Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Roussel Desmond Nzoyem

Stéphane Labbé, Christophe Prud'homme

Sorbonne Université
Laboratoire Jacques-Louis Lions

Soutenance de mi-stage
18 mai 2021

Sommaire

Motivation

Enjeux écologiques

- Etude climatique à échelle nature (SASIP)
- Prévisions climatiques avec précision

Enjeux industriels

- Routes maritimes exploitables
- Étude des stations offshores

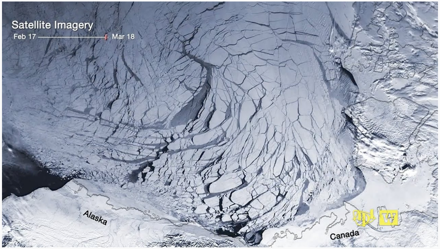


Figure – Image satellite de l'artique (MIZ Program, 2013)

Figure – Un navire dans la MIZ (O Globo, 2012)

Motivation

Enjeux écologiques

- Etude climatique à échelle nature (SASIP)
- Prévisions climatiques avec précision

Enjeux industriels

- Routes maritimes exploitables
- Étude des stations offshores

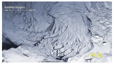


FIGURE – Image satellite de l'artique (MIZ Program, 2013)

FIGURE – Un navire dans la MIZ (O Globo, 2012)

Floe : Un floe est un morceau de glace ;

Albédo : la cryosphère reflette entre 90 et 95 % des rayonnement recus par la planète.

Objectifs

Objectifs généraux

- Modélisation et analyse mathématique de la notion de percussion
- Poursuite du développement d'un modèle de fracturation des floes

Objectifs intermédiaires

1. Lecture des travaux précédents :
   - M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss : Dynamics of an assembly of rigid ice floes (2015);
   - Matthias Rabatel : Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides (2015);
   - Dimitri Balasoiu : Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace (2020).
2. Modélisation et simulation du déplacement des noeuds d'un floe isolé :
   - en 1D;
   - en 2D.
3. Introduction de la percussion dans le code préexistant.

Cinétique du floe

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} M_i \dfrac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}_i(t)}{\mathrm{d}t} &= \mathfrak{M}_i, \end{cases} \tag{1}$$

où pour le floe i :

- M_i : masse du floe;
- $\mathbf{F}_i$: somme des forces par unité de volume;
- $\mathcal{I}_i$: le moment d'inertie du floe i;
- $\mathfrak{M}_i$: le moment dynamique en G.

Le système (1) se réécrit sous la forme :

$$\mathcal{M}_i \frac{\mathrm{d}W_i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}_i(t),$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

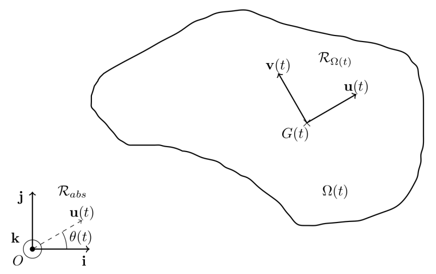


Figure – Repères abosolu et local pour un floe

Interaction entre les floes

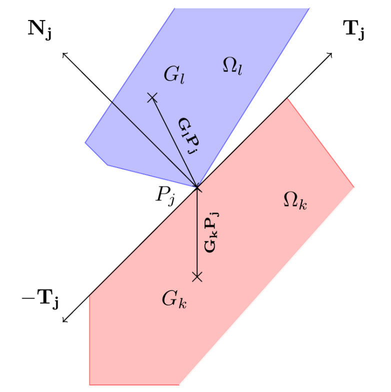
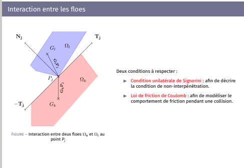


FIGURE – Interaction entre deux floes Ω_k et Ω_l au point P_j

Deux conditions à respecter :

- Condition unilatérale de Signorini : afin de décrire la condition de non-interpénétration.
- Loi de friction de Coulomb : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision.



Historiquement, on distingue ici deux approches :

- l'approche par régularisation : Hertz (force de contact proportionnelle à la distance d'inter-penetration); largement répandues en robotique, en VR, habits, etc...MAIS ON NE VEUT PAS D'INTERPÉNÉTRATION !
- l'approche non-régulière : développée par inclusion différentielle : efficace, mais difficile à manipuler. D'ou l'essort des méthodes LCP.

Discussion sur la thèse

- Les floes sont rigides ;
- Le modèle ne gère pas la rhéologie de la glace ;
- Les coefficients de friction et de restitution sont limitants.

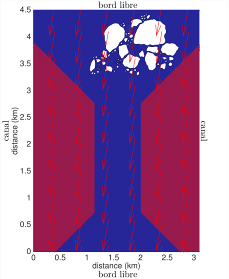
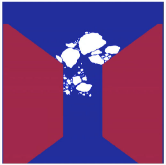
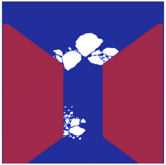


FIGURE – Configuration initiale



(a) à 2h04



(b) à 3h40

FIGURE – Dérive sous l'effet de la force de Coriolis

Un modèle de fracture variationnel

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) \, \mathrm{d}x + k\mathcal{H}^1(\sigma) \,,$$

Une solution du problème de fracture fragile est un couple (u^*, σ^*) qui vérifie :

$$E_{\text{tot}}(u^*, \sigma^*) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma) \,.$$

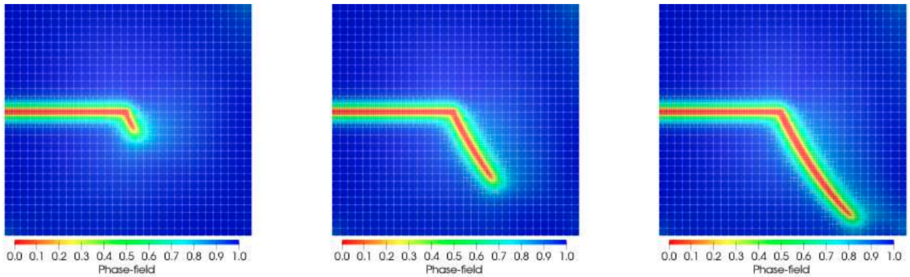


Figure – Bifurcation d'une fracture

Réseaux de ressorts régulier

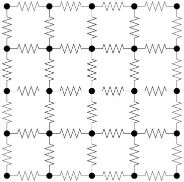


Figure – Réseau de ressorts régulier

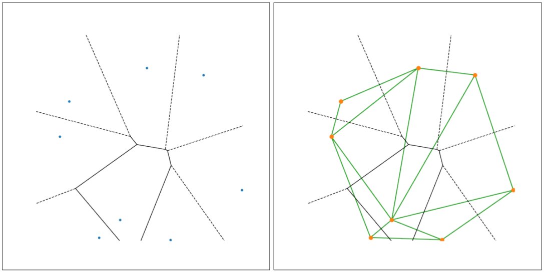


Figure – Tirage de points et diagrammes de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite)

Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)

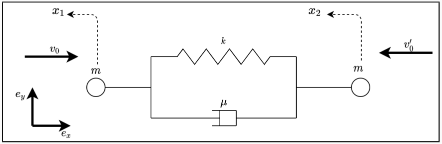


FIGURE – Floe de glace 1D

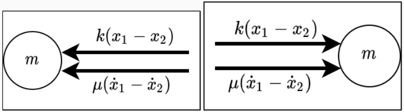


FIGURE – Bilan des forces

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,. \end{cases}$$

On préfère la forme générique :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t)\,, \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v_0')^T\,, \end{cases}$$

où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}, \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

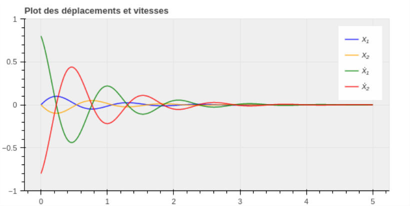
Déplacement des noeuds d'un floe isolé (2)

Listing 1 – Code de simulation

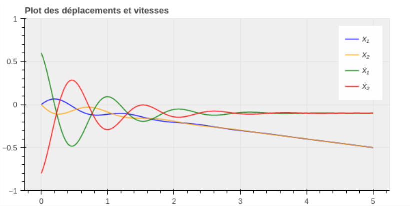
```
Y0 = np.array([0,0, v0, -v_0])
t = np.linspace(0, tmax, N+1)

def model(Y, t):
    return E @ Y

Y = odeint(model, Y0, t)
```

Théorème (Convergence du modèle 1D isolé)

Les déplacements x_1 et x_2 des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.



(a) $v_0 = v_0' = 0.8$



(b) $v_0 = 0.6$ et $v_0' = 0.8$

FIGURE – Simulation du déplacement d'un floe en 1D

Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

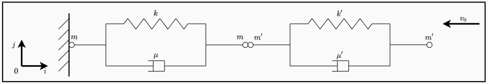


FIGURE – Collision 1D avec fixation d'un floe

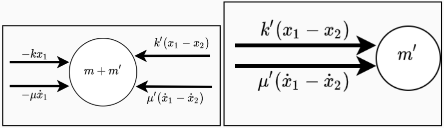


FIGURE – Bilan des forces

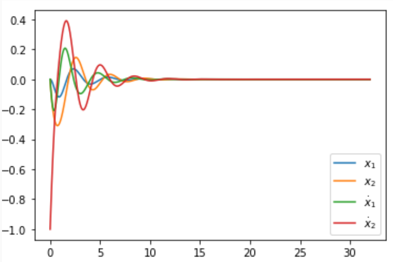


FIGURE – Résultat de simulation

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} (m+m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

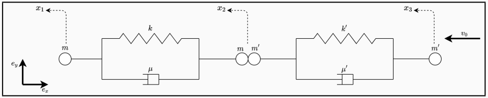


FIGURE – Collision 1D sans mur

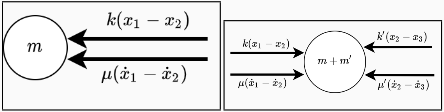


FIGURE – Bilan des forces

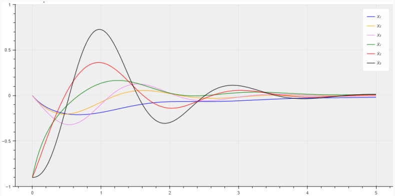


FIGURE – Résultat de simulation

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\ (m+m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\,, \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Collision inélastique avec séparation des masses (1)

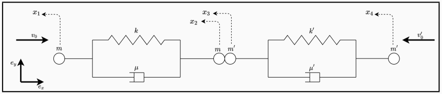


FIGURE – Collision 1D inélastique

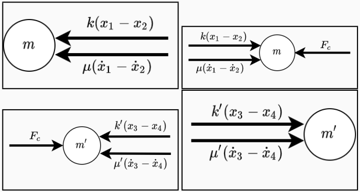


FIGURE – Bilan des forces

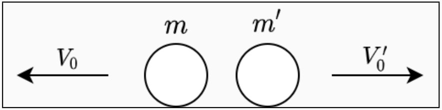


FIGURE – Situation après contact

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c\,, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c\,, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)\,. \end{cases}$$

Avec ε est le coefficient de restitution et :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)\,\mathrm{d}t\,,$$

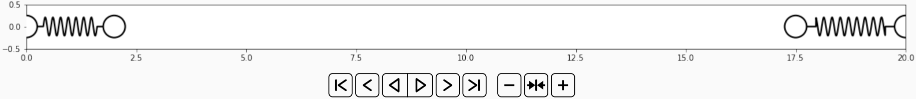
les vitesses après contact sont :

$$V_0 = \frac{I + (m + \varepsilon m')v_0 + (1 - \varepsilon)m'v_0'}{m + m'}\,,$$

$$V_0' = \frac{I + (1 - \varepsilon)mv_0 + (m' + \varepsilon m)v_0'}{m + m'}\,.$$

Collision inélastique avec séparation des masses (2)

Animation de la première phase de la percussion (avant contact)



Déplacement d'un floe isolé (1)

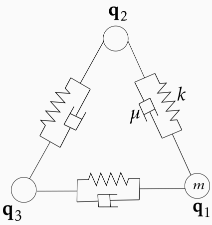


FIGURE – Floe de glace 2D

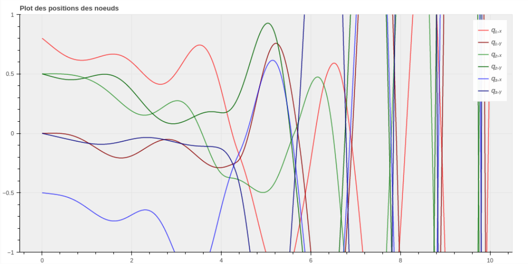


FIGURE – Simulation avec $T = 10$

Les équations de Newton-Euler :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i ,\, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right] .$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1} ,\, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right] .$$

Déplacement d'un floe isolé (2)

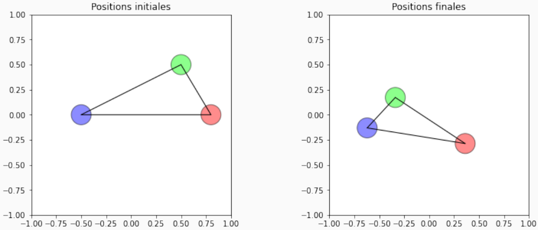


FIGURE – Illustration à $T = 4$

Reférences

BALASOIU, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

RABATEL, Matthias (2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

RABATEL, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9, p. 5887-5909.

Merci pour votre attention ☺!

Questions ?