

## RAPPORT DE STAGE

---

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

---

*Étudiant*

Desmond Roussel NZOYEM

*Superviseur*

Stéphane LABBÉ

*Enseignant référent*

Christophe PRUD'HOMME



*Ce stage a été effectué dans le cadre du master 2 CSMI,  
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;  
initié par le groupe SASIPau LJLL.*

Année académique 2020 - 2021

12 février 2021

## *Remerciements*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Environnement économique du stage</b>	<b>2</b>
2.1 Le secteur d'activité . . . . .	2
2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions . . . . .	2
<b>3 État de l'art</b>	<b>3</b>
3.1 Position du problème . . . . .	3
3.2 État de l'art . . . . .	4
3.2.1 Le modèle du floe . . . . .	5
3.2.2 Le modèle de l'environnement . . . . .	9
3.2.3 Simulation . . . . .	10
3.2.4 Critique de la thèse . . . . .	11
<b>4 Travaux et apports</b>	<b>12</b>
4.1 Les travaux effectués . . . . .	12
4.2 Les apports du stage . . . . .	12
<b>5 Déroulement du stage</b>	<b>13</b>
5.1 Journal de bord . . . . .	13
<b>6 Conclusion</b>	<b>14</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>15</b>

## Chapitre 1

# Introduction

## Chapitre 2

# Environnement économique du stage

### 2.1 Le secteur d'activité

### 2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions

## Chapitre 3

# État de l'art

### 3.1 Position du problème

Nous commençons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécessaires pour décrire le floe occupant la région fermée de l'espace  $\Omega$  (voir figure 3.1) :

- Un ouvert connexe  $\omega \in \mathbb{R}^2$  décrivant la section longitudinale du floe;
- Deux fonctions  $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$  décrivant l'épaisseur du floe, telle que  $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$ ;
- Le centre de masse du floe  $G(\omega)$ ;
- Deux vecteurs  $\mathbf{e}_1(\omega)$  et  $\mathbf{e}_2(\omega)$  formant une base sur  $\omega$ .

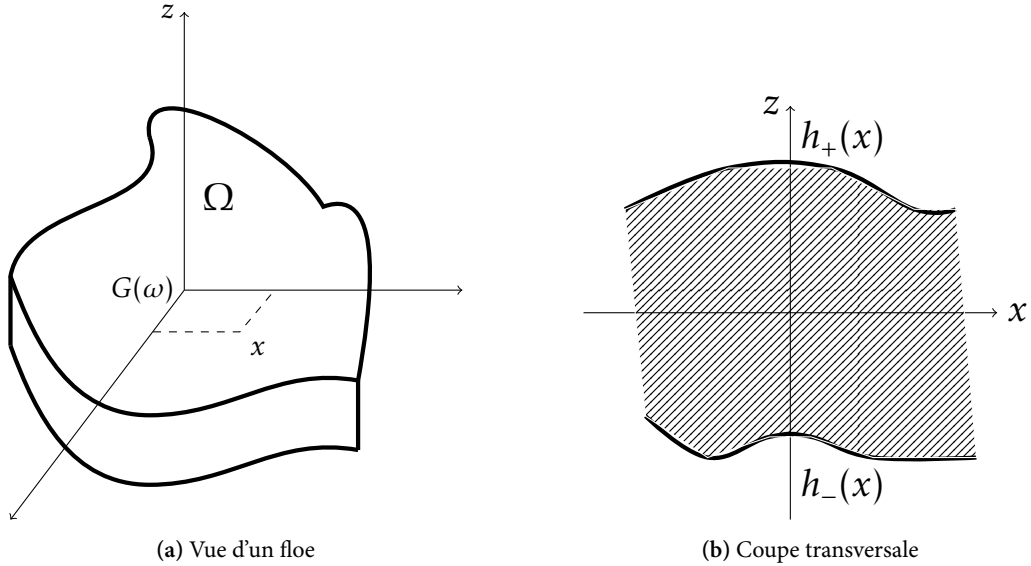


FIGURE 3.1 – Illustration de la géométrie d'un floe de glace  $\Omega$ .

On confond le floe au volume qu'il occupe dans l'espace  $\Omega$  :

$$\Omega = \{(x, z) \mid x \in \omega \in \mathbb{R}^2, z \in ]h_-(x), h_+(x)[\}.$$

Les fonctions  $h_-$  et  $h_+$  permettent de définir trois quantités (voir figure 3.2) :

- L'épaisseur moyenne du floe :  $\bar{h} = \sup_{x \in \omega} h_+(x) - \inf_{x \in \omega} h_-(x)$ ;
- La plus forte épaisseur :  $\bar{h}^* = \sup_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$ ;
- La plus faible épaisseur :  $\underline{h}^* = \inf_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$ .

Les vecteurs  $\mathbf{e}_1(\omega)$  et  $\mathbf{e}_2(\omega)$  sont liés à  $\omega$ , et pointent vers un point fixe du bord  $\partial\omega$  du floe c-à-d :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega \mid e_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{\|\sigma_i - G(\omega)\|}, \text{ pour } i \in \{1, 2\},$$

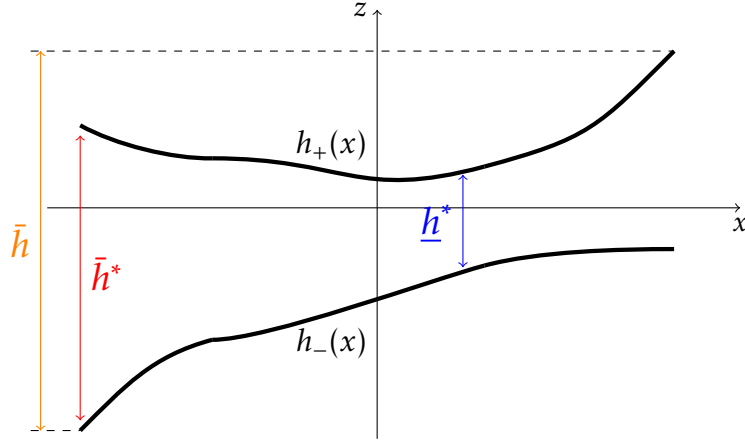


FIGURE 3.2 – Différentes épaisseurs décrivant un floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floe relativement plat (i.e  $\bar{h}$  faible),  $h_-$  sera pris identiquement nul, et  $h_+$  constant.

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ . Notons que  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , et  $\mathbf{e}_1(\omega) \cdot \mathbf{e}_2(\omega) = 0$  de façon à ce que la base orthonormée  $(\mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega))$  soit directe.

Un floe  $\Omega = (\omega, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), G(\omega), h_-, h_+)$  se déplace sur la mer<sup>1</sup>  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$ . Au temps  $t$  après une translation de vecteur  $u(t)$  (et de matrice  $T_{u(t)}$ ), et une rotation de vecteur  $\theta(t)$  (et de matrice  $R_{\theta(t)}$ ), on obtient le floe  $\Omega(t)$  défini par :

$$\Omega(t) = (\omega', \mathbf{e}^1(\omega'), \mathbf{e}^2(\omega'), G(\omega'), h_-, h_+),$$

avec

$$\begin{cases} \omega' = T_{u(t)} R_{\theta(t)} \omega, \\ \mathbf{e}_1(\omega') = T_{u(t)} R_{\theta(t)} \mathbf{e}_1(\omega), \\ \mathbf{e}_2(\omega') = T_{u(t)} R_{\theta(t)} \mathbf{e}_2(\omega), \\ G(\omega') = T_{u(t)} R_{\theta(t)} G(\omega). \end{cases}$$

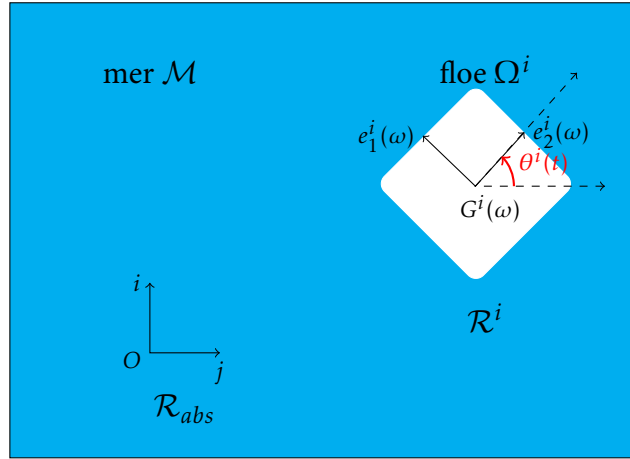
C'est cette dernière notation mettant en exergue la dépendance avec le temps que nous utiliserons tout au long de ce rapport.

Lors de leur mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et des courants océaniques, des phénomènes thermodynamiques, etc. Nous nous intéresserons donc au phénomène de percusion en vue de l'initialisation des fractures dans les floes de glace. Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère absolu, que nous notons  $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Le repère associé au floe  $\Omega_i$  sera noté  $\mathcal{R}_{\Omega_i} = (O, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), \mathbf{k})$ . Dans ce repère absolu, le floe possède 3 degrés de libertés : l'abscisse et l'ordonnée de son centre de gravité  $G_i(\omega)$ , et son orientation donnée par l'angle  $\theta_i(t)$  (voir figure 3.3).

## 3.2 État de l'art

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL, 2015 et BALASOIU, 2020 ont extensivement traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de leurs raisonnements, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ . Plus tard, nous prendrons en compte son épaisseur lorsque nous la modéliserons par une sphère de  $\mathbb{R}^3$ .

FIGURE 3.3 – Positionnement d'un floe de glace  $\Omega_i$  dans le repère absolu  $\mathcal{R}_{abs}$ .

### 3.2.1 Le modèle du floe

#### 3.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans (RABATEL, 2015) utilise les mêmes notations que celles présentées à la section 3.1. Les obstacles<sup>2</sup> sont des floes aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans (RABATEL, 2015), l'auteur travaille dans un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ; cependant, vu que la mer est considérée plane, le mouvement du floe peut être décrit dans le plan  $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ . Ensuite, RABATEL désigne la vitesse angulaire du floe  $\Omega_i$  par

$$\boldsymbol{\theta}_i(t) = \theta_i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta_i(t))^T.$$

Soit  $P$  (de coordonnées  $x$ ) un point quelconque de  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ . Sa vitesse dans le repère  $\mathcal{R}_{abs}$  est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \dot{\mathbf{G}}_i(t) + \boldsymbol{\theta}_i(t) \wedge \mathbf{G}_i\mathbf{P},$$

où le symbole  $\wedge$  représente le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} h_{i,+}(x) dx.$$

Ensuite, l'auteur définit :

- la somme des forces par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe  $\Omega_i$  :

$$\mathbf{F}_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{F}(x) dx,$$

- le moment cinétique<sup>3</sup> en  $G$  :

$$L_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t) dx,$$

- le moment dynamique en  $G$  :

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{GP} \wedge \mathbf{F}(x) dx.$$

2. Nous faisons allusion aux obstacles au déplacement des floes. Il peut s'agir des îles, des stations offshore, etc.

3. Il s'agit d'un moment dû à l'accélération du floe; alors que le moment dynamique est dû aux forces extérieures. Notons que ces deux vecteurs sont portés par  $\mathbf{k}$ , et peuvent donc être remplacés par des scalaires correspondants.



Sous le formalisme de Newton-Euler, RABATEL montre que chaque floe  $\Omega_i$  vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i \end{cases},$$

où  $\mathcal{I}_i$  représente le moment d'inertie du floe  $i$ . Ce système se réécrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t), \quad (3.1)$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système  $S$  composé de  $n$  floes, le problème précédent doit être satisfait pour tous les floes. (RABATEL, 2015, p.18) montre que cela revient à résoudre l'équation

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t), \quad (3.2)$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad W(t) = (W_i(t))_{1 \leq i \leq n}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(t) = (\mathcal{H}_i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe  $\Omega_i$  quant à elle sera donnée par :

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{\mathbf{G}}_i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{\theta}_i(t)^2.$$

### 3.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandement développé ces derniers siècles, avec plusieurs scientifiques qui ont tenté de décrire le phénomène de contact entre des corps rigides. Notons que le problème d'interaction entre les floes est un problème de dynamique non-régulière (contrairement au problème d'éplatement des floes entre deux collisions qui lui, est un problème de dynamique régulière). Dans (RABATEL, 2015), l'auteur considère deux lois de contact afin de décrire des phénomènes précis :

- la condition unilatérale de Signorini (references) : afin de décrire la condition de non-interpénétration ; cette condition est portée par la composante normale<sup>4</sup> de la force de contact<sup>5</sup> lors de la collision.
- la loi de friction de Coulomb (references) : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision. Cette condition est portée par la composante tangentielle de la force de contact.

*DESSIN DE LA LOI DE COULOMB, ET PEU ÊTRE CELLE DE POISSON*

Afin de traiter ces problèmes de contact, deux approches principales ont été développées par les scientifiques : l'approche non-régulière et l'approche de régularisation des lois de contact.

Parmi les pionniers dans l'approche de régularisation pour la résolution de la condition unilatérale de Signorini, nous pouvons citer Hertz ; Nevins et Whitney [NW72, Whi77], Moore [MW88b] ; Ces méthodes se sont largement répandues dans les études liées à la robotique, à la réalité virtuelle ou encore dans les opérations assistées par ordinateur, pour simuler un grand nombre d'objets en contact en petites ou grandes déformations comme des habits, des cheveux ou encore des organes (voir [WW90, VCMT95, BW98, RGF+ 04]). Concernant la seconde, la loi de friction de Coulomb, la discontinuité entre les phases de glissement et non glissement a été traitée de différentes façons ; en utilisant la notion de coefficient de restitution, ou des modèles masse-ressorts.

4. la composante normale permet aussi d'assurer dissipation de l'énergie à travers la loi de Poisson.

5. La force de contact est la somme d'une friction tangentielle, et d'une réaction normale.

L'approche non-régulière a été développée en utilisant les concepts d'inclusion différentielles; ceci afin de traiter la condition de Signorini. Moreau [Mor85b], Aubin [AC84] et Monteiro Marques [MM85], ont montré des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème sans friction. Puis, des résultats similaires ont été établis pour le contact unique avec friction (voir [Mor85a, MM88, Pan85, JP85, MM94]). Cependant, cette notion d'inclusion différentielle est difficile à manipuler; raison pour laquelle le problème du contact multiple avec friction reste encore très peu traité. Il a donc fallu attendre les années 80 avec l'essor des méthodes LCP pour donner un nouveau souffle à l'approche non régulière. Nous pouvons citer ici les travaux de Lötstedt qui des preuves d'existence et d'unicité pour le contact avec la friction de Coulomb (voir [Lot81, Lot82b, Lot82a]). On cite aussi Klarbring et Pang, pour leur apport sur le plan des méthodes de programmations. (RABATEL, 2015) a opté pour cette approche car elle facilite la construction des solutions à partir d'algorithmes tels que ceux de Lemke (voir [Lem78]). RABATEL s'inspire aussi des travaux de Baraff [Bar93], qui écrit les forces de contact dans les repères locaux aux points de contact. Ces repères sont définis par la normale et la tangente aux points de contact. La condition de complémentarité se résume comme ceci : "S'il y a contact alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et s'il n'y a pas contact l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle." Cependant, les travaux de Baraff sur l'existence de solutions sont limités par l'approche accélération-force qui est utilisée, et le coefficient de friction. En utilisant des formulations en vitesse et impulsion, les chercheurs ont réussi à démontrer l'existence de solutions pour toute configuration à contacts multiples avec n'importe quel coefficient de friction.

Pour traiter le problème de collision entre les floes, les glaciologues retiennent une multitude de modèles principalement intégrés aux milieux continus. Par exemple, dans les articles de Solomon [Sol70], ceux de Hibler [HI79] et ceux de Bratchie [Bra84], la force résultante des interactions est due à une contrainte interne. On note aussi les modèles basés sur théorie des flux de particules. Dans [SHL86, Hop85] par exemple, les collisions ne sont pas détectées précisément et les paramètres décrivant la collision sont déterminés par une méthode de Monte Carlo. L'introduction de ces déformations dans les modèles discrets de la banquise a été initié dans les années 90 par Hopkins [Hop96], et récemment par Herman et Wilchinsky [Her11, WFH10]. Cependant, elles sont basées sur la régularisation des lois de contact. Avant les travaux de RABATEL, il n'existait pas de modèle discret de banquise en utilisant une dynamique du contact non régulière.

Le modèle décrit par (RABATEL et al., 2015, p.5892) utilise deux conditions de complémentarité pour déterminer les vitesses des floes après le contact. La première est une condition de Signorini (SIGNORINI, 1933) pour s'assurer de la non-interpénétration<sup>6</sup> des floes. Pour décrire ces conditions, il faut au préalable écrire le problème de contact entre floes comme un problème implicite, où les inconnus sont les impulsions après le choc<sup>7</sup>. Pour cette condition de complémentarité, RABATEL se base donc sur les travaux de Delassus (1917), Moreau (63), (Pfeiffer and Glocker, 1996). RABATEL se base ensuite sur les travaux de [Stewart and Trinkle, 1996] pour décrire une deuxième condition de complémentarité vérifiant la loi de friction de Coulomb. Dans (RABATEL et al., 2015, p.5892) complémentarité. Le problème résultant a ensuite résolu en utilisant un algorithme de Lemke [Cottle et al., 1992, Alg. 6.3.1].

#### IMAGE D'UNE COLLISION EN $P_j$

Soit  $P_j$ , ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$ . Nous notons  $\mathbf{F}_{kj}(t)$  la force de contact du floe  $\Omega_k$  au floe  $\Omega_l$  appliquée en  $P_j$ . Par convention, une matrice de contact  $\mathbf{M}_c$  est définie telle que son coefficient  $c_{kj}$  vaut :

- 0 si le point de contact  $P_j$  n'est pas un point de contact du floe  $\Omega_k$ ;
- -1 si le point de contact  $P_j$  est un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  avec  $k < l$ ;
- 1 si le point de contact  $P_j$  est un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  avec  $k > l$ .

6. Deux floes s'interpénètrent si la "distance" entre ces deux floes est négative.

7. Contrairement aux lois de contacts explicites (Hertz, Hooke, Coulomb), les lois implicites ne nécessitent pas la connaissance de la nature du contact entre les floes (glissement ou accroche).

En notant  $E_k$  l'ensemble des points de contact du floe  $\Omega_k$  au temps  $t$ , (RABATEL, 2015, p.26) définit la résultante des forces de contact  $\mathbf{F}_k^c(t)$ , au floe  $\Omega_k$  comme :

$$\mathbf{F}_k^c(t) = \sum_{j \in E_k} c_{kj} \mathbf{F}_{kj}(t).$$

En rajoutent ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l'équation (3.3), pour un floe  $\Omega_k(t)$ , on obtient :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j \in E_k} \left( \mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_{kj}(t) \right). \quad (3.3)$$

### 3.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de (RABATEL, 2015) opte pour le formalisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accélération-force. En effet, L'approche en vitesse impulsion apporte l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature du contact. Il nous faut donc définir les notions d'impulsion. Sur un intervalle de temps  $\delta t^*$ , s'il y a un contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  au point  $P_j$ , nous dirons que le floe  $\Omega_k$  a subi un choc provenant du floe  $\Omega_l$  au point de contact  $P_j$  caractérisé par l'impulsion :

$$\mathcal{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj} \mathbf{F}_{kj}(t) dt.$$

RABATEL fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments équation (3.3) pour le floe  $\Omega_k$  sur l'intervalle temporel  $\delta t^*$  :

$$\mathcal{M}_k \int_{\delta t^*} \dot{W}_k(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \sum_{j \in E_k} \left( \mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathcal{I}_{kj} \right).$$

En écrivant  $\delta t^* = [t^-, t^+]$ , on peut donc introduire les inconnues  $\beta, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^m$  pour le problème de contact

$$\mathcal{M}(W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \mathbf{B}\beta + \mathbf{J}\lambda, \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  sont deux matrices de  $(\mathbb{R}^3)^{n \times m}$  telle que

$$\mathbf{B} = (d_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad d_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{T}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{T}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases},$$

$$\mathbf{J} = (s_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad s_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{N}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases}.$$

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  sont obtenues par décomposition des forces de contact dans le repère de contact  $\mathcal{R}_{\Omega_j} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$  (voir figure Plus Haut).

Afin de modéliser la friction dans une collision qui respecte la loi de Coulomb, (RABATEL, 2015) se base sur les travaux de Stewart et Trinkle (96) qui définissent une condition de complémentarité reliant la composante tangentielle  $\beta_j$  de l'impulsion appliquée au point  $P_j$ , la composante normale  $\lambda_j$ , la vitesse relative tangentielle du point  $P_j$  et le coefficient de friction  $\mu$ . On introduit le vecteur  $\tilde{\beta}$  contenant les composantes de

l'impulsion tangentielle dans chacune des directions possible de glissement  $\mathbf{T}_j$  et  $-\mathbf{T}_j$ . Il devient alors possible de formuler le problème de contact (sur tout le système  $S$ ) sans interpénétration par le problème linéaire de complémentarité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\mathbf{J} & -\mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \mu & -\mathbf{H}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

avec

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}^T W(t^+), \quad \mathbf{H}^T = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1 \leq j \leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq m},$$

$\mu$  est la matrice diagonale de diagonale  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2(i-1) + 1 \text{ ou } j = 2(i-1) + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$D = (\mathbf{B}_1 | -\mathbf{B}_1 | \dots | \mathbf{B}_m | -\mathbf{B}_m) \quad \text{avec } \mathbf{B}_j \text{ la colonne } j \text{ de la matrice } \mathbf{B}.$$

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact  $W(t^+)$ , à l'aide des composantes inconnues tangentielle et normale des impulsions dans les repères de contact  $(\tilde{\beta} \gamma)$ , elles-mêmes inconnues du système.

#### 3.2.1.4 Consistance énergétique

D'après l'auteur de (RABATEL, 2015, p.42), traiter le problème de contact à partir de lois non régulières ne permet pas d'obtenir des solutions satisfaisant à la fois la non-interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique. Le problème a donc été divisé en une phase de compression et une phase de décompression suivant la loi de Poisson. La phase de compression modélise la capacité maximale des floes à emmagasiner, par la déformation, une partie ou la totalité de l'énergie cinétique transmise lors du contact. L'impulsion normale  $\lambda^c$  calculée durant cette phase (en résolvant le problème de complémentarité (équation (3.5))) correspond à un coefficient de restitution  $\varepsilon = 0$ . Les impulsions obtenues durant cette phase correspondent à celles nécessaires pour éviter la non pénétration, et correspondent donc à une énergie cinétique maximale emmagasinée. La phase de décompression correspond à la restitution partielle ou complète de l'énergie cinétique emmagasinée par la déformation des floes. L'impulsion lors de cette phase, notée  $\lambda^d$ , est déterminée par  $\lambda^d = \varepsilon \lambda^c$  (l'hypothèse de Poisson [GP95]). Durant la phase de décompression, RABATEL a donc opté pour la consistance énergétique et la non-interpénétration avec la solution :

$$W^N = (1 + \varepsilon)W^c - \varepsilon W(t^-),$$

où  $W^c$  représente les vitesses des floes après la phase de compression, et  $\varepsilon$  le coefficient de restitution pour les contacts considérés inélastiques.

#### 3.2.1.5 Traitement des conditions aux bords

#### 3.2.2 Le modèle de l'environnement

Définit  $\mathbf{U}_a$  et  $\mathbf{U}_w$ .

### 3.2.3 Simulation

#### 3.2.3.1 Discretisation temporelle

Pour simuler la dynamique des floes de glace soumis à des forces extérieures ET possiblement des collisions, il faut intégrer la dynamique régulière (entre deux collisions), et la dynamique non régulière; et il existe deux principales méthodes pour la discretisation en temps dans de tels problèmes. La méthode **time-stepping** (voir [Aca13] pour les schémas de Moreau [Mor85a, Jea99], et de Schatzman-Paoli [PS02a, PS02b] par exemple, pour lesquels une convergence a pu être exhibée à partir de la convergence en graphe de Moreau [Mor78]) offrent l'avantage de mieux traiter les points d'accumulation (RABATEL, 2015); et d'être plus performant sur des problèmes de multiples contacts. Cependant, RABATEL pour le schéma **event-driven** opte pour la précision de la localisation des collisions et la facilité de manipulation. En plus, elles permettent d'utiliser des schémas d'intégration existant d'ordre élevé pour des équations différentielles ordinaires. le seuil de collision choisi est suffisamment grand pour éviter de traiter les collisions une par une. le schéma utilisé pour intégrer l'équation (3.3) est un schéma du type Euler explicite, pour sa facilité d'implémentation, sa facilité à prédire la localisation en espace et en temps des futures collisions et enfin sa capacité à dépasser les problèmes de points d'accumulation.

La simulation par la méthode event-driven demande la définition d'un pas de temps maximal pour lequel le schéma reste stable. Le pas de temps  $\Delta t_{max}$  sera utilisé s'il aucune collision n'est détectée entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . En se référant sur un modèle idéalisé 1D, RABATEL distingue deux critères pour la stabilité du schéma numérique au temps  $t$  :

- lorsque la vitesse caractéristique des floes  $V_c(t) = N_a \mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)$  est constante sur l'intervalle de simulation  $I$ , alors pour :

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} = \min \left( \frac{\rho}{2|\mathbf{U}_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}, \frac{2K_t}{L_t} \right) \quad (3.6)$$

avec

$$\text{avec } L_t = \rho^{-1} \rho_w C_w \left( N_a^2 \mathbf{U}_a^2 + (N_a \mathbf{U}_a + 2\mathbf{U}_w)^2 \right), \text{ et } K_t = |V_c(t)| \text{ constant,}$$

le schéma est stable i.e  $\dot{G}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] = [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}]$ ;

- lorsque les variations de  $V_c(t)$  entraînent une augmentation de  $K_t$  au cours du temps. La propriété de stabilité reste vérifiée car

$$\dot{G}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] \in [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}];$$

- lorsque les variations de  $V_c(t)$  entraînent une diminution stricte de  $K_t$  au cours du temps, alors la condition de stabilité dans les deux cas précédent ne peut être vérifiée. RABATEL introduit donc une seconde définition de la stabilité pour traiter ce cas. Il remarque que pour

$$\Delta t_{max} \leq \begin{cases} \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-} & \text{si } x \in ]-\infty, K_{t+\Delta t}] \\ \frac{-2x}{-\tilde{L}_t^+} & \text{si } x \in ]K_{t+\Delta t}, +\infty] \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^- &= \rho^{-1} \rho_w C_w \left[ N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 - (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2 \right] \\ \tilde{L}_t^+ &= \rho^{-1} \rho_w C_w \left[ N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 + (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2 \right], \end{aligned}$$

on a la diminution de la vitesse des floes.

En conclusions, pour une vitesse infinitésimale initiale  $\dot{G}(0) \in [-K_0, K_0]$ , pour tout  $t \in I$ , et pour tout  $\Delta t_{max}$  vérifiant les équations (3.6) et (3.7), nous avons les vitesses des floes majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t$$

RABATEL choisi donc de prendre

$$\Delta t_{max} = \min \left( \frac{3}{4} \frac{2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^-}, \frac{3}{4} \frac{2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} -\tilde{L}_t^+}, \frac{\rho}{2(\max_{t \in I} |\mathbf{U}_a(t)|) \sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}} \right)$$

pour s'assurer que le modèle idéalisé vérifie les critères stabilité définis.

### 3.2.3.2 Détection des collisions en espace

Des deux méthodes principales utilisées dans la littérature pour la détection des voisins, RABATEL a choisi la méthode de **hierarchie de volumes englobants** facilité de mise en place et pour son efficacité même avec de grands ratios de tailles. L'alternative était la méthode de **partitionnement de l'espace** qui elle, souffre de plusieurs défaut non surmontables pour le modèle développé. Les méthodes de volumes englobants consistent à englober le contour de l'objet par des volumes à des échelles de plus en plus fines pour améliorer la détection.

REFAIRE LA FIGURE 2.2

### 3.2.4 Critique de la thèse

Bien que les travaux de RABATEL on été testés et validés sur plusieurs configuration :

- la conservation de la symétrie d'une configuration
- la satisfaction du modèle de Coulomb
- le traitement d'un point d'accumulation
- la cohérence temporelle ou la propagation des ondes de choc
- la conservation de l'énergie cinétique

il reste des points qui ne sont pas traités dans la thèse : Voir résumé précement fait

1. La loi de contact utilisée pour le glissement [Ste96], bien que tres riche, ne prends en compte toutes les vitesses possibles de deplacement. La construction d'une loi qui donnerait accès à la région entière, demanderait de prendre en compte un grand nombre de phénomènes intrinsèques aux contacts. Leur compréhension et leur rôle à chacun est difficile à déterminer.
2. les coefficient de friction et de restitution utilisées sont limitants. En realité, il n'est pas possible de prendre en compte ou d'interpreter mathematique certains effets lors du contact. par exemple, avec la dispersion de l'énergie (voir [NB14]). Cette dispersion est la conséquence de certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact. Seuls les effets de dissipation dus aux phénomènes locaux comme l'endommagement, la viscosité ou la plasticité sont pris en compte à travers l'utilisation des coefficients de restitution et de friction.
3. Les vitesses obtenues après la phase de decompression afin d'assurer la disipation de l'énergie cinetique possèdent une faiblesse (Rab, p.41) : elles ne sont solutions que sous certaines conditions, comme le fait que les chocs soient frontaux et qu'il n'y ait pas d'apport des forces extérieures autres que les forces de contact durant la collision.

## Chapitre 4

# Travaux et apports

### 4.1 Les travaux effectués

### 4.2 Les apports du stage

- L'utilisation de TIKZ

## Chapitre 5

# Déroulement du stage

### 5.1 Journal de bord



## Chapitre 6

# Conclusion

# Bibliographie

- BALASOIU, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.
- RABATEL, Matthias (nov. 2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- RABATEL, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9, p. 5887-5909.
- SIGNORINI, Antonio (1933). « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze* 27, p. 69.