



RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant

Roussel Desmond NZOYEM

Superviseur

Stéphane LABBÉ

Enseignant référent

Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

10 août 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	ii
1 État de l'art	1
1.1 Position du problème	1
1.2 Résumé de thèse de M. Rabatel	1
1.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer	1
1.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème	6
1.2.3 Validations et exploitations du modèle	9
1.2.4 Discussion	10
1.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu	11
1.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art	11
1.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace	14
1.3.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier	16
1.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes	18
1.3.5 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope	21
1.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur	24
1.3.7 Discussion et questions ouvertes	27
1.4 Résumé de l'Etat de l'art	28
2 Problème 2D et percussion des floes	29
2.1 Développement d'un modèle de déplacement des noeuds	29
2.2 Développement d'un modèle de percussion des floes	31
2.2.1 Présentation des travaux antérieurs	31
2.2.2 Nouveaux travaux sur la percussion	31
2.3 Code de calcul 2D	33
2.4 Résumé des résultats obtenus	33
3 Déroulement et apports du stage	35
3.1 Journal de bord	35
3.2 Bilan et future travail	35
3.3 Les apports du stage	35
4 Conclusion	36
A Rappels sur les EDO	37
A.1 Le schéma Scyplectique	37
B Gamma convergence	38
Bibliographie	39

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Position du problème

1.2 Résumé de thèse de M. Rabatel

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL (et plus tard ceux de BALASOIU) ont extensivement traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de son raisonnement, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

1.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer

1.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans [Rab15] utilise les mêmes notations que celles présentées à la section 1.1. Les obstacles¹ sont des floes aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans [Rab15], l'auteur travaille dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$; cependant, vu que la mer est considérée plane, le mouvement du floe peut être décrit dans le plan $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Ensuite, RABATEL désigne la vitesse angulaire du floe Ω_i par

$$\boldsymbol{\theta}_i(t) = \theta_i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta_i(t))^T.$$

Soit P (de coordonné x) un point quelconque de $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Sa vitesse dans le repère \mathcal{R}_{abs} est donnée est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}_i(t) + \boldsymbol{\theta}_i(t) \wedge \mathbf{G}_i P,$$

où le symbole \wedge représente le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 . La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} h_{i,+}(x) dx.$$

Ensuite, l'auteur définit :

- la somme des forces par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe Ω_i :

$$\mathbf{F}_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{F}(x) dx,$$

1. Nous faisons allusion aux obstacles au déplacement des floes. Il peut s'agir des îles, des stations offshore, etc.

— le moment cinétique² en G :

$$L_i = \rho_i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t) \, dx,$$

— le moment dynamique en G :

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \mathbf{F}(x) \, dx.$$

Sous le formalisme de Newton-Euler, RABATEL montre que chaque floe Ω_i vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i, \end{cases}$$

où \mathcal{I}_i représente le moment d'inertie du floe i . Ce système se réécrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t), \quad (1.1)$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système S composé de n floes, le problème précédent doit être satisfait pour tous les floes. [Rab15, p.18] montre que cela revient à résoudre l'équation

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t), \quad (1.2)$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad \mathcal{W}(t) = (\mathcal{W}_i(t))_{1 \leq i \leq n}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(t) = (\mathcal{H}_i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe Ω_i quant à elle sera donnée par :

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{\mathbf{G}}_i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{\theta}_i(t)^2.$$

1.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandement développé ces derniers siècles, avec plusieurs scientifiques qui ont tenté de décrire le phénomène de contact entre des corps rigides. Notons que le problème d'interaction entre les floes est un problème de **dynamique non-régulière** (contrairement au problème de déplacement des floes entre deux collisions qui lui, est un problème de **dynamique régulière**). Dans [Rab15], l'auteur considère deux lois de contact afin de décrire les phénomènes qui se produisent de façon précise :

- Une **condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration ; cette condition est portée par la composante normale³ de la force de contact⁴ lors de la collision.
- Une **loi de friction de Coulomb** : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision. Cette condition est portée par la composante tangentielle de la force de contact.

Afin de traiter ces problèmes de contact, deux approches principales ont été d'enveloppées par les scientifiques : l'approche non-régulière et l'approche de régularisation des lois de contact.

2. Il s'agit d'un moment dû à l'accélération du floe ; alors que le moment dynamique est dû aux forces extérieures. Notons que ces deux vecteurs sont portés par \mathbf{k} , et peuvent donc être remplacé par des scalaires correspondants.

3. La composante normale permet aussi d'assurer la dissipation de l'énergie à travers **la loi de Poisson**.

4. La force de contact est la somme d'une friction tangentielle, et d'une réaction normale.

Parmi les pionniers dans l'**approche de régularisation** pour la résolution de la condition unilatérale de Signorini, nous pouvons citer Hertz; Nevins et Whitney [NW72; Whi77], Moore [MW88]. Ces méthodes se sont largement répandues dans les études liées à la robotique, à la réalité virtuelle ou encore dans les opérations assistées par ordinateur, pour simuler un grand nombre d'objets en contact en petites ou grandes déformations, comme des habits, des cheveux ou encore des organes (voir [WW90; VCMT95; Bar; Rag+04]). Concernant la seconde, la loi de friction de Coulomb, la discontinuité entre les phases de glissement et non-glissement a été traitée de différentes façons; en utilisant la notion de coefficient de restitution, ou des modèles masse-ressorts.

L'**approche non-régulière** a été développée en utilisant les concepts d'inclusion différentielles; ceci afin de traiter la condition de Signorini. Moreau [Mor85], Aubin [AC12] et Monteiro Marques [MM85], ont montré des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème sans friction. Puis, des résultats similaires ont été établis pour le contact unique avec friction (voir [Mor86; MM88; Pan12; JP85; MM94]). Cependant, cette notion d'inclusion différentielle est difficile à manipuler; c'est, d'après RABATEL la raison pour laquelle le problème du contact multiple avec friction reste encore très peu traité. Il a donc fallu attendre les années 80 avec l'essor des méthodes LCP pour donner un nouveau souffle à l'approche non régulière. Nous pouvons citer ici les travaux de Lötstedt qui fournit des preuves d'existence et d'unicité pour le contact avec la friction de Coulomb (voir [Löt81; Löt82a; Löt82b]). On cite aussi Klarbring et Pang, pour leur apport sur le plan des méthodes de programmations. RABATEL a opté pour cette approche car elle facilite la construction des solutions à partir d'algorithmes tels que ceux de Lemke (voir [Lem78]). RABATEL s'inspire aussi des travaux de Baraff [Bar93], qui écrit les forces de contact dans les repères locaux aux points de contact. Ces repères sont définis par la normale et la tangente aux points de contact. La condition de complémentarité se résume comme ceci : "*Sil y a contact alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et si il n'y a pas contact l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle.*". Cependant, les travaux de Baraff sur l'existence de solutions sont limités par l'approche accélération-force, et le coefficient de friction qui sont utilisés. En utilisant des formulations en vitesse et impulsion, les chercheurs ont réussi à démontrer l'existence de solutions pour toute configuration à contacts multiples avec n'importe quel coefficient de friction.

Pour traiter le problème de collision entre les floes, les glaciologues retiennent une multitude de modèles principalement intégrés aux milieux continus. Par exemple, dans les articles de Solomon [Sol70], ceux de Hibler [HI79] et ceux de Bratchie [Bra84], la force résultante des interactions est due à une contrainte interne. On note aussi les modèles basés sur théorie des flux de particules. Dans [SHL86; Hop85] par exemple, les collisions ne sont pas détectées précisément et les paramètres décrivant la collision sont déterminés par une méthode de Monte Carlo. L'introduction de ces déformations dans les modèles discrets de la banquise a été initié dans les années 90 par Hopkins [Hop96], et récemment par Herman et Wilchinsky [Her11; WFH10]. Cependant, elles sont basées sur la régularisation des lois de contact. Avant les travaux de RABATEL, il n'existait pas de modèle discret de banquise en utilisant une dynamique du contact non régulière.

Le modèle décrit par [RLW15, p.5892] utilise deux conditions de complémentarité pour déterminer les vitesses des floes après le contact. La première est une condition de Signorini [Sig33] pour s'assurer de la non-interpénétration⁵ des floes. Pour décrire ces conditions, il faut au préalable écrire le problème de contact entre floes comme un problème implicite, où les inconnus sont les impulsions après le choc⁶. Pour cette deuxième condition de complémentarité, RABATEL se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] afin d'en extraire une condition qui vérifie la loi de friction de Coulomb. Le problème résultant a ensuite été résolu en utilisant des algorithmes de Lemke.

Soit P_j , ($j \in \{1, \dots, n\}$) un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l (voir figure 1.1). Nous notons $\mathbf{F}_{kj}(t)$ la force de contact du floe Ω_k au floe Ω_l appliquée en P_j . Par convention, une matrice de contact \mathbf{M}_c est définie telle que son coefficient c_{kj} vaut :

— 0 si le point de contact P_j n'est pas un point de contact du floe Ω_k ;

5. Deux floes s'interpénètrent si la "distance" entre ces deux floes est négative.

6. Contrairement aux lois de contacts explicites (Hertz, Hooke, Coulomb), les lois implicites ne nécessitent pas la connaissance de la nature du contact entre les floes (glissement ou accroche).

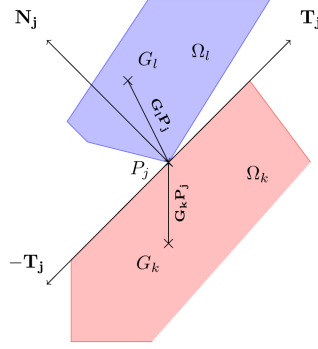


Figure 1.1 – Interaction entre deux floes Ω_k et Ω_l au point P_j [Rab15, p.26].

- -1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k < l$;
- 1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k > l$.

En notant E_k l'ensemble des points de contact du floe Ω_k au temps t , [Rab15, p.26] définit la résultante des forces de contact $\mathbf{F}_k^c(t)$, au floe Ω_k comme :

$$\mathbf{F}_k^c(t) = \sum_{j \in E_k} c_{jk} \mathbf{F}_{kj}(t).$$

En rajoutant ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l'équation (1.2), pour un floe $\Omega_k(t)$, on obtient :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j \in E_k} \left(\mathbf{G}^k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_{kj}(t) \right). \quad (1.3)$$

1.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de [Rab15] opte pour le formalisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accélération-force. En effet, l'approche en **vitesse-impulsion** apporte l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature du contact. Il nous faut donc définir les notions d'impulsion. Sur un intervalle de temps δt^* , si y a un contact entre les floes Ω_k et Ω_l au point P_j , nous dirons que le floe Ω_k a subi un choc provenant du floe Ω_l au point de contact P_j caractérisé par l'impulsion :

$$\mathbf{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj} \mathbf{F}_{kj}(t) dt.$$

RABATEL fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments équation (1.2) pour le floe Ω_k sur l'intervalle temporel δt^* :

$$\mathcal{M}_k \int_{\delta t^*} \dot{W}_k(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \sum_{j \in E_k} \left(\mathbf{G}^k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{I}_{kj} \right).$$

En écrivant $\delta t^* = [t^-, t^+]$, on peut donc introduire les inconnues $\beta, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^m$ pour le problème de contact

$$\mathcal{M}(W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \mathbf{B}\beta + \mathbf{J}\lambda, \quad (1.4)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{J} sont deux matrices de $(\mathbb{R}^3)^{n \times m}$ telle que

$$\mathbf{B} = (d_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad d_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{T}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{T}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases},$$

$$\mathbf{J} = (s_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad s_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{N}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases}.$$

Les matrices \mathbf{B} et \mathbf{J} sont obtenues par décomposition des forces de contact dans le repère de contact $\mathcal{R}_{\Omega_j} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$ (voir figure 1.1).

Comme précédemment mentionné, afin de modéliser la friction dans une collision qui respecte la loi de Coulomb, [Rab15] se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] qui définissent une condition de complémentarité reliant la composante tangentielle β_j de l'impulsion appliquée au point P_j , la composante normale λ_j , la vitesse relative tangentielle du point P_j et le coefficient de friction μ . On introduit le vecteur $\tilde{\beta}$ contenant les composantes de l'impulsion tangentielle dans chacune des directions possible de glissement \mathbf{T}_j ou $-\mathbf{T}_j$. Il devient alors possible de formuler le problème de contact (sur tout le système S) sans interpénétration par le problème linéaire de complémentarité suivant. Dans cette formulation, l'impulsion de contact est effectivement à l'intérieur du cône de Coulomb :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\mathbf{J} & -\mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \mu & -\mathbf{H}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\delta t^+} \mathcal{H}(t) dt - \mathcal{M} W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

avec

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}^T W(t^+), \quad \mathbf{H}^T = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1 \leq j \leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq m},$$

μ est la matrice diagonale de diagonale (μ_1, \dots, μ_m) ,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2(i-1) + 1 \text{ ou } j = 2(i-1) + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$D = (\mathbf{B}_1| -\mathbf{B}_1| \dots |\mathbf{B}_m| -\mathbf{B}_m) \text{ avec } \mathbf{B}_j \text{ la colonne } j \text{ de la matrice } \mathbf{B}.$$

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact $W(t^+)$, à l'aide des composantes inconnues tangentielle et normale des impulsions dans les repères de contact $(\tilde{\beta}, \gamma)$, elles-mêmes inconnues du système.

1.2.1.4 Consistance énergétique

D'après l'auteur de [Rab15, p.42], traiter le problème de contact à partir de lois non régulières ne permet pas d'obtenir des solutions satisfaisant à la fois la non-interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique. En se focalisant sur la consistance énergétique, RABATEL a subdivisé le problème en deux : une phase de compression et une phase de décompression suivant la loi de Poisson. La **phase de compression** modélise la capacité maximale des floes à emmagasiner, par la déformation, une partie ou la totalité de l'énergie cinétique transmise lors du contact. L'impulsion normale λ^c calculée durant cette phase (en résolvant le problème de complémentarité (équation (1.5))) correspond à un coefficient de restitution

$\varepsilon = 0$. Les impulsions obtenues durant cette phase correspondent à celles nécessaires pour éviter la non-interpénétration, et correspondent donc à une énergie cinétique maximale emmagasinée. La **phase de décompression** correspond à la restitution partielle ou complète de l'énergie cinétique emmagasinée par la déformation des floes. L'impulsion lors de cette phase, notée λ^d , est déterminée par $\lambda^d = \varepsilon \lambda^c$ (l'hypothèse de Poisson [GP95]). Durant la phase de décompression, RABATEL a donc opté pour la consistance énergétique et la non-interpénétration avec la solution :

$$W^N = (1 + \varepsilon)W^c - \varepsilon W(t^-),$$

où W^c représente les vitesses des floes après la phase de compression, et ε le coefficient de restitution pour les contacts considérés inélastiques.

1.2.1.5 Le modèle de l'environnement

L'environnement est l'ensemble des forces extérieures qui agissent sur les floes hormis les forces de contact qui sont décrites dans la partie précédente. Ces principales forces sont :

- La force de Coriolis \mathfrak{F}_c donnée pour un floe $\Omega_i(t)$ par :

$$\mathfrak{F}_{c,i}(t) = -f \mathbf{k} \wedge \dot{\mathbf{G}}_i(t),$$

avec f le paramètre de Coriolis et \mathbf{k} le vecteur dirigé vers le haut du repère absolu \mathcal{R}_{abs} .

- Les forces de traînée associées au vent $\boldsymbol{\tau}_a(t)$ et celle associée à l'océan $\boldsymbol{\tau}_w(t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_a(t) &= \rho_a C_a \|\mathbf{U}_a(t)\| \mathbf{U}_a(t), \\ \boldsymbol{\tau}_w(t, P) &= \rho_w C_w \|\mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t)\| (\mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t)), \end{aligned}$$

avec ρ la masse volumique du fluide (l'indice a pour l'air et w pour l'eau) et C un coefficient de traînée sans dimension (voir [HI86]); \mathbf{U}_a , \mathbf{U}_w , $\dot{P}(t)$ respectivement la vitesse du vent à l'interface glace/fluide, la vitesse du courant océanique à l'interface glace/fluide, et la vitesse d'un point P du floe.

Le modèle de dynamique régulière définit en équation (1.2) peut se voir expliciter :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} &= M_i \mathfrak{F}_{c,i}(t) + \int_{\Omega_i(t)} \boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P) ds, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} &= \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}_i \mathbf{P} \wedge (\boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P)) ds. \end{cases}$$

L'algorithme décrivant en détail le processus de collision ainsi que la consistance énergétique se trouve à la page 43 du document [Rab15].

1.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème

1.2.2.1 Discrétisation temporelle

Pour simuler la dynamique des floes de glace soumis à des forces extérieures et possiblement des collisions, il faut intégrer la dynamique régulière (entre deux collisions), et la dynamique non régulière; et il existe deux principales méthodes pour la discrétisation en temps dans de tels problèmes. La méthode **time-stepping** (voir [Aca13] pour les schémas de Moreau [Mor86; Jea99], et de Schatzman-Paoli [PS02a; PS02b] par exemple, pour lesquels une convergence a pu être exhibée à partir de la convergence en graphe de Moreau [Mor78]); comparé aux autres méthodes, la méthode *time-stepping* traite mieux les points d'accumulation [Rab15, p.58]; et est plus performante sur des problèmes de multiples contacts. Cependant, RABATEL pour le schéma **event-driven** pour sa précision dans la localisation des collisions et sa facilité de manipulation. En

plus, elles permettent d'utiliser des schémas d'intégration existant d'ordre élevé pour des équations différentielles ordinaires. Le seuil de collision choisi est suffisamment grand pour éviter de traiter les collisions une par une. Le schéma utilisé pour intégrer l'équation (1.2) est un schéma du type Euler explicite, pour sa facilité d'implémentation, sa facilité à prédire la localisation en espace et en temps des futures collisions et enfin, sa capacité à dépasser les problèmes de points d'accumulation.

La simulation par la méthode *event-driven* demande la définition d'un pas de temps maximal pour lequel le schéma reste stable. Le pas de temps Δt_{max} sera utilisé si aucune collision n'est détectée entre les instants t et l'instant $t + \Delta t_{max}$. En se référant au un modèle idéalisé 1D (voir [Rab15, p.49]), RABATEL distingue deux critères pour la stabilité du schéma numérique au temps t :

- lorsque la vitesse caractéristique des floes $V_c(t) = N_a U_a(t) + U_w(t)$ est constante sur l'intervalle de simulation I , alors pour :

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} = \min \left(\frac{\rho}{2|U_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}, \frac{2K_t}{L_t} \right) \quad (1.6)$$

avec

$$\text{avec } L_t = \rho^{-1} \rho_w C_w (N_a^2 U_a^2 + (N_a U_a + 2U_w)^2), \text{ et } K_t = |V_c(t)| \text{ constant,}$$

le schéma est stable c-à-d. $\dot{G}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] = [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}]$;

- lorsque les variations de $V_c(t)$ entraînent une augmentation de K_t au cours du temps. La propriété de stabilité reste vérifiée car

$$\dot{G}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] \subset [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}];$$

- lorsque les variations de $V_c(t)$ entraînent une diminution stricte de K_t au cours du temps, alors la condition de stabilité dans les deux cas précédents ne peut être vérifiée. RABATEL introduit donc une seconde définition de la stabilité pour traiter ce cas. Il remarque que pour

$$\Delta t_{max} \leq \begin{cases} \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-} & \text{si } x \in]-\infty, K_{t+\Delta t}] \\ \frac{-2x}{-\tilde{L}_t^+} & \text{si } x \in]K_{t+\Delta t}, +\infty] \end{cases} \quad (1.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^- &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 U_a(t + \Delta t)^2 - (U_w(t + \Delta t) - x)^2] \\ \tilde{L}_t^+ &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 U_a(t + \Delta t)^2 + (U_w(t + \Delta t) - x)^2], \end{aligned}$$

on a la diminution de la vitesse des floes.

En conclusion, pour une vitesse infinitésimale initiale $\dot{G}(0) \in [-K_0, K_0]$, pour tout $t \in I$, et pour tout Δt_{max} vérifiant les équations (1.6) et (1.7), nous avons les vitesses des floes majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t$$

RABATEL choisi donc de prendre

$$\Delta t_{max} = \min \left(\frac{3}{4} \frac{-2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^-}, \frac{3}{4} \frac{2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} -\tilde{L}_t^+}, \frac{\rho}{2(\max_{t \in I} |U_a(t)|) \sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}} \right)$$

pour s'assurer que le modèle idéalisé vérifie les critères de stabilité définis. Notons que le procédé global d'intégration de la dynamique pour le modèle se situe à la figure 2.2 du document [Rab15, p.60], le schéma est repris à la figure 1.2.

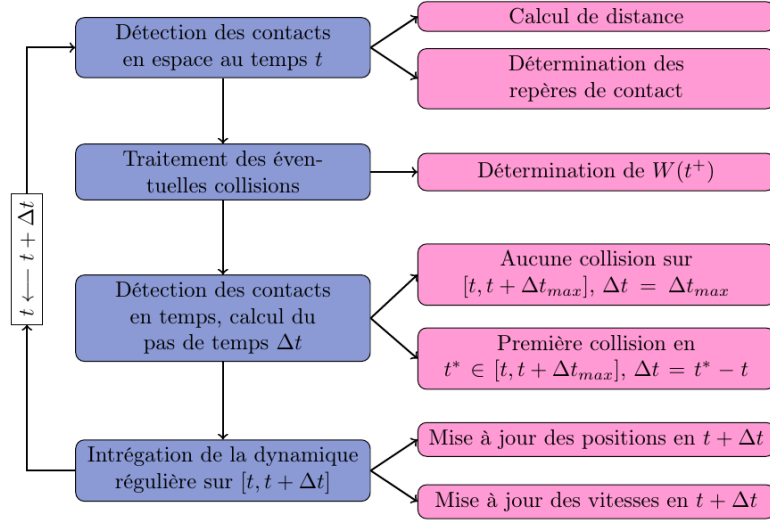


Figure 1.2 – Procédé global d'intégration de la dynamique pour notre modèle [Rab15, p.60].

1.2.2.2 Détection des collisions en espace

Des deux méthodes principales utilisées dans la littérature pour la détection des voisins, RABATEL a choisi la méthode de **hiérarchie de volumes englobants** pour sa facilité de mise en place et pour son efficacité même avec de grands ratios de tailles. L'alternative était la méthode de **partitionnement de l'espace** qui elle, souffre de plusieurs défauts non surmontables pour le modèle développé. Les méthodes de volumes englobants consistent à englober le contour de l'objet par des volumes à des échelles de plus en plus fines pour améliorer la détection.

1.2.2.3 Détection des contacts en temps

Il s'agit ici de trouver le pas de temps optimal c'est-à-dire un pas de temps Δt pour lequel la configuration des floes ne contenant pas d'interpénétrations sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, contient au moins une interpénétration sur l'intervalle de temps $[t + \Delta t, t + \Delta t + \varepsilon]$ [Rab15, p.87]. Lorsque le critère de collision n'est pas vérifié, RABATEL montre qu'il suffit de prendre

$$\Delta t_{i,j} = -\frac{-\delta_{i,j}(t) - tol_3}{\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{\mathbf{G}}_i(t) - \dot{\mathbf{G}}_j(t))},$$

avec

$$\mathbf{A}_{ij}(t) = \frac{C_{0,i}(t) - C_{0,i}(t)}{d(C_{0,i}(t), C_{0,i}(t))}, \text{ et } tol_3 = \frac{\xi}{20}.$$

Lorsque le critère de collision est vérifié, il faut plutôt prendre

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\min(\eta_i, \eta_j) - tol_3}{\Gamma(t)},$$

avec

$$\Gamma(t) = \max(\|\dot{\mathbf{Q}}_i^{ij}(t)\|, \|\dot{\mathbf{Q}}_j^{ji}(t)\|),$$

où $\dot{\mathbf{Q}}_i^{ij}$ représente la distance parcourue par un point de $\Omega_i(t)$ relativement à $\Omega_j(t)$.

Une fois ce $\Delta t_{i,j}$ assurant la non-interpénétration trouvé, on peut donc choisir

$$\Delta t = \min \left(\Delta t_{\max}, \min_{\substack{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \\ i \neq j}} \Delta t_{i,j} \right).$$

Le lecteur est renvoyé au document [Rab15, p.91] pour plus de détails sur la détection des contacts en temps.

1.2.2.4 Construction des repères de contacts

La construction d'un repère de contact n'est effectuée que lorsque le contact entre deux floes Ω_k et Ω_l est **linéique** [Rab15, p.79], ou **punctuel** et le vecteur porté par les points en contacts appartient au cône normal de P . La normale N est alors déterminée comme le vecteur unité dirigé par PQ . Si Q n'est pas unique, on se retrouve dans la situation où il peut exister plusieurs repères de contact pour un point de contact. Dans les autres cas, le repère de contact associé au point P n'est pas construit et P n'est pas considéré dans le traitement des contacts [Rab15, p.80]. L'algorithme de détection des points de contacts afin de construire les repères de contact est explicité dans le document [Rab15, p.76].

1.2.2.5 Simulation des événements collisions

Une fois les voisins détectés et les repères de contact construits, on peut passer à la prochaine étape qui consiste en la simulation des événements de collisions. Ici, plusieurs choix s'offrent à nous : les méthodes dites de **régularisations**, les méthodes dites **itératives**, et les méthodes dites de **pivots** [Rab15, p.82]. La première catégorie est adaptée aux modèles régularisants, ce qui n'est le cas de notre modèle. La deuxième par contre a extensivement été utilisée dans la littérature ; on peut citer Moreau [Mor88 ; Mor99 ; Jea99], Aitken [Ait50]. Malheureusement, dès que la matrice A du problème de complémentarité à résoudre n'est plus symétrique, ce deuxième groupe de techniques ne s'avère pas efficace. RABATEL choisit donc l'algorithme de Lemke pour lequel il existe des preuves de convergence lorsque la matrice A est co-positive. Bien qu'il soit performant, il faut néanmoins noter que l'algorithme de Lemke étant une technique globale, c'est-à-dire traitant les contacts simultanément, il ne garantit pas une bonne propagation du contact [Rab15, p.82].

1.2.2.6 Optimisations

La première optimisation apportée est celle sur les distances de collision : deux floes sont en contact si la distance entre eux n'est pas nulle, mais supérieure à un seuil appelée **distance de collision**.

La deuxième concerne la condition de non-interpénétration [Rab15, p.85]. En cas de congestion, il est difficile que les floes décollent après contact. En exigeant que $\mathbf{J}^T W(t^+) > 0$ après collision, on risque de ne pas avoir de solution pour le problème linéaire de complémentarité associé. RABATEL relaxe donc la condition de Signorini en définissant un réel c , et l'ensemble des vitesses admissibles devient donc :

$$V_c = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{J}^T \mathbf{w} \geq c \}.$$

Une troisième optimisation concernant la définition de la **notion d'erreur** et de **tolérance** a été implémentée. La quatrième consiste en la résolution d'un LCP en trois tentatives (avec trois algorithmes de Lemke différents) même si cela augmente les coups de calculs [Rab15, p.86]. Si cette optimisation ne s'avère pas suffisante, une dernière optimisation consiste en la modification aléatoire de certains coefficients de la matrice A , la permutation des lignes afin d'éviter des zéros sur la diagonale, ou encore l'utilisation de la notion de **contact actif**.

1.2.3 Validations et exploitations du modèle

Les résultats ont été validés à travers plusieurs expériences. Nous citons des exemples classiques tels que la **boîte glissante**, le **berceau de Newton**, le **canon de Newton**, la **balle rebondissante**, etc. Le

modèle a ensuite été validé sur des scénarios simples de dérive libre soumise à des courants océanique et atmosphérique et des scénarios simples de collision. En effet, il a été vérifié que le comportement d'un objet simulé est cohérent avec le comportement théorique et avec les observations. Les principes physiques suivants ont ainsi pu être testé par RABATEL :

- la conservation de la symétrie d'une configuration ;
- la satisfaction du modèle de Coulomb ;
- le traitement d'un point d'accumulation ;
- la cohérence temporelle ou la propagation des ondes de choc ;
- la conservation de l'énergie cinétique.

Des telles exploitations telles que la dérive dans un canal étroit, pour des floes en bassins a été étudié (voir figures 1.3 et 1.4). Aussi, la dérive soumise à un vent et un courant variable avec des vitesses du vent provenant de **ERAinterim**, à partir du modèle glace de mer et océan **TOPAZ** a été étudiée.

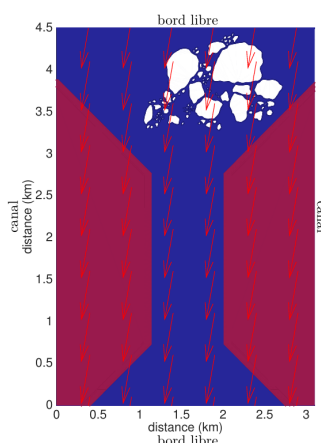


Figure 1.3 – Configuration à l'instant initial pour le scénario de dérive dans un canal étroit [Rab15, p.124].

1.2.4 Discussion

Bien que les travaux de RABATEL ont été testés et validés sur plusieurs configurations différentes, il reste néanmoins des points qui ne sont pas traités, et qui ont très clairement été soulignés dans la thèse [Rab15] :

1. Le modèle ne gère pas la rhéologie⁷ de la glace : les floes sont des solides purement rigides (ils ne se déforment pas) et la dissipation d'énergie cinétique durant la collision est décrite en utilisant un coefficient purement empirique collision.
2. La loi de contact utilisée pour le glissement (voir [ST96]), bien que très riche, ne prends pas en compte toutes les vitesses possibles de déplacement. La construction d'une loi qui donnerait accès à la région entière, demanderait de prendre en compte un grand nombre de phénomènes intrinsèques aux contacts. Leur compréhension et leur rôle à chacun est difficile à déterminer.
3. Les coefficients de friction et de restitution utilisées sont limitants. En réalité, il n'est pas possible de prendre en compte ou d'interpréter mathématiquement certains effets lors du contact ; par exemple, avec la dispersion de l'énergie (voir [NB14]). Cette dispersion est la conséquence de certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact. Seuls les effets de dissipation dus aux phénomènes locaux comme l'endommagement, la viscosité ou la plasticité sont pris en compte à travers l'utilisation des coefficients de restitution et de friction.
4. Les vitesses obtenues après la phase de décompression afin d'assurer la dissipation de l'énergie cinétique possèdent une faiblesse : elles ne sont solutions que sous certaines conditions, comme le fait que les chocs soient frontaux et qu'il n'y ait pas d'apport des forces extérieures autres que les forces de contact durant la collision [Rab15, p.41].

7. La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée.

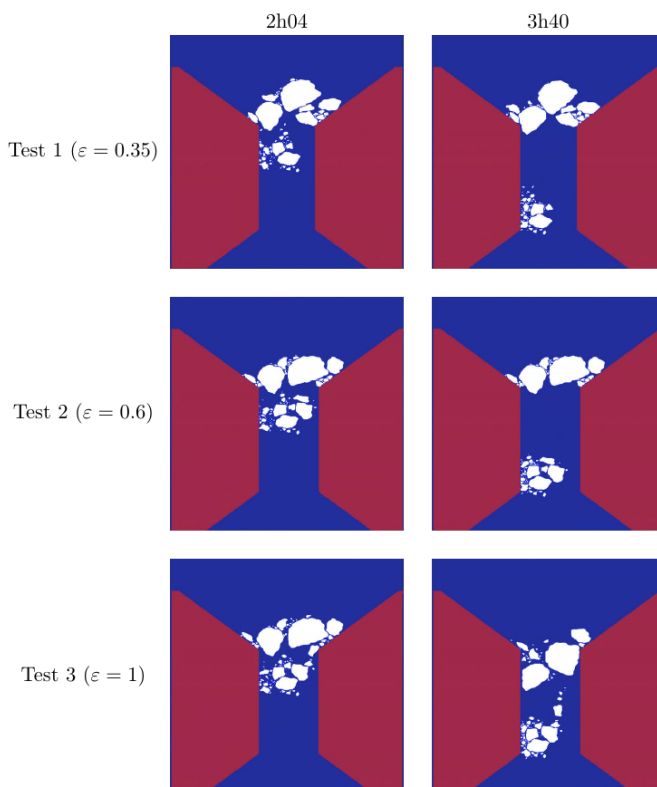


Figure 1.4 – Quelques résultats obtenus à deux heures différentes de la configuration des floes pour différentes valeurs du coefficient de restitution ε [Rab15, p.126].

1.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu

Les travaux de D. Balasoiu concernent la modélisation et la simulation du comportement mécanique de floes de glace [Bal20a]. Il s'agit d'une amélioration des travaux de M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss [Rab15 ; RLW15] prenant en compte la fracture des floes. Précisément, ce travail se focalise sur l'initiation de la fracture, ainsi que la prédiction du chemin que la fracture emprunte. Jusqu'à présent, les floes étaient considérés comme des corps rigides ; dans sa thèse, BALASOIU les considère comme des corps élastiques. Son travail est divisé en deux parties. Il commence par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d'un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord (i.e. à une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, il cherche à obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe qui percute un autre floe ou une structure solide.

1.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art

La théorie de fracture la plus répandue de nos jours est due à A.A. Griffith. Dans ses travaux [Gri21], il invalide les résultats que C. Inglis [Ingl13] qui ne tenaient pas en compte la taille de la fracture ; il présente donc la croissance d'une faille comme une compétition d'énergie entre l'énergie élastique⁸ et l'énergie de surface⁹. Le critère de Griffith est un critère thermodynamique qui stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de moindre énergie. En effet, sur un matériau

8. Énergie relâchée lorsqu'un défaut subit un accroissement. Cette énergie diminue durant la fracture.

9. Énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces (les bords de la fissure). Cette énergie augmente avec l'accroissement de la fracture.

élastique Ω dont la frontière est subdivisée en deux zones $\partial\Omega_D$, et $\partial\Omega_N$, on pose [Bal20a, p.33] :

$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx \\ \mathcal{P}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega \setminus \sigma(t)} W(x, \nabla \varphi(t, \sigma(t))) \, dx - \mathcal{F}(t, \sigma(t)) \\ \mathcal{F}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega} f_v(x) \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x) \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

où

- E_{el} est l'énergie élastique du matériau sans faille.
- $\sigma(t)$ représente la fracture au temps t , supposée à l'équilibre.
- \mathcal{P} l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille $\sigma(t)$ au temps t .
- $e(u)$ est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau.
- $\varphi = \text{Id} + u$ représente le déplacement du matériau supposé suffisamment régulier.
- W est la densité d'énergie du matériau élastique, supposé hyper-élastique.
- f_s est la contrainte surfacique appliquée sur le bord $\partial\Omega_N$.
- f_v est le champ de force volumique appliquée sur Ω .

D'après le critère de Griffith [Bal20a, p.34], la fonction $\sigma(t)$ doit vérifier :

1. $\frac{d\sigma(t)}{dt} \geq 0$;
2. $-\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) \leq k$;
3. $\frac{d\sigma(t)}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) = k$.

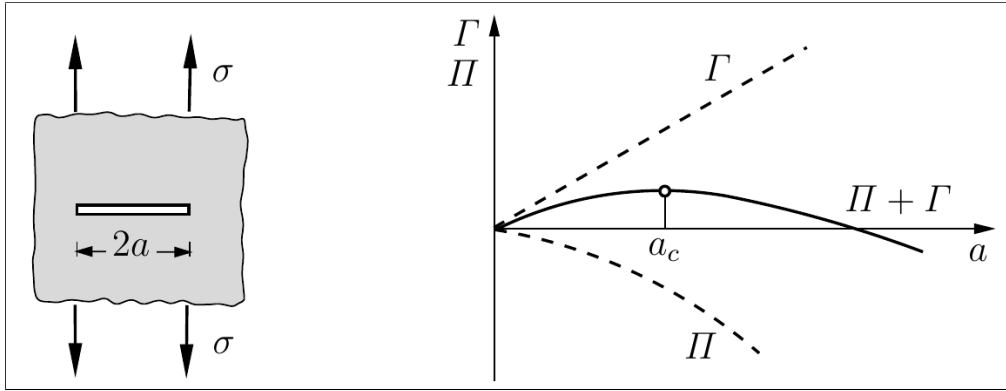


Figure 1.5 – Illustration du critère de Griffith [GS17]. (Π et Γ représentent les énergies potentielles et de fracture respectivement. Cette figure est à refaire manuellement !)

Une illustration de ce critère peut être observée à la figure 1.5. Comme mentionné plus haut, ce modèle souffre de problèmes de nucléation et de prédiction de la fracture. Pour contourner le problème de nucléation, les mécaniciens considèrent que tout matériau possède des microfissures, et ce sont ces dernières qui sont à l'origine des fissures observables à l'œil. Quant au problème du chemin emprunté par la fracture, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que les critères d'Irwin [Irw57] sont invalides car, ils impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne peut être courbé.

Le modèle proposé par Francfort et Marigo [FM98], suit un résultat théorique dû à De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci [DGCL89], qui prouvent le théorème d'existence d'un minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah qui intervient dans la détection des contours d'une image. Présentons les données géométriques du problème [Bal20a, p.37]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe, dont la frontière $\partial\Omega$ est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté U_D , tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique f_v . On suppose que Ω est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée W . Ainsi, lorsque le matériau Ω subit (sans fracture) une déformation $\varphi = u + \text{Id}$ suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a noté u le champ de déplacement du matériau, et $e(u)$ son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture σ :

$$E_{\text{el}}(u, \sigma) = \inf_{u \in V_{U_D, \sigma}} \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a défini l'espace fonctionnel $V_{U_D, \sigma}$, par :

$$V_{U_D, \sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^N) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}.$$

Francfort et Marigo proposent l'énergie de fracture suivante sur $\partial\Omega_D$:

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire $k(x)$ traduit la rigidité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau; \mathcal{H}^{N-1} représente la mesure de Hausdorff de dimension $N - 1$, qui peut être comprise comme la longueur du contour pour $N = 2$. Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u, \sigma) &= E_{\text{el}}(u, \sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma) \\ &= \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx + \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

où σ est une union dénombrable d'ensembles rectifiables. Ainsi donc, une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle E_{tot} . Signalons que BALASOIU montre, dans le cas d'un mouvement antiplan¹⁰, que le modèle est quasiment identique au modèle de De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci, pour lequel un théorème d'existence a pu être exhibé.

La méthode numérique employée est la méthode à champ de phases. Elle repose sur la notion de Γ -convergence, en particulier sur le résultat de **convergence des minimums**. On remplace l'inconnue σ par une suite de fonctions lisses v_ε . Par exemple, dans le cas du traitement d'image, pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dont se sont inspiré Bourdin, Francfort et Marigo, on constate d'après Ambrosio et Tortorelli [AT90] que la suite de fonctionnelle

$$G_\varepsilon() = \int_{\Omega} \left(|u - g|^2 + (v^2 + \eta_\varepsilon) |\nabla u|^2 + \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\varepsilon} \right) \, dx,$$

Γ -converge vers la fonctionnelle limite

$$G_f = \int_{\Omega} |u - g|^2 + |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

où $g : \Omega \mapsto [0, 1]$ est la fonction de contraste de limage, et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de u , noté S_u , qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables [Bal20a, pp.35-37]. Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat

10. Un mouvement **antiplan** est un mouvement pour lequel le champ de déplacement u est porté par un vecteur constant.

de Γ -convergence sont disponibles dans la littérature. On cite par exemple ici les résultats obtenus dans [Nag+19] à la figure 1.6.

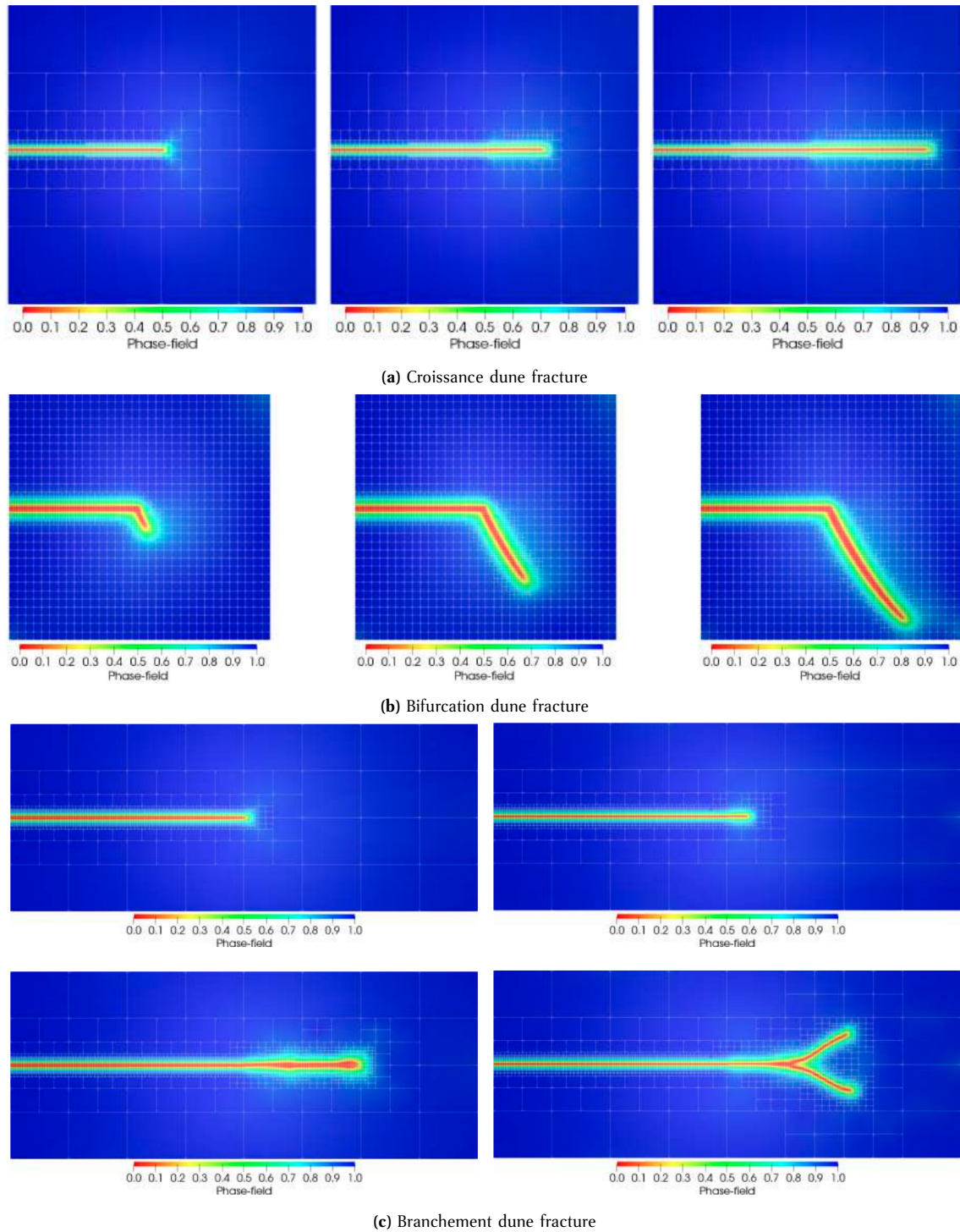


Figure 1.6 – Trois résultats numériques obtenus dans [Nag+19] à l'aide d'une discrétisation éléments finis (hp-FEM) et volumes finis en ne remaillant le domaine que lorsque c'est nécessaire.

1.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace

Le modèle présenté dans la section précédente n'est pas adapté à notre étude. BALASOIU a donc développé un modèle qui ne nécessite pas de fonctionnelle lissée, comme l'on fait plusieurs modèles de glaciologie

(voir [LLL15]), en supposant que les fractures sont des segments. Un résultat d'existence (dans les cas où le floe n'est pas encore fracturé) est prouvé à l'aide de la convergence de Mosco. De plus, BALASOIU introduit un problème dévolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du floe. Les fractures obtenues par ce problème dévolution sont ainsi des lignes brisées. Le résultat d'existence n'a pas été prouvé pour ce cas. Concernant le côté numérique, une méthode *meshless*^{II} est proposée.

Les modifications apportées pour traiter le modèle statique (dans \mathbb{R}^2) sont décrites ci-bas. Lorsqu'on fixe la fracture σ , l'énergie élastique prend la forme :

$$E_{\text{el}}(\cdot, \sigma) : A_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx,$$

où A représente le tenseur de Lamé du matériau, i.e.

$$\forall e \in M_2\mathbb{R}, \quad A e = \lambda \operatorname{tr}(e) I_2 + 2\mu e,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau; et l'ensemble des déplacements admissibles A_σ est :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma; \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

avec u^+ et u^- les restrictions de u aux régions Ω^+ et Ω^- respectivement (obtenues par extension de la fracture σ de façon à ce qu'elle soit traversante [Bal20a, p.52]). ν (normale à la fracture orientée du bord vers le centre de Ω) et ν . On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma$$

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma),$$

où Σ représentent l'ensemble des segments orientés partant de la frontière donnée par

$$\Sigma = \left\{ [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega},]a, b[\subset \Omega \right\}.$$

Une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple (u, σ) qui vérifie

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Ensuite, BALASOIU remarque que la solution n'est pas unique. Il définit donc un problème de d'évolution quasi-statique à la manière de [FM98], en considérant un problème de chargement monotone :

$$U_D(t) = t U_D.$$

On note $\bar{\Sigma}$ l'ensemble des lignes brisées de Ω , sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également $\operatorname{end}(\sigma)$ la fin d'une ligne brisée $\sigma \in \bar{\Sigma}$. On définit maintenant [Bal20a, p.50], pour toute ligne brisée $\sigma \in \bar{\Sigma}$ l'ensemble des fractures admissibles partant de σ :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \left\{ \sigma \cup [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a = \operatorname{end}(\sigma), b \in \overline{\Omega},]a, b[\subset \Omega \setminus \sigma \right\}.$$

II. Car l'ensemble discrétisé des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé.

On définit également l'ensemble des déplacements admissibles associées :

$$A_{t,\sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma; \mathbb{R}^2) \mid u = tU_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et pour toute ligne brisée σ . De ces définitions, on peut en exhiber un problème d'évolution discret, et un problème d'évolution continue en faisant tendre t vers 0. Le problème d'évolution continue admet des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets [DMT02 ; Cha03].

Lorsque la fracture est fixée, BALASOIU prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation, en utilisant la théorie des inégalités variationnelles, l'inégalité de Korn [Cia88], le théorème de Lions-Stampacchia [LS67]. Pour le cas statique, il montre que le problème statique a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, ceci en se servant principalement de la convergence de Mosco. Pour le modèle quasi-statique, un résultat d'existence n'a pas été trouvé, et une conjecture pour une ligne brisée qui possède un point d'auto-intersection a été proposée.

1.3.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier

Dans ce chapitre, BALASOIU souhaite approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous étudions que l'état d'équilibre du réseau de ressorts.

Commençons par quelques définitions pour le maillage sur un floe. Pour définir un réseau de ressort τ , on définit l'ensemble de ses points τ_0 disposés en forme de grille.

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2$$

De façon similaire, l'ensemble des arrêtes se nomme τ_1 , et l'ensemble des cellules τ_2 . Le réseau τ est obtenu à partir de τ_0 en traçant les côtés de chaque carré ; à la frontière, on trace les diagonales des carrés incomplets. On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de τ_0 dans \mathbb{R}^2 . On définit également deux triangulations de ω à partir de τ , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions $e_x + e_y$ et $e_x - e_y$. On note ces triangulations $\tilde{\tau}$ et $\hat{\tau}$ respectivement. Afin d'éviter les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point, on définit avec l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \overline{w}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$

Sur chaque arête $v \in \tau_1$, on place un ressort de longueur à vide $l_v = |v|$, et de raideur k_v (voir figure 1.7a). Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressorts, et $u = \varphi - \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{v \in \tau_1} \frac{k_v}{2} (|\varphi(v)| - |v|)^2. \end{aligned}$$

En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, d'angle de repos $\frac{\pi}{2}$, et de raideur $G|v|^2$ (voir figure 1.7b). L'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{v_1, v_2 \in c \cap \tau_1 \\ v_1 \cap v_2 \in \tau_0}} \frac{G|v|^2}{4} \left(\angle(\varphi(e_{v_1}), \varphi(e_{v_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. On note enfin

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale du réseau.

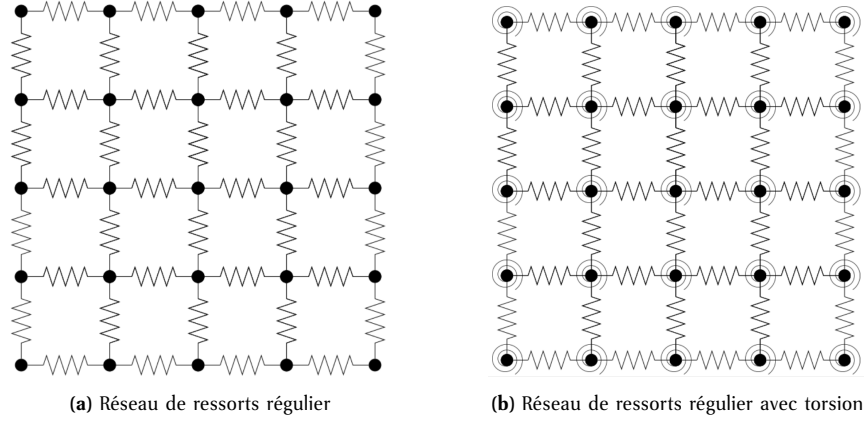


Figure 1.7 – Réseau de ressort considéré durant cette étude.

Ensuite, BALASOIU considère la suite τ_n de réseau défini, comme aux paragraphes précédents par

$$\tau_{n,0} = \Omega \cap \frac{1}{n} \mathbb{Z}^2.$$

On rappelle que k_1, k_2 représentent les constantes de raideurs des ressorts sur les arrêtes du réseau dans les deux directions de Ω , et G la constante de torsion des ressorts aux nœuds. Sur le maillage τ_n , après définition des énergies redimensionnées élastiques de traction R_n , et de torsion T_n , [Bal20a, p.91] montre les théorèmes suivants.

Theorème 1.3.1 (Γ -convergence). *La suite d'énergie redimensionnée $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge, pour la topologie faible de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, vers la fonctionnelle limite :*

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h e(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

avec C_h le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie :

$$C_{h,ijkl} M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2,$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si lon a $k_1 = k_2 = k = 8G$. Dans ce cas, on a :

$$E_{\text{el}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{\lambda,\mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

avec : $\lambda = 0$, et $\mu = \frac{k}{2}$.

Theorème 1.3.2 (Équi-coercivité). *Soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maillages du plan, et $(u_n) \in \mathbb{N}$ une suite de déplacements admissibles de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Le théorème 1.3.1 permet de constater que le tenseur de rigidité obtenu, lorsqu'il est isotrope, a un coefficient de Poisson nul¹². BALASOIU a donc proposé un calcul formel de la limite simple de la suite d'énergies discrètes dans le cas où le réseau de ressorts serait stochastique, de loi isotrope. En particulier, il trouve dans ce cas un coefficient de Poisson fixe de 1/4.

1.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes

Le résumé du chapitre écrit dans [Bal20a, p.136] est le suivant. Ce chapitre fait appel à des outils fin de probabilité conditionnelle et de processus stochastiques, telles que **mesure et formules de Campbell**, **distribution de Palm**, etc.

Dans ce chapitre, BALASOIU a construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. Il commence par donner plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules nous se montreront très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

La notion de processus ponctuel est un outil qui peut permettre de construire un ensemble de points dénombrable, sans point d'accumulation. BALASOIU définit un **processus stochastique simple de \mathbb{R}^d** comme : une variable aléatoire Φ d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans l'espace $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$. Elle induit une loi de probabilité \mathbb{P}_Φ sur $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$: l'espace $(\mathfrak{N}, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi)$ est un espace de probabilités. Dans cette définition, nous avons :

- \mathfrak{N} est ensemble des parties localement finies de \mathbb{R}^d . Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des motifs de points de \mathbb{R}^d ;
- \mathcal{N} est la plus petite tribu (sur \mathfrak{N}) qui rende mesurable les applications qui comptent le nombre de points du processus.

Une fois le processus défini, on peut définir sa **mesure d'intensité** Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ B &\mapsto \mathbb{E}(\Phi(B)) = \mathbb{E}(\text{Card } \Phi \cap B), \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}(F)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $F : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

La première formule de Campbell permet de relier la moyenne d'une somme sur les points du processus avec l'intensité du processus. En effet, soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive, on a :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(x) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x).$$

Un processus stochastique ponctuel Φ est dit de Poisson (cf. figure 1.8) s'il vérifie les hypothèses suivantes :

1. Φ est à éparpillement indépendant, c'est à dire que si $(B_i)_{i \in 1, \dots, k}$ sont des boréliens deux à deux disjoints ; alors les variables aléatoires $\Phi(B_i)$ sont indépendantes ;
2. pour tout B borélien, la variable aléatoire $\Phi(B) = \text{Card } \Phi \cap B$ suit une loi de poisson de moyenne $\mu = \lambda v_d(B)$, c'est à dire que :

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu).$$

¹². Cela correspond par exemple à un étirement longitudinal du réseau de ressorts, sans effet (amincissement ou épaississement) sur la section transversale.

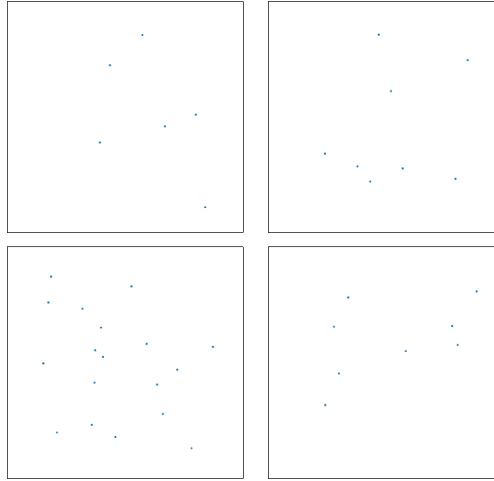


Figure 1.8 – Tirages dun processus de Poisson dintensité 10 sur le carré unité [Bal20a, p.137]. En premier, le nombre de point est obtenu par une v.a. suivant une loi de Poisson d'espérance 10. Ensuite les coordonnés des points sont obtenurs par simulation de deux v.a. suivant des lois uniformes [Keel18].

BALASOIU ne s'arête pas là. Il définit aussi les notions d'espace Polonais, mesure de compavage, et de convergence faible dièse. Ces notions sont importance vu la nécessité d'associer un point du processus ponctuel à une marque, i.e. un simplexe de \mathbb{R}^d dans notre cas. BALASOIU introduit lea notions de mesure de Campbell, qui permet d'obtenir la seconde formule de Campbell. Ensuite il définit la distrbution de Palm, permettant ainsi d'obtenir la très importante formule de Campbell-Mecke :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).$$

où $f : \mathbb{R}^d \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est uine fonction, mesurable et positive. Lorsque le processus ponctuel Φ est stationnaire d'intensité λ , on a :

$$\int_{\mathfrak{N}} \sum_{x \in \varphi} f(x, \varphi_{-x}) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x).$$

où \mathbb{P}_0 désigne la distribution de Palm. Le résultant de Slynvyak-Mecke suivant est une généralisation de cette dernière formule, lorsque les processus Φ est de Poisson, et la fonction mesurable positive $f : (\mathbb{R}^d)^n \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi} f(x_1, \dots, x_n, \Phi) \right) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E} (f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})) dx_1 \dots dx_n.$$

La prochaine etape consite en la présentation d'un **theoreme ergodique** qui lie la forme globale dun seul tirage avec la forme moyenne en un point de plusieurs tirages. Ici aussi, BALASOIU se base sur les travaux de D. J. Daley et D. Vere-Jones [DVJ08].

Theorème 1.3.3. Soit Φ un processus de Poisson, et f une fonction mesurable et positive qui vérifie :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(\Phi_{-x}) \right) < +\infty.$$

On note B_n la boule de \mathbb{R}^d , centrée en 0 et de rayon n . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(B_n)} \sum_{x_i \in B_n \cap \Phi} f(\Phi_{-x_i}) = \int_{\mathfrak{N}} f(\varphi) d\mathbb{P}_0(x).$$

Ensuite, BALASOIU s'attaque aux notions de maillages et pavages, en particulier les **pavages de Voronoi** (cf. figure 1.9). Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arrêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permettra de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sûre si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Soit donc $\varphi \in \mathfrak{N}$ un ensemble localement fini de points. On appelle diagramme de Voronoi associé à φ le pavage régulier de \mathbb{R}^d par $(C(x))_{x \in \varphi}$ où la cellule $C(x)$ est définie par :

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(y, x) < \inf_{z \in \varphi \setminus \{x\}} \text{dist}(y, z) \right\}.$$

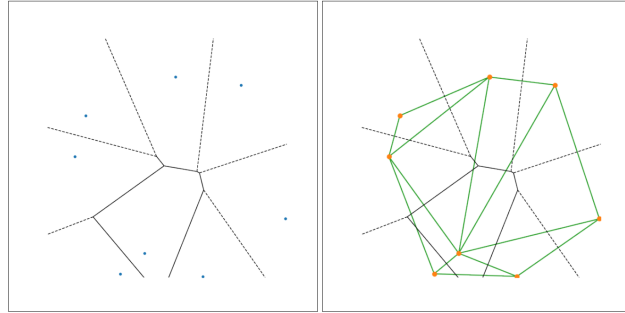


Figure 1.9 – Ensemble de points avec les diagramme de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) associés [Bal20a, p.138].

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (cf. théorème 1.3.3), BALASOIU montre que si Φ est un processus de Poisson, alors les points de φ sont presque sûrement en **position générale**¹³. En corrolaire, si φ est un ensemble de points en position générale, alors φ est l'ensemble des sommets du **maillage de Delaunay**¹⁴ D_φ construit sur le pavage de Voronoi V_φ .

Ce chapitre se termine par la notion de convergence d'une suite de maillages. BALASOIU montre que, si l'on dilate (cf. figure 1.10) le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtenons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Il a également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle sera utile dans le chapitre suivant, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

Soit donc $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, i.e. un ouvert connexe, de l'espace. Soit Φ un processus ponctuel de l'espace qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ une suite positive, croissante et divergente. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le processus ponctuel Φ_n par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt[d]{\lambda_n}} \Phi.$$

On note τ_n (cf. figure 1.10) le maillage par simplexe défini presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points $\Phi_n \cap D$:

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D},$$

ce qui permet d'obtenir le théorème suivant :

13. Voir définition 4.4.5 de la thèse [Bal20a, p.128].

14. Une triangularisation de Delaunay maximise le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles.

Théorème 1.3.4. Si la suite d'intensités $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n),$$

alors, presque sûrement, la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de maillages de D converge uniformément vers D .

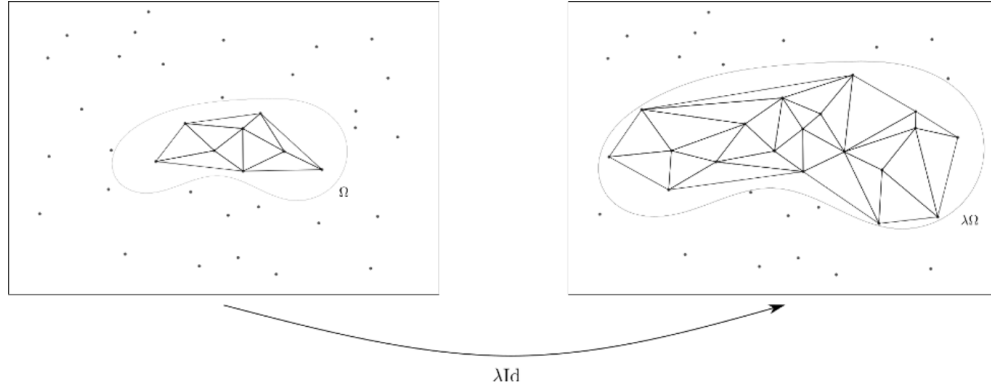


Figure 1.10 – Dilatation de l'ouvert D [Bal20a, p.138].

1.3.5 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope

Dans cette partie, BALASOIU propose un second résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau de ressorts. Dans la partie précédente, il avait proposé un résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau régulier, à mailles carrées. Ici, les mailles seront triangulaires. Plus précisément Le réseau de ressorts que nous utiliserons dans ce chapitre est défini dans la section précédente, et repose sur la théorie des processus stochastiques ponctuels. Nous proposons dans ce chapitre un résultat de Γ -convergence de l'énergie élastique sur un réseau de ressorts, issu d'un processus stochastique de loi isotrope.

Présentons le réseau de ressorts utilisé pour approcher l'énergie élastique d'un matériel continu D . Il s'agit des mêmes définitions utilisées pour introduire le théorème 1.3.4 ci-haut, cette fois-ci **en dimension 2**. On suppose que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine du plan, i.e. un ouvert du plan, qui est connexe et dont la frontière est lisse. On considère une triangulation quelconque τ du domaine D . On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'espace des éléments finis $P1$ défini sur le maillage τ . On note, comme précédemment, $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \overline{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\}.$$

On souhaite construire un réseau de ressorts sur τ tel que l'énergie totale E_τ soit équi-coercive. Mais puisque l'on utilisera des triangulations construites sur un processus de Poisson, la coercivité n'est pas assurée. Pour remédier à ce manque de coercivité, on va placer sur τ deux types de ressorts : des **ressorts de traction** et des **ressorts de torsion**. Les constantes de raideur des ressorts de traction et de torsion dépendent des angles du triangle de base des ressorts, et elles tendent vers l'infini si l'angle correspondant tend vers 0. Les constantes de rigidité des réseaux de ressorts sont supposées constantes. On note, comme aux chapitres précédents, R_τ l'énergie du réseau de ressorts de traction, et T_τ l'énergie du réseau de ressorts de torsion. On note de plus :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale sur le réseau τ . On note également, pour tout triangle $t \in \tau_2$ du maillage, v_1 , v_2 et v_3 ses trois cotés, ainsi que θ_1 , θ_2 et θ_3 les trois angles opposés (voir figure 1.11a).

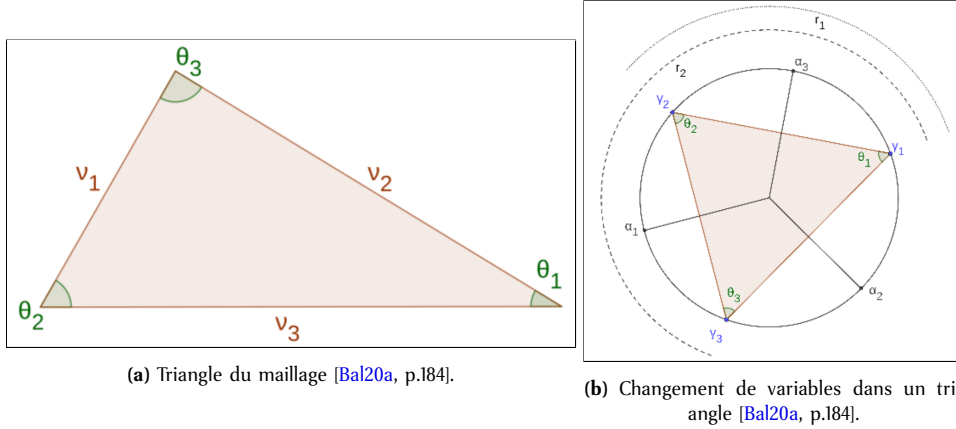


Figure 1.11 – Illustration des éléments du maillages, et des coordonnées.

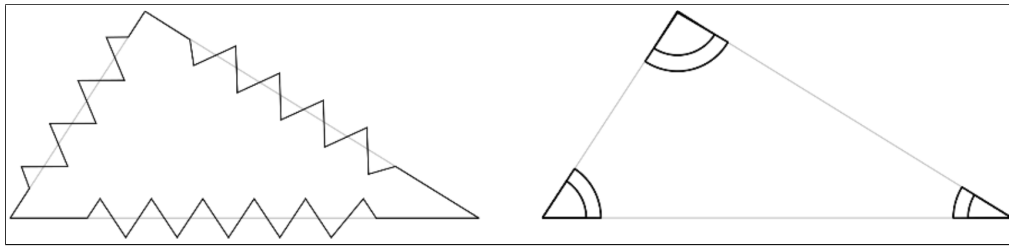


Figure 1.12 – Ressorts de traction (à gauche) et de torsion (à droite) [Bal20a, p.184].

On commence par définir l'énergie élastique du réseau de ressorts de traction R_τ , et on renvoie à la figure 1.12. On note $k > 0$ la constante de rigidité du réseau. On place, sur chaque arête v_i de chaque triangle t du maillage, un ressort de traction de longueur à vide $l_i = |v_i|$ et de raideur k_i , avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad k_i = \frac{k}{\sin(\theta_i)}.$$

Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressort, et $u = \varphi - \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$R_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k |v_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} (\|\nabla \varphi e_{v_i}\| - 1)^2.$$

On définit maintenant l'énergie T_τ , et on renvoie aux figures 1.11b et 1.12. On note $G > 0$ la constante de rigidité de torsion du réseau. On place, sur chaque angle θ_i de chaque triangle t du maillage, un ressort de torsion de raideur G_i :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_i = \frac{G |v_{i+1}| |v_{i+2}|}{\sin(\theta_i)}.$$

On définit l'énergie élastique discrète de l'assemblage :

$$T_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G |v_{i+1}| |v_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} (\angle(\varphi(v_{i+1}), v_{i+2}) - \angle(v_{i+1}, v_{i+2}))^2,$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. Ensuite, on étend les énergies élastiques définies sur les réseaux à $H^1(D, \mathbb{R}^2)$, en notant :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) & \text{si } u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) & \text{si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit maintenant la suite d'énergies élastiques définies sur la suite des réseaux $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On introduit un changement d'échelle des énergies $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive qui tend vers 0. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u), \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n$$

On donne enfin une version modifiée des suites fonctionnelles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui prenne en compte une condition de Dirichlet sur le bord de D . Soit donc $v \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la donnée du bord. On note :

$$W_n^v(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \tau_0, \text{dist}(p, \partial D) \leq \lambda_n, u(p) = v(p) \right\}.$$

On pose ensuite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que

$$E_n^v = R_n^v + T_n^v.$$

On énonce maintenant les trois théorèmes principaux du chapitre.

Théorème 1.3.5 (Convergence simple). *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, il existe une suite de déplacements discrets $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

et qui vérifie de plus :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_s(u)$$

avec :

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda, \mu} e : e = \lambda \, \text{tr}(e)^2 + 2\mu \, \text{tr}(e)^2,$$

avec λ et μ les premières et deuxième constantes de Lamé, qui valent :

$$\lambda = \frac{32k|A|}{9\pi^2} + \frac{3G|A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k|A|}{9\pi^2} - \frac{3G|A|}{4}$$

Theorème 1.3.6 (Γ -convergence). *Supposons que la suite de changements d'échelle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

Alors, la suite de fonctionnelles redimensionnées $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle $E_{\text{hom}} : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$E_{\text{hom}}(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda_h, \mu_h} e : e = \lambda_h \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu_h \operatorname{tr}(e).$$

De plus, pour toute donnée au bord v dans $\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, la suite de fonctionnelles $(E_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle $E_{\text{hom}}^v : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$E_{\text{hom}}^v(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u - v \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Theorème 1.3.7 (Équi-coercivité). *Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maillages du plan et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de déplacements admissibles de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacements est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

1.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur

Ce dernier chapitre propose un résultat de quasi-staticité d'un réseau de ressorts percuté par un objet ponctuel lorsque la raideur du système et sa masse totale tendent vers l'infini. Lors de la collision de floes de glaces, la vitesse relative des floes (de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres par seconde, voir [Ram+09]) est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace (de l'ordre de grandeur de 1800 mètres par seconde pour les ondes de cisaillement, voir [Mar+19]). BALASOIU montre que, lors de la percussion d'un réseau masse-ressort par un objet solide, les effets dynamiques disparaissent lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini. Autrement dit, nous montrons que le réseau limite, de raideur infinie, est à chaque instant dans un état d'équilibre. Plus précisément, nous observerons que le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit **système intérieur** (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Le second, dit **système extérieur** (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts.

On étudie le phénomène de percussion d'un système masse-ressort de $n+1$ particules, chacune de masse m , par un objet ponctuel P de masse M . Le système masse-ressort utilisé est de constante de raideur $k > 0$, et de constante de viscosité $\mu > 0$. Soit $\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ une triangulation compacte et connexe du plan. En chaque

noeud $q \in \tau_0$, on place une masse ponctuelle m . Sur chaque arête $\omega \in \tau_1$ de τ , on place en parallèle (voir figure 1.13) :

1. un ressort de longueur à l'équilibre ω et de raideur k ,
2. un dissipateur visqueux, de viscosité μ .

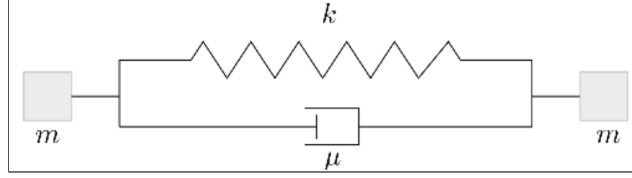


Figure 1.13 – Système élémentaire masse-ressort utilisé.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système masse-ressorts est à l'équilibre, et qu'il est percuté par la masse ponctuelle P au point $q_0 \in \partial\tau_0$. On note v_0 la vitesse du point P lors de la collision. On suppose également que le système $\{q_0, P\}$ **devient inséparable**, de masse $m + M$. Sur le maillage τ , on note τ_0 l'ensemble des noeuds du système. On a donc :

$$\tau_0 = \{q_0, \dots, q_n\},$$

où les q_i sont les coordonnées des masses. On rappelle que le système est à l'équilibre au temps $t = 0$. On note $a, b \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbb{R})$ les vecteurs de positions et vitesses initiales définis par :

$$\begin{cases} a = (q_0(0), \dots, q_n(0)), \\ b = (v_0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

On note de plus $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de connectivité :

$$0 \leq i < j \leq n+1, C_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } q_i \in \mathcal{V}(q_j), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{V}(q)$ désigne l'ensemble des voisins de la particule $q \in \tau_0$. On note encore $L_{ij} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de longueurs à l'équilibre dont l'expression est déduite de 0 ; et u_{ij} le vecteur unitaire (s'il existe) dans la direction de l'arête entre q_i et q_j . On obtient le système différentiel suivant en appliquant l'équation d'Euler-Newton sur les moments linéaires, et en exprimant la force de frottement du dispositif visqueux en fonction de \dot{q} :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\frac{k}{M+m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \frac{\mu}{M+m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[\frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], & \forall 1 \leq i \leq n. \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad (E)$$

D'un point de vue énergétique, on a loi de conservation de l'énergie suivante :

$$E_{el}(t) + E_c(t) + E_r(t) = E_0$$

où $E_{el}(t)$, E_c , et E_r désignent respectivement l'énergie élastique du système, l'énergie cinétique, et l'énergie dissipée par les frottement visqueux [Bal20a, p.188]. E_0 désigne l'énergie initiale du système donnée par

$$E_0 = \frac{1}{2}(M+m)\|\mathbf{v}_0\|^2.$$

Sous ces hypothèses et ces définitions, BALASOIU obtient le théorème d'existence globale suivant.

Théorème 1.3.8 (Existence d'une solution globale). *On suppose que les conditions initiales adjointes au système équation (E) vérifient la condition énergétique :*

$$E_0 < \frac{k}{4} \left(\inf_{\omega \in \tau_1} |\omega| \right)^2.$$

Alors, le problème de Cauchy est bien posé¹⁵ et ses solutions sont globales.

Ensuite, afin d'obtenir un système à grande raideur et de supprimer les perturbations liées à la propagation des ondes élastiques, BALASOIU introduit une dépendance en ε des constantes physiques du système : k_ε , M_ε et μ_ε . En posant

$$k_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon}, \quad M_\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^2}, \quad \mu_\varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

le système masse-ressort se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\frac{k}{M + \varepsilon^2 m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \varepsilon \frac{\mu}{M + \varepsilon^2 m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], \\ \varepsilon^2 \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[\frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_\varepsilon)$$

On écrit également le système limite :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \frac{k}{M} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} \\ \mathbf{0} = \sum_{j=0}^n C_{ij} \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_{lim})$$

Ce problème est un problème de perturbation singulière, pour lequel BALASOIU prouve le théorème de limite quasi-statique ci-bas (en se servant principalement du théorème classique de A.N.Tikhonov [Tik52 ; Hop66]).

Théorème 1.3.9 (Limite quasi-statique). *Les solutions \mathbf{q}_ε et \mathbf{q} respectivement des systèmes perturbé équation (E_ε) et limite équation (E_{lim}) munis des conditions initiales¹⁶ existent, sont uniques, et globales. De plus, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Du point de vue numérique, les simulations ont permis de comprendre l'influence des différents paramètres physiques présents (masse des deux objets, raideur des ressorts, vitesse d'impact ...). De plus, le code Python et HTML/CSS développé fournira une bonne base pour analyser la localisation des vecteurs propres du système dynamique et identifier ceux qui agissent sur un déplacement du bord. Le principal résultat numérique utilisé est le suivant. À $\varepsilon > 0$ fixé, on note $(\lambda_i(\varepsilon))_{i \in \{0, \dots, 4n+3\}}$ les valeurs propres de l'opérateur associé à la linéarisation du système équation (E_ε) autour de sa position d'équilibre, et on les ordonne ainsi :

$$0 \geq \Re(\lambda_8(\varepsilon)) \geq \Re(\lambda_9(\varepsilon)) \geq \dots \geq \Re(\lambda_{4n+3}(\varepsilon)).$$

Nous définissons le saut spectral associé au système équation (E_ε) de la manière suivante :

$$\nu_\varepsilon = \frac{\Re(\lambda_{12}(\varepsilon))}{\Re(\lambda_{11}(\varepsilon))}.$$

15. Le système est bien posé si deux particules voisines restent à une distance $c > 0$ l'une de l'autre.

16. Des conditions initiales satisfaisant le théorème 1.3.8.

Ce saut représente l'écart entre les quatre premières valeurs propres non nulles du système, qui correspondent au système lent (SE), et la première valeur propre du système rapide (SI). Après avoir tracé le saut spectral v_ε pour différentes triangulations τ (cf. figure 1.14a pour un exemple), BALASOIU constate qu'il s'agit de droites dont la pente ne dépend ni du tirage, ni de l'intensité du processus de Poisson-Delaunay. Il propose donc l'expression suivante pour v_ε :

$$\ln(v_\varepsilon) = a_0(\tau) + \alpha \ln(\varepsilon),$$

avec $a_0(\tau)$ une quantité qui dépend du maillage τ , et α une constante universelle, indépendante de τ et ε numériquement estimée à la valeur :

$$\alpha = 2 \pm 10^3.$$

La figure 1.14c ci-dessous a été obtenue, pour un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500000, l'histogramme de la valeur de a_0 associée sur 1000 tirages.

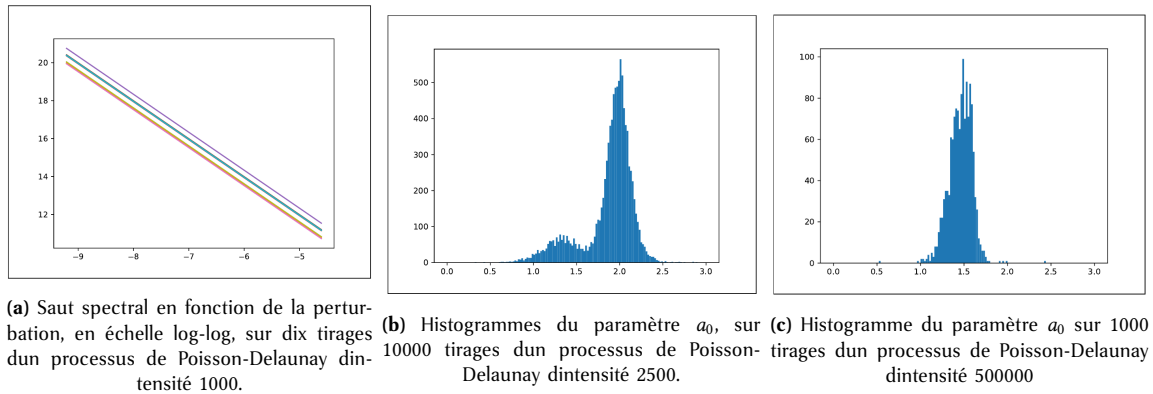


Figure 1.14 – Principaux résultats numériques obtenus [Bal20a, p.199].

Ces résultats semblent indiquer, à grande échelle au moins, que $a_0(\tau)$ prend ses valeurs entre 0.9 et 2.5. Nous observons également émergence de deux pics pour certaines intensités. Il semblerait que le pic de valeur moyenne la plus faible gagne en fréquence de représentation, jusqu'à concentrer la quasi-totalité des cas pour l'intensité de 500000.

1.3.7 Discussion et questions ouvertes

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse pour limiter la complexité du modèle. Ces simplifications sont à l'origine de simplifications que nous précisons ci bas :

1. Le modèle suppose que les floes sont d'épaisseur négligeable devant leur extension horizontale ; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.
2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites [Bal20a, chp.2].
3. Au chapitre 6 [Bal20a, p.187], il serait également intéressant d'intégrer, comme dans les chapitres 3, 4, et 5, des ressorts de torsion en chaque noeud du système masse-ressort [Bal20a, p.187].
4. Au chapitre 5 BALASOIU, p.183, BALASOIU a montré que la suite d'énergies élastiques Γ -converge vers une énergie limite. De plus, lorsque le redimensionnement est suffisamment rapide, il a montré que la Γ -limite s'écrit comme l'énergie d'un matériau élastique homogène et isotrope, soumis à l'hypothèse des petits déplacements. Cette énergie dépend donc de deux paramètres, les deux constantes de Lamé du matériau homogénéisé. Il serait intéressant d'adapter l'étude numérique [OSAJ95] pour obtenir une expression des constantes de Lamé homogénéisées dans notre cas.
5. Il reste, à l'issue de la thèse, à obtenir une seconde limite spatiale. Cette limite est une limite de couche, qui indiquerait l'expression du déplacement au bord du floe lors de la percussion. Nous

pourrions l'obtenir en sélectionnant les vecteurs propres du système dynamique masse-ressorts qui influent sur le comportement d'une couche mince du bord du floe [Bal20a, p.201].

6. Dans une prochaine étude, on pourrait étudier la percussion du système masse-ressort par un objet solide non ponctuel et qui ne serait pas fixé au système étudié. BALASOIU pense que le cas général peut se déduire du cas étudié au chapitre 6 [Bal20a, p.187]. En effet, l'étude de la percussion complète reviendrait à ajouter, dans le système différentiel étudié, un nombre fini de perturbations singulières à des instants distincts.

1.4 Résumé de l'Etat de l'art

Chapitre 2

Problème 2D et percussion des floes

2.1 Développement d'un modèle de déplacement des noeuds

Étudions le comportement d'un floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts (3 ressort, 3 dispositif visqueux, et 3 noeuds) (voir figure 2.1).

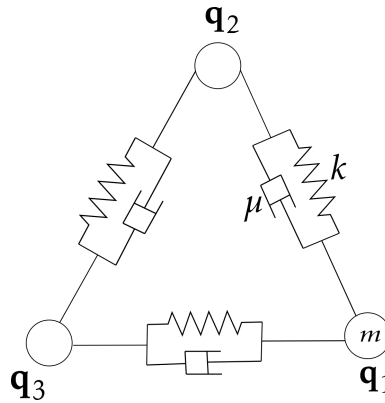


Figure 2.1 - Floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Tous les noeuds du réseau ont la même masse m , tous les ressorts ont la même raideur k , et tous les dispositifs visqueux ont le même coefficient μ .

Comme nous l'avons présenté aux équations (2.4) et (E), le système de la figure 2.1 est régi par l'équation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad (2.1)$$

où L_{ij} représente la longueur au repos du ressort entre les noeuds i et j , et C_{ij} indique si les noeuds i et j sont connectés ou non (pour ce modèle 2D simple, $C_{ij} = 1 \forall 0 \leq i, j \leq 2$). Le vecteur unitaire \mathbf{u}_{ij} vaut :

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

Simulation par un schéma d'Euler explicite. On discrétise par un schéma de différence finies avec $N+1$ pas de temps, et pour une temps de simulations T :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n = n\Delta t = n\frac{T}{N}, \quad \mathbf{q}_i(t^n) \approx \mathbf{q}_i^n.$$

L'équation (2.1) devient :

$$m \frac{\mathbf{q}_i^{n+1} - 2\mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \frac{\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right],$$

soit encore :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]. \quad (2.2)$$

La simulation de ce modèle par un schéma d'Euler explicite à pas constant sur un intervalle de temps faible ($T = 4$) est présentée à la figure 2.2, ainsi que les positions des 2 noeuds au début et à la fin de la simulation. La simulation à la figure 2.3 permet d'observer le problème avec ce schéma ($T = 10$).

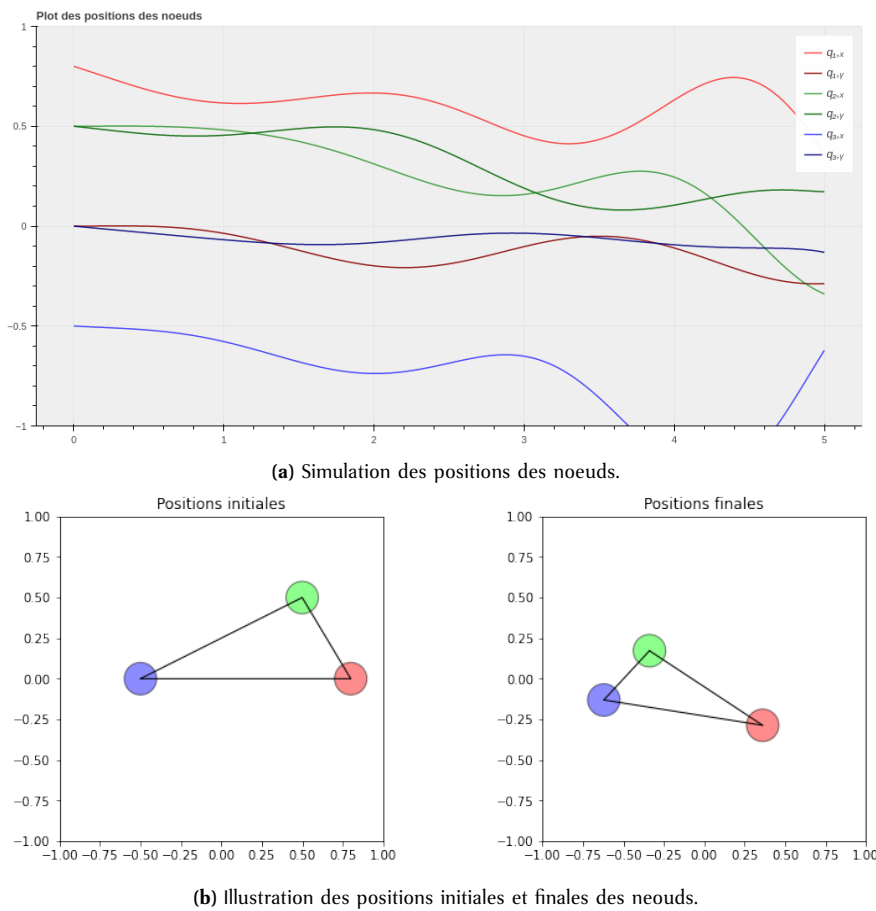


Figure 2.2 – Simulation du système 2.2 par un schéma d'Euler explicite avec $T = 4$. La couleur rouge représente le noeud \mathbf{q}_1 , le vert le noeud \mathbf{q}_2 , le bleu le \mathbf{q}_3 . Les paramètres utilisés ici sont les suivants : $m = 6.2$, $k = 23.3$, $\mu = 3$; à l'instant initial, les trois noeuds perturbés avec des vitesses d'intensité respectives $v_1 = 0.3$, $v_2 = 0.1$, et $v_3 = 0.1$. Par rapport à l'axe des abscisses, ces vitesses sont orientées respectivement de $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 270^\circ$, et $\theta_3 = 240^\circ$ (voir `code/simu2D/Deplacement2D-1.ipynb`).

METTRE PLUS DE PHOTOS DES SIMULATIONS AVEC LES BOULES

Les figures 2.2 et 2.3 permettent de constater que le schéma d'Euler explicite (peu importe son pas de temps), n'est pas adapté à ce problème. Nous étudierons donc d'autres alternatives.

Simulation à l'aide des fonction de la librairie Scipy. À travers ses fonction telle que `odeint` et `solve_ivp`, Scipy offre une solution robuste et élégante pour simuler les systèmes d'ODE de la forme

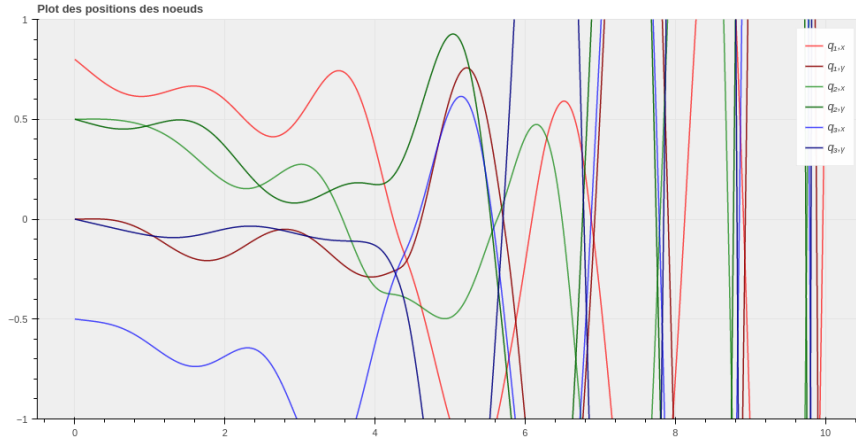


Figure 2.3 – Simulation du système 2.2 par un schéma d'Euler explicite avec $T = 10$. Cette figure utilise les même paramètres que la figure 2.2. On observe ici une divergence totale du système.

$$Y' = AY.$$

2.2 Développement d'un modèle de percussion des floes

2.2.1 Présentation des travaux antérieurs

Les travaux antérieurs sur le problème 2D ont été présentés dans la chapitre 1. Particulièrement, nous avons adopté et amélioré des résultats obtenus par D. Balasoiu [Bal20b]. Ces résultats concernent la simulation du comportement des floes de glace une fois une fois percuté par un objet ponctuel; et on été présentés à la section 1.3.6. Ici, nous explicitons les points sur lesquels nous nous sommes directement inspirés pour notre travail de stage.

En effet, BALASOIU a simulé l'équation (E_ϵ) en langage Python et a créé une interface graphique web pour interagir avec le programme. Ces résultats sont illustrés à la figure CI-BAS

FIGURE 6.5 THESE DIMITRI

2.2.2 Nouveaux travaux sur la percussion

Les floes de glace Ω_k et Ω_l sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une modélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliés par des ressorts (de constante de raideur k), et par des dispositifs visqueux de constante μ . Nous désignerons par $n + 1$ le nombre total de noeuds du floe Ω_k , chaque noeud ayant pour masse m . De façon similaire, on définit les constantes k' , μ' , $n' + 1$, $m' + 1$ pour le floe Ω_l . Les positions des noeuds de Ω_k seront noté $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$, tandis que ceux de Ω_l seront notés $(p_i)_{0 \leq i \leq n'}$ (voir figure 2.4).

On définit la matrice de contact $C...$ (voir these Dimitri), et $L_{0j}..$ et $u_{0j} ..$

Comme présenté dans les travaux [Bal20a, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisons le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe Ω_k , nous écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire¹ au point de contact q_0 :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (2.3)$$

1. La rotation du point matériel q_0 n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

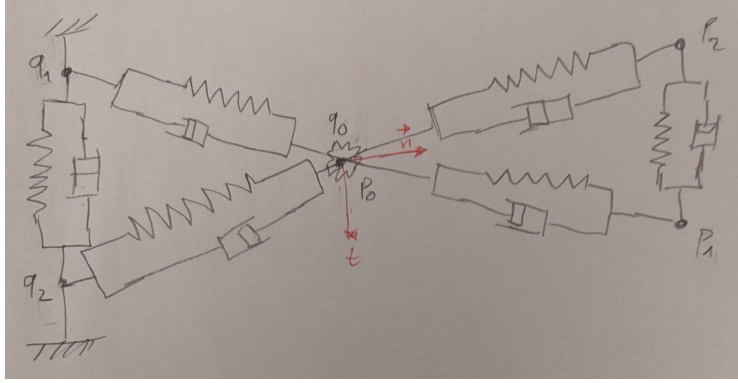


Figure 2.4 – Contact entre deux floes aux points $p_0 = q_0$.

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\underbrace{k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (2.4)$$

représente la somme des forces de réaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud q_0 ; et $\mathbf{F}_0^c(t)$ la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ associé au floe Ω_k (voir figure 2.4), on peut écrire, pour $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (2.5)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations (2.3) à (2.5). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(E)} \quad \text{(SI)}$$

En ce qui concerne le floe Ω_l , nous procédons de facons similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n'. \end{cases} \quad \text{(E')} \quad \text{(SI)}$$

où $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$ sont définis de facon similaire à \mathbf{F}_0 (voir équation (2.4)) :

$$\mathbf{F}'_i = \sum_{j=i}^{n'} C_{ij} \left[k' (\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - L'_{ij}) \mathbf{u}'_{ij} - \mu' \langle \dot{\mathbf{p}}_j - \dot{\mathbf{p}}_i, \mathbf{u}'_{ij} \rangle \mathbf{u}'_{ij} \right]. \quad (2.6)$$

Ensuite, on additionne membre à membre les équations des systèmes extérieurs (SE) de équations (E) et (E') pour éliminer la force de contact. On obtient :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0. \quad (2.7)$$

Remarquons que les positions relatives des noeuds \mathbf{q}_0 et \mathbf{p}_0 restent inchangées durant la collision. A l'instant initial, on note donc $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0)$, et $\dot{\mathbf{q}}_0(0) = \dot{\mathbf{p}}_0(0)$; idéalement, nous voudrions que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{q}_0(t) - \mathbf{p}_0(t) = \Delta_0. \quad (2.8)$$

Pour satisfaire cette condition, nous exhibons $n + n' + 2$ équations nécessaire pour que notre problème de percussion soit bien posé. Elles sont :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0, & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{p}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. & \text{(SI)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', & \text{(SI)} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

Ensuite, il nous avons construit une interface graphique web pour interagir avec le programme. A travers cette interface, nous pouvons modifier tous les paramètres du problèmes et lancer des simulations. Un tel exemple se trouve à la figure CI-BAS

FIGURE DE MON INTERFACE GRAPHIQUE WEB

2.3 Code de calcul 2D

L'algorithme de calcul 2D est largement inspiré des travaux de BALASOIU. En effet, nous avons ajouté des modules Python à la librairie `springslattice` qu'il à développé pour traiter les réseaux de ressorts. Ces modules sont :

1. **multimesh** : pour la création d'un réseau de ressort constitué de deux floes de glace en contact, que nous considérerons comme un maillage.
2. **multisolver** : pour la création du solveur 2D suivant l'équation (\mathcal{P}) pour simuler les noeuds d'un objet `multimesh`. Une fois les calculs fait dans la fonction `Fhom`, nous les vérifions à l'aide d'un schéma symplectique (voir annexe A).
3. **percussion-cli** : pour l'exécution des simulations avec des paramètres donnés en ligne de commande (ou ceux insérer par défaut).
4. **percussion-web** : pour l'exécution des simulations avec des paramètres donnés dans une interface web. Ici, on peut en plus observer les vecteur et les valeurs propres (toutes négatives) du système.

Nous présentons CI-BAS un diagramme UML explicitant le code que nous développée. Dans ce diagramme, on peut voire les relation d'héritage entre les classes. Quelques frames d'une simulation sont présentés CI-BAS.

DIAGRAMME UML 2d

QUELQUES FRAMES DU RESULTAT DE SIMULATION 2D

2.4 Résumé des résultats obtenus

Bien que le modèle de fracture 1D soit facilement adaptable au calculs 2D, nous ne l'avons pas fait fait faute de temps. En particulier, nous avons :

- Modélisation du déplacement des noeuds d'un floe de glace 2D soumis à aucune force sur bord ;
- Modélisation de le collision (élastique) de deux floe de glace. Vu que le temps de la collision est connu (voir [Rab15]), nous pouvons limiter étendre ces travaux à la collision avec séparation des masses, comme nous l'avons fait en 1D.
- Création d'un interface web pour introduire les paramètres et obtenir les résultats d'une simulation.

Les travaux obtenus en 2D sont prometteurs, tout comme ceux obtenus en 1D. Ils ont été obtenus pendant un stage qui a demandé une discipline et un encadrement de taille. Au bout de ce travail, j'ai pu en tirer plusieurs bénéfices.

Chapitre 3

Déroulement et apports du stage

3.1 Journal de bord

3.2 Bilan et future travail

RÉSUMÉ DÉTAILLÉ DES TRAVAUX DE STAGE, ET TRAVAIL RESTANT

3.3 Les apports du stage

LES OUTILES ET LES RESSOURCES UTILISÉS ENTRENT ICI.

- L' utilisation de TIKZ
- La maitrise de Flask
- La maitrise de Bokeh
- Optimiser mes codes (1D et 2D) avec Cpython

Chapitre 4

Conclusion

Annexe A

Rappels sur les EDO

A.1 Le schéma Scymplectique

EXPLICATION DU MODULE SCIPY INTEGRATE

Annexe B

Gamma convergence

Bibliographie

- [AC12] J-P AUBIN et Arrigo CELLINA. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. T. 264. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Aca13] Vincent ACARY. « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulombs friction ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), p. 224-250.
- [Ait50] Alexander C AITKEN. « Iv.studies in practical mathematics. v. on the iterative solution of a system of linear equations ». In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics* 63.1 (1950), p. 52-60.
- [AT90] Luigi AMBROSIO et Vincenzo Maria TORTORELLI. « Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43.8 (1990), p. 999-1036.
- [Bal20a] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Bal20b] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes, 2020. URL : <https://www-ljk.imag.fr/membres/Dimitri.BalasoIU/These.pdf>.
- [Bar] David BARAFF. « Andrew Witkin Large Steps in Cloth Simulation ». In : *SIGGRAPH98Conference Proceedings* (), p. 43-54.
- [Bar93] David BARAFF. « Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies ». In : *Algorithmica* 10.2 (1993), p. 292-352.
- [Bra84] Iain BRATCHIE. « Rheology of an ice-floe field ». In : *Annals of Glaciology* 5 (1984), p. 23-28.
- [CFM09] Antonin CHAMBOLLE et al. « When and how do cracks propagate? » In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.9 (2009), p. 1614-1622.
- [Cha03] Antonin CHAMBOLLE. « A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 167.3 (2003), p. 211-233.
- [Cia88] Philippe G CIARLET. *Three-dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [DGCL89] E DE GIORGI et al. « Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set ». In : *Ennio De Giorgi* (1989), p. 654.
- [DMT02] Gianni DAL MASO et Rodica TOADER. « A model for the quasi-static growth of brittle fractures based on local minimization ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12.12 (2002), p. 1773-1799.
- [DVJ08] Daryl J DALEY et David VERE-JONES. *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume II : General Theory and Structure*. Springer, 2008.
- [FM98] Gilles A FRANCFORT et J-J MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46.8 (1998), p. 1319-1342.
- [GP95] Ch GLOCKER et Friedrich PFEIFFER. « Multiple impacts with friction in rigid multibody systems ». In : *Nonlinear Dynamics* 7.4 (1995), p. 471-497.

- [Gri21] Alan Arnold GRIFFITH. « VI. The phenomena of rupture and flow in solids ». In : *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593 (1921), p. 163-198.
- [GS17] Dietmar GROSS et Thomas SEELIG. *Fracture mechanics : with an introduction to micromechanics*. Springer, 2017.
- [Her11] Agnieszka HERMAN. « Molecular-dynamics simulation of clustering processes in sea-ice floes ». In : *Physical Review E* 84.5 (2011), p. 056104.
- [HI79] WD HIBLER III. « A dynamic thermodynamic sea ice model ». In : *Journal of physical oceanography* 9.4 (1979), p. 815-846.
- [Hop66] Frank Charles HOPPENSTEADT. « Singular perturbations on the infinite interval ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 123.2 (1966), p. 521-535.
- [Hop85] Mark A HOPKINS. « Collisional stresses in a rapidly deforming granular flow : a thesis ». Thèse de doct. Clarkson University, 1985.
- [Hop96] Mark A HOPKINS. « On the mesoscale interaction of lead ice and floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 101.C8 (1996), p. 18315-18326.
- [Ing13] Charles Edward INGLIS. « Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners ». In : *Trans Inst Naval Archit* 55 (1913), p. 219-241.
- [Irw57] George R IRWIN. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate ». In : (1957). URL : [https://www.scirp.org/\(S\(oyulxb452alnt1aej1nfow45\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379](https://www.scirp.org/(S(oyulxb452alnt1aej1nfow45))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379).
- [Jea99] Michel JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4 (1999), p. 235-257.
- [JP85] Michel JEAN et Elaine PRATT. « A system of rigid bodies with dry friction ». In : *International journal of engineering science* 23.5 (1985), p. 497-513.
- [Kee18] Paul KEELER. « Simulating a homogeneous Poisson point process on a rectangle ». In : (2018).
- [Lem78] Carlton E LEMKE. « Some pivot schemes for the linear complementarity problem ». In : *Complementarity and Fixed Point Problems*. Springer, 1978, p. 15-35.
- [LLL15] Wenjun LU et al. « In-plane fracture of an ice floe : A theoretical study on the splitting failure mode ». In : *Cold Regions Science and Technology* 110 (2015), p. 77-101.
- [Löt81] Per LÖTSTEDT. « Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 61.12 (1981), p. 605-615.
- [Löt82a] Per LÖTSTEDT. « Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 42.2 (1982), p. 281-296.
- [Löt82b] Per LÖTSTEDT. « Time-dependent contact problems in rigid body mechanics ». In : *Nondifferential and Variational Techniques in Optimization*. Springer, 1982, p. 103-110.
- [LS67] Jacques-Louis LIONS et Guido STAMPACCHIA. « Variational inequalities ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 20.3 (1967), p. 493-519.
- [Mar+19] David MARSAN et al. « Characterizing horizontally-polarized shear and infragravity vibrational modes in the Arctic sea ice cover using correlation methods ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.3 (2019), p. 1600-1608.
- [MM85] MDP MONTEIRO MARQUES. « Chocs inélastiques standards : un résultat d'existence ». In : *Séminaire d'Analyse Convexe, USTL, Montpellier* 15 (1985).
- [MM88] MDP MONTEIRO MARQUES. « Inclusões Diferenciais e Choques Inelásticos ». Thèse de doct. Ph D Thesis, Universidade de Lisboa, Lisbon, 1988.
- [MM94] MD P MONTEIRO MARQUES. « An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction ». In : *European journal of mechanics. A. Solids* 13.2 (1994), p. 277-306.
- [Mor78] Jean Jacques MOREAU. « Approximation en graphe d'une évolution discontinue ». In : *RAIRO. Analyse numérique* 12.1 (1978), p. 75-84.

- [Mor85] Jean J MOREAU. « Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints ». In : ***Unilateral problems in structural analysis***. Springer, 1985, p. 173-221.
- [Mor86] Jean Jacques MOREAU. « Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel ; essais numériques ». Thèse de doct. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1986.
- [Mor88] Jean J MOREAU. « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics ». In : ***Nonsmooth mechanics and Applications***. Springer, 1988, p. 1-82.
- [Mor99] Jean Jacques MOREAU. « Numerical aspects of the sweeping process ». In : ***Computer methods in applied mechanics and engineering*** 177.3-4 (1999), p. 329-349.
- [MW88] Matthew MOORE et Jane WILHELMS. « Collision detection and response for computer animation ». In : ***Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques***. 1988, p. 289-298.
- [Nag+19] Sindhu NAGARAJA et al. « Phase-field modeling of brittle fracture with multi-level hp-FEM and the finite cell method ». In : ***Computational Mechanics*** 63.6 (2019), p. 1283-1300.
- [NB14] Ngoc Son NGUYEN et Bernard BROGLIATO. ***Multiple impacts in dissipative granular chains***. T. 3. Springer, 2014.
- [NW72] James L NEVINS et Daniel E WHITNEY. « The force vector assembler concept ». In : ***On Theory and Practice of Robots and Manipulators***. Springer, 1972, p. 273-288.
- [OSAJ95] M OSTOJA-STARZEWSKI et al. « Linear elasticity of planar Delaunay networks. III : Self-consistent approximations ». In : ***Acta mechanica*** 110.1 (1995), p. 57-72.
- [Pan12] Panagiotis D PANAGIOTOPOULOS. ***Inequality Problems in Mechanics and Applications : Convex and nonconvex energy functions***. Springer Science & Business Media, 2012.
- [PS02a] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case ». In : ***SIAM Journal on Numerical Analysis*** 40.2 (2002), p. 702-733.
- [PS02b] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems II : The multidimensional case ». In : ***SIAM journal on numerical analysis*** 40.2 (2002), p. 734-768.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Rag+04] Laks RAGHUPATHI et al. « An intestinal surgery simulator : Real-time collision processing and visualization ». In : ***IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*** 10.6 (2004), p. 708-718.
- [Ram+09] Pierre RAMPAL et al. « Arctic sea ice velocity field : General circulation and turbulent-like fluctuations ». In : ***Journal of Geophysical Research : Oceans*** 114.C10 (2009).
- [RLW15] Matthias RABATEL et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : ***Journal of Geophysical Research : Oceans*** 120.9 (2015), p. 5887-5909.
- [SHL86] HH SHEN et al. « On applying granular flow theory to a deforming broken ice field ». In : ***Acta Mechanica*** 63.1 (1986), p. 143-160.
- [Sig33] Antonio SIGNORINI. « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : ***Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*** 27 (1933), p. 69.
- [Sol70] H SOLOMON. « A study of ice dynamics relevant to AIDJEX ». In : ***AIDJEX Bull*** 2.33-50 (1970).
- [ST96] David E STEWART et Jeffrey C TRINKLE. « An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction ». In : ***International Journal for Numerical Methods in Engineering*** 39.15 (1996), p. 2673-2691.
- [Tik52] Andrei Nikolaevich TIKHONOV. « Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives ». In : ***Matematicheskii sbornik*** 73.3 (1952), p. 575-586.
- [VCMT95] Pascal VOLINO et al. « Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects ». In : ***Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques***. 1995, p. 137-144.
- [WFH10] Alexander V WILCHINSKY et al. « Effect of shear rupture on aggregate scale formation in sea ice ». In : ***Journal of Geophysical Research : Oceans*** 115.C10 (2010).
- [Whi77] Daniel E WHITNEY. « Force feedback control of manipulator fine motions ». In : (1977).

- [WW90] Andrew WITKIN et William WELCH. « Fast animation and control of nonrigid structures ». In : ***Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques***. 1990, p. 243-252.