



# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

**Roussel Desmond Nzoyem**

Sorbonne Université  
Laboratoire Jacques-Louis Lions

Soutenance de mi-stage  
14 mai 2021

# Sommaire

## 1 INTRODUCTION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

## 1 INTRODUCTION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

# Motivation

## Enjeux écologiques

- ▶ Etude climatique à échelle nature (SASIP)
- ▶ Prévisions climatiques avec précision

## Enjeux industriels

- ▶ Routes maritimes exploitables
- ▶ Étude des stations offshore

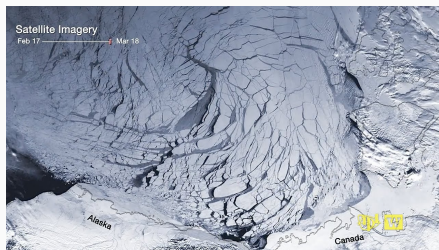


FIGURE – Image satellite de l'artique



FIGURE – Un navire dans la MIZ

2021-05-14

# FRACTURATION DE FLOES DE GLACE

## INTRODUCTION

### Motivation

Motivation

Echelle Scientifique	Echelle Industrielle
<ul style="list-style-type: none"><li>► Etude climatique à échelle nationale (ANSTP)</li><li>► Prévisions climatiques avec précision</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>► Ressources maritimes exploitables</li><li>► Etude des stations offshore</li></ul>
 <p>Floes - Image satellite de l'Arctique</p>	 <p>Floes - Un navire dans la MIZ</p>

Floe : Un floe est un morceau de glace ;

Albédo : la cryosphère reflète entre 90 et 95 % des rayonnement recus par la planète.

# Objectifs

## Objectifs généraux

- ▶ Modélisation et analyse mathématique de la notion de percussion
- ▶ Poursuite du développement d'un modèle de fracturation des floes

## Objectifs intermédiaires

- 1 Lecture des travaux précédents :
  - ▶ **M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss** : Dynamics of an assembly of rigid ice floes (2015);
  - ▶ **Matthias Rabatel** : Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides (2015);
  - ▶ **Dimitri Balasoïu** : Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace (2020).
- 2 Modélisation et simulation du déplacement des noeuds d'un floe isolé :
  - ▶ en 1D;
  - ▶ en 2D.
- 3 Introduction de la percussion dans le code préexistant.

## 1 INTRODUCTION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

# Cinétique du floe

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i, \end{cases} \quad (1)$$

où pour le floe  $i$  :

- ▶  $M_i$  : masse du floe ;
- ▶  $\mathbf{F}_i$  : somme des forces par unité de volume ;
- ▶  $\mathcal{I}_i$  : le moment d'inertie du floe  $i$  ;
- ▶  $\mathfrak{M}_i$  : le moment dynamique en  $G$ .

Le système (1) se réécrit sous la forme :

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t),$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

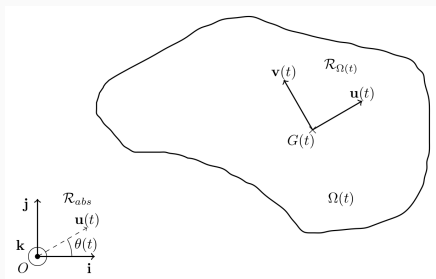
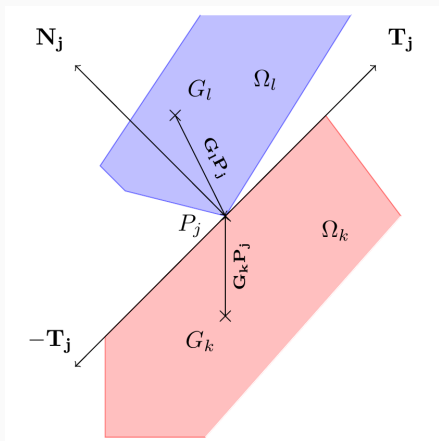


FIGURE – Repères abosolu et local pour un floe



## Interaction entre les floes



Deux conditions à respecter :

- ▶ condition unilatérale de Signorini;
- ▶ loi de friction de Coulomb.

FIGURE – Interaction entre deux floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  au point  $P_j$

# Discussion sur la thèse

- ▶ Les floes sont rigides;
- ▶ Le modèle ne gère pas la rhéologie de la glace;
- ▶ Les coefficients de friction et de restitution sont limitants.

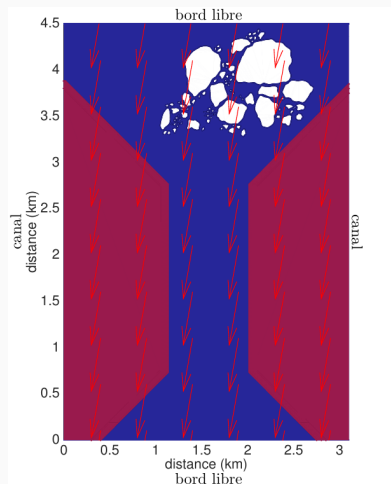


FIGURE – Dérive dans un canal étroit

# Un modèle de fracture variationnel

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_{\sigma} \times \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) \, dx + k\mathcal{H}^1(\sigma),$$

Une solution du problème de fracture fragile est un couple  $(u^*, \sigma^*)$  qui vérifie :

$$E_{\text{tot}}(u^*, \sigma^*) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_{\sigma}} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

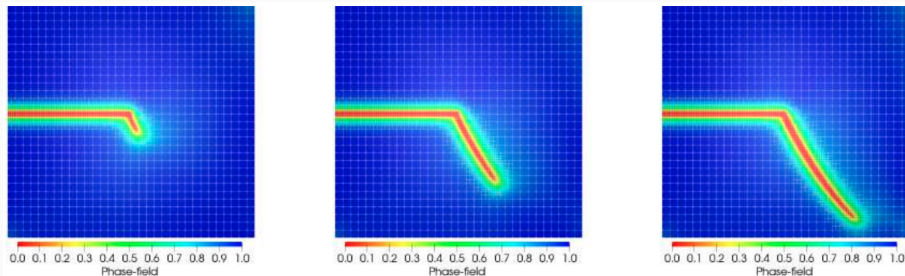


FIGURE – Bifurcation d'une fracture

# Réseaux de ressorts régulier

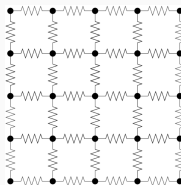


FIGURE – Réseau de ressorts régulier

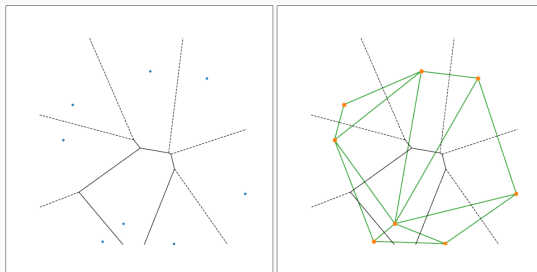


FIGURE – Tirage de points et diagrammes de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite)

## 1 INTRODUCTION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

# Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)

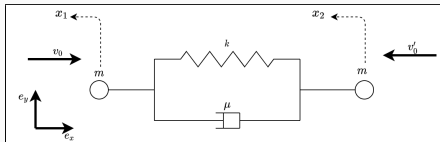


FIGURE – Floe de glace 1D

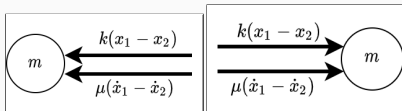


FIGURE – Bilan des forces

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) , \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) . \end{cases}$$

On préfère la forme générique :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) , \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v_0')^T , \end{cases}$$

où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} , \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

## Déplacement des noeuds d'un floe isolé (2)

### Listing 1 – Code de simulation

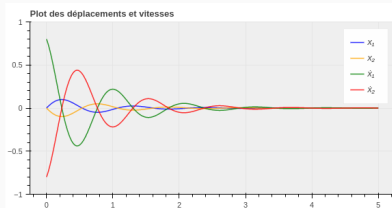
```
Y0 = np.array([0,0, v0, -v0])
t = np.linspace(0, tmax, N+1)
```

```
def model(Y, t):
    return E @ Y
```

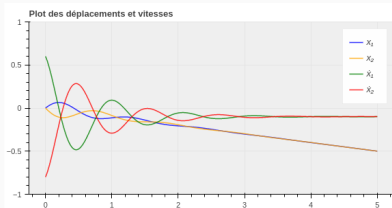
```
Y = odeint(model, Y0, t)
```

### Théorème (Convergence du modèle 1D isolé)

*Les déplacements  $x_1$  et  $x_2$  des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.*



(a)  $v_0 = v'_0 = 0.8$



(b)  $v_0 = 0.6$  et  $v'_0 = 0.8$

FIGURE – Simulation du déplacement d'un floe en 1D

# Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

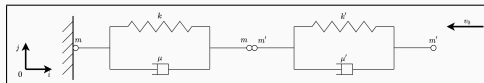


FIGURE – Collision 1D avec fixation d'un floe

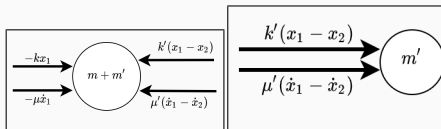


FIGURE – Bilan des forces

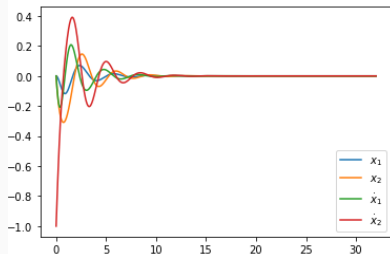


FIGURE – Résultat de simulation

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$



# Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

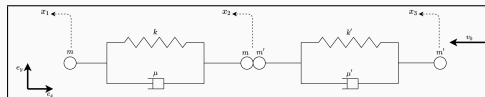


FIGURE – Collision 1D sans mur

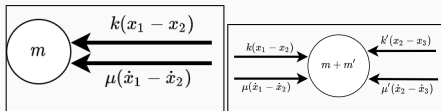


FIGURE – Bilan des forces

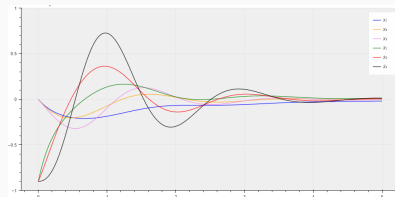


FIGURE – Résultat de simulation

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (2)$$

# Collision inélastique avec séparation des masses (1)

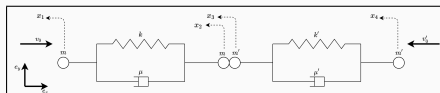


FIGURE – Collision 1D inélastique

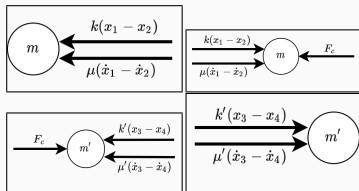


FIGURE – Bilan des forces

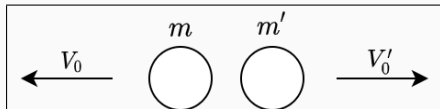


FIGURE – Situation après contact

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases}$$

Avec  $\varepsilon$  est le coefficient de restitution et :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt,$$

les vitesses après contact sont :

$$V_0 = \frac{I + (m + \varepsilon m')v_0 + (1 - \varepsilon)m'v'_0}{m + m'},$$

$$V'_0 = \frac{I + (1 - \varepsilon)mv_0 + (m' + \varepsilon m)v'_0}{m + m'}.$$

# Collision inélastique avec séparation des masses (2)

Animation de la première phase de la percussion (**avant** contact)

# Déplacement d'un floe isolé (1)

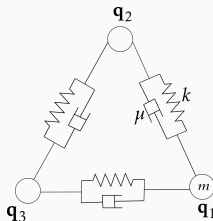


FIGURE – Floe de glace 2D

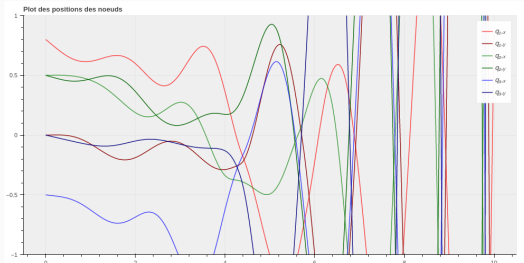


FIGURE – Simulation avec  $T = 10$

Les équations de Newton-Euler :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k \left( \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right].$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k \left( \|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right].$$

## Déplacement d'un floe isolé (2)

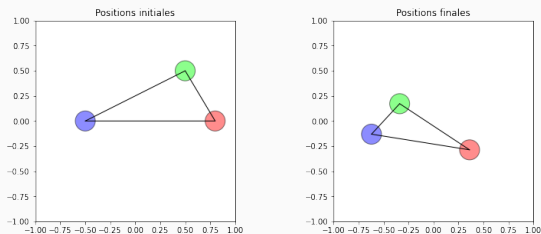


FIGURE – Illustration à  $T = 4$

# Références

BALASOIU, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

RABATEL, Matthias (2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

RABATEL, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9, p. 5887-5909.

Merci pour votre attention 😊!

Questions?