



# Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace

Dimitri Balasoiu

## ► To cite this version:

Dimitri Balasoiu. Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace. Modélisation et simulation. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2020. Français. NNT : 2020GRALM045 . tel-03116132

**HAL Id: tel-03116132**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>**

Submitted on 20 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Dimitri Bălăsoiu**

Thèse dirigée par **Stéphane Labbé, Professeur, Université Grenoble Alpes**, et codirigée par **Jérôme Weiss, Directeur de recherche, CNRS Délégation Alpes**

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann** dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et technologies de l'information, Informatique**

## Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace

## Modelling and simulating the mechanical behavior of ice floes

Thèse soutenue publiquement le **13 octobre 2020**, devant le jury composé de :

**Monsieur Dorin Bucur**

Professeur des Universités, Université Savoie Mont Blanc, Président du jury

**Monsieur Gregory Vial**

Professeur, École Centrale de Lyon, Rapporteur

**Monsieur Hervé Le Dret**

Professeur des Universités, Sorbonne Université - Paris, Rapporteur

**Monsieur Vladislav Yastrebov**

Chargé de Recherche, CNRS Délégation Paris-Centre, Examineur

**Monsieur Stéphane Labbé**

Professeur des Universités, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

**Monsieur Jérôme Weiss**

Directeur de Recherche, CNRS Délégation Alpes, Co-directeur de thèse

**Monsieur Philippe Lattes**

Spécialiste Océano-Météo, TOTAL S.A., Invité





מבטן מי יצא הקרח וכפר שמים מי ילדו  
כאבן מים יתחבאו ופני תהום יתלכדו  
איוב, התנ"ך

Du sein de qui sort la glace ? Le givre des cieux, qui  
l'enfante ? Les eaux se changent en pierre et la surface  
de l'abîme se prend ...

Job, La Bible



La thèse est l'unique occasion de pénétrer dans le monde de la recherche universitaire, et de découvrir certains des beaux et subtils concepts scientifiques développés au fil des générations. Je suis conscient de ma chance, et je souhaite exprimer ma reconnaissance envers mes directeurs de thèse, MM. Labbé et Weiss. Ce sont eux qui m'ont confié ces travaux et qui m'ont permis de les mener à leur terme. Je leur en suis profondément reconnaissant.

L'entreprise TOTAL, qui a financé cette thèse, m'a fourni de belles conditions de travail. J'en remercie le représentant, Philippe Lattes.

Je souhaite remercier les membres du jury, en particulier son président M. Bucur, ainsi que MM. Vial et Le Dret qui ont accepté de rapporter ma thèse. J'ai beaucoup apprécié l'humanité du retour de M. Vial, ainsi que l'intérêt qu'il a exprimé pour mes travaux. Ma reconnaissance à M. Le Dret est également toute particulière, puisqu'il a soulevé quelques fautes non triviales dans mon manuscrit. Sa rigueur m'a permis d'en améliorer la qualité.

Je suis également reconnaissant envers le personnel du laboratoire Jean Kuntzmann, dont le cadre m'a permis de travailler sereinement. J'adresse mes salutations aux autres doctorants, qui ont vécu les hauts et bas de la recherche. Réjouissez-vous, c'est fini !

Je remercie mes proches, famille et amis, pour leurs encouragements. Ils m'ont soutenu d'une manière que la laïcité du siècle présent m'empêche de décrire. J'en profite pour m'acquitter d'un engagement en remerciant, non sans humour, ma belle soeur Rose qui tenait à figurer ici.

Enfin, à celui qui m'a donné la vie en perdant la sienne, je dis merci.



Cette thèse s'inscrit dans un projet global de recherche sur la modélisation de la banquise, mené conjointement par TOTAL S.A. et l'Université Grenoble Alpes. Ce projet a conduit au développement d'un modèle granulaire pour simuler l'évolution de la banquise, et plus particulièrement le comportement mécanique des floes de glace qui peuplent la zone marginale des glaces. Une implémentation informatique du modèle permet de simuler les collisions d'un million de blocs de glace, ainsi que leurs interactions avec des structures rigides. La présente thèse améliore ce modèle granulaire, en proposant un modèle efficace de fracture des blocs de glace.

Dans une première partie, nous proposons un modèle de fracture d'un floe de glace lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Notre modèle est un modèle de fracture fragile, qui s'appuie sur les idées de A. A. Griffith. Il est formulé dans un cadre variationnel inspiré du modèle de G. A. Francfort et J.-J. Marigo : nous minimisons l'énergie totale du matériau. Nous montrons que, sous certaines hypothèses, cette fonctionnelle d'énergie possède bien un minimum. Le modèle proposé est efficace, et peut être intégré dans le modèle de collision qui gère le comportement d'un grand nombre de blocs. Cette efficacité repose sur une hypothèse géométrique forte, bien qu'atténuée par l'utilisation d'un chargement quasi-statique : nous supposons que les seules fractures admissibles sont des segments de droites.

Dans une seconde partie, nous proposons un plan de recherche pour dériver les conditions au bord lors de la percussioin de deux floes de glace. La stratégie est la suivante : nous proposons de considérer le floe de glace comme la limite d'un réseau isotrope de masses, reliées entre elles par des ressorts. Sur un réseau discret, nous connaissons l'équation différentielle qui régit le mouvement de chaque masse ; nous pouvons espérer en dériver une expression du déplacement au bord. Nous identifions trois limites mathématiques nécessaires à la compréhension du phénomène de percussioin, et obtenons deux d'entre elles. Nous présentons ainsi plusieurs résultats de  $\Gamma$ -convergence de fonctionnelles discrètes, définies sur différents réseaux de ressorts, vers la fonctionnelle d'énergie élastique classique. Nous utiliserons en particulier un réseau isotrope, obtenu à partir d'un processus stochastique ponctuel sur lequel est construite une triangulation de Delaunay. Dans ce cas, nous proposerons un résultat de  $\Gamma$ -convergence presque sûre.





---

## Abstract

---

This doctoral dissertation is part of a research project on sea ice modeling, initiated by TOTAL S.A. and the Université Grenoble Alpes. This project lead to the development of a granular model for the evolution of sea ice, and in particular the mechanical behavior of ice floes in the marginal ice zone. The implementation of the model can simulate the collisions of one million ice floes, and their interaction with rigid structures. This PhD thesis improves the current granular model by adding an efficient model for ice floe fracture.

Firstly, we present a fracture model for an ice floe subject to a boundary displacement. This model is a brittle fracture model, relying on the work of A. A. Griffith. It is written in a variational framework inspired from that of G. A. Francfort and J.-J. Marigo's model: we minimize the total energy of the material. We show that, under some hypothesis, the total energy of the ice floe has a minimum. This variational model is efficient, and can be used in the collision model which simulates the behavior of a large number of floes. This efficiency relies on a strong geometric hypothesis, although mitigated by the use of a quasistatic loading: we restrict the space of admissible fractures to the set of segment lines.

Secondly, we present a research strategy to obtain an expression of the boundary displacement during the percussion of two ice floes. The strategy is the following: we consider the ice floe as the limit of an isotropic mass-spring lattice. For a given lattice, we can write the differential equation verified by each mass, and thus we hope to derive an expression of the boundary displacement. We identify three mathematical limits which we deem necessary to the understanding of the percussion phenomenon, and we obtain two of them. Doing so, we prove two  $\Gamma$ -convergence results of discrete functionals, defined on different lattices, to the classical elastic energy. In particular, we work with a stochastic isotropic lattice, built as the Delaunay triangulation of a stochastic point process. In that case, we will prove the almost-sure  $\Gamma$ -convergence.



<b>Présentation des travaux de la thèse</b>	<b>17</b>
★	
<b>Première partie : Fracture d'un matériau élastique</b>	<b>25</b>
<b>Introduction de la première partie</b>	<b>27</b>
<b>Chapitre 1 : Théorie de la fracture : état de l'art</b>	<b>31</b>
1.1 Introduction . . . . .	32
1.2 Le modèle de fracture fragile de Griffith . . . . .	32
1.2.1 Introduction historique . . . . .	32
1.2.2 Présentation moderne du critère de Griffith . . . . .	33
1.3 Le modèle variationnel de Francfort et Marigo . . . . .	35
1.3.1 Une excursion dans le domaine du traitement d'images . . . . .	35
1.3.2 Une formulation variationnelle de la théorie de la fracture fragile . . . . .	37
1.4 Problèmes à frontière libre et méthodes numériques . . . . .	40
1.4.1 La méthode à champ de phase . . . . .	40
1.4.2 Quelques études numériques . . . . .	41
1.5 Conclusion . . . . .	42
<b>Chapitre 2 : Un modèle de fracture variationnel et efficace</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction . . . . .	46
2.2 Description du modèle . . . . .	47
2.2.1 Un modèle de fracture statique . . . . .	47
2.2.2 Un modèle de fracture quasi-statique . . . . .	50
2.3 Résultats théoriques sur le modèle . . . . .	51
2.3.1 Résultat d'existence à fracture fixée . . . . .	51
2.3.2 Résultat d'existence partiel pour le modèle statique . . . . .	53
2.3.3 Modèle quasi-statique et auto-intersection . . . . .	62
2.4 Une méthode d'éléments finis adaptée . . . . .	63

2.4.1	Discrétisation classique . . . . .	63
2.4.2	Discrétisation de l'ouvert fracturé . . . . .	64
2.4.3	Convergence vers le modèle statique . . . . .	65
2.4.4	Discrétisation de l'évolution quasi-statique . . . . .	69
2.5	Résultats numériques . . . . .	70
2.5.1	Implémentation . . . . .	70
2.5.2	Simulations . . . . .	71
2.6	Conclusion . . . . .	73
<b>Conclusion de la première partie</b>		<b>79</b>



## **Deuxième partie : Percussion d'un matériel élastique** **81**

### **Introduction de la seconde partie** **83**

### **Chapitre 3 : Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier** **87**

3.1	Introduction . . . . .	88
3.2	Description du problème . . . . .	89
3.2.1	Énergie élastique d'un matériau continu . . . . .	89
3.2.2	Construction d'un réseau régulier . . . . .	90
3.2.3	Présentation des résultats du chapitre . . . . .	91
3.3	Analyse de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	93
3.3.1	Développement limité de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	93
3.3.2	Représentation intégrale de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	95
3.3.3	Contrôle du reste du développement limité . . . . .	98
3.4	Convergence de la suite de fonctionnelles . . . . .	100
3.4.1	Résultats de convergence sur un réseau régulier . . . . .	100
3.4.2	Calcul formel de la limite ponctuelle sur un réseau isotrope . . . . .	103
3.5	Conclusion . . . . .	105

### **Chapitre 4 : Un processus stochastique de maillages isotropes** **111**

4.1	Introduction . . . . .	112
4.2	Processus ponctuels . . . . .	113
4.2.1	Processus ponctuel simples sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	113
4.2.2	Processus stationnaires et processus de Poisson . . . . .	116
4.2.3	Processus ponctuels sur un espace polonais . . . . .	117
4.3	Mesure de Campbell et Distribution de Palm . . . . .	118
4.3.1	Cas d'un processus ponctuel simple . . . . .	118
4.3.2	Cas d'un processus ponctuel stationnaire . . . . .	120
4.4	Théorèmes ergodiques . . . . .	124
4.4.1	Processus ponctuels ergodiques . . . . .	124
4.4.2	Distribution de Palm et Propriétés ergodiques . . . . .	126
4.5	Processus de maillage de Poisson-Delaunay . . . . .	127
4.5.1	Maillages et Pavages . . . . .	127

4.5.2	Processus ponctuels marqués et Processus de Poisson-Delaunay . . .	128
4.5.3	Simplexe typique d'un maillage de Poisson-Delaunay . . . . .	130
4.6	Suite de maillages convergente et isotrope . . . . .	131
4.6.1	Définition de la suite de maillages . . . . .	131
4.6.2	Convergence de la suite de maillages . . . . .	132
4.6.3	Taille minimale des mailles . . . . .	134
4.7	Conclusion . . . . .	136
<b>Chapitre 5 : Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope</b>		<b>139</b>
5.1	Introduction . . . . .	140
5.2	Description du problème . . . . .	141
5.2.1	Énergie élastique sur un réseau de ressorts triangulaire . . . . .	142
5.2.2	Présentation des résultats du chapitre . . . . .	145
5.3	Analyse et contrôle de l'énergie . . . . .	146
5.3.1	Analyse de l'énergie . . . . .	147
5.3.2	Contrôle à l'origine . . . . .	151
5.3.3	Contrôle du régime transitoire . . . . .	154
5.3.4	Contrôle à l'infini . . . . .	156
5.4	Convergence ponctuelle . . . . .	163
5.4.1	Développement limité de l'énergie . . . . .	163
5.4.2	Espérance de l'énergie au premier ordre . . . . .	164
5.4.3	Convergence presque sûre de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	171
5.5	Convergence variationnelle . . . . .	174
5.5.1	Un résultat de $\Gamma$ -convergence . . . . .	174
5.5.2	Compacité et équi-coercivité . . . . .	182
5.6	Conclusion . . . . .	183
<b>Chapitre 6 : Résultat de quasi-staticité à grande raideur</b>		<b>185</b>
6.1	Introduction . . . . .	186
6.2	Présentation du problème . . . . .	187
6.2.1	Un système masse-ressorts . . . . .	187
6.2.2	Système à grande raideur et perturbation singulière . . . . .	189
6.3	Résultat de quasi-staticité à grande raideur . . . . .	190
6.3.1	Stabilité et décroissance de l'énergie . . . . .	190
6.3.2	Théorème de Tikhonov et résultat de quasi-staticité . . . . .	192
6.4	Résultats numériques . . . . .	194
6.4.1	Présentation du code . . . . .	194
6.4.2	Quelques résultats numériques . . . . .	195
6.5	Conclusion . . . . .	196
<b>Conclusion de la seconde partie</b>		<b>201</b>



<b>Discussion des résultats présentés</b>	<b>203</b>
★	
<b>Annexes</b>	<b>205</b>
<b>Annexe A : Maillages</b>	<b>207</b>
A.1 Maillages . . . . .	207
A.2 Éléments finis sur un maillage . . . . .	208
<b>Annexe B : Élasticité</b>	<b>209</b>
B.1 Mécanique des milieux continus . . . . .	209
B.2 Élasticité . . . . .	212
<b>Annexe C : Géométrie intégrale</b>	<b>215</b>
C.1 Définitions . . . . .	215
C.2 Formule de Blaschke-Petkantschin . . . . .	216
<b>Annexe D : Gamma-convergence</b>	<b>217</b>
D.1 Définition et premières propriétés . . . . .	217
D.2 Convergence des minimiseurs . . . . .	218
D.3 Méthode de localisation . . . . .	219







---

## Présentation des travaux de la thèse

---

La modélisation de la banquise a fait l'objet d'un regain d'intérêt ces dernières années, tant à l'échelle du bassin arctique dans son ensemble qu'à l'échelle des zones côtières, ou qu'à celle des zones de contact entre la banquise et les ports ou plates formes *offshore*. Deux grandes classes de modèles de la banquise existent : les modèles continus, et les modèles discrets, pour modéliser son comportement respectivement à grande et petite échelle. Cependant, les phénomènes en jeu sont nombreux et complexes (dérive des glaces, déformations, chocs ...) et ont lieu à différentes échelles spatiales (du mètre au millier de kilomètres) et temporelles (de la seconde à l'année) ; il est donc délicat de proposer un modèle qui prenne en compte cette diversité de phénomènes physiques [Wei13]. Pour résoudre ces problèmes, l'entreprise TOTAL S.A. et l'Université Grenoble Alpes ont développé un partenariat depuis 2012, et ont poursuivi plusieurs projets de recherche communs sur le sujet.

Un premier objectif de la modélisation de la banquise est l'obtention de prévisions climatiques. Les modèles climatiques, qui rendent compte de son évolution sur de grandes échelles temporelles et spatiales, la considèrent comme un milieu continu. De récentes études montrent cependant que les rhéologies utilisées dans ces modèles continus ne sont pas adaptées. En effet, elles ne peuvent rendre compte de l'hétérogénéité, de l'anisotropie et de la complexité de la dérive de la banquise, ainsi que de sa déformation [GWMBB09 ; WSS07]. Ceci a pour conséquence une incapacité des modèles continus classiques à prévoir l'évolution de la masse de la glace dans le bassin arctique [RWDC11]. À grande échelle (1 – 1000 kilomètres), V. Dansereau et al. ont proposé une nouvelle rhéologie pour la modélisation de la banquise. Cette rhéologie prend en compte la fracture fragile de la glace au sein d'une modélisation de type mécanique des milieux continus [DWSL16 ; WD17]. Cependant, elle n'est pas adaptée pour une modélisation à petite échelle de la banquise, qui nécessite de prendre en compte son aspect granulaire.

Un second objectif de la modélisation de la banquise est la prévision à court terme de son évolution. En effet, la fonte récente d'une partie de celle-ci a permis l'ouverture de nouvelles routes maritimes. Pour les exploiter, il est nécessaire de prendre en compte certaines contraintes de sécurité, et donc d'être en mesure de prévoir la praticabilité de ces routes qui

bordent, ou traversent, la zone marginale des glaces (MIZ<sup>1</sup> – voir la reproduction de [Auc08] en figure 1). Les fragments de glace, aussi appelés floes de glace, qui composent la MIZ sont de géométrie variable, mais sont caractérisés par une épaisseur de l'ordre du mètre, et une taille variable de l'ordre de grandeur de la dizaine de mètres au kilomètre. À cette échelle (10 m–100 km) et à cette concentration de glace, les modèles granulaires sont particulièrement adaptés. En effet, la nature discontinue de la banquise doit être prise en compte. Un modèle granulaire serait, par exemple, nécessaire pour simuler la dispersion des floes dans le cadre du projet OGP sur l'étude des conséquences du déversement accidentel d'hydrocarbures en mer mené par le NERSC (Bergen, Norvège).

Les modèles granulaires sont cependant coûteux en terme de temps de calcul et nécessitent l'incorporation des interactions complexes entre la banquise, l'océan et l'atmosphère. Ces difficultés expliquent que les modèles granulaires ont été beaucoup moins étudiés que les modèles continus. L'une des premières propositions de modèle granulaire peut être trouvée dans les travaux de M. A. Hopkins [Hop96] et de M. A. Hopkins, S. Frankenstein et A. S. Thorndike [HFT04]. Nous renvoyons également aux articles [WFH10 ; Her11] pour des résultats plus récents. Certaines de ces méthodes ont été utilisées pour simuler l'interaction entre la glace et une structure rigide [PTP11 ; Met14 ; KS14]. Cependant, les approches développées dans ces travaux n'envisagent qu'un faible nombre de floes (de l'ordre de la centaine), dont la géométrie est restreinte (circulaire, ou rectangulaire). De plus, elles rendent compte des collisions des méthodes de contact de type linéaire ou hertzien, qui modélisent le contact entre floes comme une répulsion après interpénétration. Ce type de modèle n'est pas adapté lorsque les floes sont de différentes tailles ou présentent des géométries complexes. En effet, nous observons dans ces cas une perte d'énergie lors de la collision, et donc un amortissement effectif du système. Cette perte d'énergie, amplifiée avec le nombre de floes, empêche les interactions longue distance observées sur la banquise et fausse ainsi le comportement global du système.

Un nouveau modèle granulaire a été développé par M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss [Rab15 ; RLW15]. Ils remplacent les chocs à l'échelle moléculaire par un algorithme de gestion des événements [RD11]. Cela permet de prendre en compte la collision des floes sans passer par un processus d'interpénétration. Entre les collisions, le mouvement des floes vérifie les équations de préservation du moment angulaire et de la quantité de mouvement. Le modèle prend en compte la force de Coriolis et les interactions avec l'océan et l'atmosphère. La gestion des collisions est basée sur un problème de complémentarité linéaire, sur la condition de Signorini-Fichera et sur la loi de Coulomb pour le contact avec friction. Pour l'instant, l'intensité du contact est décrite par un coefficient de friction et un coefficient de restitution, qui ont été calibrés à partir d'expériences en bassin avec des floes en bois. Cette gestion du contact souffre encore d'imperfections, notamment car elle ne prend pas en compte la fracture des floes. Cela peut mener à des résultats de simulation qui ne sont pas réalistes, comme c'est le cas dans la figure 2 qui est une capture d'un résultat de simulation d'interaction entre des floes de glace et une structure *offshore* fixe (modélisée par un carré). Nous pouvons observer qu'un floe de glace de grande taille tient en équilibre sur un petit floe adossé à la structure,

---

<sup>1</sup>Marginal Ice Zone : zone de transition entre l'océan et le coeur de la banquise, où la concentration de glace est inférieure à 80%.

et que ces deux floes subissent des contraintes importantes – l’intensité des contraintes est traduite par la saturation de la couleur. On s’attendrait à ce que le petit floe soit brisé sous la force de l’impact. Il est donc nécessaire de développer un modèle de fracture adapté au modèle d’interaction déjà existant.

L’un des objectifs de cette thèse est donc de remplacer le coefficient de restitution du contact rigide en couplant ce modèle granulaire avec un modèle de fracture des floes, qui prend en compte le phénomène de percussion. Jusqu’à présent, dans ce projet, les floes étaient considérés comme des corps rigides ; dans cette thèse, nous les considérons comme des corps élastiques. Ce travail est divisée en deux parties. Nous commençons par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d’un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord (*i.e.* à une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, nous cherchons à obtenir l’expression du déplacement au bord d’un floe qui percute un autre floe ou une structure solide.

Dans la première partie, nous développons un modèle variationnel de fracture d’un floe de glace. Les premiers modèles variationnels pour la fracture justifiés mathématiquement ont été développés par G. A. Francfort et J.-J. Marigo [FM98]. Ils se basent sur la minimisation de l’énergie du floe, qui est la somme de son énergie élastique et d’une énergie de surface de type Griffith. Un exposé complet de ce modèle est disponible dans la monographie de B. Bourdin, G. A. Francfort et J.-J. Marigo [BFM08]. Les méthodes variationnelles ont plusieurs avantages par rapport au modèle classique de Griffith. Elles prédisent l’initiation de la fracture, ainsi que le chemin que la fracture emprunte, ce qui n’est pas le cas des méthodes classiques. Cependant, les méthodes numériques traditionnellement utilisées en théorie variationnelle de la fracture ne sont pas adaptées à notre cas d’utilisation. Elles reposent sur une méthode dite à champ de phase [BFM00], et requièrent un maillage fin du matériau modélisé. Ceci n’est pas compatible avec notre champ d’application, qui peut nous amener à simuler à chaque pas de temps les contacts de plusieurs milliers de floes.

Nous proposons donc un modèle variationnel de fracture efficace dans le contexte de cette étude, et qui peut être utilisé pour simuler le comportement mécanique d’un grand nombre de floes. Cette efficacité repose sur plusieurs hypothèses. Tout d’abord, nous supposons que les floes sont d’épaisseur négligeable devant leur extension horizontale. Nous pouvons donc utiliser l’hypothèse des contraintes planes, qui est une hypothèse classique de modélisation des matériaux élastiques, et qui permet d’utiliser un modèle bi-dimensionnel. Cette hypothèse est raisonnable pour l’étude du comportement élastique des floes de glace de la MIZ. De plus, nous restreignons l’ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites. Ainsi, nous pouvons minimiser directement la fonctionnelle d’énergie totale, sans recourir à une approximation de type champ de phase. Notons que cette hypothèse, qui peut sembler très restrictive, est atténuée lorsque l’on considère un chargement du bord qui dépend du temps, sous une hypothèse de quasi-staticité.

Nous présentons deux résultats théoriques sur ce modèle. Tout d’abord, nous montrons que le problème de minimisation considéré admet bien un minimum. Pour ce faire, nous utilisons une notion de convergence d’espace fonctionnels : la convergence au sens de Mosco. Cette notion est en particulier utilisée pour l’étude des problèmes d’optimisation de forme, et nous renvoyons à la monographie de D. Bucur et G. Buttazzo [BB05]. De plus, nous

proposons une méthode numérique adaptée pour l'évaluation de l'énergie totale à fracture fixée. Cette méthode repose sur une approximation de type éléments finis, indépendante du maillage, qui est similaire à celle développée dans [BB99 ; MDB99].

Dans une seconde partie, nous cherchons à obtenir une expression du mouvement du bord d'un floe lorsque celui-ci percute un autre objet. Cette expression nous permettra d'utiliser le modèle de fracture développé dans la première partie. Pour ce faire, nous proposons de modéliser un floe de glace comme un assemblage discret de masses reliées par des ressorts. Comme l'équation différentielle qui régit le mouvement de chaque masse est connue, nous pouvons espérer en dériver le mouvement local au bord du floe, lors de la percussion. Nous proposons donc un programme de travail, qui repose sur l'obtention de plusieurs limites mathématiques : une limite temporelle et deux limites spatiales. La limite temporelle est appliquée à la solution de l'équation différentielle qui régit le mouvement des masses. Nous rappelons que la vitesse de percussion est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace. La vitesse des ondes dans le système discret étant liée à la constante de rigidité des ressorts, nous souhaitons donc montrer que, lorsque cette rigidité tend vers l'infini, le système différentiel discret se trouve à tout moment dans un état d'équilibre. Ainsi, nous prouvons que le floe de glace, lors de la percussion, vérifie une hypothèse de quasi-staticité. Puis, à l'aide d'une première limite spatiale, nous souhaitons montrer que l'état d'équilibre du réseau de ressorts lorsque l'on contraint son déplacement au bord, approche l'état d'équilibre du matériau élastique continu soumis aux mêmes contraintes. Enfin, à l'aide d'une seconde limite spatiale, nous souhaiterions analyser le comportement du réseau de ressorts sur son bord, lors de la percussion. Précisons que cette dernière limite n'a pas été étudiée dans le cadre de cette thèse, mais que nous l'exposons comme faisant partie du programme de travail. Pour étudier ce comportement au bord du floe, nous proposons d'analyser la dépendance spatiale des vecteurs propres du système dynamique masse-ressorts, pour ne garder que ceux qui influent sur le comportement près du bord. Forts de ces résultats, nous dériverions de l'équation différentielle du mouvement des masses du réseau une expression du déplacement au bord du floe de glace lors de la percussion.

Tout d'abord, nous montrons que, lorsque l'on fixe un déplacement du bord, l'énergie élastique du réseau de ressorts converge vers l'énergie élastique continue. Nous ne nous satisfaisons pas d'une convergence ponctuelle : nous souhaitons montrer que le champ de déplacement solution du problème de minimisation discret converge vers celui du problème de minimisation continu. Nous montrons donc des résultats de  $\Gamma$ -convergence des fonctionnelles d'énergie qui permettent d'obtenir, moyennant une hypothèse de coercivité, la convergence des problèmes de minimums associés. Nous renvoyons à la monographie de A. Braides [Bra02] pour une présentation générale de la  $\Gamma$ -convergence, ainsi qu'à [AC04 ; VSB07 ; LR11] pour des résultats de  $\Gamma$ -convergence d'énergies définies sur des réseaux discrets. Nous donnons, dans cette thèse, deux résultats de  $\Gamma$ -convergence ainsi que les résultats d'équi-coercivité associés. Le premier est obtenu sur un réseau régulier, à base carrée. L'utilisation d'un réseau régulier permet l'obtention de la forme explicite de la  $\Gamma$ -limite, mais ne nous permet d'obtenir à la limite qu'un matériau élastique de coefficient de Poisson nul.

Nous proposons donc un second résultat, qui est un résultat de  $\Gamma$ -convergence de l'énergie élastique associée à un réseau de ressorts isotrope. Ce réseau est construit à l'aide d'un

processus stochastique ponctuel qui suit une loi de Poisson. Sur chaque tirage du processus ponctuel, nous construisons la triangulation de Delaunay associée. Des résultats de théorie des processus ponctuels, que l'on trouve par exemple dans [Møl94], nous permettent d'obtenir une expression de la loi de probabilité du triangle typique. De cette expression, et en s'appuyant sur un résultat de théorie ergodique adapté à la  $\Gamma$ -convergence de G. Dal Maso et L. Modica [DM86b], nous pouvons dériver l'expression presque sûre de la limite simple.

Puis, nous prouvons un résultat de  $\Gamma$ -convergence presque sûre de l'énergie élastique basée sur ce réseau stochastique, en utilisant une méthode de localisation à la manière de [BG02 ; AC04 ; ACG11]. Dans ce cas, et contrairement à l'énergie élastique d'un réseau régulier, nous n'obtenons pas d'expression de la  $\Gamma$ -limite. Une manière classique d'obtenir une expression de la limite est de prouver que le champ de déplacement solution vérifie l'hypothèse de Cauchy-Born [AC04 ; Bra06]. Dans le cas régulier, des résultats sont disponibles dans [FT02 ; CDKM06] ; cependant cette preuve repose sur l'analyse d'une cellule du réseau, et n'est donc pas transposable au cas non régulier. Nous obtenons néanmoins, à l'aide d'un redimensionnement de la suite d'énergies qui traduit une hypothèse de petits déplacements, que l'énergie limite a la forme de l'énergie élastique d'un matériau homogène et isotrope, et suit donc la loi de comportement dite de Lamé. De plus, notre réseau stochastique étant basé sur une triangulation qui suit une loi de Poisson, une étude numérique ultérieure permettra d'obtenir une expression approchée des deux constantes de Lamé du matériel homogénéisé. Une étude de ce type est disponible dans [OAJ95], et nous pourrions l'adapter à notre cas.

Nous obtenons également un résultat d'équi-coercivité de la suite d'énergies utilisée sur le réseau de ressorts isotrope. Ce résultat est délicat, car on observe une perte d'énergie lorsque les triangles s'aplatissent, ce qui arrive presque sûrement avec un processus de triangulation de Poisson-Delaunay. En effet, la constante de régularité de la suite de maillages construite tend vers zéro. Pour contrebalancer ce phénomène, nous faisons exploser la raideur des ressorts des triangles plats. La vitesse de l'explosion est contrôlée avec soin : elle est suffisamment rapide pour obtenir l'équi-coercivité de la suite d'énergies, et suffisamment lente pour que l'espérance de l'énergie du maillage soit finie.

Nous montrons enfin un résultat de quasi-staticité pour un réseau de ressorts de géométrie quelconque, et dont la masse est négligeable devant la raideur. Nous considérons donc un système masse-ressorts sur lequel nous ajoutons, en parallèle de chaque ressort, un amortisseur visqueux. Nous étudions le comportement asymptotique de la solution de l'équation différentielle qui régit le comportement du réseau de ressorts. Nous montrons que, lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini, et donc que la vitesse de propagation des ondes dans le système tend vers l'infini, la solution du système tend uniformément vers une solution d'équilibre statique du système masse-ressort. Autrement dit, à la limite, le réseau de ressorts se trouve à chaque instant dans un état d'équilibre. Notons que l'ajout d'une viscosité constante est nécessaire pour introduire une dissipation, mais n'induit pas d'effets visco-élastiques. À la limite, elle devient négligeable par rapport à la raideur des ressorts.

Nous dressons maintenant, à l'issue de cette thèse, un tableau des questions qui restent ouvertes, ainsi que des pistes de modélisations pertinentes. Tout d'abord, le phénomène de percussion n'est pas encore compris. Deux des limites souhaitées ont été obtenues, mais il resterait à dériver de l'équation différentielle le comportement du système masse-ressort

sur son bord lors d'une percussion. De plus, il serait intéressant de mesurer le coefficient de restitution du nouveau modèle et de calibrer les nouveaux paramètres physiques comme la ténacité de la glace, en menant des expériences dans un bassin réfrigéré où flottent des blocs de glace. Notons que le précédent modèle avait été calibré sur une piscine où flottaient des morceaux de bois. Il serait possible de procéder à des tests dans un bassin à glace en s'appuyant, par exemple, sur le projet européen HYDRALAB+. Enfin, de belles questions de modélisation se posent maintenant, comme l'écrasement et la création de *ridges*, qui sont des phénomènes locaux qui apparaissent lors de la collision de floes, et qui ne sont pas pris en compte. Actuellement, les modèles granulaires et continus n'interagissent pas entre eux. Il serait intéressant de développer un modèle multi-échelles, en couplant ces deux modèles. Pour conclure, nous rappelons l'importance de développer les modèles granulaires et continus de la banquise, dont les champs d'applications sont vastes. Le développement d'une nouvelle rhéologie adaptée aux modèles continus, obtenue dans le cadre du projet de recherche mené conjointement par TOTAL S.A. et l'Université Grenoble Alpes, permet une modélisation climatique pertinente de la banquise. L'aboutissement du présent modèle discret permettrait également la simulation, en temps court, d'interactions glace-structure. En particulier, nous souhaiterions l'utiliser pour simuler la dispersion des floes dans le cadre du projet OGP sur l'étude des conséquences du déversement accidentel d'hydrocarbures en mer mené par le NERSC (Bergen, Norvège).





FIG. 1 : Marginal Ice Zone [Auc08]

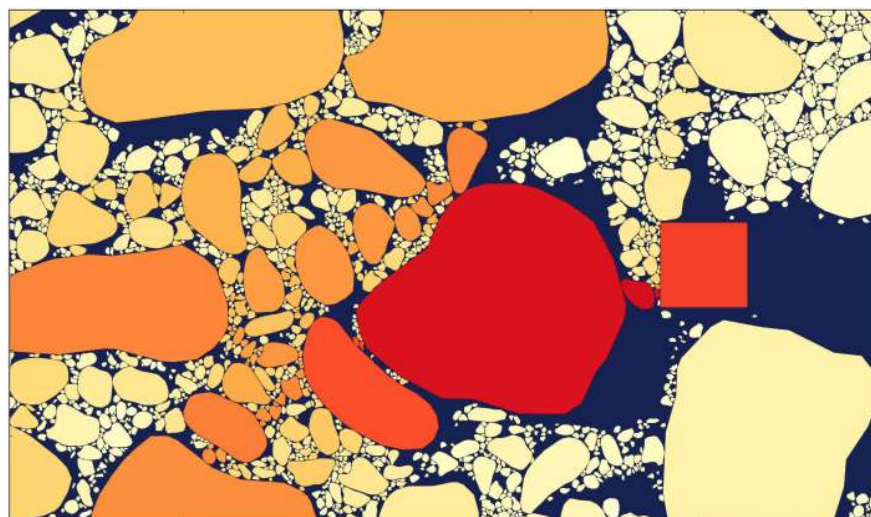


FIG. 2 : Capture d'écran d'une simulation d'interaction glace structure avec contact rigide





Première partie

# Fracture d'un matériau élastique



---

## Introduction de la première partie

---

Dans cette partie, nous proposons un modèle variationnel de fracture fragile d'un floe de glace, qui est un fragment de banquise caractérisé par une épaisseur de l'ordre de grandeur du mètre, et par une géométrie variable. Nous rappelons que nous souhaitons à terme modéliser les phénomènes de fracturation à l'intérieur de la zone marginale des glaces, qui est la zone de transition entre la banquise et l'océan, où la concentration en glace est inférieure à 80 %. Ce modèle est donc motivé par une contrainte d'efficacité, car il devra être utilisé dans le modèle de contact qui traite les collisions de plusieurs milliers de floes développé par M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss [RLW15]. Détaillons rapidement le cadre physique utilisé, que nous justifierons dans la suite. Nous modélisons le floe de glace comme un matériau élastique, dans un état de contraintes planes. Soumis à une déformation de son bord, il exhibe un phénomène de fracture fragile, qui évolue de manière quasi-statique.

Nous faisons l'hypothèse que les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions. Rappelons que les floes de glace sont des morceaux de glace de la zone marginale des glaces, dont l'épaisseur, de l'ordre de grandeur du mètre, est négligeable devant leur extension horizontale (10 mètres – 1 kilomètre). Nous nous limiterons à la modélisation des floes dont la taille est supérieure à 10 mètres ; dans ce cas l'épaisseur du floe est négligeable devant son l'extension horizontale. Les floes de glace sont donc dans un état de contraintes planes, qui justifie l'utilisation d'un modèle bidimensionnel.

Nous faisons également l'hypothèse qu'un floe de glace se comporte comme un matériau élastique. Pour la définition d'un matériau élastique, le lecteur est invité à se reporter à l'annexe B. Rappelons seulement qu'une déformation d'un matériau est dite élastique lorsque le matériau revient à son état de repos initial après relâchement des contraintes, tandis qu'un matériau exhibe un comportement plastique si une déformation résiduelle persiste après relâchement des contraintes. Pour beaucoup de matériaux, il existe une contrainte seuil, nommé limite d'élasticité, en deçà de laquelle un matériau plastique se comporte de manière élastique. Ainsi, les déformations plastiques n'apparaissent que pour des contraintes suffisamment grandes, plus grandes que la limite d'élasticité. Ce n'est pas le cas de la glace, qui peut exhiber des comportements visco-plastiques à faibles contraintes, tant que le temps d'observation est suffisamment long. Dans notre cas, pour des contraintes de quelques cen-

taines de kilopascals au maximum, et pour des temps de collision de l'ordre du dixième de seconde, la glace se comporte comme un matériau élastique [WSS07 ; DWSL16].

L'introduction d'une fissure dans un matériau, i.e. d'une singularité géométrique, induit, en régime élastique, une singularité du tenseur des contraintes qui explose à l'extrémité de la fracture. Comme cette singularité n'est pas d'origine physique, le comportement du matériau en bout de fracture n'est pas élastique, mais plastique. Pour beaucoup de matériaux, en particulier pour les métaux, on peut définir ce que l'on appelle une zone cohésive, qui est la région du matériau qui subit cette déformation plastique. Dans ce cas, un matériau élastique est dit fragile lorsque la rupture intervient sans déformation plastique préalable du matériau, c'est à dire lorsque la taille de la zone cohésive est négligeable par rapport à la taille de la fracture et par rapport à la taille du système. Cette notion s'oppose à la notion de fracture ductile, où le comportement plastique dans la zone cohésive est à prendre en compte. Le phénomène de fracture fragile est caractérisé par une fracture qui se propage rapidement dans le matériau, et qui libère – en comparaison de la fracture ductile – peu d'énergie. Comme précisé précédemment, il est délicat de définir une zone cohésive pour la glace, qui va exhiber un comportement visco-plastique à faibles contraintes si le temps d'observation est suffisamment grand. Dans le cadre de notre étude, compte tenu des temps d'observations et de l'intensité des contraintes en jeu, la glace se fracture comme un matériau élastique fragile [WSS07 ; SD09 ; DWSL16].

Le phénomène de chargement et de déplacement du bord du floe de glace n'est pas, dans notre cas, un phénomène dynamique. D'une part, la vitesse de la dérive des floes de glace est de l'ordre de quelques dizaines de centimètres par seconde au maximum [RWMB09]. D'autre part, les floes de glace se fracturent de manière brutale, à une vitesse de 400 mètres par seconde pour chaque à-coup, et à une vitesse moyenne de 20 mètres par seconde [PSH87 ; DAM99]. La vitesse caractéristique de croissance de la fracture est donc bien plus élevée que la vitesse des floes lors de la percussion ; et l'on se place dans un cadre quasi-statique.

Cette partie comporte deux chapitres. Dans un premier chapitre, nous proposons un bref état de l'art de la théorie de la fracture fragile. Nous présentons le modèle classique de la fracture fragile, dû à A. A. Griffith [Gri21]. Nous mettons également en avant ses multiples limitations : le modèle ne prédit pas l'initiation de la fracture mais sa croissance, et présuppose de connaître le chemin qu'emprunte la fracture dans le matériau. Puis, nous exposons le modèle variationnel de fracture fragile de G. A. Francfort et J.-J. Marigo [FM98], et nous expliquons pourquoi il répond aux différentes limitations du modèle de Griffith. Nous présentons également la principale méthode numérique associée : la méthode dite des champs de phase. Nous exposons brièvement pourquoi cette méthode n'est pas compatible avec notre contrainte d'efficacité.

Dans un second chapitre, nous proposons une modification de ce modèle variationnel de Francfort et Marigo, dans le but d'avoir un modèle variationnel efficace. Nous faisons donc une hypothèse géométrique forte – bien qu'atténuée par la suite : les fractures se propagent en ligne droite dans les floes de glace. Cette hypothèse nous permet de minimiser directement la fonctionnelle d'énergie totale, sans faire intervenir la fonctionnelle lissée dite à champ de phase. Nous montrons que la fonctionnelle d'énergie totale possède bien un minimum sur l'espace des fractures admissibles utilisé. Puis, nous proposons une méthode numérique

---

de type éléments finis indépendante du maillage, similaire à celle développée dans [BB99; MDB99]. Nous prouvons que cette méthode numérique converge bien grâce à un résultat de  $\Gamma$ -convergence. Nous obtenons donc un modèle numériquement efficace, et adapté aux simulations de collisions sur un grand nombre de floes du modèle de M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss.



# CHAPITRE 1

---

## Théorie de la fracture : état de l'art

---

### Sommaire

---

1.1	Introduction . . . . .	32
1.2	Le modèle de fracture fragile de Griffith . . . . .	32
1.2.1	Introduction historique . . . . .	32
1.2.2	Présentation moderne du critère de Griffith . . . . .	33
1.3	Le modèle variationnel de Francfort et Marigo . . . . .	35
1.3.1	Une excursion dans le domaine du traitement d'images . . . . .	35
1.3.2	Une formulation variationnelle de la théorie de la fracture fragile . . . . .	37
1.4	Problèmes à frontière libre et méthodes numériques . . . . .	40
1.4.1	La méthode à champ de phase . . . . .	40
1.4.2	Quelques études numériques . . . . .	41
1.5	Conclusion . . . . .	42

---



## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous effectuons un bref état de l'art du domaine de la fracture élastique fragile. Ce chapitre est divisé en trois sections.

Nous commençons par donner un aperçu partiel de la théorie de la fracture fragile, dû à A. A. Griffith en 1921, et majoritairement utilisé de nos jours. Cependant, ce critère, dont la formulation mathématique appartient au siècle dernier, souffre de nombreux défauts. Il suppose le chemin qu'emprunte la fracture connu *a priori*, et ne le prédit pas. De plus, ce critère présuppose l'existence d'une fracture dans le matériau : c'est un critère d'évolution, et non de nucléation.

Dans la seconde partie, nous donnerons un exposé de la théorie variationnelle de la fracture, modèle proposé par G. A. Francfort et J.-J. Marigo en 1998. Ce modèle est très proche du modèle initial de Griffith, et pourrait être vu comme une reformulation du modèle de Griffith dans un langage variationnel. Le cadre variationnel, plus moderne que le cadre mathématique du critère de Griffith classique, apporte une solution aux problèmes de l'initialisation et de la prédiction du chemin de fracture. Il consiste en la minimisation globale de la fonctionnelle d'énergie totale du matériau, parmi les couples déplacement-fracture admissibles.

Dans une dernière section, nous détaillerons les méthodes numériques classiques en théorie variationnelle de la fracture, *i.e.* les méthodes dites à champ de phase. Elles reposent sur une régularisation de la fonction indicatrice de la fracture, et sur un résultat de  $\Gamma$ -convergence de ces fonctionnelles lissées vers la fonctionnelle d'énergie totale du matériau. Cependant, ce type de méthode numérique nécessite l'utilisation d'un maillage fin du matériau à modéliser, et justifie le besoin d'un modèle variationnel efficace pour la fracture fragile.

## 1.2 Le modèle de fracture fragile de Griffith

### 1.2.1 Introduction historique

La théorie classique de la fracture remonte aux années 1920. Elle a été théorisée par A. A. Griffith, alors ingénieur en aéronautique, dans son fameux article [Gri21]. Ses travaux, menés à la Royal Aircraft Establishment, portent initialement sur l'effet du traitement des surfaces – remplissage, ponçage – pour améliorer la résistance des dites surfaces.

Griffith en est amené à calculer la résistance théorique d'une barre d'acier qui possède une fissure. Le critère de fracture dont il dispose à l'époque est le critère de la contrainte maximale, qui est un critère phénoménologique. D'après ce critère, lorsque la contrainte dépasse un seuil dans le matériau, celui-ci casse.

Il commence par calculer la contrainte théorique en bout de fracture. Pour ce faire, il utilise un résultat dû à C. Inglis, qui avait donné, dans [Ing13], l'expression du champ élastique d'un objet qui possède un défaut – un trou – elliptique. Il trouve l'expression

suivante pour la contrainte en bout de fracture :

$$\sigma = 2\sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi\nu\rho}},$$

avec  $E$  le module de Young du matériau,  $\nu$  sa constante de Poisson,  $\gamma_s$  sa tension de surface, et  $\rho$  le rayon de courbure au sommet de la fracture.

Griffith remarque que cette contrainte est indépendante de la taille de la fracture, et conclut que le critère de contrainte maximale n'est pas un critère valide. Il propose donc un nouveau critère, en regardant la croissance d'une fracture comme une compétition d'énergie. Plus précisément, il calcule l'énergie élastique relâchée lorsqu'un défaut subit un accroissement de taille  $l$ . Il calcule également l'énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces – les bords de la fissure. Il postule que le matériau doit toujours être dans un état de moindre énergie, et donc que la compétition des deux énergies – énergie élastique et énergie de surface – régit l'avancement de la fissure. Toujours en utilisant les résultats d'Inglin, il calcule la contrainte théorique à partir de laquelle intervient la rupture :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}},$$

avec  $a$  la longueur du demi-grand axe. En particulier, ce critère montre que cette contrainte critique dépend de la taille de la fracture préexistante. Il effectue plusieurs tests en laboratoire, qui montrent que la quantité  $\sigma_c\sqrt{a}$  est bien constante.

### 1.2.2 Présentation moderne du critère de Griffith

Reformulons maintenant, à la manière de [BFM08], le modèle de Griffith dans un langage plus moderne. On étudie le comportement d'un matériau élastique, noté  $\Omega$ . On suppose que  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$ , dont la frontière est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où  $\partial\Omega_D$  et  $\partial\Omega_N$  sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté  $U_D$ , tandis que sur la partie de Neumann on applique une contrainte surfacique notée  $f_s$ . On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique  $f_v$ . Enfin, on suppose que le matériau élastique est en fait hyper-élastique, c'est à dire qu'il possède une fonction de densité d'énergie  $W$  telle que, pour tout déplacement  $\varphi = \text{Id} + u$  suffisamment régulier, on a :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx,$$

où  $e(u)$  est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau. On réfère à l'annexe B, en rappelant seulement que  $e(u) = (\nabla\varphi^T \nabla\varphi - \text{Id})$ .

On suppose connu le chemin qu'empruntera la fracture, et on le note  $\sigma$ . On dénote par  $\sigma(t)$  l'extrémité de la fracture au temps  $t$ . On suppose de plus qu'à chaque instant, la fracture

est en position d'équilibre. Autrement dit, on néglige les effets dynamiques, et on se place dans un cadre quasi-statique.

On note  $\mathcal{P}(t, \sigma(t))$  l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille  $\sigma(t)$  au temps  $t$ . On a :

$$\mathcal{P}(t, \sigma(t)) = \int_{\Omega \setminus \sigma(t)} W(x, \nabla \varphi(t, \sigma(t))) \, dx - \mathcal{F}(t, \sigma(t)),$$

avec

$$\mathcal{F}(t, \sigma(t)) = \int_{\Omega} f_v(x) \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x) \cdot \varphi \, dx.$$

On introduit maintenant le critère de Griffith pour la fracture.

**Modèle 1.2.1** (Critère de Griffith pour la fracture). La fonction  $\sigma(t)$  vérifie :

1.  $\frac{d\sigma}{dt} \geq 0$ ;
2.  $-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma}(t, \sigma(t)) \leq k$ ;
3.  $\frac{d\sigma}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma}(t, \sigma(t)) = k$ .

Le critère de Griffith est un critère thermodynamique : il stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de moindre énergie. Notons que l'on peut reformuler ce critère dans le cadre de la thermodynamique des matériaux (voir par exemple [Ngu00]), en notant que la longueur de la fracture est une variable interne globale, dont la croissance traduit une dissipation d'énergie. Elle satisfait donc une inégalité de Clausius-Duhem :

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma}(t, \sigma(t)) \in \mathcal{D}_G \left( \frac{d\sigma}{dt} \right),$$

avec le potentiel  $\mathcal{D}_G$  définit par :

$$\mathcal{D}_G(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons également que le critère de Griffith est limité. Tout d'abord, pour l'appliquer, il faut connaître a priori le chemin qu'empruntera la fracture. De plus, ce critère ne permet pas de prédire l'initialisation de la fracture : il est nécessaire de supposer qu'une fracture est déjà préexistante dans le matériau.

Les mécaniciens ont élaboré plusieurs modèles pour contourner ces limitations. Tout d'abord, ils contournent l'incapacité de prédiction du phénomène de nucléation en supposant que tout matériau quel qu'il soit possède des micro-fissures, et que ce sont ces dernières qui croissent et fracturent le matériau.

La question de la prédiction du chemin de la fracture est plus complexe. Irwin, dans [Irw57], propose de relier le ratio de libération d'énergie au coefficient de la singularité

à l'extrémité de la fracture. De ce résultat naissent deux critères, le  $G_{\max}$  et le  $KII$ , qui proposent que le chemin emprunté par la fracture maximise une certaine grandeur liée aux coefficients de la singularité. Cependant, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que ces deux critères impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne peut être courbé.

Ces défauts peuvent se voir comme une inadéquation de l'outil mathématique utilisé. En effet, le critère formulé par Griffith suppose que la variable  $\sigma(t)$  est suffisamment régulière pour être dérivée. Cette régularité induit l'impossibilité de courbure du chemin de fracture [CFM09], ainsi que l'incapacité du critère de Griffith à expliquer la nucléation de fractures, puisque la nucléation introduit une forme de singularité (voir l'analyse dans [Mar10]).

## 1.3 Le modèle variationnel de Francfort et Marigo

Le modèle variationnel de G. A. Francfort et J.-J. Marigo est publié en 1998 dans [FM98], et une présentation complète de ces travaux ainsi qu'une comparaison avec le modèle de Griffith est disponible dans [BFM08]. Les deux auteurs proposent un modèle de la théorie de la fracture, similaire au modèle de Griffith. En effet, il se base sur une compétition entre énergie de fracture et énergie élastique.

Cependant, il est formulé dans un cadre variationnel, plus adapté aux mathématiques du XXI<sup>e</sup> siècle. De nombreux résultats théoriques, ainsi que de nombreuses méthodes numériques démocratisent l'utilisation des méthodes variationnelles en mathématiques appliquées. Ainsi, cet article de Francfort et Marigo suit un résultat théorique fort, dû aux mathématiciens E. De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci dans un domaine à priori fort distinct. Ils prouvent en 1989, dans [DCL89], un théorème d'existence de minimum pour une certaine fonctionnelle – la fonctionnelle de Mumford-Shah – qui intervient dans la détection des contours d'une image.

On commencera cette section par un bref aperçu du domaine du traitement des images. On montrera les similarités entre ce domaine et le domaine de la mécanique de la fracture. On y exposera également les grandes lignes des idées de De Giorgi, Carriero, et Leacci. Dans une seconde partie, on présentera le modèle de fracture de Francfort et Marigo. On montrera que, sous une hypothèse physique particulière – le cas d'un mouvement antiplan –, le modèle de Francfort et Marigo est quasiment identique au modèle de De Giorgi, Carriero et Leacci pour le traitement d'image. On remarquera également que ce modèle répond aux insuffisances du modèle de Griffith classique.

### 1.3.1 Une excursion dans le domaine du traitement d'images

En 1989, D. Mumford et J. Shah proposent dans [MS89] une méthode pour la détection de contours d'une image, qui permet de séparer par exemple une personne d'un arrière plan. Nous exposons cette méthode ici.

On note  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  une image, et on suppose  $\Omega$  ouvert et connexe. Soit  $g: \Omega \rightarrow [0, 1]$  la fonction de contraste de l'image, qui vaut 0 lorsque l'image est noire et 1 lorsqu'elle est blanche. Mumford et Shah introduisent le problème de minimum suivant.

**Modèle 1.3.1** (Mumford-Shah). Trouver une courbe  $\sigma \subset \Omega$  qui soit  $C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  par morceaux, et une fonction  $u$  tel que le couple  $(u, \sigma)$  soit le minimum, sur un certain ensemble, de la fonctionnelle d'énergie  $G$  définie par :

$$G(u, \sigma) = \int_{\Omega} |u - g|^2 \, dx + \int_{\Omega \setminus \sigma} |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^1(\sigma),$$

où  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  est la mesure de Hausdorff de dimension 1, qui peut être comprise comme la longueur du contour.

Analysons les différents termes de cette fonctionnelle d'énergie :

1. Le premier terme :

$$\int_{\Omega} |u - g|^2 \, dx$$

force la fonction cible  $u$  à approcher l'image  $g$ .

2. Le second terme :

$$\int_{\Omega \setminus \sigma} |\nabla u|^2 \, dx$$

demande à ce que  $u$  – et par conséquent la fonction de contraste  $g$  qu'elle approche – ne varie pas beaucoup sur chaque composante connexe de  $\Omega \setminus \sigma$ .

3. Le troisième terme :

$$\mathcal{H}^1(\sigma)$$

force l'ensemble  $\sigma$  qui partitionne  $\Omega$  à être le plus court possible (et, en particulier, à être de dimension de Hausdorff plus petite que 1).

On notera que si un seul des membres de la fonctionnelle est absent, la fonctionnelle admet un minimum trivial.

Ce problème de minimisation est difficile, et cette difficulté est en grande partie due à l'inconnue  $\sigma$  qui est dure à manipuler. Si on met de côté les questions de régularité, on cherche un ensemble  $\sigma$  fermé, de dimension 1, qui minimise la fonctionnelle  $G$ . Notons  $\mathcal{F}(\Omega)$  l'ensemble des fermés de  $\Omega$ . On peut le munir de la distance de Hausdorff :

$$\forall X, Y \in \mathcal{F}(\Omega), \quad d(X, Y) = \max \left( \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right).$$

L'ensemble des sous-ensembles fermés de  $\Omega$  muni de la distance de Hausdorff,  $(\mathcal{F}(\Omega), d)$  est compact, selon un résultat classique dû à Blaschke [RKW79]. Cependant, la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  n'est pas semi-continue inférieurement pour cette topologie, ce qui rend délicat l'utilisation des méthodes classiques de calcul des variations.

La même année, De Giorgi, Carriero et Leacci prouvent l'existence d'un minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah. Ils choisissent de se débarrasser de l'inconnue  $\sigma$ , difficile à maîtriser par des techniques variationnelles classiques, et de la remplacer par l'ensemble des sauts de  $u$ , noté  $S_u$ . Pour ce faire, ils changent d'espace variationnel, et remplacent l'espace

de Sobolev par l'espace  $SBV(\Omega)$  des fonctions spéciales à variations bornées sur  $\Omega$ , introduit dans le paragraphe suivant.

Nous résumons ici très brièvement le contexte des résultats de De Giorgi, Carriero et Leacci. Le lecteur intéressé est invité à se reporter à [AFP00] pour un exposé détaillé. Rappelons qu'une fonction  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée lorsque  $u \in L^1(\Omega)$  et sa dérivée distributionnelle  $Du$  est une mesure à variation totale bornée. On note  $u \in BV(\Omega)$ . Un théorème dû à De Giorgi [AFP00] donne alors une représentation de  $Du$  :

$$Du = \nabla_a u \, dx + (u^+ - u^-) \nu(x) \mathcal{H}^1|_{S_u} + C_u,$$

où  $\nabla_a u$  est la partie de  $Du$  qui est continue par rapport à la mesure de Lebesgue,  $\mathcal{H}^1|_{S_u}$  est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de  $u$ , noté  $S_u$ , qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables,  $\nu(x)$  est la normale à  $S_u$  et  $u^+$  et  $u^-$  sont les traces de  $u$  de part et d'autres de  $S_u$ . Enfin  $C_u$  est la partie de Cantor de  $Du$ , qui est une mesure qui est singulière par rapport à  $dx$  et par rapport à  $\mathcal{H}^1$ .

L'espace des fonctions spéciales à variations bornées, noté  $SBV(\Omega)$ , est le sous ensemble de  $BV(\Omega)$  tel que la partie de cantor  $C_u$  de  $u \in SBV(\Omega)$  soit nulle. L'espace  $SBV(\Omega)$  possède de bonnes propriétés de compacité. Grâce à cela, on prouve rapidement le théorème suivant, et on renvoi encore à [AFP00] pour une preuve.

**Théorème 1.3.1.** *La fonctionnelle d'énergie faible  $G_f$  définie par :*

$$G_f(u) = \int_{\Omega} |u - g|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla_a u|^2 \, dx + \mathcal{H}^1(S_u),$$

*admet un minimum sur  $SBV(\Omega)$ .*

Le théorème suivant, très technique, conclut la preuve.

**Théorème 1.3.2** (De Giorgi, Carriero, Leacci (89)). *Soit  $u$  un minimiseur de la fonctionnelle faible  $G_f$ . Le couple  $(u, \overline{S_u})$  est un minimiseur de la fonctionnelle :*

$$G(u, \sigma) = \int_{\Omega \setminus \sigma} |\nabla_a u|^2 \, dx + \int_{\Omega} |u - g|^2 + \mathcal{H}^1(\sigma)$$

*de Mumford-Shah.*

### 1.3.2 Une formulation variationnelle de la théorie de la fracture fragile

Quelques années après le résultat de De Giorgi, Carriero, et Leacci, Francfort et Marigo publient dans [FM98] leur formulation variationnelle du problème de fracture fragile.

Commençons par préciser les données du problème. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert connexe, dont la frontière  $\partial\Omega$  est suffisamment lisse. Pour les applications pratiques, on pourra se restreindre aux cas  $1 \leq N \leq 3$ . On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où  $\partial\Omega_D$  et  $\partial\Omega_N$  sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté  $U_D$ , tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique  $f_v$ . On suppose que  $\Omega$  est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée  $W$ . Ainsi, lorsque le matériau  $\Omega$  subit – sans fracture – une déformation  $\varphi = u + \text{Id}$  suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a noté  $u$  le champ de déplacement du matériau, et  $e(u)$  son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture  $\sigma$  :

$$E_{\text{el}}(\sigma) = \inf_{u \in V_{U_D, \sigma}} \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a défini l'espace fonctionnel  $V_{U_D, \sigma}$  par :

$$V_{U_D, \sigma} = \{u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^N) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D\}.$$

Francfort et Marigo proposent l'énergie de fracture suivante :

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire  $k(x)$  traduit la ténacité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau.

Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$E_{\text{tot}}(\sigma) = E_{\text{el}}(\sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma).$$

Les deux auteurs proposent, dans [FM98], le problème de minimisation suivant.

**Modèle 1.3.2.** Une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle d'énergie :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx + \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

où  $\sigma$  est une union dénombrable d'ensembles rectifiables.

On remarque de grandes similarités entre le modèle de fracture de Francfort et Marigo et le modèle de segmentation d'images de Mumford-Shah. La plus grande différence concerne le terme de contrainte. Dans le modèle de Mumford-Shah, on force l'inconnue  $u$  à être proche de l'image initiale  $g$  par le terme  $\int_{\Omega} |u - g|^2 \, dx$ . Ici, Francfort et Marigo remplacent ce terme par une contrainte au bord du domaine, en restreignant l'ensemble des déplacements admissibles aux fonctions dont la trace vaut  $U_D$  sur la partie  $\partial\Omega_D$  du bord.

Notons une seconde similarité entre les deux modèles. Le modèle de Mumford-Shah fait intervenir la norme  $L^2$  du gradient de  $u$ , alors que le modèle de fracture est plus général et fait intervenir le tenseur de déformation  $e(u)$ , au moyen du potentiel  $W$ . Cependant, moyennant quelques hypothèses physiques, on peut se ramener à la norme  $L^2$  du gradient de  $u$ .

**Théorème 1.3.3** (Modèle de Francfort et Marigo – cas antiplan). *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un matériau élastique connexe, homogène et isotrope, et qui subit de petits déplacements. On suppose de plus qu'il est soumis à un déplacement antiplan, c'est à dire que le champ de déplacement  $u$  est porté par un vecteur constant. Alors, l'énergie totale s'écrit :*

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^2(\sigma).$$

*Démonstration.* On suppose que le matériau est homogène et isotrope, et on fait l'hypothèse qu'il subit de petits déplacements. L'énergie élastique de  $\Omega$  s'écrit donc :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} A e(u) : e(u) \, dx,$$

où  $A$  est le tenseur de lamé du matériau, de constantes de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

Supposons de plus que l'on est dans un cas d'un mouvement dit antiplan, c'est à dire que le champ de déplacement  $u$  est porté par un vecteur constant. On peut écrire, à translation et rotation près :

$$u(x) = u(x)e_z,$$

d'où

$$\begin{aligned} e(u)(x) &= \frac{1}{2} (\nabla u^T + \nabla u) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_x u(x) & \partial_y u(x) & \partial_z u(x) \\ \partial_y u(x) & 0 & 0 \\ \partial_z u(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$A e(u) : e(u) = (\lambda + 2\mu)(\partial_x u)^2 + \mu(\partial_y u)^2 + \mu(\partial_z u)^2.$$

Si on pose :

$$\psi : (x, y, z) \mapsto (\sqrt{(\lambda + 2\mu)}x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z),$$

on a :

$$|\nabla u \circ \psi(x)|^2 = A e(u) : e(u)(x).$$

Pour résoudre notre problème de fracture, il nous suffit alors de minimiser sur  $C(U_D, \sigma)$  la fonctionnelle :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \int_{\Omega \setminus \sigma} |\nabla u|^2 \, dx + \mathcal{H}^2(\sigma).$$

□

Nous pouvons faire plusieurs remarques. Tout d'abord, ce modèle ne prend pas en compte les conditions classiques de contact au bord de la fracture, et ce pour des raisons de régularité (voir la discussion dans [FM98]). De plus, ce modèle ne prend pas en compte les conditions de traction au bord. En effet, l'ajout d'un terme de traction sur une partie du bord rend l'énergie élastique non bornée inférieurement (voir [FM98]).

Dans leur article, Francfort et Marigo proposent un modèle d'évolution de fracture dans un cadre quasi-statique.



**Définition 1.3.1** (Évolution discrète). Supposons la fracture initiale  $\sigma_0$  donnée, et  $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$  une suite de chargements. Une solution  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq p}$  du problème d'évolution discret vérifie :

1.  $\sigma_i \subset \sigma_{i+1}$  pour tout  $1 \leq i \leq p-1$ ;
2.  $E_{\text{tot}}(\sigma_i, U_i) \leq E_{\text{tot}}(\sigma, U_i)$  pour toute fracture  $\sigma_i \subset \sigma$ .

**Définition 1.3.2** (Évolution continue). Supposons la fracture initiale  $\sigma_0$  donnée, et  $U_D(t) = tU_D$  un chargement qui dépend du temps. Une solution  $\sigma(t)$  du problème d'évolution continue vérifie :

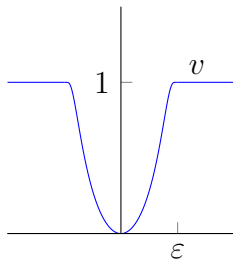
1.  $\sigma(0) = \sigma_0$ ;
2.  $\sigma(t)$  est une fonction croissante;
3.  $E_{\text{tot}}(\sigma(t), U_D(t)) \leq E_{\text{tot}}(\sigma, U_D(t))$  pour toute fracture  $\bigcup_{s < t} \sigma(s) \subset \sigma$ ;
4.  $E_{\text{tot}}(\sigma(t), U_D(t)) \leq E_{\text{tot}}(\sigma(s), U_D(s))$  pour tout  $s < t$ .

## 1.4 Problèmes à frontière libre et méthodes numériques

### 1.4.1 La méthode à champ de phase

On cherche maintenant à approcher les versions faibles des fonctionnelles  $G_f$  et  $E_{\text{tot}}$ , par des fonctionnelles définies sur des espaces de Sobolev classiques. On présente un résultat de  $\Gamma$ -convergence (voir annexe D). Ainsi, grâce au résultat de convergence des minimums, en minimisant ces fonctionnelles approchées, on obtiendra un profil approché de la fissure.

Dans le domaine de la segmentation d'images, L. Ambrosio et V. M. Tortorelli construisent une suite de fonctionnelles  $G_\varepsilon$ , et prouvent un tel théorème de  $\Gamma$ -convergence vers la fonctionnelle limite  $G_f$  (voir [AT90]). Ils proposent une approximation par champ de phase, c'est à dire qu'il remplacent l'inconnue  $\sigma$  par une suite de fonctions lisses  $v_\varepsilon$  :



$$v_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \text{dist}(x, \sigma) > \varepsilon \\ 0 & \text{si } x \in \sigma \end{cases}$$

Dans le cadre de la modélisation de la fracture, cet argument est rédigé par B. Bourdin dans [Bou98]. Il s'est inspiré de la preuve de Ambrosio et Tortorelli, et il a remplacé la fonctionnelle de Mumford-Shah par la fonctionnelle élastique. Cependant, l'adaptation de ce résultat aux conditions de bord mixte rend les principaux arguments difficiles à lire.

On préfère donc donner directement la preuve de Ambrosio et Tortorelli, qui montrent que la fonctionnelle :

$$G_f(u) = \int_{\Omega} |u - g|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \mathcal{H}^{n-1}(S_u)$$

peut être approchée par la suite de fonctionnelles définies sur  $H^1(\Omega, \mathbb{R}) \times H^1(\Omega, \mathbb{R})$  par :

$$G_{\varepsilon}(u, v) = \int_{\Omega} \left( |u - g|^2 + (v^2 + \eta_{\varepsilon}) |\nabla u|^2 + \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx,$$

où  $\eta_{\varepsilon} = o(\varepsilon)$ . Détaillons les termes de la fonctionnelle approchée  $G_{\varepsilon}$ .

1. Le premier terme :

$$\int_{\Omega} |u - g|^2 \, dx$$

force l'inconnue  $u$  à approcher la fonction cible  $g$ .

2. Le second terme :

$$\int_{\Omega} (v^2 + \eta_{\varepsilon}) |\nabla u|^2 \, dx$$

est une modification du terme en gradient de  $u$ . La présence de la fonction  $v$  contre-balance l'explosion du gradient de  $u$  proche de la fracture. La présence de  $\eta_{\varepsilon}$  empêche l'hypo-coercivité de la fonctionnelle.

3. Le troisième terme :

$$\int_{\Omega} \varepsilon |\nabla v|^2 \, dx$$

force la régularité de la fonction  $v$ .

4. Le quatrième terme :

$$\int_{\Omega} \frac{(v - 1)^2}{4\varepsilon} \, dx$$

force la fonction  $v$  à valoir 1 presque partout.

On a le théorème suivant.

**Théorème 1.4.1** (Gamma-convergence). *La suite de fonctionnelles  $(G_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle limite  $G_f$ , pour la topologie  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .*

## 1.4.2 Quelques études numériques

Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat de  $\Gamma$ -convergence sont disponibles dans la littérature. Le lecteur intéressé pourra consulter, par exemple, [BFM00; Bou07; AMM09; AGD15; ZHLZ18; Nag+19]. On reproduit ici trois résultats numériques de croissance (figure 1.1), de bifurcation (figure 1.2) et de branchement (figure 1.3) du phénomène de fracture. Tous ces résultats sont tirés de [Nag+19].

## 1.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons exposé rapidement différents modèles de fracture fragile. Nous avons commencé par présenter les travaux de Griffith qui a été le premier à modéliser le phénomène de fracture fragile comme une compétition entre l'énergie élastique et l'énergie requise pour la création d'une surface au sein du matériau. Notons que ce modèle est utilisé, encore aujourd'hui, par les ingénieurs et les glaciologues. Cependant, il souffre d'imperfections notables : il est incapable de prévoir la nucléation de fractures, ainsi que le chemin pris par celles-ci.

Puis, nous avons présenté le modèle de Francfort et Marigo [FM98], qui est un modèle variationnel et repose sur la minimisation de la fonctionnelle d'énergie totale – une fonctionnelle qui est similaire à la fonctionnelle de Mumford-Shah initialement utilisée dans le domaine de traitement d'images. Ce modèle variationnel contourne les limitations du critère classique, et permet de modéliser le phénomène de nucléation de fracture, ainsi que de prévoir le chemin emprunté par celle-ci.

Enfin, nous avons décrit la méthode numérique classique pour minimiser la fonctionnelle d'énergie totale. Cette minimisation se fait en régularisant la fonction indicatrice de la fracture. Plus précisément, on introduit une suite de fonctionnelles lissées, et on montre la  $\Gamma$ -convergence de ces fonctionnelles vers la fonctionnelle de Mumford-Shah. Notons que ce type de méthode numérique nécessite l'utilisation d'un maillage fin du matériau à modéliser.

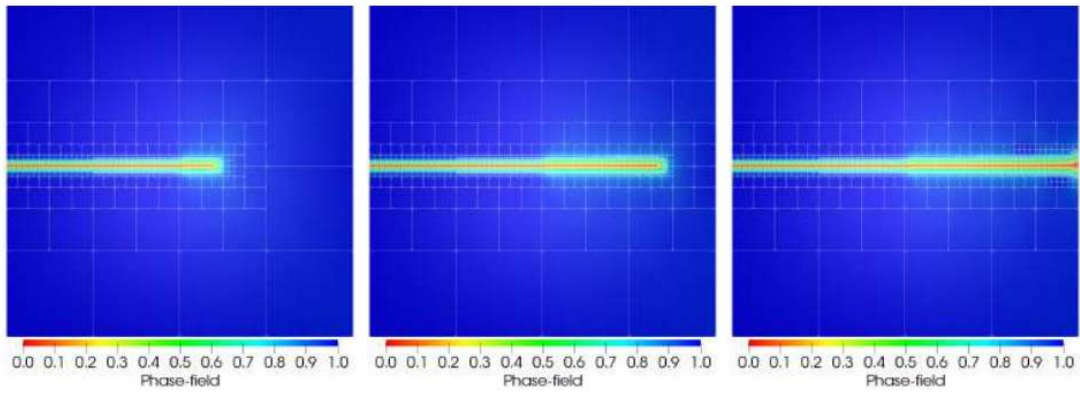


FIG. 1.1 : Croissance d'une fracture - Modèle Phase Field

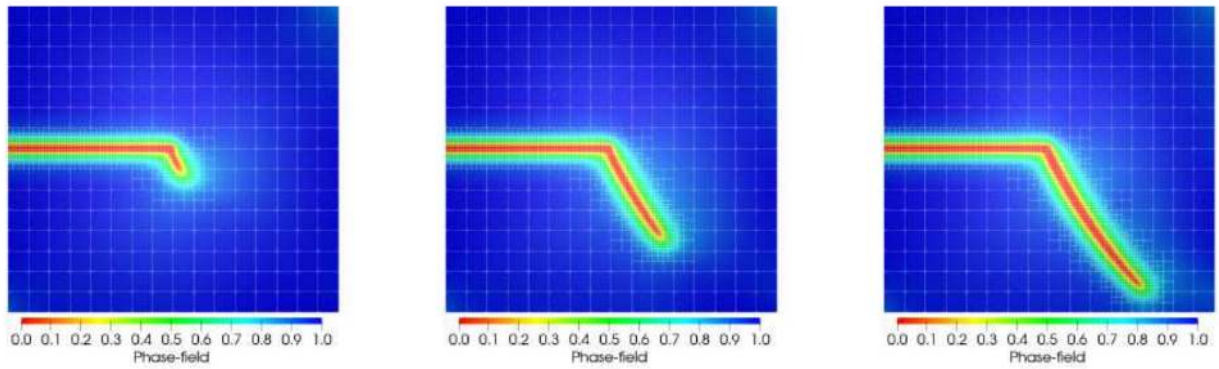


FIG. 1.2 : Bifurcation d'une fracture - Modèle Phase Field



FIG. 1.3 : Branchement d'une fracture - Modèle Phase Field

## CHAPITRE 2

---

### Un modèle de fracture variationnel et efficace

---

#### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	46
2.2	Description du modèle . . . . .	47
2.2.1	Un modèle de fracture statique . . . . .	47
2.2.2	Un modèle de fracture quasi-statique . . . . .	50
2.3	Résultats théoriques sur le modèle . . . . .	51
2.3.1	Résultat d'existence à fracture fixée . . . . .	51
2.3.2	Résultat d'existence partiel pour le modèle statique . . . . .	53
2.3.3	Modèle quasi-statique et auto-intersection . . . . .	62
2.4	Une méthode d'éléments finis adaptée . . . . .	63
2.4.1	Discrétisation classique . . . . .	63
2.4.2	Discrétisation de l'ouvert fracturé . . . . .	64
2.4.3	Convergence vers le modèle statique . . . . .	65
2.4.4	Discrétisation de l'évolution quasi-statique . . . . .	69
2.5	Résultats numériques . . . . .	70
2.5.1	Implémentation . . . . .	70
2.5.2	Simulations . . . . .	71
2.6	Conclusion . . . . .	73

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle variationnel et efficace de la fracture fragile d'un floe de glace soumis à un déplacement de son bord, dans le but de l'inclure dans notre modèle granulaire d'évolution de la zone marginale des glaces, *i.e.* la zone de transition entre l'océan et la banquise, développé par M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss [RLW15].

Nous détaillons maintenant les principales hypothèses physiques utilisées par notre modèle. Nous supposons qu'un floe de glace se comporte comme un matériau élastique homogène et isotrope. Nous supposons également qu'il ne subit que de petits déplacements. Rappelons qu'un floe de glace est un bloc de glace caractérisé par une épaisseur négligeable devant son étendue surfacique ( $\sim 1$  m, resp.  $> 10$  m), nous le modélisons donc comme un matériau élastique bi-dimensionnel.

Nous rappelons maintenant brièvement les avantages des méthodes variationnelles en théorie de la fracture fragile, et nous renvoyons à l'état de l'art sur le sujet, qui fait l'objet du chapitre 1, pour plus de détails. La théorie classique de la fracture fragile s'appuie sur une idée de A. A. Griffith [Gri21], qui est le premier à avoir modélisé de façon pertinente le processus de fracturation comme la compétition entre l'énergie élastique du matériau, qui décroît lorsqu'il se fracture, et l'énergie de surface qui, elle, croît lorsque la surface du matériau augmente. La théorie variationnelle de la fracture, introduite par G. A. Francfort et J.-J. Marigo [FM98], transpose cette idée dans le cadre mathématique adéquat. Cette formulation permet, contrairement au modèle classique, de modéliser le processus de nucléation de fractures et de prévoir le chemin suivi par celles-ci.

Les méthodes de simulation utilisées habituellement en théorie variationnelle de la fracture ne sont pas adaptées à notre étude. En effet, elles reposent sur l'introduction et la minimisation d'une fonctionnelle lissée qui nécessite un maillage fin du floe de glace à modéliser. Ces méthodes, dites à champ de phase, sont donc coûteuses en temps de calcul et ne sont pas applicables à notre modèle granulaire de la **MIZ** qui gère les collisions d'un grand nombre de floes de glace.

Nous proposons donc de minimiser directement la fonctionnelle d'énergie totale, sans recourir à l'introduction de fonctionnelles lissées. Pour ce faire, nous introduisons une hypothèse restrictive sur la géométrie des fractures admissibles, que l'on suppose être des segments. Cette hypothèse, qui peut sembler crue, est courante dans les modèles de fracture actuellement utilisés en glaciologie, comme par exemple dans [LLL15]. De plus, nous introduisons un problème d'évolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du floe. Les fractures obtenues par ce problème d'évolution sont ainsi des lignes brisées.

Dans une première partie, nous présentons le modèle de fracture. Nous procédons à quelques rappels d'élasticité linéaire dans un cadre bi-dimensionnel, et nous renvoyons à l'annexe B pour plus de détails. Nous présentons également notre modèle de fracture fragile, dans un premier temps dans sa variante statique, puis dans le cas où le chargement dépend du temps sous une hypothèse de quasi-staticité.

Dans une seconde partie, nous prouvons un résultat partiel d'existence de solutions au problème statique, dans le cas où l'ouvert n'est pas encore fracturé. Pour ce faire, nous faisons

appel à des outils d'optimisation de forme, comme la convergence de Mosco [BB05].

Dans une troisième partie, nous proposons une méthode numérique adaptée au problème étudié. Plus précisément, nous présentons la méthode de type éléments finis utilisée. Cette méthode est dite *meshless* car l'ensemble discrétisé des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé. Nous prouvons également la convergence de cette méthode numérique via un résultat de  $\Gamma$ -convergence.

Enfin, dans une dernière partie, nous décrivons notre implémentation du modèle proposé. Nous présentons également quelques résultats de simulation obtenus grâce à cette implémentation.

## 2.2 Description du modèle

### 2.2.1 Un modèle de fracture statique

On représente un floe de glace par un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , que l'on suppose convexe et dont la frontière est  $C^1$  par morceaux et lipschitzienne. On suppose de plus qu'il se comporte comme un matériau élastique, homogène et isotrope, et qu'il n'est soumis qu'à de petites déformations. D'après l'annexe B, pour tout déplacement  $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , le floe de glace vérifie la loi de Hooke :

$$\sigma(u) = A e(u),$$

où l'on a noté  $e(u)$  le gradient symétrique de  $u$ ,  $\sigma(u)$  le champ des contraintes du floe, et  $A$  le tenseur de Lamé du matériau. On rappelle l'expression de  $A$  en fonction des constantes de Lamé :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad A e = \lambda \operatorname{tr}(e) I_2 + 2\mu e,$$

où l'on a noté  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > 0$  la première, respectivement la seconde, constante de Lamé. On rappelle que, lorsque  $\lambda > 0$ , le tenseur  $A$  vérifie la condition d'ellipticité :

$$\forall e \in M_2^{\operatorname{sym}}(\mathbb{R}), \quad \alpha_1 |e|^2 \leq A e : e \leq \alpha_2 |e|^2,$$

pour des constantes  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ .

Soit maintenant  $\partial\Omega_D \subset \partial\Omega$  la partie du bord du floe sur laquelle on impose un déplacement du bord (*i.e.* le bord de Dirichlet). On suppose de plus que c'est un ouvert de  $\partial\Omega$ , qui possède au moins deux composantes connexes, et on pose  $\partial\Omega_D = \partial\Omega_{D,1} \cup \partial\Omega_{D,2}$ . On applique un déplacement  $U_D \in H^{1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$  sur  $\partial\Omega_D$ . Dans le cadre purement élastique (*i.e.* lorsque le floe n'a pas été fracturé), le champ de déplacement  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  minimise l'énergie élastique :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} A e(u) : e(u) \, dx,$$

pour l'ensemble des déplacements admissibles  $A_{\text{adm}} = \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D\}$ .

Décrivons maintenant notre modèle de fracture. Le phénomène de fracture est compris, depuis les travaux de A. A. Griffith [Gri21], comme une compétition entre l'énergie élastique du matériau  $\Omega$  et l'énergie de fracture, reliée à l'énergie nécessaire pour briser les liens



atomiques. Le modèle de G. A. Francfort et J.-J. Marigo [FM98] propose de reformuler cette idée dans un cadre variationnel, où un couple déplacement-fracture  $(u, \sigma)$  solution du problème de fracture fragile est un minimum global de l'énergie totale du matériau :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = E_{\text{el}}(u, \sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma),$$

où  $E_{\text{el}}$  est l'énergie élastique, et  $E_{\text{frac}}$  l'énergie surfacique de Griffith.

L'énergie surfacique de Griffith s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{\text{frac}} : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\mapsto k\mathcal{H}^1(\sigma), \end{aligned}$$

avec  $k$  la ténacité du matériau,  $\mathcal{H}^1(\cdot)$  la mesure de Hausdorff de dimension 1 – *i.e.* la longueur de la fracture, et  $\sigma$  la fracture appartenant à un espace variationnel bien choisi, noté  $\Sigma$ .

Dans le choix de l'espace variationnel des fractures admissibles, notre approche est plus restrictive que celle de Francfort et Marigo. Ils minimisent l'énergie totale parmi toutes les courbes rectifiables incluses dans l'ouvert  $\Omega$ . Dans notre cas, nous minimisons l'énergie totale parmi tous les segments orientés partant de la frontière :

$$\Sigma = \{[a, b] \subset \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega}, ]a, b[ \subset \Omega\}.$$

Les notations  $[a, b]$  et  $]a, b[$  sont définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(1-t)a + tb, t \in [0, 1]\}, \\ ]a, b[ &= \{(1-t)a + tb, t \in ]0, 1[ \}, \end{aligned}$$

et l'on notera la fin d'un segment orienté par :

$$\text{end}([a, b]) = b = \text{end}(]a, b[).$$

On notera également  $\nu$  la normale au segment  $[a, b]$  telle que la base orthogonale  $(b - a, \nu)$  de  $\mathbb{R}^2$  soit directe.

Ainsi, dans notre processus de minimisation, on introduit une restriction géométrique sur l'ensemble des fractures admissibles. On rappelle que cette restriction est essentielle dans notre modèle, puisque nous souhaitons minimiser directement la fonctionnelle d'énergie totale, pour obtenir un calcul rapide du lieu de la fracture. De plus, on rappelle au lecteur que cette hypothèse est courante dans le cadre de la théorie classique, *i.e.* non variationnelle, de Griffith (voir par exemple [LLL15]). Enfin, dans la section 2.2.2, on décrira un modèle d'évolution quasi-statique qui nous permettra d'obtenir une classe plus grande de géométries : l'ensemble des lignes brisées.

Lorsque l'on fixe la fracture  $\sigma$ , l'énergie élastique prend la forme :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(\cdot, \sigma) : A_\sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

où l'ensemble des déplacements admissibles  $A_\sigma$  est :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma, \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma \right\},$$

avec  $u^+$  et  $u^-$  les traces de  $u$  respectivement dans la direction de  $\nu$  et  $-\nu$  (le lecteur est invité à lire la section 2.3.1 pour une définition plus précise). On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma$$

sur les lèvres de la fracture, qui interdit l'interpénétration au bord de la fracture. On renvoie le lecteur à la monographie [KS04] pour plus de détails. La présence de cette condition de non interpénétration est remarquable, puisqu'elle est rarement présente dans les modèles variationnels à cause du manque de régularité qui empêche de définir l'opérateur de trace sur les lèvres de la fracture. (voir par exemple [FM98]).

L'énergie totale s'écrit donc :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, \sigma) &\mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma) \end{aligned}$$

et une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple  $(u, \sigma)$  qui vérifie :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Dans la section 2.3.2, on prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation. On note qu'il n'y a pas d'unicité et c'est d'ailleurs le comportement physique attendu. Le lecteur est invité à se représenter un fil élastique, que l'on tend à partir de ses deux extrémités. Lorsque la tension est suffisamment forte, l'élastique casse selon une section transversale quelconque. La proposition 3.2 de [FM98] traduit cette intuition en termes mathématiques, et on la rappelle brièvement ici dans le cadre bi-dimensionnel.

**Proposition 2.2.1** (Non-unicité des minimiseurs). *Soit  $R = [0, L_1] \times [0, L_2]$  un matériau élastique rectangulaire, de ténacité  $k$  et de tenseur de Lamé  $A$ . On applique les conditions au bord suivante :*

$$\begin{cases} u(0, y) = (0, y) \text{ sur } \{0\} \times [0, L_2], \\ u(L, y) = (t, y) \text{ sur } \{L_1\} \times [0, L_2], \\ \sigma(x, y) \cdot n = 0 \text{ sur } [0, L_1] \times \{0\} \cup [0, L_1] \times \{L_2\}. \end{cases}$$

*Il existe alors une constante  $t^* > 0$  telle que :*

1. *pour  $t < t^*$ , le matériau demeure intact ;*
2. *pour  $t > t^*$ , toute solution consiste en une fracture transversale qui traverse le matériau.*

### 2.2.2 Un modèle de fracture quasi-statique

La restriction géométrique sur le chemin suivi par la fracture, alliée à une hypothèse de minimisation globale (i.e. de minimisation sur l'ensemble des fractures admissibles, sans restriction de taille) peut amener à des résultats qui ne représentent pas la réalité physique. Pour compenser ces hypothèses fortes, on introduit un problème d'évolution quasi-statique. On étudie un problème de chargement monotone, en introduisant une dépendance temporelle dans la condition de Dirichlet :

$$U_D(t) = tU_D.$$

On se place dans un cadre quasi-statique et on suppose qu'à chaque pas de temps, le floe de glace est dans un état d'équilibre élastique. Cette hypothèse est raisonnable, car la vitesse de collision des floes, et donc la vitesse de déplacement du bord d'un floe pendant la percussion, est négligeable devant les vitesses de fracturation et de déplacement des ondes élastiques.

À chaque pas de temps, on peut ainsi appliquer le modèle statique décrit dans la section 2.2.1. On obtient donc une fracture dont la géométrie est celle d'une ligne brisée. Lorsque l'on fait tendre le pas de temps vers 0, on obtient une évolution temporelle continue, dont les solutions sont des courbes rectifiables (voir par exemple [MT02 ; Cha03]).

On note  $\bar{\Sigma}$  l'ensemble des lignes brisées de  $\Omega$ , sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également  $\text{end}(\sigma)$  la fin d'une ligne brisée  $\sigma \in \bar{\Sigma}$ .

On définit maintenant, pour toute ligne brisée  $\sigma \in \bar{\Sigma}$  l'ensemble des fractures admissibles partant de  $\sigma$  :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \{ \sigma \cup [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \mid a = \text{end}(\sigma), b \in \bar{\Omega}, ]a, b[ \subset \Omega \setminus \sigma \}.$$

On définit également l'espace des déplacements admissibles associé :

$$A_{t,\sigma} = \{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \mid u = tU_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma, \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma \},$$

pour tout temps  $t \in [0, 1]$  et pour toute ligne brisée  $\sigma$ .

On considère maintenant, à la manière de [FM98], le problème d'évolution discret suivant.

**Définition 2.2.1** (Évolution discrète). Soit  $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_p = 1$  une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$ . Une évolution discrète est une suite finie de couples admissibles  $((u_0, \sigma_0), \dots, (u_p, \sigma_p))$  qui vérifie :

1.  $(u_0, \sigma_0) = (0 \cdot \text{Id}_\Omega, \emptyset)$  ;
2.  $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \sigma_i \in \Sigma_{\sigma_{i-1}}$  ;
3.  $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall \sigma \in \Sigma_{\sigma_{i-1}}, \forall u \in A_{t_i, \sigma}, \quad E_{\text{tot}}(u_i, \sigma_i) \leq E_{\text{tot}}(u, \sigma)$ .

On introduit également le problème d'évolution continue suivant.

**Définition 2.2.2** (Évolution continue). Une évolution continue  $(u, \sigma) : t \mapsto (u(t), \sigma(t))$  vérifie :

1.  $\sigma(0) = \emptyset$ ;
2.  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\sigma(t)$  est une courbe rectifiable;
3.  $\forall t_1 < t_2$ ,  $\sigma(t_1) \subset \sigma(t_2)$ ;
4.  $\inf_{u \in A_{t, \sigma(t)}} E_{\text{tot}}(u, \sigma(t)) \leq \inf_{u \in A_{t, \sigma}} E_{\text{tot}}(u, \sigma)$  pour toute courbe rectifiable  $\sigma \supset \bigcup_{s < t} \sigma(s)$ .

Le problème d'évolution continue admet des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets. On renvoie aux articles [MT02 ; Cha03] pour une preuve. On note que ces auteurs travaillent dans le cadre général de Francfort and Marigo, *i.e.* sans hypothèse sur la géométrie des fractures. Ils obtiennent également des propriétés supplémentaires, vérifiées par les solutions du problème continu, comme par exemple une formule de balance d'énergie pour l'énergie totale.

## 2.3 Résultats théoriques sur le modèle

### 2.3.1 Résultat d'existence à fracture fixée

Dans cette section, on adapte à notre contexte un résultat classique des méthodes variationnelles en élasticité linéaire. On prouve que, pour toute fracture admissible  $\sigma \in \bar{\Sigma}$ , l'énergie élastique a un unique minimiseur  $u_\sigma$  sur  $A_\sigma$  :

$$E_{\text{tot}}(u_\sigma, \sigma) = \inf_{v \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(v, \sigma).$$

Commençons par étudier les propriétés de l'espace fonctionnel  $A_\sigma$ . Le lecteur attentif remarquera que, pour une fracture non-traversante, le domaine  $\Omega \setminus \sigma$  est singulier, et non Lipschitz régulier. C'est dérangent, car beaucoup de résultats classiques sur les espaces de Sobolev ne sont valables que lorsque le domaine est suffisamment régulier. Cependant, cette singularité n'est qu'apparente, et le remède classique est d'étendre la fracture  $\sigma$  en une fracture traversante, qui sépare les deux composantes connexes  $\partial\Omega_{D,1}$  et  $\partial\Omega_{D,2}$ , et d'appliquer des conditions de transmission sur l'extension (voir par exemple [KS04]).

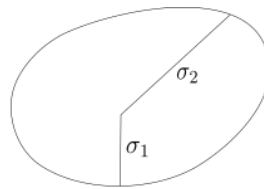


FIG. 2.1 : Fracture extension

Comme dans la figure 2.1, on renote notre fracture  $\sigma$  par  $\sigma_1$ , et on l'étend par un segment  $\sigma_2$  telle que la ligne brisée :

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

soit traversante. On peut alors décomposer le domaine de la manière suivante :

$$\Omega = \Omega^+ \cup \sigma \cup \Omega^-,$$

avec  $\Omega^+, \Omega^-$  qui sont respectivement les parties de  $\Omega$  dans la direction de  $\nu$ , respectivement de  $-\nu$ . On rappelle que la normale  $\nu$  a été définie précédemment. Les notations  $u^+$  et  $u^-$ , qui ont été introduites précédemment, sont maintenant bien définies :

$$u^+ = u|_{\Omega^+}, \quad u^- = u|_{\Omega^-},$$

tout comme leurs traces sur  $\sigma$ . On redéfinit maintenant l'ensemble des fonctions admissibles :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \mid \begin{aligned} &u = U_D \text{ on } \partial\Omega_D \setminus \sigma, \\ &(u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ on } \sigma_1, \\ &u^+ = u^- \text{ on } \sigma_2 \end{aligned} \right\}.$$

L'espace variationnel  $A_\sigma$  est bien défini, et on obtient le théorème suivant.

**Théorème 2.3.1.** *Pour toute fracture admissible  $\sigma \in \Sigma$ , l'énergie élastique a un minimiseur  $u_\sigma$  sur  $A_\sigma$  :*

$$E_{\text{tot}}(u_\sigma, \sigma) = \inf_{v \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(v, \sigma).$$

De plus, si la fracture  $\sigma$  vérifie l'une des conditions suivantes :

1. la fracture  $\sigma$  n'est pas traversante,
2. la fracture  $\sigma$  est traversante et sépare la condition de Dirichlet en deux,

ce minimiseur est unique.

*Démonstration.* Commençons par prouver le résultat pour le cas où la fracture  $\sigma$  est traversante et sépare la condition de Dirichlet en deux. L'existence d'une unique solution au problème de minimisation découle d'une application de la théorie des inégalités variationnelles. En effet, pour tout  $\sigma \in \bar{\Sigma}$ , la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} a(u, v) : A_\sigma \times A_\sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(v) \, dx, \end{aligned}$$

est continue, symétrique et coercive. La coercivité provient de la présence des conditions de Dirichlet sur au moins deux composantes connexes du bord et de l'inégalité de Korn (voir [Cia94]). De plus, l'espace fonctionnel  $A_\sigma$  est un sous-ensemble convexe de  $H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2)$ . Le théorème de Lions-Stampacchia (voir [LS67]) assure l'existence et l'unicité du minimiseur  $u_\sigma$  de  $E_{\text{tot}}(\cdot, \sigma)$ . De plus, ce théorème donne une caractérisation du minimum  $u_\sigma$  comme le seul élément  $u$  de  $A_\sigma$  qui vérifie :

$$\forall v \in A_\sigma, \quad \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(v - u) \, dx \geq 0.$$

Dans le cas où la fracture n'est pas traversante, on peut la prolonger en une fracture qui est traversante et qui sépare la condition de Dirichlet en deux.

Enfin, dans le dernier cas, lorsque  $\sigma$  est traversante mais ne sépare pas les conditions de Dirichlet, pour la partie de  $\Omega \setminus \sigma$  qui contient la condition de Dirichlet, on procède comme dans le cas précédent. Pour la partie de  $\Omega \setminus \sigma$  qui ne contient pas la condition de Dirichlet, un déplacement solide minimise l'énergie élastique et appartient à l'espace fonctionnel, du moins si il déplace ce morceau de manière à respecter la condition de non interpénétration.  $\square$

### 2.3.2 Résultat d'existence partiel pour le modèle statique

Dans cette section, on montre que le problème statique a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, *i.e.* que l'infimum :

$$\underline{E} = \inf_{\sigma \in \Sigma} \inf_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma)$$

est atteint par au moins un couple  $(u, \sigma) \in \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\}$ .

On commence par étudier l'espace variationnel  $\Sigma$ . On le muni de la distance de Hausdorff :

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma, \quad d_H(\sigma_1, \sigma_2) = \max \left( \sup_{x \in \sigma_1} \inf_{y \in \sigma_2} \text{dist}(x, y), \sup_{y \in \sigma_2} \inf_{x \in \sigma_1} \text{dist}(x, y) \right).$$

**Proposition 2.3.1.** *L'espace variationnel  $\Sigma$  est fermé pour la distance de Hausdorff.*

*Démonstration.* Soit  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  une suite de fractures qui tend, pour la distance de Hausdorff, vers une fracture limite  $\sigma$ . On note :

$$\sigma = [a, b],$$

avec  $a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega}$ . Comme  $\Omega$  est un ouvert convexe, on a :

$$\sigma \subset \overline{\Omega}, \quad ]a, b[ \subset \Omega,$$

et  $\Sigma$  est fermé pour la distance de Hausdorff.  $\square$

On en déduit, d'après le théorème de Blaschke [RKW79], que  $\Sigma$  est compact pour la distance de Hausdorff. De plus, la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^1(\cdot)$ , qui représente la longueur de la fracture, est séquentiellement continue sur  $\Sigma$ .

Soit maintenant une suite  $(u_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de couples admissibles, qui converge vers l'infimum :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\text{tot}}(u_n, \sigma_n) = \underline{E}.$$

La suite  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a donc un point d'accumulation dans  $\Sigma$ . Cependant, comme les déplacements  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'appartiennent pas au même espace, on aura besoin d'un nouvel outil d'analyse fonctionnelle pour obtenir des résultats de convergence. On introduit donc la convergence de Mosco, qui est une notion classique en optimisation de formes (voir par exemple [Mos69; BB05]).

On commence par montrer qu'il existe des transformations suffisamment lisses de  $\Omega \setminus \sigma$  dans les  $\Omega \setminus \sigma_n$ , et on donne quelques formules de changement de variables. Ces transformations nous seront utiles pour prouver la convergence de Mosco, ainsi que pour appliquer l'inégalité de Korn sur le même ouvert  $\Omega \setminus \sigma$ .

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  une suite de fractures traversantes qui converge, pour la distance de Hausdorff, vers une fracture limite  $\sigma \in \Sigma$ . Il existe une suite d'applications  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$  telle que :*

1.  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un homéomorphisme de  $\bar{\Omega}$ ,
2.  $\Phi_n(\sigma) = \sigma_n$ ,
3.  $\Phi_n|_{\Omega \setminus \sigma}$  est un difféomorphisme de  $\Omega \setminus \sigma$  sur  $\Omega \setminus \sigma_n$ ,
4.  $\|\nabla \Phi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^4)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,
5.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x \in \Omega \setminus \sigma \mid \Phi_n(x) \neq x\} \subset \mathcal{V}_{\varepsilon_n}(\sigma)$ ,

avec  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers 0, et  $\mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)$  le voisinage tubulaire de  $\sigma$  de rayon  $\varepsilon$ .

*Démonstration.* On commence par construire un homéomorphisme du plan, noté  $\Phi_n^\sigma$ , difféomorphe sur  $\Omega \setminus \sigma$ .

Pour se faire, on note  $\mathcal{C}_\sigma^+$  et  $\mathcal{C}_\sigma^-$  les cônes engendrés par  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\sigma^+ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x - c) \cdot \nu_1 \geq 0, (x - c) \cdot \nu_2 \geq 0\}, \\ \mathcal{C}_\sigma^- &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x - c) \cdot \nu_1 \leq 0, (x - c) \cdot \nu_2 \leq 0\}, \end{aligned}$$

avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les deux segments de la fracture,  $\nu_1, \nu_2$  les deux vecteurs normaux aux deux segments de la fracture, et  $c$  le point d'intersection entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

On note  $\Phi_n^{\sigma,+}$  l'homéomorphisme qui envoie  $\mathcal{C}_\sigma^+$  sur  $\mathcal{C}_{\sigma_n}^+$ , le cône engendré par  $\sigma_n$ . On le construit comme la composée d'une translation, d'une rotation et d'une dilatation de l'angle :

$$re^{i\theta} \mapsto re^{i\frac{\theta}{\beta}\alpha_n},$$

avec  $\alpha_n$  l'angle intérieur au cône  $\mathcal{C}_{\sigma_n}^+$ , et  $\beta$  l'angle intérieur au cône  $\mathcal{C}_\sigma^+$ .

On construit de la même manière  $\Phi_n^{\sigma,-}$ . Ces deux homéomorphismes sont égaux sur  $\partial\mathcal{C}_\sigma$  :

$$\Phi_n^{\sigma,+}|_{\partial\mathcal{C}_\sigma} = \Phi_n^{\sigma,-}|_{\partial\mathcal{C}_\sigma},$$

et on note  $\Phi_n^\sigma$  leur recollement, qui est difféomorphe sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\mathcal{C}_\sigma$ .

On écrit :

$$\Phi_n^\sigma = \text{Id} + \varphi_n^\sigma,$$

et comme  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sigma$ , on en déduit que :

$$\|\nabla \varphi_n^\sigma\|_{W^{1,\infty}(\Omega \setminus \sigma)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Construisons maintenant un difféomorphisme  $\Phi_n^b$  sur un voisinage ouvert  $V$  de  $\text{end}(\sigma)$  qui envoie  $\sigma \cap V$  sur  $\sigma_n \cap V$ . Pour ce faire on note  $\tau$  un homéomorphisme :

$$\tau: V \cap \overline{\Omega} \rightarrow [0, \eta[ \times ]-\eta, \eta[$$

qui redresse localement la frontière :

$$\tau(\partial\Omega \cap V) = \{0\} \times ]-\eta, \eta[,$$

et qui est de plus difféomorphe sur  $V \cap \Omega$ .

Rappelons que  $\partial\Omega$  est lipschitzienne et  $C^1$  par morceaux. La construction de  $\tau$  est triviale si  $\partial\Omega$  est lisse au voisinage de  $\text{end}(\sigma)$ . Sinon, il existe un difféomorphisme sur  $V$  qui envoie  $V \cap \partial\Omega$  sur un cône d'angle intérieur  $\gamma$ , que l'on redresse avec l'homéomorphisme du cône  $re^{i\theta} \mapsto re^{i\theta \frac{\pi}{\gamma}}$ .

D'après le théorème d'inversion locale, il existe des fonctions lisses  $f$  et  $f_n$  définies sur  $[0, \eta[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\tau(\sigma \cap V) = f([0, \eta[), \quad \tau(\sigma_n \cap V) = f_n([0, \eta[).$$

On note également :

$$g_n(x, y) = (x, y) + (0, f_n(x) - f(x)).$$

On construit finalement  $\Phi_n^b$  de la manière suivante :

$$\Phi_n^b = \tau^{-1} \circ g_n \circ \tau.$$

Puis, on note :

$$\Phi_n^b = \text{Id} + \varphi_n^b,$$

et, comme  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\sigma$ , on a :

$$\|\nabla \varphi_n^b\|_{W^{1,\infty}(V \cap \Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On note encore  $\rho$  une fonction lisse, à support compact dans  $V$ , et qui vaut 1 sur un voisinage de  $\text{end}(\sigma)$ . Alors la fonction recollée :

$$\Phi_n^c = \text{Id} + \rho \varphi_n^b + (1 - \rho) \varphi_n^\sigma$$

est définie sur le plan et vérifie :  $\Phi_n^c(\sigma) = \sigma_n$  (par convexité de la droite), et est injective à la frontière pour  $n$  suffisamment grand.

Soit finalement  $\rho_1$  une fonction lisse à support compact dans  $] -1, 1[$ , et qui vaut 1 dans un voisinage de 0, ainsi que  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs qui tend vers 0. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \rho_n(x) = \rho_1(\varepsilon_n^{-1} \text{dist}(x, \sigma)).$$

Enfin, on note :

$$\Phi_n = \text{Id} + \rho \rho_n \varphi_n^b + (1 - \rho) \rho_n \varphi_n^\sigma.$$



On a :

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} &\leq \|\nabla\rho\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \|\nabla\rho_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \|\varphi_n^b - \varphi_n^\sigma\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \\ &\quad + \|\nabla\varphi_n^b\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} + \|\nabla\varphi_n^\sigma\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)}. \end{aligned}$$

On en déduit que, si  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend suffisamment lentement vers 0 :

$$\|\nabla\Phi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour  $n$  suffisamment grand,  $\Phi_n$  est localement injectif, et est donc un homéomorphisme de  $\overline{\Omega}$  par le théorème de Hadamard-Caccioppoli [DGZ94].  $\square$

**Lemme 2.3.2.** *Soit  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\sigma$ ,  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme dans le lemme 2.3.1. Soit encore  $\Gamma \subset \partial\Omega_D$  une partie mesurable de la frontière, telle que  $d_H(\Gamma, \sigma) > 0$ . Alors, on a à partir d'un certain rang :*

$$H_\Gamma^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) = \Phi_n^* (H_\Gamma^1(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^2)),$$

avec :

$$H_\Gamma^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) = \{u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ on } \Gamma\},$$

et  $\Phi_n^* (H_\Gamma^1(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^2))$  l'image de  $H_\Gamma^1(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^2)$  par le tiré en arrière  $\Phi_n^*$  :

$$\Phi_n^* (H_\Gamma^1(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^2)) = \{u \circ \Phi_n, u \in H_\Gamma^1(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^2)\}.$$

*Démonstration.* D'après la formule de changement de variable lipschitzien, appliquée dans les deux sens, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) = \Phi_n^* (H^1(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^2)).$$

De plus, on a :

$$d_H(\Gamma, \sigma) > 0.$$

On en déduit qu'il existe un voisinage  $V$  de  $\Gamma$  dans  $\overline{\Omega}$  tel que l'on ait, à partir d'un certain rang :

$$\Phi_n|_V = \Psi_n|_V = \text{Id}_V.$$

On en déduit le résultat.  $\square$

**Lemme 2.3.3.** *Soit  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^2$  tels qu'il existe un difféomorphisme  $\Phi$  de  $\Omega_1$  dans  $\Omega_2$  d'inverse  $\Psi$ . Soit encore  $u$  dans  $H^1(\Omega_2, \mathbb{R}^2)$ . On a :*

1.  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\Omega_1)} \|\nabla\Psi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\Omega_1)}$
2.  $\|e(u \circ \Phi)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|\nabla\Psi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \|e(u)\|_{L^2(\Omega_2)} \\ + \|\nabla\Phi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \|\nabla\Psi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_2)}.$

*Démonstration.* Commençons par prouver la première inégalité. On a :

$$\begin{aligned}\nabla u(x) &= \nabla \Psi(x) \nabla(u \circ \Phi)(\Psi(x)) \\ &= \nabla \Phi^{-1}(y) \nabla(u \circ \Phi)(y),\end{aligned}$$

avec  $x = \Phi(y)$ . Puis :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} |\nabla u(x)|^2 dx &= \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi^{-1}(y) \nabla(u \circ \Phi)(y)|^2 |\det \nabla \Phi(y)| dy \\ &\leq \int_{\Omega_1} |\nabla(u \circ \Phi)(y)|^2 |\nabla \Phi^{-1}(y)|^2 |\det \nabla \Phi(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla \Psi\|_{L^\infty(\Omega_1)}^2 \|\nabla \Phi\|_{L^\infty(\Omega_2)}^2 \|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\Omega_1)}^2,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité suivante, valable en dimension 2 :

$$|\det A| \leq \frac{1}{2} |A|^2.$$

Prouvons maintenant la seconde inégalité. Pour ce faire, on pose  $\Phi = id + \varphi$ . On a alors :

$$e(u \circ \Phi) = e(u) \circ \Phi + \text{sym}(\nabla \varphi(\nabla u \circ \Phi)).$$

D'où :

$$|e(u \circ \Phi)|^2 \leq 2 |e(u) \circ \Phi|^2 + 2 |\nabla \varphi|^2 |\nabla u \circ \Phi|^2.$$

Puis, par changement de variable, on a :

$$\begin{aligned}\|e(u \circ \Phi)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq \|\nabla \Psi\|_{L^\infty(\Omega_2)}^2 \|e(u) \circ \Phi\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \\ &\quad + \|\nabla \Psi\|_{L^\infty(\Omega_1)}^2 \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\Omega_2)}^2 \|\nabla u \circ \Phi\|_{L^2(\Omega_1)}^2.\end{aligned}$$

□

On montre maintenant la convergence de Mosco de la suite d'espaces  $(A_{\sigma_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Pour ce faire, il est nécessaire de les injecter dans le même espace fonctionnel :

$$V = L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2.$$

On a ainsi le résultat suivant.

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $\sigma$  une ligne brisée traversante. L'ensemble  $A_\sigma$  s'injecte de manière continue dans  $V$  :*

$$\begin{aligned}A_\sigma &\rightarrow V \\ u &\mapsto (u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^+}, u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^-}, \nabla u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^+}, \nabla u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^-})\end{aligned}$$

Avec cette inclusion, on prouve le résultat de convergence de Mosco suivant.

**Théorème 2.3.2.** Soit  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  une suite de fractures droites admissibles qui vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(\sigma_n, \sigma) = 0,$$

pour une fracture limite  $\sigma \in \Sigma$ . La suite d'espaces fonctionnels  $A_{\sigma_n}$  converge, au sens de Mosco, vers  $A_\sigma$  :

1. pour toute suite  $u_n \in A_{\sigma_n}$  qui converge faiblement dans  $V$  vers une fonction  $u$ , on a  $u \in A_\sigma$ ,
2. pour toute fonction  $u \in A_\sigma$ , il existe une suite  $u_n \in A_{\sigma_n}$ , telle que  $u_n$  converge fortement vers  $u$  dans  $V$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 2.3.1, la transformation de  $\Omega \setminus \sigma$  est lisse, i.e. il existe une suite d'homéomorphismes bilipschitziens  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Omega$  qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi_n(\sigma_n) = \sigma,$$

et telle que, si l'on pose  $K_n = \{x \in \Omega \mid \Phi_n(x) \neq x\}$ , on a :

$$|K_n| \rightarrow 0.$$

On commence par prouver la première propriété. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $V$  qui converge faiblement vers une fonction  $u \in V$ , et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in A_{\sigma_n}.$$

La suite  $(u_n \circ \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $A_\sigma$ , donc converge faiblement vers une fonction  $\bar{u} \in A_\sigma$ .

On prouve que  $\bar{u} = u$ , et donc que  $u \in A_\sigma$ . Pour ce faire, on montre que :

$$\|u_n \circ \Phi_n - u_n\|_V \rightarrow 0.$$

On a :

$$\|u_n \circ \Phi_n - u_n\|_V = \int_{K_n} (u_n \circ \Phi_n - u_n)^2 \, dx + \int_{K_n} (\nabla(u_n \circ \Phi_n) - \nabla u_n)^2 \, dx.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que :

$$\|u_n \circ \Phi_n - u_n\|_V \rightarrow 0.$$

La preuve de la seconde propriété est similaire. Soit  $u \in A_\sigma$ . On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u \circ \Phi_n^{-1}.$$

On a alors :

$$K_n = \{\Phi_n^{-1} \neq \text{Id}_\Omega\}.$$

On en déduit, de la même manière que précédemment, que :

$$\|u_n - u\|_V \rightarrow 0.$$

□

Fort de ce résultat, on prouve un théorème d'existence de minimiseur de l'énergie totale dans le cas, nous le rappelons, où le floe de glace n'est pas encore fracturé.

**Proposition 2.3.3.** *L'infimum  $\underline{E}$  de  $E_{\text{tot}}$  est atteint.*

*Démonstration.* Soit  $(u_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de couples déplacement-fracture admissibles, qui converge vers le minimum :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\text{tot}}(u_n, \sigma_n) = \underline{E}.$$

Comme l'espace variationnel  $\Sigma$  est compact pour la distance de Hausdorff, à extraction près, il existe une fracture admissible  $\sigma \in \Sigma$  telle que :

$$d_H(\sigma_n, \sigma) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème 2.3.2, on a la convergence au sens de Mosco suivante :

$$A_{\sigma_n} \rightarrow A_\sigma.$$

On souhaite maintenant montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $V$ . On procède par disjonction de cas sur la position de la fracture limite  $\sigma$ , en distinguant les cas suivants :

1.  $\sigma$  n'est pas traversante ;
2.  $\sigma$  est traversante et sépare les conditions de Dirichlet en deux :

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega_D \cap \partial(\Omega \setminus \sigma)^+) > 0, \quad \mathcal{H}^1(\partial\Omega_D \cap \partial(\Omega \setminus \sigma)^-) > 0;$$

3.  $\sigma$  est traversante et ne sépare pas les conditions de Dirichlet en deux.

Pour le premier cas, on peut se ramener au second cas en prolongeant la fracture  $\sigma$  et les fractures  $\sigma_n$  de manière à garder la convergence et à séparer les deux composantes de Dirichlet.

Traisons maintenant le second cas. Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on a encore :

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega_D \cap \partial(\Omega \setminus \sigma)^+ \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)) > 0, \quad \mathcal{H}^1(\partial\Omega_D \cap \partial(\Omega \setminus \sigma)^- \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)) > 0;$$

où  $\mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)$  est le voisinage tubulaire de taille  $\varepsilon$  de  $\sigma$ .

De plus, comme la suite  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\sigma$  pour  $n$  suffisamment grand, on a toujours :

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega_D \cap \partial(\Omega \setminus \sigma_n)^+ \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)) > 0, \quad \mathcal{H}^1(\partial\Omega_D \cap \partial(\Omega \setminus \sigma_n)^- \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)) > 0.$$

On note  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de difféomorphismes de  $\Omega \setminus \sigma$  donnée par le lemme 2.3.1. On a, à partir d'un certain rang :

$$\Phi_n|_{\bar{\Omega} \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)} = \text{Id}.$$

On a donc, d'après le lemme 2.3.2, à partir d'un certain rang :

$$H^1_{\partial\Omega_D \setminus \mathcal{V}_\varepsilon}(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) = \Phi_n^*(H^1_{\partial\Omega_D \setminus \mathcal{V}_\varepsilon}(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^2)),$$

D'après l'inégalité de Korn dans  $H^1_{\partial\Omega_D \setminus \mathcal{V}_\varepsilon(\sigma)}(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2)$ , on a :

$$\|\nabla(u_n \circ \Phi_n)\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma)} \leq C_K \|e(u_n \circ \Phi_n)\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma)}.$$

Enfin, d'après le lemme 2.3.3, on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma_n)} &\leq \|\nabla \Phi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \|\nabla \Psi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma_n)} \|\nabla(u_n \circ \Phi_n)\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma)} \\ &\leq C_K \|\nabla \Phi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \|\nabla \Psi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma_n)} \|e(u_n \circ \Phi_n)\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma)} \\ &\leq C_K \|\nabla \Phi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma)} \|\nabla \Psi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma_n)}^2 \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma_n)} \\ &\quad + C_K \|\nabla \Phi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^4)} \|\nabla \Psi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma_n)}^2 \|\nabla(u_n)\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma_n)}. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2.3.1, on a :

$$\|\nabla \Phi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^4)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a de plus :

$$\|\nabla \Phi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^4)} = \|\nabla \Phi_n\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^4)} \|\nabla \Psi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^4)},$$

et donc :

$$\|\nabla \Psi_n - \text{Id}\|_{L^\infty(\Omega \setminus \sigma_n, \mathbb{R}^4)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que l'on a, à partir d'un certain rang :

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma_n)} \leq C_K \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega \setminus \sigma_n)},$$

et on conclut que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $V$ .

Le troisième cas se traite de manière similaire au second cas, en remarquant que l'on peut appliquer la méthode du second cas sur la partie connexe de  $\Omega \setminus \sigma$  dont la frontière contient  $\partial\Omega_D$ , et continuer la preuve sur cette partie uniquement. Sur l'autre partie, on connaît déjà des minimiseurs de la fonctionnelle limite (voir la preuve du théorème 2.3.1).

On en déduit que la suite  $u_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega \setminus \sigma_n)$ , et dans  $V$ , et donc qu'il existe une fonction  $u \in V$  telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } V.$$

par la première propriété de la convergence de Mosco, on conclut que  $u \in A_\sigma$ .

On souhaite maintenant montrer que  $u$  est la solution du problème de minimisation de l'énergie élastique à fracture fixée  $\sigma$ , *i.e.* que :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \inf_{v \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(v, \sigma).$$

On ne décrit que le cas où la fracture sépare les conditions de Dirichlet, les autres cas se traitant de manière similaire.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_{\sigma_n}$  la solution du problème élastique à fracture fixée  $\sigma_n$ , *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_{\text{tot}}(u_{\sigma_n}, \sigma_n) = \inf_{u \in A_{\sigma_n}} E_{\text{tot}}(u, \sigma_n).$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_{\text{tot}}(u_{\sigma_n}, \sigma_n) \leq E_{\text{tot}}(u_n, \sigma_n),$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\text{tot}}(u_{\sigma_n}, \sigma_n) = \underline{E}.$$

De plus, on peut montrer facilement que  $(u_{\sigma_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $V$  et converge faiblement vers  $u \in A_\sigma$ .

On rappelle que  $u \in A_\sigma$  est le minimiseur de  $E_{\text{tot}}(\cdot, \sigma)$  si elle vérifie :

$$\forall \varphi \in A_\sigma, \quad \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(\varphi - u) \, dx \geq 0.$$

Soit maintenant  $\varphi \in A_\sigma$ . D'après la seconde propriété de la convergence de Mosco, il existe une suite  $\varphi_n \in A_{\sigma_n}$  telle que :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } V.$$

En utilisant les fonctions test  $\varphi_n$  dans les inégalités variationnelles satisfaites par les  $u_{\sigma_n}$ , on a :

$$\int_{\Omega \setminus \sigma_n} Ae(u_{\sigma_n}) : e(\varphi_n - u_{\sigma_n}) \, dx \geq 0.$$

On peut passer à la limite, par convergence faible des  $u_{\sigma_n}$ , et convergence forte des  $\varphi_n$  :

$$\int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(\varphi - u) \, dx \geq 0.$$

Cette inégalité est valable pour toute fonction test  $\varphi \in A_\sigma$ , et on a :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \inf_{v \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(v, \sigma).$$

On conclut par semi-continuité inférieure de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} E : L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(G_u)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(G_u^2) \, dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(G_v)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(G_v^2) \, dx, \end{aligned}$$

avec  $G_u = \frac{1}{2}(u + u^t)$ . La semi-continuité inférieure est une conséquence d'un résultat de [Bra02], pour les fonctionnelles sous forme intégrale dont l'intégrande est continue et convexe.

On en déduit :

$$E(\nabla u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^+}, \nabla u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^-}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(\nabla u_n \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma_n)^+}, \nabla u_n \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma_n)^-}),$$

et :

$$E_{\text{el}}(u_\sigma, \sigma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_{\text{el}}(u_{\sigma_n}, \sigma_n).$$

En utilisant la continuité séquentielle de  $E_{\text{frac}}$ , on a :

$$\underline{E} = \liminf_{n \rightarrow \infty} E_{\text{tot}}(u_n, \sigma_n) \geq E(u, \sigma),$$

et donc :

$$\underline{E} = E(u, \sigma).$$

Le couple  $(u, \sigma)$  est donc un minimum de la fonctionnelle  $E_{\text{tot}}$ . □

**Remarque 2.3.1.** On peut également utiliser un contrôle uniforme de la constante de Korn. Soit  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fracture admissibles qui converge vers  $\sigma \in \Sigma$ . On suppose que  $\sigma$  sépare la condition de Dirichlet. Le théorème 1 de [KO89a] (voir aussi [KO89b]) permet d'obtenir l'estimation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in H^1((\Omega \setminus \sigma_n)^+, \mathbb{R}^2), \quad \|\nabla u\|_{L^2((\Omega \setminus \sigma_n)^+)} \leq C \|e(u)\|_{L^2((\Omega \setminus \sigma_n)^+)} + \|\nabla(u)\|_{L^2(Q)},$$

avec  $Q$  une boule incluse dans tous les  $(\Omega \setminus \sigma_n)^+$ , et la constante  $C$  qui ne dépend pas de  $n$ .

Puis, on applique l'inégalité de Korn classique sur une partie  $V \subset \Omega$  qui contient  $Q$ , telle que  $V \subset (\Omega \setminus \sigma_n)^+$  pour tout entier  $n$ , et dont la frontière contienne une partie de mesure non nulle de  $\partial\Omega_D$  :

$$\mu(\partial\Omega_D \cap \partial V) > 0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in H^1_{\partial V \cap \partial\Omega_D}((\Omega \setminus \sigma_n)^+, \mathbb{R}^2), \quad \|\nabla u\|_{L^2(Q)} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(V)} \\ &\leq C_K \|e(u)\|_{L^2(V)} \\ &\leq C_K \|e(u)\|_{L^2((\Omega \setminus \sigma_n)^+)}. \end{aligned}$$

### 2.3.3 Modèle quasi-statique et auto-intersection

Pour le modèle de fracture quasi-statique, passé l'étape de nucléation, lorsque l'ouvert est déjà fracturé par une fracture  $\gamma \in \overline{\Sigma}$ , nous n'avons pas réussi à obtenir de résultat d'existence. Le théorème 2.3.2 se généralise facilement au cas d'une suite de fractures  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma_\gamma$  qui converge vers une fracture limite  $\sigma \in \Sigma_\gamma$ . Cependant, l'espace variationnel  $\Sigma_\gamma$  n'est pas fermé. En effet, à la limite, la ligne brisée  $\sigma$  peut avoir un point d'auto-intersection.

Notre sens physique nous invite à poser la conjecture suivante.

**Conjecture 2.3.1.** *Soit  $\sigma_1 \in \overline{\Sigma_\gamma}$  une ligne brisée qui possède un point d'auto-intersection. Alors, il existe une fracture admissible  $\sigma_2 \in \Sigma_\gamma$  telle que :*

$$\inf_{u \in A_{\sigma_2}} E_{tot}(u, \sigma_2) < \inf_{u \in A_{\sigma_1}} E_{tot}(u, \sigma_1).$$

La difficulté de proposer une preuve pour ce résultat provient de :

1. l'hypothèse de minimisation globale utilisée ;
2. la difficulté d'évaluer le module de continuité de  $\sigma \mapsto \inf_{u \in A_\sigma} E_{el}(u, \sigma)$ .

Si nous parvenions à démontrer cette conjecture, nous aurions un résultat d'existence pour notre modèle de fracture fragile.

## 2.4 Une méthode d'éléments finis adaptée

Dans cette section, on présente la méthode numérique utilisée, formulée avec les outils développés dans [Lab06]. Notre approche est basée sur une modification de la méthode aux éléments finis adaptée aux domaines fracturés. C'est une méthode de type *meshless*, *i.e.* la position de la fracture est indépendante de la précision du maillage. Notre approche est similaire à l'approche développée dans [BB99 ; MDB99].

On propose, pour approcher le lieu de la fracture, une recherche exhaustive parmi un ensemble discret de fractures admissibles. On rappelle que, à chaque pas de temps, l'ensemble des fractures admissibles est composé de segments. Ainsi, pour l'initialisation de la fracture, l'ensemble des fractures admissibles est décrit par trois paramètres réels. Puis, pour les étapes suivantes, la discrétisation est faite sur un ensemble de deux paramètres réels.

### 2.4.1 Discrétisation classique

Dans cette section, on rappelle brièvement les résultats classiques de la méthode des éléments finis, principalement pour rendre nos notations explicites. On note  $W(\Omega) = H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  l'espace fonctionnel, et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire classique sur  $W(\Omega)$ . On maille l'ouvert  $\Omega$  avec un maillage  $\tau$ , et on renvoie à l'annexe A pour plus de détails.

On note également  $e_{\tau,p}$  l'élément  $P1$  du maillage  $\tau$  au noeud  $p \in \tau_0$ . On rappelle que c'est la fonction affine qui vérifie :

$$e_{\tau,p}(p) = 1, \quad \forall q \in \tau_0 \setminus \{p\}, e_{\tau,p}(q) = 0.$$

On note également  $(u_x, u_y)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  :

$$u_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note enfin  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  l'espace des éléments finis sur le maillage  $\tau$ , muni du produit scalaire :

$$W(\tau, \mathbb{R}^2) = \left( \text{span}_{p \in \tau_0} (e_{\tau,p} u_x, e_{\tau,p} u_y), \langle \cdot, \cdot \rangle \right).$$

On définit l'injection  $Q_\tau : H_1(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow W(\tau, \mathbb{R}^2)$  qui vérifie :

$$Q_\tau(u) = \sum_{p \in \tau_0} \langle u \cdot u_x, e_{\tau,p} \rangle e_{\tau,p} u_x + \sum_{p \in \tau_0} \langle u \cdot u_y, e_{\tau,p} \rangle e_{\tau,p} u_y,$$

et la projection  $P_\tau : H_1(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow W(\tau, \mathbb{R}^2)$  :

$$P_\tau(u) = Q_{\tau|W(\tau, \mathbb{R}^2)}^{-1} \circ Q_\tau.$$

On renvoie également à l'annexe A pour les définitions des notions de convergence d'une suite de maillage de  $\Omega$  et de régularité d'une suite de maillages. Le résultat classique de la théorie des éléments finis est le suivant :



**Théorème 2.4.1.** *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite régulière de maillages, qui converge vers  $\Omega$ . On a :*

$$\sup_{u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \frac{\|P_{\tau_n}(u) - u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)}}{\|u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)}} = O(h(\tau_n)).$$

**Corollaire 2.4.1.** *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite régulière de maillages, qui converge vers  $\Omega$ . On a :*

$$\forall u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad \|P_{\tau_n}(u) - u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)} \rightarrow 0.$$

## 2.4.2 Discrétisation de l'ouvert fracturé

Maintenant que le cadre est établi, on introduit la discrétisation des espaces fonctionnels  $W(\Omega \setminus \sigma) = H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2)$ . On commence par définir quelques notions géométriques. On note  $T_{\tau, \sigma}$  l'ensemble des triangles qui intersectent la fracture  $\sigma$  :

$$T_{\tau, \sigma} = \{\omega \in \tau_2 \mid \bar{\omega} \cap \sigma \neq \emptyset\}.$$

On note encore  $T_{\tau, \sigma}^1$  l'ensemble des triangles de  $T_{\tau, \sigma}$  qui contiennent le point  $\text{end}(\sigma)$ , et  $T_{\tau, \sigma}^2$  son complémentaire :

$$T_{\tau, \sigma}^1 = \{\omega \in T_{\tau, \sigma} \mid \text{end}(\sigma) \in \bar{\omega}\}, \quad T_{\tau, \sigma}^2 = T_{\tau, \sigma} \setminus T_{\tau, \sigma}^1.$$

On note enfin :

$$\nu_{\tau, \sigma} = \{p \in \tau_0 \mid p \in \sigma\} \cup \{p \in \tau_0 \mid \exists \omega \in T_{\tau, \sigma}, p \in \bar{\omega}\},$$

les noeuds voisins de  $\sigma$  (voir figure 2.2).

Puis, on remaille localement le maillage  $\tau$ , de manière à ce que  $\text{end}(\sigma)$  soit un point du maillage, et on continue à le noter  $\tau$ . Pour tous les triangles  $\omega \in T_{\tau, \sigma}$ , on note  $\omega_+$  et  $\omega_-$  les parties de  $\omega$  qui sont respectivement du coté positif, négatif, de  $\sigma$  (voir la figure 2.3).



FIG. 2.2 : Noeuds voisin

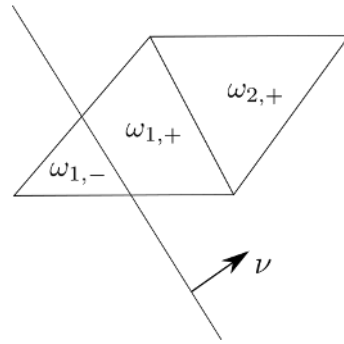


FIG. 2.3 : Triangles fracturés

On commence par décrire la manière dont on traduit la discontinuité le long de  $\sigma$ . Pour tous les noeuds  $p \in \nu_{\tau, \sigma}$ , on remplace la fonction  $e_{\tau, p}$  par deux fonctions  $e_{\tau, p}^+$  et  $e_{\tau, p}^-$  définies par :

$$e_{\tau, p}^+ = e_{\tau, p} \sum_{\omega \in T_{\tau, \sigma}} \mathbb{1}_{\omega^+}, \quad e_{\tau, p}^- = e_{\tau, p} \sum_{\omega \in T_{\tau, \sigma}} \mathbb{1}_{\omega^-}.$$

On définit alors l'espace des fonctions aux éléments finis suivant :

$$W_\sigma(\tau, \mathbb{R}^2) = \text{span}_{p \in \tau_0 \setminus \nu_{\tau, \sigma}} (e_{\tau, p} u_x, e_{\tau, p} u_y) + \text{span}_{p \in \nu_{\tau, \sigma}} (e_{\tau, p}^+ u_x, e_{\tau, p}^- u_x, e_{\tau, p}^+ u_y, e_{\tau, p}^- u_y).$$

On définit l'injection  $Q_{\tau, \sigma}: H_1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \rightarrow W_\sigma(\tau, \mathbb{R}^2)$  par :

$$Q_{\tau, \sigma}(u) = \sum_{p \in \tau_0 \setminus \nu_{\tau, \sigma}} \langle u, e_{\tau, p} \rangle e_{\tau, p} + \sum_{p \in \nu_{\tau, \sigma}} \langle u, e_{\tau, p}^+ \rangle e_{\tau, p}^- + \sum_{p \in \nu_{\tau, \sigma}} \langle u, e_{\tau, p}^- \rangle e_{\tau, p}^+,$$

et la projection  $P_{\tau, \sigma}: H_1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \rightarrow W_\sigma(\tau, \mathbb{R}^2)$  :

$$P_{\tau, \sigma}(u) = Q_{\tau, \sigma}|_{W_\sigma(\tau, \mathbb{R}^2)}^{-1} \circ Q_{\tau, \sigma}.$$

On a alors un résultat similaire au théorème 2.4.1 :

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite des maillages réguliers qui converge vers  $\Omega$ . On a :*

$$\forall u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2), \quad \|P_{\tau_n, \sigma}(u) - u\|_{H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2)} \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Soit  $u \in H^1(\Omega \setminus \sigma)$ . On note :

$$\mathcal{T}_{n, \sigma} = \bigcup_{t \in T_{\tau_n, \sigma}} t.$$

On a :

$$|\mathcal{T}_{n, \sigma}| \rightarrow 0.$$

On en déduit :

$$\int_{\mathcal{T}_{n, \sigma}} \|P_{\tau_n, \sigma}(u) - u\| \, dx \rightarrow 0.$$

De plus, d'après 2.4.1, on a :

$$\int_{\Omega \setminus \mathcal{T}_{n, \sigma}} \|P_{\tau_n, \sigma}(u) - u\| \, dx \rightarrow 0.$$

On en déduit :

$$\|P_{\tau_n, \sigma}(u) - u\|_{H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2)} \rightarrow 0.$$

□

### 2.4.3 Convergence vers le modèle statique

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Sigma)$  une discrétisation de l'espace des fractures admissibles  $\Sigma$ , i.e. telle que :

$$\forall \sigma \in \Sigma, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \inf_{\gamma \in \Sigma_n} d_H(\gamma, \sigma) \leq \varepsilon.$$

Dans cette section, on prouve la convergence de notre méthode numérique. Plus précisément, on montre que, étant donné une suite de solutions numériques  $(u_n, \sigma_n)$  :

$$E_{\text{tot}}(u_n, \sigma_n) = \inf_{\gamma \in \Sigma_n} \inf_{v \in W_\sigma(\tau_n, \mathbb{R}^2)} E_{\text{tot}}(v, \gamma),$$

elle converge, à extraction près, vers un couple limite  $(u, \sigma)$  qui est solution du problème de fracturation :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \inf_{\gamma \in \Sigma} \inf_{v \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(v, \gamma).$$

On commence par poser :

$$V = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_{t,\sigma} \times \{\sigma\},$$

et :

$$V_n = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} P_{\tau_n, \sigma}(A_{t,\sigma}) \times \{\sigma\}.$$

Pour chacune des fonctionnelles  $E_{\text{tot}}, E_{\text{el}}, \mathcal{H}$ , on introduit une version discrétisée :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot},n} : V &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (u, \sigma) &\mapsto \begin{cases} E_{\text{tot}}(u, \sigma) & \text{si } (u, \sigma) \in V_n, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{el},n} : V &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (u, \sigma) &\mapsto \begin{cases} E_{\text{el}}(u, \sigma) & \text{si } (u, \sigma) \in V_n, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^1 : \Sigma &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \sigma &\mapsto \begin{cases} \mathcal{H}^1(\sigma) & \text{si } \sigma \in \Sigma_n, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On prouve la  $\Gamma$ -convergence (voir l'annexe D pour une introduction) de la suite de fonctionnelles  $(E_{\text{tot},n})_{n \in \mathbb{N}}$  vers la fonctionnelle limite  $E_{\text{tot}}$ . Avec une propriété additionnelle – l'équicoercivité de la suite de fonctionnelle – la  $\Gamma$ -convergence nous assure de la convergence des suites de minimiseurs de  $E_{\text{tot},n}$  vers un minimiseur de  $E_{\text{tot}}$ .

On commence par préciser la notion de convergence sur  $V$ .

**Définition 2.4.1** (Convergence dans  $V$ ). On dit qu'une suite  $(u_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  converge vers un  $(u, \sigma) \in V$  si :

1.  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2$ ;
2.  $d_H(\sigma_n, \sigma) \rightarrow 0$ .

**Théorème 2.4.3.** *On a la  $\Gamma$ -convergence :*

$$E_{\text{tot},n} \xrightarrow{\Gamma} E_{\text{tot}},$$

pour la notion de convergence dans  $V$ .

*Démonstration.* On commence par vérifier la semi-continuité inférieure. Soit  $(u, \sigma) \in V$  et  $(u_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  une suite telle que :

$$(u_n, \sigma_n) \rightarrow (u, \sigma) \text{ dans } V.$$

On définit la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} E: L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(G_u)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(G_u^2) \, dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(G_v)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(G_v^2) \, dx, \end{aligned}$$

où  $G_u = \frac{1}{2}(u + u^t)$ .

La fonctionnelle  $E$  est semi-continue inférieurement sur  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2$ . C'est une conséquence du fait que cette fonctionnelle est sous forme intégrale avec une intégrande convexe et continue (voir [Bra02]). De plus, on a :

$$\begin{aligned} E(\nabla u_n \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma_n)^+}, \nabla u_n \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma_n)^-}) &= E_{\text{el}}(u_n, \sigma_n) \\ &\leq E_{\text{el},n}(u_n, \sigma_n). \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(u, \sigma) &= E(\nabla u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^+}, \nabla u \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma)^-}) \\ &\leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} E(\nabla u_n \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma_n)^+}, \nabla u_n \mathbb{1}_{(\Omega \setminus \sigma_n)^-}) \\ &= \liminf_{n \in \mathbb{N}} E_{\text{el}}(u_n, \sigma_n) \\ &\leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} E_{\text{el},n}(u_n, \sigma_n). \end{aligned}$$

De plus, la fonctionnelle  $\mathcal{H}^1$  est continue sur  $\Sigma$ , et on a :

$$\forall \sigma \in \Sigma, \quad \mathcal{H}^1(\sigma) \leq \mathcal{H}_n^1(\sigma).$$

On en déduit :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} E_{\text{tot},n}(u_n, \sigma_n).$$

On montre maintenant la propriété de récupération. Soit  $(u, \sigma) \in V$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\sigma_n \in \Sigma$  tel que :

$$d_H(\sigma_n, \sigma) = \inf_{\gamma \in \Sigma_n} d_H(\gamma, \sigma).$$

On a alors :

$$d_H(\sigma_n, \sigma) \rightarrow 0.$$

D'après le théorème 2.3.2, on a la convergence de Mosco :

$$A_{\sigma_n} \rightarrow A_\sigma.$$

Donc, il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A_{\sigma_n},$$

et telle que :

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2.$$

On définit :

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad v_{n,k} = P_{\tau_k}(u_n).$$

D'après le théorème 2.4.2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n,k} \rightarrow v_n \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2,$$

Par extraction diagonale, il existe une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \in V_n,$$

et qui vérifie :

$$w_n \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)^2 \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^4)^2.$$

On en déduit :

$$E_{\text{tot},n}(u_n, \sigma_n) \rightarrow E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

□

**Proposition 2.4.1.** *La suite de fonctionnelles  $(E_{\text{tot},n})_{n \in \mathbb{N}}$  est équi-coercive sur  $V$ , i.e. telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe un compact  $K_t$  qui vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \{E_{\text{tot},n} \leq t\} \subset K_t.$$

*Démonstration.* On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (u, \sigma) \in V, \quad E_{\text{tot}}(u, \sigma) \leq E_{\text{tot},n}(u, \sigma).$$

Donc il suffit de prouver la coercivité de  $E_{\text{tot}}$ .

Soit  $(u, \sigma) \in V$ . On a :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u, \sigma) &= \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma) \\ &\leq \alpha_2 \int_{\Omega \setminus \sigma} |e(u)|^2 \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma) \\ &\leq \alpha_2 \int_{\Omega \setminus \sigma} |\nabla u|^2 \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma). \end{aligned}$$

Les domaines  $(\Omega \setminus \sigma)_{\sigma \in \Sigma}$  satisfont la propriété d'épsilon-cône. Donc, d'après [BC07], il existe une constante de Poincaré uniforme  $C > 0$  telle que :

$$\int_{\Omega \setminus \sigma} |\nabla u|^2 \, dx \leq C \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2)}.$$

On a :

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) \leq \alpha_2 C \|u\|_{H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2)} + k\mathcal{H}^1(\sigma),$$

et on conclut que la fonctionnelle  $E_{\text{tot}}$  est coercive sur  $V$ .  $\square$

#### 2.4.4 Discrétisation de l'évolution quasi-statique

Dans cette section, on présente un résultat de discrétisation de l'évolution quasi-statique, définie dans la section 2.2.2. On rappelle que l'on veut discrétiser un problème quasi-statique, avec une condition de Dirichlet dépendant du temps de la forme :

$$U_D(t, x) = tU_D(x).$$

Comme la dépendance en temps est linéaire, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.4.2.** *Soit  $t > 0$  un temps, et  $\sigma \in \Sigma$  une fracture. On a :*

$$\inf_{u \in A_{t,\sigma}} E_{\text{el}}(u, \sigma) = t^2 \inf_{u \in A_{1,\sigma}} E_{\text{el}}(u, \sigma),$$

et si  $u \in A_{1,\sigma}$  est un minimiseur de  $E_{\text{el}}(\cdot, \sigma)$  sur  $A_{1,\sigma}$ , alors  $tu$  est un minimiseur de  $E_{\text{el}}(\cdot, \sigma)$  sur  $A_{t,\sigma}$ .

*Démonstration.* L'application :

$$\begin{aligned} \Phi: A_{1,\sigma} &\rightarrow A_{t,\sigma} \\ u &\mapsto tu \end{aligned}$$

est une bijection. Soit  $u \in A_{1,\sigma}$ . On a  $tu \in A_{t,\sigma}$ , et :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(tu, \sigma) &= \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(tu): e(tu) \, dx \\ &= t^2 \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u): e(u) \, dx. \end{aligned}$$

Donc :

$$\inf_{u \in A_{t,\sigma}} E_{\text{el}}(u, \sigma) = t^2 \inf_{u \in A_{1,\sigma}} E_{\text{el}}(u, \sigma),$$

et si  $u \in A_{1,\sigma}$  est un minimiseur de  $E_{\text{el}}(\cdot, \sigma)$  sur  $A_{1,\sigma}$ , alors  $tu$  est un minimiseur de  $E_{\text{el}}(\cdot, \sigma)$  sur  $A_{t,\sigma}$ .  $\square$

Donc, on peut obtenir une valeur exacte du temps d'initialisation du processus de fracture.

**Définition 2.4.2.** Soit  $\sigma \in \Sigma$  une fracture. On appelle :

$$t_\sigma = \sqrt{\frac{E_{\text{frac}}(\sigma)}{\inf_{u \in A_{1,\sigma}} E_{\text{el}}(u, \sigma) - \inf_{u \in A_{1,\emptyset}} E_{\text{el}}(u, \emptyset)}},$$

le temps d'initialisation pour la fracture  $t_\sigma$ .

**Proposition 2.4.3.** On a :

$$\forall t < t_\sigma, \quad \inf_{u \in A_{t,\emptyset}} E_{\text{tot}}(u, \emptyset) < \inf_{u \in A_{t,\sigma}} E_{\text{tot}}(u, \sigma),$$

et :

$$\forall t > t_\sigma, \quad \inf_{u \in A_{t,\emptyset}} E_{\text{tot}}(u, \emptyset) > \inf_{u \in A_{t,\sigma}} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Lors des simulations numériques, l'ensemble  $\Sigma_n$  est fini. D'après la proposition précédente, il existe un temps d'initialisation calculable numériquement :

$$t_{\Sigma_n} = \min_{\sigma \in \Sigma_n} t_\sigma.$$

Nous pouvons donc obtenir directement, lorsque la discrétisation de l'ensemble des fractures est fixée, la discrétisation optimale de l'intervalle de chargement  $[0, 1]$  de la définition 2.2.1.

## 2.5 Résultats numériques

Dans cette section, on présente l'implémentation du modèle de fracture fragile, ainsi que quelques résultats numériques.

### 2.5.1 Implémentation

On décrit rapidement les fonctionnalités du code informatique conçu, et pour plus de détails on renvoie aux figures 2.11 et 2.12, qui reproduisent la page `readme.md`.

L'implémentation du modèle consiste en  $\sim 5000$  lignes de codes écrites en Python. Le code dispose de plusieurs scripts pour en faciliter l'utilisation. Les principaux scripts sont :

1. `broken_mesh_solver.py` : un solveur à fracture fixée,
2. `griffith_solver.py` : le solveur qui implémente l'algorithme de Griffith variationnel,
3. `showcases.py` : un script qui propose plusieurs simulations classiques.

Nous avons utilisé Git comme outil de versionnage du code, et le répertoire Python fait état d'environ 550 commits. Le code est également fourni avec des tests d'intégration qui permettent de s'assurer qu'aucune incompatibilité n'est ajoutée dans le code à chaque modification.

En dehors de la branche `master`, deux autres branches existent. Elles ne sont pas maintenues, mais peuvent fournir une base de travail pour de prochaines études. La branche

cython comporte du code Cython [Beh+11], qui permet la cohabitation de code en Python et en C, pour de meilleures performances. La branche `tip-enrichement` enrichit l'espace de discrétisation utilisé, qui prend en compte la singularité à l'extrémité de la fracture (voir [MDB99] pour la théorie, et [MS10] pour la méthode d'intégration numérique utilisée).

Plusieurs bibliothèques ont été utilisées, et en on liste maintenant les principales. Le code est parallélisé grâce au module Python `multiprocess`. Le solveur est le solveur `sparse` de `scipy` [Vir+20], qui fait appel à la bibliothèque SuperLU [Li05]. Les maillages sont générés à l'aide de Gmsh [GR09].

### 2.5.2 Simulations

On présente maintenant quelques résultats de simulation, pour montrer la validité du modèle. On utilise les constantes d'élasticité suivantes :

$$E = 8.95 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.295,$$

avec  $E$  le module de Young, et  $\nu$  le coefficient de Poisson. On utilisera une ténacité de la glace normalisée à 1.

#### Nucléation d'une fracture

Dans cette première simulation numérique, on mesure l'influence du déplacement au bord du floe sur la nucléation de fractures et on vérifie qu'à déplacement faible, le floe reste intact tandis qu'à déplacement fort le floe casse. On utilise pour ce faire la géométrie carrée, représentée en figure 2.4.

On applique les conditions au bord suivantes :

$$\begin{cases} u_x = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, \\ u_x = t \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, \\ \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{N,1} \cup \partial\Omega_{N,2}, \end{cases}$$

dans un premier temps avec un coefficient de chargement  $t$  petit, puis avec un coefficient de chargement important.

Les résultats sont reproduits en figure 2.5, et on observe que la formulation du critère de Griffith, dans un cadre variationnel, permet de prendre en compte l'initialisation de la fracture si le déplacement du bord est suffisamment important. On rappelle que c'est remarquable, puisque le formalisme initial du critère de Griffith ne permet pas de modéliser l'initiation de fracture, et nécessite de recourir aux micro-défauts du matériau.

#### Précision de la fracture indépendante du maillage

Comme mentionné précédemment, l'un des principaux avantages de notre méthode numérique est que l'ensemble des fractures admissibles est indépendant du maillage. On utilise ici un floe de géométrie papillon, représenté en figure 2.4, pour lequel notre intuition physique nous pousse à croire que la fracture passera par le milieu du floe de glace, *i.e.* la section transverse la plus fine.



On maille donc le floe de géométrie papillon, et on lui applique les conditions au bord suivantes :

$$\begin{cases} u_x = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, \\ u_x = t \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, \\ \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{N,1} \cup \partial\Omega_{N,2}, \end{cases}$$

avec le coefficient de chargement  $t$  suffisamment important pour que le floe casse.

La discrétisation de l'ensemble des fractures admissibles s'écrit :

$$\Sigma_n = \{[a, a + re_\theta] \cap \partial\Omega, a \in F_n, r \in L_n, \theta \in A_n\},$$

avec  $F_n$ ,  $L_n$  et  $A_n$  les discrétisations de la frontière, de la longueur et de la précision angulaire, *i.e.* de  $\partial\Omega$ ,  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{S}_1$ .

On commence par étudier l'influence de la précision au bord du floe. On effectue deux essais de traction avec une précision faible puis forte, et on reproduit les résultats en figure 2.6. Comme attendu, on peut faire varier la précision de la fracture sans remailler le floe de glace. On remarque que, lorsque la précision est élevée, le point d'entrée de la fracture est situé au bon endroit.

On étudie maintenant l'influence de la précision angulaire. On effectue deux essais de traction avec une précision faible puis forte, et on reproduit les résultats en figure 2.7. Comme attendu, on peut faire varier la précision de la fracture sans remailler le floe. On remarque que, lorsque la précision angulaire augmente, la fracture obtenue s'aligne avec la fracture théorique.

### Cas d'un obstacle de ténacité élevé

On montre maintenant un premier cas de simulation pour lequel la fracture du floe n'est pas droite, afin de montrer l'avantage du modèle d'évolution quasistatique. On utilise le floe à géométrie carrée avec une ténacité non uniforme, représenté en figure 2.4.

On fixe sa ténacité à 1 sur la partie grise, et à 2 sur la partie circulaire en bleu. On lui applique les conditions au bord suivantes :

$$\begin{cases} u_x = -ty \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, \\ u_x = ty \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, \\ \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{N,1} \cup \partial\Omega_{N,2}, \end{cases}$$

On s'attend à ce que la fracture contourne l'obstacle de ténacité élevée, et c'est bien le cas.

### Cas d'un défaut circulaire

On détaille maintenant un second cas de simulation pour lequel la fracture du floe n'est pas droite, afin de montrer l'avantage du modèle d'évolution quasistatique. On propose d'effectuer une simulation de traction sur la géométrie avec un défaut circulaire représentée en figure 2.4.

Sur cette géométrie, on applique les conditions au bord suivantes :

$$\begin{cases} u_x = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,1}, \\ u_x = t \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,2}, \\ u_x = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,3}, & u_y = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D,3}, \\ \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{N,1} \cup \partial\Omega_{N,2}, \end{cases}$$

Pour cette géométrie, on modifie légèrement le modèle de fracture présenté dans ce chapitre, en autorisant le floe à se fracturer de l'intérieur. Bien entendu, les résultats d'existence de ce chapitre ne sont plus valides, d'autant plus que le floe utilisé n'est pas convexe. Cependant, les résultats numériques obtenus sont dignes d'intérêt, et similaires à ceux obtenus dans [Bou07], reproduits ici.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle variationnel efficace du phénomène de fracture fragile d'un floe de glace soumis à un déplacement de son bord. Ce modèle s'inscrit dans la lignée des modèles variationnels, introduits en théorie de la fracture fragile par Francfort et Marigo (voir [FM98]), et repose sur la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Il permet donc, contrairement aux modèles classiques, de prévoir l'initialisation de la fracture ainsi que le chemin qu'elle emprunte. Nous avons montré un résultat d'existence sur notre modèle : la fonctionnelle d'énergie totale possède bien un minimum sur l'espace des fractures admissibles utilisé.

De plus, notre modèle est numériquement efficace. L'approximation numérique ne repose pas sur un modèle de type champ de phase, qui requiert un maillage fin du solide à simuler au moins autour de la fracture. Notre modèle repose à la place sur une hypothèse géométrique forte : les fractures se propagent en ligne droite dans les floes de glace. Cette hypothèse, atténuée par l'utilisation d'un chargement quasi-statique, nous permet de minimiser directement la fonctionnelle d'énergie totale, sans faire intervenir la fonctionnelle lissée dite à champ de phase.

Nous avons proposé une méthode numérique de type éléments finis indépendante du maillage, similaire à celle développée dans [BB99 ; MDB99]. Nous avons prouvé que cette méthode numérique converge bien grâce à un résultat de  $\Gamma$ -convergence des fonctionnelles d'énergies définies sur les espaces discrétisés vers la fonctionnelle d'énergie continue.

Nous détaillons, finalement, quelques points qu'il serait possible d'améliorer. Tout d'abord, le modèle théorique laisse ouvert la possibilité qu'une fracture se referme sur elle même, ce que l'intuition contredit. De futures recherches dans cette direction seraient intéressantes, bien que l'axiome de minimisation globale rende délicat l'obtention de résultats.

Le code actuel est un prototype en python, et devra être réécrit dans un langage compilé afin d'être intégrable dans le code de calcul déjà existant. Notons qu'il manque, dans le code actuel, l'implémentation des conditions de non interpénétration au bord de la frontière.

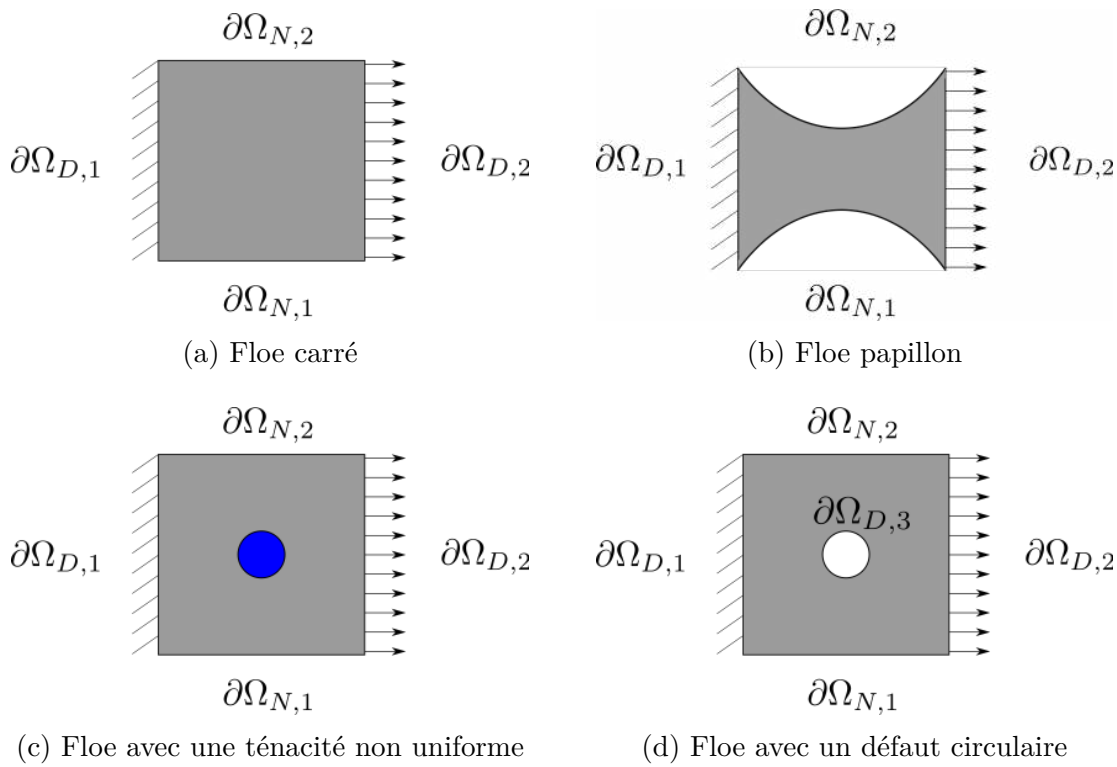


FIG. 2.4 : Différentes géométries utilisées

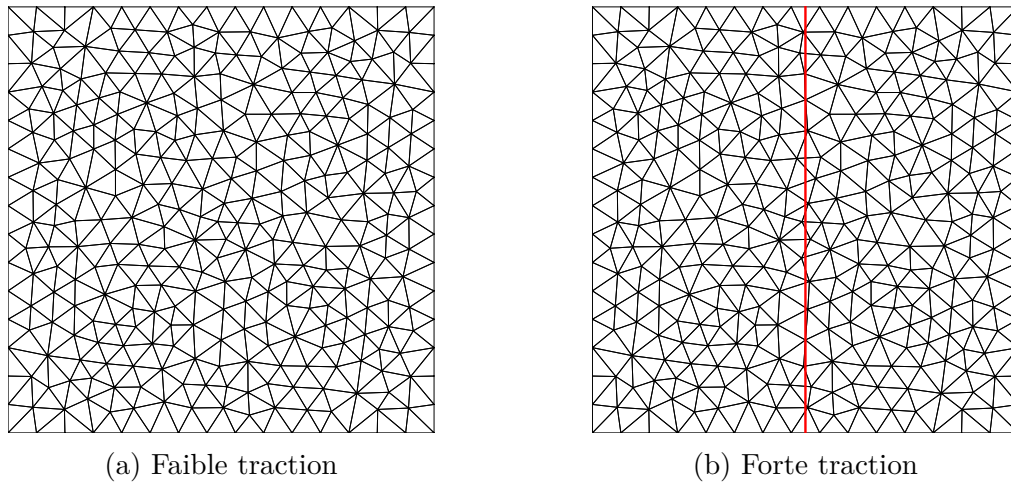


FIG. 2.5 : Essais en traction sur un floe carré

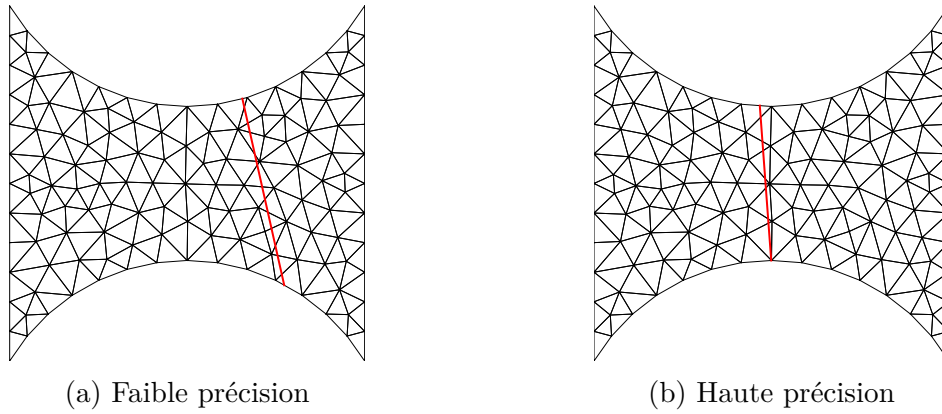


FIG. 2.6 : Influence de la précision au bord

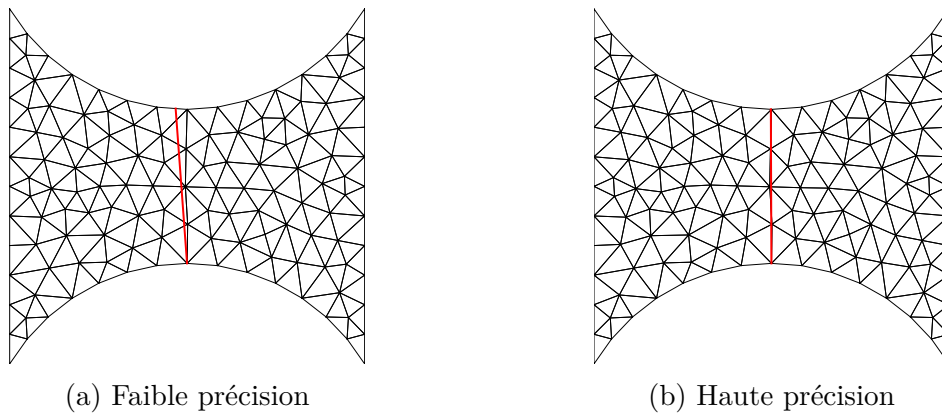


FIG. 2.7 : Influence de la précision angulaire

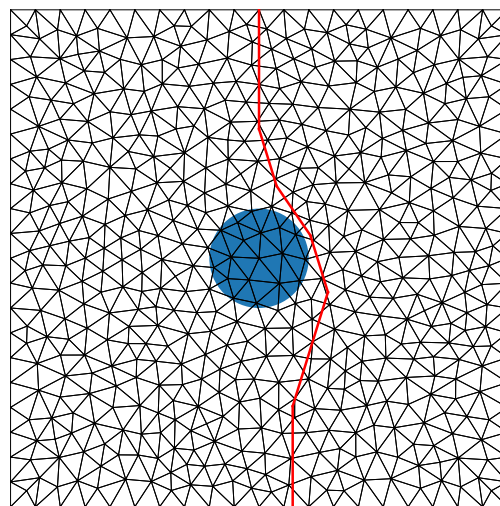


FIG. 2.8 : Fracture d'un floe carré de ténacité non uniforme

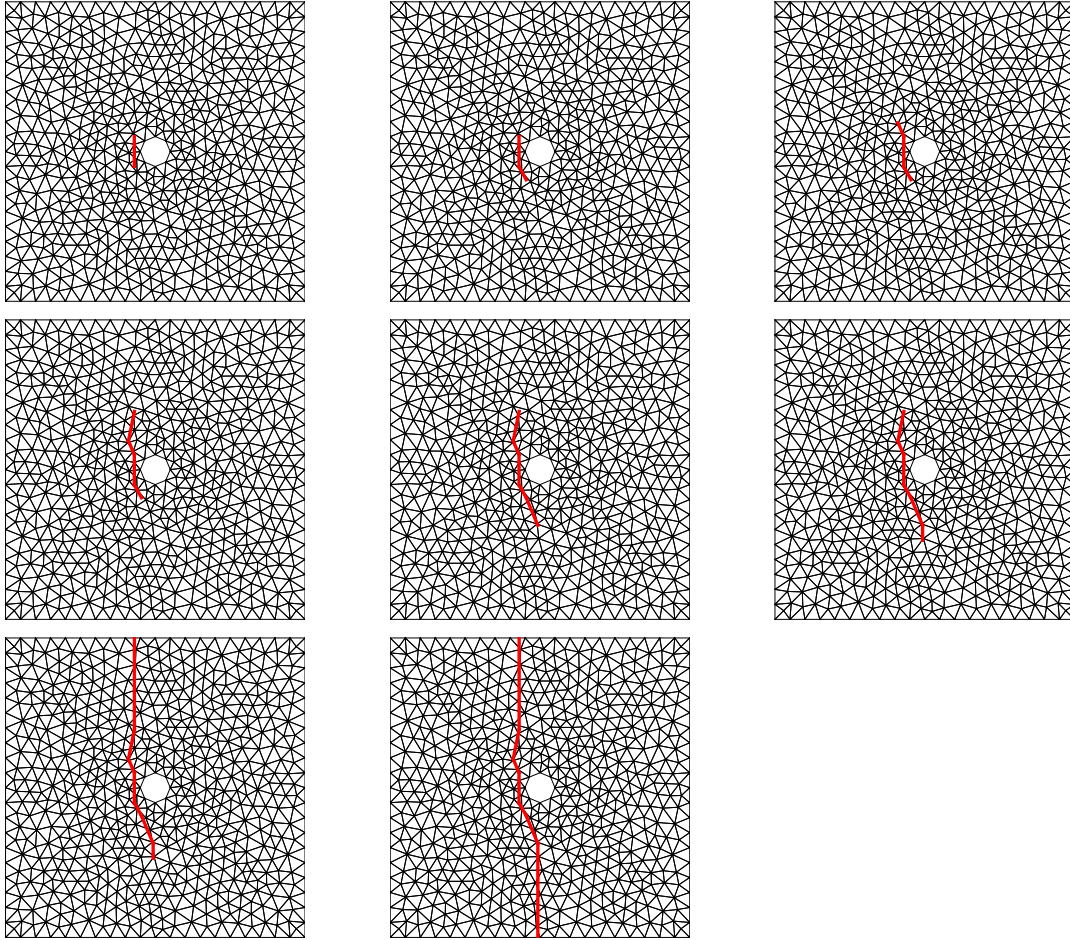


FIG. 2.9 : Fracture d'un matériau élastique avec un défaut circulaire

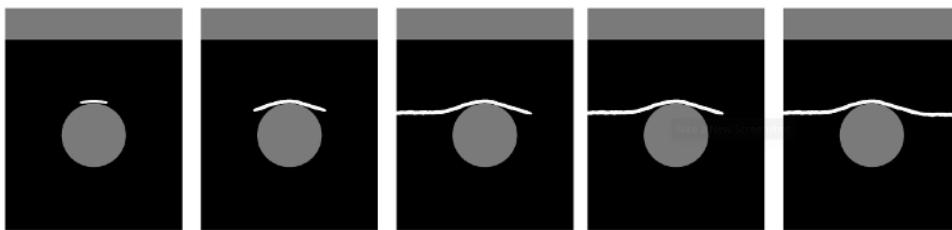


FIG. 2.10 : Fracture d'un matériau élastique avec un défaut circulaire, résultat tiré de [Bou07]

This python package is the implementation of the numerical method for brittle fracture developed in an upcoming article.  
It uses python3.

### Installation commands:

```
pip install virtualenv
python -m venv venv
source venv/bin/activate
pip install -r requirements.txt
```

### Before use

#### Mesh generation

Reads gmsh's .msh file in msh2 format. We provide a couple of \*.geo file to get you started, in the mesh folder. To generate \*.msh files from .geo files:

```
python3 mesh_generator.py
```

or

```
gmsh -2 square_mesh.geo -o square_mesh.msh -format msh2
```

In a \*.geo file, physical group for dirichlet edges must have a 'D' in it's name, and physical group for neumann edges must have a 'N' in it's name.

#### Plot options

The user can tweak the file plotrc.py to change plotting options.

### Fracture simulation : griffith\_solver.py

There are some scripts available in the main directory. The user should refer himself to the help provided in each script. The script showcases.py is a nice introduction, as it provides a number of test cases.

#### Boundary displacement

Current boundary displacements are : constant-displacement, linear-displacement, piecewise-linear-displacement, rotational-displacement. The reader is invited to read the implementation.

#### Discretisation options

- Initialisation : The user can either choose a boundary-step for boundary discretisation, or fix a boundary point for fracture nucleation. The user can also fix an interior-step for fracture initiating from the inside.
- Main discretisation : The length step and angle step allow the user to choose fracture precision
- Time discretisation : The user can choose between a fixed-step algorithm or the smat-time one.

### Other scripts

#### elastic\_solver.py

Typical use :

```
python elastic_solver.py -m mesh/square.msh -cd 1
```

#### broken\_mesh\_solver.py

Typical use :

```
python broken_mesh_solver.py 30 0 30 45 50 75 -m mesh/square.msh -cd 1
```

#### admissible\_fractures.py

Lists the admissible fractures for the specified discretisation options.

FIG. 2.11 : Fichier Readme.md du package Python griffith (page 1)

## TODOS

### Software enhancement

- deal with type 2 brittle fracture (i.e. add non-interpenetration on fracture lips)
- add exceptional cases for fracture in the `linear_enrichement` module (one test is currently skipped)
- fix Software for non-convex meshes (like `square_with_hole.msh`)

### Speed improvements

- rewrite the `fixed_fracture` solver in C (using cython ?)
- use preconditionning (scotch / parmetis ...)
- try other sparse solvers (mumps / umfpack ...)

## Other branches

### Tip Enrichement

The program supports tip enrichment according to the article of MDB99. This enrichment is slow and is not maintained on the main branch. An old branch (i.e. `tip-enrichement`) should work.

### Cython

For the slowness issue, a cython implementation has been started, and abandoned due to lack of time. The work done is on a cython branch.

FIG. 2.12 : Fichier `Readme.md` du package Python `griffith` (page 2)

---

## Conclusion de la première partie

---

Dans cette partie, nous avons présenté un modèle de fracture d'un floe de glace soumis à un déplacement de son bord. Ce modèle s'inscrit dans la lignée des modèles variationnels, introduits en théorie de la fracture fragile par G. A. Francfort et J.-J. Marigo [FM98], et repose sur la minimisation globale d'une fonctionnelle d'énergie. Il permet donc, contrairement aux modèles classiques, de prévoir l'initialisation de la fracture ainsi que le chemin qu'elle emprunte. Nous avons montré un résultat d'existence sur notre modèle : la fonctionnelle d'énergie totale possède bien un minimum sur l'espace des fractures admissibles utilisé.

De plus, notre modèle est numériquement efficace, et adapté aux simulations de collisions du modèle de M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss [RLW15], qui modélise le comportement d'un grand nombre de floes. L'approximation numérique ne repose pas sur les méthodes numériques classiques en théorie variationnelle de la fracture, nommées méthodes à champ de phase, et qui requièrent un maillage fin du solide à simuler. Notre modèle repose sur une hypothèse géométrique forte – les fractures se propagent en ligne droite dans les floes de glace. Cette hypothèse est atténuée par l'utilisation d'un chargement quasi-statique, qui permet l'obtention d'une géométrie en lignes brisées. Nous pouvons ainsi minimiser directement la fonctionnelle d'énergie totale, sans faire intervenir la fonctionnelle lissée dite à champ de phase. Nous avons proposé une méthode numérique pour la fracture basée sur les éléments finis et indépendante du maillage, similaire à celle développée dans [BB99 ; MDB99]. Nous avons prouvé que cette méthode numérique converge grâce à un résultat de  $\Gamma$ -convergence des fonctionnelles d'énergies définies sur les espaces discrétisés vers la fonctionnelle d'énergie continue.





Deuxième partie

# Percussion d'un matériel élastique



---

## Introduction de la seconde partie

---

Dans cette partie, nous nous intéressons au phénomène de percussion d'un floe de glace par un objet solide. En particulier, nous souhaitons obtenir une expression du déplacement du bord d'un floe lors d'une percussion, expression essentielle pour pouvoir utiliser le modèle variationnel de fracture fragile développé dans la première partie.

Pour obtenir l'expression de ce déplacement du bord, nous proposons de modéliser un floe de glace comme un assemblage discret de masses reliées par des ressorts. Comme nous connaissons l'équation différentielle qui régit le mouvement de chaque masse, nous pouvons espérer en dériver le mouvement local au bord du réseau masse-ressort lors de la percussion, et conclure en utilisant des méthodes d'homogénéisation.

Notons que l'idée d'utiliser un système élastique discret pour comprendre et dériver des lois comportementales des systèmes continus est une démarche ancienne, qui a occupé plusieurs grands noms de la science : Cauchy, Born, Maxwell ... Ainsi, Cauchy s'est servi de cette comparaison entre modèle discret et modèle continu pour dériver ses relations, qui réduisent le nombre d'inconnues en élasticité linéaire, moyennant certaines hypothèses sur le réseau moléculaire. Nous renvoyons à [Sta50] pour un exposé de la démarche, ainsi que la monographie [Mau16] pour une introduction historique plus détaillée.

Nous détaillons maintenant notre programme de recherche pour dériver l'expression du déplacement au bord d'un floe lors de la percussion, à partir d'un modèle discret. Pour pouvoir utiliser cette approche, il nous semble essentiel d'obtenir plusieurs limites mathématiques sur le système discret : deux limites spatiales ainsi qu'une limite temporelle.

La limite temporelle justifie, dans notre cadre, l'hypothèse de quasi-staticité du phénomène de percussion. En effet, la vitesse relative des floes, de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres par seconde [RWMB09], est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace qui est de l'ordre de grandeur de 1800 mètres par seconde pour les ondes de cisaillement [Mar+19]. Nous montrons donc que lors de la percussion d'un réseau masse-ressort par un objet solide, les effets dynamiques disparaissent à la limite lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini. Autrement dit, nous montrons que le réseau limite de raideur infinie est, à chaque instant, dans un état d'équilibre.

La première limite spatiale justifie qu'un réseau de ressort est une bonne approximation

d'un matériel élastique. Pour ce faire, nous montrons un résultat de Gamma-convergence sur les fonctionnelles d'énergie élastique discrètes, qui convergent vers l'énergie d'un matériau élastique continu. Pour une présentation de la  $\Gamma$ -convergence, nous renvoyons à l'annexe D. Rappelons seulement que la  $\Gamma$ -convergence, *modulo* une hypothèse de coercivité, implique la convergence à extraction près de toute suite de presque minimaux vers un minimum de l'énergie limite. Ainsi, le champ de déformation du réseau, qui est un minimum de son énergie élastique, approche le champ de déformation du floe, qui est un minimum d'une énergie élastique continue.

Notons que nous souhaitons prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements que nous avons faite dans le cadre continu. Pour ce faire, nous procédons à une mise à l'échelle, autrement dit à un *rescaling*, des énergies élastiques discrètes considérées. C'est un procédé courant, et nous renvoyons par exemple un article de G. Dal Maso, M. Negri et D. Percivale [DNP02], qui montrent dans un cadre continu que la suite des énergies redimensionnées d'une énergie élastique non linéaire  $\Gamma$ -converge vers une énergie élastique linéaire.

Enfin, il faudrait procéder à une seconde limite spatiale, pour dériver de l'équation différentielle l'expression du déplacement au bord du floe. Nous soulignons que cette seconde limite n'a pas été étudiée lors de cette thèse. Nous présentons néanmoins une piste de travail suggérée. Nous proposons d'obtenir l'expression du déplacement au bord du réseau masse-ressorts lors de la percussion en sélectionnant les vecteurs propres du système dynamique discret qui influent sur le comportement d'une couche mince de son bord.

Cette partie comporte quatre chapitres. Nous commençons par montrer, dans le chapitre 3, un résultat de Gamma-convergence des énergies élastiques redimensionnées sur un réseau régulier, dans la lignée de [VSB07; LR11]. Nous montrons également un résultat d'équi-coercivité pour cette suite d'énergies. Remarquons cependant que les énergies élastiques considérées sur ce réseau régulier ne donnent pas, à la limite, une énergie élastique pertinente. Tout d'abord, nous obtenons une énergie limite isotrope seulement lorsque les constantes de raideur des ressorts linéaires et de torsions vérifient une équation linéaire. De plus, dans ce cas, l'énergie élastique limite obtenue a un coefficient de Poisson nul, ce qui restreint le champ d'application de ce modèle. Ces limitations sont dues au fait que le réseau régulier que nous utilisons n'est pas isotrope.

Dans le chapitre 4, nous montrons comment construire un processus stochastique de réseaux isotropes. Cette construction s'appuie sur la théorie des processus ponctuels de Poisson, et on renvoie à la monographie de J. Møller [Møl94] pour une présentation. Nous présentons plusieurs formules de sommations sur les processus de Poisson, comme la formule de Campbell-Mecke. Puis, nous montrons que sur presque chaque tirage d'un processus stochastique ponctuel de Poisson, il est possible de considérer la triangulation de Delaunay associée. Nous donnons la loi de probabilité du simplexe typique de ce processus stochastique de Poisson-Delaunay, qui est isotrope. Enfin, nous proposons de construire une suite de triangulations d'un domaine borné du plan comme réalisations d'une suite de processus de Poisson-Delaunay. Nous montrons que les suites de maillages obtenues convergent vers le domaine étudié, et nous donnons un résultat de contrôle asymptotique de la taille minimale d'une maille.

Au chapitre 5, nous montrons un résultat de Gamma-convergence presque sûr des énergies

élastiques redimensionnées sur un tirage du processus de triangulation de Poisson-Delaunay vers une énergie théorique, en utilisant une méthode de localisation, et nous renvoyons à l'annexe D, ainsi qu'aux articles [AC04; ACG11] pour une approche similaire. Nous montrons également l'équi-coercivité de cette suite d'énergies. Notons que ce résultat est différent du résultat de compacité proposé dans [DNP02], et n'utilise pas l'hypothèse de non-interpénétrabilité qui, comme souligné dans [VSB07] est incompatible avec la méthode de localisation. L'énergie limite n'est pas connue expressément, néanmoins nous montrons que, si le redimensionnement est suffisamment rapide, elle prend la forme de l'énergie élastique d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope, et dépend donc de deux paramètres qui sont les coefficients de Lamé du matériau homogénéisé.

Au chapitre 6, nous montrons que le phénomène de percussion d'un réseau masse-ressorts de grande raideur est quasi-statique. Pour ce faire, nous ajoutons au réseau de ressorts une viscosité mécanique, et nous montrons que, lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini, la solution de l'équation différentielle du réseau de ressorts est à chaque instant dans un état d'équilibre. Plus précisément, nous introduisons un problème de perturbation singulière, pour lequel nous utilisons le théorème de A. N. Tikhonov [Tik52]. Notons que l'ajout d'une viscosité n'induit pas de comportement visco-élastique à la limite, puisqu'elle devient négligeable devant la raideur des ressorts. Cependant, elle permet d'obtenir une dissipation des ondes élastiques, essentielle pour que le réseau limite soit à chaque instant dans un état d'équilibre.



## CHAPITRE 3

---

### Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier

---

#### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	88
3.2	Description du problème . . . . .	89
3.2.1	Énergie élastique d'un matériau continu . . . . .	89
3.2.2	Construction d'un réseau régulier . . . . .	90
3.2.3	Présentation des résultats du chapitre . . . . .	91
3.3	Analyse de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	93
3.3.1	Développement limité de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	93
3.3.2	Représentation intégrale de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	95
3.3.3	Contrôle du reste du développement limité . . . . .	98
3.4	Convergence de la suite de fonctionnelles . . . . .	100
3.4.1	Résultats de convergence sur un réseau régulier . . . . .	100
3.4.2	Calcul formel de la limite ponctuelle sur un réseau isotrope . . . . .	103
3.5	Conclusion . . . . .	105

---



### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous n'étudions que l'état d'équilibre du réseau de ressorts.

L'outil adapté pour ce type de résultat est la  $\Gamma$ -convergence. En effet, si une suite d'énergies Gamma-converge, alors, *modulo* une hypothèse de coercivité, toute suite de minimaux de ces énergies converge vers un minimum de la fonctionnelle limite – nous renvoyons le lecteur à l'annexe D pour plus de détails sur la notion de  $\Gamma$ -convergence. Rappelons que le champ de déformation d'un matériau élastique est l'unique minimum de son énergie élastique sur un certain espace variationnel. Ainsi, le comportement des déformations du réseau qui minimisent les énergies élastiques discrètes approche, à la limite, le comportement du matériau continu.

Dans ce chapitre, nous utiliserons un réseau de ressorts régulier. Cela à l'avantage d'induire un résultat de représentation intégrale explicite pour les énergies discrètes. Ainsi le tenseur de rigidité du matériau limite, que l'on appelle tenseur homogénéisé, est obtenu sous forme analytique. Autrement dit, la  $\Gamma$ -convergence n'induit pas, dans ce cas précis, de phénomène de relaxation. Nous verrons, au chapitre 5, que l'utilisation d'un réseau non-régulier induit, dans ce cas, un phénomène de relaxation.

Notons que le réseau de ressort utilisé comprend, en plus des ressorts de traction classiques, des ressorts de torsion en chaque point du maillage. Les ressorts de torsions ne peuvent être définis pour tous les déplacements, et nous ferons intervenir, à la manière de N. Meunier, O. Pantz et A. Raoult [MPR12], un sous-ensemble de déplacements discrets admissibles qui est néanmoins dense dans l'espace des déplacements continus. Nous souhaitons de plus que le matériau continu vérifie l'hypothèse des petits déplacements. Nous procédons donc, en même temps que la limite spatiale sur la taille des ressorts, à un redimensionnement des énergies élastiques à la manière de G. Dal Maso, M. Negri et D. Percivale [DNP02].

Dans une première partie, nous présentons le réseau de ressort utilisé, ainsi que l'expression des énergies élastiques. Nous utiliserons, en plus des ressorts de traction classiques, des ressorts de torsion en chaque point du maillage. Ces ressorts sont essentiels puisque, sur un réseau à base carrée, les ressorts de traction ne voient certaines déformation du réseau. Nous présenterons enfin, de manière précise, les résultats obtenus dans ce chapitre.

Dans une seconde partie, nous proposons plusieurs résultats techniques sur la suite d'énergies. Nous effectuons un développement limité des énergies élastiques de traction et de torsion, pour rendre compte l'hypothèse des petits déplacements. Nous donnons également un résultat de contrôle du reste du développement limité, à la manière de [DNP02]. Nous donnons enfin un résultat de représentation intégrale des énergies discrètes, qui n'est valable que sur un réseau régulier. Ce résultat sera fondamental pour l'obtention de la forme explicite de la  $\Gamma$ -limite.

Dans une troisième partie, nous montrons le résultat de  $\Gamma$ -convergence, et nous donnons l'expression de la fonctionnelle limite. Nous donnons également des conditions sur les constantes de raideur des ressorts, pour que le matériau limite soit un matériau isotrope qui

suive la loi de Lamé. Nous remarquons que le matériau élastique limite, dans ce cas, a un coefficient de Poisson nul. Ce résultat est évident car, sur un réseau à mailles carrées, si l'on tire dans le sens des ressorts, le réseau ne s'aplatit pas avec la tension. Nous proposons un calcul formel qui montre comment obtenir un tenseur isotrope et de coefficient de Poisson non nul si le maillage n'est plus régulier, mais obtenu comme tirage d'un processus aléatoire de loi isotrope.

## 3.2 Description du problème

### 3.2.1 Énergie élastique d'un matériau continu

Soit  $\Omega$  un matériau élastique plan. On suppose que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert, dont la frontière est régulière. Soit  $\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  une déformation du matériau. On note  $u$  le déplacement, relié à la déformation par la relation :

$$\varphi = \text{Id} + u.$$

On suppose que le matériau vérifie la loi de Hooke :

$$\sigma = C : E,$$

où l'on a noté  $C$  le tenseur de rigidité du matériau,  $\sigma$  le tenseur des contraintes, et  $E$  le tenseur des déformations :

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) + \nabla u^T \nabla u.$$

On fait l'hypothèse que le déplacement  $u$  est petit, et l'on peut utiliser le tenseur des déformations linéarisé :

$$e = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T).$$

On suppose également que le tenseur de rigidité vérifie la condition de coercivité suivante :

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0, \forall e \in \mathbb{M}_{\text{sym}}^{2 \times 2}, \quad \alpha_1 |e|^2 \leq C e : e \leq \alpha_2 |e|^2.$$

On rappelle l'expression de l'énergie élastique :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) : e(u) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} C e(u) : e(u) \, dx. \end{aligned}$$

On rappelle également que, si le solide à modéliser est homogène et isotrope, on peut écrire :

$$\begin{aligned} C e : e &= K_{\lambda, \mu} e : e \\ &= \lambda \text{tr}(e)^2 + 2\mu \text{tr}(e^2), \end{aligned}$$

avec  $K_{\lambda, \mu}$  le tenseur de Lamé de constantes  $\lambda$  et  $\mu$ .

### 3.2.2 Construction d'un réseau régulier

On essaie maintenant d'approcher l'énergie élastique continue par une énergie discrète définie sur un réseau régulier. On construit le réseau  $\tau$  de la manière suivante. On note :

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2,$$

l'ensemble des **points** du réseau (voir l'annexe A pour une introduction des notations utilisées). Le réseau  $\tau$  est obtenu à partir de  $\tau_0$  en traçant les côtés de chaque carré. On trace également, à la frontière, les diagonales des carrés incomplets (voir figure 3.1).

On note  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  l'ensemble des fonctions de  $\tau_0$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On définit également deux triangulations de  $\Omega$  à partir de  $\tau$ ,  $\tilde{\tau}$  et  $\hat{\tau}$ , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions  $e_x + e_y$  et  $e_x - e_y$ .

On construit les espaces d'éléments finis  $W(\tilde{\tau}, \mathbb{R}^2)$  et  $W(\hat{\tau}, \mathbb{R}^2)$ , et on note alors les **injections canoniques** :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\tau : W(\tilde{\tau}, \mathbb{R}^2) &\rightarrow H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ u &\mapsto \tilde{I}_\tau(u), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{I}_\tau : W(\hat{\tau}, \mathbb{R}^2) &\rightarrow H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ u &\mapsto \hat{I}_\tau(u). \end{aligned}$$

On définit également la projection :

$$\begin{aligned} P_\tau : C(\Omega, \mathbb{R}^2) &\rightarrow W(\tau, \mathbb{R}^2) \\ u &\mapsto P_\tau(u), \end{aligned}$$

qui à toute fonction continue  $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$  associe la fonction  $P_\tau(u) \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  telle que pour tout  $x \in \tau_0$  :

$$P_\tau(u)(x) = u(x).$$

L'énergie de torsion n'est pas définie pour toutes les déformations de  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ , et en particulier pour les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point. On définit donc, à la manière de [MPR12], l'ensemble des déplacements admissibles  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$  :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall \omega \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$



ainsi que ses extensions  $W_{\text{adm}}(\hat{\tau}, \mathbb{R}^2)$  et  $W_{\text{adm}}(\tilde{\tau}, \mathbb{R}^2)$ . À la manière de [MPR12], on a la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1.** *Pour toute fonction  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de déplacements discrets qui sont admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

telle que les suites  $\left( \hat{I}_{\tau_n}(u_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left( \tilde{I}_{\tau_n}(u_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $u$  pour la norme  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la densité de  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$  dans  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ .  $\square$

Sur chaque arête  $\nu \in \tau_1$ , on place un ressort de longueur à vide  $l_\nu = |\nu|$  (voir figure 3.2). On suppose donc que les réseaux sont dans un état d'équilibre. On note également  $k_\nu$  la raideur du ressort sur l'arête  $\nu$ , avec :

$$k_\nu = \begin{cases} k_1 & \text{si l'arête est selon } e_x, \\ k_2 & \text{si l'arête est selon } e_y. \end{cases}$$

Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressorts, et  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage vaut :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu}{2} (|\varphi(\nu)| - |\nu|)^2. \end{aligned}$$

Cependant, ce réseau de ressorts ne voit pas certaines déformations (voir figure 3.3). En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, de raideur  $G|\nu|^2$  (voir figure 3.4). On rappelle l'expression de l'énergie élastique d'un ressort de torsion :

$$E_{\text{tor}} = \frac{1}{2} G |\nu|^2 (\theta - \theta_0)^2,$$

où  $\theta_0$  est l'angle de repos, et vaut  $\frac{\pi}{2}$  dans notre cas.

Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressorts, et  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, et si de plus  $u$  est dans  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$ , l'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut :

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} \frac{G |\nu|^2}{4} \left( \angle(\varphi(e_{\nu_1}), \varphi(e_{\nu_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

avec  $\angle(\cdot, \cdot)$  l'angle entre deux vecteurs du plan.

On note enfin :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale sur le réseau  $\tau$ .

### 3.2.3 Présentation des résultats du chapitre

On note maintenant  $\tau_n$  le réseau défini, comme à la section précédente, par :

$$\tau_{n,0} = \Omega \cap \frac{1}{n} \mathbb{Z}^2$$

On cherche à montrer un résultat de  $\Gamma$ -convergence du type :

$$E_{\tau_n} \xrightarrow{\Gamma} E_{\text{el}},$$

pour un certain tenseur de rigidité  $C$ .

Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive qui tend vers 0. Pour prendre en compte l'hypothèse de **petits déplacements** et l'hypothèse de **non-interpénétration**, on définit la suite des énergies redimensionnées :

$$\begin{aligned} R_n : W(\tau_n, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), \end{aligned}$$

et



$$\begin{aligned} T_n : W(\tau_n, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u) & \text{si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n.$$

Dans ce chapitre, on démontre les théorèmes suivants.

**Théorème 3.2.1** ( $\Gamma$ -convergence). *La suite d'énergies redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge, pour la topologie faible de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , vers la fonctionnelle limite :*

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h e(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

avec  $C_h$  le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie :

$$C_{h,ijkl} M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2.$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si l'on a  $k_1 = k_2 = 8G$ . Dans ce cas, on a :

$$E_{\text{el}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

avec :

$$\lambda = 0, \quad \mu = \frac{k}{2}.$$

**Théorème 3.2.2** (Équi-coercivité). *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan, et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

Enfin, on renvoie enfin à [AC04] pour une preuve du théorème de compatibilité des conditions de Dirichlet au bord.

### 3.3 Analyse de la fonctionnelle d'énergie

#### 3.3.1 Développement limité de la fonctionnelle d'énergie

On propose ici deux résultats de développement limité, sur le maillage  $\tau$ . On regarde le comportement asymptotique des énergies  $R_\tau$  et  $T_\tau$  pour une déformation  $\varepsilon u$ , avec  $\varepsilon$  qui tend vers 0.

**Proposition 3.3.1.** Soit  $\varphi: W(\tau, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  une déformation du réseau  $\tau$ . On note :

$$u = \varphi - \text{Id}$$

le déplacement associé. Alors, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} R_\tau(\varepsilon u) = R_{1,\tau}(u),$$

avec :

$$R_{1,\tau}(u) = \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu |\nu|^2}{2} (e_\nu^T \cdot e(u) \cdot e_\nu)^2.$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu}{2} (|\varphi(\nu)| - |\nu|)^2 \\ &= \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu |\nu|^2}{2} (\|\nabla \varphi \cdot e_\nu\| - 1)^2. \end{aligned}$$

On souligne le fait que la quantité  $\nabla \varphi$  n'est pas définie, mais que la quantité  $\nabla \varphi \cdot e_\nu$  l'est bien. On continue le calcul, et on a :

$$R_\tau(u) = \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu |\nu|^2}{2} \left( 2 + 2e_\nu^T \cdot E(u) \cdot e_\nu - 2\sqrt{1 + 2e_\nu^T \cdot E(u) \cdot e_\nu} \right).$$

On note  $R_{1,\tau}$  le premier ordre du développement limité en  $\nabla u$  de la fonctionnelle  $R_\tau$ , qui vaut :

$$\begin{aligned} R_{1,\tau}: W(\tau, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu |\nu|^2}{2} (e_\nu^T \cdot e(u) \cdot e_\nu)^2. \end{aligned}$$

La fonctionnelle  $R_{1,\tau}$  est quadratique et on a, pour tout  $\lambda > 0$  :

$$R_{1,\tau}(\lambda u) = \lambda^2 R_{1,\tau}(u).$$

On note également  $R_{2,\tau} = R_\tau - R_{1,\tau}$  le reste. La fonctionnelle  $R_{2,\tau}$  admet, pour  $u$  suffisamment petit, un développement en série entière. Plus précisément, soit  $u \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ , tel que :

$$\forall \nu \in \tau_1, \quad e_\nu^T \cdot E(u) \cdot e_\nu \leq 1.$$

On a :

$$R_{2,\tau}(u) = \sum_{\nu \in \tau_1} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2k-1)(k!)^2 2^{k-1}} (e_\nu \cdot E(u) \cdot e_\nu)^k \\ + \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu |\nu|^2}{2} (e_\nu^T \cdot \nabla u^T \nabla u \cdot e_\nu)^2.$$

Puis,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} R_{2,\tau}(\varepsilon u) = 0,$$

d'où la conclusion. □

**Proposition 3.3.2.** Soit  $\varphi: W(\tau, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  une déformation du réseau dont le déplacement associé :

$$u = \varphi - \text{Id}$$

est dans  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$ . Alors, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} T_\tau(\varepsilon u) = T_{1,\tau}(u),$$

avec :

$$T_{1,\tau} = \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} G |\nu|^2 (e_{\nu_1}^T \cdot e(u) \cdot e_{\nu_2})^2.$$

*Démonstration.* On a :

$$T_\tau(u) = \sum_{c \in \tau} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} \frac{G |\nu|^2}{4} \left( \angle(\varphi(e_{\nu_1}), \varphi(e_{\nu_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ = \sum_{c \in \tau} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} \frac{G |\nu|^2}{4} \left( \angle(\nabla \varphi \cdot e_{\nu_1}, \nabla \varphi \cdot e_{\nu_2}) - \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ = \sum_{c \in \tau} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} \frac{G |\nu|^2}{4} \arcsin^2 \left( \left\langle \frac{\nabla \varphi \cdot e_{\nu_1}}{\|\nabla \varphi \cdot e_{\nu_1}\|}, \frac{\nabla \varphi \cdot e_{\nu_2}}{\|\nabla \varphi \cdot e_{\nu_2}\|} \right\rangle \right). \quad \text{☞}$$

On a également :

$$\left\langle \frac{\nabla \varphi \cdot e_{\nu_1}}{\|\nabla \varphi \cdot e_{\nu_1}\|}, \frac{\nabla \varphi \cdot e_{\nu_2}}{\|\nabla \varphi \cdot e_{\nu_2}\|} \right\rangle = \frac{2e_{\nu_1}^T \cdot E(u) \cdot e_{\nu_2}}{\sqrt{(1 + 2e_{\nu_1}^T \cdot E(u) \cdot e_{\nu_1})(1 + 2e_{\nu_2}^T \cdot E(u) \cdot e_{\nu_2})}} \\ = 2e_{\nu_1}^T \cdot e(u) \cdot e_{\nu_2} + O(\|\nabla u\|^3).$$

On regarde le terme en arcsin :

$$\arcsin^2 \left( \left\langle \frac{\nabla \varphi \cdot e_{\nu_1}}{\|\nabla \varphi \cdot e_{\nu_1}\|}, \frac{\nabla \varphi \cdot e_{\nu_2}}{\|\nabla \varphi \cdot e_{\nu_2}\|} \right\rangle \right) = 4 (e_{\nu_1}^T \cdot e(u) \cdot e_{\nu_2})^2 + O(\|\nabla u\|^3).$$

On note :

$$T_{1,\tau}(u) = \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} G |\nu|^2 (e_{\nu_1}^T \cdot e(u) \cdot e_{\nu_2})^2$$

le premier ordre en  $\varepsilon$  du développement limité, et :

$$T_{2,\tau} = T_\tau - T_{1,\tau}.$$

La fonctionnelle  $T_{1,\tau}$  est quadratique et on a, pour tout  $\lambda > 0$  :

$$T_{1,\tau}(\lambda u) = \lambda^2 T_{1,\tau}(u).$$

Comme on somme un nombre fini et fixe de fois, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} T_{2,\tau}(\varepsilon u) = 0,$$

et donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} T_\tau(\varepsilon u) = T_{1,\tau}.$$

□

### 3.3.2 Représentation intégrale de la fonctionnelle d'énergie

Dans cette section, on propose des résultats de représentation intégrale des fonctionnelles  $R_\tau$ , et  $T_\tau$ , ainsi que de leurs développements limités au premier ordre  $R_{1,\tau}$  et  $T_{1,\tau}$ . Ces résultats reposent sur le fait que le réseau  $\tau$  est régulier. Une conséquence de ces résultats est l'obtention de la forme exacte de la  $\Gamma$ -limite, et donc du tenseur des contraintes homogénéisé.

On commence par donner un résultat de représentation des fonctionnelles  $R_\tau$  et  $R_{1,\tau}$ . Pour ce faire, on présente un résultat plus théorique de représentation intégrale sur le maillage  $\hat{\tau}$ , afin de faire apparaître clairement que le résultat de représentation intégrale ne dépend que du réseau, et pas (ou peu) de la forme du potentiel utilisé. On utilise le maillage  $\hat{\tau}$  car il permet de travailler sur l'espace des éléments finis  $W(\hat{\tau}, \mathbb{R}^2)$  qui s'injecte canoniquement dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Cependant, on aurait très bien pu utiliser le maillage  $\tilde{\tau}$ , ainsi que tout autre raffinement du réseau  $\tau$  en maillage.

**Proposition 3.3.3.** Soit  $F$  une fonctionnelle définie sur  $W(\hat{\tau}, \mathbb{R}^2)$  de la manière suivante :

$$F(u) = \sum_{\nu \in \tau_1} |\nu|^2 V(\nabla u \cdot e_\nu),$$

avec  $V(a) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel continu. Alors, la fonctionnelle  $F$  admet la représentation intégrale suivante :

$$F(u) = \int_{\tau} V(\nabla \hat{u} \cdot e_x) + G(u),$$

où on a la majoration :

$$G(u) \leq \int_{\partial \tau_2} V(\nabla \hat{u} \cdot e_x) dx,$$

avec  $\partial \tau_2$  l'ensemble des mailles du bord.





*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{\nu \in \tau_1} |\nu|^2 V(\nabla u \cdot e_\nu) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\nu \in c} \frac{|\nu|^2}{2} V(\nabla u \cdot e_\nu) + \sum_{\nu \in \partial \tau_1} \frac{|\nu|^2}{2} V(\nabla u \cdot e_\nu), \end{aligned}$$

où  $\partial \tau_1$  est l'ensemble des arêtes du bord :

$$\partial \tau_1 = \{\nu \in \tau_1 \mid \exists ! c \in \tau_2, \nu \in \partial c\}.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\nu \in c} \frac{|\nu|^2}{2} V(\nabla u \cdot e_\nu) &= \sum_{c \in \tau_2} \int_c V(\nabla \hat{u} \cdot e_x) + V(\nabla \hat{u} \cdot e_y) dx \\ &= \int_\tau V(\nabla \hat{u} \cdot e_x) + V(\nabla \hat{u} \cdot e_y) dx. \end{aligned}$$

On a donc :

$$F(u) = \int_\tau V(\nabla \hat{u} \cdot e_x) + V(\nabla \hat{u} \cdot e_y) dx + Q(u),$$

où l'on a noté  $Q$  la somme sur  $\partial \tau_1$ . De plus, on a la majoration :

$$Q(u) \leq \int_{\partial \tau_2} V_1(\nabla \hat{u} \cdot e_x) + V_2(\nabla \hat{u} \cdot e_y) dx,$$

où  $\partial \tau_2$  est l'ensemble des mailles du bord :

$$\partial \tau_2 = \{c \in \tau_2 \mid \partial \tau_1 \cap \bar{c} \neq \emptyset\}.$$

□

On déduit de ce résultat théorique deux résultats de représentation intégrale des fonctionnelles  $R_\tau$  et  $R_{1,\tau}$  sur  $\tau$ .

**Corollaire 3.3.1.** *On a, pour tout  $u \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  :*

$$R_\tau(u) = \int_\tau \frac{k_1}{2} (\|e_x + \nabla \hat{u} \cdot e_x\| - 1)^2 + \frac{k_2}{2} (\|e_y + \nabla \hat{u} \cdot e_y\| - 1)^2 dx + Q_\tau(u),$$

avec :

$$Q_\tau(u) = \int_{\partial \tau_2} \frac{k_1}{2} (\|e_x + \nabla \hat{u} \cdot e_x\| - 1)^2 + \frac{k_2}{2} (\|e_y + \nabla \hat{u} \cdot e_y\| - 1)^2 dx.$$

**Corollaire 3.3.2.** *On a, pour tout  $u \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  :*

$$R_{1,\tau}(u) = \int_\tau \frac{k_1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} \right)^2 dx + Q_\tau(u),$$

avec :

$$Q_\tau(u) = \int_{\partial \tau_2} \frac{k_1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial y} \right)^2 dx.$$

On donne maintenant un second résultat théorique de représentation intégrale, qui a pour corollaire les résultats de représentation intégrale de  $T_\tau$  et  $T_{1,\tau}$  sur le réseau  $\tau$ . Notons que l'on utilise conjointement les deux maillages  $\hat{\tau}$  et  $\tilde{\tau}$ , ainsi que les deux injections canoniques  $\hat{I}_\tau$  et  $\tilde{I}_\tau$  de  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  dans, respectivement,  $W(\hat{\tau}, \mathbb{R}^2)$  et  $W(\tilde{\tau}, \mathbb{R}^2)$ .

**Proposition 3.3.4.** *Soit  $F$  une fonctionnelle définie sur  $W_{adm}(\tau, \mathbb{R}^2)$  de la manière suivante :*

$$F(u) = \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} |\nu|^2 V(\nabla u \cdot e_{\nu_1}, \nabla u \cdot e_{\nu_2}),$$

avec  $V(a, b) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel continu et symétrique. Alors, la fonctionnelle  $F$  admet la représentation intégrale suivante :

$$F(u) = 2 \int_{\tau} V(\nabla \hat{u} \cdot e_{\nu_1}, \nabla \hat{u} \cdot e_{\nu_2}) dx + 2 \int_{\tau} V(\nabla \tilde{u} \cdot e_{\nu_1}, \nabla \tilde{u} \cdot e_{\nu_2}) dx,$$

avec :

$$\hat{u} = \hat{I}_\tau(u), \quad \tilde{u} = \tilde{I}_\tau(u).$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} |\nu|^2 V(\nabla u \cdot e_{\nu_1}, \nabla u \cdot e_{\nu_2}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} |\nu|^2 V(\nabla u \cdot e_{\nu_1}, \nabla u \cdot e_{\nu_2}) \mathbb{1}_{e_{\nu_1} + e_{\nu_2} = \pm(e_x + e_y)} \\ &\quad + \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} |\nu|^2 V(\nabla u \cdot e_{\nu_1}, \nabla u \cdot e_{\nu_2}) \mathbb{1}_{e_{\nu_1} + e_{\nu_2} = \pm(e_x - e_y)} \\ &= 2 \int_{\tau} V(\nabla \hat{u} \cdot e_{\nu_1}, \nabla \hat{u} \cdot e_{\nu_2}) dx + 2 \int_{\tau} V(\nabla \tilde{u} \cdot e_{\nu_1}, \nabla \tilde{u} \cdot e_{\nu_2}) dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Comme annoncé, on donne maintenant en corollaires deux résultats de représentation intégrale, pour les fonctionnelles  $T_\tau$  et  $T_{1,\tau}$  sur  $\tau$ .

**Corollaire 3.3.3.** *On a, pour tout  $u \in W_{adm}(\tau, \mathbb{R}^2)$  :*

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= \frac{G}{2} \int_{\tau} \arcsin^2 \left( \frac{2e_x^T \cdot E(\hat{u}) \cdot e_y}{\sqrt{(1 + 2e_x^T \cdot E(\hat{u}) \cdot e_x)(1 + 2e_y^T \cdot E(\hat{u}) \cdot e_y)}} \right) dx \\ &\quad + \frac{G}{2} \int_{\tau} \arcsin^2 \left( \frac{2e_x^T \cdot E(\tilde{u}) \cdot e_y}{\sqrt{(1 + 2e_x^T \cdot E(\tilde{u}) \cdot e_x)(1 + 2e_y^T \cdot E(\tilde{u}) \cdot e_y)}} \right) dx, \end{aligned}$$

avec :

$$\hat{u} = \hat{I}_\tau(u), \quad \tilde{u} = \tilde{I}_\tau(u).$$

**Corollaire 3.3.4.** On a, pour tout  $u \in W_{adm}(\tau, \mathbb{R}^2)$  :

$$T_{1,\tau}(u) = 2 \int_{\tau} G \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x} \right)^2 dx + 2 \int_{\tau} G \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \right)^2 dx,$$

avec :

$$\hat{u} = \hat{I}_{\tau}(u), \quad \tilde{u} = \tilde{I}_{\tau}(u).$$

### 3.3.3 Contrôle du reste du développement limité

Dans cette section, on propose un résultat de contrôle des fonctionnelles  $R_{2,\tau}$  et  $T_{2,\tau}$  qui, on le rappelle, sont les restes des développements limités au premier ordre des fonctionnelles  $R_{\tau}$  et  $T_{\tau}$ . Ce résultat, dont la preuve est tirée de [DNP02], formalise l'idée présente derrière le redimensionnement.

On commence par donner de nouvelles notations pour les intégrandes des fonctionnelles d'énergies.

**Définition 3.3.1.** On note  $V: S_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $W: S_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  les potentiels définis pour toute matrice symétrique  $M \in S_2(\mathbb{R})$ , de coefficients  $(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ , par :

$$V(M) = \frac{k_1}{4} \left( \sqrt{(1 + m_{1,1})^2 + m_{1,2}^2} - 1 \right)^2 + \frac{k_2}{4} \left( \sqrt{m_{2,1}^2 + (1 + m_{2,2})^2} - 1 \right)^2 \\ + \frac{G}{2} \arcsin^2 \left( \frac{m_{1,2} + m_{2,1}}{(1 + 2m_{1,1})(1 + 2m_{2,2})} \right),$$

et par :

$$W(M) = \frac{k_1}{4} m_{1,1}^2 + \frac{k_2}{4} m_{2,2}^2 + 2G (m_{1,2} + m_{2,1})^2.$$

On donne maintenant quelques propriétés vérifiées par ces potentiels.

**Proposition 3.3.5.** Le potentiel  $V$  vérifie les conditions suivantes :

1. pour tout  $\rho > 0$ , on a :

$$\inf_{|M| \geq \rho} V(M) > 0 ;$$

2. il existe  $\alpha > 0$  et  $\rho > 0$  tels que :

$$\forall M \in S_2(\mathbb{R}), |M| \leq \rho, \quad V(M) \geq \alpha |M|^2 ;$$

3. on a :

$$\liminf_{|M| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|M|^2} V(M) > 0.$$

**Proposition 3.3.6.** Le potentiel  $W$  vérifie la condition suivante :

$$\exists \gamma > 0, \forall M \in S_2(\mathbb{R}), \quad W(M) < \gamma |M|^2.$$

**Proposition 3.3.7.** Soit  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante qui tend vers 0. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $\mu_k > 0$  tel que l'on peut construire une suite croissante de potentiels convexes  $V_{k,i}: S_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifient :

1.  $V_{k,i}(M) \leq V(\varepsilon_i M)/\varepsilon_i^2$  pour tout  $M \in S_2(\mathbb{R})$ ,
2.  $V_{k,i}(M) = (1 - \frac{1}{k}) W(M)$  pour  $|M|^2 \leq \mu_k/\varepsilon_i$ .

*Démonstration.* Il existe deux réels  $0 < c < d$  tels que la fonction  $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  par :

$$\phi(t) = \begin{cases} \alpha t^2 & \text{pour } 0 \leq t \leq c \\ \alpha c^2 & \text{pour } c \leq t \leq d \\ \alpha c^2 d^{-1} t & \text{pour } d \leq t, \end{cases}$$

vérifie pour tout  $M \in S_2(\mathbb{R})$  :

$$\phi(|M|) \leq V(M).$$

Soit maintenant  $\alpha > \beta > 0$  et  $\mu > 0$  quelconques. On définit maintenant la fonction  $\psi_{\beta,\mu}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  par :

$$\psi_{\beta,\mu}(t) = \begin{cases} \alpha t^2 & \text{pour } 0 \leq t \leq \beta \\ 2\alpha\beta t - \alpha\beta^2 & \text{pour } \beta \leq t \end{cases}$$

La fonction  $\psi_{\beta,\mu}$  est continue, croissante, et convexe. De plus, on a pour  $\beta$  suffisamment petit :

$$\begin{aligned} \psi(|M|) &\leq \phi(|M|) \\ &\leq V(M). \end{aligned}$$

Soit maintenant  $k \in \mathbb{N}$  un entier. D'après la formule de Taylor, il existe un réel  $r_k$  tel que :

$$\forall M \in S_2(\mathbb{R}), |M| \leq r_k, \quad \left(1 - \frac{1}{k}\right) W(M) \leq V(M).$$

De plus, on a pour un certain  $\gamma > 0$  :

$$\forall M \in S_2(\mathbb{R}), \quad W(M) < \gamma |M|^2.$$

Il existe donc un réel  $r_k$  tel que :

$$\forall M \in S_2(\mathbb{R}), V(M) \leq r_k, \quad \left(1 - \frac{1}{k}\right) W(M) \leq V(M).$$

On note :

$$\alpha_k = 1 - \frac{1}{k}.$$

Pour  $\mu_k > 0$  suffisamment petit, la fonction  $V_k$ , définit par :

$$\forall M \in S_2(\mathbb{R}), \quad V_k = \psi_{\alpha_k, \mu_k}(W(M)),$$

est convexe, et vérifie :

$$\forall M \in S_2(\mathbb{R}), \quad V_k(M) \leq V(M).$$

On définit la suite  $V_{k,i}$  par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall M \in S_2(\mathbb{R}), \quad V_{k,i} = \varepsilon_i^{-2} \psi_{\alpha_k, \mu_k}(\varepsilon_i W(M)).$$

La suite vérifie les propriétés annoncées. □

## 3.4 Convergence de la suite de fonctionnelles

### 3.4.1 Résultats de convergence sur un réseau régulier

On donne maintenant le résultat de  $\Gamma$ -convergence de la suite de fonctionnelles d'énergies totale redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , annoncé en début de chapitre.

**Théorème 3.2.1** ( $\Gamma$ -convergence). *La suite d'énergies redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge, pour la topologie faible de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , vers la fonctionnelle limite :*

$$\begin{aligned} E_{el}: H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h e(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

avec  $C_h$  le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie :

$$C_{h,ijkl} M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2.$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si l'on a  $k_1 = k_2 = 8G$ . Dans ce cas, on a :

$$E_{el}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

avec :

$$\lambda = 0, \quad \mu = \frac{k}{2}.$$

*Démonstration.* On commence par prouver la propriété de construction. Soit donc  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . On veut construire une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2)$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(u_n) = E_{el}(u).$$

On suppose pour l'instant que  $u$  est dans  $C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = P_{\tau_n}(u),$$

et on suppose que l'on a, à partir d'un certain rang,  $u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2)$ . On a :

$$\begin{aligned} E_n(u_n) &= R_n(u_n) + T_n(u_n) \\ &= \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u_n) + \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u_n) \\ &= R_{1,\tau_n}(u_n) + T_{1,\tau_n}(u_n) + \varepsilon_n^{-2} R_{2,\tau_n}(\varepsilon_n u_n) + \varepsilon_n^{-2} T_{2,\tau_n}(\varepsilon_n u_n). \end{aligned}$$

Comme  $u$  est  $C^1$  sur  $\Omega$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\nabla \hat{u}_n\|_\infty \leq C.$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} R_{2,\tau_n}(\varepsilon_n u_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} T_{2,\tau_n}(\varepsilon_n u_n) = 0.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} R_{1,\tau_n}(u_n) + T_{1,\tau_n}(u_n) &= \int_{\tau_n} \frac{k_1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_{n,1}}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_{n,2}}{\partial y} \right)^2 dx + Q_{\tau_n}(u_n) \\ &\quad + 2 \int_{\tau_n} G \left( \frac{\partial \hat{u}_{n,1}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}_{n,2}}{\partial x} \right)^2 dx + 2 \int_{\tau_n} G \left( \frac{\partial \tilde{u}_{n,1}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_{n,2}}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Par régularité du bord on a  $|\partial\tau_{n,2}| \rightarrow 0$ . De plus, on a :

$$\begin{aligned} Q_{\tau_n}(u_n) &= \int_{\partial\tau_{n,2}} \frac{k_1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_{n,1}}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_{n,2}}{\partial y} \right)^2 dx \\ &\leq |\partial\tau_{n,2}| \|\nabla \hat{u}_n\|_\infty \\ &\leq C |\partial\tau_{n,2}|, \end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{\tau_n}(u_n) = 0.$$

De plus, les suites de fonctions  $(\nabla \hat{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\nabla \tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement vers la fonction  $\nabla u$ . D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{1,\tau_n}(u_n) = \int_{\Omega} \frac{k_1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 dx,$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{1,\tau_n}(u_n) = 4 \int_{\Omega} G \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(u_n) &= \int_{\Omega} \frac{k_1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 dx + 4 \int_{\Omega} G \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} k_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + 32G \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right]^2 dx \\ &= E_{\text{el}}(u) \end{aligned}$$

On prend maintenant une fonction  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  quelconque, et on conclut par densité de  $C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , par densité des fonctions de  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  (voir la proposition 3.2.1, par continuité de  $E_{\text{el}}$  et par extraction diagonale).

On montre maintenant la propriété de semi-continuité inférieure. Soit  $u \in H^1(\Omega)$ , et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$  dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . On veut prouver :

$$E_{\text{el}}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n(u_n).$$

D'après la formule de représentation intégrale, on a :

$$\begin{aligned} E_n(u_n) &= R_n(u_n) + T_n(u_n) \\ &= \varepsilon_n^{-2} \int_{\tau_n} V(\varepsilon_n u_n) \, dx + \varepsilon_n^{-2} Q_n(\varepsilon_n u_n) \\ &\geq \varepsilon_n^{-2} \int_{\Omega} V(\varepsilon_n u_n) \mathbb{1}_{\tau_n} \, dx. \end{aligned}$$

De plus, d'après le résultat de contrôle des restes des développements limités, on a pour tous  $k, i \in \mathbb{N}$  fixés :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} \int_{\Omega} V(\varepsilon_n u_n) \mathbb{1}_{\tau_n} \, dx &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} V_{k,n}(u_n) \mathbb{1}_{\tau_n} \, dx \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} V_{k,i}(u_n) \mathbb{1}_{\tau_n} \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} V_{k,i}(u) \, dx, \end{aligned}$$

par semi-continuité inférieure de  $u \rightarrow \int_{\Omega} V_i(u) \, dx$  (l'intégrande  $V_{k,i}$  est convexe). En faisant tendre  $i \rightarrow +\infty$ , on a :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n(u_n) \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \int_{\Omega} W(u) \, dx.$$

En faisant tendre  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} E_n(u_n) &\geq \int_{\Omega} W(u) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{k_1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{k_2}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 16G \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^2 \, dx. \end{aligned}$$

Le tenseur de rigidité s'écrit bien :

$$C_{h,ijkl} = k_i \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} + 16G(1 - \delta_{ij}) \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Le matériau limite est isotrope si, et seulement si, on a  $k_1 = k_2 = 8G$ . Dans ce cas, on note  $k$  l'unique constante du système, et l'énergie élastique s'écrit :

$$E(u) = \int_{\Omega} k |e(u)|^2 \, dx,$$

Le matériau est un matériau homogène et isotrope, de coefficients de Lamé :

$$\lambda = 0, \quad \mu = \frac{k}{2}.$$

Par conséquent, ce matériau à un coefficient de Poisson nul. En effet :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le lecteur peut également se reporter à la figure 3.5 pour une illustration. □

**Théorème 3.2.2** (Équi-coercivité). *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan, et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{adm}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

*On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :*

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

*Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .*

*Démonstration.* Ceci est une conséquence directe de la proposition 3.3.5. □

### 3.4.2 Calcul formel de la limite ponctuelle sur un réseau isotrope

Le tenseur de rigidité limite, obtenu précédemment, donne dans le cas isotrope un coefficient de Poisson nul. Ce n'est pas inattendu, étant donné la forme du réseau de ressorts (voir figure 3.5).

Pour obtenir un coefficient de Poisson non nul, on propose d'utiliser un maillage généré de manière stochastique. On présente un calcul formel de la limite simple des fonctionnelles d'énergies sur un maillage de ressorts où la direction des arêtes suit une loi uniforme sur le cercle unité. Soit donc  $U \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert connexe du plan, et  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tau_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathfrak{T}(U),$$

d'un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  vers l'ensemble des triangulations  $\mathfrak{T}(U)$  de  $U$ .



Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mu_n$  la mesure aléatoire :

$$\begin{aligned}\mu_n : \Omega &\rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{S}^1) \\ \omega &\mapsto \sum_{\nu \in \tau_{n,1}(\omega)} \delta_{e_\nu}.\end{aligned}$$

On suppose que la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie, presque sûrement, la propriété d'isotropie suivante :

$$\mu_n \rightharpoonup d\theta,$$

au sens de la convergence faible des mesures de Borel, où  $d\theta$  est la mesure canonique sur  $\mathcal{S}^1$ .

On regarde maintenant le comportement asymptotique de la somme :

$$\begin{aligned}E_n &= \sum_{\nu \in \tau_{n,1}} k |\nu|^2 (e_\nu^T \cdot e(u) \cdot e_\nu)^2 \\ &= \int_0^\pi k |\nu|^2 (e_\nu^T \cdot e(u) \cdot e_\nu)^2 d\mu_n.\end{aligned}$$

Par la propriété de convergence faible, on peut écrire (formellement) :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n &= \int_0^\pi (e_\nu^T \cdot e(u) \cdot e_\nu)^2 d\theta \\ &= E.\end{aligned}$$

En écrivant  $e_\nu = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ , on a :

$$\begin{aligned}(e_\nu^T \cdot e(u) \cdot e_\nu)^2 &= \left( \cos^2(\theta) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \cos(\theta) \sin(\theta) \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \sin^2(\theta) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \\ &= \cos^4(\theta) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \sin^4(\theta) \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + 2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} + 2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial u_1}{\partial x} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &\quad + 2 \cos(\theta) \sin^3(\theta) \frac{\partial u_2}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

On calcule séparément chaque terme :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^4(\theta) d\theta &= \int_0^\pi \sin^4(\theta) d\theta = \frac{3\pi}{8}, \\ \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta &= \frac{\pi}{8}, \\ \int_0^\pi \cos(\theta) \sin^3(\theta) d\theta &= \int_0^\pi \cos^3(\theta) \sin(\theta) d\theta = 0.\end{aligned}$$

D'où :

$$E = \frac{3k\pi}{8} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{3k\pi}{8} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{k\pi}{4} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{k\pi}{8} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2.$$

On rappelle maintenant l'expression de l'intégrande de l'énergie élastique d'un matériau continu, qui suit la loi de Hooke :

$$\begin{aligned} Ce(u) : e(u) &= (\lambda \operatorname{tr}(e(u)) I_2 + 2\mu e(u)) : e(u) \\ &= (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + 2\lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ &\quad + \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) = \frac{3k\pi}{8} \\ 2\lambda = \frac{k\pi}{4} \\ \mu = \frac{k\pi}{8}. \end{cases}$$

L'énergie discrète converge donc, au moins formellement, vers l'énergie continue d'un matériau de coefficients de Lamé  $(\frac{k\pi}{8}, \frac{k\pi}{8})$ . Notons qu'on obtient, pour ce matériau limite, un coefficient de Poisson  $\nu$  qui vaut :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat de Cauchy sur le coefficient de Poisson d'un réseau de ressorts.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement asymptotique d'un réseau régulier de ressorts de traction et de ressorts de torsion. Nous avons prouvé un théorème de  $\Gamma$ -convergence pour la suite d'énergies élastiques définies sur ces réseaux. Notons que nous avons donné la forme exacte de la  $\Gamma$ -limite, et que ce résultat utilise fortement la régularité du maillage. Nous avons également proposé un résultat d'équi-coercivité de la suite d'énergies, ainsi que le résultat de convergence des suites de minimums associé.

Cependant, le tenseur de rigidité obtenu, lorsqu'il est isotrope, a un coefficient de Poisson nul. Nous avons proposé un calcul formel de la limite simple de la suite d'énergies discrètes dans le cas où le réseau de ressorts serait stochastique, de loi isotrope. En particulier, on trouve dans ce cas un coefficient de Poisson fixe de  $1/4$ . Cela peut sembler déraisonnable,

et limiter l'intérêt d'une telle étude. Nous verrons cependant, dans le chapitre 5, qu'il n'en est rien. L'isotropie nous permettra de découpler les constantes de rigidité en traction et en torsion. Nous obtiendrons donc, au moins dans le cas de la limite simple, les constantes de Lamé comme combinaison linéaire des constantes de rigidité.

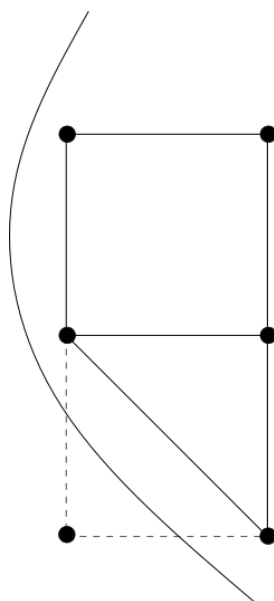


FIG. 3.1 : Réseau régulier à la frontière

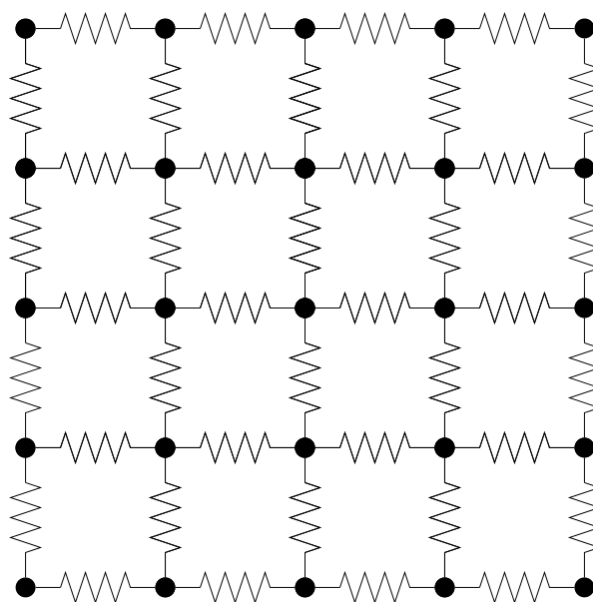


FIG. 3.2 : Réseau de ressorts régulier

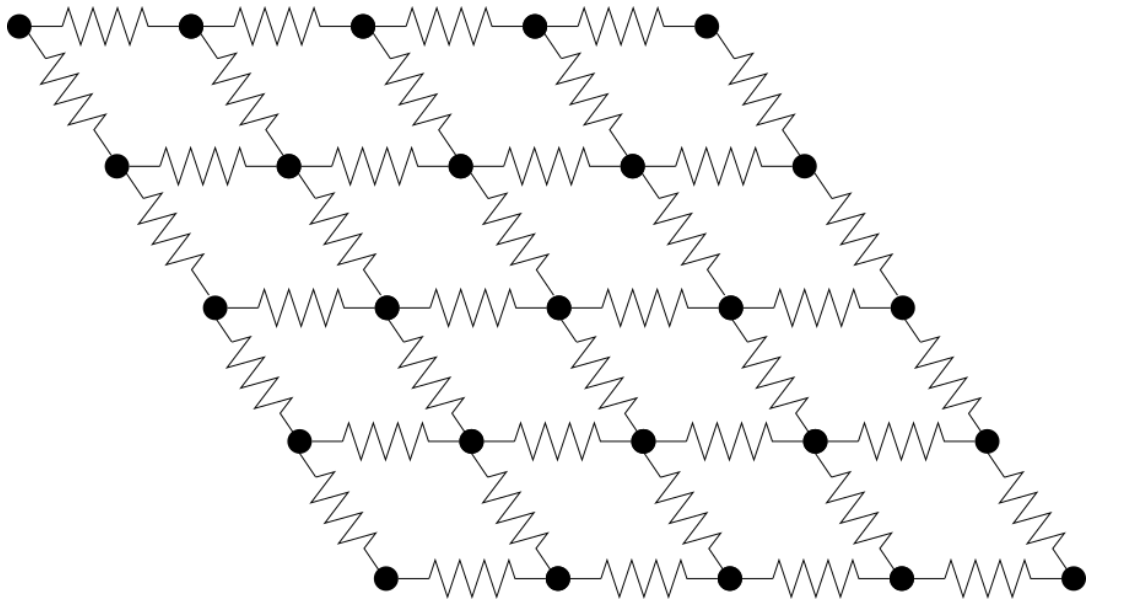


FIG. 3.3 : Réseau de ressorts régulier - invariance par certaines déformations

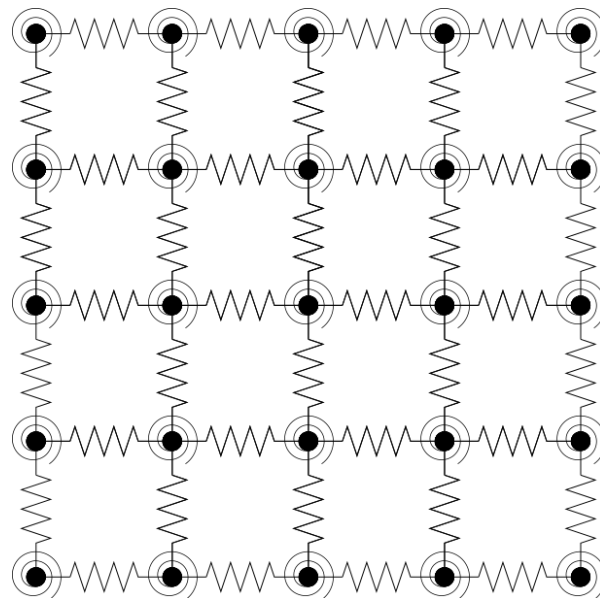


FIG. 3.4 : Réseau de ressorts régulier avec torsion



FIG. 3.5 : Réseau de ressorts régulier avec torsion – coefficient de Poisson nul



## CHAPITRE 4

---

### Un processus stochastique de maillages isotropes

---

#### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	112
4.2	Processus ponctuels . . . . .	113
4.2.1	Processus ponctuel simples sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	113
4.2.2	Processus stationnaires et processus de Poisson . . . . .	116
4.2.3	Processus ponctuels sur un espace polonais . . . . .	117
4.3	Mesure de Campbell et Distribution de Palm . . . . .	118
4.3.1	Cas d'un processus ponctuel simple . . . . .	118
4.3.2	Cas d'un processus ponctuel stationnaire . . . . .	120
4.4	Théorèmes ergodiques . . . . .	124
4.4.1	Processus ponctuels ergodiques . . . . .	124
4.4.2	Distribution de Palm et Propriétés ergodiques . . . . .	126
4.5	Processus de maillage de Poisson-Delaunay . . . . .	127
4.5.1	Maillages et Pavages . . . . .	127
4.5.2	Processus ponctuels marqués et Processus de Poisson-Delaunay . . . . .	128
4.5.3	Simplexe typique d'un maillage de Poisson-Delaunay . . . . .	130
4.6	Suite de maillages convergente et isotrope . . . . .	131
4.6.1	Définition de la suite de maillages . . . . .	131
4.6.2	Convergence de la suite de maillages . . . . .	132
4.6.3	Taille minimale des mailles . . . . .	134
4.7	Conclusion . . . . .	136

---



## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons, en dimension quelconque, une classe de maillages stochastiques, dont la loi de probabilité est homogène et isotrope. Nous rappelons que l'homogénéité est une propriété qui traduit l'invariance géométrique du système en fonction du point d'observation, tandis que l'isotropie est une notion qui caractérise un système dont les propriétés géométriques ne dépendent pas du sens, de l'orientation, dans lequel on l'observe. Les propriétés de cette loi nous permettent de construire une suite de tirages du processus stochastique qui fait converger presque sûrement les énergies définies sur les éléments – points, arrêtes, ... – de la suite de maillages, vers une énergie continue isotrope. L'isotropie a lieu ici à la limite, car un maillage, puisque discret, n'est pas isotrope : chaque direction d'arête est une direction privilégiée du système. L'isotropie obtenue est locale, c'est à dire que si l'on se restreint à un voisinage d'un point du maillage, on observe cette isotropie continue à la limite.

Cette méthode nous permettra, dans le chapitre suivant, de représenter un bloc de glace comme la limite d'un réseau de ressorts. Notons que l'homogénéité de la loi de probabilité n'implique pas une homogénéité du solide élastique. Nous pourrions facilement obtenir un matériau qui suit une loi de Lamé dont les coefficients varient dans le matériau. Nous soulignons également que la loi de probabilité utilisée permet de faire des calculs d'espérance explicites, et donc d'obtenir une expression de la limite simple des énergies définies sur la suite de maillage. Ceci est une nouveauté par rapports aux articles classiques de  $\Gamma$ -convergence sur des réseaux (voir [ACG11 ; LR11]), dans lesquels la loi de probabilité utilisée n'est pas explicite.

Pour construire cette suite de maillages, nous commençons par générer, de manière aléatoire, un ensemble de points. Puis, sur cet ensemble de points, nous construisons une triangulation de Delaunay. La loi du processus stochastique qui, à chaque tirage, associe un maillage de Delaunay, est isotrope. Grâce à un théorème ergodique, nous transférons cette isotropie moyenne sur les tirages en presque sure isotropie à la limite.

Dans une première partie, nous définissons la notion de processus stochastique ponctuel, qui à chaque tirage associe un ensemble de points localement fini. Nous nous intéressons en particulier au processus ponctuel de Poisson, qui est défini par une loi de Poisson sur la variable aléatoire qui compte le nombre de points dans un borélien. Nous présentons les fameux théorèmes de Campbell et de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit sous la forme d'une somme sur les points du maillage. Ce sont des notions classiques, et nous suivons principalement la présentation de S. N. Chiu et al. [CSKM13]. Pour certaines preuves, on pourra également consulter le traité en deux volumes de D. J. Daley et D. Vere-Jones [DV03 ; DV08].

Puis, dans un second temps, nous construisons le processus de Delaunay associé au processus de Poisson. Rappelons que la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points, si elle existe, est unique et définie comme **la triangulation qui maximise les angles des triangles du maillage**. Selon un résultat classique, il est facile de montrer qu'à presque tout tirage du processus ponctuel de Poisson, on peut associer une triangulation de Delaunay. Nous reproduisons un résultat qu'on trouvera dans la monographie de J. Møller [Møl94], qui donne la

loi de probabilité d'un triangle typique du processus de Poisson-Delaunay. Finalement, nous construisons sur un domaine du plan une suite de processus de Poisson-Delaunay, d'intensité croissante, dont nous montrons la convergence presque sure. Nous donnons également un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles, qui nous sera utile dans le chapitre suivant.

## 4.2 Processus ponctuels

### 4.2.1 Processus ponctuel simples sur $\mathbb{R}^d$

Intuitivement, on cherche à construire, de manière aléatoire, un ensemble de points dénombrable et sans points d'accumulation. On appelle processus ponctuel la fonction qui, à chaque tirage aléatoire, associe un tel ensemble de points. Notons que dans la littérature, ce type de processus ponctuel porte le nom de processus ponctuel simple, car les points ne sont pas comptés avec leur multiplicité. Ce sera presque toujours le cas dans ce chapitre : quasiment tous les processus ponctuels considérés sont simples, et on ne le précisera pas systématiquement. On précisera en revanche les processus ponctuels qui ne sont pas simples.

Notre processus ponctuel est donc une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des parties localement finies de  $\mathbb{R}^d$ , qu'on note  $\mathfrak{N}$ . On rappelle qu'un ensemble  $E \in \mathbb{R}^d$  est localement fini, si pour tout compact  $F \subset \mathbb{R}^d$ , l'ensemble  $E \cap F$  est fini.

On souhaite, au minimum, avoir accès à la variable aléatoire qui compte le nombre de points du processus. On définit donc la tribu  $\mathcal{N}$ , qui est la plus petite tribu qui rende mesurable les applications :

$$\begin{aligned} C_B : \mathfrak{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \varphi &\mapsto \text{Card}(\varphi \cap B), \end{aligned}$$

où  $B$  parcourt l'ensemble des boréliens de  $\mathbb{R}^d$ .

L'espace  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$  est un espace probabilisable, et on peut maintenant définir la notion de processus ponctuel.

**Définition 4.2.1** (Processus ponctuel simple). Un processus stochastique ponctuel simple de  $\mathbb{R}^d$  est une variable aléatoire  $\Phi$  d'un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  dans l'espace  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$ . Elle induit une loi de probabilité  $\mathbb{P}_\Phi$  sur  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$  : l'espace  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi)$  est un espace de probabilités.

Cette loi de probabilité nous permet de définir l'espérance d'une variable aléatoire  $F : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui dépend du tirage du processus ponctuel.

**Définition 4.2.2** (Espérance d'une variable aléatoire). Soit  $\Phi$  un processus ponctuel, et  $F : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle. On note :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F) &= \int_{\Omega} F(\Phi(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathfrak{N}} F(\varphi) \, d\mathbb{P}_\Phi(\varphi). \end{aligned}$$

On donne maintenant une famille génératrice de la tribu  $\mathcal{N}$ , qui nous sera utile par la suite. Ce résultat est non trivial, et est dû à Kurtz (voir [DV08] pour une preuve).

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ . On définit l'ensemble  $F_K \subset \mathfrak{N}$  par :*

$$F_K = \{\varphi \in \mathfrak{N} \mid \varphi \cap K = \emptyset\}.$$

*La famille des  $F_K$ , où  $K$  parcourt l'ensemble des compacts de  $\mathbb{R}^d$ , génère la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{N}$ .*

La première quantité intéressante associée à un processus ponctuel est son intensité. C'est une mesure qui caractérise le nombre moyen de points du processus dans un borélien  $B$ .

**Définition 4.2.3** (Intensité d'un processus ponctuel). Soit  $\Phi$  un processus ponctuel. On appelle intensité de  $\Phi$  la mesure  $\Lambda$  définie par :

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ B &\mapsto \mathbb{E}(\Phi(B)) = \mathbb{E}(\text{Card } \Phi \cap B). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $\Phi$  un processus ponctuel. Prouvons rapidement que l'intensité  $\Lambda$  associée est bien une mesure sur  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$ .

L'ensemble vide est bien de mesure nulle :

$$\begin{aligned} \Lambda(\emptyset) &= \mathbb{E}(\text{Card}(\Phi \cap \emptyset)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prouvons maintenant que  $\Lambda$  est bien  $\sigma$ -additive. Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille dénombrable de parties de  $\mathfrak{N}$ , deux à deux disjointes. On a :

$$\begin{aligned} \Lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) &= \mathbb{E}\left(\text{Card}\left(\Phi \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\text{Card}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi \cap E_n\right)\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\text{Card}(\Phi \cap E_n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \Lambda(E_n). \end{aligned}$$

□

On relie maintenant la moyenne d'une somme sur les points du processus avec l'intensité du processus. C'est la première formule de Campbell, et l'un des résultats clés qui nous permettront de calculer l'énergie moyenne d'un réseau de ressorts construit sur un processus ponctuel.

**Théorème 4.2.1** (Première formule de Campbell). *Soit  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et positive, on a :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x).$$

*Démonstration.* On prouve ce théorème en raisonnant de manière classique, c'est à dire en passant des fonctions indicatrices aux fonctions simples, puis aux limites de fonctions simples.

Soit  $B \subset \mathbb{R}^d$  un borélien. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi} \mathbb{1}_B(x) \right) &= \Lambda(B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_B(x) d\Lambda(x). \end{aligned}$$

Par linéarité, la relation reste vraie pour toute fonction  $f$  simple, c'est à dire pour toute fonction qui peut s'écrire sous la forme :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{B_n},$$

où la famille  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de boréliens, et la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de nombres réels positifs.

Soit maintenant  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable positive. Il existe une suite croissante de fonctions simples et positives  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \leq f_{n+1},$$

telle que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$ . Alors on a, presque sûrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{x \in \Phi} f_n(x) \leq \sum_{x \in \Phi} f_{n+1}(x).$$

On conclut en utilisant deux fois le théorème de convergence monotone. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi} f(x) \right) &= \int_{\Omega} \sum_{x \in \Phi} f(x) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{x \in \Phi} f_n(x) d\mathbb{P} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \sum_{x \in \Phi} f_n(x) d\mathbb{P} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) d\Lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\Lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x). \end{aligned}$$

□

### 4.2.2 Processus stationnaires et processus de Poisson

On décrit maintenant quelques caractéristiques intéressantes que peuvent avoir les processus ponctuels, comme l'homogénéité et l'isotropie. On donne la définition d'un processus ponctuel de Poisson, qui est l'unique processus stationnaire qui vérifie une propriété d'indépendance, nommée propriété d'éparpillement indépendant.

**Définition 4.2.4** (Processus stationnaire, isotrope, statique). Un processus stochastique ponctuel  $\Phi$  est dit :

1. stationnaire si, pour tout point  $x \in \mathbb{R}^d$ , les variables aléatoires  $\Phi$  et  $\Phi_x = \Phi + \{x\}$  ont la même distribution ;
2. isotrope si, pour toute rotation  $r \in SO(d)$ , les variables aléatoires  $\Phi$  et  $r \circ \Phi$  ont la même distribution ;
3. statique si il est à la fois stationnaire et isotrope.

On remarque que, lorsque  $\Phi$  est un processus stationnaire, son intensité est proportionnelle à la mesure de Lebesgue, notée  $\nu_d$ .

**Proposition 4.2.2.** Soit  $\Phi$  un processus stationnaire, dont l'intensité  $\Lambda$  est finie sur les boréliens bornés. Il existe un réel  $\lambda$  positif, possiblement infini, tel que :

$$\Lambda = \lambda \nu_d.$$

*Démonstration.* Soit  $\Phi$  un processus stationnaire. Son intensité  $\Lambda$  est une mesure invariante par translations. De plus, elle est finie sur les boréliens bornés de  $\mathbb{R}^d$ . Comme la mesure de Lebesgue est l'unique mesure sur  $\mathbb{R}^d$  qui est invariante par translations et qui vaut 1 sur le pavé unité, on en déduit que la mesure  $\Lambda$  est proportionnelle à la mesure de Lebesgue. On a de plus :

$$\lambda = \Lambda([0, 1]^d).$$

□

On présente maintenant la notion de processus de Poisson, qui est le processus ponctuel le plus simple possible.

**Définition 4.2.5** (Processus de Poisson). Un processus stochastique ponctuel  $\Phi$  est dit de Poisson s'il vérifie les hypothèses suivantes :

1.  $\Phi$  est à éparpillement indépendant, c'est à dire que si  $(B_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$  sont des boréliens deux à deux disjoints ; alors les variables aléatoires  $\Phi(B_i)$  sont indépendantes ;
2. pour tout  $B$  borélien, la variable aléatoire  $\Phi(B) = \text{Card}(\Phi \cap B)$  suit une loi de poisson de moyenne  $\mu = \lambda \nu_d(B)$ , c'est à dire que :

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu).$$

Notons que l'on a directement la propriété suivante.

**Proposition 4.2.3.** *Tout processus de Poisson est un processus statique.*

La loi utilisée pour définir le processus de Poisson peut sembler arbitraire. D'après le théorème suivant, c'est la seule loi qui donne un processus stationnaire – moyennant l'hypothèse d'éparpillement indépendant. Nous verrons dans la suite que l'hypothèse d'éparpillement indépendant est très forte, et qu'elle permet de faire facilement des calculs sur les processus de Poisson.

**Théorème 4.2.2** (Caractérisation d'un processus de Poisson). *Un processus ponctuel  $\Phi$  est un processus de Poisson si et seulement si il est stationnaire et à éparpillement indépendant.*

On trouvera une preuve de ce théorème dans D. J. Daley et D. Vere-Jones [DV03]. On donne, en figure 4.1 quatre tirages d'un processus de Poisson d'intensité 10 dans le carré unité, à titre d'illustration.

### 4.2.3 Processus ponctuels sur un espace polonais

On présente ici une généralisation des processus ponctuels simples, au cas où le processus stochastique n'est plus à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  mais dans un espace polonais. Cela nous servira pour parler de processus marqués, *i.e.* de processus ponctuel pour lequel chaque point du tirage est associé à une marque, dans notre cas un simplexe de  $\mathbb{R}^d$ . Pour tous les résultats de cette section, on renvoie à [DV03 ; DV08].

**Définition 4.2.6** (Espace polonais). Soit  $X$  un espace métrisable à base dénombrable. On dit que c'est un espace polonais si sa topologie peut être définie par une distance qui en fait un espace complet. On note  $(X, \mathcal{B}_X)$  l'ensemble muni de la tribu borélienne issue d'une telle distance.

**Définition 4.2.7** (Mesures de comptage). Soit  $(X, \mathcal{B}_X)$  un espace polonais. Une mesure  $\mu$  sur  $(X, \mathcal{B}_X)$  est dite mesure de comptage si elle vérifie :

1. (valeurs entières)  $\mu$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ;
2. ( $\sigma$ -finie fort)  $\forall A \in \mathcal{B}_X$  borné,  $\mu(A) < +\infty$ .

On note  $\mathcal{M}_X^\#$  l'ensemble des mesures de comptage sur  $(X, \mathcal{B}_X)$ .

**Définition 4.2.8** (Mesures de comptage simples). Soit  $(X, \mathcal{B}_X)$  un espace polonais. Une mesure de comptage  $\mu$  est une mesure de comptage simple si elle vérifie :

$$\forall x \in X, \quad \mu(\{x\}) \leq 1.$$

On note  $\mathcal{N}_X^\#$  l'ensemble des mesures de comptage simples sur  $(X, \mathcal{B}_X)$ .

On munit maintenant l'ensemble  $\mathcal{M}_X^\#$  d'une topologie. On verra qu'elle est métrisable et qu'elle donne à  $\mathcal{M}_X^\#$  une structure d'espace polonais. Ce résultat est une des raisons de l'introduction de la notion d'espace polonais.

**Définition 4.2.9** (Convergence faible-dièse de mesures). Soit  $(X, \mathcal{B}_X)$  un espace polonais, et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_X^\#$  une suite de mesures de comptage sur cet espace. On dit que la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$

converge au sens de la convergence faible-dièse vers la mesure  $\mu$  si, pour toute fonction  $f \in C_b(X)$  continue, bornée et à support borné, on a :

$$\int_X f \, d\mu_n \rightarrow \int_X f \, d\mu.$$

Notons que la notion de convergence faible-dièse correspond, dans le cas où l'espace polonais  $X$  est localement compact, à la notion de convergence vague qui est plus classique.

**Proposition 4.2.4.** *Soit  $(X, \mathcal{B}_X)$  un espace polonais. La topologie de la convergence faible-dièse sur  $\mathcal{M}_X^\#$  est métrisable, et l'espace  $\mathcal{M}_X^\#$  est un espace polonais pour cette métrique. On note  $(\mathcal{M}_X^\#, \mathcal{B}(\mathcal{M}_X^\#))$  l'ensemble des mesures de comptages muni de sa tribu borélienne.*

On note que l'ensemble des mesures de comptages simples  $\mathcal{N}_X^\#$  n'est pas un espace polonais. Il n'est pas fermé pour la convergence faible-dièse : on peut construire facilement une suite de mesures de comptages simples qui converge faiblement-dièse vers une mesure de comptage qui n'est pas simple.

On justifie maintenant la notation  $(N, \mathcal{B}_N)$  que l'on avait utilisé pour les processus ponctuels à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposition 4.2.5.** *Soit  $(X, \mathcal{B}_X)$  un espace polonais. La tribu borélienne sur  $(\mathcal{M}_X^\#, \mathcal{B}(\mathcal{M}_X^\#))$  est la plus petite qui rende les applications :*

$$\forall A \in \mathcal{B}_X, \quad \mu \mapsto \mu(A)$$

*mesurables.*

On peut donc maintenant définir la notion de processus ponctuels à valeurs dans un espace polonais  $X$ .

**Définition 4.2.10** (Processus ponctuels). Soit  $X$  un espace polonais. On appelle processus ponctuel à valeurs dans  $X$  une variable aléatoire  $\Phi: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{M}_X^\#, \mathcal{B}(\mathcal{M}_X^\#))$ .

On définit également la notion de processus ponctuels marqués.

**Définition 4.2.11** (Processus ponctuels marqués). Soit  $X$  et  $K$  deux espaces polonais. On appelle processus ponctuel marqué de base  $X$  et de marque  $K$  un processus ponctuel noté  $N$ , à valeurs dans  $(X \times K, \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_K)$ , tel que le processus de base :

$$\forall A \in \mathcal{M}_X^\#, \quad N_g(A) = N(A \times K),$$

est un processus ponctuel.

## 4.3 Mesure de Campbell et Distribution de Palm

### 4.3.1 Cas d'un processus ponctuel simple

On souhaite maintenant connaître la dépendance d'une fonction du maillage à tous les points du voisinage. Pour ce faire, on introduit la mesure de Campbell.

**Définition 4.3.1** (Mesure de Campbell). Soit  $\Phi$  un processus ponctuel. On définit la mesure de Campbell  $\mathcal{C}$  sur  $(\mathbb{R}^d \times \mathfrak{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{N})$  par :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(B \times N) &= \mathbb{E}(\Phi(B) \mathbb{1}_N) \\ &= \int_N \varphi(B) d\mathbb{P}_\Phi(\varphi).\end{aligned}$$

et ce pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , et tout  $N \in \mathcal{N}$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{C}$  est  $\sigma$ -additive et  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{N}$ , elle s'étend en une unique mesure sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{N}$ .  $\square$

Lorsque l'on applique cette mesure à une fonction du maillage, on obtient la très utile seconde formule de Campbell.

**Théorème 4.3.1** (Seconde formule de Campbell). Soit  $f: \mathbb{R}^d \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et positive, on a :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi) \right) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathfrak{N}} f(x, \varphi) d\mathcal{C}((x, \varphi)).$$

*Démonstration.* On prouve le théorème en raisonnant de manière classique, c'est à dire en passant des fonctions indicatrices aux fonctions simples – i.e. les fonctions qui s'écrivent comme la somme finie de fonctions indicatrices –, puis aux fonctions mesurables comme limites de fonctions simples.  $\square$

On remarque que l'intensité de  $\Phi$  est la marginale de la mesure de Campbell sur  $\mathbb{R}^d$ , c'est à dire :

$$\mathcal{C}(\cdot, \mathfrak{N}) = \Lambda.$$

Ainsi, pour tout ensemble mesurable  $N \in \mathcal{N}$  fixé, la mesure  $\mathcal{C}(\cdot, N)$  est absolument continue par rapport à  $\Lambda$ . On peut donc introduire sa dérivée de Radon-Nikodym, définie sur un ensemble de  $\Lambda$ -mesure non nulle, qu'on note  $\mathbb{P}_x(N)$ , et qui vérifie :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \int_B \mathbb{P}_x(N) d\Lambda(x) = \mathcal{C}(B, N).$$

La théorie de la désintégration de mesures nous permet de définir  $\Lambda$ -presque partout la mesure  $\mathbb{P}_x: N \mapsto \mathbb{P}_x(N)$  sur  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$ . On regardera D. J. Daley et D. Vere-Jones [DV03], et plus particulièrement la section A1.5, pour un développement sur la désintégration de mesures.

**Définition 4.3.2** (Distribution de Palm). Soit  $\Phi$  un processus ponctuel,  $\Lambda$  son intensité et  $\mathcal{C}$  sa mesure de Campbell. Il existe une famille de mesures  $(\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ , qu'on nomme la famille des distributions de Palm, unique à un ensemble de  $\Lambda$ -mesure nulle près et qui vérifie :

1. pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{P}_x$  est une mesure de probabilités sur  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$  ;
2. pour tout  $N \in \mathcal{N}$ , la fonction  $x \rightarrow \mathbb{P}_x(N)$  est mesurable ;



3. pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et pour tout  $N \in \mathcal{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(B \times N) &= \int_B \mathbb{P}_x(N) d\Lambda(x) \\ &= \int_B \int_N d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).\end{aligned}$$

On obtient immédiatement la formule qui suit.

**Théorème 4.3.2** (Formule de Campbell-Mecke). *Soit  $f: \mathbb{R}^d \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et positive, on a :*

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).$$

### 4.3.2 Cas d'un processus ponctuel stationnaire

Les notions d'isotropie et de stationnarité se traduisent en termes de mesure de Palm, et c'est l'objet de la proposition suivante. On renvoie à [DV08] pour une preuve.

**Proposition 4.3.1** (Distribution de Palm d'un processus stationnaire, isotrope). *Soit  $\Phi$  un processus ponctuel, et  $(\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  sa famille des distributions de Palm. On a :*

1. *si  $\Phi$  est stationnaire, alors on a presque partout  $\mathbb{P}_x(\cdot) = \mathbb{P}_0(\cdot - \{x\})$  ;*
2. *si  $\Phi$  est isotrope, alors  $\mathbb{P}_x$  est isotrope presque partout.*

Notons que la définition de la distribution de Palm fait appel à des outils fins de probabilités conditionnelles. Dans le cas stationnaire, on peut définir la distribution de Palm de manière plus simple, par la formule qui suit. On montre alors l'équivalence entre les deux définitions en utilisant la formule de Campbell-Mecke.

**Proposition 4.3.2.** *Soit  $\Phi$  un processus ponctuel stationnaire d'intensité  $\Lambda$  finie sur les boréliens bornés. On note  $\Lambda = \lambda \nu_d$ , et on peut définir la distribution de Palm  $\mathbb{P}_0$  par la formule suivante :*

$$\forall Y \in \mathcal{N}, \quad \mathbb{P}_0(Y) = \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathfrak{N}} \sum_{x \in \varphi \cap B} \mathbb{1}_Y(\varphi - x) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi),$$

*et cette définition est indépendante (par stationnarité) du borélien  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  choisi.*

*Démonstration.* On définit, pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , et pour tout  $Y \in \mathcal{N}$ , la quantité  $\mu(B, Y)$  par :

$$\mu(B, Y) = \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi \cap B} \mathbb{1}_Y(\Phi - x) \right).$$

Pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$ , on a alors, par stationnarité de  $\Phi$  :

$$\begin{aligned}\mu(B + y, Y) &= \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi \cap (B+y)} \mathbb{1}_Y(\Phi - x) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{x-y \in (\Phi-y) \cap B} \mathbb{1}_Y((\Phi - y) - (x - y)) \right) \\ &= \mu(B, Y).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $Y \in \mathbb{N}$ , la mesure  $\mu(\cdot, Y)$  est stationnaire. De plus, elle est finie sur les boréliens bornés. Il existe donc une quantité  $Q(Y)$  telle que :

$$\mu(B, Y) = \lambda \nu_d(B) Q(Y).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}Q(\mathfrak{N}) &= \frac{\mathbb{E}(\Phi \cap B)}{\lambda \nu_d(B)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

La fonction  $Q$  est donc une mesure de probabilité sur  $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$ . On a de plus, en utilisant la formule de Campbell-Mecke :

$$\begin{aligned}Q(Y) &= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathfrak{N}} \sum_{x \in \varphi \cap B} \mathbb{1}_Y(\varphi - x) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathfrak{N}} \mathbb{1}_Y(\varphi - x) \mathbb{1}_B(x) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathfrak{N}} \mathbb{1}_{Y-x}(\varphi - x) \mathbb{1}_B(x) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x) \\ &= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathfrak{N}} \mathbb{1}_Y(\varphi) \mathbb{1}_B(x) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x) \\ &= \int_{\mathfrak{N}} \mathbb{1}_Y(\varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) \\ &= \mathbb{P}_0(Y).\end{aligned}$$

□

On interprète alors  $\mathbb{P}_0(\Phi \in Y)$  comme la probabilité que  $\Phi$  soit dans la configuration  $Y$ , sachant que 0 est dans  $\Phi$ , c'est à dire :

$$\mathbb{P}_0(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\Phi \in Y \mid 0 \in \Phi).$$

On obtient également une reformulation de la formule de Campbell-Mecke.

**Théorème 4.3.3** (Formule de Campbell-Mecke d'un processus stationnaire). *Soit  $\Phi$  un processus ponctuel stationnaire d'intensité  $\lambda$ , et  $f: \mathbb{R}^d \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et positive, on a :*

$$\int_{\mathfrak{N}} \sum_{x \in \varphi} f(x, \varphi_{-x}) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) dx.$$

Si  $\Phi$  est un processus de Poisson, on obtient une expression simplifiée de la distribution de Palm  $\mathbb{P}_0$ .

**Proposition 4.3.3.** *Soit  $\Phi$  un processus de Poisson, et  $x$  un point de  $\mathbb{R}^d$ . Alors la distribution de Palm  $\mathbb{P}_x$  vérifie :*

$$\mathbb{P}_x(\Phi \in Y) = \mathbb{P}(\Phi \cup \{x\} \in Y) \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{N}.$$

*Démonstration.* Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ . On note :

$$F_K = \{\varphi \in \mathfrak{N} \mid \varphi \cap K = \emptyset\},$$

et on rappelle que la famille des  $F_K$  engendre  $\mathcal{N}$ .

Soit  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  un borélien. Comme  $\Phi$  est à éparpillement indépendant, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi \cap B} \mathbb{1}_{F_K}(\Phi) \right) &= \mathbb{E}(\Phi(B \setminus K) \mathbb{1}_{F_K}(\Phi)) \\ &= \mathbb{E}(\Phi(B \setminus K)) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_K}(\Phi)) \\ &= \lambda \nu_d(B \setminus K) \mathbb{P}(\Phi \in F_K) \\ &= \int_{B \setminus K} \mathbb{P}(\Phi \in F_K) d\Lambda(x) \\ &= \int_B \mathbb{P}(\Phi \cup \{x\} \in F_K) d\Lambda(x). \end{aligned}$$

Or, on a, en utilisant la formule de Campbell-Mecke :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi \cap B} \mathbb{1}_{F_K}(\Phi) \right) = \int_B \mathbb{P}_x(\Phi \in F_K) d\Lambda(x).$$

La formule est valable pour tout borélien  $B$ . On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}_x(\Phi \in F_K) = \mathbb{P}(\Phi \cup \{x\} \in F_K).$$

Comme les ensembles  $F_K$  engendrent  $\mathcal{N}$ , on en déduit :

$$\forall N \in \mathcal{N}, \quad \mathbb{P}_x(\Phi \in N) = \mathbb{P}(\Phi \cup \{x\} \in N).$$

□

En incluant cette propriété dans la formule de Campbell-Mecke, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 4.3.4** (Formule de Slivnyak-Mecke). *Soit  $\Phi$  un processus de Poisson. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute fonction  $f: (\mathbb{R}^d)^n \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable positive, on a :*

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi} f(x_1, \dots, x_n, \Phi) \right) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^{dn}} \mathbb{E} (f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})) \, dx_1 \dots dx_n,$$

où la somme a lieu sur tous les sous-ensembles  $\{x_1, \dots, x_n\} \in \Phi$  de  $n$  points distincts.

*Démonstration.* Pour  $n = 1$ , on a, en utilisant la formule de Campbell-Mecke :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{x_1 \in \Phi} f(x_1, \Phi) \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x_1, \varphi) \, d\mathbb{P}_x(\varphi) \, d\Lambda(x_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x_1, \varphi \cup \{x_1\}) \, d\mathbb{P}(\varphi) \, d\Lambda(x_1) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (f(x_1, \Phi \cup \{x_1\})) \, dx_1. \end{aligned}$$

On prouve le résultat pour  $n$  quelconque en utilisant un raisonnement par récurrence. On se limitera ici au cas  $n = 2$ , par soucis de lisibilité. On a :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_1, x_2 \in \Phi} f(x_1, x_2, \Phi) \right) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left( \sum_{x_1 \in \Phi} \sum_{x_2 \in \Phi} f(x_1, x_2, \Phi) \right) - \frac{1}{2} \mathbb{E} \left( \sum_{x_1 \in \Phi} f(x_1, x_1, \Phi) \right).$$

Tout d'abord, on a :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_1 \in \Phi} f(x_1, x_1, \Phi) \right) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (f(x_1, x_1, \Phi \cup \{x_1\})) \, dx_1.$$

On pose maintenant :

$$F(x_1, \Phi) = \sum_{x_2 \in \Phi \cup \{x_1\}} f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1\}).$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{x_1 \in \Phi} \sum_{x_2 \in \Phi} f(x_1, x_2, \Phi) \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{x_1 \in \Phi} F(x_1, \Phi) \right) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (F(x_1, \Phi \cup \{x_1\})) \, dx_1. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F(x_1, \Phi \cup \{x_1\})) &= \mathbb{E}\left(\sum_{x_2 \in \Phi \cup \{x_1\}} f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1\})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{x_2 \in \Phi \setminus \{x_1\}} f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1\})\right) + \mathbb{E}(f(x_1, x_1, \Phi \cup \{x_1\})).\end{aligned}$$

Et, comme on a  $\mathbb{P}(x_1 \notin \Phi) = 1$ , on a de plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{x_2 \in \Phi \setminus \{x_1\}} f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1\})\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{x_2 \in \Phi} f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1\})\right) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1, x_2\})) \, dx_2.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{x_1, x_2 \in \Phi} f(x_1, x_2, \Phi)\right) &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1, x_2\})) \, dx_1 \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(f(x_1, x_1, \Phi \cup \{x_1\})) \, dx_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbb{E}\left(\sum_{x_1 \in \Phi} f(x_1, x_1, \Phi)\right) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(f(x_1, x_2, \Phi \cup \{x_1, x_2\})) \, dx_1.\end{aligned}$$

□

## 4.4 Théorèmes ergodiques

Dans cette section, on introduit des théorèmes ergodiques. Ils interviennent quand l'espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est invariant. Sous certaines conditions, ils permettent de dire que la moyenne de variables aléatoires converge presque sûrement vers l'espérance :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X).$$

### 4.4.1 Processus ponctuels ergodiques

On commence par définir la notion de famille régulière de  $\mathbb{R}^d$ . On renvoie à l'article de A. A. Tempel'man [Tem72] pour la définition la plus générale de famille régulière, qui nous sera utile par la suite.

**Définition 4.4.1.** Soit  $\mathcal{I}$  la famille d'ensembles du plan :

$$\mathcal{I} = \{[a, b[ \subset \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}^2, a < b\}.$$

Soit encore  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I}$  une famille d'ensembles de  $\mathcal{I}$ . On dit que  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est régulière si il existe une constante  $C > 0$  et une autre famille  $\{I'_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I}$  telles que :

1.  $I_k \subset I'_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ;
2.  $I'_k \subset I'_h$  pour tous  $k, h \in \mathbb{N}, k < h$ ;
3.  $0 < |I'_k| < C |I_k|$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Si, de plus, on peut choisir la famille  $\{I'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I'_k,$$

alors on écrit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} I'_k = \mathbb{R}^2.$$

On définit maintenant la notion de processus ponctuels ergodiques.

**Définition 4.4.2** (Processus ponctuels ergodiques). Un processus ponctuel stationnaire  $\Phi$  est ergodique si, pour tous boréliens  $V, W \in \mathcal{N}$ , on a :

$$\frac{1}{\nu_d([-a, a]^d)} \int_{[-a, a]^d} (\mathbb{P}_\Phi(S_x V \cap W) - \mathbb{P}_\Phi(V) \mathbb{P}_\Phi(W)) dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0,$$

où l'on a noté  $S_x V = \{x + y, y \in V\}$ .

**Théorème 4.4.1.** Soit  $\Phi$  un processus ponctuel ergodique, et  $f: (\mathfrak{N}, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi) \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction mesurable et positive, qui vérifie :

$$\mathbb{E}(f) < +\infty.$$

On note  $B_n$  la boule de  $\mathbb{R}^d$ , centrée en 0 et de rayon  $n$ . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\nu_d(B_n)} \int_{B_n} f(\Phi_x) dx = \mathbb{E}(f(\Phi)).$$

Les processus de Poisson sont un exemple de processus ergodiques.

**Proposition 4.4.1** (Ergodicité des processus de Poisson). Tout processus de Poisson est un processus ergodique.

Certaines transformations de processus ergodiques sont ergodiques.

**Proposition 4.4.2.** Soit  $(X, \mathcal{B}_X)$  un espace polonais, et soit  $C$  une application continue sur  $(\mathcal{N}_X^\#, \mathcal{B}(\mathcal{N}_X^\#))$ . On suppose de plus que  $C$  est invariante par translations :

$$\forall x \in X, \forall \varphi \in \mathcal{N}_X^\#, \quad C(S_x \varphi) = S_x C(\varphi).$$

Alors, si  $\Phi$  est un processus ponctuel ergodique,  $C \circ \Phi$  est un processus ponctuel ergodique.

*Démonstration.* Le processus ponctuel  $C \circ \Phi$  est ergodique si et seulement si, pour tous boréliens  $V, W \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_X^\#)$ , on a :

$$\frac{1}{\nu_d([-a, a]^d)} \int_{[-a, a]^d} (\mathbb{P}_{C \circ \Phi}(S_x V \cap W) - \mathbb{P}_{C \circ \Phi}(V) \mathbb{P}_{C \circ \Phi}(W)) dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit donc  $V, W \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_X^\#)$ . On a :

$$\mathbb{P}_{C \circ \Phi}(V) = \mathbb{P}_\Phi(C^{-1}(V)).$$

On a également, pour tout  $x \in X$  :

$$\begin{aligned} C^{-1}(S_x V) &= \left\{ \varphi \in \mathcal{N}_X^\# \mid C(\varphi) \in S_x V \right\} \\ &= \left\{ \varphi \in \mathcal{N}_X^\# \mid S_{-x} C(\varphi) \in V \right\} \\ &= \left\{ \varphi \in \mathcal{N}_X^\# \mid C(S_{-x}(\varphi)) \in V \right\} \\ &= S_x C^{-1}(V). \end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{C \circ \Phi}(S_x V \cap W) &= \mathbb{P}_\Phi(C^{-1}(S_x V \cap W)) \\ &= \mathbb{P}_\Phi(C^{-1}(S_x V) \cap C^{-1}(W)) \\ &= \mathbb{P}_\Phi(S_x C^{-1}(V) \cap C^{-1}(W)). \end{aligned}$$

Et, l'ergodicité de  $C \circ \Phi$  est une conséquence de l'ergodicité de  $\Phi$ . □

#### 4.4.2 Distribution de Palm et Propriétés ergodiques

On introduit maintenant un théorème ergodique. Ce théorème lie la forme globale d'un seul tirage avec la forme moyenne en un point de plusieurs tirages. Pour une preuve, on regardera D. J. Daley et D. Vere-Jones [DV08].

**Théorème 4.4.2.** *Soit  $\Phi$  un processus de Poisson, et  $f$  une fonction mesurable et positive qui vérifie :*

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi} f(\Phi_{-x}) \right) < +\infty.$$

On note  $B_n$  la boule de  $\mathbb{R}^d$ , centrée en 0 et de rayon  $n$ . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(B_n)} \sum_{x_i \in B_n \cap \Phi} f(\Phi_{-x_i}) = \int_{\mathfrak{N}} f(\varphi) d\mathbb{P}_0(x).$$

## 4.5 Processus de maillage de Poisson-Delaunay

### 4.5.1 Maillages et Pavages

On donne maintenant la définition des maillages par simplexes, appelés abusivement maillages, et des pavages de  $\mathbb{R}^d$ , ainsi que quelques propriétés géométriques utiles. Pour tous ces résultats de géométrie, on consultera J. Møller [Møl94].

On commence par définir la notion de maillage de  $\mathbb{R}^d$ , qu'on trouvera également dans l'annexe A.

**Définition 4.5.1** (Maillage). On appelle maillage de  $\mathbb{R}^d$  un ensemble  $\tau = \bigcup_{i=0}^p \tau^i$  qui vérifie :

1.  $\forall i \in \{0, \dots, d\}, \forall \omega \in \tau_i, \omega$  est de dimension de Hausdorff  $i$  ;
2.  $\forall \omega \in \tau_d, \bar{\omega}$  est un simplexe ;
3.  $\bigcup_{\omega \in \tau_d} \bar{\omega} = \mathbb{R}^d$  ;
4.  $\forall i \in \{0, \dots, d-1\}, \forall \omega \in \tau_i, \exists \omega_1, \omega_2 \in \tau_{i+1}$  tels que  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$ .

On définit maintenant la notion duale de pavage.

**Définition 4.5.2.** On appelle pavage de  $\mathbb{R}^d$  une famille localement finie de polyèdres  $P = (P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de dimension  $d$ , telle que :

1.  $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies \overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset$  ;
2.  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i = \mathbb{R}^d$ .

On définit maintenant une notion de régularité pour les pavages.

**Définition 4.5.3** (Pavage normal). Un pavage de  $\mathbb{R}^d$  est dit normal si, pour tout entier  $k > 0$ , et pour toute intersection non vide de  $k+1$  polyèdres, l'intersection est de dimension  $d-k$  (où 0 si  $d-k < 0$ ).

Un type de pavage fondamental est le pavage de Voronoi associé à un ensemble localement fini de points de  $\mathbb{R}^d$ . On propose en figure 4.2 un exemple de nuage de points et son diagramme de Voronoi associé.

**Définition 4.5.4** (Diagramme de Voronoi). Soit  $\varphi \in \mathfrak{N}$  un ensemble localement fini de points. On appelle diagramme de Voronoi associé à  $\varphi$  le pavage régulier de  $\mathbb{R}^d$  par  $(C(x))_{x \in \varphi}$ , où la cellule  $C(x)$  est définie par :

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(y, x) < \inf_{z \in \varphi \setminus \{x\}} \text{dist}(y, z) \right\}.$$

On donne maintenant une condition sur les ensembles de points pour que le diagramme de Voronoi associé soit normal.

**Définition 4.5.5** (Ensemble de points en position générale). Soit  $\varphi \in \mathfrak{N}$  un ensemble localement fini de points. On dit que ces points sont en position générale si :



1. pour tout  $k \in \{2, \dots, d\}$ , aucun  $(k+1)$ -uplet de points de  $\varphi$  ne se trouve dans un sous espace affine de  $\mathbb{R}^d$  de dimension  $k-1$  ;
2. aucun  $(d+1)$ -uplet de points de  $\varphi$  ne se trouve sur la frontière d'une sphère de  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposition 4.5.1.** *Soit  $\varphi$  un ensemble localement fini de points. On suppose que  $\varphi$  est en position générale. Alors le diagramme de Voronoi  $\mathcal{V}_\varphi$  est un pavage normal.*

On définit maintenant la notion duale du diagramme de Voronoi, qui existe quand le diagramme de Voronoi est un pavage normal.

**Proposition 4.5.2.** *Soit  $\mathcal{V}$  un diagramme de Voronoi normal. On peut lui associer un unique maillage de Delaunay  $\mathcal{D} \in \mathfrak{T}$  défini par :*

$$\mathcal{D} = \text{conv}(\{x_0, \dots, x_d \in \mathcal{V} \mid \forall i, j \in \{0, \dots, d\}, C(x_i) \cap C(x_j) \neq \emptyset\})$$

**Corollaire 4.5.1.** *Soit  $\varphi$  un ensemble de points en position générale. On peut construire un unique maillage de Delaunay noté  $\mathcal{D}_\varphi$ .*

On remarque que si  $\varphi$  est un ensemble de points en position générale,  $\varphi$  est l'ensemble des sommets du maillage de Delaunay  $\mathcal{D}_\varphi$  construit sur le pavage de Voronoi  $\mathcal{V}_\varphi$ .

## 4.5.2 Processus ponctuels marqués et Processus de Poisson-Delaunay

Le théorème suivant nous assure que les points d'un processus de Poisson sont presque sûrement en position générale.

**Théorème 4.5.1.** *Soit  $\Phi$  un processus de Poisson. Les points de  $\Phi$  sont presque sûrement en position générale*

*Démonstration.* on utilise la formule de Slivnyak-Mecke du 4.3.4. On ne vérifie ici que le premier point de la 4.5.5, le deuxième point s'obtient par une méthode identique. Soit  $k \in \{2, \dots, d\}$ , on note  $A_k$  l'ensemble des  $(k+1)$ -uplets qui sont dans un même espace de dimension  $k-1$  et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{x_0, \dots, x_k \in \Phi} \mathbb{1}_{A_k}(x_0, \dots, x_k) \right) &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \int_{\mathbb{R}^{d(k+1)}} \mathbb{1}_{A_k}(x_0, \dots, x_k) dx_0 \dots dx_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Pour tout ensemble de points en position générale, le diagramme de Voronoi associé  $\mathcal{V}_\Phi$  est normal. De plus, à tout diagramme de Voronoi normal, on peut associer un unique maillage de Delaunay. Nous en déduisons que, pour presque chaque tirage d'un processus de Poisson, il existe un unique maillage de Delaunay sous-jacent.

Nous pouvons donc considérer le processus stochastique qui, à chaque tirage, associe le maillage de Delaunay sous-jacent au processus de Poisson. L'une des manières de faire serait de développer la notion de processus stochastique de maillage. Il faudrait, entre autres, définir

une tribu sur l'ensemble des maillages de  $\mathbb{R}^d$ . On renvoie à [CSKM13] pour une exposition plus détaillée sur cette méthode.

Ce ne sera pas l'approche utilisée dans la suite. Pour analyser la loi du simplexe typique d'un processus de maillage, on préférera la notion de processus ponctuel marqué. Nous commençons par associer au processus de Poisson  $\Phi$  le processus des centres  $C_\Phi$ . Puis, à chaque point de  $C_\Phi$ , nous associeront le simplexe du maillage de Delaunay associé.

**Définition 4.5.6** (Ensemble des centres). Soit  $\varphi \in \mathfrak{N}$  un ensemble de points localement fini. On note  $C_\varphi \in \mathfrak{N}$  l'ensemble des centres de  $\varphi$  :

$$C_\varphi = \text{Bar}_d \{x_0, \dots, x_d \in \varphi \mid B \cap \varphi = \emptyset\},$$

avec  $\text{Bar}_d$  la fonction barycentre :

$$\text{Bar}_d : (x_0, \dots, x_d) \mapsto \frac{1}{d+1} \sum_{i=0}^d x_i.$$

**Proposition 4.5.3** (Processus des centres). Soit  $\Phi$  un processus de Poisson. L'application :

$$\begin{aligned} C_\Phi : (\Omega, \mathcal{A}) &\rightarrow (\mathfrak{N}, \mathcal{N}) \\ \omega &\mapsto C_{\Phi(\omega)} \end{aligned}$$

est une variable aléatoire, qu'on appelle processus ponctuel des centres associé au processus de Poisson  $\Phi$ .

*Démonstration.* On commence par montrer que, pour toute suite  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{N}$  qui vérifie au sens de la convergence :

$$\varphi_n \rightarrow \varphi,$$

on a :

$$C_{\varphi_n} \rightarrow C_\varphi.$$

On en déduit la continuité de  $C$  sur  $\mathfrak{N}$  pour la distance de Prohorov, et la mesurabilité s'en suit.  $\square$

On définit maintenant l'espace des marques.

**Définition 4.5.7.** On note  $(T, \mathcal{B}_T)$  l'espace des marques, avec :

$$T = \text{conv} \left( \{ (x_0, \dots, x_d) \in (\mathbb{R}^d)^{d+1} \mid C(x_0, \dots, x_d) = 0 \} \right),$$

qui est un espace polonais pour la distance de Hausdorff, et  $\mathcal{B}_T$  la tribu borélienne issue de la distance de Hausdorff sur  $T$ .

On peut maintenant définir le processus ponctuel marqué de Poisson-Delaunay.

**Définition 4.5.8** (Processus de Poisson-Delaunay). Soit  $\Phi$  un processus de Poisson. On note  $\mathcal{D}_\Phi$  le processus ponctuel marqué :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Phi : (\Omega, \mathcal{A}) &\rightarrow (\mathfrak{N} \times \mathfrak{T}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{B}_\mathfrak{N}) \\ \omega &\mapsto (C_{\Phi(\omega)}, \Theta_{\Phi(\omega)}) \end{aligned}$$

Notons qu'on définit cette mesure par analogie avec la définition de la mesure de Palm pour un processus ponctuel stationnaire. Pour montrer que cette mesure est bien une mesure de Palm, au sens de la désintégration de la mesure de Campbell, il faudrait développer d'avantage le formalisme des processus ponctuels marqués. On se contente ici de la définition suivante, et on renvoie le lecteur à [DV08] pour plus de détails.

**Définition 4.5.9.** On définit la mesure de Palm  $\mathbb{P}_{\mathcal{D}}$  sur  $(\mathfrak{T}, \mathcal{B}_{\mathfrak{T}})$  associée à  $\mathcal{D}_{\Phi}$  par :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{D}}(A) = \frac{1}{\lambda_{\Theta} \nu_d(B)} \mathbb{E} \left( \sum_{z \in C_{\Phi} \cap B} \mathbb{1}_A(t(z) - z) \right), \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathfrak{T}},$$

où l'on a noté  $C_{\Phi}$  le processus des centres des triangles du maillage,  $t(z)$  le triangle de centre  $z$ , et  $\lambda_{\Theta}$  l'intensité du processus des centres :

$$\lambda_{\Theta} = \frac{1}{\nu_d(B)} \mathbb{E} \left( \sum_{z \in C_{\Phi}} \mathbb{1}_B(z) \right).$$

### 4.5.3 Simplexe typique d'un maillage de Poisson-Delaunay

Comme le maillage aléatoire  $\mathcal{D}_{\Phi}$  est stationnaire, on peut définir la notion de simplexe typique, à l'aide de la mesure de Palm  $\mathbb{P}_{\mathcal{D}}$  du processus  $\mathcal{D}_{\Phi}$ .

On donne maintenant l'expression, selon une preuve de J. Møller [Møl89], de la loi de probabilité du simplexe typique. On n'utilisera pas ce résultat dans la suite, mais plusieurs propositions seront démontrées de la même manière. Pour ce faire, on utilise un résultat géométrie intégrale, le théorème de Blaschke-Petkantschin, qui est énoncé dans l'annexe C.

**Théorème 4.5.2** (Loi du simplexe typique d'un maillage de Delaunay). *Soit  $\Phi$  un processus de Poisson de  $\mathbb{R}^d$ . On a :*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{D}}(A) = \int_{\mathbb{R}^+ \times (S^d)^{d+1}} f(R, u_0, \dots, u_d) \mathbb{1}_A(\text{conv}(Ru_0, \dots, Ru_d)) dR du_0 \dots du_d,$$

où

$$f(R, u_0, \dots, u_d) = \frac{\lambda^{d+1}}{\lambda_{\Theta}} R^{d^2-1} \nabla_d(u_0, \dots, u_d) \exp(-\lambda \omega_d R^d),$$

avec  $\nabla_d(u_0, \dots, u_d) = (d+1)! \nu_d(\text{conv}(u_0, \dots, u_d))$ .

*Démonstration.* On utilise les notations de la formule de Blaschke-Petkantschin (voir le théorème C.2.1). On a, par définition du maillage de Delaunay :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{D}}(A) &= \frac{1}{\lambda_{\Theta} \nu_d(B)} \mathbb{E} \left( \sum_{z \in C_{\Theta} \cap B} \mathbb{1}_A(t(z) - z) \right) \\ &= \frac{(d+1)!}{\lambda_{\Theta} \nu_d(B)} \mathbb{E} \left( \sum_{x_0, \dots, x_d \in \Phi} \mathbb{1}_A(\text{conv}(x_0, \dots, x_d) - \zeta) \mathbb{1}_{F_{B(z,R)}}(\Phi) \mathbb{1}_B(\zeta) \right), \end{aligned}$$

avec  $\zeta$  le centre du simplexe  $\text{conv}(x_0, \dots, x_d)$ . Puis, d'après le théorème de Slivnyak-Mecke, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{D}}(A) &= \frac{\lambda^{d+1}}{\lambda_{\Theta} \nu_d(B)} \int_{\mathbb{R}^{d(d+1)}} \mathbb{1}_A(\text{conv}(x_0, \dots, x_d) - \zeta) \mathbb{1}_B(\zeta) \\ &\quad \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{F_{B(z,R)}}(\Phi \cup \{x_0, \dots, x_d\}) \right) dx_0 \dots dx_d \\ &= \frac{\lambda^{d+1}}{\lambda_{\Theta} \nu_d(B)} \int_{\mathbb{R}^{d(d+1)}} \mathbb{1}_A(\text{conv}(x_0, \dots, x_d) - \zeta) \mathbb{1}_B(\zeta) \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{F_{B(z,R)}}(\Phi) \right) dx_0 \dots dx_d. \end{aligned}$$

De plus, comme  $\Phi$  est un processus de Poisson, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{F_{B(z,R)}}(\Phi) \right) &= \mathbb{E} (\Phi(B(z, R)) = 0) \\ &= \exp(-\lambda \omega_d R^d). \end{aligned}$$

On a donc, en utilisant la formule de Blaschke-Petkantschin :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{D}}(A) &= \frac{\lambda^{d+1}}{\lambda_{\Theta} \nu_d(B)} \int_{\mathbb{R}^+ \times (\mathcal{S}^d)^{d+1} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{L}_d} \mathbb{1}_A(\text{conv}(x_0, \dots, x_d) - \zeta) \mathbb{1}_B(z) R^{d^2-1} \nabla_d(u_0, \dots, u_d) \\ &\quad \exp(-\lambda \omega_d R^d) dR d\sigma_d(u_0) \dots d\sigma_d(u_d) dz dL_d \\ &= \frac{\lambda^{d+1}}{\lambda_{\Theta}} \int_{\mathbb{R}^+ \times (\mathcal{S}^d)^{d+1}} f(R, u_0, \dots, u_d) \mathbb{1}_A(\text{conv}(Ru_0, \dots, Ru_d)) d\sigma_d(u_0) \dots d\sigma_d(u_d). \end{aligned}$$

□

**Remarque 4.5.1.** Cette loi est isotrope, et nous pourrions utiliser un théorème ergodique pour transférer cette isotropie moyenne à l'origine en une isotropie à la limite lorsque l'on dilate le maillage. Nous ne le ferons pas, mais nous utiliserons un théorème ergodique dans le chapitre suivant pour calculer la limite simple d'une suite d'énergies sur un réseau de ressorts défini sur un processus de maillages de Poisson-Delaunay, ce qui revient au même.

## 4.6 Suite de maillages convergente et isotrope

### 4.6.1 Définition de la suite de maillages

Soit  $D \subset \mathbb{R}^d$  un domaine, *i.e.* un ouvert connexe, de l'espace. Soit  $\Phi$  un processus ponctuel de l'espace qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  une suite positive, croissante et divergente. On définit, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le processus ponctuel  $\Phi_n$  par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt[d]{\lambda_n}} \Phi.$$

**Proposition 4.6.1.** *Le processus ponctuel  $\Phi_n$  suit une loi de Poisson d'intensité  $\lambda_n$ .*

*Démonstration.* On prouve la seconde propriété de la définition 4.2.5, la première s'obtenant directement. Soit  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  un borélien borné, et soit  $m \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{Card}(\Phi_n \cap B) = m) &= \mathbb{E}\left(\text{Card}\left(\Phi \cap \sqrt[d]{\lambda_n} B\right) = m\right) \\ &= \frac{\nu_d\left(\sqrt[d]{\lambda_n} B\right)^m}{m!} \exp\left(-\lambda_n \nu_d\left(\sqrt[d]{\lambda_n} B\right)\right) \\ &= \frac{(\lambda_n \nu_d(B))^m}{m!} \exp\left(-\lambda_n \nu_d(B)\right). \end{aligned}$$

□

On note  $\tau_n$  le maillage par simplexe défini presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points  $\Phi_n \cap D$  :

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D}.$$

On renvoie à la figure 4.3 pour une illustration de la construction de  $\tau_n$  comme maillage de la dilatation d'un processus de Poisson.

#### 4.6.2 Convergence de la suite de maillages

Dans cette section, on montre que la suite de maillages du domaine  $D$  converge uniformément vers  $D$ , au sens de la définition A.1.2.

**Théorème 4.6.1.** *Si la suite d'intensités  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n),$$

*alors, presque sûrement, la suite  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de maillages de  $D$  converge uniformément vers  $D$ .*

*Démonstration.* On se restreint, pour alléger les notations, au cas de la dimension 2. La démonstration se généralise trivialement au cas de dimension quelconque.

Soit  $r > 0$ . Pour montrer la proposition, on montre que la suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  défini par :

$$X_n = \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \Phi_n \\ [x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset}} \mathbb{1}_{\Phi_n(B(z, R))=0} \mathbb{1}_{R \geq r},$$

où l'on a noté  $z = \frac{x_1 + x_2}{2}$  et  $R = \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$ , converge presque sûrement vers 0.

On commence par montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n^k \mathbb{E}(X_n) \rightarrow 0.$$

En effet, on a d'après la formule de Slivnyak-Mecke :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathbb{1}_{R > r} \mathbb{1}_{[x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset} \mathbb{E}(\Phi_n(B(z, R)) = 0) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathbb{1}_{R > r} \mathbb{1}_{[x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset} \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dx_1 \, dx_2. \end{aligned}$$

Puis, d'après la formule de Blaschke-Petkantschin :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n) &= \frac{\pi\lambda_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{R>r} \mathbb{1}_{\text{dist}(z,D) \leq R} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) dz dR \\
 &= \frac{\pi\lambda_n^2}{2} \int_r^{+\infty} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\text{dist}(z,D) \leq R} dz dR \\
 &\leq \frac{\pi\lambda_n^2}{2} \int_r^{+\infty} R(R + \text{diam } D)^2 \exp(-\lambda_n \pi R^2) dR \\
 &\leq \frac{\pi\lambda_n^2}{4} \int_r^{+\infty} R^3 \exp(-\lambda_n \pi R^2) dR \\
 &\quad + \frac{\pi\lambda_n^2}{4} (\text{diam } D)^2 \int_r^{+\infty} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) dR.
 \end{aligned}$$

On a de plus, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi\lambda_n^{k+2}}{4} \int_r^{+\infty} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) dR &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n^{k+1}}{8} \exp(-\lambda_n \pi r^2) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi\lambda_n^{k+2}}{4} \int_r^{+\infty} R^3 \exp(-\lambda_n \pi R^2) dR &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n^k}{8\pi} (\lambda_n \pi + 1) \exp(-\lambda_n \pi r^2) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n^k \mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n).$$

On en déduit que :

$$n^2 \mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n) < +\infty.$$

D'après l'inégalité de Markov, et le fait que  $X_n$  est à valeurs entières positives, on a :

$$\begin{aligned}
 \forall \varepsilon \in ]0, 1], \quad \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n \geq 1) \\
 &\leq \mathbb{E}(X_n).
 \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) < +\infty.$$

On conclut que :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0.$$

□

### 4.6.3 Taille minimale des mailles

Dans cette section, on montre un contrôle asymptotique de la taille des mailles de la suite de maillages du domaine  $D$ . Le résultat est vrai en dimension quelconque, mais nous l'énonçons en dimension 2.

**Théorème 4.6.2.** *On suppose que le domaine  $D$  est un domaine du plan. Soit  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs, qui vérifie :*

$$\exists \alpha > 0, \quad R_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

Alors, la suite de maillages  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la propriété suivante :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{d_{\min}(\tau_n)}{R_n} \right) \geq 1,$$

où l'on a noté pour tout maillage  $\tau$  :

$$d_{\min}(\tau) = \inf_{\nu \in \tau_1} |\nu|.$$

*Démonstration.* Pour montrer la proposition, on montre que la suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit par :

$$X_n = \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \Phi_n \\ [x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset}} \mathbb{1}_{\Phi_n(B(z, R))=0} \mathbb{1}_{R \leq R_n},$$

où l'on a noté  $z = \frac{x_1 + x_2}{2}$  et  $R = \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\|$ , converge presque sûrement vers 0.

D'après la formule de Slivnyak-Mecke, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathbb{1}_{R < R_n} \mathbb{1}_{[x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset} \mathbb{E}(\Phi_n(B(z, R)) = 0) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathbb{1}_{R < R_n} \mathbb{1}_{[x_1, x_2] \cap D \neq \emptyset} \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dx_1 \, dx_2. \end{aligned}$$

Puis, d'après la formule de Blaschke-Petkantschin :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n) &= \frac{\pi\lambda_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{R < R_n} \mathbb{1}_{\text{dist}(z,D) \leq R} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dz \, dR \\
 &= \frac{\pi\lambda_n^2}{2} \int_0^{R_n} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\text{dist}(z,D) \leq R} \, dz \, dR \\
 &\leq \frac{\pi\lambda_n^2}{2} \int_0^{R_n} R(R + \text{diam } D)^2 \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dR \\
 &\leq \frac{\pi\lambda_n^2}{4} \int_0^{R_n} R^3 \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dR \\
 &\quad + \frac{\pi\lambda_n^2}{4} (\text{diam } D)^2 \int_0^{R_n} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dR.
 \end{aligned}$$

On a de plus :

$$\frac{\pi\lambda_n^2}{4} \int_0^{R_n} R \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dR = \frac{1}{8} (1 - \exp(-R_n^2 \pi \lambda_n)) \lambda_n,$$

et :

$$\frac{\pi\lambda_n^2}{4} \int_0^{R_n} R^3 \exp(-\lambda_n \pi R^2) \, dR = \frac{1}{8\pi} (1 - (R_n^2 \lambda_n \pi + 1) \exp(-R_n^2 \lambda_n \pi)).$$

On a donc :

$$n^{1+2\alpha} \mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

puis :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n) < +\infty.$$

D'après l'inégalité de Markov, et le fait que  $X_n$  est à valeurs entières positives, on a :

$$\begin{aligned}
 \forall \varepsilon \in ]0, 1], \quad \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n \geq 1) \\
 &\leq \mathbb{E}(X_n).
 \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) < +\infty.$$

On conclut que :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0.$$

□

**Remarque 4.6.1.** Il est possible qu'en utilisant un théorème ergodique pour montrer la convergence, on puisse se contenter de supposer  $R_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$ . Nous pensons en particulier au théorème ergodique pour les processus sous-additifs introduit dans [KA81].



## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. Nous avons également donné plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules nous seront très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arrêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permet de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sûre si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Nous avons également montré que, si l'on dilate le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtenons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Nous avons également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle nous sera utile dans le chapitre suivant, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

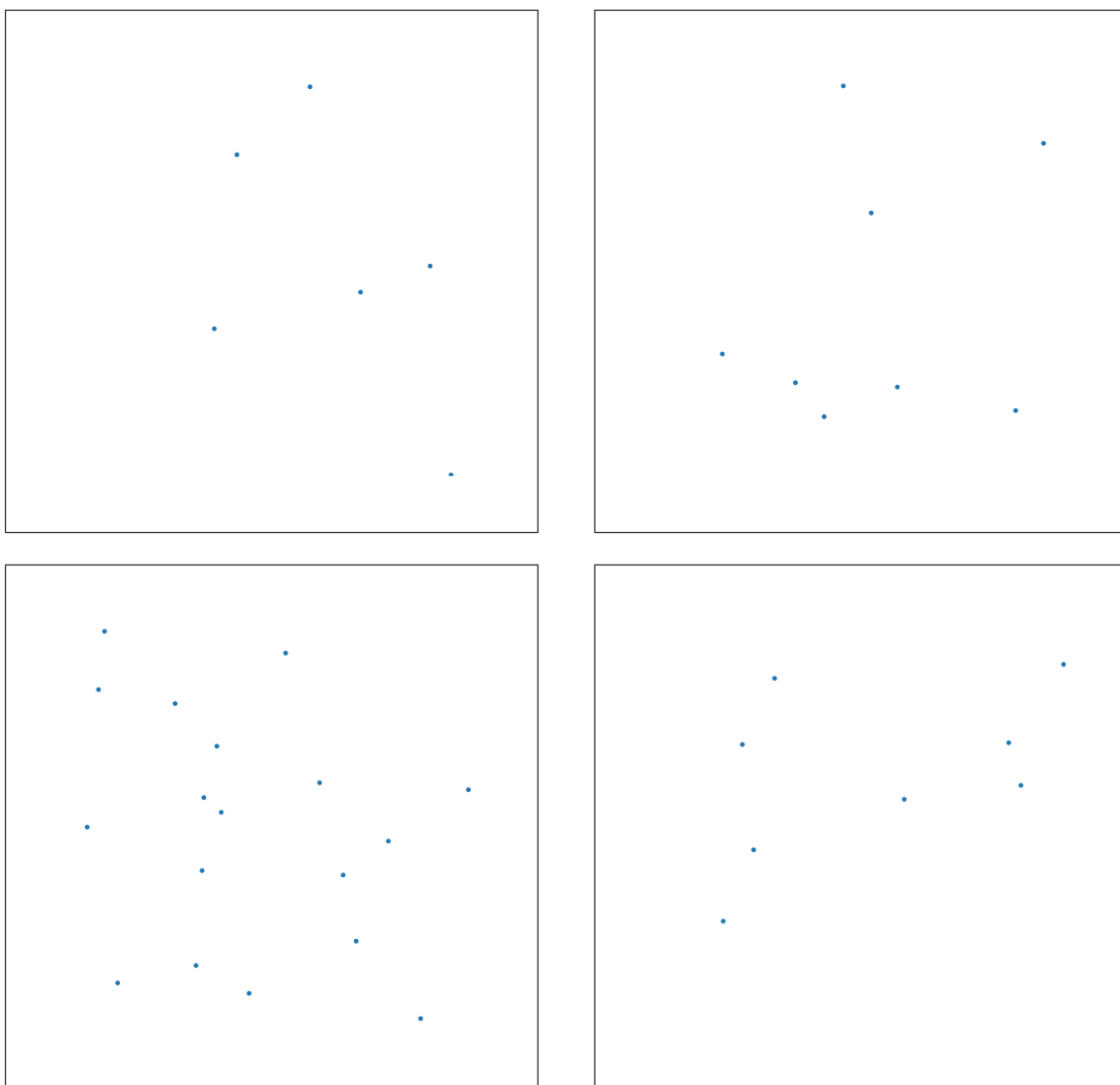


FIG. 4.1 : Tirages d'un processus de Poisson d'intensité 10 sur le carré unité

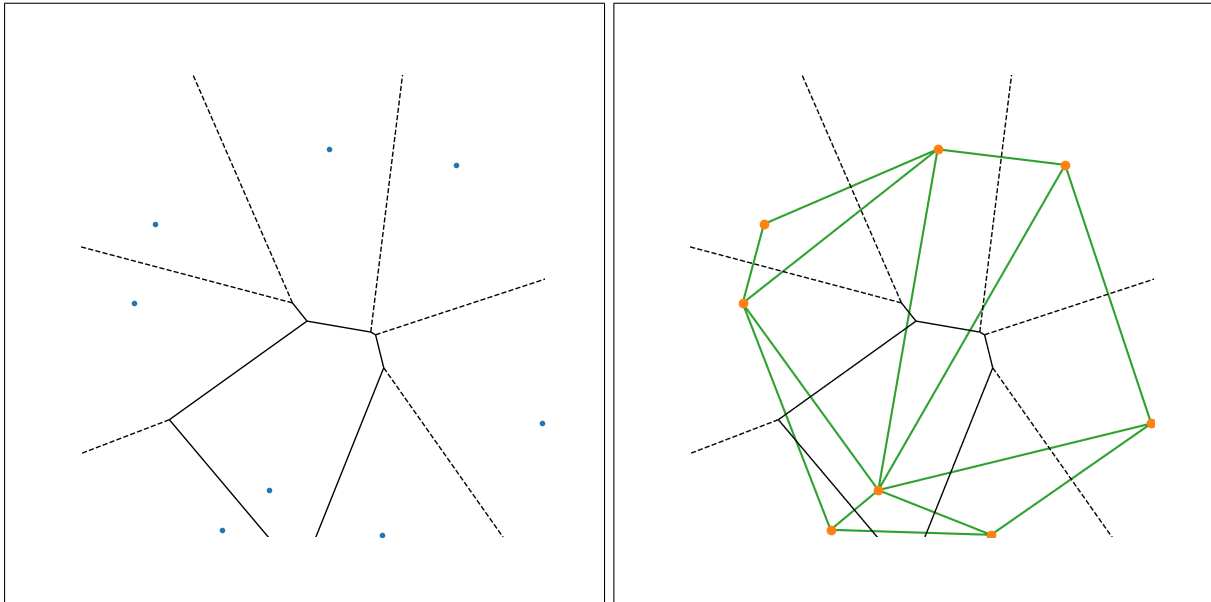
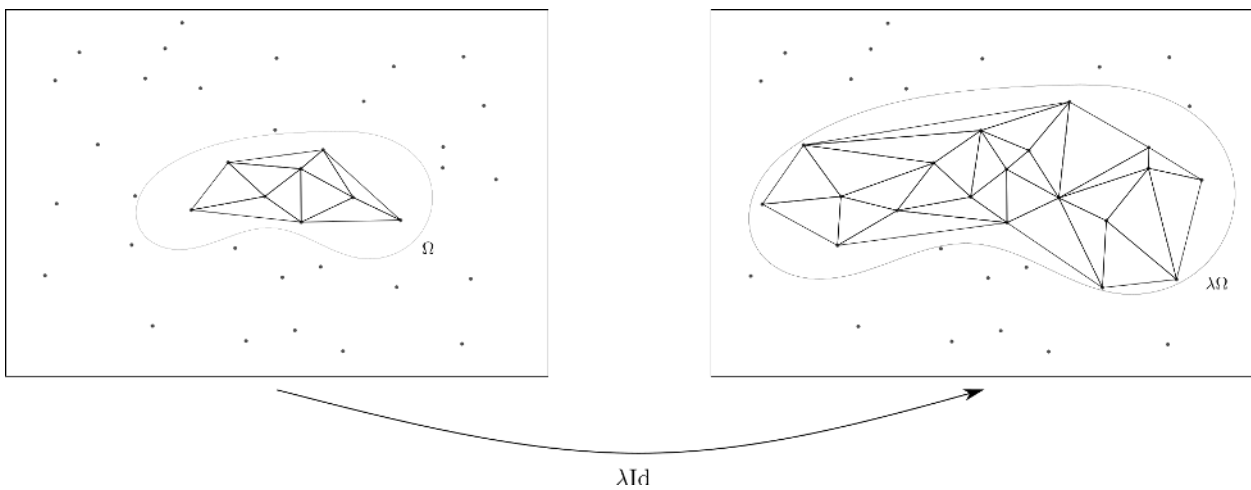


FIG. 4.2 : Ensemble de points avec les diagramme de Voronoi et Delaunay associés

FIG. 4.3 : Dilatation de l'ouvert  $D$

---

## Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope

---

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	140
5.2	Description du problème . . . . .	141
5.2.1	Énergie élastique sur un réseau de ressorts triangulaire . . . . .	142
5.2.2	Présentation des résultats du chapitre . . . . .	145
5.3	Analyse et contrôle de l'énergie . . . . .	146
5.3.1	Analyse de l'énergie . . . . .	147
5.3.2	Contrôle à l'origine . . . . .	151
5.3.3	Contrôle du régime transitoire . . . . .	154
5.3.4	Contrôle à l'infini . . . . .	156
5.4	Convergence ponctuelle . . . . .	163
5.4.1	Développement limité de l'énergie . . . . .	163
5.4.2	Espérance de l'énergie au premier ordre . . . . .	164
5.4.3	Convergence presque sûre de la fonctionnelle d'énergie . . . . .	171
5.5	Convergence variationnelle . . . . .	174
5.5.1	Un résultat de $\Gamma$ -convergence . . . . .	174
5.5.2	Compacité et équi-coercivité . . . . .	182
5.6	Conclusion . . . . .	183

---

## 5.1 Introduction

Dans cette partie, nous proposons un second résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau de ressorts. Nous avons proposé, dans le chapitre 3, un résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau régulier, à mailles carrées.

Nous proposons dans ce chapitre un résultat de  $\Gamma$ -convergence de l'énergie élastique sur un réseau de ressorts, issu d'un processus stochastique de loi isotrope. Le réseau de ressorts que nous utiliserons dans ce chapitre est défini au chapitre précédent, et repose sur la théorie des processus stochastiques ponctuels. En particulier, les formules de sommations sur le processus stochastique, que nous avons introduites dans le chapitre précédent, telles que la formule de Slivnyak-Mecke, nous seront très utiles. Nous utiliserons les résultats de l'annexe C, et en particulier la formule de Blaschke-Petkantschin, pour les calculs d'espérance ; ainsi qu'un résultat de théorie ergodique pour transférer les calculs faits en moyenne sur le maillage en une convergence presque-sûre des variables aléatoires concernées.

Rappelons également l'avantage de la  $\Gamma$ -convergence, qui implique la convergence des suites de minimums vers un minimum de la fonctionnelle limite, moyennant une hypothèse de coercivité. Le réseau utilisé n'étant pas régulier, nous ne pouvons pas nous restreindre à l'étude de la fonctionnelle d'énergie sur une cellule du maillage, comme c'était le cas dans le chapitre 3, ainsi que dans les articles [VSB07 ; Sch09 ; LR11 ; BS13]. Nous nous appuyons donc sur les résultats de l'annexe D, et en particulier la méthode de localisation, pour prouver l'existence d'une gamma-limite. La preuve repose sur une idée de G. Dal Maso et L. Modica, et nous renvoyons le lecteur aux articles [ACG11 ; DM86b].

Nous rappelons que, à défaut de prouver une hypothèse de rigidité de type Cauchy-Born, la  $\Gamma$ -limite obtenue par la méthode de localisation n'est pas explicite. En particulier, la  $\Gamma$ -limite de l'énergie élastique peut exhiber un phénomène de relaxation, et différer de la limite simple. L'hypothèse de Cauchy-Born a été vérifiée, dans le cas de réseaux réguliers du plan et pour certaines contraintes sur la rigidité des ressorts, par G. Friesecke et F. Theil [FT02]. Cependant, elle demeure invérifiée – et possiblement fausse – sur des réseaux de ressorts plus généraux. C'est ici qu'intervient l'un des avantages de notre approche : notre réseau de ressorts est basé sur un processus de Poisson, qui est simulable numériquement. Nous pourrions donc obtenir, dans l'esprit de l'article de M. Ostoj-Starzewski, K. Alzebedeh et I. Jasiuk [OAJ95], une approximation numérique des constantes de Lamé du matériau homogénéisé.

L'une des difficultés du chapitre est d'obtenir l'équi-coercivité de la suite d'énergies élastiques. En effet, le processus de maillage de Poisson-Delaunay utilisé génère des triangles plats, *i.e.* il y a une probabilité non nulle d'obtenir des triangles dont le rayon du cercle inscrit sur le rayon du cercle circonscrit est arbitrairement petit. Cette équi-coercivité est obtenue en calibrant finement les constantes de rigidité de chaque ressort. Lorsque le ressort est petit par rapport à ces voisins, la constante de rigidité explose. Cette explosion est suffisamment rapide pour obtenir la coercivité de l'ensemble, et suffisamment lente pour que l'énergie moyenne n'explose pas.

Notons que le caractère isotrope du réseau permet d'exploiter complètement les ressorts de torsion et de gagner une seconde constante d'élasticité. Notre première utilisation des

ressorts de torsion, au chapitre 3, requérait l'égalité des constantes de rigidité en traction et torsion pour obtenir une énergie limite qui vérifie une loi de Lamé. De plus, dans la littérature, lorsque la  $\Gamma$ -limite est calculée explicitement sur un réseau régulier, le coefficient de Poisson du matériau homogénéisé est fixe. Les méthodes actuellement utilisées ne permettent donc pas non plus de faire varier les constantes de Lamé du matériau (voir [VSB07; Sch09]). Au contraire, avec le modèle présenté dans ce chapitre, nous pouvons faire varier les constantes de Lamé du matériau, tout du moins dans l'expression de la limite simple.

Dans une première partie, nous présentons brièvement le cadre de ce chapitre, et nous énonçons les résultats principaux. Comme dans le chapitre 3, nous utiliserons un réseau de ressorts de traction et un réseau de ressorts de torsion. Notons que l'énergie du réseau de ressorts de torsion n'est pas définie pour tous les déplacements discrets, et notamment pour les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point. Nous les définirons donc sur un sous ensemble des déplacements discrets, appelé ensemble des déplacements admissibles, et nous donneront une propriété de densité de ces déplacements dans l'ensemble des déplacements continus, à la manière de [MPR12]. Notons que l'intensité des énergies élastiques a été choisie avec soin pour obtenir une suite d'énergie équi-coercive. Nous introduisons également l'étape de redimensionnement, *i.e.* de *rescaling*, qui permet de prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements.

Dans une seconde partie, nous présentons plusieurs résultats d'analyse et de contrôle de l'énergie élastique sur un maillage. En particulier, nous montrons des développements limités à l'origine et à l'infini, ainsi qu'une borne inférieure sur l'énergie en régime moyen. Ces résultats nous permettront de montrer l'équi-coercivité de la suite d'énergies dans une partie suivante.

Dans une troisième partie, nous proposons un résultat de convergence ponctuelle des suites d'énergies. Ce résultat est basé sur, d'une part, un calcul de l'espérance de l'énergie élastique considérée comme une variable aléatoire, et d'autre part sur le résultat de théorie ergodique de la section précédente qui convertit cette convergence en moyenne sur les maillages en une convergence presque sûre lorsque l'on contracte le maillage.

Dans une quatrième partie, nous proposons un résultat de  $\Gamma$ -convergence presque sûre de la suite des énergies élastiques. Pour ce faire, nous utilisons la théorie de localisation, décrite en annexe D, et nous obtenons un résultat de représentation intégrale de la  $\Gamma$ -limite. Ce résultat est un résultat abstrait, en ce sens qu'il ne fournit pas l'expression de la limite en fonction des constantes du maillage. Il repose sur une adaptation des résultats présentés dans l'article [ACG11]. Nous prouvons cependant que, lorsque le redimensionnement choisi est suffisamment rapide, l'énergie limite prend la forme de l'énergie élastique d'un matériau homogène et isotrope et dépend donc de deux paramètres réels qui sont les constantes de Lamé du matériau homogénéisé.

## 5.2 Description du problème

Dans cette section, nous présentons le réseau de ressorts utilisé pour approcher l'énergie élastique d'un matériel continu  $D$ . On suppose que  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine du plan, *i.e.* un ouvert du plan, qui est connexe et dont la frontière est lisse.

On rappelle rapidement la notion de processus de triangulation de Poisson-Delaunay, définie au chapitre 4. Soit  $\Phi$  un processus ponctuel du plan qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  une suite positive, croissante et divergente, qui vérifie :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n).$$

On définit, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le processus ponctuel  $\Phi_n$  par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \Phi,$$

et ce processus est un processus ponctuel qui suit une loi de Poisson d'intensité  $\lambda_n$ .

On note  $\tau$  le maillage du plan défini comme la triangulation de Delaunay du nuage de points  $\Phi$  :

$$\tau = \Theta_\Phi.$$

On note également  $\tau_n$  le maillage par simplexe définit presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points  $\Phi_n \cap D$  :

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D}.$$

On rappelle que, d'après le théorème 4.6.1, la suite de maillage  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $D$ . On renvoie à la figure 4.3 pour une illustration de la construction de  $\tau_n$  comme maillage de la dilatation d'un processus de Poisson.

### 5.2.1 Énergie élastique sur un réseau de ressorts triangulaire

On considère dans cette section une triangulation quelconque  $\tau$  du domaine  $D$ . On renvoie à l'annexe A pour une définition des notations utilisées. On note  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  l'espace des éléments finis  $P1$  défini sur le maillage  $\tau$ . On note également  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$  l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \{u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall \omega \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2)\}.$$

On souhaite construire un réseau de ressorts sur  $\tau$  tel que l'énergie totale  $E_\tau$  soit équi-coercive. On rappelle que l'énergie totale est équi-coercive si elle vérifie :

$$\forall u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \quad E_\tau(u) \geq C \|\nabla u\|^2,$$

pour une constante de coercivité  $C > 0$  qui ne dépend pas du maillage  $\tau$  choisi.

L'équi-coercivité s'obtient facilement si l'on se restreint aux triangulations régulières du plan, *i.e.* les triangulations qui ne contiennent pas de triangles aplatis. Ce n'est pas le cas ici, puisque l'on utilisera des triangulations construites sur un processus de Poisson. En particulier, dans cette famille de triangulations, on peut trouver des triangles quasiment plats. On renvoie le lecteur à l'expression de la loi du simplexe typique d'un maillage de Poisson Delaunay, donnée à la proposition 4.5.2.

Pour remédier à ce manque de coercivité, on va placer sur  $\tau$  deux types de ressorts : des ressorts de traction et des ressorts de torsion. Notons que, contrairement au chapitre 3, les ressorts de torsion n'ont pas pour but d'empêcher les effets de cisaillements. En effet, sur un maillage du plan à base triangulaire, un réseau de ressorts de traction n'est pas invariant par cisaillements. Cependant, les ressorts de torsion sont ici essentiels pour assurer la coercivité de l'ensemble. De plus, ils permettent de rajouter un degré de liberté au système, et d'obtenir, au moins dans le cas de la limite simple, un coefficient de Poisson qui dépende des constantes de raideur du maillage.

Les constantes de raideur des ressorts de traction et de torsion dépendent des angles du triangle de base des ressorts, et elles tendent vers l'infini si l'angle correspondant tend vers 0. La vitesse d'explosion est spécialement calibrée. Elle est suffisamment rapide pour que la suite des réseaux de ressorts soit coercive, et suffisamment lente pour que l'espérance de l'énergie élastique, à déplacement fixé, soit finie.

Dans tout ce chapitre, les constantes de rigidité des réseaux de ressorts sont supposées constantes. Les résultats présentés se généralisent sans difficulté au cas où ces constantes dépendent de manière régulière du point du matériau  $D$ .

On note dès à présent  $R_\tau$  l'énergie du réseau de ressorts de traction, et  $T_\tau$  l'énergie du réseau de ressorts de torsion. On note de plus :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale sur le réseau  $\tau$ . On note également, pour tout triangle  $t \in \tau_2$  du maillage,  $\nu_1, \nu_2$  et  $\nu_3$  ses trois cotés, ainsi que  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$  les trois angles opposés. On renvoie à la figure 5.1 pour une illustration.

### Ressorts de traction

On commence par définir l'énergie élastique du réseau de ressorts de traction  $R_\tau$ , et on renvoie à la figure 5.3. On note  $k > 0$  la constante de rigidité du réseau. On place, sur chaque arête  $\nu_i$  de chaque triangle  $t$  du maillage, un ressort de traction de longueur à vide  $l_i = |\nu_i|$  et de raideur  $k_i$ , avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad k_i = \frac{k}{\sin(\theta_i)}.$$

Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressort, et  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k}{2 \sin(\theta_i)} (|\varphi(\nu_i)| - |\nu_i|)^2 \\ &= \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} (\|\nabla \varphi e_{\nu_i}\| - 1)^2. \end{aligned}$$

Notons que, sur chaque arête  $\nu$  de l'intérieur du maillage  $\tau$  reposent deux ressorts de traction. On obtient bien évidemment un unique ressort équivalent en sommant les deux rigidités.



### Ressorts de torsion

On définit maintenant l'énergie  $T_\tau$ , et on renvoie à la figure 5.4. On note  $G > 0$  la constante de rigidité de torsion du réseau. On place, sur chaque angle  $\theta_i$  de chaque triangle  $t$  du maillage, un ressort de torsion de raideur  $G_i$  :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_i = \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{\sin(\theta_i)}.$$

Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressort avec  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, et si de plus  $u$  est dans  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$ , l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} (\angle(\varphi(\nu_{i+1}), \varphi(\nu_{i+2})) - \angle(\nu_{i+1}, \nu_{i+2}))^2, \end{aligned}$$

avec  $\angle(\cdot, \cdot)$  l'angle entre deux vecteurs du plan.

### Extension à $H^1(D, \mathbb{R}^2)$ et changement d'échelle

On rappelle que l'on a l'inclusion :

$$W(\tau_n, \mathbb{R}^2) \subset H^1(D, \mathbb{R}^2),$$

et on renvoie à l'annexe A pour plus de détails. On a également la propriété de densité presque sûre suivante.

**Proposition 5.2.1.** *On a presque sûrement la propriété de densité suivante : pour toute fonction  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

*et qui converge vers  $u$  pour la norme  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la densité de  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$  dans  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ .  $\square$

On étend donc les énergies élastiques définies sur les réseaux de manière naturelle à  $H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , en notant :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) & \text{si } u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) & \text{si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit maintenant la suite d'énergies élastiques définies sur la suite des réseaux  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On introduit un changement d'échelle des énergies  $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$  pour prendre en compte

l'hypothèse des petits déplacements. Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive qui tend vers 0. On note, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} R_n: H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_n: H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u), \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n.$$

On donne enfin une version modifiée des suites fonctionnelles  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui prenne en compte une condition de Dirichlet sur le bord de  $D$ . Soit donc  $v \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  la donnée du bord. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n^v(\tau, \mathbb{R}^2) = \{u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \tau_0, \text{dist}(p, \partial D) \leq \lambda_n, \quad u(p) = v(p)\}.$$

On pose ensuite, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} R_n^v: H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_n^v: H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_n(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_n(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que :

$$E_n^v = R_n^v + T_n^v.$$

### 5.2.2 Présentation des résultats du chapitre

On énonce maintenant les théorèmes que l'on prouvera dans ce chapitre.

**Théorème 5.2.1** (Convergence simple). *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ , il existe une suite de déplacements discrets  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

et qui vérifie de plus :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_s(u),$$

avec :

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

où  $K_{\lambda, \mu}$  est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda, \mu} e : e = \lambda \text{tr}(e)^2 + 2\mu \text{tr}(e^2),$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  les première et deuxième constantes de Lamé, qui valent :

$$\lambda = \frac{32k |A|}{9\pi^2} + \frac{3G |A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k |A|}{9\pi^2} - \frac{3G |A|}{4}.$$

**Théorème 5.2.2** ( $\Gamma$ -convergence). *Supposons que la suite de changements d'échelle  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

*Alors, la suite de fonctionnelles redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{hom} : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :*

$$E_{hom}(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $K_{\lambda_h, \mu_h}$  est le tenseur de Lamé homogénéisé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda_h, \mu_h} e : e = \lambda_h \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu_h \operatorname{tr}(e^2).$$

*De plus, pour toute donnée au bord  $v$  dans  $\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , la suite de fonctionnelles  $(E_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{hom}^v : L^p(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :*

$$E_{hom}^v(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u - v \in H_0^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème 5.2.3** (Équi-coercivité). *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{adm}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

*On suppose de plus que cette suite de déplacements est bornée pour l'énergie :*

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

*Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .*

### 5.3 Analyse et contrôle de l'énergie

Dans cette section, on propose plusieurs résultats sur l'analyse de l'énergie élastique. En particulier, on donne un contrôle inférieur, à l'origine et à l'infini, de l'énergie élastique totale sur un triangle du maillage par l'énergie de Dirichlet de la transformation considérée sur ce triangle. Ce contrôle est uniforme, la constante multiplicative ne dépendant pas du triangle considéré.

Dans toute cette section, on fixe un triangle  $t \subset \mathbb{R}^2$ . Conformément à la figure 5.1, on note  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  ses trois arrêtes. On note également  $e_1, e_2$  et  $e_3$  les vecteurs unitaires associés aux arrêtes, ainsi que  $f_1, f_2$  et  $f_3$  leurs vecteurs orthogonaux directs respectifs.

On suppose, sans perte de généralité, que :

$$|\nu_1| \leq |\nu_2| \leq |\nu_3|.$$

On note  $A_t$  la surface du triangle  $t$ , et  $R$  le rayon de son cercle circonscrit. On rappelle la loi des sinus :

$$\frac{|\nu_1|}{\sin(\theta_1)} = \frac{|\nu_2|}{\sin(\theta_2)} = \frac{|\nu_3|}{\sin(\theta_3)} = \frac{|\nu_1||\nu_2||\nu_3|}{2S} = 2R.$$

D'après la loi des sinus, on en déduit :

$$\sin(\theta_1) \leq \sin(\theta_2) \leq \sin(\theta_3).$$

On notera également dans cette section,  $\varphi: t \rightarrow \mathbb{R}^2$  une déformation affine du triangle,  $\varphi = \text{Id} + u$  le déplacement associé, et  $E = \nabla u \in M_2(\mathbb{R})$  le gradient constant du champ de déplacement. On note enfin :

$$M = E + E^T + E^T E,$$

ainsi que :

$$F = \frac{E}{\|E\|}, \quad N = \frac{M}{\|M\|}.$$

On notera enfin, dans cette section,  $E_t$  l'énergie totale du triangle  $t$ , avec :

$$E_t = R_t + T_t,$$

où  $R_t$  et  $T_t$  sont les énergies respectivement de traction et de torsion sur le triangle  $t$ .

### 5.3.1 Analyse de l'énergie

**Lemme 5.3.1** (Contrôle de l'aire des triangles). *On a les contrôles suivants :*

1.  $\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \frac{|\nu_i||\nu_{i+1}|}{\sin(\theta_{i+2})} = \frac{2A_t}{\sin^2(\theta_{i+2})};$
2.  $\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \frac{|\nu_i|^2}{\sin(\theta_i)} \geq \frac{A_t}{\sin^2(\theta_2)}.$

*Démonstration.* On rappelle que l'on a l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\nu_3| &\leq |\nu_1| + |\nu_2| \\ &\leq 2|\nu_2|, \end{aligned}$$

et donc :

$$\sin(\theta_3) \leq 2\sin(\theta_2).$$

En utilisant la loi des sinus, on a également, pour tout  $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  :

$$2A_t = |\nu_i||\nu_{i+1}|\sin(\theta_{i+2}).$$

On commence par prouver le premier point. Soit  $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{|\nu_i||\nu_{i+1}|}{\sin(\theta_{i+2})} &= \frac{|\nu_i||\nu_{i+1}|\sin(\theta_{i+2})}{\sin^2(\theta_{i+2})} \\ &= \frac{2A_t}{\sin^2(\theta_{i+2})}. \end{aligned}$$

On prouve maintenant le second point. Pour  $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{|\nu_i|^2}{\sin(\theta_i)} &= \frac{2A_t |\nu_i|^2}{|\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}| \sin^2(\theta_i)} \\ &= \frac{2A_t}{\sin(\theta_{i+1}) \sin(\theta_{i+2})} \\ &\geq \frac{A_t}{\sin^2(\theta_2)}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 5.3.2** (Invariance par mouvement rigide). *Soit  $\varphi: t \rightarrow \mathbb{R}^2$  une déformation affine du triangle. On note  $E \in M_2(\mathbb{R})$  le gradient du déplacement associé. Il existe une matrice  $\tilde{E}$  de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie :*

1.  $R_t(E) = R_t(\tilde{E})$  et  $T_t(E) = T_t(\tilde{E})$  ;
2.  $f_1^T \tilde{E} e_1 = 0$ .

Si de plus, on suppose que :

$$\|E - \text{Id}\| \geq \frac{1}{2},$$

alors on a :

$$\|E\| \leq 5\|\tilde{E}\|.$$

*Démonstration.* On rappelle que l'énergie élastique est invariante par mouvement solide. En particulier, pour toute rotation  $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$ , on a :

$$R_t(\varphi - \text{Id}) = R_t(R_\theta \varphi - \text{Id}), \quad T_t(\varphi - \text{Id}) = T_t(R_\theta \varphi - \text{Id}).$$

De plus, il existe une rotation  $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$  telle que  $e_1$  soit vecteur propre de la matrice  $R_\theta \nabla \varphi$  :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad R_\theta \nabla \varphi e_1 = \lambda e_1.$$

On note  $\tilde{E}$  le gradient déplacement associé à  $R_\theta \varphi$  :

$$R_\theta \nabla \varphi = \text{Id} + \tilde{E}.$$

On a aussi :

$$R_\theta \nabla \varphi = R_\theta + R_\theta E,$$

donc :

$$\tilde{E} = R_\theta - \text{Id} + R_\theta E.$$

Comme  $e_1$  est également vecteur propre de  $F$ , on a :

$$f_1^T \tilde{E} e_1 = 0,$$

et les deux premiers points sont démontrés.

Pour  $\|E\| \geq \frac{3}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned}\|E\| &\leq \|R_\theta^T\| + \|\text{Id}\| + \|R_\theta^T \tilde{E}\| \\ &\leq 2 + \|\tilde{E}\| \\ &\leq 3\|\tilde{E}\|.\end{aligned}$$

Pour  $\|E\| \leq \frac{1}{2}$ , on a :

$$0 \leq \lambda \leq \|\nabla\varphi\| \leq 1 + \|E\|.$$

Donc, en particulier, on a :

$$\forall e \in \mathbb{R}^2, \quad \|R_\theta - \text{Id}\| = \frac{\|R_\theta e - e\|}{\|e\|}.$$

Puis :

$$\begin{aligned}\|R_\theta - \text{Id}\| &= \frac{\|R_\theta \nabla\varphi e_1 - \nabla\varphi e_1\|}{\|e_1 + Ee_1\|} \\ &\leq \frac{\|(\lambda - 1)e_1 - Ee_1\|}{1 - \|E\|} \\ &\leq 4\|E\|.\end{aligned}$$

Or :

$$E = R_\theta^T - \text{Id} + R_\theta^T \tilde{E},$$

et donc :

$$\begin{aligned}\|E\| &\leq \|R_\theta^T - \text{Id}\| + \|R_\theta^T \tilde{E}\| \\ &\leq \|R_\theta - \text{Id}\| + \|\tilde{E}\| \\ &\leq 5\|\tilde{E}\|,\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

**Lemme 5.3.3.** *Pour toute constante  $\rho > 0$ , il existe une constante  $C > 0$ , telle que, pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  vérifiant :*

$$\|E\| \leq \rho,$$

*on ait :*

$$R_t(E) \geq C \frac{A_t}{\sin^2(\theta_2)} \sum_{i=1}^3 (e_i^T M e_i)^2.$$

*Démonstration.* Soit  $\rho > 0$ . On commence par prouver qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall x \in [-1, \rho], \quad \left(\sqrt{1+x} - 1\right)^2 \geq Cx^2.$$

On a le développement limité en 0 :

$$\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2 = \frac{x^2}{4} + O(x^3).$$

En particulier, il existe  $\rho_1 > 0$ , tel que, pour tout  $x \in [-1, \rho_1]$ , on a :

$$\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2 \geq \frac{x^2}{8}.$$

En posant :

$$C = \frac{\rho_1^2}{\rho^2},$$

la propriété est prouvée.

On a de plus, pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  :

$$-1 \leq e_i^T M e_i \leq 2\|E\| + \|E\|^2.$$

On conclut en appliquant le lemme 5.3.1. □

**Lemme 5.3.4.** Soit  $E \in M_2(\mathbb{R})$  une matrice qui vérifie :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \|e_i + E e_i\| > 0.$$

On a :

$$T_t(E) \geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t \|E\|^2}{\sin^2(\theta_{i+2})} \left( \frac{f_i^T F e_i}{\|e_i + E e_i\|} - \frac{f_{i+1}^T F e_{i+1}}{\|e_{i+1} + E e_{i+1}\|} \right)^2.$$

*Démonstration.* En utilisant le lemme 5.3.1, on a :

$$\begin{aligned} T_t(E) &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t}{\sin^2(\theta_{i+2})} (\angle(e_i + E e_i, e_{i+1} + E e_{i+1}) - \angle(e_i, e_{i+1}))^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t}{\sin^2(\theta_{i+2})} (\angle(e_i + E e_i, e_i) - \angle(e_{i+1}, e_{i+1} + E e_{i+1}))^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t}{\sin^2(\theta_{i+2})} [\sin(\angle(e_i + E e_i, e_i)) - \sin(\angle(e_{i+1} + E e_{i+1}, e_{i+1}))]^2, \end{aligned}$$

parce que la fonction sin est contractante. Puis :

$$\begin{aligned} T(E) &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t}{\sin^2(\theta_{i+2})} \left[ \frac{\det(E e_i, e_i)}{\|e_i + E e_i\|} - \frac{\det(E e_{i+1}, e_{i+1})}{\|e_{i+1} + E e_{i+1}\|} \right]^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t \|E\|^2}{\sin^2(\theta_{i+2})} \left( \frac{\det(F e_i, e_i)}{\|e_i + E e_i\|} - \frac{\det(F e_{i+1}, e_{i+1})}{\|e_{i+1} + E e_{i+1}\|} \right)^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t \|E\|^2}{\sin^2(\theta_{i+2})} \left( \frac{f_i^T F e_i}{\|e_i + E e_i\|} - \frac{f_{i+1}^T F e_{i+1}}{\|e_{i+1} + E e_{i+1}\|} \right)^2. \end{aligned}$$

□

### 5.3.2 Contrôle à l'origine

**Lemme 5.3.5** (Contrôle en 0 de  $R_t$ ). *Il existe des constantes  $\rho > 0$  et  $C > 0$  telles que pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  vérifiant :*

$$\|E\| \leq \rho, \quad f_1^T E e_1 = 0,$$

on ait :

$$R_t(E) \geq C A_t \|E\|^2 \left( (e_1^T F e_1)^2 + (\sin(\theta_3) f_1^T F f_1 + \cos(\theta_3) e_1^T F f_1)^2 - 7\rho \right).$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.3.3, il existe des constantes  $\rho > 0$  et  $C > 0$  telles que l'on ait :

$$\begin{aligned} R_t(E) &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{A_t}{\sin^2(\theta_i)} (\|e_i + E e_i\| - 1)^2 \\ &\geq \frac{C A_t \|E\|^2}{\sin^2(\theta_2)} \left( (e_1^T N e_1)^2 + (e_2^T N e_2)^2 \right). \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$e_2 = \cos(\theta_3) e_1 + \sin(\theta_3) e_1.$$

Donc :

$$(e_2^T N e_2)^2 = (\cos^2(\theta_3) e_1^T N e_1 + \sin^2(\theta_3) f_1^T N f_1 + \sin(2\theta_3) e_1^T N f_1)^2.$$

En utilisant l'inégalité de convexité :

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2,$$

on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (e_i^T N e_i)^2 &\geq (\cos^2(\theta_3) e_1^T N e_1)^2 + (e_2^T N e_2)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} (\sin^2(\theta_3) f_1^T N f_1 + \sin(2\theta_3) e_1^T N f_1)^2 \\ &\geq \frac{\sin^2(\theta_3)}{2} (\sin(\theta_3) f_1^T N f_1 + 2 \cos(\theta_3) e_1^T N f_1)^2. \end{aligned}$$

Puis :

$$R_t(E) \geq \frac{C A_t \|E\|^2}{4} \left( (e_1^T N e_1)^2 + (\sin(\theta_3) f_1^T N f_1 + 2 \cos(\theta_3) e_1^T N f_1)^2 \right).$$

On a également :

$$\begin{aligned} (e_1^T N e_1)^2 &\geq 4 (e_1^T F e_1)^2 - 4 \|E\| (e_1^T F e_1) (e_1^T F^T F e_1) \\ &\geq 4 \left( (e_1^T F e_1)^2 - \rho \right), \end{aligned}$$



et :

$$(\sin(\theta_3)f_1^T N f_1 + 2 \cos(\theta_3)e_1^T N f_1)^2 \geq 4 (\sin(\theta_3)f_1^T F f_1 + \cos(\theta_3)e_1^T F f_1)^2 - 24\rho.$$

D'où :

$$R_t(E) \geq C A_t \|E\|^2 \left( (e_1^T F e_1)^2 + (\sin(\theta_3)f_1^T F f_1 + \cos(\theta_3)e_1^T F f_1)^2 - 7\rho \right).$$

□

**Lemme 5.3.6** (Contrôle en 0 de  $T_t$ ). *Il existe une constante  $\rho > 0$  telle que pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  vérifiant :*

$$\|E\| \leq \rho, \quad f_1^T E e_1 = 0,$$

on ait :

$$T_t(E) \geq \frac{A_t \|E\|^2}{2} (\cos(\theta_3)(e_1^T F e_1 - f_1^T F f_1) + \sin(\theta_3)e_1^T F f_1)^2.$$

*Démonstration.* En utilisant le lemme 5.3.4, on a :

$$T_t(E) \geq \frac{A_t \|E\|^2}{\sin^2(\theta_3)} \left( \frac{f_1^T F e_1}{\|e_1 + E e_1\|} - \frac{f_2^T F e_2}{\|e_2 + E e_2\|} \right)^2.$$

On rappelle que l'on a :

$$f_1^T F e_1 = 0.$$

Pour  $\rho \leq \frac{1}{6}$ , on a donc :

$$\begin{aligned} T_t(E) &\geq \frac{A_t \|E\|^2}{\sin^2(\theta_3) \|e_2 + E e_2\|^2} (f_2^T F e_2)^2 \\ &\geq \frac{A_t \|E\|^2}{\sin^2(\theta_3)(1 - 3\rho)} (f_2^T F e_2)^2 \\ &\geq \frac{A_t \|E\|^2}{2 \sin^2(\theta_3)} (f_2^T F e_2)^2. \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} T_t(E) &\geq \frac{A_t \|E\|^2}{2 \sin^2(\theta_3)} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_3)(e_1^T F e_1 - f_1^T F f_1) + \sin^2(\theta_3)e_1^T F f_1)^2 \\ &= \frac{A_t \|E\|^2}{2} (\cos(\theta_3)(e_1^T F e_1 - f_1^T F f_1) + \sin(\theta_3)e_1^T F f_1)^2. \end{aligned}$$

□

**Proposition 5.3.1** (Contrôle en 0 de  $E_t$ ). *Il existe des constantes  $\rho > 0, C > 0$  indépendantes du triangle  $t$ , telles que pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\|E\| \leq \rho$ , on ait :*

$$E_t(E) \geq C A_t \|E\|^2.$$

*Démonstration.* On reprend les notations du lemme 5.3.2. Supposons que l'on ait démontré qu'il existe des constantes  $\rho > 0$ ,  $C > 0$  telles que, pour toute matrice  $E$  qui vérifie :

$$\|E\| \leq \rho, \quad f_1^T E e_1 = 0,$$

on ait :

$$R_t(E) + T_t(E) \geq C\|E\|^2.$$

Alors, pour toute matrice  $E \in M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie :

$$\|E\| \leq \frac{\rho}{5},$$

on a :

$$\begin{aligned} R_t(E) + T_t(E) &= R_t(E_\theta) + T_t(E_\theta) \\ &\geq C\|E_\theta\|^2 \\ &\geq \frac{C}{25}\|E\|^2. \end{aligned}$$

Dans la suite, on se restreindra aux matrices  $E \in M_2(\mathbb{R})$  qui vérifient :

$$f_1^T E e_1 = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\cos(\theta_3) f_1^T F f_1 - \sin(\theta_3) e_1^T F f_1)^2 \\ \leq (e_1^T F e_1)^2 \\ + (\cos(\theta_3)(e_1^T F e_1 - f_1^T F f_1) + \sin(\theta_3)e_1^T F f_1)^2. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} (e_1^T F f_1)^2 + (f_1^T F f_1)^2 &\leq (\cos(\theta_3) f_1^T F f_1 - \sin(\theta_3) e_1^T F f_1)^2 \\ &+ (\sin(\theta_3) f_1^T F f_1 + \cos(\theta_3) e_1^T F f_1)^2. \end{aligned}$$

D'après les lemmes 5.3.5 et 5.3.6, il existe donc des constantes  $C > 0$  et  $\delta$  telles que :

$$\begin{aligned} R_t(E) + T_t(E) &\geq C A_t \|E\|^2 \left( (e_1^T F e_1)^2 + (f_1^T F f_1)^2 + (e_1^T F f_1)^2 - \delta \rho \right) \\ &\geq C A_t \|E\|^2 (1 - \delta \rho). \end{aligned}$$

En particulier, pour  $\rho$  suffisamment petit, on a :

$$R_t(E) + T_t(E) \geq \frac{C A_t \|E\|^2}{2}.$$

□

### 5.3.3 Contrôle du régime transitoire

**Proposition 5.3.2.** *Soit  $\rho > 0$ . Il existe une constante  $\alpha > 0$ , indépendante du triangle  $t$ , telle que, pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\|E\| \geq \rho$ , on ait :*

$$E_t(E) \geq \alpha A_t.$$

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe une matrice non nulle  $E \in M_2(\mathbb{R})$  ainsi qu'une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de triangles, telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E_{t_n}(E)}{A_{t_n}} = 0.$$

On suppose de plus, sans perte de généralité, que cette suite vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_{1,n} = e_x.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les limites suivantes existent :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e_{i,n} = e_i, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_{i,n} = \theta_i.$$

D'après le lemme 5.3.2, on peut supposer que :

$$f_1^T E e_1 = 0.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} R_{t_n}(E) &\geq A_{t_n} \left( \sqrt{1 + e_1^T M e_1} - 1 \right)^2 \\ &= A_{t_n} \left( \sqrt{1 + 2e_1^T E e_1 + (e_1^T E e_1)^2} - 1 \right)^2 \\ &= A_{t_n} (e_1^T E e_1)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{t_n}(E)}{A_{t_n}} \geq (e_1^T E e_1)^2,$$

et donc :

$$e_1^T E e_1 = 0.$$

À extraction près, et d'après le lemme 5.3.4, on a soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|e_{3,n} + E e_{3,n}\| = 0,$$

soit :

$$T_{t_n}(E) \geq \frac{A_{t_n}}{\sin^2(\theta_{2,n}) \|e_{3,n} + E e_{3,n}\|^2} (f_{3,n}^T E e_{3,n})^2.$$

Dans tous les cas, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f_{3,n}^T E e_{3,n})^2}{\sin^2(\theta_{2,n})} = 0.$$

Et donc à la limite :

$$\cos(\theta_2) f_1^T E f_1 = \sin(\theta_2) e_1^T E f_1.$$

On a, de la même manière :

$$\cos(\theta_3) f_1^T E f_1 = \sin(\theta_3) e_1^T E f_1.$$

On rappelle que l'on a :

$$\begin{aligned} E &= e_1^T E e_1 + e_1^T E f_1 + f_1^T E e_1 + f_1^T E f_1 \\ &= e_1^T E f_1 + f_1^T E f_1. \end{aligned}$$

Si l'un des deux derniers coefficients est nul, alors on montre que l'autre est également nul.

On suppose d'abord que  $e_1^T E f_1 = 0$ . On a alors :

$$\cos(\theta_2) f_1^T E f_1 = 0.$$

Si  $\cos(\theta_2) = 0$ , on a  $\sin(\theta_2) = 1$ , et :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{t_n}(E)}{A_{t_n}} &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin^2(\theta_{2,n})} \left( \sqrt{1 + e_{3,n}^T M e_{3,n}} - 1 \right)^2 \\ &\geq (f_1^T E f_1)^2. \end{aligned}$$

On a donc dans tous les cas  $f_1^T E f_1 = 0$ , et donc  $E = 0$ .

On suppose maintenant que  $f_1^T E f_1 = 0$ . On en déduit :

$$\sin(\theta_2) e_1^T E f_1 = 0.$$

Si  $\sin(\theta_2) = 0$ , on a  $\cos(\theta_2) = 1$ , et on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{t_n}(E)}{A_{t_n}} \geq C(e_1^T E f_1)^2.$$

On a donc dans tous les cas  $e_1^T E f_1 = 0$ , et donc  $E = 0$ .

On suppose donc dans la suite que ces deux derniers coefficients sont non nuls. On en déduit :

$$\theta_2 = \theta_3, \quad 0 < \sin(\theta_2) < 1,$$

et également :

$$2\theta_2 = \pi - \theta_1,$$

en prenant la limite de la relation de la somme des angles dans un triangle.

D'après le lemme 5.3.3, il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait :

$$\begin{aligned} R_{t_n}(E) &\geq \frac{A_{t_n}}{\sin^2(\theta_{2,n})} \left( \sqrt{1 + e_{3,n}^T M e_{3,n}} - 1 \right)^2 \\ &\geq \frac{C A_{t_n}}{\sin^2(\theta_{2,n})} (e_{3,n}^T M e_{3,n})^2 \\ &\geq C A_{t_n} (2 \cos(\theta_{2,n}) e_1^T E f_1 + \sin(\theta_{2,n}) (2 f_1^T E f_1 + f_1^T E^T E f_1))^2. \end{aligned}$$

Puis, à la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{t,n}(E)}{A_{t_n}} &\geq C (2 \cos(\theta_2) e_1^T E f_1 + \sin(\theta_2) (2 f_1^T E f_1 + f_1^T E^T E f_1))^2 \\ &\geq C A_t \sin^2(\theta_2) (4 f_1^T E f_1 + (f_1^T E e_1)^2 + (f_1^T E f_1)^2)^2 \\ &\geq \frac{C A_t}{\sin^2(\theta_2)} (4 \sin^2(\theta_2) + f_1^T E f_1)^2 (f_1^T E f_1)^2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$f_1^T E f_1 = -4 \sin^2(\theta_2).$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{t,n}(E)}{A_{t_n}} &\geq C \frac{\sin^2(\theta_1)}{\sin^2(\theta_2)} (2 \cos(\theta_1) e_1^T E f_1 + \sin(\theta_1) f_1^T M f_1)^2 \\ &\geq C \frac{\sin^2(\theta_1)}{\sin^4(\theta_2)} (f_1^T E f_1)^2 \\ &\quad \times \left( 2(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2) + \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} f_1^T E f_1 \right)^2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f_1^T E f_1 &= -\frac{2(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2) \sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)} \\ &= -4 \sin^2(\theta_2) - 2 - 2 \sin(\theta_1). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sin(\theta_1) = -1.$$

C'est une contradiction, et la propriété est prouvée.  $\square$

### 5.3.4 Contrôle à l'infini

**Lemme 5.3.7.** *Il existe une constante  $C > 0$ , telle que, pour tout vecteur  $e \in \mathbb{R}^2$  de norme 1, et pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie  $e^T E^T E e \geq C$ , on ait :*

$$1. \quad e^T M e \geq \frac{1}{2} e^T E^T E e;$$

$$2. (\|e + Ee\| - 1)^2 \geq \frac{\|E\|^2}{4} (e^T F^T F e).$$

*Démonstration.* On note  $f = e^\perp$ , et on a :

$$e^T E^T E e = (e^T E e)^2 + (f^T E e)^2,$$

et donc :

$$e^T M e = 2e^T E e + (e^T E e)^2 + (f^T E e)^2.$$

Soit  $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$2a + a^2 + c^2 \geq \frac{a^2 + c^2}{2} \iff 4a + a^2 + c^2 \geq 0.$$

La fonction  $(a, c) \mapsto 4a + a^2 + c^2$  admet ses minimums dans l'ensemble  $\{2 + a + c = 0\}$ . Dans ce cas, et pour  $a \notin ]-4, 0[$ , on a :

$$4a + a^2 + (a + 2)^2 \geq 0.$$

Ainsi, pour  $a^2 + c^2 \geq 25$ , on a :

$$2a + a^2 + c^2 \geq \frac{a^2 + c^2}{2}.$$

De plus, on a, pour tout  $x \geq 1$  :

$$\left(\sqrt{1+x} - 1\right)^2 \geq \frac{x}{2}.$$

On a donc :

$$e^T M e \geq \frac{25}{2} > 1.$$

On en déduit que, pour  $e^T E^T E e \geq 25$ , on a :

$$\left(\sqrt{1 + e^T M e} - 1\right)^2 \geq \frac{e^T E^T E e}{4}.$$

□

**Lemme 5.3.8.** Soit  $E$  une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$f_1^T E e_1 = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} e_3^T M e_3 &\geq \cos^2(\theta_2) e_1^T M e_1 - 4 \cos^2(\theta_2) e_1^T E^T E e_1 - 4 \\ &\quad + \sin^2(\theta_2) \left( f_1^T M f_1 - \frac{1}{2} (e_1^T E f_1)^2 \right), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} e_3^T M e_3 &\leq \cos^2(\theta_2) e_1^T M e_1 + \cos^2(\theta_2) e_1^T E^T E e_1 + 1 \\ &\quad + \sin^2(\theta_2) (f_1^T M f_1 + 2(e_1^T E f_1)^2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On ne prouve uniquement que la première inégalité, la seconde s'obtenant par la même méthode. On a :

$$e_3^T M e_3 = \cos^2(\theta_2) e_1^T M e_1 + \sin^2(\theta_2) f_1^T M f_1 + \sin(2\theta_2) f_1^T M e_1,$$

avec :

$$f_1^T M e_1 = f_1^T E e_1 + e_1^T E f_1 + f_1^T E^T E e_1,$$

et :

$$f_1^T E^T E e_1 = (e_1^T E e_1)(e_1^T E f_1) + (f_1^T E e_1)(f_1^T E f_1).$$

Or :

$$\begin{aligned} \sin(2\theta_2) f_1^T E^T E e_1 &\geq -4 \cos^2(\theta_2) e_1^T E^T E e_1 - \frac{1}{4} \sin^2(\theta_2) f_1^T E^T E f_1 \\ &\geq -4 \cos^2(\theta_2) e_1^T E^T E e_1 - \frac{1}{4} \sin^2(\theta_2) \|E\|^2. \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} \sin(2\theta_2)(f_1^T E e_1 + e_1^T E f_1) &\geq -1 - \sin^2(\theta_2) ((f_1^T E e_1)^2 + (e_1^T E f_1)^2) \\ &\geq -1 - \sin^2(\theta_2) \|E\|^2. \end{aligned}$$

□

**Lemme 5.3.9.** *Il existe des constantes  $\alpha > 0, \rho > 0$  et  $C > 0$  indépendantes du triangle  $t$  telles que, pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie :*

$$\|E\| \geq \rho, \quad e_1^T E^T E e_1 \geq \alpha,$$

*on ait :*

$$E_t(E) \geq C A_t \|E\|^2.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.3.7, pour  $\alpha$  suffisamment grand, on a :

$$e_1^T M e_1 \geq \frac{1}{2} e_1^T E^T E e_1.$$

La fonction  $x \mapsto (\sqrt{1+x} - 1)^2$  est convexe. D'après l'inégalité de Jensen, il existe une constante  $C$  telle que l'on ait :

$$\begin{aligned} R_t(E) &\geq \frac{A_t}{\sin^2(\theta_2)} \left( \left( \sqrt{1 + e_1^T M e_1} - 1 \right)^2 + \left( \sqrt{1 + e_3^T M e_3} - 1 \right)^2 \right) \\ &\geq \frac{C A_t}{\sin^2(\theta_2)} \left( \left( \sqrt{1 + e_1^T M e_1} - 1 \right)^2 + \left( \sqrt{1 + 10 e_1^T M e_1 + e_3^T M e_3} - 1 \right)^2 \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.3.8, on a :

$$10e_1^T Me_1 + e_3^T Me_3 \geq (5 - 4\cos^2(\theta_2)) e_1^T E^T E e_1 - 4 \\ + \sin^2(\theta_2) \left( 2f_1^T E f_1 + (f_1^T E f_1)^2 + \frac{1}{2}(e_1^T E f_1)^2 \right).$$

Puis :

$$10e_1^T Me_1 + e_3^T Me_3 \geq e_1^T E^T E e_1 - 5.$$

On en déduit, pour  $\alpha$  suffisamment grand, que :

$$10e_1^T Me_1 + e_3^T Me_3 \geq \frac{\alpha}{2},$$

et en appliquant le lemme 5.3.7, on en déduit que :

$$R_t(E) \geq \frac{CA_t}{\sin^2(\theta_2)} (2e_1^T E^T E e_1 - 4) \\ + CA_t \left( 2f_1^T E f_1 + (f_1^T E f_1)^2 + \frac{1}{2}(e_1^T E f_1)^2 \right) \\ \geq CA_t \left( 2(e_1^T E e_1)^2 + (f_1^T E f_1)^2 + \frac{1}{2}(e_1^T E f_1)^2 - 2\|E\| - 4 \right).$$

Pour  $\rho$  suffisamment grand, on a :

$$R_t(E) \geq \frac{CA_t}{2} \|E\|^2 \left( 1 - \frac{2}{\rho} - \frac{4}{\rho^2} \right) \\ \geq \frac{CA_t}{4} \|E\|^2.$$

□

**Lemme 5.3.10.** *Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe des constantes  $\beta > 0, \rho > 0$  et  $C > 0$  telles que, pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie :*

$$\|E\| \geq \rho, \quad e_1^T E^T E e_1 \leq \alpha, \quad \sin^2(\theta_2) f_1^T E^T E f_1 \geq \beta,$$

*on ait :*

$$E_t(E) \geq CA_t \|E\|^2.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.3.8, on a :

$$e_3^T Me_3 \geq \sin^2(\theta_2) \left( 2f_1^T E f_1 + (f_1^T E f_1)^2 + \frac{1}{2}(e_1^T E f_1)^2 \right) - 4\alpha - 5.$$

Pour  $\beta$  suffisamment grand, on a :

$$\left( 2f_1^T E f_1 + (f_1^T E f_1)^2 + \frac{1}{2}(e_1^T E f_1)^2 \right) \geq \frac{1}{4} f_1^T E^T E f_1,$$



et :

$$\begin{aligned} e_3^T M e_3 &\geq \frac{\sin^2(\theta_2)}{4} f_1^T E^T E f_1 - 4\alpha - 5 \\ &\geq \frac{\sin^2(\theta_2)}{8} f_1^T E^T E f_1. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$e_3^T M e_3 \geq \frac{\beta}{8}.$$

Pour  $\beta$  suffisamment grand, on applique le lemme 5.3.7, et on a :

$$\begin{aligned} R_t(E) &\geq \frac{A_t}{\sin^2(\theta_2)} \left( \sqrt{1 + e_3^T M e_3} - 1 \right)^2 \\ &\geq \frac{A_t}{16} f_1^T E^T E f_1 \\ &\geq \frac{A_t \|E\|^2}{16} \left( 1 - \frac{\alpha}{\rho^2} \right). \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $\rho$  suffisamment grand :

$$E_t(E) \geq \frac{A_t \|E\|^2}{32}.$$

□

**Lemme 5.3.11.** *Pour tout  $\alpha > 0, \beta > 0$ , il existe des constantes  $\gamma > 0, \rho > 0$  et  $C > 0$  telles que, pour toute matrice  $E \in M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie :*

$$\|E\| \geq \rho, \quad e_1^T E^T E e_1 \leq \alpha, \quad \sin^2(\theta_2) f_1^T E^T E f_1 \leq \beta,$$

*ainsi que pour tout triangle qui vérifie :*

$$\sin(\theta_2) \leq \gamma,$$

*on ait :*

$$E_t(E) \geq C A_t \|E\|^2.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.3.8, on a :

$$e_3^T M e_3 = \cos^2(\theta_2) e_1^T M e_1 + \cos^2(\theta_2) e_1^T E^T E e_1 + 1 + \sin^2(\theta_2) \|E\|^2.$$

Il existe donc une constante  $C_1 > 0$ , qui ne dépend que de  $\alpha$  et  $\beta$ , et telle que :

$$e_3^T M e_3 \leq C_1.$$

D'après le lemme 5.3.4, on a l'alternative :

$$T_t(E) \geq \frac{A_t \|E\|^2 (f_3^T F e_3)^2}{\sin^2(\theta_2) \|e_3 + E e_3\|^2}, \text{ ou } \|e_3 + E e_3\| = 0.$$

On a de plus :

$$\|e_3 + Ee_3\|^2 = 1 + e_3^T M e_3 \leq 1 + C_1.$$

Et donc, il existe une constante  $C_2 > 0$  telle que l'on ait dans tous les cas :

$$\begin{aligned} T_t(E) &\geq C_2 A_t \|E\|^2 \frac{(f_3^T F e_3)^2}{\sin^2(\theta_2)} \\ &\geq C_2 A_t \|E\|^2 (\cos(\theta_2)(e_1^T F e_1 - f_1^T F f_1) + \sin(\theta_2)e_1^T F f_1)^2. \end{aligned}$$

Puis, pour  $\gamma \leq \frac{1}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned} T_t(E) &\geq \frac{C_2}{2} A_t \|E\|^2 ((f_1^T F f_1)^2 - 4 |f_1^T F f_1| (\sin(\theta_2) |e_1^T F f_1| + |e_1^T F e_1|)) \\ &\geq \frac{C_2}{2} A_t \|E\|^2 \left( (f_1^T F f_1)^2 - \frac{4\alpha}{\rho} - 4\gamma \right) \\ &\geq \frac{C_2}{2} A_t \|E\|^2 \left( (e_1^T F e_1)^2 + (f_1^T F f_1)^2 - \frac{5\alpha}{\rho} - 4\gamma \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.3.3, il existe une constante  $C_3 > 0$ , qui ne dépend que de  $C$ , et telle que :

$$\begin{aligned} R_t(E) &\geq \frac{C_3 A_t}{\sin^2(\theta_2)} \left( (e_1^T M e_1)^2 + (e_2^T M e_2)^2 + (e_3^T M e_3)^2 \right) \\ &\geq \frac{C_3 A_t}{4} (\sin(\theta_3) f_1^T M f_1 + 2 \cos(\theta_3) f_1^T M e_1)^2 \\ &\quad + \frac{C_3 A_t}{4} (\sin(\theta_2) f_1^T M f_1 + 2 \cos(\theta_2) f_1^T M e_1)^2. \end{aligned}$$

On note :

$$Q_1 = (\sin(\theta_2) f_1^T M f_1 + 2 \cos(\theta_2) f_1^T M e_1)^2,$$

et :

$$Q_2 = (\sin(\theta_3) f_1^T M f_1 + 2 \cos(\theta_3) f_1^T M e_1)^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} Q_1 &\geq (2 \cos(\theta_2) e_1^T E f_1 + \sin(\theta_2) (e_1^T E f_1)^2)^2 \\ &\quad - 2 \sin(\theta_2) |e_1^T E f_1| (2 \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) |e_1^T E f_1|) |f_1^T E f_1|^2 \\ &\quad - 4 |e_1^T E f_1| (2 + \sin(\theta_2) |e_1^T E f_1|) \\ &\quad \times (\cos(\theta_2) |e_1^T E a_1| |e_1^T E f_1| + \sin(\theta_2) |f_1^T E f_1|). \end{aligned}$$

Et donc, il existe des constantes  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , dépendant uniquement de  $\alpha$  et  $\beta$ , telles que :

$$Q_1 \geq (e_1^T E f_1)^2 (2 \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) e_1^T E f_1)^2 - \delta_1 (f_1^T E f_1)^2 - \delta_2 \frac{\|E\|^2}{\rho}.$$

Et on a, de la même manière :

$$Q_2 \geq (e_1^T E f_1)^2 (2 \cos(\theta_3) + \sin(\theta_3) e_1^T E f_1)^2 - \delta_1 (f_1^T E f_1)^2 - \delta_2 \frac{\|E\|^2}{\rho}.$$

De plus on a, pour  $\delta$  suffisamment petit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^3 (2 \cos(\theta_i) + \sin(\theta_i) e_1^T E f_1)^2 &\geq 2 \left( \cos(\theta_2) - \cos(\theta_3) \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_3)} \right)^2 \\ &= 2 \frac{\sin^2(\theta_3 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_3)} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

On a finalement :

$$\begin{aligned} R_t(E) + T_t(E) &\geq A_t \|E\|^2 \left( \frac{C_2}{2} (e_1^T F e_1)^2 \right) \\ &\quad + A_t \|E\|^2 \left( \frac{C_2}{2} - \delta_1 \frac{C_3}{2} \right) (f_1^T F f_1)^2 + 2C_3 (e_1^T F f_1)^2 \\ &\quad - A_t \|E\|^2 \left( \frac{5C_2\alpha}{2\rho} - 2C_2\gamma - \frac{C_3\delta_2}{2\rho} \right), \end{aligned}$$

et, pour  $C_3$  suffisamment petit, il existe  $C > 0$  telle que :

$$R_t(E) + T_t(E) \geq C A_t \|E\|^2 - A_t \|E\|^2 \left( \frac{5C_2\alpha}{2\rho} - 2C_2\gamma - \frac{C_3\delta_2}{2\rho} \right),$$

puis, pour  $\gamma$  suffisamment petit, et  $\rho$  suffisamment grand, on a :

$$R_t(E) + T_t(E) \geq \frac{C}{2} A_t \|E\|^2.$$

□

**Proposition 5.3.3** (Contrôle à l'infini de  $E_t$ ). *Il existe des constantes  $\rho > 0$  et  $C > 0$ , indépendantes du triangle  $t$ , telles que pour toute matrice  $E$  de  $M_2(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\|E\| > \rho$ , on ait :*

$$E_t(E) \geq C A_t \|E\|^2.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.3.2, on peut supposer sans perte de généralité que :

$$f_1^T E e_1 = 0.$$

Le résultat s'en suit par une application directe des lemmes 5.3.9, 5.3.10 et 5.3.11. □

## 5.4 Convergence ponctuelle

Dans cette section, nous donnons un théorème de convergence ponctuelle presque sûre de la suite d'énergies, en utilisant de nombreux résultats du chapitre 4 comme la formule de Slivnyak-Mecke. Dans les formules de sommations, nous ne ferons pas apparaître explicitement la dépendance au triangle  $t$  des quantités  $\nu_i$  et  $\theta_i$ , définies à la section précédente ainsi que dans la figure 5.1.

### 5.4.1 Développement limité de l'énergie

Soit  $\tau$  une triangulation quelconque de  $D$ . On donne, dans cette section, un développement limité au premier ordre en  $\varepsilon$  des fonctionnelles  $R_\tau$  et  $T_\tau$ . On commence par le développement limité de  $R_\tau$  et on renvoie le lecteur à la proposition 3.3.1 pour une preuve.

**Proposition 5.4.1** (Premier ordre de  $R_\tau$ ). *Soit  $\varphi: W(\tau, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  une déformation du réseau  $\tau$ . On note :*

$$u = \varphi - \text{Id}$$

*le déplacement associé. Alors, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} R_\tau(\varepsilon u) = R_{1,\tau}(u),$$

*avec :*

$$R_{1,\tau}(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} (e_{\nu_i}^T e(u) e_{\nu_i})^2.$$

On donne maintenant le développement limité de  $T_\tau$ , ainsi qu'une preuve, celle-ci étant substantiellement différente de la preuve de la proposition 3.3.2.

**Proposition 5.4.2** (Premier ordre de  $T_\tau$ ). *Soit  $\varphi: W(\tau, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  une déformation du réseau  $\tau$ . On note :*

$$u = \varphi - \text{Id}$$

*le déplacement associé, et l'on suppose qu'il appartient à  $W_{adm}(\tau, \mathbb{R}^2)$ . Alors, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} T_\tau(\varepsilon u) = T_{1,\tau}(u),$$

*avec :*

$$T_{1,\tau}(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G}{2 \sin(\theta_i)} (\det(\nabla u e_{\nu_{i+2}}, e_{\nu_{i+2}}) - \det(\nabla u e_{\nu_{i+1}}, e_{\nu_{i+1}}))^2.$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G}{2 \sin(\theta_i)} (\angle(\varphi(\nu_{i+1}), \varphi(\nu_{i+2})) - \angle(\nu_{i+1}, \nu_{i+2}))^2 \\ &= \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G}{2 \sin(\theta_i)} (\angle(\varphi(\nu_{i+2}), \nu_{i+2}) - \angle(\varphi(\nu_{i+1}), \nu_{i+1}))^2, \end{aligned}$$

et donc :

$$T_\tau(\varepsilon u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G}{2 \sin(\theta_i)} (\angle(\nu_{i+2} + \varepsilon u(\nu_{i+2}), \nu_{i+2}) - \angle(\nu_{i+1} + \varepsilon u(\nu_{i+1}), \nu_{i+1}))^2.$$

Soit  $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . On a de plus :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \angle(\nu_i + \varepsilon u(\nu_i), \nu_i) = 0,$$

et donc pour  $\varepsilon$  suffisamment petit :

$$\angle(\nu_i + \varepsilon u(\nu_i), \nu_i) = \arcsin(\sin[\angle(\nu_i + \varepsilon u(\nu_i), \nu_i)]).$$

Puis :

$$\begin{aligned} \angle(\nu_i + \varepsilon u(\nu_i), \nu_i) &= \arcsin\left(\frac{\varepsilon \det(\nabla u e_{\nu_i}, e_{\nu_i})}{\|e_{\nu_i} + \varepsilon \nabla u e_{\nu_i}\|}\right) \\ &= \arcsin(\varepsilon \det(\nabla u e_{\nu_i}, e_{\nu_i}) + O(\varepsilon^2)) \\ &= \varepsilon \det(\nabla u e_{\nu_i}, e_{\nu_i}) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$T_\tau(\varepsilon u) = \varepsilon^2 \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G}{2 \sin(\theta_i)} (\det(\nabla u e_{\nu_{i+2}}, e_{\nu_{i+2}}) - \det(\nabla u e_{\nu_{i+1}}, e_{\nu_{i+1}}))^2 + o(\varepsilon^3).$$

Et finalement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} T_\tau(\varepsilon u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G}{2 \sin(\theta_i)} (\det(\nabla u e_{\nu_{i+2}}, e_{\nu_{i+2}}) - \det(\nabla u e_{\nu_{i+1}}, e_{\nu_{i+1}}))^2.$$

□

**Remarque 5.4.1.** On peut étendre de manière continue la fonctionnelle  $E_{\tau_n,1}$  à  $W(\tau_n, \mathbb{R}^2)$ .

### 5.4.2 Espérance de l'énergie au premier ordre

Dans cette section, on note  $\tau$  une triangulation plane de Poisson-Delaunay, d'intensité  $\lambda$ . On propose un calcul des espérances  $\mathbb{E}(R_{\tau,1})$  et  $\mathbb{E}(T_{\tau,1})$ , ainsi que des espérances de Palm associées. Ces calculs reposent sur la formule de Slivnyak-Mecke donnée au chapitre précédent, et sur le fait que dans un maillage de Poisson-Delaunay, les différentes variables (tailles des triangles, angles internes des triangles, orientation des triangles, ...) sont indépendantes.

On utilisera le changement de variable de la figure 5.2. Dans le cas ou  $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3$  (au sens de l'ordre cyclique), on a les relations :

$$\begin{array}{llll} \gamma_1 = \gamma_1 & \theta_1 = \frac{r_2 - r_1}{2} & \alpha_1 = \gamma_1 + \frac{r_1 + r_2}{2} & \beta_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \\ \gamma_2 = r_1 + \gamma_2 & \theta_2 = \pi - \frac{r_2}{2} & \alpha_2 = \pi + \gamma_1 + \frac{r_2}{2} & \beta_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \\ \gamma_3 = r_2 + \gamma_3 & \theta_3 = \frac{r_1}{2} & \alpha_3 = \gamma_1 + \frac{r_1}{2} & \beta_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_3. \end{array}$$

On donne un lemme qui permet de se ramener au cas  $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3$  pour une fonction qui vérifie une propriété de symétrie.

**Lemme 5.4.1.** *Soit  $h: [0, 2\pi]^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable, et symétrique en ces deux derniers arguments. On a :*

$$\int_{[0, 2\pi]^3} h(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} k(\gamma_1, r_1, r_2) d\gamma_1 dr_1 dr_2,$$

avec le changement de variables :

$$(\gamma_1, r_1, r_2) \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad r_1 = \gamma_2 - \gamma_1, \quad r_2 = \gamma_3 - \gamma_1.$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} \int_{[0, 2\pi]^3} h(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 &= \int_{\gamma_1}^{\gamma_1+2\pi} \int_{\gamma_1}^{\gamma_1+2\pi} \int_0^{2\pi} k(\gamma_1, r_1, r_2) d\gamma_1 dr_1 dr_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\gamma_1, r_1, r_2) d\gamma_1 dr_1 dr_2, \end{aligned}$$

par périodicité en  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$ . Puis, en utilisant la symétrie, on a :

$$\begin{aligned} \int_{[0, 2\pi]^3} h(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{r_2} + \int_{r_2}^{2\pi} \right] \int_0^{2\pi} k(\gamma_1, r_1, r_2) d\gamma_1 dr_1 dr_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} k(\gamma_1, r_1, r_2) d\gamma_1 dr_1 dr_2 \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} k(\gamma_1, r_1, r_2) d\gamma_1 dr_2 dr_1 \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \int_0^{2\pi} k(\gamma_1, r_1, r_2) d\gamma_1 dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

avec la condition  $0 < r_1 < r_2 < 2\pi$ . □

On donne un lemme pour le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire dérivée de  $R_\tau$ , ainsi que de l'espérance de Palm associée.

**Lemme 5.4.2.** *Soit  $A \subset \mathcal{B}(D)$  un borélien de  $D$ , et  $M$  une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$ . On a :*

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \right) &= \frac{1024k |A|}{9\pi^2}; \\ 2. \quad \mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} (e_{\beta_i} M e_{\beta_i})^2 \right) &= \frac{64k |A|}{9\pi^2} K_{1,1} M : M; \end{aligned}$$

avec  $K_{\lambda, \mu}$  le tenseur de Lamé de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

*Démonstration.* On a :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \right) = \mathbb{E} \left( \sum_{x_0, x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_A(z) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \mathbb{1}_{F_{B(z, R)}} \right),$$

où  $z$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $\text{conv}(x_0, x_1, x_2)$ ,  $R$  et le rayon de ce cercle, et l'indice  $i$  est dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . On note  $\eta_i$  les cotés réduits :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \nu_i = R\eta_i,$$

et  $A$  l'aire du triangle  $\text{conv}(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ . On rappelle l'expression de la loi des sinus dans ce triangle :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \frac{|\eta_i|}{\sin(\theta_i)} = \frac{|\eta_i| |\eta_{i+1}| |\eta_{i+2}|}{2A} = 2.$$

On a alors :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{|\nu_i|^2}{\sin(\theta_i)} = \frac{R^2}{2A} \sum_{i=1}^3 |\eta_i|^2 |\eta_{i+1}| |\eta_{i+2}|.$$

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \right) &= \frac{k}{2} \mathbb{E} \left( \sum_{x_0, x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_A(z) \frac{R^2}{2A} \sum_{i=1}^3 |\eta_i|^2 |\eta_{i+1}| |\eta_{i+2}| \mathbb{1}_{\varphi(B(z, R))=0} \right) \\ &= \frac{\lambda^3 k}{24} \int_{\mathbb{R}^6} \mathbb{1}_A(z) \frac{R^2}{A} \sum_{i=1}^3 |\eta_i|^2 |\eta_{i+1}| |\eta_{i+2}| e^{-\lambda \pi R^2} dx_0 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la formule de changement de variable de Blaschke-Petkantschin (voir annexe C), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \right) &= \frac{k |A|}{12\pi^3} \int_{[0, 2\pi]^3} \sum_{i=1}^3 |\eta_i|^2 |\eta_{i+1}| |\eta_{i+2}| d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\ &= \frac{k |A|}{4\pi^3} \int_{[0, 2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2| |\eta_3| d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le lemme 5.4.1, on a :

$$\int_{[0, 2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2| |\eta_3| d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 = 4\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} |\eta_1|^2 |\eta_2| |\eta_3| dr_1 dr_2.$$

On a de plus, d'après la loi des sinus :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad |\eta_i| = 2 \sin(\theta_i).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} |\eta_1|^2 |\eta_2| |\eta_3| \, dr_1 \, dr_2 &= 16 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \sin\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{r_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_1}{2}\right) \, dr_1 \, dr_2 \\ &= \frac{512}{9}, \end{aligned}$$

d'où le premier résultat.

On note maintenant :

$$\forall \beta \in [0, 2\pi], \quad f(\beta) = (e_\beta M e_\beta)^2.$$

On a alors, par un calcul similaire au calcul précédent :

$$\mathbb{E}(R_{\tau,1}(u)) = \frac{k|A|}{4\pi^3} \int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2| |\eta_3| f(\beta_1) \, d\gamma_1 \, d\gamma_2 \, d\gamma_3.$$

D'après le lemme 5.4.1, on a alors :

$$\int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2| |\eta_3| f(\beta_1) \, d\gamma_1 \, d\gamma_2 \, d\gamma_3 = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} |\eta_0|^2 |\eta_1| |\eta_2| \, dr_1 \, dr_2 \int_0^{2\pi} (e_\theta^T M e_\theta)^2 \, d\theta.$$

En notant  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (e_\theta^T e(u) e_\theta)^2 \, d\theta &= \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta)a^2 + \cos(\theta)\sin(\theta)(b+c)^2 + \sin^2(\theta)d^2)^2 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos^4(\theta)a^2 + \sin^4(\theta)d^2 + \cos^2(\theta)\sin^2(\theta)(b+c)^2 \\ &\quad + 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)ad + 2\cos^3(\theta)\sin(\theta)a(b+c) \\ &\quad + 2\cos(\theta)\sin^3(\theta)d(b+c)] \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} (3a^2 + 3d^2 + (b+c)^2 + 2ad). \end{aligned}$$

On rappelle maintenant l'expression de l'intégrande de l'énergie élastique d'un matériau continu qui suit une loi de Hooke de tenseur  $K_{\lambda,\mu}$  :

$$\begin{aligned} K_{\lambda,\mu} e(u) : e(u) &= (\lambda \operatorname{tr}(e(u)) I_2 + 2\mu e(u)) : e(u) \\ &= (\lambda + 2\mu)a^2 + (\lambda + 2\mu)d^2 + 2\lambda ad + \mu(b+c)^2. \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient :

$$\lambda = \mu = 1,$$

d'où le second résultat. □

**Corollaire 5.4.1.** Soit  $M$  une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$ . On a les espérances suivantes pour la mesure de Palm  $\mathbb{P}_{C_\Phi,0}$  du processus des centres de  $\Phi$  noté  $C_\Phi$  :



1.  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{C_\Phi,0}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \right) = \frac{512k}{9\pi^2} ;$
2.  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{C_\Phi,0}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} (e_{\beta_i} M e_{\beta_i})^2 \right) = \frac{32k}{9\pi^2} K_{1,1} M : M ;$

avec  $K_{\lambda,\mu}$  le tenseur de Lamé de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

*Démonstration.* Soit  $B \subset \mathbb{R}^2$  la boule centrée à l'origine, et de rayon 1. D'après la formule de Campbell-Mecke pour un processus stationnaire donnée au théorème 4.3.3, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{C_\Phi,0}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \right) &= \int_{\mathfrak{N}} \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} d\mathbb{P}_{C_\Phi,0}(\varphi) \\
 &= \frac{1}{\lambda_{C_\Phi}} \int_{\mathfrak{N}} \sum_{x \in \varphi} \mathbb{1}_B(x) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} d\mathbb{P}_{C_\Phi}(\varphi) \\
 &= \frac{1}{\lambda_{C_\Phi}} \int_{\mathfrak{N}} \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_B(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} d\mathbb{P}_\Phi(\varphi) \\
 &= \frac{1}{\lambda_{C_\Phi}} \frac{1024k}{9\pi^2}.
 \end{aligned}$$

De plus, suivant [CSKM13], on a  $\lambda_{C_\Phi} = 2\lambda_\Phi$ . Dans notre cas, on a  $\lambda_\Phi = 1$ , d'où le résultat. On dérive la seconde formule de la même manière.  $\square$

**Lemme 5.4.3.** Soit  $A \subset \mathcal{B}(D)$  un borélien de  $D$ , et  $M$  une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$ . On a :

1.  $\mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} \right) = \frac{4G |A|}{\pi} ;$
2.  $\mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} f(\beta_{i+1}, \beta_{i+2}) \right) = \frac{3G |A|}{2} K_{-1,1} M : M ;$

avec  $K_{\lambda,\mu}$  le tenseur de Lamé de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , et :

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in [0, 2\pi], \quad f(\beta_1, \beta_2) = (\det(M e_{\beta_2}, e_{\beta_2}) - \det(M e_{\beta_1}, e_{\beta_1}))^2.$$

*Démonstration.* On a :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} \right) = \mathbb{E} \left( \sum_{x_0, x_1, x_2 \in \Phi} \mathbb{1}_A(z) \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} \mathbb{1}_{F_B(z, R)} \right),$$

où  $z$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $\text{conv}(x_0, x_1, x_2)$ ,  $R$  est le rayon de ce cercle et  $i$  est l'indice dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . On note  $\eta_i$  les cotés réduits :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \nu_i = R\eta_i,$$

et  $A$  l'aire du triangle  $\text{conv}(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ . On rappelle l'expression de la loi des sinus dans le triangle réduit :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \frac{|\eta_i|}{\sin(\theta_i)} = \frac{|\eta_i| |\eta_{i+1}| |\eta_{i+2}|}{2A} = 2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{|\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{\sin(\theta_i)} &= \frac{R^2}{4A} \sum_{i=1}^3 \frac{|\eta_{i+1}|^2 |\eta_{i+2}|^2 |\eta_i|}{\sin(\theta_i)} \\ &= \frac{R^2}{2A} \sum_{i=1}^3 |\eta_{i+1}|^2 |\eta_{i+2}|^2. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke et le théorème de changement de variable de Blaschke-Petkantschin, comme dans le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{t \in \tau_2} \mathbb{1}_A(c(t)) \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} \right) &= \frac{G |A|}{12\pi^3} \int_{[0, 2\pi]^3} \sum_{i=1}^3 |\eta_{i+1}|^2 |\eta_{i+2}|^2 d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\ &= \frac{G |A|}{4\pi^3} \int_{[0, 2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3. \end{aligned}$$

Puis, d'après le lemme 5.4.1, on a

$$\int_{[0, 2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 = 4\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 dr_1 dr_2.$$

Puis, d'après la loi des sinus :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 dr_1 dr_2 &= 16 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \sin^2(\theta_1) \sin^2(\theta_2) dr_1 dr_2 \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \sin^2\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) \sin^2\left(\frac{r_2}{2}\right) dr_1 dr_2 \\ &= 8\pi^2, \end{aligned}$$

d'où le premier résultat.

On note maintenant  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , ainsi que :

$$\begin{aligned} \forall \beta_1, \beta_2 \in [0, 2\pi], \quad g(\beta_1, \beta_2) &= (f_{\beta_1}^T M e_{\beta_1})^2 + (f_{\beta_2}^T M e_{\beta_2})^2, \\ h(\beta_1, \beta_2) &= (f_{\beta_1}^T M e_{\beta_1})(f_{\beta_2}^T M e_{\beta_2}). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in [0, 2\pi], \quad f(\beta_1, \beta_2) = g(\beta_1, \beta_2) - 2h(\beta_1, \beta_2).$$

On a ensuite, par un calcul similaire au calcul précédent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_{\tau,1}(u)) &= \frac{G|A|}{4\pi^3} \int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 f(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\ &= \frac{G|A|}{4\pi^3} \int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 g(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\ &\quad - 2 \frac{G|A|}{4\pi^3} \int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 h(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3.\end{aligned}$$

Calculons la première intégrale. D'après le lemme 5.4.1, on a :

$$\int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 g(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 dr_1 dr_2 \int_0^{2\pi} (e_\theta^\perp M e_\theta)^2 d\theta.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (e_\theta^\perp M e_\theta)^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} (-a \cos(\theta) \sin(\theta) - b \sin^2(\theta) + c \cos^2(\theta) + d \cos(\theta) \sin(\theta))^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} (a^2 + 3b^2 + 3c^2 + d^2 - 2ad - 2bc).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 g(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 = 8\pi^3 ((a-d)^2 + 3(b^2 + c^2) - 2bc).$$

Calculons maintenant la seconde intégrale. On a :

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 h(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \\ = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 \int_0^{2\pi} (f_{\beta_1}^T M e_{\beta_1})(f_{\beta_2}^T M e_{\beta_2}) d\gamma_1 dr_1 dr_2\end{aligned}$$

En faisant le calcul, on trouve :

$$\int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 h(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 = \pi^3 ((a-d)^2 + 9(b^2 + c^2) - 14bc).$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]^3} |\eta_1|^2 |\eta_2|^2 f(\beta_1, \beta_2) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 &= 6\pi^3 ((a-d)^2 + (b^2 + c^2)) \\ &= 6\pi^3 K_{-1,1} M : M,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Corollaire 5.4.2.** *Soit  $M$  une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$ . On a les espérances suivantes pour la mesure de Palm  $\mathbb{P}_{C_\Phi,0}$  du processus des centres de  $\Phi$  noté  $C_\Phi$  :*

1.  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{C_\Phi,0}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} \right) = \frac{2G}{\pi};$
2.  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{C_\Phi,0}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{G |\nu_{i+1}| |\nu_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} f(\beta_{i+1}, \beta_{i+2}) \right) = \frac{3G}{4} K_{-1,1} M : M;$

avec  $K_{\lambda,\mu}$  le tenseur de Lamé de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , et :

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in [0, 2\pi], \quad f(\beta_1, \beta_2) = (\det(Me_{\beta_2}, e_{\beta_2}) - \det(Me_{\beta_1}, e_{\beta_1}))^2.$$

*Démonstration.* On procède comme dans la preuve du corollaire 5.4.1. □

### 5.4.3 Convergence presque sûre de la fonctionnelle d'énergie

**Proposition 5.4.3** (Convergence simple et développement limité). *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$  qui vérifie de plus :*

$$\exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \quad P_{\tau_n}(u) \in W_{adm}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n} \circ P_{\tau_n}(\varepsilon_n u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{\tau_n,1} \circ P_{\tau_n}(u).$$

*Démonstration.* Soit  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$  un champ de déplacement, tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{\tau_n}(u) \in W_{adm}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = P_{\tau_n}(u),$$

ainsi que :

$$Q_{n,1}(u) = \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u_n) - R_{\tau_n,1}(u_n),$$

et :

$$Q_{n,2}(u) = \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u_n) - T_{\tau_n,1}(u_n),$$

les restes des développements limités.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\nabla u_n\|_\infty \leq \|\nabla u\|_\infty < +\infty.$$

Donc, pour  $n$  suffisamment grand, on a :

$$\begin{aligned} Q_{n,1}(u) &= \sum_{t \in \tau_{n,2}} \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \left[ \varepsilon_n^{-2} (\|e_{\nu_i} + \varepsilon_n \nabla u_n e_{\nu_i}\| - 1)^2 - (e_{\nu_i}^T e(u_n) e_{\nu_i})^2 \right] \\ &\leq \varepsilon_n C \sum_{t \in \tau_{n,2}} \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)}, \end{aligned}$$

avec la constante  $C$  qui ne dépend que de  $\|\nabla u\|_\infty$ .

D'après le théorème ergodique du chapitre précédent (théorème 4.4.1), on a presque sûrement :

$$\sum_{t \in \tau_{n,2}} \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{C_\Phi,0}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{k |\nu_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \right) < +\infty.$$

On en déduit que, presque sûrement, on a pour tout déplacement  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{n,1}(u) = 0.$$

On procède de la même manière pour  $Q_{n,2}$ . □

**Théorème 5.2.1** (Convergence simple). *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ , il existe une suite de déplacements discrets  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

*et qui vérifie de plus :*

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_s(u),$$

*avec :*

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda,\mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

*où  $K_{\lambda,\mu}$  est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :*

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda,\mu} e : e = \lambda \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(e^2),$$

*avec  $\lambda$  et  $\mu$  les première et deuxième constantes de Lamé, qui valent :*

$$\lambda = \frac{32k |A|}{9\pi^2} + \frac{3G |A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k |A|}{9\pi^2} - \frac{3G |A|}{4}.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 5.4.3, on a presque sûrement, pour tout déplacement  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$  qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists N > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \quad P_{\tau_n}(u) \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2)$$

la convergence suivante :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{n,1}(u_n).$$

D'après le théorème ergodique 4.4.1 et les calculs d'espérances de Palm des corollaires 5.4.1 et 5.4.2, pour toute fonction  $u$  de gradient constant, on a presque sûrement :

$$E_{n,1} \circ P_{\tau_n}(u) \rightarrow E_s(u).$$

On étend maintenant ce résultat de convergence aux fonctions simples, que l'on définit ainsi. On considère la famille dénombrable  $Q$  définie par :

$$Q = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q_n,$$

avec  $Q_n$  le découpage de  $D$  par l'ensemble des carrés de côté  $1/n$  suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n = \left\{ I \subset D \mid I = \frac{1}{n} [a, a+1[ \times [b, b+1[, a, b \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

On note également  $M_2(\mathbb{Q})$  l'ensemble des matrices à coefficients rationnels. On note enfin  $FS(D, \mathbb{R}^2)$  l'ensemble des fonctions simples :

$$FS(D, \mathbb{R}^2) = \left\{ \sum_{i \in I} M_i \text{Id}_D \mathbb{1}_{A_i}, (M_i)_{i \in I} \subset M_2(\mathbb{Q}), (A_i)_{i \in I} \subset Q \text{ deux à deux disjoints, } I \text{ fini} \right\}.$$

Toute fonction simple est différentiable presque partout, et on note  $\nabla_a u$  le gradient d'une fonction simple  $u$ . On remarque que  $\nabla_a u \in L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))$ . On étend maintenant l'énergie  $E_{\tau_n, 1}$  sur  $FS(D, \mathbb{R}^2)$  de la manière suivante. Pour tout ouvert  $A \in Q$  et pour toute matrice  $M \in M_2(\mathbb{Q})$ , on pose :

$$\begin{aligned} E_{\tau_n, 1}(M \text{Id}_D \mathbb{1}_A) &= \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k}{2 \sin(\theta_i)} \mathbb{1}_A(c(t)) (e_{\nu_i}^T M e_{\nu_i})^2 \\ &\quad + \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G}{2 \sin(\theta_i)} \mathbb{1}_A(c(t)) (\det(M e_{\nu_{i+1}}, e_{\nu_{i+1}}) - \det(M e_{\nu_{i+2}}, e_{\nu_{i+2}}))^2, \end{aligned}$$

et on étend la définition par linéarité. Comme l'ensemble de fonctions  $FS(D, \mathbb{R}^2)$  est dénombrable, on a presque sûrement la convergence suivante :

$$\forall u \in FS(D, \mathbb{R}^2), \quad E_{\tau_n, 1}(u) \rightarrow E_s(u).$$

Soit maintenant  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$  un déplacement tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{\tau_n}(u) \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

Il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset FS(D, \mathbb{R}^2)$  qui vérifie :

$$\|\nabla u - \nabla_a u_n\|_{L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad E_{\tau_n, 1}(u) &= E_{\tau_n, 1}(u - u_k + u_k) \\ &= E_{\tau_n, 1}(u_k) + E_{\tau_n, 1}(u - u_k) + Q_{\tau_n, 1}(u, u - u_k), \end{aligned}$$

avec  $Q_{\tau_n, 1}$  la forme quadratique associée à l'énergie  $E_{\tau_n, 1}$ .

On montre de la même manière que dans la démonstration de la proposition 5.4.3, que l'on a presque sûrement :

1.  $\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad E_{\tau_n,1}(u - u_k) \leq C_1 \|\nabla u - \nabla_a u_n\|_{L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))}^2,$
2.  $\forall k, n \in \mathbb{N}, \quad Q_{\tau_n,1}(u)(u - u_k) \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))} \|\nabla u - \nabla_a u_n\|_{L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))},$

avec  $C_1, C_2$  qui ne dépendent ni de  $n$ , ni de  $k$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad |E_{\tau_n,1}(u) - E_s(u)| &\leq |E_{\tau_n,1}(u_k) - E_s(u_k)| + |E_s(u) - E_s(u_k)| \\ &\quad + C_1 \|\nabla u - \nabla_a u_n\|_{L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))}^2 \\ &\quad + C_2 \|\nabla u\|_{L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))} \|\nabla u - \nabla_a u_n\|_{L^\infty(D, M_2(\mathbb{R}))}. \end{aligned}$$

On conclut par la continuité de  $E_s$ . □

## 5.5 Convergence variationnelle

Dans cette section, on montre un résultat de  $\Gamma$ -convergence de la suite d'énergies élastiques redimensionnées. Ce résultat est une adaptation du résultat de [ACG11], au cas où le maillage du plan n'est pas régulier – *i.e.* au cas où le ratio des rayons des cercle circonscrit et inscrit pour chaque triangle n'est pas borné.

On montre également que la suite d'énergies est équi-coercive, ce qui, avec le résultat de  $\Gamma$ -convergence, implique qu'une suite de presque minimiseurs des énergies élastiques converge, au sens de la topologie de référence, vers un minimiseur de l'énergie limite au sens de la  $\Gamma$ -convergence.

### 5.5.1 Un résultat de $\Gamma$ -convergence

Dans cette section, on montre un résultat de  $\Gamma$ -convergence de la suite d'énergies élastiques. Pour ce faire, on utilise la méthode de localisation, et on renvoie à l'annexe D pour un exposé plus détaillé de cette méthode.

Notons que le résultat obtenu est un résultat de  $\Gamma$ -convergence presque sur, mais où la représentation intégrale de la  $\Gamma$ -limite dépend du tirage  $\omega \in \Omega$ . Pour montrer que la  $\Gamma$ -limite ne dépend pas du tirage  $\omega \in \Omega$ , on renvoie le lecteur aux articles de R. Alicandro, M. Cicalese et A. Gloria et de G. Dal Maso et L. Modica ([ACG11 ; DM86b]). Leur résultat repose sur le théorème de G. Dal Maso et L. Modica [DM86a], qui permet de déterminer une fonctionnelle sous forme intégrale en fonction de ses minimaux pour un problème de Dirichlet avec conditions aux bords linéaires.

On commence par définir les versions localisées des fonctionnelles  $R_{\tau_n}$  et  $T_{\tau_n}$ . On note  $\mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  l'ensemble des ouverts réguliers de  $D$  :

$$\mathcal{O}_{\text{reg}}(D) = \{V \in \mathcal{O}(D) \mid |\partial V| = 0\}.$$

On note, bien évidemment, pour tout ouvert régulier  $V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_{\tau_n}(\cdot, V) = R_{\tau_n}(\cdot, V) + T_{\tau_n}(\cdot, V).$$

**Définition 5.5.1** (Localisation de  $R_{\tau_n}$ ). Soit  $V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  un ouvert régulier du domaine  $D$ . On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in W(\tau_n, \mathbb{R}^2), \quad R_{\tau_n}(u, V) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu \in \tau_1 \\ \nu \subset \bar{t}}} \frac{k}{2 \sin(\theta_i)} (|\varphi(\nu)| - |\nu|)^2.$$

**Définition 5.5.2** (Localisation de  $T_{\tau_n}$ ). Soit  $V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  un ouvert régulier du domaine  $D$ . On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2), \quad T_{\tau_n}(u, V) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in \tau_1 \\ \nu_1 \cup \nu_2 \subset \bar{t}}} \frac{G}{4 \sin(\theta_i)} (\angle(\varphi(\nu_1), \varphi(\nu_2)) - \angle(\nu_1, \nu_2))^2.$$

Pour tout tirage  $\omega \in \Omega$ , on note  $E_+(\omega)$ , respectivement  $E_-(\omega)$  les  $\Gamma$ -limites supérieures, respectivement inférieures, des fonctionnelles localisées :

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \forall V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D), \quad E_+(\omega)(u, V) &= \Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n(\omega)}(\varepsilon_n u, V), \\ E_-(\omega)(u, V) &= \Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n(\omega)}(\varepsilon_n u, V). \end{aligned}$$

On commence par donner les propositions qui nous permettront d'appliquer le critère de De Giorgi-Letta :

**Proposition 5.5.1** (Croissance). *Pour tout déplacement  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , les fonctions  $E_+(\omega)(u, \cdot)$  et  $E_-(\omega)(u, \cdot)$  sont presque sûrement croissantes :*

$$\begin{aligned} \forall V_1, V_2 \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D), V_1 \subset V_2, \quad E_-(\omega)(u, V_1) &\leq E_-(\omega)(u, V_2), \\ E_+(\omega)(u, V_1) &\leq E_+(\omega)(u, V_2), \end{aligned}$$

et ceci  $\mathbb{P}$ -presque sûrement.

*Démonstration.* Soit  $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  deux ouverts réguliers, tels que  $V_1 \subset V_2$ . On a, pour tout tirage  $\omega \in \Omega$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute fonction  $u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n(\omega), \mathbb{R}^2)$  :

$$E_{\tau_n(\omega)}(u_n, V_1) \leq E_{\tau_n(\omega)}(u_n, V_2),$$

par définition des fonctionnelles localisées. On en déduit le résultat.  $\square$

**Proposition 5.5.2** (Sous-additivité). *Pour tout déplacement  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , les fonctions  $E_+(\omega)(u, \cdot)$  et  $E_-(\omega)(u, \cdot)$  sont presque sûrement sous-additives :*

$$\begin{aligned} \forall V_1, V_2 \in \mathcal{O}_{\text{reg}}, \quad E_-(\omega)(u, V_1 \cup V_2) &\leq E_-(\omega)(u, V_1) + E_-(\omega)(u, V_2), \\ E_+(\omega)(u, V_1 \cup V_2) &\leq E_+(\omega)(u, V_1) + E_+(\omega)(u, V_2), \end{aligned}$$

et ceci  $\mathbb{P}$ -presque sûrement.

*Démonstration.* Ce résultat découle du lemme suivant et de la propriété de régularité (proposition 5.5.4).  $\square$



**Lemme 5.5.1** (Quasi sous-additivité). *On a presque sûrement la propriété suivante : pour toute déformation  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , pour tout ouverts  $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$ , et pour tout  $V'_1, V'_2 \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  qui vérifient  $V'_1 \subset\subset V_1$  et  $V'_2 \subset\subset V_2$ , on a :*

$$\begin{aligned} E_-(\omega)(u, V'_1 \cup V'_2) &\leq E_-(\omega)(u, V_1) + E_-(\omega)(u, V_2), \\ E_+(\omega)(u, V'_1 \cup V'_2) &\leq E_+(\omega)(u, V_1) + E_+(\omega)(u, V_2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soient  $V'_1, V'_2 \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  deux ouverts, qui vérifient :

$$V'_1 \subset\subset V_1, \quad V'_2 \subset\subset V_2.$$

On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, \quad A_n(\omega) = \{t \in \tau_n(\omega) \mid t \subset V'_1 \cup V'_2, t \not\subset V_1, t \not\subset V_2\}.$$

On a alors, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in W_{\text{adm}}(\tau_n(\omega), \mathbb{R}^2), \quad E_{\tau_n(\omega)}(u, V'_1 \cup V'_2) &\leq E_{\tau_n(\omega)}(u, V_1) + E_{\tau_n(\omega)}(u, V_2) \\ &\quad + E_{\tau_n(\omega)}(u, A_n(\omega)). \end{aligned}$$

Or, d'après la propriété de convergence presque sûre et uniforme de  $\tau_n$  vers  $D$ , on a pour presque tout  $\omega \in \Omega$  l'existence d'un entier  $N_\omega \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n > N_\omega$  on ait :

$$\bar{h}(\tau_n(\omega)) \leq \frac{1}{2} \inf(\text{dist}(V'_1, V_1), \text{dist}(V'_2, V_2)),$$

avec  $\bar{h}(\tau)$  la fonction d'échelle du maillage (voir annexe A). Dans ce cas, on a presque sûrement  $A_n = \emptyset$ , et on en déduit les inégalités annoncées.  $\square$

**Proposition 5.5.3** (Sur-additivité). *Pour tout déplacement  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , les fonctionnelles  $E_+(\omega)(u, \cdot)$  et  $E_-(\omega)(u, \cdot)$  sont presque sûrement sur-additive sur les ouverts réguliers disjoints :*

$$\begin{aligned} \forall V_1, V_2 \in \mathcal{O}_{\text{reg}}, V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad E_-(\omega)(u, V_1) + E_-(\omega)(u, V_2) &\leq E_-(\omega)(u, V_1 \cup V_2), \\ E_+(\omega)(u, V_1) + E_+(\omega)(u, V_2) &\leq E_+(\omega)(u, V_1 \cup V_2), \end{aligned}$$

et ceci  $\mathbb{P}$ -presque sûrement.

*Démonstration.* On a, pour tout  $\omega \in \Omega$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$E_{\tau_n(\omega)}(u, V_1) + E_{\tau_n(\omega)}(u, V_2) \leq E_{\tau_n(\omega)}(u, V_1 \cup V_2).$$

On en déduit directement le résultat.  $\square$

**Proposition 5.5.4** (Régularité intérieure). *Pour tout déplacement  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , les fonctions  $E_-(\omega)(u, \cdot)$  et  $E_+(\omega)(u, \cdot)$  sont presque sûrement régulières intérieurement, c'est à dire que pour tout  $V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$ , on a :*

$$\begin{aligned} \sup_{V' \subset\subset V} E_-(\omega)(u, V') &= E_-(\omega)(u, V) \\ \sup_{V' \subset\subset V} E_+(\omega)(u, V') &= E_+(\omega)(u, V). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On prouve ce résultat pour la fonctionnelle  $E_+$ , la preuve étant identique pour la fonctionnelle  $E_-$ . Comme la fonctionnelle  $E_+$  est presque-sûrement croissante, il suffit de prouver :

$$\sup_{V' \subset \subset V} E_+(\omega)(u, V') \geq E_+(\omega)(u, V).$$

Cette inégalité est une conséquence de la proposition 5.5.6 et du lemme 5.5.1. Soit  $\eta > 0$ , il existe des ouverts  $(V_i)_{i \in \{0..4\}} \subset \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$  qui vérifient :

1.  $V_4 \subset \subset V_3 \subset \subset V_2 \subset \subset V_1 \subset \subset V \subset \subset V_0$  ;
2.  $|V_0 \setminus \overline{V_4}| \leq \eta$ .

D'après le lemme 5.5.1, on a alors :

$$\begin{aligned} E_+(\omega)(u, V) &= E_+(\omega)(u, V_2 \cup (V \setminus \overline{V_3})) \\ &\leq E_+(\omega)(u, V_1) + E_+(\omega)(u, V_0 \setminus \overline{V_4}) \\ &\leq \sup_{V' \subset \subset V} E_+(\omega)(u, V') + E_+(\omega)(u, V_0 \setminus \overline{V_4}). \end{aligned}$$

On a de plus, d'après la proposition 5.5.6 :

$$E_+(\omega)(u, V_0 \setminus \overline{V_4}) \leq C \|\nabla u\|_{L^2(V_0 \setminus \overline{V_4})} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

La conclusion suit. □

On donne maintenant deux propositions qui nous permettront d'appliquer le résultat de représentation intégrale de Buttazzo et Dal Maso.

**Proposition 5.5.5** (Localité). *Pour tout  $V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$ , pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , et pour tout couple  $(u_1, u_2) \in H^1(D, \mathbb{R}^2)^2$  qui vérifie  $u_1 = u_2$  presque partout sur  $V$ , on a :*

$$E_+(\omega)(u_1, V) = E_+(\omega)(u_2, V).$$

*Démonstration.* Soit  $(u_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2,n})_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(D, \mathbb{R}^2)$  deux suites de déplacements admissibles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{1,n}, u_{2,n} \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

qui vérifient de plus :

$$u_{1,n} \rightarrow u_1 \text{ dans } L^2(D, \mathbb{R}^2), \quad u_{2,n} \rightarrow u_2 \text{ dans } L^2(D, \mathbb{R}^2),$$

et  $\mathbb{P}$ -presque sûrement :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n(\omega)}(\varepsilon_n u_{1,n}, V) = E_+(\omega)(u_1, V).$$

On définit maintenant la suite de fonctions  $(u_{3,n})_{n \in \mathbb{N}}$  en tout point du maillage par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \tau_{n,1}(\omega), \quad u_{3,n}(x) = u_{1,n} \mathbb{1}_V(x) + u_{2,n}(1 - \mathbb{1}_V(x)).$$

Comme on a  $u_1 = u_2$  presque partout dans  $V$ , on en déduit :

$$u_{3,n} \rightarrow u_2 \text{ dans } L^2(D, \mathbb{R}^2).$$

Donc, par définition de la  $\Gamma$ -limite supérieure :

$$E_+(\omega)(u_2, V) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n(\omega)}(\varepsilon_n u_{3,n}, V).$$

Comme les fonctionnelles  $E_{\tau_n(\omega)}(u_{3,n}, V)$  ne dépendent uniquement que des valeurs de  $u_{3,n}$  dans  $V$ , on en déduit :

$$E_+(\omega)(u_2, V) \leq E_+(\omega)(u_1, V).$$

On conclut par symétrie.  $\square$

**Proposition 5.5.6** (Taux de croissance). *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$  et pour tout  $V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$ , on ait :*

$$E_+(\omega)(u, V) \leq C \|\nabla u\|_{L^2(V, M_2(\mathbb{R}))}^2,$$

et ceci  $\mathbb{P}$ -presque sûrement.

*Démonstration.* On obtient ce résultat par comparaison avec la limite simple. On a, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \forall V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D), \quad E_+(\omega)(u, V) &\leq E_s(u, V) \\ &\leq C \int_V |\nabla u|^2 \, dx, \end{aligned}$$

avec la constante  $C > 0$  qui ne dépend uniquement que de  $k$  et de  $G$ .  $\square$

Les deux théorèmes suivants sont une adaptation directe de [ACG11]. On donne la preuve du théorème de compacité, et on renvoie à l'article pour une preuve du théorème de  $\Gamma$ -convergence.

**Théorème 5.5.1** (Compacité individuelle). *Pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe une sous-suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que la suite de fonctionnelles  $E_{\tau_{n_k}(\omega)}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $E_{\text{hom}}(\omega) : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :*

$$E_{\text{hom}}(\omega)(u) = \begin{cases} \int_D f_{\text{hom}}(x, \nabla u, \omega) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la fonction  $f_{\text{hom}}(\cdot, \cdot, \omega) : D \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de Carathéodory, qui est quasi-convexe en sa deuxième variable. De plus, il existe deux constantes  $0 < c < C$  telles que l'on ait, presque sûrement :

$$c|E|^2 \leq f_{\text{hom}}(x, E, \omega) \leq C|E|^2.$$

Enfin, pour tout déplacement  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$  et pour tout  $V \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$ , on a :

$$\Gamma\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} E_{\tau_{n_k}(\omega)}(u, V) = \int_V f_{\text{hom}}(x, \nabla u, \omega) \, dx.$$

*Démonstration.* D'après la propriété de compacité de la  $\Gamma$ -convergence (voir annexe D), la proposition 5.5.4 nous indique que, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe une extractrice  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout couple  $(u, V) \in H^1(D, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)$ , on ait :

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-}\lim_{k \rightarrow +\infty} E_{\tau_{n_k}(\omega)}(u, V) &= E_-(\omega)(u, V) \\ &= E_+(\omega)(u, V). \end{aligned}$$

On note  $E_{\text{hom}}(\omega)$  cette limite, qu'on prolonge sur  $H^1(D, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{O}(D)$  par :

$$\forall u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_{\text{hom}}(\omega)(u, V) = \sup\{E_{\text{hom}}(\omega)(u, V'), V' \subset \subset V, V' \in \mathcal{O}_{\text{reg}}(D)\}.$$

D'après les propositions 5.5.1, 5.5.3 et 5.5.4, la fonctionnelle  $E_{\text{hom}}(\omega)$  est  $\mathbb{P}$ -presque sûrement croissante, sous-additive, sur-additive sur les ensembles disjoints, et régulière intérieurement. D'après le critère de De Giorgi-Letta,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement et pour toute fonction  $u \in H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , il existe une mesure  $\mu(\omega, u)$  qui vérifie :

$$\forall V \in \mathcal{B}(D), \quad \mu(\omega, u)(V) = E_{\text{hom}}(\omega)(u, V).$$

Cette mesure  $\mu(\omega, u)$  est semi-continue inférieurement, invariante par translations, et vérifie la condition de croissance de la proposition 5.5.6. D'après le théorème de représentation intégrale de Buttazzo et Dal Maso, on en déduit qu'il existe  $\mathbb{P}$ -presque sûrement une fonction de Carathéodory  $f_{\text{hom}}$ , qui est quasi-convexe en sa deuxième variable, et qui vérifie :

$$c|E|^2 \leq f_{\text{hom}}(x, E, \omega) \leq C|E|^2,$$

pour des certains  $0 < c < C$ , et :

$$E_{\text{hom}}(\omega)(u) = \int_D f_{\text{hom}}(x, \nabla u, \omega) \, dx.$$

□

**Théorème 5.5.2** ( $\Gamma$ -convergence). *La suite de fonctionnelles  $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{\text{hom}}: L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :*

$$E_{\text{hom}}(u) = \begin{cases} \int_D f_{\text{hom}}(\nabla u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $f_{\text{hom}}$  défini pour toute matrice  $E \in M_2(\mathbb{R})$  par :

$$f_{\text{hom}}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \inf \{ E_{\tau_n}(u), u \in W_E(\tau_n, \mathbb{R}^2) \} \, d\mathbb{P}(\omega),$$

où l'on a noté :

$$W_E(\tau_n, \mathbb{R}^2) = \{u \in W(\tau_n, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \partial\tau_{n,1}, u(p) = Ep\}.$$

De plus, la fonction  $f_{\text{hom}}$  vérifie :

1.  $f_{hom}(\cdot) : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  est quasi-convexe ;
2.  $\exists 0 < c < C, \quad c|E|^2 \leq f_{hom}(E) \leq C|E|^2$  ;
3. (objectivité)  $f_{hom}$  est isotrope :  $\forall E \in M_2(\mathbb{R}), \forall Q \in SO_2(\mathbb{R}), \quad f_{hom}(QE) = f_{hom}(E)$  ;
4. (isotropie)  $\forall E \in M_2(\mathbb{R}), \forall Q \in SO_2(\mathbb{R}), \quad f_{hom}(EQ) = f_{hom}(E)$  ;
5. (ergodicité)  $f_{hom}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \{ E_{\tau_n}(u), u \in W_E(\tau_n, \mathbb{R}^2) \}$  presque sûrement.

Enfin, pour toute donnée au bord  $v$  dans  $\text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , la suite de fonctionnelles  $(E_{\tau_n}^v)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{hom}^v : L^p(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$E_{hom}^v(u) = \begin{cases} \int_D f_{hom}(\nabla u) \, dx & \text{si } u - v \in H_0^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 5.5.1.** Ce théorème est également valable pour la suite d'énergies redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ainsi que pour la suite d'énergies linéarisées  $(E_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$ , la preuve s'adaptant directement.

On montre maintenant que, si le redimensionnement est suffisamment rapide, l'énergie homogénéisée prend la forme de l'énergie élastique d'un matériau homogène et isotrope qui vérifie la loi de Lamé.

**Théorème 5.2.2** ( $\Gamma$ -convergence). *Supposons que la suite de changements d'échelle  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

*Alors, la suite de fonctionnelles redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{hom} : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :*

$$E_{hom}(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $K_{\lambda_h, \mu_h}$  est le tenseur de Lamé homogénéisé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda_h, \mu_h} e : e = \lambda_h \text{tr}(e)^2 + 2\mu_h \text{tr}(e^2).$$

*De plus, pour toute donnée au bord  $v$  dans  $\text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , la suite de fonctionnelles  $(E_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{hom}^v : L^p(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :*

$$E_{hom}^v(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u - v \in H_0^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* D'après le théorème 5.5.2 ainsi que la remarque précédente, la suite d'énergies  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers l'énergie limite  $E_{\text{hom}}$  définie par :

$$E_{\text{hom}}(u) = \begin{cases} \int_D f_{\text{hom}}(\nabla u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le potentiel  $f_{\text{hom}}$  est la fonction quasi-convexe  $f_{\text{hom}}: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$f_{\text{hom}}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon_n^2} \int_{\Omega} \inf \{ E_{\tau_n}(\varepsilon_n u), u \in W_E(\tau_n, \mathbb{R}^2) \} \, d\mathbb{P}(\omega),$$

et où les espaces fonctionnels  $W_E(\tau_n, \mathbb{R}^2)$  sont définis dans l'énoncé du théorème 5.5.2.

De plus, la suite la suite d'énergies linéarisées  $(E_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers l'énergie limite  $E_{\text{lin}}$  définie par :

$$E_{\text{lin}}(u) = \begin{cases} \int_D f_{\text{lin}}(e(u)) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $f_{\text{lin}}$  est le potentiel défini pour toute matrice symétrique  $E \in S_2(\mathbb{R})$  par :

$$f_{\text{lin}}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \inf \{ E_{\tau_n,1}(u), u \in W_E(\tau_n, \mathbb{R}^2) \} \, d\mathbb{P}(\omega).$$

En outre, on montre facilement (voir par exemple la proposition 2.13 de [Bra06]) qu'il existe un tenseur  $K$  d'ordre 2 tel que :

$$\forall E \in M_2(\mathbb{R}), \quad f_{\text{lin}}(E) = K e(u) : e(u).$$

Soit maintenant  $E \in M_2(\mathbb{R})$ . Il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de déplacements admissibles, *i.e.* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_E(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

qui vérifie :

$$f_{\text{hom}}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n}(\varepsilon_n u_n).$$

Il existe donc une constante  $C_1 > 0$  telle que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n}(\varepsilon_n u_n) \leq C_1.$$

De plus, d'après le résultat de compacité du théorème 5.2.3, il existe une constante  $C_2 > 0$  ne dépendant pas de  $n$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n}(\varepsilon_n u_n) &\geq C_2 \sum_{t \in \tau_n} \|\nabla u_n\|_{2,t}^2 \\ &= C_2 \sum_{t \in \tau_n} A_t \|\nabla u_n\|_{\infty,t}^2. \end{aligned}$$

D'après le résultat de contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles du processus de maillage de Poisson-Delaunay du théorème 4.6.2, on a presque sûrement :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n^{-2} E_{\tau_n}(\varepsilon_n u) &\geq \frac{C_2}{4} \sum_{t \in \tau_n} \frac{1}{\lambda_n^2 n^{1+2\alpha}} \|\nabla u_n\|_{\infty, t}^2 \\ &\geq \frac{C_2}{4} \frac{1}{\lambda_n^2 n^{1+2\alpha}} \sup_{t \in \tau_n} \|\nabla u_n\|_{\infty, t}^2 \\ &= \frac{C_2}{4} \frac{1}{\lambda_n^2 n^{1+2\alpha}} \|\nabla u_n\|_{\infty, D}^2. \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a presque sûrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\nabla u_n\|_{\infty, D} \leq 2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \lambda_n n^{1/2+\alpha},$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n \|\nabla u_n\|_{\infty, D} = 0.$$

On peut donc montrer que la suite de fonctionnelles redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers la même limite que la suite de fonctionnelles linéarisées  $(E_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ . On en déduit que le potentiel limite  $f_{\text{hom}}$  est linéaire. On conclut en utilisant le résultat de l'annexe B.2.2, d'après lequel un matériau élastique homogène et isotrope, soumis à de petits déplacements, à son premier tenseur de Piola-Kirchhoff qui prend la forme du tenseur d'élasticité de Lamé.  $\square$

### 5.5.2 Compacité et équi-coercivité

Dans cette section, on montre un résultat d'équi-coercivité de la suite d'énergies élastiques.

**Théorème 5.2.3** (Équi-coercivité). *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

*On suppose de plus que cette suite de déplacements est bornée pour l'énergie :*

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

*Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .*

*Démonstration.* Soit  $V: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow R_+$  définie par :

$$V(E) = \inf_{t \in \tau} \frac{R_t(E) + T_t(E)}{A_t}.$$

On montre que  $V$  vérifie les axiomes suivants :

1.  $\forall \rho > 0, \quad \inf_{\|E\| \geq \rho} V(E) > 0;$

2.  $\liminf_{\|E\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|E\|^2} V(E) > 0;$
3.  $\liminf_{\|E\| \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|E\|^2} V(E) > 0.$

Comme la fonction  $V$  vérifie :

$$\forall \tau, \forall u \in W_+(\tau, \mathbb{R}^2), \quad E_\tau(u) \geq \int_{\Omega} V(\nabla u) \, dx,$$

on en déduit facilement qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\forall \tau, \forall u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \quad E_\tau(u) \geq C \|\nabla u\|_2^2,$$

et donc que toute suite bornée pour l'énergie est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Les trois propriétés sont des conséquences directes des propositions 5.3.1, 5.3.2 et 5.3.3.  $\square$

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit un réseau de ressort basé sur une triangulation de Poisson-Delaunay. Nous avons donné presque sûrement l'expression littérale de la limite simple de l'énergie élastique sur ce maillage, en utilisant des outils de processus ponctuels stochastiques. La limite simple prend la forme de l'énergie élastique d'un milieu homogène et isotrope, soumis à l'hypothèse des petits déplacements. Elle dépend donc de deux paramètres réels – les deux coefficients de Lamé du matériau. Notons que, contrairement au maillage régulier du chapitre 3, nous pouvons cette fois exploiter les deux constantes d'élasticité du matériau – la constante de traction et la constante de torsion – pour obtenir les coefficients de Lamé spécifique au matériau modélisé à la limite.

Dans un deuxième temps, nous avons montré que la suite d'énergies élastiques  $\Gamma$ -converge vers une énergie limite. De plus, lorsque le redimensionnement est suffisamment rapide, nous avons montré que la  $\Gamma$ -limite s'écrit comme l'énergie d'un matériau élastique homogène et isotrope, soumis à l'hypothèse des petits déplacements. Cette énergie dépend donc de deux paramètres, les deux constantes de Lamé du matériau homogénéisé. Il serait intéressant d'adapter l'étude numérique [OAJ95] pour obtenir une expression des constantes de Lamé homogénéisées dans notre cas. Nous avons également montré, et c'est l'étape la plus délicate, que la suite d'énergie est équi-coercive.



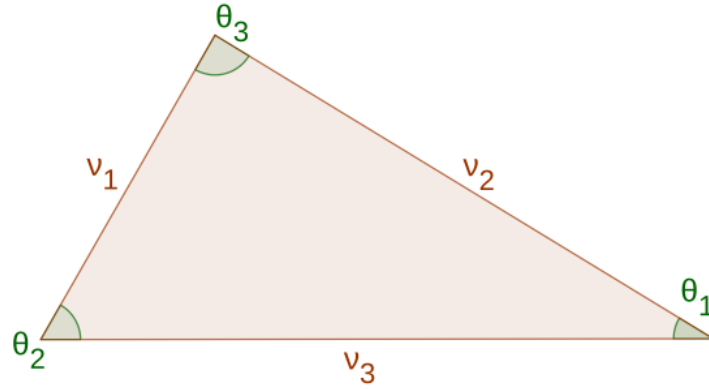


FIG. 5.1 : Triangle du maillage

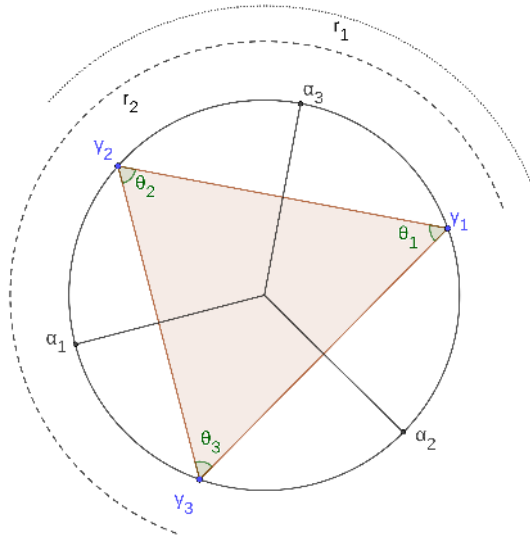
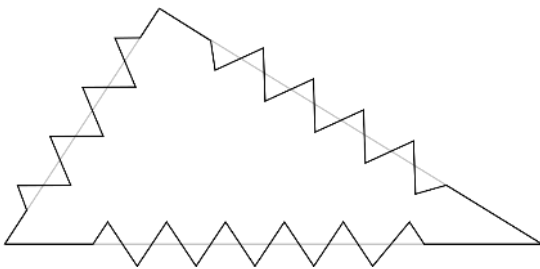
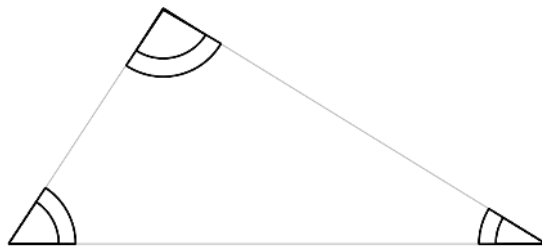


FIG. 5.2 : Changement de variables dans un triangle

FIG. 5.3 : Ressorts de  $R_\tau$ FIG. 5.4 : Ressorts de  $T_\tau$

## CHAPITRE 6

---

### Résultat de quasi-staticité à grande raideur

---

#### Sommaire

---

6.1	Introduction . . . . .	186
6.2	Présentation du problème . . . . .	187
6.2.1	Un système masse-ressorts . . . . .	187
6.2.2	Système à grande raideur et perturbation singulière . . . . .	189
6.3	Résultat de quasi-staticité à grande raideur . . . . .	190
6.3.1	Stabilité et décroissance de l'énergie . . . . .	190
6.3.2	Théorème de Tikhonov et résultat de quasi-staticité . . . . .	192
6.4	Résultats numériques . . . . .	194
6.4.1	Présentation du code . . . . .	194
6.4.2	Quelques résultats numériques . . . . .	195
6.5	Conclusion . . . . .	196

---

## 6.1 Introduction

Dans cette section, nous proposons un résultat de quasi-staticité d'un réseau de ressorts percuté par un objet ponctuel lorsque la raideur du système et sa masse totale tendent vers l'infini. Ce résultat constitue l'une des trois limites identifiées pour améliorer la compréhension du phénomène de percussion d'un floe de glace, selon le projet de recherche détaillé dans l'introduction de la seconde partie de cette thèse.

Rappelons brièvement le cadre physique qui justifie l'hypothèse de quasi-staticité. Lors de la collision de floes de glaces, la vitesse relative des floes (de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres par seconde, voir [RWMB09]) est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace (de l'ordre de grandeur de 1800 mètres par seconde pour les ondes de cisaillement, voir [Mar+19]). Nous montrons que, lors de la percussion d'un réseau masse-ressort par un objet solide, les effets dynamiques disparaissent lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini. Autrement dit, nous montrons que le réseau limite, de raideur infinie, est à chaque instant dans un état d'équilibre.

Plus précisément, nous observerons que le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur, est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Le second, dit système extérieur, est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts.

Dans le processus de limite, nous faisons également varier la masse de l'objet percutant. En effet, si la masse percutante restait constante, le système à raideur infinie ne verrait pas de mouvement. Cette limite nécessite également l'introduction d'effets visqueux, négligeables devant la raideur du système, mais qui assurent la dissipation des ondes élastiques.

Ce type de limite rentre dans le cadre de la théorie des perturbations singulières, le système limite étant qualitativement différent du système perturbé. Nous utiliserons un résultat de A. N. Tikhonov [Tik52] pour montrer l'hypothèse quasi-statique, dans sa variante en temps infini donnée par F. C. Hoppensteadt [Hop66]. Ce résultat utilise une hypothèse de stabilité asymptotique uniforme du point d'équilibre de la couche limite associée au système perturbé, et dépend donc de l'introduction d'effets visqueux.

Dans une première partie, nous détaillons le modèle masse-ressorts utilisé, ainsi que le modèle limite à grande raideur. Nous donnons une preuve que le problème de Cauchy énoncé est bien posé, et que ses solutions sont globales. Nous énonçons également le théorème de limite quasi-statique prouvé dans la partie suivante.

Dans une seconde partie, nous proposons un résultat de stabilité asymptotique uniforme. Nous énonçons également le théorème de A. N. Tikhonov, et l'utilisons pour démontrer le théorème de limite quasi-statique.

Enfin, dans une troisième partie, nous présentons le code numérique qui a été utilisé pour saisir l'influence des différents paramètres physiques en jeu, ainsi que certains résultats de simulation. Nous présentons en particulier différents graphiques du saut spectral, qui représente l'écart entre les valeurs propres des systèmes lents et rapides, sur plusieurs réseaux de ressorts, réalisés comme des tirages de processus stochastiques de Poisson-Delaunay.

## 6.2 Présentation du problème

### 6.2.1 Un système masse-ressorts

#### Hypothèses sur la percussion

On étudie le phénomène de percussion d'un système masse-ressort de  $n + 1$  particules, chacune de masse  $m$ , par un objet ponctuel  $\mathbf{P}$  de masse  $M$ .

Commençons par définir le système masse-ressort utilisé, dont on note  $k > 0$  la constante de raideur et  $\mu > 0$  la constante de viscosité. Soit  $\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$  une triangulation compacte et connexe du plan (voir l'annexe B pour plus de détails). En chaque noeud  $\mathbf{q} \in \tau_0$ , on place une masse ponctuelle  $m$ . Selon le modèle de la figure 6.1, sur chaque arrête  $\omega \subset \tau_1$  de  $\tau$ , on place en parallèle :

1. un ressort de longueur à l'équilibre  $\omega$  et de raideur  $k$ ,
2. un dissipateur visqueux, de viscosité  $\mu$ .

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , le système masse-ressorts est à l'équilibre, et qu'il est percuté par la masse ponctuelle  $\mathbf{P}$  au point  $\mathbf{q}_0 \in \partial\tau_0$ . On note  $\mathbf{v}_0$  la vitesse du point  $\mathbf{P}$  lors de la collision. On suppose également que le système  $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{P}\}$  devient inséparable, de masse  $m + M$ .

Ces deux hypothèses facilitent la modélisation du comportement dynamique du système. Il serait pertinent, dans une prochaine étude, d'étudier la percussion du système masse-ressort par un objet solide non ponctuel et qui ne serait pas fixé au système étudié. Nous pensons que le cas général peut se déduire du cas étudié ici. En effet, l'étude de la percussion complète reviendrait à ajouter, dans le système différentiel étudié ici, un nombre fini de perturbations singulières à des instants distincts. Il serait également intéressant d'intégrer, comme dans les chapitres précédents, des ressorts de torsion en chaque noeud du système masse-ressort.

#### Système différentiel

Sur le maillage  $\tau$ , on note  $\tau_0$  l'ensemble des noeuds du système. On a donc :

$$\tau_0 = \{\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_n\},$$

où les  $\mathbf{q}_i$  sont les coordonnées des masses. On rappelle que le système est à l'équilibre au temps  $t = 0$ . On note  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbb{R})$  les vecteurs de positions et vitesses initiales définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (\mathbf{q}_0(0), \dots, \mathbf{q}_n(0)), \\ \mathbf{b} = (\mathbf{v}_0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

On note de plus  $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice de connectivité :

$$\forall 0 \leq i < j \leq n+1, \quad C_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{q}_i \in \mathcal{V}(\mathbf{q}_j), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\mathcal{V}(\mathbf{q})$  désigne l'ensemble des voisins de la particule  $\mathbf{q} \in \tau_0$ . On note encore  $L_{ij} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice de longueurs à l'équilibre dont l'expression est déduite de  $\tau_0$ . On obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{i=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M+m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{M+m} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\|) \mathbf{u}_{ij} \right], & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|) \mathbf{u}_{ij} \right], & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(SI)}$$

On peut le réécrire ainsi :

$$(E) \begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{i=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M+m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{M+m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(SI)}$$

### Point de vue énergétique

On rappelle l'expression des énergies cinétique, élastique, et de dissipation du système masse-ressort. On note  $E_c$  l'énergie cinétique du système, dont on rappelle l'expression :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad E_c(t) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{\mathbf{q}}_0(t)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m\dot{\mathbf{q}}_i(t)^2.$$

On note  $E_{el}$  l'énergie élastique du système, qui vaut :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad E_{el}(t) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j \leq n} C_{ij} k (\|\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)\| - L_{ij})^2.$$

On note  $E_r$  l'énergie dissipée par les frottements visqueux, qui vaut :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad E_r(t) = \int_0^t \sum_{0 \leq i < j \leq n} C_{ij} \mu \left( \frac{d\|\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)\|}{dt} \right)^2 dt.$$

On note  $E_0$  l'énergie initiale, qui vaut :

$$E_0 = \frac{1}{2}(M+m) \|\mathbf{v}_0\|^2.$$

On écrit finalement la loi de conservation de l'énergie :

$$E_{el}(t) + E_c(t) + E_r(t) = \frac{1}{2}(M+m) \|\mathbf{v}_0\|^2.$$

### Résultat d'existence global

Nous avons le résultat suivant.

**Théorème 6.2.1.** *On suppose que les conditions initiales adjointes au système (E) vérifient la condition énergétique :*

$$E_0 < \frac{k}{4} \left( \inf_{\omega \in \tau_1} |\omega| \right)^2.$$

Alors, le problème de Cauchy est bien posé et ses solutions sont globales.

*Démonstration.* Le système est bien posé si deux particules voisines restent à une distance  $c > 0$  d'une de l'autre. En effet, si l'on note (E) le système différentiel étudié :

$$\ddot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

la fonction  $f$  est globalement lipschitzienne sur l'ouvert de  $\mathbb{R}^{2(n+1)}$  défini par :

$$\forall \mathbf{q} \in \tau_0, \forall \mathbf{q}' \in \mathcal{V}(\mathbf{q}), \quad \|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\| > c.$$

On montre donc que, si la condition énergétique est vérifiée, deux points voisins restent à une distance  $c > 0$  l'un de l'autre. Supposons qu'une solution existe à l'instant  $t \geq 0$ . En utilisant la conservation de l'énergie, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left( \inf_{\omega \in \tau_1} |\omega| \right)^2 &> E_0 \\ &\geq \sup_{0 \leq i < j \leq n} C_{ij} (\|\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)\| - L_{ij})^2. \end{aligned}$$

On note  $d_{\min}(t)$  la distance minimale entre deux voisins, et on en déduit :

$$d_{\min}(t) > \frac{1}{2} \inf_{\omega \in \tau_1} |\omega|.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy est donc bien posé, et ses solutions sont globales.  $\square$

### 6.2.2 Système à grande raideur et perturbation singulière

On introduit maintenant une dépendance en  $\varepsilon$  des constantes physiques du système :  $k_\varepsilon$ ,  $M_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$ . Réécrivons le système masse-ressort.

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{i=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k_\varepsilon}{M_\varepsilon + m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu_\varepsilon}{M_\varepsilon + m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k_\varepsilon}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu_\varepsilon}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], & \forall 1 \leq i \leq n. \quad \text{(SI)} \end{cases}$$

On utilise la dépendance suivante :

$$k_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon^2}, \quad M_\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^2}, \quad \mu_\varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

On peut alors réécrire le système de la manière suivante :

$$(E_\varepsilon) \begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{i=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M + \varepsilon^2 m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{M + \varepsilon^2 m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & \text{(SE)} \\ \varepsilon^2 \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(SI)}$$

On écrit également le système limite :

$$(E_{\text{lim}}) \begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{i=0}^n C_{0j} \frac{k}{M} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{ij}, & \text{(SE)} \\ 0 = \sum_{i=0}^n C_{ij} \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij}, & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(SI)}$$

Ce problème est un problème de perturbation singulière, pour lequel nous souhaiterions prouver le théorème suivant.

**Théorème 6.2.2** (Limite quasi-statique). *Les solutions  $\mathbf{q}_\varepsilon$  et  $\mathbf{q}$  respectivement des systèmes perturbé  $E_\varepsilon$  et limite  $E_{\text{lim}}$  munis des conditions initiales existantes, sont uniques, et globales. De plus, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

## 6.3 Résultat de quasi-staticité à grande raideur

Dans cette section, nous montrons un résultat de stabilité pour le système intérieur. Puis, nous prouvons le théorème de limite quasi-statique à l'aide d'un théorème classique en perturbation singulière. le théorème de A. N. Tikhonov en temps infini [Tik52 ; Hop66], dont nous reproduisons l'énoncé. Le lecteur pourra également consulter la présentation donnée dans la monographie [Kha02], ainsi que l'article de C. Lobry et T. Sari [LS05].

### 6.3.1 Stabilité et décroissance de l'énergie

On rappelle brièvement différentes notions de stabilité d'un système dynamique autour d'un de ses points d'équilibre. On considère le système différentiel suivant :

$$(S_1) \quad \dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0,$$

avec  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue.

**Définition 6.3.1** (Point d'équilibre). Un point d'équilibre du système différentiel  $(S_1)$  est une racine de la fonction  $f$ , c'est à dire un point  $\mathbf{q}_e \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(\mathbf{q}_e) = 0.$$

**Définition 6.3.2** (Stabilité d'un point d'équilibre). Un point d'équilibre  $\mathbf{q}_e \in \mathbb{R}^n$  du système différentiel  $(S_1)$  est dit :

1. stable, si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que toute solution  $\mathbf{q}(t)$  qui vérifie  $\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_e\| \leq \delta$  soit une solution globale, et qu'elle vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e\| \leq \varepsilon;$$

2. asymptotiquement stable, s'il est stable et qu'il existe un  $\delta > 0$  tel que pour toute solution  $\mathbf{q}(t)$  qui vérifie  $\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_e\| \leq \delta$ , on ait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e\| = 0;$$

3. exponentiellement stable s'il existe des  $\alpha, \beta, \delta > 0$  tels que pour toute solution  $\mathbf{q}(t)$  qui vérifie  $\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_e\| \leq \delta$ , on ait :

$$\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e\| \leq \alpha \|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_e\| \exp(-\beta t).$$

**Définition 6.3.3** (Bassin d'attraction). Soit  $\mathbf{q}_e$  un point d'équilibre asymptotiquement stable du système  $(S_1)$ . On appelle bassin d'attraction du point  $\mathbf{q}_e$  la plus grande boule centrée en  $\mathbf{q}_e$  telle que, pour toute solution  $\mathbf{q}(t)$  de  $(S_1)$  à valeur initiale dans cette boule, on ait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e\| = 0$$

On étend maintenant ces définitions classiques de stabilité au cas des systèmes différentiels dépendant d'un paramètre. On considère le système suivant :

$$(S_2) \quad \dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}),$$

avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  fixé et  $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue.

**Définition 6.3.4** (Point d'équilibre d'un système dépendant d'un paramètre). Un point d'équilibre du système différentiel  $(S_2)$  pour le paramètre  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  est une racine de la fonction  $\mathbf{q} \rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ , c'est à dire un point  $\mathbf{q}_e(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{q}_e(\mathbf{x})) = 0.$$

**Définition 6.3.5** (Stabilité asymptotique uniforme d'un point d'équilibre). Soit  $X \subset \mathbb{R}^m$  un domaine de  $\mathbb{R}^m$ . On suppose qu'il existe, pour tout  $\mathbf{x} \in X$ , un point d'équilibre du système différentiel  $(S_2)$  noté  $\mathbf{q}_e(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ . Ce point est dit asymptotiquement stable, uniformément en  $\mathbf{x} \in X$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{x} \in X$ , on ait :



1. toute solution  $\mathbf{q}(t, \mathbf{x})$  de  $(S_2)$  qui vérifie  $\|\mathbf{q}(0, \mathbf{x}) - \mathbf{q}_e(\mathbf{x})\| \leq \delta$  est une solution globale ;
2. cette solution satisfait  $\|\mathbf{q}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{q}_e(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  ;
3. cette solution satisfait  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_e(\mathbf{x})\| = 0$ .

**Proposition 6.3.1.** *Le système différentiel paramétrique :*

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

qui dépend du paramètre constant  $\mathbf{q}_0$  admet, à déplacement solide près, un unique point d'équilibre asymptotiquement stable noté  $\mathbf{q}_e$ . Ce point d'équilibre ne dépend pas du paramètre. De plus, il est asymptotiquement stable uniformément en  $\mathbf{q}_0$  sur un voisinage de  $\mathbf{a}_0$ .

*Démonstration.* D'après le théorème 6.2.1, on peut choisir un voisinage compact  $V$  de  $\mathbf{a}_0$  tel que, pour tous :

$$\mathbf{q}_0 \in V, \quad (\mathbf{q}_1(0), \dots, \mathbf{q}_n(0)) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n),$$

le système soit bien posé et que ses solutions soient globales. Si le paramètre  $\mathbf{q}_0$  est fixé, on peut montrer facilement, via le théorème de LaSalle (voir par exemple [Kha02]), que le point d'équilibre  $\mathbf{q}_e$  est stable. L'uniformité provient de la compacité de  $V$ .  $\square$

### 6.3.2 Théorème de Tikhonov et résultat de quasi-staticité

Le théorème de A. N. Tikhonov [Tik52 ; Hop66] (voir aussi [Kha02 ; LS05]) permet de prouver la convergence des solutions du problème perturbé vers le problème discret, sous certaines hypothèses. Nous l'énonçons ici dans le cas autonome par soucis de simplicité.

Commençons par détailler le système étudié. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions :

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

On considère le système multi-échelles :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), & \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}(\varepsilon), \\ \varepsilon \dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), & \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\zeta}(\varepsilon). \end{cases}$$

La variable  $\mathbf{x}$  est dite variable lente, et la variable  $\mathbf{y}$  est dite variable rapide. À la limite, la variable  $\mathbf{y}$  varie très rapidement selon l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{y}} = g(\boldsymbol{\xi}(0), \mathbf{y}, 0), \quad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\zeta}(0).$$

Nous appelons équation de la couche limite l'équation plus générale suivante :

$$\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0), \quad \mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\zeta}(0).$$

Supposons que cette équation admette un point d'équilibre noté  $h(\mathbf{x})$ , asymptotiquement uniformément stable pour  $\mathbf{x}$  variant dans un certain ensemble  $X$ . Alors, sous certaines hypothèses, le mouvement du système limite est donné par l'équation différentielle suivante, que l'on appelle problème réduit :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}), 0), \quad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}(0).$$

**Théorème 6.3.1** (Tikhonov). *Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  un domaine compact et comprenant l'origine tel que, pour tout  $\mathbf{x} \in X$ ,  $h(\mathbf{x})$  soit un point d'équilibre isolé de la couche limite. Supposons qu'il existe des constantes strictement positives  $r, \varepsilon_0$  telles que, pour tout :*

$$0 \leq t \leq +\infty, \quad \mathbf{x} \in X, \quad z \in B(h(\mathbf{x}), r), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

on ait :

1. les fonctions  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon)$ ,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon)$  et  $h(\mathbf{x})$  sont continues, tout comme les conditions initiales  $\boldsymbol{\xi}(\varepsilon)$  et  $\boldsymbol{\zeta}(\varepsilon)$  ;
2. les fonctions  $f, g$  et  $h$  sont nulles à l'origine :  $f(0, 0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0, 0) = 0$ , et  $h(x) = 0$  ;
3. l'origine du problème réduit est asymptotiquement stable, et la condition initiale  $\boldsymbol{\xi}(0)$  appartient à son bassin d'attraction ;
4. à conditions initiales fixées, les solutions de la couche limite sont uniques, et on note  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  la solution de condition initiale  $\boldsymbol{\zeta}(0)$  ;
5. le point d'équilibre  $h(\mathbf{x})$  de cette couche limite est asymptotiquement stable, uniformément en  $\mathbf{x} \in X$  ;
6. la condition initiale  $\boldsymbol{\zeta}(0)$  est dans le bassin d'attraction de  $h(\boldsymbol{\xi}(0))$ .

Alors, pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $\varepsilon^* > 0$  telle que, pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , toute solution  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$  du problème perturbé est définie sur l'intervalle  $\mathbb{R}^+$  et satisfait :

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \leq \delta,$$

$$\|\mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t/\varepsilon) - h(\mathbf{x}_0(t)) + h(\boldsymbol{\xi}(0))\| \leq \delta,$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . Si, de plus, le problème perturbé a une unique solution sur l'intervalle  $\mathbb{R}^+$ , notée  $(\mathbf{x}(t, \varepsilon), \mathbf{y}(t, \varepsilon))$ , alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}(t, \varepsilon) &= \mathbf{x}_0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{y}(t, \varepsilon) &= h(\mathbf{x}_0(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Tikhonov, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 6.2.2** (Limite quasi-statique). *Les solutions  $\mathbf{q}_\varepsilon$  et  $\mathbf{q}$  respectivement des systèmes perturbé  $E_\varepsilon$  et limite  $E_{\lim}$  munis des conditions initiales existantes, sont uniques, et globales. De plus, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

*Démonstration.* On peut réécrire le système  $(E_\varepsilon)$  ainsi :

$$(E_\varepsilon) \begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_0 = \sum_{i=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M + \varepsilon^2 m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{M + \varepsilon^2 m} \langle \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], \\ \dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{p}}_0, \\ \varepsilon \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\ \varepsilon \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{p}_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

L'équation de la couche limite associée s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{i=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n,$$

D'après la proposition 6.3.1, cette équation admet un unique point d'équilibre, noté  $\mathbf{q}_{\text{int}}(\mathbf{q}_0)$ , qui est asymptotiquement uniformément stable en  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^2$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème 6.3.1 de Tikhonov.  $\square$

## 6.4 Résultats numériques

Dans cette section, on décrit le code informatique utilisé pour simuler le comportement d'un système masse-ressort, construit comme un tirage d'un processus de Poisson-Delaunay, lorsqu'il est percuté par une masse ponctuelle. Ces simulations nous ont été utiles pour comprendre l'influence des différents paramètres physiques présents (masse des deux objets, raideur des ressorts, vitesse d'impact ...). De plus, ce code fournira une bonne base pour analyser la localisation des vecteurs propres du système dynamique et identifier ceux qui agissent sur un déplacement du bord.

### 6.4.1 Présentation du code

On décrit rapidement les fonctionnalités du code informatique conçu, et pour plus de détails on renvoie à la figure 6.6 qui reproduit la page `readme.md`, ainsi qu'à la figure 6.5 qui montre l'interface web conçue.

L'implémentation du modèle consiste en  $\sim 1000$  lignes de codes écrites en Python, ainsi qu'une interface web en HTML/CSS. Nous avons également utilisé `cython`, pour interfacer du code en C avec du code python, et accélérer le programme. Le code dispose de quatre scripts d'exécution :

1. `springslattice-cli.py` : un client en ligne de commande ;
2. `springslattice-web.py` : un client web pour faciliter l'utilisation ;
3. `plotlineardomain.py` : un script qui permet d'identifier pour quels paramètres le système est en régime linéaire ;
4. `ploteigenjump.py` : un script qui affiche le saut spectral en fonction de la taille de la perturbation.

Nous avons utilisé `git` comme outil de versionnage du code, et l'historique fait état d'une centaine de commits. Le code est également fourni avec des tests. Ainsi, nous vérifions les valeurs de la Jacobienne écrite explicitement dans le code, en les comparant aux valeurs numériques calculées par le module `numdifftools`.

Le code utilise également diverses fonctionnalités proposées par la bibliothèque `scipy` [Vir+20]. Le module `scipy.integrate` nous permet d'intégrer l'équation différentielle du système, malgré sa rigidité. Notons que nous avons également écrit un solveur symplectique, interfacé avec `scipy`, pour vérifier les résultats numériques. Le module `scipy.spatial` nous permet de simuler facilement le tirage d'un processus de maillage de Poisson-Delaunay.

Nous utilisons deux solveurs pour inverser les matrices creuses. Le premier, qui est accessible en python via `scipy`, est le solveur `SuperLU` [Li05]. Le second, qui est accessible via la bibliothèque `scikit-sparse`, est le solveur `cholmod` [CDHR08] qui implémente la méthode la décomposition de Cholesky pour les matrices creuses.

### 6.4.2 Quelques résultats numériques

Dans cette section, nous présentons le principal résultat numérique utilisé. À  $\varepsilon > 0$  fixé, on note  $(\lambda_i(\varepsilon))_{i \in \{0, \dots, 4n+3\}}$  les valeurs propres de l'opérateur associé à la linéarisation du système  $(E_\varepsilon)$  autour de sa position d'équilibre. On rappelle que, si la viscosité est non nulle, elles sont toutes à partie réelle strictement négative – modulo les huit valeurs propres nulles associées au mouvement solide –, et on les ordonne ainsi :

$$0 > \Re(\lambda_8(\varepsilon)) \geq \Re(\lambda_9(\varepsilon)) \geq \dots \geq \Re(\lambda_{4n+3}(\varepsilon)).$$

Nous définissons le saut spectral  $\nu_\varepsilon$  associé au système  $(E_\varepsilon)$  de la manière suivante :

$$\nu_\varepsilon = \left| \frac{\Re(\lambda_{12}(\varepsilon))}{\Re(\lambda_{11}(\varepsilon))} \right|.$$

Ce saut représente l'écart entre les quatre premières valeurs propres non nulles du système, qui correspondent au système lent ( $SE$ ), et la première valeur propre du système rapide ( $SI$ ). Dans la suite, nous avons tracé le saut spectral  $\nu_\varepsilon$ , pour différentes triangulations  $\tau$ , en utilisant les valeurs suivantes pour les paramètres physiques :

$$k = 1, \quad v = 1, \quad M = 1, \quad m = \frac{1}{n+1}, \quad \|\mathbf{v}_0\| = 1.$$

Nous commençons par reproduire, en figure 6.2, pour quatre processus de Poisson-Delaunay d'intensité respective 20, 100, 500 et 1000, les graphiques de  $\nu_\varepsilon$ , en échelle log-log, pour dix tirages du processus de Poisson-Delaunay associé. Nous remarquons que ces courbes sont des droites, dont la pente ne dépend ni du tirage, ni de l'intensité du processus de Poisson-Delaunay. Nous proposons donc l'expression suivante pour  $\nu_\varepsilon$  :

$$\ln(\nu_\varepsilon) = a_0(\tau) + \alpha \ln(\varepsilon),$$

avec  $a_0(\tau)$  une quantité qui dépend du maillage  $\tau$ , et  $\alpha$  une constante universelle, indépendante de  $\tau$  et  $\varepsilon$ . Nous obtenons numériquement la valeur :

$$\alpha = -2 \pm 10^{-3}.$$

Puis, nous reproduisons, en figure 6.3, pour six processus de Poisson-Delaunay d'intensité respective 20, 100, 500, 2 500, 10 000, 50 000, les histogrammes des valeurs de  $a_0$ , pour 10 000 tirages du processus de Poisson-Delaunay respectif. Nous reproduisons également, en figure 6.4, pour un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500 000, l'histogramme de la valeur de  $a_0$  associée sur 1 000 tirages. Notons que, dans ce cas, la matrice a une taille de 4 000 000 par 4 000 000 ... Ces résultats semblent indiquer, à grande échelle au moins, que  $a_0(\tau)$  prend ses valeurs entre 0.9 et 2.5. Nous observons également l'émergence de deux pics pour certaines intensités. Il semblerait que le pic de valeur moyenne la plus faible gagne en fréquence de représentation, jusqu'à concentrer la quasi-totalité des cas pour l'intensité de 500 000.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons prouvé un résultat de quasi-staticité d'un réseau de ressorts percuté par un objet solide lorsque la raideur du système tend vers l'infini. Rappelons que ce résultat constitue l'une des trois limites identifiées pour améliorer la compréhension du phénomène de percussion d'un floe de glace, selon le projet de recherche détaillé dans l'introduction de la seconde partie de cette thèse.

Le système différentiel qui régit le comportement du réseau de ressorts lors de la percussion se comporte comme un système double échelle. En utilisant un résultat de A. N. Tikhonov [Tik52] en théorie des perturbations singulières, nous avons montré que le comportement du système perturbé approche le comportement du système limite, lorsque la perturbation est petite. Ce résultat utilise une hypothèse de stabilité asymptotique uniforme du point d'équilibre de la couche limite associée au système perturbé.

Nous décrivons maintenant quelques futures pistes de recherche, pour améliorer le résultat présenté. Tout d'abord, il faudrait découpler l'objet percutant de l'objet percuté, pour permettre l'expulsion de l'objet percutant à la fin de la percussion. De plus, il faudrait généraliser ce résultat au cas d'un objet percutant non ponctuel, qui percuterait plusieurs masses situées au bord du système masse-ressort. Enfin, il faudrait vérifier l'uniformité du résultat en fonction du nombre de particules qui composent le système masse-ressort.

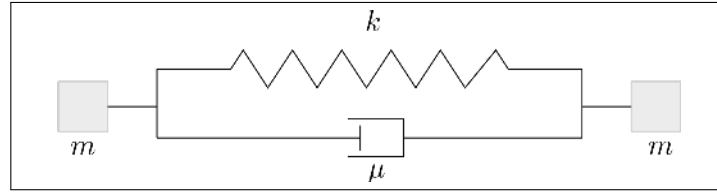


FIG. 6.1 : Système élémentaire masse-ressort



(a) Intensité 20



(b) Intensité 100



(c) Intensité 500



(d) Intensité 1000

FIG. 6.2 : Saut spectral en fonction de la perturbation, en échelle log-log, sur dix tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité fixée



FIG. 6.3 : Histogrammes du paramètre  $a_0$ , sur 10 000 tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité fixée

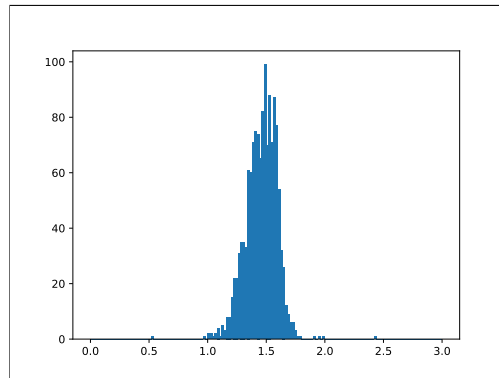


FIG. 6.4 : Histogramme du paramètre  $a_0$  sur 1 000 tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500 000

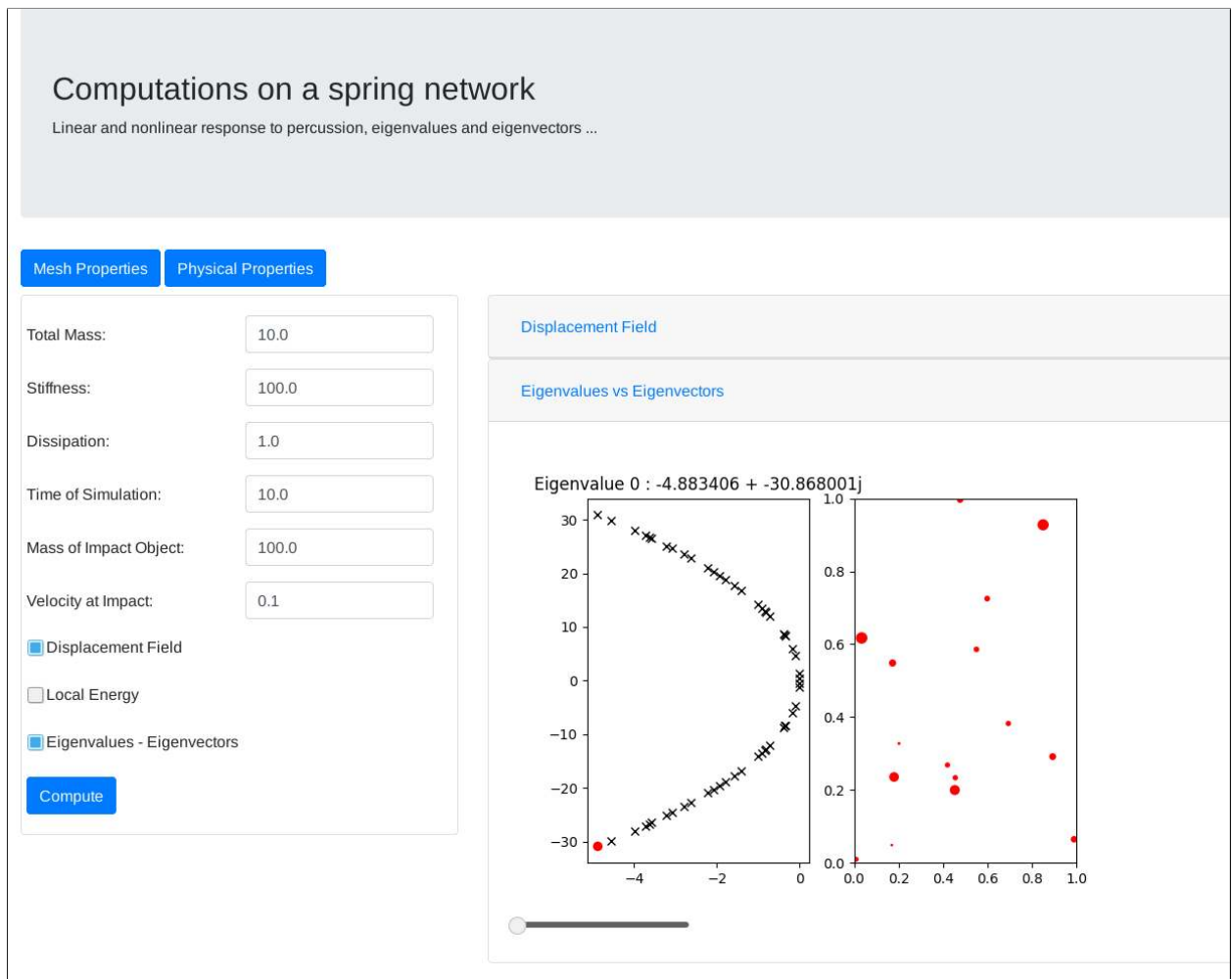


FIG. 6.5 : Client web springslattice-web.py



This python package is the implementation of the numerical method for the impact simulation of a mass-spring lattice of Poisson-Delaunay type.

It uses python3.

### Installation commands:

```
pip install virtualenv
python -m venv venv
source venv/bin/activate
pip install -r requirements.txt
```

### Use cases

#### Mass-spring lattice behavior

This is the main purpose of the code. The simulations can be done via the cli application :

```
python springslattice-cli.py
```

Or via the web client :

```
python springslattice-web.py
```

#### Linear vs nonlinear domain

The script :

```
plotlineardomain.py
```

can test if your parameters are in the linear domain or not.

#### Eigengap

The script :

```
ploteigengap.py
```

plots the eigengap of the singular perturbation problem.

FIG. 6.6 : Fichier Readme.md du package Python springslattice

---

## Conclusion de la seconde partie

---

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés au phénomène de percussion d'un floe de glace par un objet solide. Nous avons présenté un plan de recherche qui nous permettrait d'obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe de glace lors de la percussion. Pour ce faire, nous proposons de modéliser un floe de glace comme un assemblage discret de masses reliées par des ressorts. Le plan de recherche associé à cette modélisation repose sur l'obtention de trois limites mathématiques : une limite temporelle et deux limites spatiales.

La limite temporelle justifie, dans notre cadre, l'hypothèse de quasi-staticité du phénomène de percussion – la vitesse relative des floes étant bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace. Cette limite a été obtenue au chapitre 6, et repose sur l'introduction d'une viscosité mécanique, qui dissipe les phénomènes dynamiques. Cette dissipation est suffisamment faible pour ne pas induire de comportement visco-élastique.

La première limite spatiale justifie qu'un certain réseau de ressorts est une bonne approximation d'un matériel élastique. Nous avons obtenu, au chapitre 5, un résultat de  $\Gamma$ -convergence de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts isotrope, construit au chapitre 4, vers l'énergie élastique d'un matériau élastique continue, homogène et isotrope, soumis à de petits déplacements. Nous avons également obtenu le résultat d'équi-coercivité associé.

Il reste, à l'issue de cette étude, à obtenir une seconde limite spatiale. Cette limite est une limite de couche, qui indiquerait l'expression du déplacement au bord du floe lors de la percussion. Nous pourrions l'obtenir en sélectionnant les vecteurs propres du système dynamique masse-ressorts qui influent sur le comportement d'une couche mince du bord du floe.



---

## Discussion des résultats présentés

---

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche mené conjointement par l'entreprise TOTAL S.A. et l'Université Grenoble Alpes sur la modélisation de la banquise. Concevoir un modèle de la banquise est une entreprise délicate : les phénomènes en jeu sont nombreux et complexes (dérive des glaces, déformations, chocs ...) et ont lieu à différentes échelles spatiales (du mètre au millier de kilomètres) et temporelles (de la seconde à l'année). Cependant, le champ d'application de tels modèles est aussi large que pertinent : prévision de risques environnementaux, étude de l'évolution du climat, études des interactions glace-structure rigide (bateau, port ...) et leurs applications industrielles.

Dans cette thèse, nous avons étudié le phénomène de fracture fragile d'un floe de glace, dans le but d'enrichir un modèle granulaire de simulation du comportement mécanique d'un assemblage de floes de glaces développé dans [Rab15 ; RLW15]. Rappelons que ce modèle est particulièrement adapté pour modéliser la zone marginale des glaces, et peut actuellement simuler le comportement mécanique de plusieurs centaines de milliers de floes de glace.

Dans une première partie, nous avons proposé un modèle variationnel pour la fracture fragile, en utilisant les travaux de G. A. Francfort et J.-J. Marigo [FM98]. Le cadre variationnel utilisé nous permet de simuler les phénomènes complexes que sont la nucléation de fracture et le calcul du lieu de la fracture. Le modèle proposé remplit de plus une condition d'efficacité, nécessaire à son intégration dans un programme de simulation qui gère le comportement d'un grand nombre de floes. Notons qu'il nécessite la connaissance du déplacement au bord du floe lors de la percussio

Dans une seconde partie, nous avons présenté une piste de recherche pour comprendre le phénomène de percussio

À l'issue de cette thèse, certaines questions demeurent. La plus importante d'entre elles est la compréhension complète du phénomène de percussion, *via* l'obtention de la troisième limite. L'obtention de ce résultat est un préalable indispensable à l'implémentation du modèle de fracture dans le code informatique existant. De plus, certaines questions de modélisation sont encore ouvertes dans le modèle de fracture développé en première partie.

Nous proposons également quelques pistes de recherches qu'il serait pertinent de poursuivre une fois le module de fracture implémenté dans le code de simulation existant. Il serait intéressant de mesurer le coefficient de restitution du nouveau modèle et de calibrer les nouveaux paramètres physiques comme la ténacité de la glace, en menant des expériences dans un bassin réfrigéré où flottent des blocs de glace. Notons que le précédent modèle avait été calibré sur une piscine où flottaient des morceaux de bois. Il serait possible de procéder à des tests dans un bassin à glace en s'appuyant, par exemple, sur le projet européen HYDRALAB+. Enfin, de belles questions de modélisation se posent maintenant, comme l'écrasement et la création de *ridges*, qui sont des phénomènes locaux apparaissant lors de la collision de floes, et qui ne sont pas pris en compte dans le modèle actuel. De plus, les modèles granulaires et continus développés par notre équipe de recherche n'interagissent pas entre eux. Il serait intéressant de développer un modèle multi-échelle, en couplant ces deux modèles.

Pour conclure, nous rappelons l'importance de développer les modèles granulaires et continus de la banquise, dont les champs d'applications sont vastes. Le développement d'une nouvelle rhéologie adaptée aux modèles continus, obtenue par V. Dansereau et al. [DWSL16] dans le cadre du projet de recherche mené conjointement par TOTAL S.A. et l'Université Grenoble Alpes, ouvre la porte à une modélisation climatique pertinente de la banquise. L'aboutissement du présent modèle discret permettrait également des simulations, en temps court, d'interactions glace-structure, et donc l'étude de phénomènes aussi diverses qu'importants. Parmi ceux-ci, notons l'étude des risques environnementaux liés à un déversement accidentel d'hydrocarbures en mer, ainsi que la prévision de l'ouverture de routes navales à travers la MIZ.

# Annexes



# ANNEXE A

---

## Maillages

---

Dans cette annexe, on présente brièvement le formalisme lié aux maillages du plan et aux éléments finis. On rappelle également certaines notions de convergence et de régularité d'un maillage.

### A.1 Maillages

**Définition A.1.1** (Maillage de  $\Omega$ ). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . On appelle maillage de  $\Omega$  un ensemble  $\tau = \bigcup_{i=0}^p \tau_i$  qui vérifie :

1.  $\forall i \in \{0, \dots, p\}, \forall \omega \in \tau_i$ ,  $\omega$  est de dimension de Hausdorff  $i$  ;
2.  $\forall \omega \in \tau_p$ ,  $\bar{\omega}$  est un simplexe ;
3.  $\bigcup_{\omega \in \tau_p} \bar{\omega} \subset \Omega$  ;
4.  $\forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \forall \omega \in \tau_i, \exists \omega_1, \omega_2 \in \tau_{i+1}$  tels que  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2$ .

On note  $\mathcal{T}(\Omega)$  l'ensemble des maillages de l'ouvert  $\Omega$ . On définit maintenant des notions de convergence sur  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

**Définition A.1.2** (Convergence d'une suite de maillages). Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\Omega)$  une suite de maillages sur  $\Omega$ . On dit que  $(\tau_n)$  converge :

1. simplement vers  $\Omega$  si :  $\forall x \in \Omega, \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(x, \tau_{n,0}) = 0$  ;
2. uniformément vers  $\Omega$  si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \Omega} (\text{dist}(x, \tau_{n,0})) = 0$ .

On définit maintenant les notions d'étalement en échelle et de régularité d'un maillage.



**Définition A.1.3** (Étalage en échelle d'un maillage). Soit  $\tau \in \mathcal{T}(\Omega)$  un maillage de  $\Omega$ . On appelle étalage en échelle du maillage  $\tau$  la quantité :

$$h(\tau) = \frac{\bar{h}(\tau)}{\underline{h}(\tau)},$$

où l'on a posé :

$$\bar{h}(\tau) = \sup_{\omega \in \tau_p} \text{diam } \omega, \quad \underline{h}(\tau) = \inf_{\omega \in \tau_p} \text{diam } \omega.$$

**Définition A.1.4** (Régularité d'un maillage). Soit  $\tau \in \mathcal{T}(\Omega)$  un maillage de  $\Omega$ . On appelle régularité du maillage  $\tau$  la quantité :

$$r(\tau) = \sup_{\omega \in \tau_p} \frac{\bar{d}(\omega)}{\underline{d}(\omega)},$$

où, pour toute partie  $\omega$  de  $\Omega$ , on pose :

$$\bar{d}(\omega) = \inf_{r>0} \{ \exists x \mid \omega \subset B(x, r) \}, \quad \underline{d}(\omega) = \sup_{r>0} \{ \exists x \mid B(x, r) \subset \omega \}.$$

**Définition A.1.5** (Suites homogènes et régulières). Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\Omega)$  une suite de maillages sur  $\Omega$ . On dit que cette suite est :

1. homogène, si la suite  $(h(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée ;
2. régulière, si la suite  $(r(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

**Proposition A.1.1.** Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\Omega)$  une suite de maillages homogène et régulière, qui converge simplement vers  $\Omega$ . Alors cette suite converge uniformément.

## A.2 Éléments finis sur un maillage

**Définition A.2.1** (Espace des éléments finis  $P1$ ). Soit  $\tau$  un maillage de  $\Omega$ , et  $\tau_0 = (p_1, \dots, p_n)$  les nœuds du maillage. On note  $W(\tau)$  le sous espace vectoriel de dimension finie de  $H^1(\Omega)$  engendré par la famille  $\Phi = (\varphi_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  qui vérifie :

1.  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$  ;
2.  $\forall \omega \in \tau_p, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \varphi_i|_{\omega}$  est affine.

**Définition A.2.2** (Projection sur l'espace des éléments finis). Soit  $\tau$  un maillage de  $\Omega$ . On définit la projection  $P$  de la manière suivante :

$$P: H^1(\Omega) \rightarrow W(\tau)$$

$$u \mapsto \Phi \cdot [M^{-1}(\Phi^T, u)_{L^2(\Omega)}],$$

où  $M$  est la matrice de masse de la famille  $\Phi$  qui s'écrit :

$$M = (\Phi^T, \Phi)_{L^2(\Omega)}.$$

**Théorème A.2.1** (Approximation par éléments finis). Soit  $u \in H^1(\Omega)$ . La suite  $(P_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  pour la norme  $L^2$ .

Dans cette annexe, on présente des résultats classiques de mécanique des milieux continus et d'élasticité. On renvoie le lecteur à [Cia94] pour un exposé plus complet. On suivra en particulier, mais seulement dans cette annexe, la convention de l'auteur de noter  $\nabla u$  la matrice jacobienne, qu'on notera en mathématiques  $\nabla u^T$ .

### B.1 Mécanique des milieux continus

**Définition B.1.1.** On appelle matériau un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  qui est connexe, borné, et dont la frontière est lipschitzienne et  $C^1$  par morceaux.

**Proposition B.1.1** (Régularité d'un matériau). *Soit  $\Omega$  un matériau. On a :*

$$\Omega = \text{int } \overline{\Omega}.$$

La mécanique des milieux continus consiste à déformer un matériau, et à décrire sa nouvelle forme. On impose certaines conditions de régularité sur les déformations considérées.

**Définition B.1.2** (Déformation). On appelle déformation du matériau  $\Omega$  une fonction  $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui est suffisamment régulière, injective, et qui préserve l'orientation. On note également  $u = \varphi - \text{Id}$  le champ de déplacement.

On a les propriétés de régularité suivantes, qui nous permettent de manipuler facilement les variables d'Euler. Dans la suite, on note  $\overline{\Omega}^\varphi = \varphi(\overline{\Omega})$ , et on fait suivre d'un  $^\varphi$  toutes les quantités définies sur  $\Omega^\varphi$ .

**Proposition B.1.2.** *Si une déformation  $\varphi$  est continue sur  $\overline{\Omega}$ , alors on a :*

$$\varphi(\overline{\Omega}) = \overline{\varphi(\Omega)}, \quad \varphi(\partial\Omega) = \partial\varphi(\Omega), \quad \text{int } \varphi(\overline{\Omega}) = \varphi(\Omega).$$

Introduisons maintenant le tenseur des déformations qui indique la manière dont les distances sont modifiées par la déformation  $\varphi$ .

**Définition B.1.3** (Tenseur de Cauchy-Green). Soit  $\varphi$  une déformation du matériau. On appelle tenseur des déformations, ou tenseur de Cauchy-Green, associé à  $\varphi$  le tenseur :

$$C = (\nabla \varphi)^T \nabla \varphi.$$

**Remarque B.1.1.** Ce tenseur émerge de la formule de changement de variables. Si l'on note  $\mathcal{L}(\gamma)$  la longueur d'une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  régulière pour toute déformation  $\varphi$  du matériau, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi \circ \gamma) &= \int_{[0,1]} |(\varphi \circ \gamma)'(t)| dt \\ &= \int_{[0,1]} \langle \nabla \varphi(\gamma(t)) \gamma'(t) | \nabla \varphi(\gamma(t)) \gamma'(t) \rangle^{1/2} dt. \end{aligned}$$

On introduit maintenant le champ de déplacement associé à une déformation, qui traduit le déplacement d'un point du matériau depuis sa position d'origine.

**Définition B.1.4** (Champ de déplacement). Soit  $\varphi$  une déformation du matériau  $\Omega$ . On définit le champ de déplacement  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  par :

$$u = \varphi - \text{Id}.$$

On peut réécrire le tenseur des déformations en fonction du déplacement  $u$  :

$$C = \text{Id} + \nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u = \text{Id} + 2E.$$

Cela nous amène à la définition suivante.

**Définition B.1.5** (Tenseur de Green-St Venant). Soit  $\varphi$  une déformation du matériau. On appelle tenseur de Green-St Venant associé à  $\varphi$  le tenseur :

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u).$$

On aimerait maintenant caractériser les contraintes que subit le matériau. On introduit l'axiome d'Euler-Cauchy, point de départ de la mécanique des milieux continus :

**Axiome B.1.1** (Euler-Cauchy). Soit  $\Omega$  un matériau. On le soumet à des forces volumiques, ainsi qu'à des forces surfaciques sur une partie mesurable  $\Gamma_N \subset \partial\Omega$  du bord, et il occupe alors la configuration déformée  $\Omega^\varphi$ . On représente les forces volumiques et surfaciques respectivement par les densités  $f^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g^\varphi : \Gamma_N^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Il existe alors un champ vectoriel  $t^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \times \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que :

1. Pour tout sous-domaine  $A^\varphi$  de  $\bar{\Omega}^\varphi$ , et pour tout point  $x^\varphi \in \Gamma_N^\varphi \cap \partial A^\varphi$  où la normale  $\nu^\varphi$  à  $\Gamma_N^\varphi \cap \partial A^\varphi$  existe :

$$t^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) = g^\varphi(x^\varphi).$$

2. Axiome de conservation des forces : pour tout sous domaine  $A^\varphi$  de  $\overline{\Omega}^\varphi$ ,

$$\int_{A^\varphi} f^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} t^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) da^\varphi = 0.$$

3. Axiome de conservation des moments : pour tout sous domaine  $A^\varphi$  de  $\overline{\Omega}^\varphi$ ,

$$\int_{A^\varphi} Ox^\varphi \wedge f^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} Ox^\varphi \wedge t^\varphi(x^\varphi, \nu^\varphi) da^\varphi = 0.$$

En faisant quelques hypothèses de régularité, on peut montrer que, à  $x^\varphi$  fixé, la fonction  $t^\varphi(x^\varphi, \cdot)$  est linéaire et symétrique. On peut également montrer que  $t^\varphi(\cdot, \nu^\varphi)$  vérifie une certaine équation aux dérivées partielles.

**Théorème B.1.1** (Cauchy). *On suppose que la densité volumique de force  $f^\varphi$  est continue sur  $\overline{\Omega}^\varphi$ . On suppose de plus que le champ vectoriel des contraintes  $t^\varphi$  est  $C^1$  par rapport à  $x^\varphi$ , et continu par rapport à  $\nu \in \mathcal{S}^2$ . Alors, il existe un champ tensoriel différentiable et symétrique  $T^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$  qui vérifie :*

$$t^\varphi(x^\varphi, \nu) = T^\varphi(x^\varphi)\nu \text{ pour tout } x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi \text{ et tout } \nu \in \mathcal{S}_2.$$

De plus, il vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi) = f^\varphi(x^\varphi), & \forall x^\varphi \in \Omega^\varphi \\ T^\varphi(x^\varphi) = T^\varphi(x^\varphi)^T, & \forall x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi \\ T^\varphi(x^\varphi)\nu^\varphi = g^\varphi(x^\varphi), & \forall x^\varphi \in \Gamma_N^\varphi \end{cases}$$

Cependant, cette équation n'est pas très pratique. En effet, elle est exprimée en fonction de la variable d'Euler  $x^\varphi$  qui est justement l'une des inconnues. On effectue le changement de variable suivant, pour se ramener à la variable de Lagrange  $x$ .

**Définition B.1.6** (Premier tenseur de Piola-Kirchhoff). On note  $T$  le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, défini par :

$$\begin{aligned} T(x) &= \det(\nabla\varphi(x))T^\varphi(x^\varphi)\nabla\varphi(x)^{-T} \\ &= T^\varphi(x^\varphi)\operatorname{Cof}\nabla\varphi(x). \end{aligned}$$

Ce changement de variable s'appuie sur la belle propriété suivante.

**Proposition B.1.3** (Identité de Piola). *On a :*

$$\operatorname{div}(\operatorname{Cof}\nabla\varphi) = 0.$$

De l'identité de Piola, on a le changement de variable :

$$\operatorname{div} T(x) = \det(\nabla\varphi(x)) \operatorname{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi),$$

qui nous donne le théorème suivant.

**Théorème B.1.2** (Équation du premier tenseur de Piola-Kirchhoff). *Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T(x)) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ \nabla\varphi(x)T(x)^T = T(x)\nabla\varphi(x)^T, & \forall x \in \Omega \\ T(x)\nu = g(x), & \forall x \in \Gamma_N \end{cases}$$

où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

Ce tenseur n'est cependant pas symétrique, et on introduit le second tenseur de Piola-Kirchhoff, qui simplifiera plusieurs expressions.

**Définition B.1.7** (Second tenseur de Piola-Kirchhoff). On note  $\Sigma$  le second tenseur de Piola-Kirchhoff, défini par :

$$\begin{aligned} \Sigma(x) &= \nabla\varphi^{-1}(x)T(x) \\ &= \nabla\varphi^{-1}(x)T^\varphi(x^\varphi)\operatorname{Cof}\nabla\varphi. \end{aligned}$$

**Théorème B.1.3** (Équation du second tenseur de Piola-Kirchhoff). *Le second tenseur de Piola-Kirchhoff vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla\varphi(x)\Sigma(x)) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ \Sigma(x) = \Sigma(x)^T, & \forall x \in \Omega \\ \nabla\varphi(x)\Sigma(x)\nu = g(x), & \forall x \in \Gamma_N \end{cases}$$

où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

## B.2 Élasticité

On appelle matériau élastique un matériau dont le tenseur des contraintes ne dépend que de la déformation locale.

**Définition B.2.1.** Soit  $\Omega$  un matériau. Il est dit élastique s'il existe une fonction, qu'on appelle fonction de réponse au tenseur de Cauchy,  $\hat{T}^D : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$ , indépendante de la déformation considérée, qui vérifie pour tout  $x \in \Omega$  et pour toute déformation  $\varphi$  :

$$T^\varphi(x^\varphi) = \hat{T}^D(x, \nabla\varphi(x)).$$

Une telle équation est une relation de comportement. On peut réécrire cette relation avec les tenseurs de Piola-Kirchhoff  $T$  et  $\Sigma$ .

**Définition B.2.2.** Soit  $\Omega$  un matériau élastique. On définit les fonctions de réponse aux premier et second tenseurs de Piola-Kirchhoff, respectivement  $\hat{T} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$  et  $\hat{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$ , par :

$$\begin{aligned} \hat{T}(x, F) &= (\det F)F^{-1}\hat{T}^D(x, F)F^{-T}, \\ \hat{\Sigma}(x, F) &= (\det F)F^{-1}\hat{T}^D(x, F)F^{-T}. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant l'axiome d'objectivité<sup>1</sup>, selon lequel la réponse du matériau ne dépend pas de la position de l'observateur.

**Axiome B.2.1** (Objectivité). Soit  $\Omega^\varphi$  un matériau élastique déformé. On lui fait subir une rotation, qui le place dans la configuration  $\Omega^\psi$  avec  $\psi = r \circ \varphi$ , ou  $r$  est une rotation de matrice orthogonale positive  $Q$ . Alors on peut écrire :

$$t^\psi(x^\psi, Qn) = Qt^\varphi(x^\varphi, n) \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } n \in \mathcal{S}_2$$

**Proposition B.2.1.** Soit  $\Omega$  un matériau élastique. Sa fonction de réponse au tenseur de Cauchy, que l'on a noté  $\hat{T}^D$  satisfait l'axiome d'objectivité si et seulement si :

$$\hat{T}^D(x, QF) = Q\hat{T}^D(x, F)Q^T \text{ pour toutes matrices } F \in \mathbb{M}_+^3 \text{ et } Q \in \mathbb{O}_+^3,$$

ou bien, et de manière équivalente, si et seulement si il existe une fonction  $\tilde{\Sigma} : \overline{\Omega}\mathbb{S}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  telle que :

$$\hat{\Sigma}(x, F) = \tilde{\Sigma}(x, F^T F) \text{ pour toute matrice } F \in M^3$$

Remarquons que, lorsque l'axiome d'objectivité est vérifié, la fonction de réponse au second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\Sigma$  ne dépend donc que du tenseur des déformations  $C$ . On retrouve notre définition naïve de l'élasticité : les contraintes internes ne dépendent que de la déformation locale.

En faisant certaines hypothèses sur le matériau élastique considéré, on peut établir une expression simplifiée du tenseur des contraintes.

**Hypothèse B.2.1** (Isotropie). Le matériau élastique  $\Omega$  est isotrope au point  $x \in \Omega$  si sa fonction de réponse au tenseur des contraintes vérifie :

$$\hat{T}^D(x, FQ) = \hat{T}^D(x, F) \text{ pour toutes matrices } F \in \mathbb{M}_+^3 \text{ et } Q \in \mathbb{O}_+^3$$

On donne maintenant un résultat d'algèbre linéaire.

**Théorème B.2.1** (Rivlin-Ericksen). Soit une application  $\hat{T} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  qui vérifie :

$$\hat{T}(QF) = Q\hat{T}(F)Q^T \text{ et } \hat{T}(FQ) = \hat{T}(F) \text{ pour toutes matrices } F \in \mathbb{M}_+^3 \text{ et } Q \in \mathbb{O}_+^3.$$

Alors il existe une application  $\overline{T} : \mathbb{S}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  qui vérifie

$$\hat{T}(F) = \overline{T}(FF^T) \text{ pour toute matrice } F \in \mathbb{M}_+^3.$$

De plus,  $\overline{T}$  est de la forme :

$$\overline{T}(B) = \beta_0(\iota_B)I + \beta_1(\iota_B)B + \beta_2(\iota_B)B^2,$$

où les  $\beta_i$  sont des fonctions à valeurs réelles, et  $\iota_B \in \mathbb{R}^3$  désigne le couple des invariants principaux<sup>2</sup> de la matrice  $B$ .

<sup>1</sup>Cet axiome, qu'on retrouve jusqu'en relativité générale, n'est exprimé ici que dans le formalisme de la mécanique des milieux continus.

<sup>2</sup>C'est à dire que le polynôme caractéristique de  $B$  est :  $\det(B - XI_3) = -X^3 + \beta_1 X^2 - \beta_2 X + \beta_3$ .

**Théorème B.2.2.** *Soit  $\Omega$  un matériau élastique, dont la configuration de référence est un état de repos, homogène et isotrope. On suppose de plus que les fonctions  $\beta_i$  sont différentiables. Alors il existe des constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que :*

$$\hat{\Sigma}(F) = \tilde{\Sigma}(C) = \lambda \operatorname{trace}(E)I + 2\mu E + o(E)$$

où  $C = F^T F = I + 2E$ .

On dit que  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau. On appelle tenseur de Lamé, noté  $A$ , le tenseur qui vérifie :

$$AE = \lambda \operatorname{trace}(E)I_3 + 2\mu E, \quad \forall E \in \mathbb{S}^3$$

On donne maintenant l'équation aux dérivées partielles d'un matériau élastique, homogène et isotrope, soumis à de petites déformations. On rappelle qu'un matériau subit de petites déformations si :

$$|\nabla u| \ll 1.$$

**Théorème B.2.3.** *Soit  $\Omega$  un matériau élastique au repos, homogène et isotrope, soumis à de petites déformations. Son champ de déplacement vérifie alors l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ Ae(u)\nu = g(x) & \forall x \in \Gamma_N \end{cases}$$

où l'on a noté  $e(u)$  le gradient symétrisé de  $u$  :

$$e(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T).$$

Notons que la forme en divergence de l'équation aux dérivées partielles précédente permet de trouver la solution du problème d'élasticité comme minimum d'un problème variationnel. Si l'on définit l'énergie potentielle élastique associée à un déplacement  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  par :

$$E_{\text{el}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) : e(u) \, dx,$$

où l'on a noté  $\sigma(u) = Ae(u)$  le champ des contraintes, alors le champ de déplacement solution est un minimum de l'énergie potentielle élastique.

Dans cette annexe, on énonce la formule de Blaschke-Petkantschin, qui est une formule de changement de variable intervenant en géométrie intégrale. On renvoie le lecteur à la monographie de J. Møller [Mø194] pour une introduction à la géométrie intégrale, ainsi qu'à celle de R. Schneider et W. Weil [SW08] pour un exposé plus complet.

### C.1 Définitions

Soit  $1 \leq k \leq d$  deux entiers. On note  $\mathcal{H}^k$  la mesure de Hausdorff de dimension  $k$ . On note également  $\mathcal{L}(k, d)$  la grassmannienne des sous-espaces de dimension  $k$  dans l'espace de dimension  $d$ , que l'on munie de la mesure  $dL_k$  définie par :

$$dL_k = \frac{2}{\omega_{k(d-k)+1}} d\sigma_{k(d-k)+1},$$

où  $d\sigma_k$  est la mesure canonique sur la sphère  $\mathcal{S}^k$ , et  $\omega_k = \sigma_k(\mathcal{S}^k)$  est l'aire de la boule unité  $\mathcal{S}^k$ .

Soit  $(x_0, \dots, x_k) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $k+1$  points de l'espace  $\mathbb{R}^d$ . On note :

$$L_k = \text{vect}(x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0) \in \mathcal{L}(k, d)$$

l'espace vectoriel de dimension  $k$  engendré par ces points. On note respectivement  $z$  et  $R$  le centre et le rayon de la boule de  $x_0 + L_k$  qui contient les  $k+1$  points  $x_0, \dots, x_k$ . On note enfin  $u_i \in \mathcal{S}_+^{k-1}$  le vecteur directeur orienté et unitaire de  $x_i - z$  :

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \quad x_i = z + Ru_i.$$



## C.2 Formule de Blaschke-Petkantschin

**Théorème C.2.1** (Formule de Blaschke-Petkantschin). *On a le changement de variable suivant :*

$$dx_0 \dots dx_k = \omega_{d,k} \nabla_k^{d-k+1} R^{dk-1} dR d\sigma_k(u_0) \dots d\sigma_k(u_k) dz dL_k,$$

où l'on a noté :

$$\nabla_k = k! \mathcal{H}^k(\text{conv}(u_0, \dots, u_k)),$$

avec  $\mathcal{H}^k$  la mesure de Hausdorff de dimension  $k$ , et  $\omega_{d,k}$  une constante, dont on donne l'expression dans les cas suivants :

$$\omega_{2,1} = \pi, \quad \omega_{3,1} = \omega_{3,2} = 2\pi, \quad \forall d \in \mathbb{N}, \omega_{d,d} = 1.$$

# ANNEXE D

---

## Gamma-convergence

---

Dans cette annexe, on présente brièvement la notion de  $\Gamma$ -convergence, ainsi que certains résultats classiques. On renvoie le lecteur à [Bra02], et occasionnellement à [Dal93], pour plus de détails.

La  $\Gamma$ -convergence est un type de convergence pour les fonctionnelles, qu'on définira dans cette annexe comme des fonctions définies sur un espace métrique  $(X, d)$ , à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Ce type de convergence a été proposée par De Giorgi au début des années 70, et fournit un cadre très pratique pour l'analyse asymptotique des problèmes de minimums.

### D.1 Définition et premières propriétés

**Définition D.1.1** (Semi-continuité inférieure). Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $f$  une fonctionnelle, avec  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $f$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si et seulement si :

$$\forall x \in X, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x, \quad f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

**Définition D.1.2** ( $\Gamma$ -convergence). Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle sur  $X$ . Soit encore  $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une suite de fonctionnelles sur  $X$ . La suite de fonctionnelles  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $f$  si l'on a :

1.  $\forall x \in X, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x, \quad f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n);$
2.  $\forall x \in X, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n).$

**Remarque D.1.1.** On travaille régulièrement avec des familles de fonctionnelles qui dépendent d'un paramètre continu  $\varepsilon$ . On dira que la famille  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle  $f$  si, pour toute suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers 0, on a  $f_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\Gamma} f$ .

**Proposition D.1.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelles sur  $(X, d)$  qui  $\Gamma$ -converge vers une fonctionnelle limite  $f$ . Alors la fonctionnelle  $f$  est semi-continue inférieurement.

**Remarque D.1.2.** Une suite constante de fonctionnelles ne  $\Gamma$ -converge pas forcément vers elle-même. Elle converge néanmoins vers sa relaxée  $\text{sc}f$ , c'est à dire vers la plus grande fonctionnelle semi-continue inférieurement qui est plus petite qu'elle :

$$\forall x \in X, \quad \text{sc}f(x) = \sup \{g(x) \mid g \text{ s.c.i.}, g \leq f\}.$$

On introduit maintenant les notions de  $\Gamma$ -limite supérieures et inférieures.

**Définition D.1.3** ( $\Gamma$ -limites supérieures et inférieures). Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable, et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelle sur  $X$ . On appelle  $\Gamma$ -limite inférieure (respectivement supérieure) la limite :

$$\forall x \in X, \quad \Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n), x_n \rightarrow x \right\},$$

resp.

$$\forall x \in X, \quad \Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n), x_n \rightarrow x \right\}.$$

**Proposition D.1.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable, et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelle sur  $X$ . Les fonctionnelles  $\Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  et  $\Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  sont semi-continues inférieurement. De plus, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad \Gamma\text{-}\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \Gamma\text{-}\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

et dans ce cas, la  $\Gamma$ -limite est identique aux  $\Gamma$ -limites inférieures et supérieures.

La  $\Gamma$ -convergence vérifier une propriété de compacité, qui nous sera très utile pour la suite.

**Proposition D.1.3** (Compacité). Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable, et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelle sur  $X$ . Alors il existe une sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et une fonctionnelle  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  telles que :

$$f_{n_k} \xrightarrow{\Gamma} f.$$

## D.2 Convergence des minimiseurs

Sous certaines conditions de coercivité, la  $\Gamma$ -convergence implique la convergence des suites de (presque)-minimums des fonctionnelles  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers un minimum de la fonctionnelle limite.

**Définition D.2.1** (Coercivité). Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle. La fonctionnelle  $f$  est coercive si et seulement si, pour tout  $M > 0$ , il existe un ensemble  $X_M \subset X$  compact tel que :

$$\{f \leq M\} \subset X_M.$$

**Définition D.2.2** (Équi-coercivité). Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelles définies sur  $(X, d)$ . On dit que la suite de fonctionnelles est équi-coercive si, pour tout  $M > 0$ , il existe un ensemble  $X_M \subset X$  compact tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{f_n \leq M\} \subset X_M.$$

**Proposition D.2.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelles définies sur  $(X, d)$ . La suite de fonctionnelles est équi-coercive si, et seulement si, il existe une fonctionnelle  $\Psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  semi-continue inférieurement et coercive, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \geq \Psi.$$

On donne une version plus faible de la condition d'équi-coercivité, qui suffit pour le théorème de convergence des suites de minimums.

**Définition D.2.3** (Équi-coercivité modérée). Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelles définies sur  $(X, d)$ . On dit que la suite de fonctionnelles est modérément équi-coercive si il existe un ensemble  $K \subset X$  compact tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \inf_{x \in K} f_n = \inf_{x \in X} f_n.$$

Sous ces hypothèses de coercivité, on a le théorème de convergence des minimiseurs.

**Théorème D.2.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelles sur  $X$  qui  $\Gamma$ -converge vers une fonctionnelle limite  $f$ . On suppose que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est modérément équi-coercive. Alors, la fonctionnelle  $f$  admet un minimum sur  $X$ , et l'on a :

$$\min_X f = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_X f_n.$$

De plus, si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite précompacte telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_X f_n,$$

alors toute limite d'une sous-suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un minimum de  $f$ .

## D.3 Méthode de localisation

On propose dans cette section à une présentation de la méthode de localisation. Cette méthode permet de prouver l'existence d'une  $\Gamma$ -limite pour une suite de fonctionnelles, moyennant certaines hypothèses analytiques.

On rappelle que, pour toute suite de fonctionnelles  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire une sous-suite qui  $\Gamma$ -converge vers une fonctionnelle limite  $F$ . Cependant, on a aucune information sur la fonctionnelle limite  $F$ . Dans certains cas, on peut néanmoins localiser la suite de fonctionnelles en faisant apparaître la dépendance à l'ouvert de définition. Cela permet d'obtenir plusieurs informations sur la fonctionnelle limite  $F$ .

Dans la suite, on propose un aperçu de la méthode de localisation sur un cas particulier. Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctionnelles définies sur  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$ , avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}), \quad F_n(u) = \int_{\Omega} f_n(x, Du(x)) \, dx,$$

les fonctions  $f_n: \Omega \times M_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  étant boréliennes positives.

**Définition D.3.1** (Fonctionnelles localisées). Soit  $\mathcal{O}$  l'ensemble des ouverts de  $\Omega$ . On définit, pour tout ouvert  $V \in \mathcal{O}$ , la fonctionnelle  $F_n(\cdot, V)$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^M), \quad F_n(u, V) = \int_V f_n(x, Du) \, dx.$$

**Proposition D.3.1.** Soit  $\mathcal{V}$  une famille dénombrable et dense d'ouverts de  $X$ . Il existe une sous suite  $(F_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout ouvert  $V$ , la suite  $(F_{n_k}(\cdot, V))_{k \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers une limite que l'on note  $F(\cdot, V)$ .

Cette fonctionnelle limite n'est définie que sur un sous-ensemble dense des ouverts de  $\Omega$ . On étend maintenant cette fonctionnelle limite  $F$  à l'ensemble des ouverts  $\mathcal{O}$  de  $\Omega$ .

**Définition D.3.2** (Régularisée). On définit la régularisée de  $F$  pour tout ouvert  $U \in \mathcal{O}$  par :

$$\forall u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^M), \quad \bar{F}(u, U) = \sup \{F(u, V) \mid V \in \mathcal{V}, V \subset\subset U\}.$$

On utilise maintenant deux résultats de représentation de la fonctionnelle limite localisée. D'après le premier, dû à De Giorgi et Letta, la fonctionnelle limite est la restriction à  $\mathcal{O}$  d'une mesure de Borel. Le second théorème en donne une représentation intégrale en faisant sortir la dépendance au gradient.

**Théorème D.3.1** (De Giorgi - Letta). Soit  $\alpha: \mathcal{O} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction définie sur les ouverts de  $\Omega$ . On suppose qu'elle satisfait :

1. (croissance)  $\forall U, V \in \mathcal{O}, V \subset U, \quad \alpha(V) \leq \alpha(U)$  ;
2. (régularité intérieure)  $\forall U \in \mathcal{O}, \quad \alpha(U) = \sup \{\alpha(V) \mid V \in \mathcal{O}, V \subset\subset U\}$  ;
3. (sous-additivité)  $\forall U, V \in \mathcal{O}, \quad \alpha(U \cup V) \leq \alpha(U) + \alpha(V)$  ;
4. (sur-additivité)  $\forall U, V \in \mathcal{O}, U \cap V = \emptyset, \quad \alpha(U) + \alpha(V) \leq \alpha(U \cup V)$ .

Alors  $\alpha$  est la restriction à  $\mathcal{O}$  d'une mesure de Borel sur  $\Omega$ .

On finit par donner le théorème de représentation intégrale sur un espace de Sobolev.

**Théorème D.3.2.** Soit  $F: H^1(\Omega, \mathbb{R}^M) \times \mathcal{O} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonctionnelle qui vérifie, pour tout  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$  et tout  $V \in \mathcal{O}$  :

1.  $F(\cdot, V)$  est semi-continue inférieurement ;
2.  $0 \leq F(u, V) \leq C \int_V (1 + |Du|^p) \, dx$  ;
3.  $F(u, \cdot)$  est la restriction à  $\mathcal{O}$  d'une mesure de Borel régulière ;

4.  $F(u, V) = F(v, V)$  si  $u = v$  presque partout sur  $V$ .

Alors, il existe une fonction borélienne  $f$  telle que :

$$F(u, V) = \int_V f(x, Du) \, dx.$$

On conclut maintenant avec un argument de régularité. Si la fonctionnelle  $F$  est régulière, c'est à dire si :

$$\forall u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^M), \quad \overline{F}(u, \Omega) = F(u, \Omega),$$

alors la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle limite  $F$  définie par :

$$\forall u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^M), \quad F(u) = \int_{\Omega} f(x, Du) \, dx.$$



- [AC04] R. Alicandro et M. Cicalese. « A General Integral Representation Result for Continuum Limits of Discrete Energies with Superlinear Growth ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 36.1 (2004), pp. 1-37.
- [ACG11] R. Alicandro, M. Cicalese et A. Gloria. « Integral Representation Results for Energies Defined on Stochastic Lattices and Application to Nonlinear Elasticity ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 200.3 (2011), pp. 881-943.
- [AFP00] L. Ambrosio, N. D. Fusco et D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [AGD15] M. Ambati, T. Gerasimov et L. De Lorenzis. « A Review on Phase-Field Models of Brittle Fracture and a New Fast Hybrid Formulation ». *Computational Mechanics* 55.2 (2015), pp. 383-405.
- [AMM09] H. Amor, J.-J. Marigo et C. Maurini. « Regularized Formulation of the Variational Brittle Fracture with Unilateral Contact : Numerical Experiments ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.8 (2009), pp. 1209-1229.
- [AT90] L. Ambrosio et V. M. Tortorelli. « Approximation of Functional Depending on Jumps by Elliptic Functional via Gamma-Convergence ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43.8 (1990), pp. 999-1036.
- [Auc08] J. Auch. *Antarctic Mountains, Pack Ice and Ice Floes*. 2008.
- [BB05] D. Bucur et G. Buttazzo. *Variational Methods in Shape Optimization Problems*. Birkhäuser Basel, 2005.
- [BB99] T. Belytschko et T. Black. « Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45.5 (1999), pp. 601-620.
- [BC07] A. Boulkhémair et A. Chakib. « On the Uniform Poincaré Inequality ». *Communications in Partial Differential Equations* 32.9 (2007), pp. 1439-1447.



- [Beh+11] S. Behnel et al. « Cython : The Best of Both Worlds ». *Computing in Science Engineering* 13.2 (2011), pp. 31-39.
- [BFM00] B. Bourdin, G. Francfort et J.-J. Marigo. « Numerical Experiments in Revisited Brittle Fracture ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48.4 (2000), pp. 797-826.
- [BFM08] B. Bourdin, G. A. Francfort et J.-J. Marigo. « The Variational Approach to Fracture ». *Journal of Elasticity* 91.1-3 (2008), pp. 5-148.
- [BG02] A. Braides et M. S. Gelli. « Continuum Limits of Discrete Systems without Convexity Hypotheses ». *Mathematics and Mechanics of Solids* 7.1 (2002), pp. 41-66.
- [Bou07] B. Bourdin. « Numerical Implementation of the Variational Formulation for Quasi-Static Brittle Fracture ». *Interfaces and Free Boundaries* 9.3 (2007), pp. 411-430.
- [Bou98] B. Bourdin. « Une Méthode Variationnelle En Mécanique de La Rupture ». Thèse de doctorat. Paris 13, 1998.
- [Bra02] A. Braides. *Gamma-Convergence for Beginners*. Oxford University Press, 2002.
- [Bra06] A. Braides. « A Handbook of Gamma-Convergence ». *Handbook of Differential Equations : Stationary Partial Differential Equations*. Sous la dir. de M. Chipot et P. Quittner. T. 3. North-Holland, 2006, pp. 101-213.
- [BS13] J. Braun et B. Schmidt. « On the Passage from Atomistic Systems to Non-linear Elasticity Theory for General Multi-Body Potentials with p-Growth ». *Networks and Heterogeneous Media* 8.4 (2013), pp. 879-912.
- [CDHR08] Y. Chen, T. A. Davis, W. W. Hager et S. Rajamanickam. « Algorithm 887 : CHOLMOD, Supernodal Sparse Cholesky Factorization and Update/Down-date ». *ACM Transactions on Mathematical Software* 35.3 (2008), 22 :1-22 :14.
- [CDKM06] S. Conti, G. Dolzmann, B. Kirchheim et S. Müller. « Sufficient Conditions for the Validity of the Cauchy-Born Rule Close to  $SO(n)$  ». *Journal of the European Mathematical Society* (2006), pp. 515-539.
- [CFM09] A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo. « When and How Do Cracks Propagate ? » : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.9 (2009), pp. 1614-1622.
- [Cha03] A. Chambolle. « A Density Result in Two-Dimensional Linearized Elasticity, and Applications ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 167.3 (2003), pp. 211-233.
- [Cia94] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity : Three-Dimensional Elasticity*. Elsevier, 1994.
- [CSKM13] S. N. Chiu, D. Stoyan, W. S. Kendall et J. Mecke. *Stochastic Geometry and Its Applications*. John Wiley & Sons, 2013.

- [Dal93] G. Dal Maso. *An Introduction to  $\Gamma$ -Convergence*. Birkhäuser, Boston, MA, 1993.
- [DAM99] J. Dempsey, R. Adamson et S. Mulmule. « Scale Effects on the In-Situ Tensile Strength and Fracture of Ice. Part II : First-Year Sea Ice at Resolute, N.W.T. » *International Journal of Fracture* 95.1 (1999), p. 347.
- [DCL89] E. De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci. « Existence Theorem for a Minimum Problem with Free Discontinuity Set ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 108.4 (1989), pp. 195-218.
- [DGZ94] G. De Marco, G. Gorni et G. Zampieri. « Global Inversion of Functions : An Introduction ». *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* 1.3 (1994), pp. 229-248.
- [DM86a] G. Dal Maso et L. Modica. « Integral Functionals Determined by Their Minima ». *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 76 (1986), pp. 255-267.
- [DM86b] G. Dal Maso et L. Modica. « Nonlinear Stochastic Homogenization and Ergodic Theory ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 368 (1986), pp. 28-42.
- [DNP02] G. Dal Maso, M. Negri et D. Percivale. « Linearized Elasticity as  $\Gamma$ -Limit of Finite Elasticity ». *Set-Valued Analysis* 10.2 (2002), pp. 165-183.
- [DV03] D. J. Daley et D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes : Volume I : Elementary Theory and Methods*. 2<sup>e</sup> éd. Springer-Verlag, 2003.
- [DV08] D. J. Daley et D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes : Volume II : General Theory and Structure*. 2<sup>e</sup> éd. Springer-Verlag, 2008.
- [DWSL16] V. Dansereau, J. Weiss, P. Saramito et P. Lattes. « A Maxwell Elasto-Brittle Rheology for Sea Ice Modelling ». *The Cryosphere* 10.3 (2016), pp. 1339-1359.
- [FM98] G. A. Francfort et J.-J. Marigo. « Revisiting Brittle Fracture as an Energy Minimization Problem ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46.8 (1998), pp. 1319-1342.
- [FT02] G. Friesecke et F. Theil. « Validity and Failure of the Cauchy-Born Hypothesis in a Two-Dimensional Mass-Spring Lattice ». *Journal of Nonlinear Science* 12.5 (2002), pp. 445-478.
- [GR09] C. Geuzaine et J.-F. Remacle. « Gmsh : A 3-D Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-Processing Facilities ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.11 (2009), pp. 1309-1331.
- [Gri21] A. A. Griffith. « The Phenomena of Rupture and Flow in Solids ». *Philosophical transactions of the royal society of london* 221.582-593 (1921), pp. 163-198.

- [GWMBB09] L. Girard, J. Weiss, J. M. Molines, B. Barnier et S. Bouillon. « Evaluation of High-Resolution Sea Ice Models on the Basis of Statistical and Scaling Properties of Arctic Sea Ice Drift and Deformation ». *Journal of Geophysical Research* 114.C8 (2009).
- [Her11] A. Herman. « Molecular-Dynamics Simulation of Clustering Processes in Sea-Ice Floes ». *Physical Review E* 84.5 (2011).
- [HFT04] M. A. Hopkins, S. Frankenstein et A. S. Thorndike. « Formation of an Aggregate Scale in Arctic Sea Ice ». *Journal of Geophysical Research : Oceans* 109.C1 (2004).
- [Hop66] F. C. Hoppensteadt. « Singular Perturbations on the Infinite Interval ». *Transactions of the American Mathematical Society* 123.2 (1966), pp. 521-535.
- [Hop96] M. A. Hopkins. « On the Mesoscale Interaction of Lead Ice and Floes ». *Journal of Geophysical Research : Oceans* 101.C8 (1996), pp. 18315-18326.
- [Ing13] C. Inglis. « Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners ». *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 55 (1913), pp. 219-241.
- [Irw57] G. Irwin. « Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate ». *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), pp. 361-364.
- [KA81] U. Krengel et M. A. Akcoglu. « Ergodic theorems for superadditive processes. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 323 (1981), pp. 53-67.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3<sup>e</sup> éd. Prentice Hall, 2002.
- [KO89a] V. A. Kondrat'ev et O. A. Oleinik. « On Korn Inequalities ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 308.16 (1989), pp. 483-487.
- [KO89b] V. A. Kondrat'ev et O. A. Oleinik. « On the Dependence of the Constant in Korn's Inequality on Parameters Characterizing the Geometry of the Region ». *Russian Mathematical Surveys* 44.6 (1989), pp. 187-189.
- [KS04] A. M. Khludnev et J. Sokołowski. « Smooth Domain Method for Crack Problems ». *Quarterly of Applied Mathematics* 62.3 (2004), pp. 401-422.
- [KS14] Å. K. Kjerstad et R. Skjetne. « Modeling and Control for Dynamic Positioned Marine Vessels in Drifting Managed Sea Ice ». *Modeling, Identification and Control : A Norwegian Research Bulletin* 35.4 (2014), pp. 249-262.
- [Lab06] S. Labbé. « Modélisation et Simulation de Quelques Systèmes Non Linéaires et Linéaires ». Habilitation à diriger des recherches. Université Paris 11, 2006.
- [Li05] X. S. Li. « An Overview of SuperLU : Algorithms, Implementation, and User Interface ». *ACM Transactions on Mathematical Software* 31.3 (2005), pp. 302-325.

- [LLL15] W. Lu, R. Lubbad et S. Løset. « In-Plane Fracture of an Ice Floe : A Theoretical Study on the Splitting Failure Mode ». *Cold Regions Science and Technology* 110 (2015), pp. 77-101.
- [LR11] H. Le Dret et A. Raoult. « Homogenization of Hexagonal Lattices ». *Comptes Rendus Mathématique* 349.1 (2011), pp. 111-114.
- [LS05] C. Lobry et T. Sari. « Singular Perturbations Methods in Control Theory ». *Contrôle non linéaire et Applications* 64 (2005), pp. 155-182.
- [LS67] J. L. Lions et G. Stampacchia. « Variational Inequalities ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* 20.3 (1967), pp. 493-519.
- [Mar+19] D. Marsan et al. « Characterizing Horizontally-Polarized Shear and Infragravity Vibrational Modes in the Arctic Sea Ice Cover Using Correlation Methods ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.3 (2019), pp. 1600-1608.
- [Mar10] J.-J. Marigo. « Initiation of Cracks in Griffith's Theory : An Argument of Continuity in Favor of Global Minimization ». *Journal of Nonlinear Science* 20.6 (2010), pp. 831-868.
- [Mau16] G. A. Maugin. *Continuum Mechanics through the Ages - From the Renaissance to the Twentieth Century : From Hydraulics to Plasticity*. Springer International Publishing, 2016.
- [MDB99] N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko. « A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.1 (1999), pp. 131-150.
- [Met14] I. Metrikin. « A Software Framework for Simulating Stationkeeping of a Vessel in Discontinuous Ice ». 35.4 (2014), pp. 211-248.
- [Møl89] J. Møller. « Random Tessellations in  $\mathbb{R}^d$  ». *Advances in Applied Probability* 21.1 (1989), pp. 37-73.
- [Møl94] J. Møller. *Lectures on Random Voronoi Tessellations*. Springer-Verlag, 1994.
- [Mos69] U. Mosco. « Convergence of Convex Sets and of Solutions of Variational Inequalities ». *Advances in Mathematics* 3.4 (1969), pp. 510-585.
- [MPR12] N. Meunier, O. Pantz et A. Raoult. « Elastic Limit of Square Lattices with Three Point Interactions ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 22.11 (2012), p. 1250032.
- [MS10] S. E. Mousavi et N. Sukumar. « Generalized Gaussian Quadrature Rules for Discontinuities and Crack Singularities in the Extended Finite Element Method ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.49 (2010), pp. 3237-3249.
- [MS89] D. Mumford et J. Shah. « Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* 42.5 (1989), pp. 577-685.

- [MT02] G. D. Maso et R. Toader. « A Model for the Quasi-Static Growth of Brittle Fractures : Existence and Approximation Results ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 162.2 (2002), pp. 101-135.
- [Nag+19] S. Nagaraja et al. « Phase-Field Modeling of Brittle Fracture with Multi-Level Hp-FEM and the Finite Cell Method ». *Computational Mechanics* 63.6 (2019), pp. 1283-1300.
- [Ngu00] Q. S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley, 2000.
- [OAJ95] M. Ostoja-Starzewski, K. Alzebdeh et I. Jasiuk. « Linear Elasticity of Planar Delaunay Networks. III : Self-Consistent Approximations ». *Acta Mechanica* 110.1 (1995), pp. 57-72.
- [PSH87] B. L. Parsons, J. B. Snellen et B. Hill. « Preliminary Measurements of Terminal Crack Velocity in Ice ». *Cold Regions Science and Technology* 13.3 (1987), pp. 233-238.
- [PTP11] J. Paavilainen, J. Tuhkuri et A. Polojärvi. « 2D Numerical Simulations of Ice Rubble Formation Process against an Inclined Structure ». *Cold Regions Science and Technology* 68.1 (2011), pp. 20-34.
- [Rab15] M. Rabatel. « Modélisation Dynamique d'un Assemblage de Floes Rigides ». Thèse de doctorat. Université Grenoble Alpes, 2015.
- [RD11] F. Radjai et F. Dubois. *Discrete-Element Modeling of Granular Materials*. Wiley-Iste, 2011.
- [RKW79] J. F. Rigby, P. J. Kelly et M. L. Weiss. *Geometry and Convexity : A Study in Mathematical Methods*. New York : Wiley, 1979. JSTOR : 3615108.
- [RLW15] M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss. « Dynamics of an Assembly of Rigid Ice Floes ». *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9 (2015), pp. 5887-5909.
- [RWDC11] P. Rampal, J. Weiss, C. Dubois et J.-M. Campin. « IPCC Climate Models Do Not Capture Arctic Sea Ice Drift Acceleration : Consequences in Terms of Projected Sea Ice Thinning and Decline ». *Journal of Geophysical Research* 116 (2011).
- [RWMB09] P. Rampal, J. Weiss, D. Marsan et M. Bourgoïn. « Arctic Sea Ice Velocity Field : General Circulation and Turbulent-like Fluctuations ». *Journal of Geophysical Research : Oceans* 114.C10 (2009).
- [Sch09] B. Schmidt. « On the Derivation of Linear Elasticity from Atomistic Models ». *Networks and Heterogeneous Media* 4.4 (2009), pp. 789-812.
- [SD09] E. M. Schulson et P. Duval. *Creep and Fracture of Ice*. Cambridge : Cambridge University Press, 2009.
- [Sta50] I. Stakgold. « The Cauchy Relations in a Molecular Theory of Elasticity ». *Quarterly of Applied Mathematics* 8.2 (1950), pp. 169-186.

- [SW08] R. Schneider et W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Berlin : Springer, 2008.
- [Tem72] A. A. Tempel'man. « Ergodic Theorems for General Dynamical Systems ». *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva* 26 (1972), pp. 95-132. [Traduit : *Trans. Moscow Math. Soc.* 26 (1972), pp. 94-132].
- [Tik52] A. N. Tikhonov. « Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives ». *Matematicheskii sbornik* 31(73).3 (1952), pp. 575-586.
- [Vir+20] P. Virtanen et al. « SciPy 1.0 : Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python ». *Nature Methods* (2020), pp. 1-12.
- [VSB07] E. Vitali, M. Solci et A. Braides. « A Derivation of Linear Elastic Energies from Pair-Interaction Atomistic Systems ». *Networks and Heterogeneous Media* 2.3 (2007), pp. 551-567.
- [WD17] J. Weiss et V. Dansereau. « Linking Scales in Sea Ice Mechanics ». *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 375.2086 (2017).
- [Wei13] J. Weiss. *Drift, Deformation, and Fracture of Sea Ice : A Perspective Across Scales*. Springer Netherlands, 2013.
- [WFH10] A. V. Wilchinsky, D. L. Feltham et M. A. Hopkins. « Effect of Shear Rupture on Aggregate Scale Formation in Sea Ice ». *Journal of Geophysical Research : Oceans* 115.C10 (2010).
- [WSS07] J. Weiss, E. M. Schulson et H. L. Stern. « Sea Ice Rheology from In-Situ, Satellite and Laboratory Observations : Fracture and Friction ». *Earth and Planetary Science Letters* 255.1 (2007), pp. 1-8.
- [ZHLZ18] F. Zhang, W. Huang, X. Li et S. Zhang. *A Study on Phase-Field Models for Brittle Fracture*. 2018. arXiv : 1805.07357 [math].

Cette thèse s'inscrit dans un projet global de recherche sur la modélisation de la banquise, mené conjointement par TOTAL S.A. et l'Université Grenoble Alpes. Ce projet a conduit au développement d'un modèle granulaire pour simuler l'évolution de la banquise, et plus particulièrement le comportement mécanique des floes de glace qui peuplent la zone marginale des glaces. Une implémentation informatique du modèle permet de simuler les collisions d'un million de blocs de glace, ainsi que leurs interactions avec des structures rigides. La présente thèse améliore ce modèle granulaire, en proposant un modèle efficace de fracture des blocs de glace.

Dans une première partie, nous proposons un modèle de fracture d'un floe de glace lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Notre modèle est un modèle de fracture fragile, qui s'appuie sur les idées de A. A. Griffith. Il est formulé dans un cadre variationnel inspiré du modèle de G. A. Francfort et J.-J. Marigo : nous minimisons l'énergie totale du matériau. Nous montrons que, sous certaines hypothèses, cette fonctionnelle d'énergie possède bien un minimum. Le modèle proposé est efficace, et peut être intégré dans le modèle de collision qui gère le comportement d'un grand nombre de blocs. Cette efficacité repose sur une hypothèse géométrique forte, bien qu'atténuée par l'utilisation d'un chargement quasi-statique : nous supposons que les seules fractures admissibles sont des segments de droites.

Dans une seconde partie, nous proposons un plan de recherche pour dériver les conditions au bord lors de la percussion de deux floes de glace. La stratégie est la suivante : nous proposons de considérer le floe de glace comme la limite d'un réseau isotrope de masses, reliées entre elles par des ressorts. Sur un réseau discret, nous connaissons l'équation différentielle qui régit le mouvement de chaque masse ; nous pouvons espérer en dériver une expression du déplacement au bord. Nous identifions trois limites mathématiques nécessaires à la compréhension du phénomène de percussion, et obtenons deux d'entre elles. Nous présentons ainsi plusieurs résultats de  $\Gamma$ -convergence de fonctionnelles discrètes, définies sur différents réseaux de ressorts, vers la fonctionnelle d'énergie élastique classique. Nous utiliserons en particulier un réseau isotrope, obtenu à partir d'un processus stochastique ponctuel sur lequel est construite une triangulation de Delaunay. Dans ce cas, nous proposerons un résultat de  $\Gamma$ -convergence presque sure.

---

This doctoral dissertation is part of a research project on sea ice modeling, initiated by TOTAL S.A. and the Université Grenoble Alpes. This project lead to the development of a granular model for the evolution of sea ice, and in particular the mechanical behavior of ice floes in the marginal ice zone. The implementation of the model can simulate the collisions of one million ice floes, and their interaction with rigid structures. This PhD thesis improves the current granular model by adding an efficient model for ice floe fracture.

Firstly, we present a fracture model for an ice floe subject to a boundary displacement. This model is a brittle fracture model, relying on the work of A. A. Griffith. It is written in a variational framework inspired from that of G. A. Francfort and J.-J. Marigo's model: we minimize the total energy of the material. We show that, under some hypothesis, the total energy of the ice floe has a minimum. This variational model is efficient, and can be used in the collision model which simulates the behavior of a large number of floes. This efficiency relies on a strong geometric hypothesis, although mitigated by the use of a quasistatic loading: we restrict the space of admissible fractures to the set of segment lines.

Secondly, we present a research strategy to obtain an expression of the boundary displacement during the percussion of two ice floes. The strategy is the following: we consider the ice floe as the limit of an isotropic mass-spring lattice. For a given lattice, we can write the differential equation verified by each mass, and thus we hope to derive an expression of the boundary displacement. We identify three mathematical limits which we deem necessary to the understanding of the percussion phenomenon, and we obtain two of them. Doing so, we prove two  $\Gamma$ -convergence results of discrete functionals, defined on different lattices, to the classical elastic energy. In particular, we work with a stochastic isotropic lattice, built as the Delaunay triangulation of a stochastic point process. In that case, we will prove the almost-sure  $\Gamma$ -convergence.