) ce qui explique les valeurs non déterministes de la trainée et de la portance.

# ANNEXE

## Formulation variationnelle pour un problème d’élasticité linéaire

On a le système :

Ou désigne le déplacement. Soit . On a

Or

En revenant à la formulation variationnelle, on a :

On somme suivant et on utilise à notation pour obtenir

On remplace par son expression et on obtient

D’une part, avec , on a

D’autre part, on a

En remplacent les expressions en (2) et (3) dans l’équation (1), on obtient

On peut mettre cette expression sous la forme

On obtient le problème variationnelle qui consiste à trouver

Avec

[Retour au problème d’élasticité linéaire.](#_Formulation_variationnelle)

# REFERENCES

* Prudhomme, C. (2020). “MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES EDP”. Récupéré de <https://feelpp.github.io/csmi-edp/ch5-stokes.html#/_hatp_umathbbp_2_quad_hatp_pmathbbp_1>
* Lucquin, B. (2004). " Equations aux dérivées partielles et leurs approximations : Niveau M1". Récupéré de <https://books.google.fr/books/about/Equations_aux_d%C3%A9riv%C3%A9es_partielles_et_l.html?id=y0V8AAAACAAJ&redir_esc=y>
* Christensen, R. (2019). “How Do Mises and Tresca Fit In“. Récupéré de <https://failurecriteria.com/misescriteriontr.html>
* Ern, A., Guermond, J-L (2002). “Éléments finis: théorie, applications, mise en oeuvre“. Récupéré de <https://books.google.fr/books?id=SHhnLz0EMywC&pg=PA5&lpg=PA5&dq=perte+de+coercivit%C3%A9+%C3%A9lasticit%C3%A9+lineaire&source=bl&ots=C2ulMT0iXm&sig=ACfU3U0jYIqW5wdoqpmKcTyPaJ-JT4B8hA&hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwihi7bY1ovqAhXDShUIHbVXBqIQ6AEwA3oECAoQAQ#v=onepage&q=perte%20de%20coercivit%C3%A9%20%C3%A9lasticit%C3%A9%20lineaire&f=false>