Rapport de stage

Fracturation de floes de glace par percution dans un modèle granulaire

Superviseur
Stéphane Labbé

Étudiant
Desmond Roussel Nzoyem

Enseignant référent
Christophe Prud'homme

Ce stage à été effectué dans le cadre du master 2 CSMI,
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021 ;
initié par le groupe SASIPau LJLL.

Année académique 2020 - 2021

9 février 2021

Remerciements

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Environnement économique du stage

2.1 Le secteur d'activité

2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions

Chapitre 3

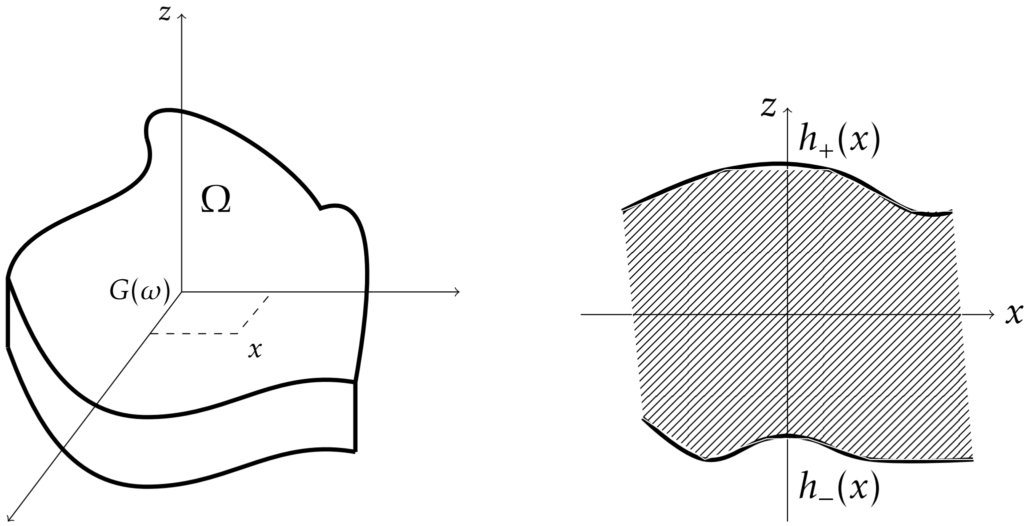
État de l'art

3.1 Position du problème

3.1.1 Modélisation d'un floe de glace

Nous commensons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécésaires pour décrire un floe sur la mer (voir figure 1) :

— Un ouvert connexe $\omega \in \mathbb{R}^2$ décrivant la section longitidunale du floe;
— Deux fonction $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$ décrivant l'épasseur du floe, telle que $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$;
— Le centre de gravité du floe $G(w)$;
— Deux vecteurs $e_1(\omega)$ et $e_2(\omega)$ formant une base sur ω.



(**a**) Vue d'un floe (**b**) Coupe transversale

Figure 3.1 – Illustration de la géométrie d'un floe de glace Ω.

LES VECTEURS E1 ET E2 (ET TOUS LES AUTRES VECTEURS) DOIVENT ETRE EN GRAS!

Le volume Ω du floe est donné par :

$$\Omega = \{(x, z) | x \in \omega \in \mathbb{R}^2, z \in]h_-(x), h_+(x)[\}.$$

Les fonctions h_- et h_+ permettent de définir trois quantités (voir figure 2) :

— L'épaisseur moyenne du floe : $\bar{h} = \sup_{x \in \omega} h_+(x) - \inf_{x \in \omega} h_-(x)$;
— La plus forte epaisseur : $\bar{h}^* = \sup_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$.
— La plus faible epaisseur : $\underline{h}^* = \inf_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$.

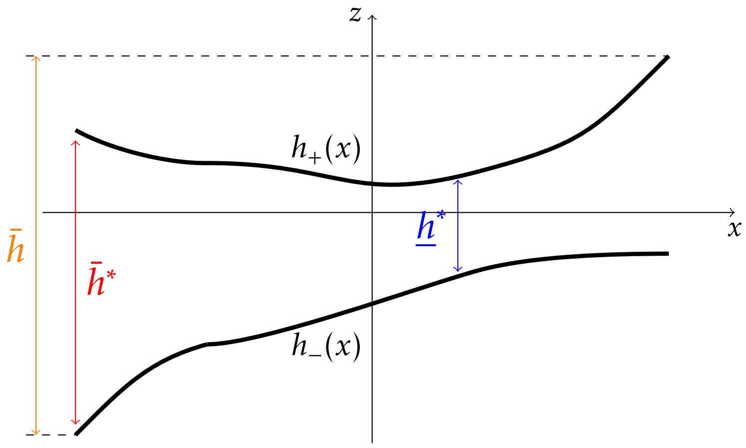


Figure 3.2 – Illustration des différentes épaisseurs décrivant le floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floes relativement plat (i.e $\bar{h}$ faible), h_- sera pris identiquement nul, et h_+ constant.

Les vecteur $e_1(\omega)$ et $e_2(\omega)$ sont liés à ω, et pointent vers un point fixe du bord $\partial\omega$ du floe i.e :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega | e_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{||\sigma_i - G(\omega)||}, \text{ pour } i \in \{1, 2\},$$

où $||\cdot||$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Notons que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, et $\boldsymbol{e_1}(\omega)\cdot\boldsymbol{e_2}(\omega) = 0$ de facon à ce que la base $(\boldsymbol{e_1}(\omega), \boldsymbol{e_2}(\omega))$ soit directe.

Un floe $F = (\omega, \boldsymbol{e_1}(\omega), \boldsymbol{e_2}(\omega), G(\omega), h_-, h_+)$ se déplace sur la mer [1] $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$. Au temps t après une translation de vecteur $u(t)$ (et de matrice $\mathsf{T}_{u(t)}$), et une rotation de vecteur $\theta(t)$ (et de matrice $\mathsf{R}_{\theta(t)}$), on obtient le floe F_t défini par (voir figure 3) :

$$F_t = (\mathsf{T}_{u(t)}\mathsf{R}_{\theta(t)}\omega, T_{u(t)}R_{\theta(t)}\boldsymbol{e_1}(\omega), T_{u(t)}R_{\theta(t)}\boldsymbol{e_2}(\omega), T_{u(t)}R_{\theta(t)}G(\omega), h_-, h_+).$$

REMPALCER CES TRANSFORMATION ENCOMBRANTES PAR UN prime SIMPLE!

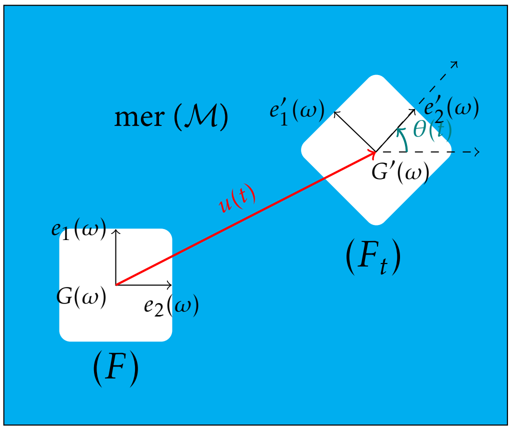


Figure 3.3 – Illustration du mouvement d'un floe de glace F dans la mer, après une translation de vecteur $u(t)$ et une rotation d'angle $\theta(t)$, pour obtenir le floe F_t. On observe la transformation des propriétés du floe, en partucilier les vecteurs $e_1(\omega)$ et $e_2(\omega)$ qui restent liés au floe.

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Plus tard, nous prendrons en compte sont épaisseur lorsque nous la modelserons par une sphère

Lors de leur mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et des courants océaniques. Nous nous interreserons donc au phénomène de percussion en vue de l' initialisation des fractures dans les floes de glace.

Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère abosulu, que notons $\mathcal{R}_{abs} = (O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. le repère associé au floe Ω_i sera noté $\mathcal{R}_{\Omega^i} = (O, \boldsymbol{e_1(\omega)}, \mathbf{e}_2(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{k})$. Dans ce repere absolu, le floe possède 3 dégrés de libertés : l'absice et l'ordonné de son centre de gravité $G^i(\omega)$, et l'orientation du floe donné par l'angle $\theta^i(t)$ (voir figure 3.4).

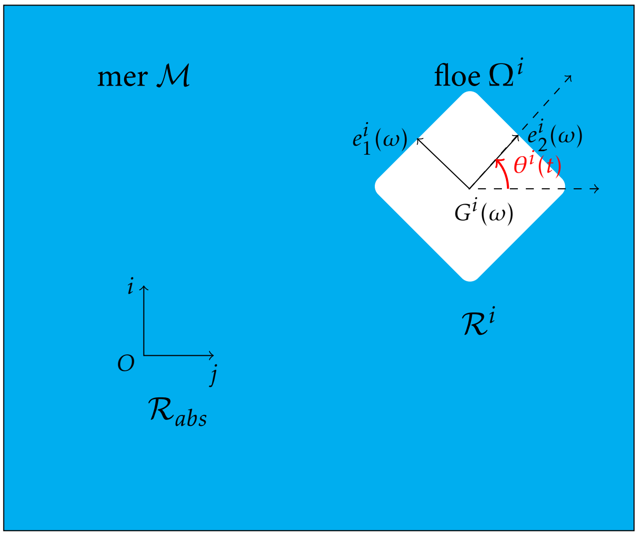


FIGURE 3.4 – Positionnement d'un floe de glace Ω^i dans le repère absolu $\mathcal{R}_{abs}$.

DEFINIR LE REPERE aBSOLUE DU FLOE EN 2D, AVEC LE REPERE LOCAL. ECRIRE LE VECTEUR POSITION, ET ECRIRE LES EQUATIONS DE NEWTON-EULER.

3.2 État de l'art

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnment. Les travaux de RABATEL, 2015 et BALASOIU, 2020 on extensivement traité le problème de modélisation dynmaique et de simulation d'un assemblage de floe cde glace. Nous résumons ici les principales idées de leurs raisonnements, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

3.2.1 Le modèle du floe

3.2.1.1 La cinetique du floe

L'approche discrète décrite dans (RABATEL, 2015) consiste a définir le mouvement de chaque floe. Les obstacles sont des floes aux mêmes propriètés que les floes de galce, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans (RABATEL, 2015), l'auteur travaille dans un repère orthormé direct $\mathcal{R}_{abs} = (O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, cependant, la mer est considérée plane, et le mouvement du floe peut être décrit dans le plan $\mathcal{P} = (O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. On désigna la vitesse angulaire du floe Ω^i par

$$\boldsymbol{\theta}^i(t) = \theta^i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta^i(t))^T .$$

Soit P de coordonné x un point quelconque de $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Sa vitesse dans le repère $\mathcal{R}_{abs}$ est donnée est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}^i(t) + \boldsymbol{\theta}^i(t) \wedge \mathbf{G^iP},$$

où le symbole $\wedge$ représente le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M^i = \rho^i \int_{\Omega^i(t)} h_+^i(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ensuite, l'auteur défni :

— la somme des force par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe Ω^i :

$$\mathbf{F}^i = \rho^i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{F}(x)dx.$$

— le moment cinetique [2] en G :

$$L^i = \rho^i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t)\,\mathrm{d}x.$$

— le moment dynamique [3] en G :

$$\mathfrak{M}^i = \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \mathbf{F}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sous le formalisme de Newton-Euler, Rabatel montre que chaque floe Ω^i vérifie :

$$\begin{cases} M^i \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{G}}^i(t)}{\mathrm{d}t} & = \mathbf{F}^i \\ \mathcal{I}^i \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^i(t)}{\mathrm{d}t} & = \mathfrak{M}^i \end{cases},$$

qui se réecrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}^i \frac{\mathrm{d}W^i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}^i(t), \tag{3.1}$$

avec

$$\mathcal{M}^i = \begin{pmatrix} M^i & 0 & 0 \\ 0 & M^i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}^i \end{pmatrix}, W^i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}^i(t) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{H}^i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^i(t) \\ \mathfrak{M}^i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système composé de n floes, l'équation précédente doit être satisfaite pour tous les floes. Rabatel, 2015, p.18 montre que cela revient au système d'équations

$$\mathcal{M} \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}(t), \tag{3.2}$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}^i)_{1\leq i\leq n}, \mathcal{W}(t) = (\mathcal{W}^i(t))_{1\leq i\leq n} \text{ et } \mathcal{M}(t) = (\mathcal{M}^i(t))_{1\leq i\leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe Ω^i quant à elle sera donné par :

$$E^i(t) = \frac{1}{2} M^i \dot{G}^i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}^i \dot{\theta}^i(t)^2.$$

3.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandemen développé ces dernier siècles, avec plusieurs scientifique qui ont tenté de décrire décrire le phénomène de contact entre des coprs. Le modèle décrit par (Rabatel et al., 2015, p.5892) utilise deux conditions de complémentarité pour déterminer les vitesses des floes après le contact.

2. du à l'accélération du floe
3. du aux forces extérieurs exercées sur le floe

La primière est une condition de Signorini(Signorini, 1933) pour s'assurer de la non-interpénétration [4] des floes. Pour écrire ces conditions, il faut au préalable écrire le problememe de contact entre floes comme un problème implcite, où les inconnus sont les impulsions après le choc. Rabatel se base donc sur les travaux de Delassus (1917), Moreau (63), (Pfeiffer and Glocker, 1996), [Stewart and Trinkle, 1996; Stewart, 2000; Anitescu and Potra, 1997; Anitescu et al., 1999]. Dans (Rabatel et al., 2015, p.5892), le problème de complémentarité a ensuite résolu en utlisant l'algorithme de Lemke [Cottle et al., 1992, Alg. 6.3.1].

IMAGE D'UNE COLLISION EN Pj

Soit P_j, ($j \in \{1,\dots,n\}$) un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l. Nous notons $\mathbf{F}_{kj}(t)$ la force de contact du floe Ω_k au floe Ω_l appliquée en P_j. Par convention, une matrice de contact $\mathsf{M_c}$ est définie telle que son coefficient $c_k j$ vaut :

— 0 si le point de contact P_j n'est pas un point de contact du floe Ω_k ;
— -1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k < l$;
— 1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k > l$.

En notant E_k l'ensemble des points de contact du floe Ω_k au temps t, (Rabatel, 2015, p.26) définit la résultante des forces de contact $\mathbf{F}^c_k(t)$, au floe Ω_k comme :

$$\mathbf{F}^c_k(t) = \sum_{j\in E_k} c_{jk}\mathbf{F}_{kj}(t)$$

En rajoutent ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l'équation (3.3), on obtient, pour un floe $\Omega_k(t)$:

$$\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j\in E_k}\begin{pmatrix}\mathbf{F}_{kj}(t)\\ \mathbf{G^kP_j}\wedge\mathbf{F}_{kj}(t)\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de (Rabatel, 2015) opte pour le formulisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accéleration-force. En effet, L'approche en vitesse impulsion apporte donc l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature du contact. Il nous faut donc définir les notions d'impulsion. Sur un intervalle de temps δt^*, s'il y a un contact au point P_j, entre les floes Ω_k et Ω_l, nous dirons que le floe Ω_k a subi un choc provenant du floe Ω_l au point de contact P_k caractérisé par l'impulsion :

$$\mathcal{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj}\mathbf{F}_{kj}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rabatel fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments équation (3.3) pour le floe Ω_k sur l'intervalle temporel δt^* :

$$\mathcal{M}_k\int_{\delta t^*}\dot{W}_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\delta t^*}\mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j\in E_k}\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{kj}\\ \mathbf{G_kP_j}\wedge\mathcal{I}_{kj}\end{pmatrix}.$$

En écrivant $\delta t^* = [t^-, t^+]$, on peut donc introduire les inconnues β, $\lambda \in (\mathbb{R}^2)^m$ pour le problème de contact

$$\mathcal{M}_k(W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*}\mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t + \mathsf{B}\beta + \mathsf{J}\lambda, \tag{3.4}$$

où B sont deux matrices telle que …(equation 1.1.14 de la these)

4. Deux floes s'interpénètre si la "distance" entre ces deux floes est négative.

Il devient posible de formuler le problème de contact sans interpénétration par un problème lineaire de complémentarité : (equation 1.1.22) de la these

3.2.1.4 Conservation de l'énergie cinétique

3.2.1.5 Traitement des conditions aux bords

3.2.2 Le modèle de l'environment

Chapitre 4

Travaux et apports

4.1 Les travaux effectués

4.2 Les apports du stage

— L' utilisation de TIKZ

Chapitre 5

Déroulement du stage

5.1 Journal de bord

Chapitre 6

Conclusion

Bibliographie

Balasoiu, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

Rabatel, Matthias (nov. 2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341.

Rabatel, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : ***Journal of Geophysical Research : Oceans*** 120.9, p. 5887-5909.

Signorini, Antonio (1933). « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : ***Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*** 27, p. 69.