

RAPPORT DE STAGE

---

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

---

*Étudiant*  
Roussel Desmond NZOYEM

*Superviseur*  
Stéphane LABBÉ

*Enseignant référent*  
Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;  
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;  
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

11 avril 2021

## *Remerciements*

# Table des matières

Remerciements	ii
1 Travaux et apports	1
1.1 Les missions du poste	1
1.2 Présentation des résultats obtenus	1
1.2.1 Modélisation générale du contact entre deux floes de glace	1
1.2.2 Modélisation et simulation 1D	3
Bibliographie	9



# Chapitre 1

## Travaux et apports

### 1.1 Les missions du poste

- L'état de l'art de la partie précédente fait partie des missions.
- Modélisation
- Simulation

Nous souhaitons étudier le comportement mécanique d'un floe après collision avec un autre floe. Les étapes de travail envisagées sont les suivantes :

1. Ecrire les systèmes différentiels pour les deux floes juste après le choc : pour l'instant on peut considérer que l'un des floes est immobile (cela revient au même si l'on exprime les vitesses dans un repère lié à ce floe).
2. On exprime l'EDO vérifiée par les solutions, c'est à dire  $q$  pour le premier floe, et  $p$  pour le second.
3. On pourra ensuite simuler ces EDP limites et trouver les valeurs de  $p$  et  $q$ . Autrement dit, on connaît la position de chaque point du réseau au temps final.
4. Si on connaît  $p$  et/ou  $q$ , on connaît la condition de Dirichlet sur le floe concerné, et on peut ainsi exprimer le déplacement et la possible fracture du floe.

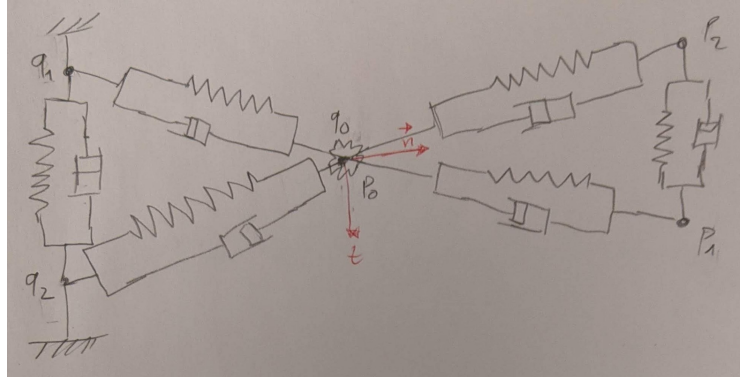
### 1.2 Présentation des résultats obtenus

#### 1.2.1 Modélisation générale du contact entre deux floes de glace

Les floes de glace  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une modélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliées par des ressorts (de constante de raideur  $k$ ), et par des dispositifs visqueux de constante  $\mu$ . Nous désignerons par  $n + 1$  le nombre total de noeuds du floe  $\Omega_k$ , chaque noeud ayant pour masse  $m$ . De façon similaire, on définit les constantes  $k', \mu', n' + 1, m' + 1$  pour le floe  $\Omega_l$ . Les positions des noeuds de  $\Omega_k$  seront notés  $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$ , tandis que ceux de  $\Omega_l$  seront notés  $(p_i)_{0 \leq i \leq n'}$  (voir figure 1.1).

On définit la matrice de contact  $C...$  (voir these Dimitri), et  $L_{0j}..$  et  $u_{0j} ..$

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisons le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe  $\Omega_k$ , nous



**FIGURE 1.1** – Contact entre deux floes aux points  $p_0 = q_0$ .

écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire<sup>1</sup> au point de contact  $q_0$  :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (1.1)$$

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \underbrace{k(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (1.2)$$

représente la somme des forces de réaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud  $q_0$ ; et  $\mathbf{F}_0^c(t)$  la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact  $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  associé au floe  $\Omega_k$  (voir figure 1.1), on peut écrire, pour  $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (1.3)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations (1.1) à (1.3). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & (\text{SE}) \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \quad (\text{SI}) \end{cases} \quad (E)$$

En ce qui concerne le floe  $\Omega_l$ , nous procédons de facons similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & (\text{SE}) \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \quad (\text{SI}) \end{cases} \quad (E')$$

où  $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$  sont définis de facon similaire à  $\mathbf{F}_0$  (voir équation (1.2)).

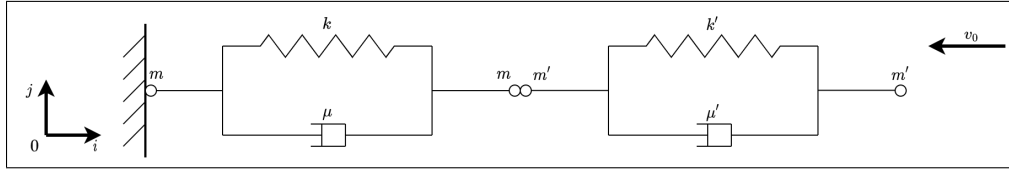
Ensuite, il nous faut introduire des conditions portant sur la conservation de l'énergie, et la condition de non-interpénétration de Signorini...

1. La rotation du point matériel  $q_0$  n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

## 1.2.2 Modélisation et simulation 1D

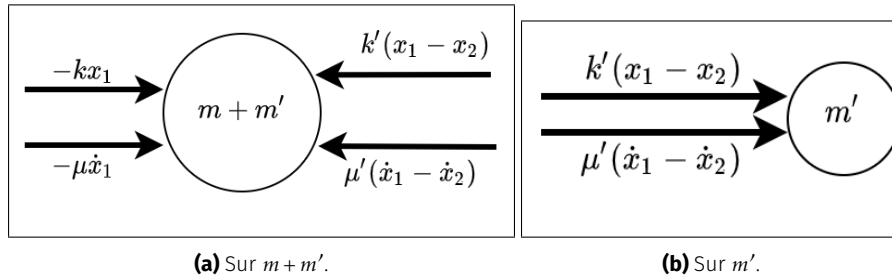
### 1.2.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nœuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse  $v_0$ . On identifie les nœuds  $q_0$  et  $p_0$  de la section précédente à leur masses respectives  $m$  et  $m'$  (voir figure 1.2).



**FIGURE 1.2** – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses  $m$  et  $m'$  en contact forment une seule masse<sup>2</sup>  $m + m'$  dont le déplacement est donné par la variable  $x_1(t)$ . Le déplacement de la masse  $m'$  à l'autre bout du floe percuteur est nommé  $x_2(t)$ . La masse  $m$  qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.



**FIGURE 1.3** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ( $v_0 < 0$  et donc  $x_1 < 0$ ). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort  $k'$ , on peut imaginer  $x_1$  immobile (on aura  $x_2 < 0$ , d'où  $x_1 - x_2 > 0$ ) (voir [Ho10]).

En orientant convenablement le système (voir figure 1.2), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales<sup>3</sup> :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (1.4)$$

À l'instant initial  $t_0$ , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (1.5)$$

En posant  $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , l'équation (1.5) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

2. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.

3. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de  $x_1$  est-elle vraiment nulle ?

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B' \dot{X}(t) + C' X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ .

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc  $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$  et le système 1.7 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = E Y(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (1.8)$$

avec la matrice par blocs

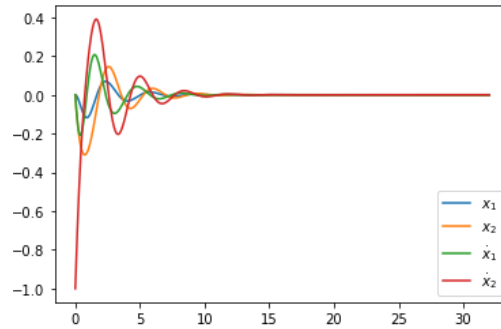
$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

où  $I_2$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE) Y_0 \quad (1.9)$$

La résolution numérique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice  $E \in \mathbb{R}^4$  (VOIR figure ci-bas et NOTEBOOK ) ...



**FIGURE 1.4** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k = 16$ ,  $k' = 5$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.0$ ,  $t_f = 32$ . On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ .

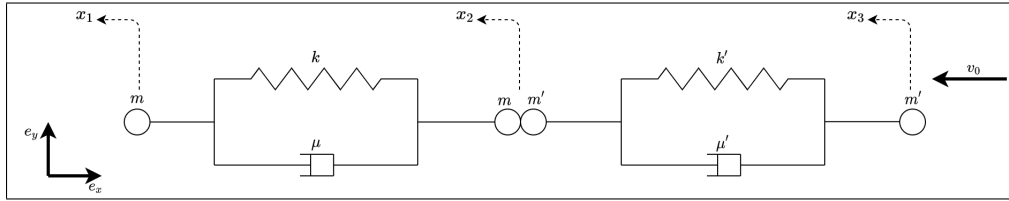
Pour certaines valeurs (spécifiquement de  $\mu$  et  $\mu'$ ), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . Il nous reste dans cette section :

1. Calculer analytiquement et numériquement tous les états d'équilibre  $Y_{eq} \in \ker(E)$ ; distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice  $E$ , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les paramètres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

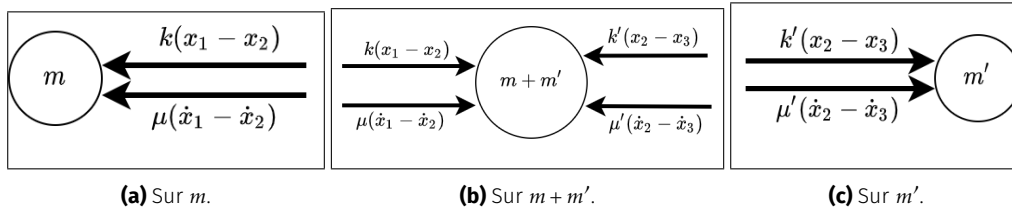


### 1.2.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé dans cette section. On obtient donc une troisième variable  $x_3$  décrivant le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 1.5. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 1.6.



**FIGURE 1.5** – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $x_3$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**FIGURE 1.6** – Bilan des forces appliquées sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 1.3 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (1.10)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k' \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible. En posant  $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , le système d'EDO revient à l'équation (1.12) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (1.12)$$

où  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ . On pose ensuite  $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$  et le système équation (1.12) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (1.13)$$

avec

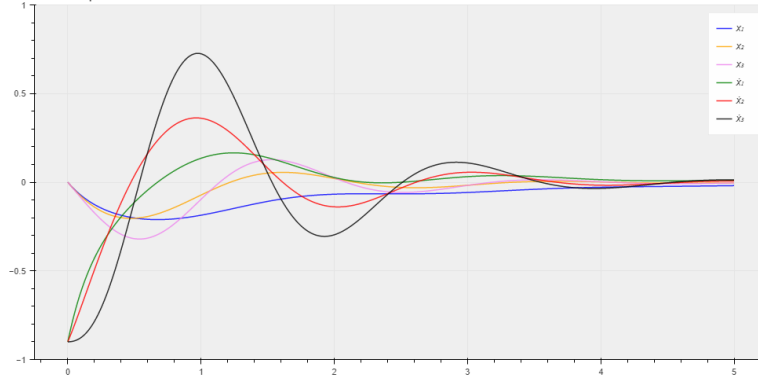
$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 1.2), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble  $m + m'$  après collision et fixation de la masse  $m'$  (à vitesse  $\mathbf{v}_0$ ) sur la masse  $m$  (de vitesse nulle). Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée  $v_f$ , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées  $P_{\text{avant}}$  et  $P_{\text{après}}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2m\mathbf{v}_0 + 2m'\mathbf{v}'_0 &= (2m + 2m')\mathbf{v}_f \\ \Rightarrow \mathbf{v}_f &= \frac{m\mathbf{v}_0 + m'\mathbf{v}'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (1.13) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure 1.7.

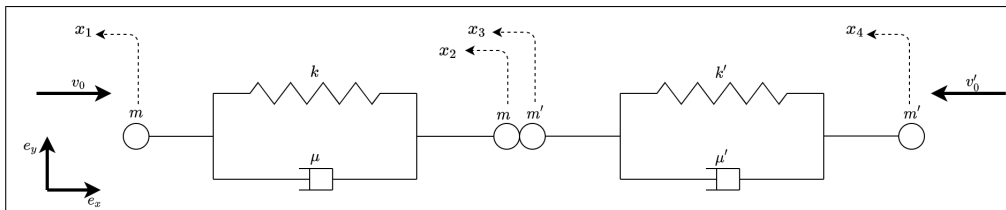
$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (1.14)$$



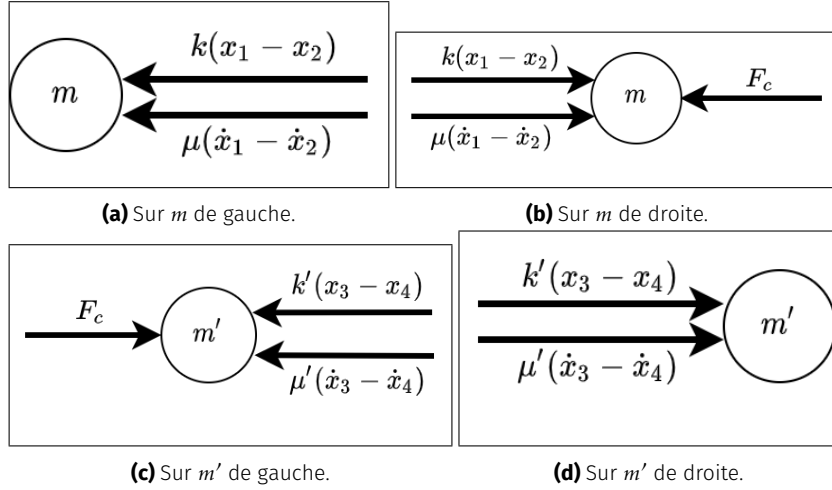
**FIGURE 1.7** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k = 3$ ,  $k' = 22$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.8$ ,  $t_f = 5$ . On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

### 1.2.2.3 Collision inélastique avec séparation des masses

Reprenons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps  $\delta t^* = [t_{\text{moins}}, t_{\text{plus}}]$  de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses  $m$  et  $m'$  en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 1.2 et 1.5), et nous le présentons à la figure 1.8 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 1.9.



**FIGURE 1.8** – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les noeuds  $m$  et  $m'$  en contact sont étudiés séparément. On représente les variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , et  $x_4$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**FIGURE 1.9** – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 1.3 et 1.6 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.  $F_c$  représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.15)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de  $x_2$  et  $x_3$  pour éliminer la force de contact  $F_c$  et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.16)$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant  $x_2(t) = x_3(t)$  p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses  $m$  et  $m'$  peuvent être étudiées comme une unique masse  $m + m'$ . La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble  $m + m'$ . Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses  $\dot{x}_1(t^+)$ ,  $\dot{x}_2(t^+)$ ,  $\dot{x}_3(t^+)$  et  $\dot{x}_4(t^+)$  immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (1.13)), nous réutilisons les quantités  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_4$  données par ce système (l'équation (1.13) dans lequel  $x_2$  et  $x_3$  sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car  $x_1$  et  $x_4$  n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité  $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$  est aussi calculée suivant le modèle équation (1.13) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnues dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons la deuxième équation de 1.16 entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_I. \quad (1.17)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons  $v_2 = \dot{x}_2(t^-)$  et  $v_3 = \dot{x}_3(t^-)$  les vitesses des noeuds en contact avant collision, et  $V_2 = \dot{x}_2(t^+)$  et  $V_3 = \dot{x}_3(t^+)$  les vitesses après contact. L'équation (1.17) devient donc :

$$mV_2 + m'V_3 = I + mv_2 + m'v_3 \quad (1.18)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution  $\varepsilon$ <sup>4</sup>. On l'équation

$$V_2 - V_3 = \varepsilon(v_2 - v_3) \quad (1.19)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (1.18) et (1.19) permet d'obtenir les expressions :

$$V_2 = \frac{I + (m + \varepsilon m')v_2 + (1 - \varepsilon)m'v_3}{m + m'}, \quad V_3 = \frac{I + (1 - \varepsilon)mv_2 + (m' + \varepsilon m)v_3}{m + m'}. \quad (1.20)$$

---

4. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

# Bibliographie

- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-.....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.