

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Superviseur
Stéphane LABBÉ

Étudiant

Roussel Desmond NZOYEM

Enseignant référent
Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions ;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021 ;
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

12 mai 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	ii
1 État de l'art	1
1.1 Position du problème	1
1.2 Résumé de thèse de M. Rabatel	2
1.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer	3
1.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème	8
1.2.3 Validations et exploitations du modèle	11
1.2.4 Discussion	12
1.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu	13
1.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art	13
1.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace	15
1.3.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier	18
1.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes	19
1.3.5 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope	23
1.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur	26
1.3.7 Discussion et questions ouvertes	29
2 Travaux et apports	31
2.1 Les missions du poste	31
2.2 Présentation des résultats obtenus	31
2.2.1 Modélisation générale du contact entre deux floes de glace	31
2.2.2 Modélisation et simulation 1D	33
2.2.3 Modélisation et simulation 2D	42
Bibliographie	45

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Position du problème

Nous commençons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécessaires pour décrire le floe occupant la région fermée de l'espace Ω (voir figure 1.1) :

- Un ouvert connexe $\omega \in \mathbb{R}^2$ décrivant la section longitudinale du floe ;
- Deux fonctions $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$ décrivant l'épaisseur du floe, telle que $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$;
- Le centre de masse du floe $G(\omega)$;
- Deux vecteurs $\mathbf{e}_1(\omega)$ et $\mathbf{e}_2(\omega)$ formant une base sur ω .

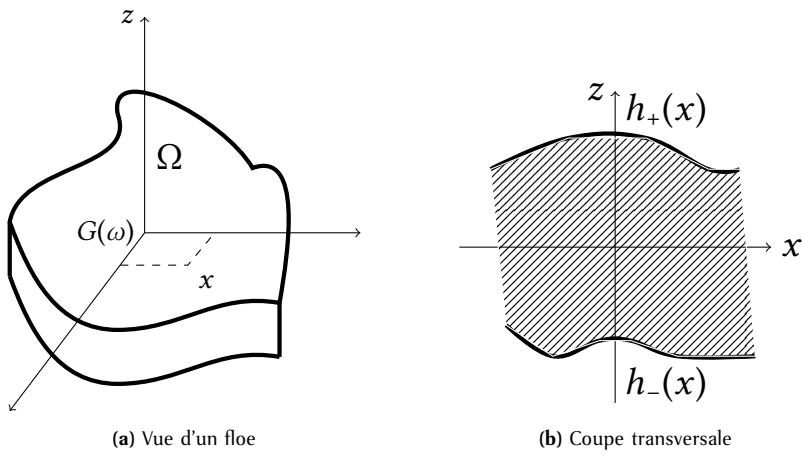


Figure 1.1 – Illustration de la géométrie d'un floe de glace Ω .

On confond le floe au volume qu'il occupe dans l'espace Ω :

$$\Omega = \{(x, z) \mid x \in \omega \in \mathbb{R}^2, z \in]h_-(x), h_+(x)[\}.$$

Les fonctions h_- et h_+ permettent de définir trois quantités (voir figure 1.2) :

- L'épaisseur moyenne du floe : $\bar{h} = \sup_{x \in \omega} h_+(x) - \inf_{x \in \omega} h_-(x)$;
- La plus forte épaisseur : $\bar{h}^* = \sup_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$;
- La plus faible épaisseur : $\underline{h}^* = \inf_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$.

Les vecteurs $\mathbf{e}_1(\omega)$ et $\mathbf{e}_2(\omega)$ sont liés à ω , et pointent vers un point fixe du bord $\partial\omega$ du floe c-à-d :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega \mid \mathbf{e}_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{\|\sigma_i - G(\omega)\|}, \text{ pour } i \in \{1, 2\},$$

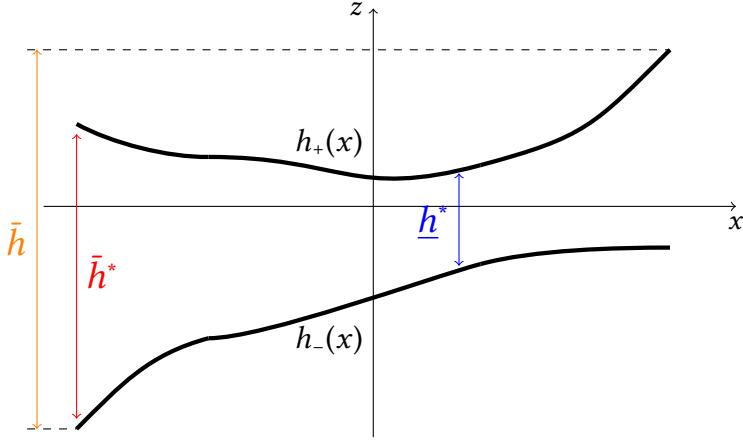


Figure 1.2 – Différentes épaisseurs décrivant un floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floe relativement plat (i.e. \bar{h} faible), h_- sera pris identiquement nul, et h_+ constant.

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . Notons que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, et $\mathbf{e}_1(\omega) \cdot \mathbf{e}_2(\omega) = 0$ de façon à ce que la base orthonormée $(\mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega))$ soit directe.

Un floe $\Omega = (\omega, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), G(\omega), h_-, h_+)$ se déplace sur la mer¹ $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$. Au temps t après une translation de vecteur $u(t)$ (et de matrice $\mathbf{T}_{u(t)}$), et une rotation de vecteur $\theta(t)$ (et de matrice $\mathbf{R}_{\theta(t)}$), on obtient le floe $\Omega(t)$ défini par :

$$\Omega(t) = (\omega', \mathbf{e}^1(\omega'), \mathbf{e}^2(\omega'), G(\omega'), h_-, h_+),$$

avec

$$\begin{cases} \omega' = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \omega, \\ \mathbf{e}_1(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \mathbf{e}_1(\omega), \\ \mathbf{e}_2(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \mathbf{e}_2(\omega), \\ G(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} G(\omega). \end{cases}$$

C'est cette dernière notation mettant en exergue la dépendance avec le temps que nous utiliserons tout au long de ce rapport.

Lors de leur mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et des courants océaniques, des phénomènes thermodynamiques, etc. Nous nous intéresserons donc au phénomène de percussion en vue de l'initialisation des fractures dans les floes de glace. Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère absolu, que nous notons $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le repère associé au floe Ω_i sera noté $\mathcal{R}_{\Omega_i} = (O, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), \mathbf{k})$. Dans ce repère absolu, le floe possède 3 degrés de libertés : l'abscisse et l'ordonnée de son centre de gravité $G_i(\omega)$, et son orientation donnée par l'angle $\theta_i(t)$ (voir figure 1.3).

1.2 Résumé de thèse de M. Rabatel

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL (et plus tard ceux de BALASOIU) ont extensivement traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de son raisonnement, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans \mathbb{R}^2 . Plus tard, nous prendrons en compte une sphère de \mathbb{R}^3 .

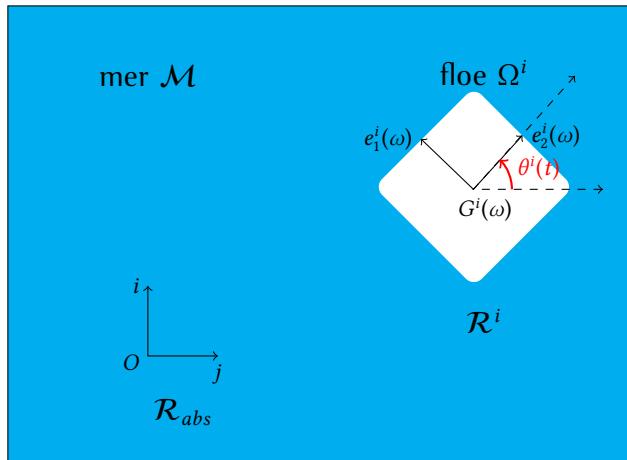


Figure 1.3 – Positionnement d'un floe de glace Ω_i dans le repère absolu \mathcal{R}_{abs} .

1.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer

1.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans [Rab15] utilise les mêmes notations que celles présentées à la section 1.1. Les obstacles² sont des floes aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans [Rab15], l'auteur travaille dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$; cependant, vu que la mer est considérée plane, le mouvement du floe peut être décrit dans le plan $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Ensuite, RABATEL désigne la vitesse angulaire du floe Ω_i par

$$\Theta_i(t) = \theta_i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta_i(t))^T.$$

Soit P (de coordonné x) un point quelconque de $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Sa vitesse dans le repère \mathcal{R}_{abs} est donnée est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}_i(t) + \Theta_i(t) \wedge \mathbf{G}_i P,$$

où le symbole \wedge représente le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 . La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} h_{i,+}(x) dx.$$

Ensuite, l'auteur défini :

- la somme des forces par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe Ω_i :

$$\mathbf{F}_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{F}(x) dx,$$

- le moment cinétique³ en G :

$$L_i = \rho_i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{G}\mathbf{P} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t) dx,$$

- le moment dynamique en G :

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{G}\mathbf{P} \wedge \mathbf{F}(x) dx.$$

2. Nous faisons allusion aux obstacles au déplacement des floes. Il peut s'agir des îles, des stations offshore, etc.

3. Il s'agit d'un moment dû à l'accélération du floe; alors que le moment dynamique est dû aux forces extérieures. Notons que ces deux vecteurs sont portés par \mathbf{k} , et peuvent donc être remplacé par des scalaires correspondants.

Sous le formalisme de Newton-Euler, RABATEL montre que chaque floe Ω_i vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i, \\ I_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i, \end{cases}$$

où I_i représente le moment d'inertie du floe i . Ce système se réécrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t), \quad (1.1)$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & I_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système S composé de n floes, le problème précédent doit être satisfait pour tous les floes. [Rab15, p.18] montre que cela revient à résoudre l'équation

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t), \quad (1.2)$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad \mathcal{W}(t) = (\mathcal{W}_i(t))_{1 \leq i \leq n}, \text{ et } \mathcal{M}(t) = (\mathcal{M}_i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe Ω_i quant à elle sera donné par :

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{\mathbf{G}}_i(t)^2 + \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i(t)^2.$$

1.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandement développé ces derniers siècles, avec plusieurs scientifiques qui ont tenté de décrire le phénomène de contact entre des corps rigides. Notons que le problème d'interaction entre les floes est un problème de **dynamique non-régulière** (contrairement au problème de déplacement des floes entre deux collisions qui lui, est un problème de **dynamique régulière**). Dans [Rab15], l'auteur considère deux lois de contact afin de décrire les phénomènes qui se produisent de façon précise :

- Une **condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration ; cette condition est portée par la composante normale⁴ de la force de contact⁵ lors de la collision.
- Une **loi de friction de Coulomb** : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision. Cette condition est portée par la composante tangentielle de la force de contact.

Afin de traiter ces problèmes de contact, deux approches principales ont été d'enveloppées par les scientifiques : l'approche non-régulière et l'approche de régularisation des lois de contact.

Parmi les pionniers dans l'**approche de régularisation** pour la résolution de la condition unilatérale de Signorini, nous pouvons citer Hertz ; Nevins et Whitney [NW72 ; Whi77], Moore [MW88]. Ces méthodes se sont largement répandues dans les études liées à la robotique, à la réalité virtuelle ou encore dans les opérations assistées par ordinateur, pour simuler un grand nombre d'objets en contact en petites ou grandes déformations, comme des habits, des cheveux ou encore des organes (voir [WW90 ; VCMT95 ; Bar ; Rag+04]). Concernant la seconde, la loi de friction de Coulomb, la discontinuité entre les phases de glissement et non-glissement a été traitée de différentes façons ; en utilisant la notion de coefficient de restitution, ou des modèles masse-ressorts.

4. La composante normale permet aussi d'assurer la dissipation de l'énergie à travers la **loi de Poisson**.

5. La force de contact est la somme d'une friction tangentielle, et d'une réaction normale.

L'approche non-régulière a été développée en utilisant les concepts d'inclusion différentielles ; ceci afin de traiter la condition de Signorini. Moreau [Mor85], Aubin [AC12] et Monteiro Marques [MM85], ont montré des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème sans friction. Puis, des résultats similaires ont été établis pour le contact unique avec friction (voir [Mor86 ; MM88 ; Pan12 ; JP85 ; MM94]). Cependant, cette notion d'inclusion différentielle est difficile à manipuler ; c'est, d'après RABATEL la raison pour laquelle le problème du contact multiple avec friction reste encore très peu traité. Il a donc fallu attendre les années 80 avec l'essor des méthodes LCP pour donner un nouveau souffle à l'approche non régulière. Nous pouvons citer ici les travaux de Lötstedt qui fournit des preuves d'existence et d'unicité pour le contact avec la friction de Coulomb (voir [Löt81 ; Löt82a ; Löt82b]). On cite aussi Klarbring et Pang, pour leur apport sur le plan des méthodes de programmations. [Rab15] a opté pour cette approche car elle facilite la construction des solutions à partir d'algorithmes tels que ceux de Lemke (voir [Lem78]). RABATEL s'inspire aussi des travaux de Baraff [Bar93], qui écrit les forces de contact dans les repères locaux aux points de contact. Ces repères sont définis par la normale et la tangente aux points de contact. La condition de complémentarité se résume comme ceci : "Sil y a contact alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et sil ny a pas contact l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle.". Cependant, les travaux de Baraff sur l'existence de solutions sont limités par l'approche accélération-force, et le coefficient de friction qui sont utilisés. En utilisant des formulations en vitesse et impulsion, les chercheurs ont réussi à démontrer l'existence de solutions pour toute configuration à contacts multiples avec n'importe quel coefficient de friction.

Pour traiter le problème de collision entre les floes, les glaciologues retiennent une multitude de modèles principalement intégrés aux milieux continus. Par exemple, dans les articles de Solomon [Sol70], ceux de Hibler [HI79] et ceux de Bratchie [Bra84], la force résultante des interactions est due à une contrainte interne. On note aussi les modèles basés sur théorie des flux de particules. Dans [SHL86 ; Hop85] par exemple, les collisions ne sont pas détectées précisément et les paramètres décrivant la collision sont déterminés par une méthode de Monte Carlo. L'introduction de ces déformations dans les modèles discrets de la banquise a été initié dans les années 90 par Hopkins [Hop96], et récemment par Herman et Wilchinsky [Her11 ; WFH10]. Cependant, elles sont basées sur la régularisation des lois de contact. Avant les travaux de RABATEL, il n'existe pas de modèle discret de banquise en utilisant une dynamique du contact non régulière.

Le modèle décrit par [RLW15, p.5892] utilise deux conditions de complémentarité pour déterminer les vitesses des floes après le contact. La première est une condition de Signorini [Sig33] pour s'assurer de la non-interpénétration⁶ des floes. Pour décrire ces conditions, il faut au préalable écrire le problème de contact entre floes comme un problème implicite, où les inconnus sont les impulsions après le choc⁷. Pour cette deuxième condition de complémentarité, RABATEL se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] afin d'en extraire une condition qui vérifie la loi de friction de Coulomb. Le problème résultant a ensuite été résolu en utilisant des algorithmes de Lemke.

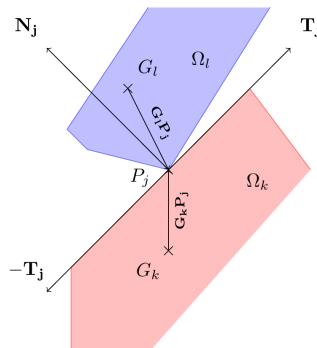


Figure 1.4 – Interaction entre deux floes Ω_k et Ω_l au point P_j [Rab15, p.26].

6. Deux floes s'interpénètrent si la "distance" entre ces deux floes est négative.

7. Contrairement aux lois de contacts explicites (Hertz, Hooke, Coulomb), les lois implicites ne nécessitent pas la connaissance de la nature du contact entre les floes (glissement ou accroche).

Soit P_j , ($j \in \{1, \dots, n\}$) un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l (voir figure 1.4). Nous notons $\mathbf{F}_{kj}(t)$ la force de contact du floc Ω_k au floc Ω_l appliquée en P_j . Par convention, une matrice de contact \mathbf{M}_c est définie telle que son coefficient c_{kj} vaut :

- 0 si le point de contact P_j nest pas un point de contact du floc Ω_k ;
- -1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k < l$;
- 1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k > l$.

En notant E_k lensemble des points de contact du floc Ω_k au temps t , [Rab15, p.26] définit la résultante des forces de contact $\mathbf{F}_k^c(t)$, au floc Ω_k comme :

$$\mathbf{F}_k^c(t) = \sum_{j \in E_k} c_{jk} \mathbf{F}_{kj}(t).$$

En rajoutent ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l'équation (1.2), pour un floc $\Omega_k(t)$, on obtient :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j \in E_k} \left(\mathbf{G}^k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_{kj}(t) \right). \quad (1.3)$$

1.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de [Rab15] opte pour le formalisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accélération-force. En effet, lapproche en **vitesse-impulsion** apporte lavantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il nest pas nécessaire de connaître la nature du contact. Il nous faut donc définir les notions d'impulsion. Sur un intervalle de temps δt^* , sil y a un contact entre les floes Ω_k et Ω_l au point P_j , nous dirons que le floc Ω_k a subi un choc provenant du floc Ω_l au point de contact P_j caractérisé par l'impulsion :

$$\mathbf{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj} \mathbf{F}_{kj}(t) dt.$$

RABATEL fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments équation (1.2) pour le floc Ω_k sur lintervalle temporel δt^* :

$$\mathcal{M}_k \int_{\delta t^*} \dot{W}_k(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \sum_{j \in E_k} \left(\mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{I}_{kj} \right).$$

En écrivant $\delta t^* = [t^-, t^+]$, on peut donc introduire les inconnues $\beta, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^m$ pour le problème de contact

$$\mathcal{M} (W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \mathbf{B}\beta + \mathbf{J}\lambda, \quad (1.4)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{J} sont deux matrices de $(\mathbb{R}^3)^{n \times m}$ telle que

$$\mathbf{B} = (d_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad d_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{T}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{T}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases},$$

$$\mathbf{J} = (s_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad s_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{N}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases}.$$

Les matrices \mathbf{B} et \mathbf{J} sont obtenues par décomposition des forces de contact dans le repère de contact $\mathcal{R}_{\Omega_j} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$ (voir figure 1.4).

Comme précédemment mentionné, afin de modéliser la friction dans une collision qui respecte la loi de Coulomb, [Rab15] se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] qui définissent une condition de complémentarité reliant la composante tangentielle β_j de l'impulsion appliquée au point P_j , la composante normale λ_j , la vitesse relative tangentielle du point P_j et le coefficient de friction μ . On introduit le vecteur $\tilde{\beta}$ contenant les composantes de l'impulsion tangentielle dans chacune des directions possible de glissement T_j ou $-T_j$. Il devient alors possible de formuler le problème de contact (sur tout le système S) sans interpénétration par le problème linéaire de complémentarité suivant. Dans cette formulation, l'impulsion de contact est effectivement à l'intérieur du cône de Coulomb :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\mathbf{J} & -\mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \mu & -\mathbf{H}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\delta t} \mathcal{H}(t) dt - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = 0, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

avec

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}^T W(t^+), \quad \mathbf{H}^T = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1 \leq j \leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq m},$$

μ est la matrice diagonale de diagonale(μ_1, \dots, μ_m),

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2(i-1)+1 \text{ ou } j = 2(i-1)+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$D = (\mathbf{B}_1| -\mathbf{B}_1| \dots | \mathbf{B}_m| - \mathbf{B}_m)$ avec \mathbf{B}_j la colonne j de la matrice \mathbf{B} .

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact $W(t^+)$, à laide des composantes inconnues tangentielle et normale des impulsions dans les repères de contact ($\tilde{\beta}, \gamma$), elles-mêmes inconnues du système.

1.2.1.4 Consistance énergétique

D'après l'auteur de [Rab15, p.42], traiter le problème de contact à partir de lois non régulières ne permet pas dobtenir des solutions satisfaisant à la fois la non-interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique. En se focalisant sur la consistance énergétique, RABATEL a subdivisé le problème en deux : une phase de compression et une phase de décompression suivant la loi de Poisson. La **phase de compression** modélise la capacité maximale des floes à emmagasiner, par la déformation, une partie ou la totalité de l'énergie cinétique transmise lors du contact. L'impulsion normale λ^c calculée durant cette phase (en résolvant le problème de complémentarité (équation (1.5))) correspond a un coefficient de restitution $\varepsilon = 0$. Les impulsions obtenues durant cette phase correspondent à celles nécessaire pour éviter la non-interpénétration, et correspondent donc a une énergie cinétique maximale emmagasinée. La **phase de décompression** correspond à la restitution partielle ou complète de l'énergie cinétique emmagasinée par la déformation des floes. L'impulsion lors de cette phase, notée λ^d , est déterminée par $\lambda^d = \varepsilon \lambda^c$ (l'hypothèse de Poisson [GP95]). Durant la phase de décompression, RABATEL a donc opté pour la consistance énergétique et la non-interpénétration avec la solution :

$$W^N = (1 + \varepsilon)W^c - \varepsilon W(t^-),$$

où W^c représente les vitesses des floes après la phase de compression, et ε le coefficient de restitution pour les contacts considérés inélastiques.

1.2.1.5 Le modèle de l'environnement

L'environnement est l'ensemble des forces extérieures qui agissent sur les floes hormis les forces de contact qui sont décrites dans la partie précédente. Ces principales forces sont :

- La force de Coriolis \mathfrak{F}_c donnée pour un floe $\Omega_i(t)$ par :

$$\mathfrak{F}_{c,i}(t) = -f\mathbf{k} \wedge \dot{\mathbf{G}}_i(t),$$

avec f le paramètre de Coriolis et \mathbf{k} le vecteur dirigé vers le haut du repère absolu \mathcal{R}_{abs} .

- Les forces de trainée associées au vent $\tau_a(t)$ et celle associée à l'océan $\tau_w(t)$:

$$\begin{aligned}\tau_a(t) &= \rho_a C_a \|\mathbf{U}_a(t)\| \mathbf{U}_a(t), \\ \tau_w(t, P) &= \rho_w C_w \|\mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t)\| (\mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t)),\end{aligned}$$

avec ρ la masse volumique du fluide (l'indice a pour l'air et w pour l'eau) et C un coefficient de trainée sans dimension (voir [HI86]); \mathbf{U}_a , \mathbf{U}_w , $\dot{P}(t)$ respectivement la vitesse du vent à l'interface glace/fluide, la vitesse du courant océanique à l'interface glace/fluide, et la vitesse d'un point P du floe.

Le modèle de dynamique régulière définit en équation (1.2) peut se voir expliciter :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} &= M_i \mathfrak{F}_{c,i}(t) + \int_{\Omega_i(t)} \tau_a(t) + \tau_w(t, P) ds, \\ I_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} &= \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}_i \mathbf{P} \wedge (\tau_a(t) + \tau_w(t, P)) ds. \end{cases}$$

L'algorithme décrivant en détail le processus de collision ainsi que la consistance énergétique se trouve à la page 43 du document [Rab15].

1.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème

1.2.2.1 Discréétisation temporelle

Pour simuler la dynamique des floes de glace soumis à des forces extérieures et possiblement des collisions, il faut intégrer la dynamique régulière (entre deux collisions), et la dynamique non régulière; et il existe deux principales méthodes pour la discréétisation en temps dans de tels problèmes. La méthode **time-stepping** (voir [Acal13] pour les schéma de Moreau [Mor86; Jea99], et de Schatzman-Paoli [PS02a; PS02b] par exemple, pour lesquels une convergence a pu être exhibée à partir de la convergence en graphe de Moreau [Mor78]); comparé aux autres méthodes, la méthode *time-stepping* traite mieux les points d'accumulation [Rab15, p.58]; et est plus performante sur des problèmes de multiples contacts. Cependant, RABATEL pour le schéma **event-driven** pour sa précision dans la localisation des collisions et sa facilité de manipulation. En plus, elles permettent d'utiliser des schémas d'intégration existant d'ordre élevé pour des équations différentielles ordinaires. Le seuil de collision choisi est suffisamment grand pour éviter de traiter les collisions une par une. Le schéma utilisé pour intégrer l'équation équation (1.2) est un schéma du type Euler explicite, pour sa facilité d'implémentation, sa facilité à prédire la localisation en espace et en temps des futures collisions et enfin, sa capacité à dépasser les problèmes de points d'accumulation.

La simulation par la méthode *event-driven* demande la définition d'un pas de temps maximal pour lequel le schéma reste stable. Le pas de temps Δt_{max} sera utilisé si aucune collision n'est détectée entre les instants t et l'instant $t + \Delta t_{max}$. En se référant au un modèle idéalisé 1D (voir [Rab15, p.49]), RABATEL distingue deux critères pour la stabilité du schéma numérique au temps t :

- lorsque la vitesse caractéristique des floes $V_c(t) = N_a \mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)$ est constante sur l'intervalle de simulation I , alors pour :

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} = \min \left(\frac{\rho}{2|\mathbf{U}_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}, \frac{2K_t}{L_t} \right) \quad (1.6)$$

avec

$$\text{avec } L_t = \rho^{-1} \rho_w C_w (N_a^2 \mathbf{U}_a^2 + (N_a \mathbf{U}_a + 2\mathbf{U}_w)^2), \text{ et } K_t = |V_c(t)| \text{ constant},$$

le schéma est stable c-à-d. $\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] = [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}]$;

- lorsque les variations de $V_c(t)$ entraînent une augmentation de K_t au cours du temps. La propriété de stabilité reste vérifiée car

$$\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] \in [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}];$$

- lorsque les variations de $V_c(t)$ entraînent une diminution stricte de K_t au cours du temps, alors la condition de stabilité dans les deux cas précédents ne peut être vérifiée. RABATEL introduit donc une seconde définition de la stabilité pour traiter ce cas. Il remarque que pour

$$\Delta t_{max} \leq \begin{cases} \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-} & \text{si } x \in]-\infty, K_{t+\Delta t}] \\ \frac{-2x}{-\tilde{L}_t^+} & \text{si } x \in]K_{t+\Delta t}, +\infty] \end{cases} \quad (1.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^- &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 - (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2] \\ \tilde{L}_t^+ &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 + (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2], \end{aligned}$$

on a la diminution de la vitesse des floes.

En conclusion, pour une vitesse infinitésimale initiale $\dot{\mathbf{G}}(0) \in [-K_0, K_0]$, pour tout $t \in I$, et pour tout Δt_{max} vérifiant les équations (1.6) et (1.7), nous avons les vitesses des floes majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t$$

RABATEL choisi donc de prendre

$$\Delta t_{max} = \min \left(\frac{3 - 2(\max_{t \in I} K_t)}{4 \max_{t \in I} \tilde{L}_t^-}, \frac{3 + 2(\max_{t \in I} K_t)}{4 \max_{t \in I} \tilde{L}_t^+}, \frac{\rho}{2(\max_{t \in I} |\mathbf{U}_a(t)|) \sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}} \right)$$

pour s'assurer que le modèle idéalisé vérifie les critères de stabilité définis. Notons que le procédé global d'intégration de la dynamique pour le modèle se situe à la figure 2.2 du document [Rab15, p.60], le schéma est repris à la figure 1.5.

1.2.2.2 Détection des collisions en espace

Des deux méthodes principales utilisées dans la littérature pour la détection des voisins, RABATEL a choisi la méthode de **hiérarchie de volumes englobants** pour sa facilité de mise en place et pour son efficacité même avec de grands ratios de tailles. L'alternative était la méthode de **partitionnement de l'espace** qui elle, souffre de plusieurs défauts non surmontables pour le modèle développé. Les méthodes de volumes englobants consistent à englober le contour de l'objet par des volumes à des échelles de plus en plus fines pour améliorer la détection.

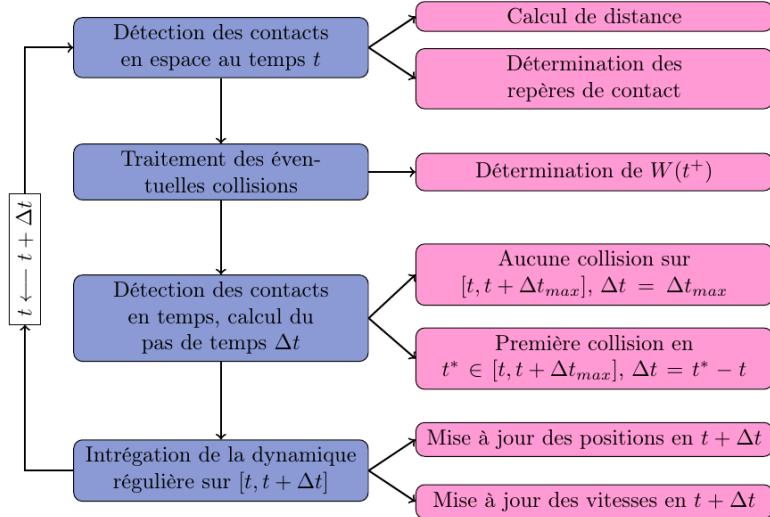


Figure 1.5 – Procédé global d'intégration de la dynamique pour notre modèle [Rab15, p.60].

1.2.2.3 Détection des contacts en temps

Il s'agit ici de trouver le pas de temps optimal cest-à-dire un pas de temps Δt pour lequel la configuration des floes ne contenant pas d'interpénétrations sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, contient au moins une interpénétration sur l'intervalle de temps $[t + \Delta t, t + \Delta t + \varepsilon]$ [Rab15, p.87]. Lorsque le critère de collision n'est pas vérifié, RABATEL montre qu'il suffit de prendre

$$\Delta t_{i,j} = -\frac{-\delta_{i,j}(t) - tol_3}{\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{\mathbf{G}}_i(t) - \dot{\mathbf{G}}_j(t))},$$

avec

$$\mathbf{A}_{i,j}(t) = \frac{C_{0,i}(t) - C_{0,i}(t)}{d(C_{0,i}(t), C_{0,i}(t))}, \text{ et } tol_3 = \frac{\xi}{20}.$$

Lorsque le critère de collision est vérifié, il faut plutôt prendre

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\min(\eta_i, \eta_j) - tol_3}{\Gamma(t)},$$

avec

$$\Gamma(t) = \max(\|\dot{\mathbf{Q}}_i^{i,j}(t)\|, \|\dot{\mathbf{Q}}_j^{j,i}(t)\|),$$

où $\dot{\mathbf{Q}}_i^{i,j}$ représente la distance parcourue par un point de $\Omega_i(t)$ relativement à $\Omega_j(t)$.

Une fois ce $\Delta t_{i,j}$ assurant la non-interpénétration trouvé, on peut donc choisir

$$\Delta t = \min\left(\Delta t_{max}, \min_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ i \neq j}} \Delta t_{i,j}\right).$$

Le lecteur est renvoyé au document [Rab15, p.91] pour plus de détails sur la détection des contacts en temps.

1.2.2.4 Construction des repères de contacts

La construction d'un repère de contact n'est effectuée que lorsque le contact entre deux floes Ω_k et Ω_l est **linéique** [Rab15, p.79], ou **ponctuel** et le vecteur porté par les points en contacts appartient au cône normal de P . La normale \mathbf{N} est alors déterminée comme le vecteur unité dirigé par \mathbf{PQ} . Si Q n'est pas unique,

on se retrouve dans la situation où il peut exister plusieurs repères de contact pour un point de contact. Dans les autres cas, le repère de contact associé au point P nest pas construit et P nest pas considéré dans le traitement des contacts [Rab15, p.80]. L'algorithme de détection des points de contacts afin de construire les repère de contact est explicité dans le document [Rab15, p.76].

1.2.2.5 Simulation des événements collisions

Une fois les voisins détectés et les repères de contact construits, on peut passer à la prochaine étape qui consiste en la simulation des événements de collisions. Ici, plusieurs choix s'offrent à nous : les méthodes dites de **régularisations**, les méthodes dites **itératives**, et les méthodes dites **de pivots** [Rab15, p.82]. La première catégorie est adaptée aux modèles régularisants, ce qui n'est le cas de notre modèle. La deuxième par contre a extensivement été utilisée dans la littérature ; on peut citer Moreau [Mor88 ; Mor99 ; Jea99], Aitken [Ait50]. Malheureusement, dès que la matrice A du problème de complémentarité à résoudre n'est plus symétrique, ce deuxième groupe de techniques ne s'avère pas efficace. RABATEL choisit donc l'algorithme de Lemke pour lequel il existe des preuves de convergence lorsque la matrice A est co-positive. Bien qu'il soit performant, il faut néanmoins noter que l'algorithme de Lemke étant une technique globale, cest-à-dire traitant les contacts simultanément, il ne garantit pas une bonne propagation du contact [Rab15, p.82].

1.2.2.6 Optimisations

La première optimisation apporté est celle sur les distances de collision : deux floes sont en contact si la distance entre eux n'est pas nulle, mais supérieure à un seul appelée **distance de collision**.

La deuxième concerne la condition de non-interpénétration [Rab15, p.85]. En cas de congestion, il est difficile que les floes décollent après contact. En exigeant que $\mathbf{J}^T W(t^+) > 0$ après collision, on risque ne pas avoir de solution pour le problème linéaire de complémentarité associé. RABATEL relaxe donc la condition de Signorini en définissant un réel c , et l'ensemble des vitesses admissibles devient donc :

$$V_c = \{ w \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{J}^T w \geq c \} .$$

Une troisième optimisation concernant la définition de la **notion d'erreur** et de **tolérance** a été implémentée. La quatrième consiste en la résolution d'un LCP en trois tentatives (avec trois algorithmes de Lemke différents) même si cela augmente les coups de calculs [Rab15, p.86]. Si cette optimisation ne s'avère pas suffisante, une dernière optimisation consiste en la modification aléatoire de certains coefficients de la matrice A , la permutation des lignes afin d'éviter des zéros sur la diagonale, ou encore l'utilisation de la notion de **contact actif**.

1.2.3 Validations et exploitations du modèle

Les résultats ont été validés à travers plusieurs expériences. Nous citons des exemples classique tels que la **boîte glissante**, le **berceau de Newton**, le **canon de Newton**, la **balle rebondissante**, etc. Le modèle a ensuite été validé sur des scénarios simples de dérive libre soumise à des courants océanique et atmosphérique et des scénarios simples de collision. En effet, il a été vérifié que le comportement dun objet simulé est cohérent avec le comportement théorique et avec les observations. Les principes physiques suivants ont ainsi pu être testé par RABATEL :

- la conservation de la symétrie d'une configuration ;
- la satisfaction du modèle de Coulomb ;
- le traitement d'un point d'accumulation ;
- la cohérence temporelle ou la propagation des ondes de choc ;
- la conservation de l'énergie cinétique.

Des telles exploitations telles que la dérive dans un canal étroit, pour des floes en bassins a été étudié (voir figures 1.6 et 1.7). Aussi, la dérive soumise à un vent et un courant variable avec des vitesses du vent provenant de **ERAinterim**, à partir du modèle glace de mer et océan **TOPAZ** a été étudiée.

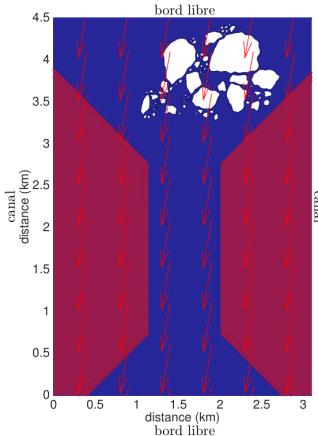


Figure 1.6 – Configuration à l'instant initial pour le scénario de dérive dans un canal étroit [Rab15, p.124].

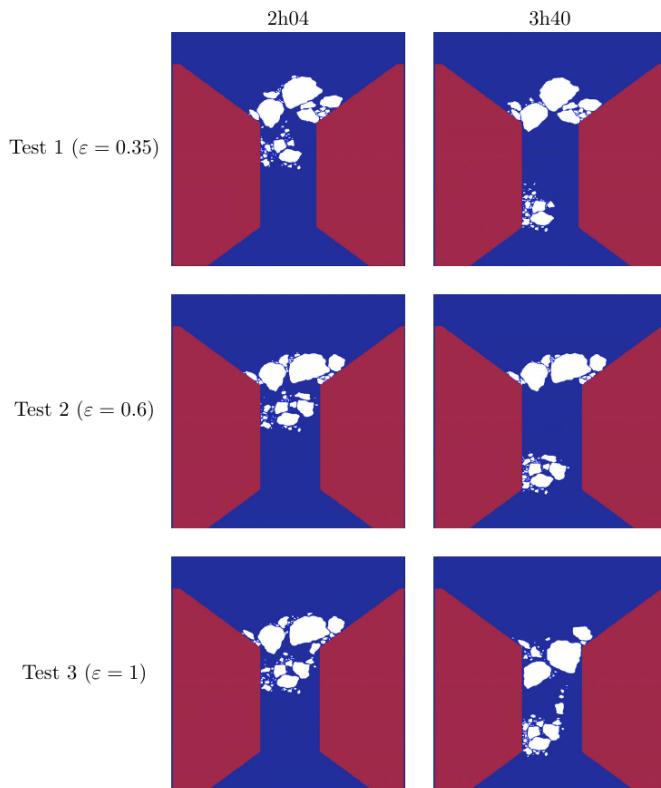


Figure 1.7 – Quelques résultats obtenus à deux heures différentes de la configuration des floes pour différentes valeurs du coefficient de restitution ε [Rab15, p.126].

1.2.4 Discussion

Bien que les travaux de RABATEL ont été testés et validés sur plusieurs configurations différentes, il reste néanmoins des points qui ne sont pas traités, et qui ont très clairement été soulignés dans la thèse [Rab15] :

1. Le modèle ne gère pas la rhéologie⁸ de la glace : les floes sont des solides purement rigides (ils ne se déforment pas) et la dissipation d'énergie cinétique durant la collision est décrite en utilisant un coefficient purement empirique collision.
2. La loi de contact utilisée pour le glissement (voir [ST96]), bien que très riche, ne prends pas en compte toutes les vitesses possibles de déplacement. La construction d'une loi qui donnerait accès à

8. La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée.

la région entière, demanderait de prendre en compte un grand nombre de phénomènes intrinsèques aux contacts. Leur compréhension et leur rôle à chacun est difficile à déterminer.

3. Les coefficients de friction et de restitution utilisées sont limitants. En réalité, il n'est pas possible de prendre en compte ou d'interpréter mathématiquement certains effets lors du contact ; par exemple, avec la dispersion de l'énergie (voir [NBI4]). Cette dispersion est la conséquence de certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact. Seuls les effets de dissipation dus aux phénomènes locaux comme l'endommagement, la viscosité ou la plasticité sont pris en compte à travers l'utilisation des coefficients de restitution et de friction.
4. Les vitesses obtenues après la phase de décompression afin d'assurer la dissipation de l'énergie cinétique possèdent une faiblesse : elles ne sont solutions que sous certaines conditions, comme le fait que les chocs soient frontaux et qu'il n'y ait pas d'apport de forces extérieures autres que les forces de contact durant la collision [Rab15, p.41].

1.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu

Les travaux de D. Balasoiu concernent la modélisation et la simulation du comportement mécanique de floes de glace [Bal20]. Il s'agit d'une amélioration des travaux de M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss [Rab15 ; RLW15] prenant en compte la fracture des floes. Précisément, ce travail se focalise sur l'initiation de la fracture, ainsi que la prédiction du chemin que la fracture emprunte. Jusqu'à présent, les floes étaient considérés comme des corps rigides ; dans sa thèse, BALASOIU les considère comme des corps élastiques. Son travail est divisé en deux parties. Il commence par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d'un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord (i.e. à une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, il cherche à obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe qui percute un autre floe ou une structure solide.

1.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art

La théorie de fracture la plus répandue de nos jours est due à A.A. Griffith. Dans ses travaux [Gri21], il invalide les résultats que C. Inglis [Ingl13] qui ne tenaient pas en compte la taille de la fracture ; il présente donc la croissance d'une faille comme une compétition d'énergie entre l'énergie élastique⁹ et l'énergie de surface¹⁰. Le critère de Griffith est un critère thermodynamique qui stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de moindre énergie. En effet, sur un matériau élastique Ω dont la frontière est subdivisée en deux zones $\partial\Omega_D$, et $\partial\Omega_N$, on pose [Bal20, p.33] :

$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx \\ \mathcal{P}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega \setminus \sigma(t)} W(x, \nabla \varphi(t, \sigma(t))) \, dx - \mathcal{F}(t, \sigma(t)) \\ \mathcal{F}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega} f_v(x) \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x) \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

où

- E_{el} est l'énergie élastique du matériau sans faille.
- $\sigma(t)$ représente la fracture au temps t , supposée à l'équilibre.
- \mathcal{P} l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille $\sigma(t)$ au temps t .
- $e(u)$ est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau.
- $\varphi = \text{Id} + u$ représente le déplacement du matériau supposé suffisamment régulier.
- W est la densité d'énergie du matériau élastique, supposé hyper-élastique.

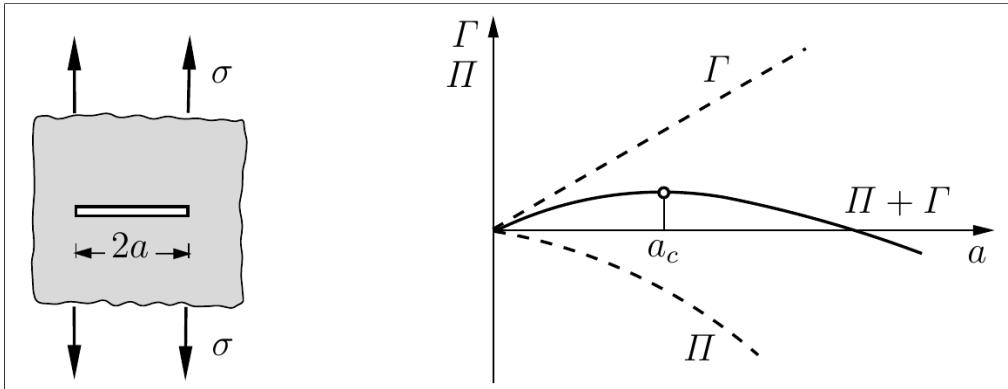
9. Énergie relâchée lorsqu'un défaut subit un accroissement. Cette énergie diminue durant la fracture.

10. Énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces (les bords de la fissure). Cette énergie augmente avec l'accroissement de la fracture.

- f_s est la contrainte surfacique appliquée sur le bord $\partial\Omega_N$.
- f_v est le champ de force volumique appliquée sur Ω .

D'après le critère de Griffith [Bal20, p.34], la fonction $\sigma(t)$ doit vérifier :

1. $\frac{d\sigma(t)}{dt} \geq 0$;
2. $-\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) \leq k$;
3. $\frac{d\sigma(t)}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) = k$.



Une illustration de ce critère peut être observée à la figure 1.8. Comme mentionné plus haut, ce modèle souffre de problèmes de nucléation et de prédiction de la fracture. Pour contourner le problème de nucléation, les mécaniciens considèrent que tout matériau possède des microfissures, et ce sont ces dernières qui sont à l'origine des fissures observables à l'œil. Quant au problème du chemin emprunté par la fracture, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que les critères d'Irwin [Irw57] sont invalides car, ils impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne peut être courbé.

Le modèle proposé par Francfort et Marigo [FM98], suit un résultat théorique dû à De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci [DGCL89], qui prouvent le théorème d'existence d'un minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah qui intervient dans la détection des contours d'une image. Présentons les données géométriques du problème [Bal20, p.37]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe, dont la frontière $\partial\Omega$ est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté U_D , tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique f_v . On suppose que Ω est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée W . Ainsi, lorsque le matériau Ω subit (sans fracture) une déformation $\varphi = u + \text{Id}$ suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) dx,$$

où l'on a noté u le champ de déplacement du matériau, et $e(u)$ son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture σ :

$$E_{\text{el}}(u, \sigma) = \inf_{u \in V_{U_D, \sigma}} \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) dx,$$

où lon a défini lespace fonctionnel $V_{U_D, \sigma}$, par :

$$V_{U_D, \sigma} = \{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^N) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \}.$$

Francfort et Marigo proposent l'énergie de fracture suivante sur $\partial\Omega_D$:

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_{\sigma} k(x) d\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire $k(x)$ traduit la rigidité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau; \mathcal{H}^{N-1} représente la mesure de Haussdorff de dimension $N - 1$, qui peut être comprise comme la longueur du contour pour $N = 2$. Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u, \sigma) &= E_{\text{el}}(u, \sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma) \\ &= \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) dx + \int_{\sigma} k(x) d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

où σ est une union dénombrable d'ensembles rectifiables. Ainsi donc, une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle E_{tot} . Signalons que BALASOIU montre, dans le cas d'un mouvement antiplan¹¹, que le modèle est quasiment identique au modèle de De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci, pour lequel un théorème d'existence a pu être exhibé.

La méthode numérique employée est la méthode à champ de phases. Elle repose sur la notion de Γ -convergence, en particulier sur le résultat de **convergence des minimums**. On remplace l'inconnue σ par une suite de fonctions lisses v_ε . Par exemple, dans le cas du traitement d'image, pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dont se sont inspiré Bourdin, Francfort et Marigo, on constate d'après Ambrosio et Tortorelli [AT90] que la suite de fonctionnelle

$$G_\varepsilon() = \int_{\Omega} \left(|u - g|^2 + (v^2 + \eta_\varepsilon) |\nabla u|^2 + \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx,$$

Γ -converge vers la fonctionnelle limite

$$G_f = \int_{\Omega} |u - g|^2 + |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

où $g : \Omega \mapsto [0, 1]$ est la fonction de contraste de l'image, et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de u , noté S_u , qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables [Bal20, pp.35-37]. Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat de Γ -convergence sont disponibles dans la littérature. On cite par exemple ici les résultats obtenus dans [Nag+19] à la figure 1.9.

1.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace

Le modèle présenté dans la section précédente n'est pas adapté à notre étude. BALASOIU a donc développé un modèle qui ne nécessite pas de fonctionnelle lissée, comme l'on fait plusieurs modèles de glaciologie (voir [LLL15]), en supposant que les fractures sont des segments. Un résultat d'existence (dans les cas où le floe n'est pas encore fracturé) est prouvé à l'aide de la convergence de Mosco. De plus, BALASOIU introduit un problème dévolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du floe. Les fractures obtenues par ce problème dévolution sont ainsi des lignes brisées. Le résultat d'existence n'a pas été prouvé pour ce cas. Concernant le côté numérique, une méthode *meshless*¹² est proposée.

11. Un mouvement **antiplan** est mouvement pour lequel le champ de déplacement u est porté par un vecteur constant.

12. Car l'ensemble discréteisé des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé.

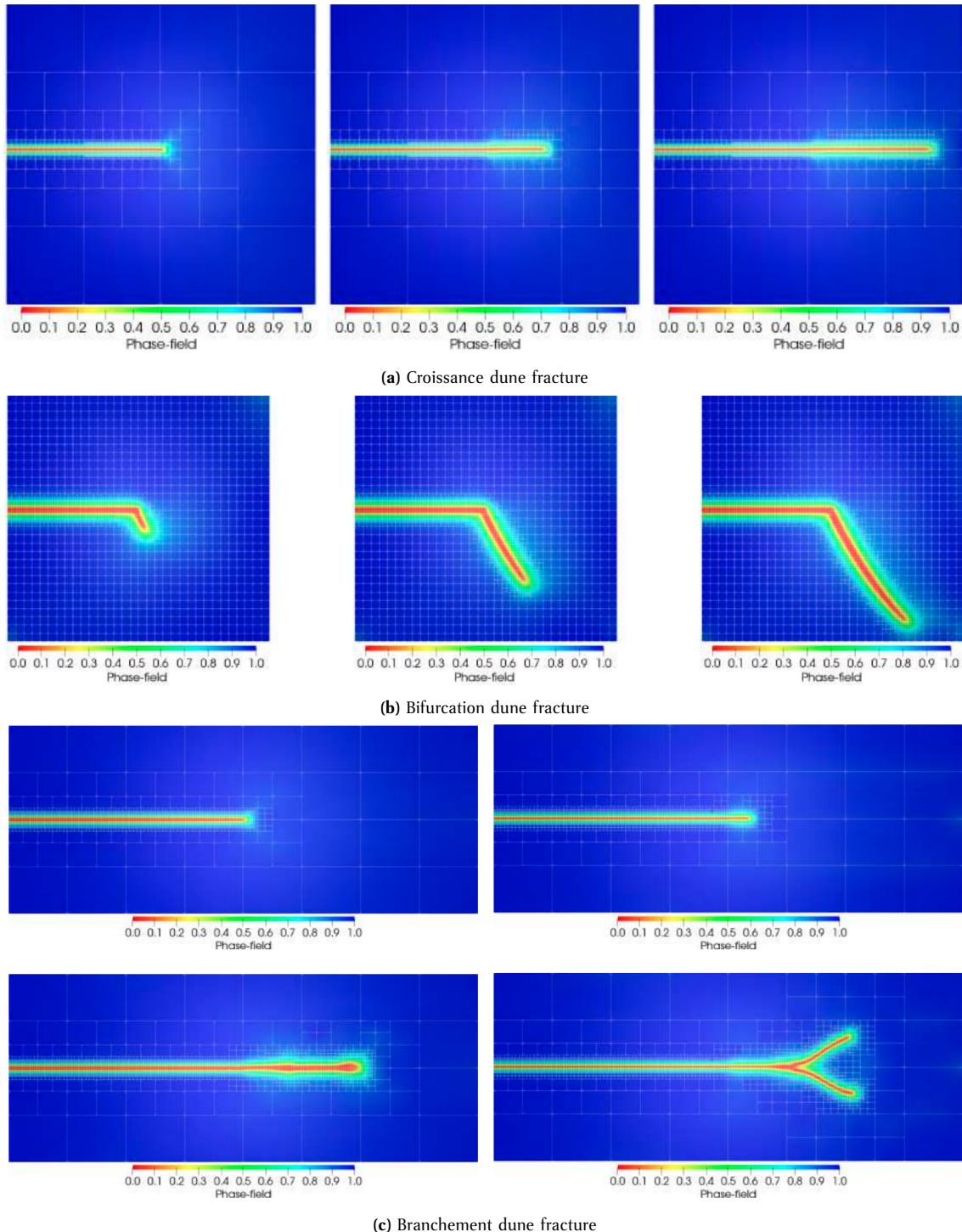


Figure 1.9 – Trois résultats numériques obtenus dans [Nag+19] à l'aide d'une discréttisation éléments finis (hp-FEM) et volumes finis en ne remaillant le domaine que lorsque c'est nécessaire.

Les modifications apportées pour traiter le modèle statique (dans \mathbb{R}^2) sont décrites ci-bas. Lorsqu'on fixe la fracture σ , l'énergie élastique prend la forme :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(\cdot, \sigma) : A_\sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

où A représente le tenseur de Lamé du matériau, i.e.

$$\forall e \in M_2\mathbb{R}, \quad Ae = \lambda \operatorname{tr}(e)I_2 + 2\mu e,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau; et l'ensemble des déplacements admissibles A_σ est :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot v \text{ sur } \sigma \right\},$$

avec u^+ et u les restrictions de u aux régions Ω^+ et Ω^- respectivement (obtenues par extension de la fracture σ de façon à ce qu'elle soit traversante [Bal20, p.52]). v (normale à la fracture orientée du bord vers le centre de Ω) et v . On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-) \cdot v \geq 0 \text{ sur } \sigma$$

L'énergie totale s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx + k\mathcal{H}^1(\sigma), \end{aligned}$$

où Σ représentent l'ensemble les segments orientés partant de la frontière donnée par

$$\Sigma = \left\{ [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \bar{\Omega},]a, b[\in \Omega \right\}.$$

Une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple (u, σ) qui vérifie

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Ensuite, BALASOIU remarque que la solution n'est pas unique. Il définit donc un problème de d'évolution quasi-statique à la manière de [FM98], en considérant un problème de chargement monotone :

$$U_D(t) = tU_D.$$

On note $\bar{\Sigma}$ l'ensemble des lignes brisées de Ω , sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également $\text{end}(\sigma)$ la fin d'une ligne brisée $\sigma \in \bar{\Sigma}$. On définit maintenant [Bal20, p.50], pour toute ligne brisée $\sigma \in \bar{\Sigma}$ l'ensemble des fractures admissibles partant de σ :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \left\{ \sigma \cup [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a = \text{end}(\sigma), b \in \bar{\Omega},]a, b[\in \Omega \setminus \sigma \right\}.$$

On définit également l'ensemble des déplacements admissibles associés :

$$A_{t,\sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma \mathbb{R}^2) \mid u = tU_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot v \text{ sur } \sigma \right\},$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et pour toute ligne brisée σ . De ces définitions, on peut en exhiber un problème d'évolution discret, et un problème d'évolution continue en faisant tendre t vers 0. Le problème d'évolution continue admet des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets [DMT02; Cha03].

Lorsque la fracture est fixée, BALASOIU prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation, en utilisant la théorie des inégalités variationnelles, l'inégalité de Korn [Cia88], le théorème de Lions-Stampacchia [LS67]. Pour le cas statique, il montre que le problème statique a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, ceci en se servant principalement de la convergence de Mosco. Pour le modèle quasi-statique, un résultat d'existence n'a pas été trouvé, et une conjecture pour une ligne brisée qui possède un point d'auto-intersection a été proposée.

1.3.3 Étude asymptotique dun réseau de ressorts régulier

Dans ce chapitre, BALASOIU souhaite approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous étudions que l'état dééquilibre du réseau de ressorts.

Commencons par quelques définitions pour le maillage sur un floe. Pour définir un réseau de ressort τ , on définit l'ensemble de ses points τ_0 disposées en forme de grille.

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2$$

De façon similaire, l'ensemble des arêtes se nomme τ_1 , et l'ensemble des cellules τ_2 . Le réseau τ est obtenu à partir de τ_0 en traçant les côtés de chaque carré ; à la frontière, on trace les diagonales des carrés incomplets. On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de τ_0 dans \mathbb{R}^2 . On définit également deux triangulations de ω à partir de τ , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions $e_x + e_y$ et $e_x - e_y$. On note ces triangulations $\tilde{\tau}$ et $\hat{\tau}$ respectivement. Afin d'éviter les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point, on définit avec l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$

Sur chaque arête $v \in \tau_1$, on place un ressort de longueur à vide $l_v = |v|$, et de raideur k_v (voir figure 1.10a). Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressorts, et $u = \varphi - \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{v \in \tau_1} \frac{k_v}{2} (|\varphi(v)| - |v|)^2. \end{aligned}$$

En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, d'angle de repos $\frac{\pi}{2}$, et de raideur $G|v|^2$ (voir figure 1.10b). L'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{v_1, v_2 \in c \cap \tau_1 \\ v_1 \cap v_2 \in \tau_0}} \frac{G|v|^2}{4} \left(\angle(\varphi(e_{v_1}), \varphi(e_{v_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. On note enfin

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale du réseau.

Ensuite, BALASOIU considère la suite τ_n de réseau défini, comme aux paragraphes précédents par

$$\tau_{n,0} = \Omega \cap \frac{1}{n} \mathbb{Z}^2.$$

On rappelle que k_1, k_2 représentent les constantes de raideurs des ressorts sur les arêtes du réseau dans les deux directions de Ω , et G la constante de torsion des ressorts aux nœuds. Sur le maillage τ_n , après définition des énergies redimensionnées élastiques de traction R_n , et de torsion T_n , [Bal20, p.91] montre les théorèmes suivants.

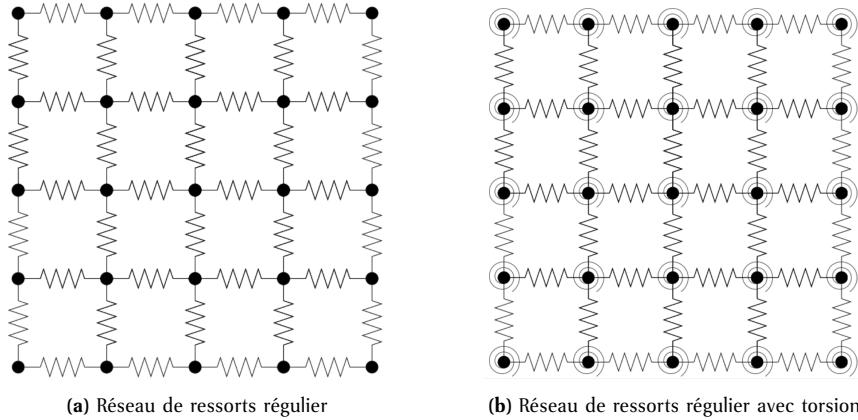


Figure 1.10 – Réseau de ressort considéré durant cette étude.

Theorème 1.3.1 (Γ -convergence). *La suite d'énergie redimensionnée $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge, pour la topologie faible de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, vers la fonctionnelle limite :*

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h e(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

avec C_h le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie :

$$C_{h,ijkl}M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2,$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si l'on a $k_1 = k_2 = k = 8G$. Dans ce cas, on a :

$$E_{\text{el}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{\lambda,\mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

avec : $\lambda = 0$, et $\mu = \frac{k}{2}$.

Theorème 1.3.2 (Équi-coercivité). *Soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maillages du plan, et $(u_n) \in \mathbb{N}$ une suite de déplacements admissibles de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Le théorème 1.3.1 permet de constater que le tenseur de rigidité obtenu, lorsqu'il est isotrope, a un coefficient de Poisson nul¹³. BALASOIU a donc proposé un calcul formel de la limite simple de la suite d'énergies discrètes dans le cas où le réseau de ressorts serait stochastique, de loi isotrope. En particulier, il trouve dans ce cas un coefficient de Poisson fixe de 1/4.

1.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes

Le résumé du chapitre écrit dans [Bal20, p.136] est le suivant. Ce chapitre fait appel à des outils fin de probabilité conditionnelle et de processus stochastiques, telles que **mesure et formules de Campbell, distribution de Palm**,

13. Cela correspond par exemple à un étirement longitudinal du réseau de ressorts, sans effet (amincissement ou épaissement) sur la section transversale.

etc.

Dans ce chapitre, BALASOIU a construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. Il commence par donner plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui secrète comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules nous se montreront très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

La notion de processus ponctuel est un outil qui peut permettre de construire un ensemble de points dénombrable, sans point d'accumulation. BALASOIU définit un **processus stochastique simple de \mathbb{R}^d** comme : une variable aléatoire Φ d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans l'espace $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$. Elle induit une loi de probabilité \mathbb{P}_Φ sur $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$: l'espace $(\mathfrak{N}, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi)$ est un espace de probabilités. Dans cette définition, nous avons :

- \mathfrak{N} est ensemble des parties localement finies de \mathbb{R}^d . Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des motifs de points de \mathbb{R}^d ;
- \mathcal{N} est la plus petite tribu (sur \mathfrak{N}) qui rende mesurable les applications qui comptent le nombre de points du processus.

Une fois le processus défini, on peut définir sa **mesure d'intensité** Λ :

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ B &\mapsto \mathbb{E}(\Phi(B)) = \mathbb{E}(\text{Card } \Phi \cap B),\end{aligned}$$

où $\mathbb{E}(F)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $F : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

La première formule de Campbell permet de relier la moyenne d'une somme sur les points du processus avec l'intensité du processus. En effet, soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive, on a :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(x) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x).$$

Un processus stochastique ponctuel Φ est dit de Poisson (cf. figure 1.11) s'il vérifie les hypothèses suivantes :

1. Φ est à épargnelement indépendant, c'est à dire que si $(B_i)_{i \in 1, \dots, k}$ sont des boréliens deux à deux disjoints ; alors les variables aléatoires $\Phi(B_i)$ sont indépendantes ;
2. pour tout B borélien, la variable aléatoire $\Phi(B) = \text{Card } \Phi \cap B$ suit une loi de poisson de moyenne $\mu = \lambda \nu_d(B)$, c'est à dire que :

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu).$$

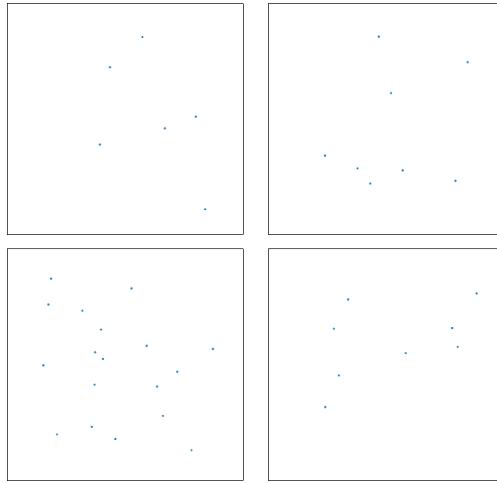


Figure 1.11 – Tirages dun processus de Poisson dintensité 10 sur le carré unité [Bal20, p.137]. En premier, le nombre de point est obtenu par une v.a. suivant une loi de Poisson d'espérance 10. Ensuite les coordonnées des points sont obtenus par simulation de deux v.a. suivant des lois uniformes [Keel8].

BALASOIU ne s'arrête pas là. Il définit aussi les notions d'espace Polonais, mesure de compatage, et de convergence faible dièse. Ces notions sont importante vu la nécessité d'associer un point du processus ponctuel à une marque, i.e. un simplexe de \mathbb{R}^d dans notre cas. BALASOIU introduit lea notions de mesure de Campbell, qui permet d'obtenir la seconde formule de Campbell. Ensuite il définit la distrbution de Palm, permettant ainsi d'obtenir la très importante formule de Campbell-Mecke :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).$$

où $f : \mathbb{R}^d \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est uine fonction, mesurable et positive. Lorsque le processus ponctuel Φ est stationnaire d'intensité λ , on a :

$$\int_{\mathfrak{N}} \sum_{x \in \Phi} f(x, \varphi_x) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathfrak{N}} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x).$$

où \mathbb{P}_0 désigne la distribution de Palm. Le résultant de Slynvayk-Mecke suivant est une généralisation de cette dernière formule, lorsque les processus Φ est de Poisson, et la fonction mesurable positive $f : (\mathbb{R}^d)^n \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi} f(x_1, \dots, x_n, \Phi) \right) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}(f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})) dx_1 \dots dx_n.$$

La prochaine etape consite en la présentation d'un **théorème ergodique** qui lie la forme globale dun seul tirage avec la forme moyenne en un point de plusieurs tirages. Ici aussi, BALASOIU se base sur les travaux de D. J. Daley et D. Vere-Jones [DVJ08].

Théorème 1.3.3. Soit Φ un processus de Poisson, et f une fonction mesurable et positive qui vérifie :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(\Phi_{-x}) \right) < +\infty.$$

On note B_n la boule de \mathbb{R}^d , centrée en 0 et de rayon n . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(B_n)} \sum_{x_i \in B_n \cap \Phi} f(\Phi_{-x_i}) = \int_{\mathfrak{N}} f(\varphi) d\mathbb{P}_0(x).$$

Ensuite, BALASOIU s'attaque aux notions de maillages et pavages, en particulier les **pavages de Voronoi** (cf. figure 1.12). Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permettra de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sûre si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Soit donc $\varphi \in \mathfrak{N}$ un ensemble localement fini de points. On appelle diagramme de Voronoi associé à φ le pavage régulier de \mathbb{R}^d par $(C(x))_{x \in \varphi}$ où la cellule $C(x)$ est définie par :

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(y, x) < \inf_{z \in \varphi \setminus \{x\}} \text{dist}(y, z) \right\}.$$

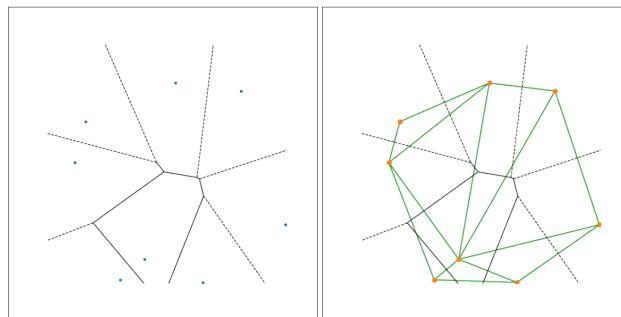


Figure 1.12 – Ensemble de points avec les diagramme de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) associés [Bal20, p.138].

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (cf. théorème 1.3.3), BALASOIU montre que si Φ est un processus de Poisson, alors les points de φ sont presque sûrement en **position générale**¹⁴. En corollaire, si φ est un ensemble de points en position générale, alors φ est l'ensemble des sommets du **maillage de Delaunay**¹⁵ D_φ construit sur le pavage de Voronoi V_φ .

Ce chapitre se termine par la notion de convergence d'une suite de maillages. BALASOIU montre que, si l'on dilate (cf. figure 1.13) le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtenons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Il a également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle sera utile dans le chapitre suivant, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

Soit donc $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, i.e. un ouvert connexe, de l'espace. Soit Φ un processus ponctuel de l'espace qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ une suite positive, croissante et divergente. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le processus ponctuel Φ_n par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt[d]{\lambda_n}} \Phi.$$

On note τ_n (cf. figure 1.13) le maillage par simplexe défini presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points $\Phi_n \cap D$:

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D},$$

ce qui permet d'obtenir le théorème suivant :

14. Voir définition 4.4.5 de la thèse [Bal20, p.128].

15. Une triangulation de Delaunay maximise le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles.

Theorème 1.3.4. Si la suite d'intensités $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n),$$

alors, presque sûrement, la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de maillages de D converge uniformément vers D .

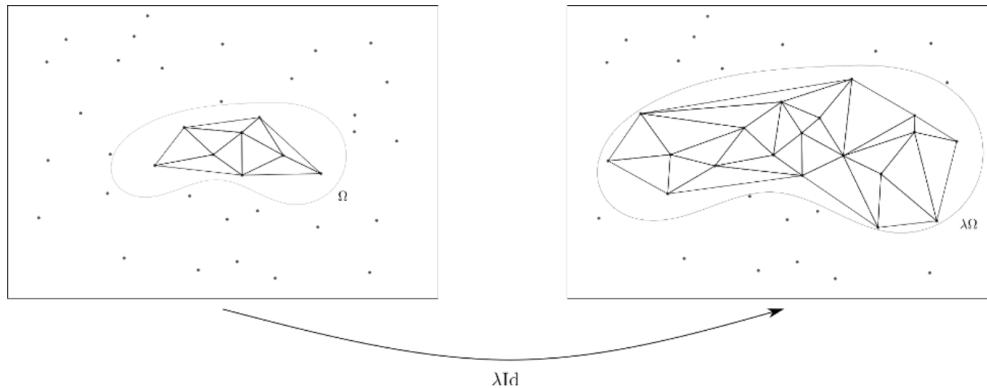


Figure 1.13 – Dilatation de l'ouvert D [Bal20, p.138].

1.3.5 Étude asymptotique dun réseau de ressorts isotrope

Dans cette partie, BALASOIU propose un second résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau de ressorts. Dans la partie précédente, il avait proposé un résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau régulier, à mailles carrées. Ici, les mailles seront triangulaires. Plus précisement Le réseau de ressorts que nous utiliserons dans ce chapitre est défini dans la section précédente, et repose sur la théorie des processus stochastiques ponctuels. Nous proposons dans ce chapitre un résultat de Γ -convergence de l'énergie élastique sur un réseau de ressorts, issu d'un processus stochastique de loi isotrope.

Présentons le réseau de ressorts utilisé pour approcher l'énergie élastique d'un matériau continu D . Il s'agit des mêmes définitions utilisées pour introduire le théorème 1.3.4 ci-haut, cette fois ci en dimension 2. On suppose que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine du plan, i.e. un ouvert du plan, qui est connexe et dont la frontière est lisse. On considère une triangulation quelconque τ du domaine D . On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'espace des éléments finis P_1 défini sur le maillage τ . On note, comme précédemment, $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\}.$$

On souhaite construire un réseau de ressorts sur τ tel que l'énergie totale E_τ soit équi-coercive. Mais puisque l'on utilisera des triangulations construites sur un processus de Poisson, la coercivité n'est pas assurée. Pour remédier à ce manque de coercivité, on va placer sur τ deux types de ressorts : des **ressorts de traction** et des **ressorts de torsion**. Les constantes de raideur des ressorts de traction et de torsion dépendent des angles du triangle de base des ressorts, et elles tendent vers l'infini si l'angle correspondant tend vers 0. Les constantes de rigidité des réseaux de ressorts sont supposées constantes. On note, comme au chapitres précédents, R_τ l'énergie du réseau de ressorts de traction, et T_τ l'énergie du réseau de ressorts de torsion. On note de plus :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale sur le réseau τ . On note également, pour tout triangle $t \in \tau_2$ du maillage, v_1 , v_2 et v_3 ses trois cotés, ainsi que θ_1 , θ_2 et θ_3 les trois angles opposés (voir figure 1.14a).

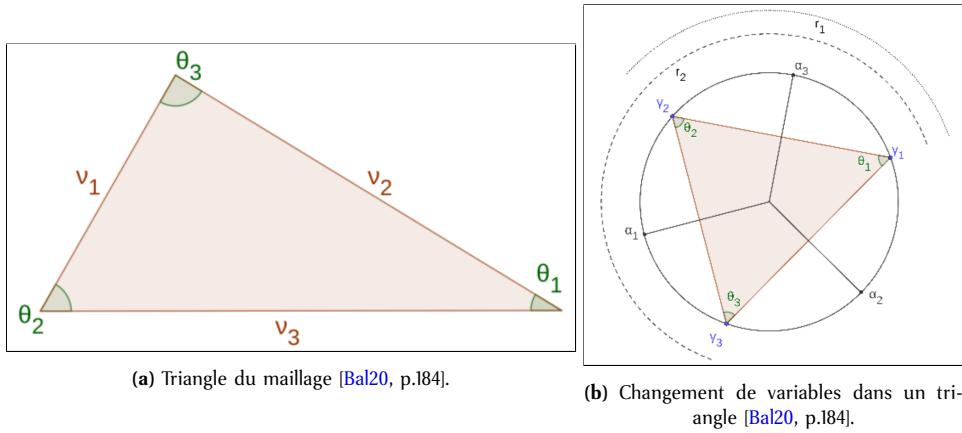


Figure 1.14 – Illustration des éléments du maillages, et des coordonnées.

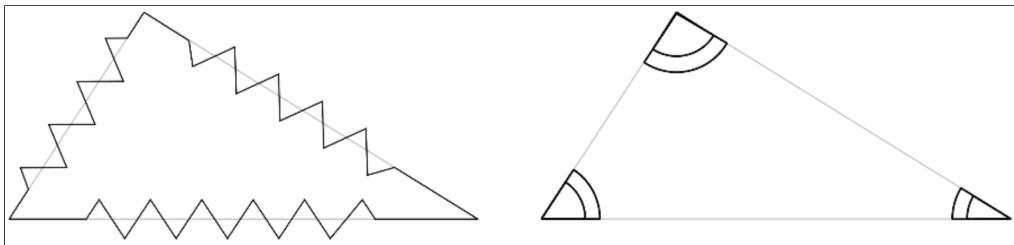


Figure 1.15 – Ressorts de traction (à gauche) et de torsion (à droite) [Bal20, p.184].

On commence par définir l'énergie élastique du réseau de ressorts de traction R_τ , et on renvoie à la figure 1.15. On note $k > 0$ la constante de rigidité du réseau. On place, sur chaque arête v_i de chaque triangle t du maillage, un ressort de traction de longueur à vide $l_i = |v_i|$ et de raideur k_i , avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad k_i = \frac{k}{\sin(\theta_i)}.$$

Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressort, et $u = \varphi - \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$R_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k|v_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} (\|\nabla \varphi e_{v_i}\| - 1)^2.$$

On définit maintenant l'énergie T_τ , et on renvoie aux figures 1.14b et 1.15. On note $G > 0$ la constante de rigidité de torsion du réseau. On place, sur chaque angle θ_i de chaque triangle t du maillage, un ressort de torsion de raideur G_i :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_i = \frac{G|v_{i+1}| |v_{i+2}|}{\sin(\theta_i)}.$$

On définit l'énergie élastique discrète de l'assemblage :

$$T_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G|v_{i+1}| |v_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} (\angle(\varphi(v_{i+1}), v_{i+2}) - \angle(v_{i+1}, v_{i+2}))^2,$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. Ensuite, on étend les énergies élastiques définies sur les réseaux à $H^1(D, \mathbb{R}^2)$, en notant :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) \text{ si } u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon ,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) \text{ si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon ,} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit maintenant la suite dénergies élastiques définies sur la suite des réseaux $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On introduit un changement déchelle des énergies $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive qui tend vers 0. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u), \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n$$

On donne enfin une version modifiée des suites fonctionnelles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui prenne en compte une condition de Dirichlet sur le bord de D . Soit donc $v \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la donnée du bord. On note :

$$W_n^v(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \tau_0, \text{ dist}(p, \partial D) \leq \lambda_n, u(p) = v(p) \right\}.$$

On pose ensuite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) \text{ si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon ,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) \text{ si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon ,} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que

$$E_n^v = R_n^v + T_n^v.$$

On énonce maintenant les trois théorèmes principaux du chapitre.

Theorème 1.3.5 (Convergence simple). *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, il existe une suite de déplacements discrets $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

et qui vérifie de plus :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} E_s(u)$$

avec :

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda, \mu} e : e = \lambda \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(e)^2,$$

avec λ et μ les premières et deuxièmes constantes de Lamé, qui valent :

$$\lambda = \frac{32k|A|}{9\pi^2} + \frac{3G|A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k|A|}{9\pi^2} - \frac{3G|A|}{4}$$

Theorème 1.3.6 (Γ -convergence). Supposons que la suite de changements déchelle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

Alors, la suite de fonctionnelles redimensionnées $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle $E_{\text{hom}} : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$E_{\text{hom}}(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon ,} \end{cases}$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda_h, \mu_h} e : e = \lambda_h \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu_h \operatorname{tr}(e)^2.$$

De plus, pour toute donnée au bord v dans $\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, la suite de fonctionnelles $(E_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle $E_{\text{hom}}^v : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$E_{\text{hom}}^v(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u - v \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

Theorème 1.3.7 (Équi-coercivité). Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maillages du plan et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de déplacements admissibles de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, i.e. vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacements est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

1.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur

Ce dernier chapitre propose un résultat de quasi-staticité d'un réseau de ressorts percuté par un objet ponctuel lorsque la raideur du système et sa masse totale tendent vers l'infini. Lors de la collision de floes de glaces, la vitesse relative des floes (de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres par seconde, voir [Ram+09]) est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace (de l'ordre de grandeur de 1800 mètres par seconde pour les ondes de cisaillement, voir [Mar+19]). BALASOIU montre que, lors de la percussion d'un réseau masse-ressort par un objet solide, les effets dynamiques disparaissent lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini. Autrement dit, nous montrons que le réseau limite, de raideur infinie, est à chaque instant dans un état dééquilibré. Plus précisément, nous observerons que le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit **système intérieur** (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Le second, dit **système extérieur** (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts.

On étudie le phénomène de percussion d'un système masse-ressort de $n+1$ particules, chacune de masse m , par un objet ponctuel P de masse M . Le système masse-ressort utilisé est de constante de raideur $k > 0$, et de constante de viscosité $\mu > 0$. Soit $\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ une triangulation compacte et connexe du plan. En chaque

noeud $q \in \tau_0$, on place une masse ponctuelle m . Sur chaque arrête $\omega \in \tau_1$ de τ , on place en parallèle (voir figure 1.16) :

1. un ressort de longueur à l'équilibre ω et de raideur k ,
2. un dissipateur visqueux, de viscosité μ .

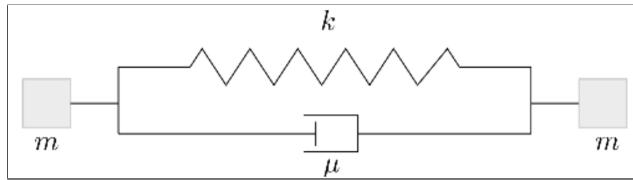


Figure 1.16 – Système élémentaire masse-ressort utilisé.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système masse-ressorts est à l'équilibre, et qu'il est percuté par la masse ponctuelle P au point $q_0 \in \partial\tau_0$. On note v_0 la vitesse du point P lors de la collision. On suppose également que le système $\{q_0, P\}$ devient inséparable, de masse $m + M$. Sur le maillage τ , on note τ_0 l'ensemble des noeuds du système. On a donc :

$$\tau_0 = \{q_0, \dots, q_n\},$$

où les q_i sont les coordonnées des masses. On rappelle que le système est à l'équilibre au temps $t = 0$. On note $a, b \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbb{R})$ les vecteurs de positions et vitesses initiales définis par :

$$\begin{cases} a = (q_0(0), \dots, q_n(0)), \\ b = (v_0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

On note de plus $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de connectivité :

$$0 \leq i < j \leq n + 1, C_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } q_i \in \mathcal{V}(q_j), \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{V}(q)$ désigne l'ensemble des voisins de la particule $q \in \tau_0$. On note encore $L_{ij} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de longueurs à l'équilibre dont l'expression est déduite de ; et u_{ij} le vecteur unitaire (s'il existe) dans la direction de l'arête entre q_i et q_j . On obtient le système différentiel suivant en appliquant l'équation d'Euler-Newton sur les moments linéaires, et en exprimant la force de frottement du dispositif visqueux en fonction de \dot{q} :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\frac{k}{M+m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \frac{\mu}{M+m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & (\text{SE}) \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[\frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n. & (\text{SI}) \end{cases} \quad (E)$$

D'un point de vue énergétique, on a une loi de conservation de l'énergie suivante :

$$E_{\text{el}}(t) + E_c(t) + E_r(t) = E_0$$

où $E_{\text{el}}(t)$, E_c , et E_r désignent respectivement l'énergie élastique du système, l'énergie cinétique, et l'énergie dissipée par les frottements visqueux [Bal20, p.188]. E_0 désigne l'énergie initiale du système donnée par

$$E_0 = \frac{1}{2}(M+m)\|\mathbf{v}_0\|^2.$$

Sous ces hypothèses et ces définitions, BALASOIU obtient le théorème d'existence globale suivant.

Theorème 1.3.8 (Existence d'une solution globale). *On suppose que les conditions initiales adjointes au système équation (E) vérifient la condition énergétique :*

$$E_0 < \frac{k}{4} \left(\inf_{\omega \in \tau_1} |\omega| \right)^2.$$

Alors, le problème de Cauchy est bien posé¹⁶ et ses solutions sont globales.

Ensuite, afin d'obtenir un système à grande raideur et de supprimer la perturbations liées à la propagation des ondes élastiques, BALASOIU introduit une dépendance en ε des constantes physiques du système : k_ε , M_ε et μ_ε . En posant

$$k_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon}, \quad M_\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^2}, \quad \mu_\varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

le système masse-ressort se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\frac{k}{M + \varepsilon^2 m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \varepsilon \frac{\mu}{M + \varepsilon^2 m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], \\ \varepsilon^2 \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[\frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_\varepsilon)$$

On écrit également le système limite :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \frac{k}{M} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} \\ \mathbf{0} = \sum_{j=0}^n C_{ij} \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_{lim})$$

Ce problème est un problème de perturbation singulière, pour lequel BALASOIU prouve le théorème de limite quasi-statique ci-bas (en se servant principalement du théorème classique de A.N.Tikhonov [Tik52 ; Hop66]).

Theorème 1.3.9 (Limite quasi-statique). *Les solutions \mathbf{q}_ε et \mathbf{q} respectivement des systèmes perturbé équation (E _{ε}) et limite équation (E_{lim}) munis des conditions initiales¹⁷ existent, sont uniques, et globales. De plus, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Du point de vue numérique, les simulations ont permis de comprendre l'influence des différents paramètres physiques présents (masse des deux objets, raideur des ressorts, vitesse d'impact ...). De plus, le code Python et HTML/CSS développé fournira une bonne base pour analyser la localisation des vecteurs propres du système dynamique et identifier ceux qui agissent sur un déplacement du bord. Le principal résultat numérique utilisé est le suivant. À $\varepsilon > 0$ fixé, on note $(\lambda_i(\varepsilon))_{i \in \{0, \dots, 4n+3\}}$ les valeurs propres de l'opérateur associé à la linéarisation du système équation (E _{ε}) autour de sa position dééquilibre, et on les ordonne ainsi :

$$0 \geq \Re(\lambda_8(\varepsilon)) \geq \Re(\lambda_9(\varepsilon)) \geq \dots \geq \Re(\lambda_{4n+3}(\varepsilon)).$$

Nous définissons le saut spectral associé au système équation (E _{ε}) de la manière suivante :

$$\nu_\varepsilon = \frac{\Re(\lambda_{12}(\varepsilon))}{\Re(\lambda_{11}(\varepsilon))}.$$

16. Le système est bien posé si deux particules voisines restent à une distance $c > 0$ l'une de l'autre.

17. Des conditions initiales satisfaisant le théorème 1.3.8.

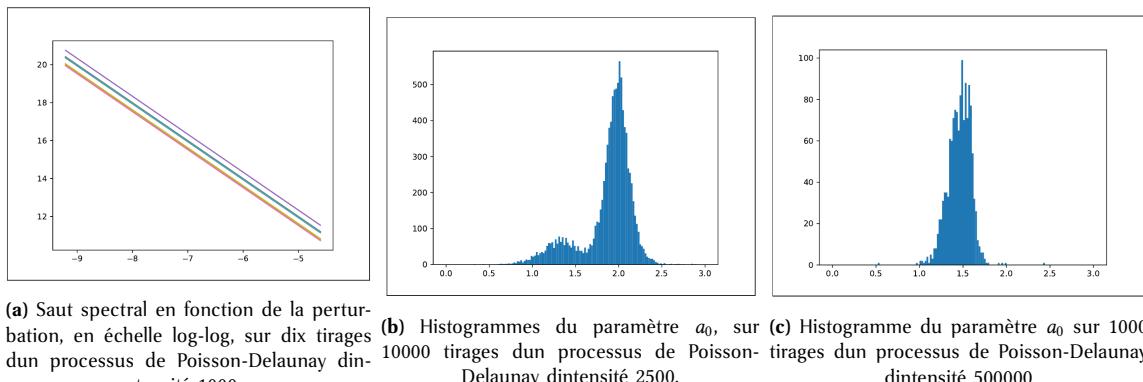
Ce saut représente l'écart entre les quatre premières valeurs propres non nulles du système, qui correspondent au système lent (SE), et la première valeur propre du système rapide (SI). Après avoir tracé le saut spectral ν_ϵ pour différentes triangulations τ (cf. figure 1.17a pour un exemple), BALASOIU constate qu'il s'agit de droites dont la pentes ne dépendent ni du tirage, ni de l'intensité du processus de Poisson-Delaunay. Il propose donc l'expression suivante pour ν_ϵ :

$$\ln(\nu_\epsilon) = a_0(\tau) + \alpha \ln(\epsilon),$$

avec $a_0(\tau)$ une quantité qui dépend du maillage τ , et α une constante universelle, indépendante de τ et ϵ numériquement estimée à la valeur :

$$\alpha = 2 \pm 10^3.$$

La figure 1.17c ci-dessous a été obtenue, pour un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500000, l'histogramme de la valeur de a_0 associée sur 1000 tirages.



(a) Saut spectral en fonction de la perturbation, en échelle log-log, sur dix tirages dun processus de Poisson-Delaunay dintensité 1000.
(b) Histogrammes du paramètre a_0 , sur 10000 tirages dun processus de Poisson-Delaunay dintensité 2500.
(c) Histogramme du paramètre a_0 sur 10000 tirages dun processus de Poisson-Delaunay dintensité 500000

Figure 1.17 – Principaux résultats numériques obtenus [Bal20, p.199].

Ces résultats semblent indiquer, à grande échelle au moins, que $a_0(\tau)$ prend ses valeurs entre 0.9 et 2.5. Nous observons également l'émergence de deux pics pour certaines intensités. Il semblerait que le pic de valeur moyenne la plus faible gagne en fréquence de représentation, jusqu'à concentrer la quasi-totalité des cas pour l'intensité de 500000.

1.3.7 Discussion et questions ouvertes

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse pour limiter la complexité du modèle. Ces simplifications sont à l'origine de simplifications que nous précisons ci bas :

1. Le modèle suppose que les floes sont dépaisseur négligeable devant leur extension horizontale ; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.
2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites [Bal20, chp.2].
3. Au chapitre 6 [Bal20, p.187], il serait également intéressant d'intégrer, comme dans les chapitres 3, 4, et 5, des ressorts de torsion en chaque noeud du système masse-ressort [Bal20, p.187].
4. Au chapitre 5 BALASOIU, p.183, BALASOIU a montré que la suite d'énergies élastiques Γ -converge vers une énergie limite. De plus, lorsque le redimensionnement est suffisamment rapide, il a montré que la Γ -limite secrète comme l'énergie d'un matériau élastique homogène et isotrope, soumis à l'hypothèse des petits déplacements. Cette énergie dépend donc de deux paramètres, les deux constantes de Lamé du matériau homogénéisé. Il serait intéressant d'adapter l'étude numérique [OSAJ95] pour obtenir une expression des constantes de Lamé homogénéisées dans notre cas.
5. Il reste, à l'issue de la thèse, à obtenir une seconde limite spatiale. Cette limite est une limite de couche, qui indiquerait l'expression du déplacement au bord du floe lors de la percusion. Nous pourrions l'obtenir en sélectionnant les vecteurs propres du système dynamique masse-ressorts qui influent sur le comportement d'une couche mince du bord du floe [Bal20, p.201].

6. Dans une prochaine étude, on pourrait étudier la percussion du système masse-ressort par un objet solide non ponctuel et qui ne serait pas fixé au système étudié. BALASOIU pense que le cas général peut se déduire du cas étudié au chapitre 6 [Bal20, p.187]. En effet, l'étude de la percussion complète reviendrait à ajouter, dans le système différentiel étudié, un nombre fini de perturbations singulières à des instants distincts.

Chapitre 2

Travaux et apports

2.1 Les missions du poste

- L'état de l'art de la partie précédente fait partie des missions.
- Modélisation
- Simulation

Nous souhaitons étudier le comportement mécanique d'un floe après collision avec un autre floe. Les étapes de travail envisagées sont les suivantes :

1. Ecire les systèmes differentiels pour les deux floes juste après le choc : pour l' instant on peut considérer que l'un des floes est immobile (celà revient au même si l'on exprimes les vitesses dans un repère lié à ce floe).
2. On exprime l'EDO vérifiée par les solutions, c'est à dire q pour le premier floes, et p pour le second.
3. On pourra ensuite simuler ces EDP limites et trouver les valeurs de p et q . Autrement dit, on connaît la position de chaque point du réseau au temps final.
4. Si on connaît p et/ou q , on connaît la condition de Dirichlet sur le floe concerné, et on peut ainsi exprimer le déplacement et la possible fracture du floe.

2.2 Présentation des résultats obtenus

2.2.1 Modélisation générale du contact entre deux floes de glace

Les floes de glace Ω_k et Ω_l sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une moélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliés par des ressorts (de constante de raideur k), et par des dispositifs visqueux de constante μ . Nous désignerons par $n + 1$ le nombre total de noeuds du floe Ω_k , chaque noeud ayant pour masse m . De façon similaire, on définit les constantes k' , μ' , $n' + 1$, $m' + 1$ pour le floe Ω_l . Les positions des noeds de Ω_k seront noté $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$, tandis que ceux de Ω_l seront notés $(p_i)_{0 \leq i \leq n'}$ (voir figure 2.1).

On définit la matrice de contact C ... (voir these Dimitri), et $L_{0j}..$ et $u_{0j} ..$

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisont le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe Ω_k ,

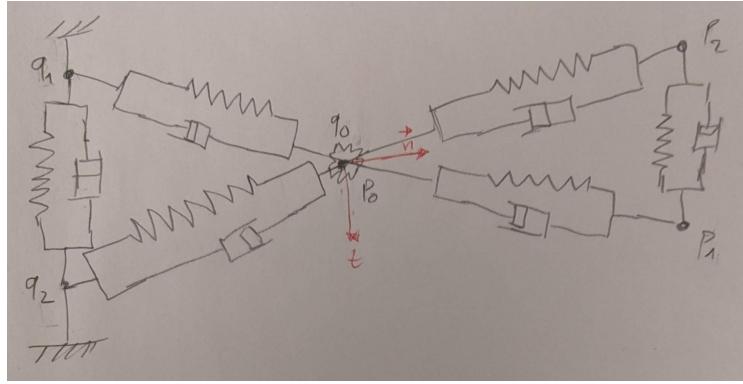


Figure 2.1 – Contact entre deux floes aux points $p_0 = q_0$.

nous écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire¹ au point de contact q_0 :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (2.1)$$

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\underbrace{k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (2.2)$$

représente la somme des forces de réaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud q_0 ; et $\mathbf{F}_0^c(t)$ la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ associé au floe Ω_k (voir figure 2.1), on peut écrire, pour $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (2.3)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations équations (2.1) à (2.3). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad (E)$$

En ce qui concerne le floe Ω_l , nous procédons de façon similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n'. \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad (E')$$

où $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$ sont définis de façon similaire à \mathbf{F}_0 (voir équation (2.2)).

Ensuite, il nous faut introduire des conditions portant sur la conservation de l'énergie, et la condition de non-interpénétration de Signorini...

1. La rotation du point matériel q_0 n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

2.2.2 Modélisation et simulation 1D

2.2.2.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

Avant d'entamer la question de la percussion, étudions le comportement d'un floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif viseux, et 2 noeuds) (voir figure 2.2).

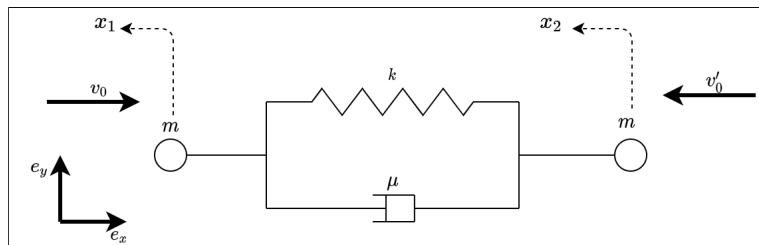
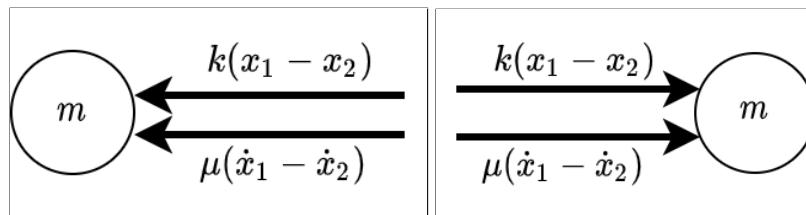


Figure 2.2 – Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Les variables x_1 et x_2 traduisent les déplacements des noeuds de gauche et de droite respectifs.

À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses v_0 et v'_0 indiquées.



(a) Sur la masse m de gauche.

(b) Sur la masse m de droite.

Figure 2.3 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple juste après l'instant initial, on a $x_1 > 0$, et $x_2 < 0$ d'où $k(x_1 - x_2) > 0$).

Un bilan des forces effectué sur les deux noeuds du floe (voir figure 2.3) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (2.4)$$

En remarquant que $m \neq 0$, on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_B + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_C. \quad (2.5)$$

On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$, et on reprend la condition initiale pour obtenir le système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (2.6)$$

La solution numérique est présentée dans à la figure 2.4 (voir fichier `code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb` pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque $v_0 \neq v'_0$, les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements diverge.

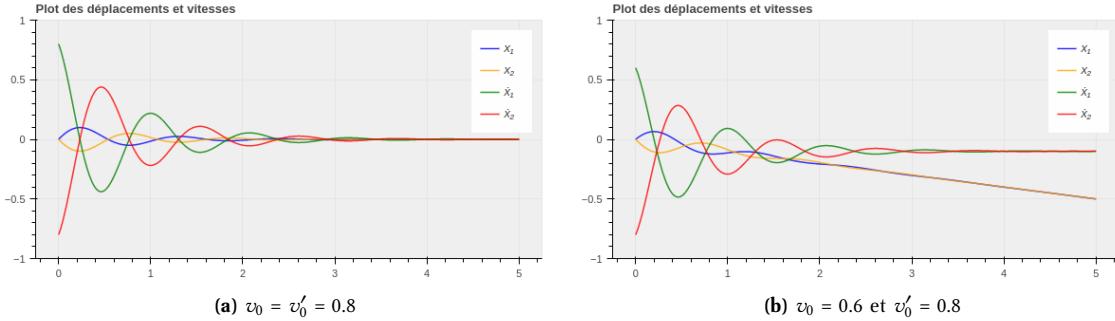


Figure 2.4 – Simulation du déplacement 1D d'un floe avec $m = 1$, $k = 18$, $\mu = 1.3$, $t_f = 5$. En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ lorsque $v_0 = v'_0$.

Avec $t_0 = 0$, la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par :

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (2.7)$$

Nous obtenons le théorème suivant :

Theorème 2.2.1 (Convergence du modèle 1D isolé). *Les déplacements x_1 et x_2 des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.*

Démonstration. Le calcul des solution analytique est plus délicat. Il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice E . Pour cela, nous devons diagonaliser (ou du moins trogonaliser) la matrice E . Son polynôme caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k). \end{aligned}$$

Posons $\Delta = 4\mu^2 - 8km$. On distingue deux cas :

- Si $\Delta \geq 0$: on pose $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$ et $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$;
- Si $\Delta < 0$: on pose $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ et $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$.

Nous avons donc exhiber les trois valeurs propres de notre matrice : $\lambda_0 = 0$, λ_1 , et λ_2 . Avec λ désignant l'une des valeurs propres, on recherche les vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ appartenant aux sous espaces

propres E_λ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0 \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

— Pour $\lambda = 0$, l'équation (2.8) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$, avec $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$.

— Pour $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$, on remarque que $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$. L'équation (2.8) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$, avec $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$; et $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$ avec $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$.

La meutilisicté arithmetique de $\lambda = 0$ est différente de sa multiplicité géométrique. La matrice E n'est donc pas diagonalisable. Son polynome caractéristique étant scindé, nous allons la trigonaliser. On pose donc une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dans laquelle la matrice E s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^4 (notée \mathcal{B}) à \mathcal{B}' . On a :

- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_1 s'écrit $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_1 = 0$. v_1 est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ dans \mathcal{B} ;
- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_2 s'écrit $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_2 = av_1$. On retourne dans \mathcal{B} en posant $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = a \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Avec $a = 1$, on écrit $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$.

- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_3 s'écrit $v_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_1 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$. En posant $b = d = 0$, v_1 devient un vecteur propre associé à λ_1 et on prend $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$ dans \mathcal{B} ;
- De façon similaire, on obtient $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ en posant $c = e = f = 0$.

Nous avons donc trigonaliser la matrice E , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente $A = D + N$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $E = P(D + N)P^{-1}$, nous pouvons facilemtn calculer, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN)P^{-1}$. Ce calcul délicat donne (à l'aide du logiciel de calcul symbolique Symbolab) :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons nous que la solution du problème de Cauchy équation (2.6) est donnée par $Y(t) = \exp(tE)Y_0$, avec $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$. Le calcul du déplacement x_1 donne :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} (v_0 + v'_0). \quad (2.9)$$

Le cas où $\Delta < 0$ (dans \mathbb{C}) peut se ramener au cas réel (dans \mathbb{R}) en posant $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$ (avec $\alpha = -\frac{\mu}{m}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{2km-\mu^2}}{m}$). En remarquant que $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$, on obtient :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0). \quad (2.10)$$

Les équations (2.9) et (2.10) permettent d'observer que le déplacement x_1 ne converge pas lorsque $t \rightarrow +\infty$, à moins que $v_0 = v'_0$, ce qui est observé à la figure 2.4. On tire les mêmes conclusions pour x_2 en effectuant un raisonnement similaire.

□

2.2.2.2 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse v_0 . On identifie les nuds q_0 et p_0 de la section précédente à leur masses respectives m et m' (voir figure 2.5).

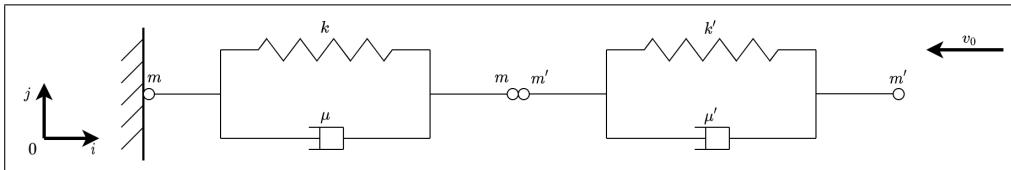


Figure 2.5 – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses m et m' en contact forment une seule masse² $m + m'$ dont le déplacement est donné par la variable $x_1(t)$. Le déplacement de la masse m' à l'autre bout du floe percuteur est nommé $x_2(t)$. La masse m qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.

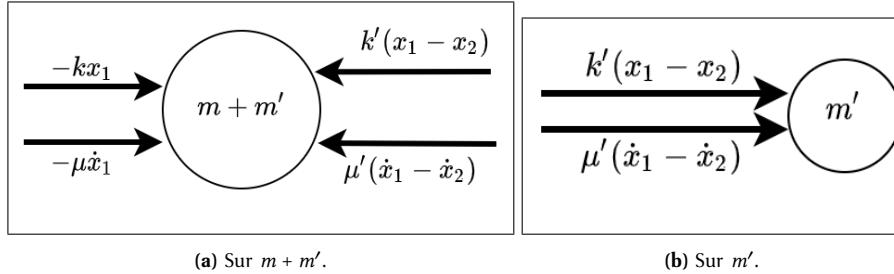


Figure 2.6 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ($v_0 < 0$ et donc $x_1 < 0$). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort k' , on peut imaginer x_1 immobile (on aura $x_2 < 0$, d'où $x_1 - x_2 > 0$) (voir [Hol0]).

En orientant convenablement le système (voir figure 2.5), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales³ :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (2.11)$$

À l'instant initial t_0 , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (2.12)$$

En posant $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, l'équation (2.12) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B'\dot{X}(t) + C'X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (2.14)$$

avec $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$.

Il s'agit d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons-le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$ et le système 2.14 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (2.15)$$

2. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.

3. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de x_1 est-elle vraiment nulle ?

avec la matrice par blocs

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

où I_2 désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Avec $t_0 = 0$, la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0 \quad (2.16)$$

La résolution numérique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice $E \in \mathbb{R}^4$ (VOIR figure ci-bas et NOTEBOOK) ...

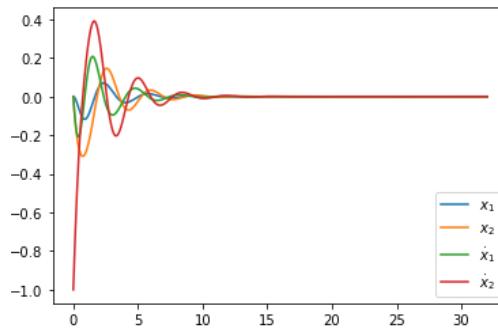


Figure 2.7 – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec $m = 1$, $m' = 1$, $k = 16$, $k' = 5$, $\mu = 6$, $\mu' = 2$, $v_0 = -1.0$, $t_f = 32$. On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$.

Pour certaines valeurs (spécifiquement de μ et μ'), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$. Il nous reste dans cette section :

1. Calculer analytiquement et numériquement tous les état d'équilibres $Y_{eq} \in \ker(E)$; distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice E , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les paramètres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

2.2.2.3 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé dans cette section. On obtient donc une troisième variable x_3 décrivant le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 2.8. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 2.9.

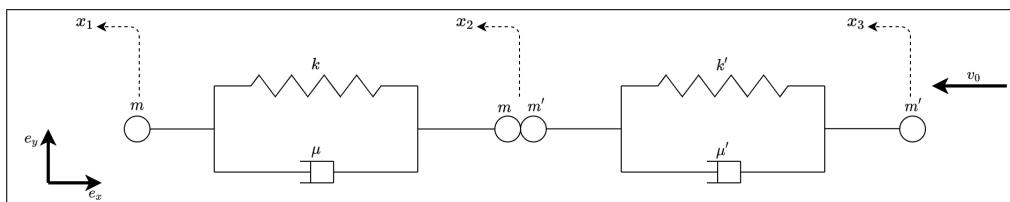


Figure 2.8 – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables x_1 , x_2 , et x_3 décrivant les mouvements de chaque noeud.

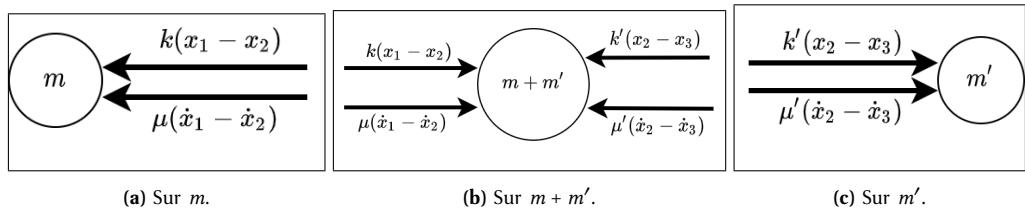


Figure 2.9 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 2.6 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (2.17)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible. En posant $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, le système d'EDO revient à l'équation (2.19) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (2.19)$$

où $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$. On pose ensuite $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$ et le système équation (2.19) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (2.20)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 2.5), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble $m + m'$ après collision et fixation de la masse m' (à vitesse v_0) sur la masse m (de vitesse nulle). Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée v_f , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées P_{avant} et $P_{\text{après}}$. On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2mv_0 + 2m'v'_0 &= (2m + 2m')v_f \\ \Rightarrow v_f &= \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (2.20) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure figure 2.10.

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = E Y(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (2.21)$$

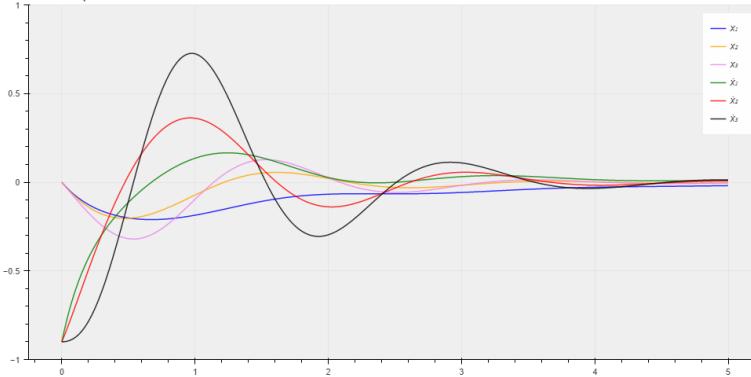


Figure 2.10 – Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec $m = 1$, $m' = 1$, $k = 3$, $k' = 22$, $\mu = 6$, $\mu' = 2$, $v_0 = -1.8$, $t_f = 5$. On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

2.2.2.4 Collision inélastique avec séparation des masses

Repprenons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps $\delta t^* = [t\text{moins}, t\text{plus}]$ de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses m et m' en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 2.5 et 2.8), et nous le présentons à la figure 2.11 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 2.12.

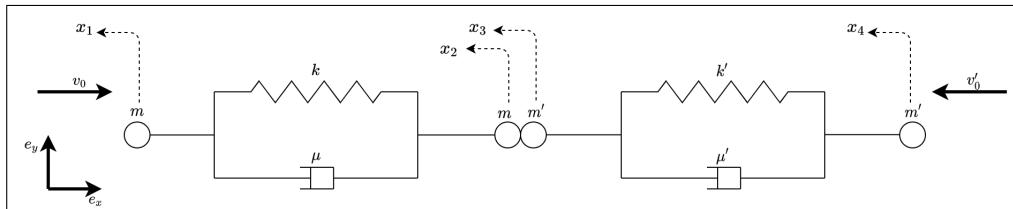


Figure 2.11 – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les nuds m et m' en contact sont étudiés séparément. On représente les variables x_1 , x_2 , x_3 , et x_4 décrivant les mouvements de chaque noeud.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (2.22)$$

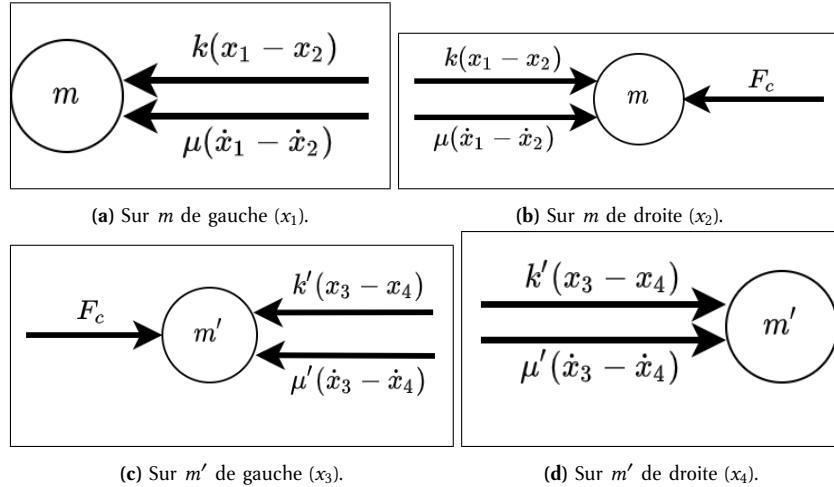


Figure 2.12 – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 2.6 et 2.9 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces. F_c représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de x_2 et x_3 pour éliminer la force de contact F_c et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), \end{cases} \quad (2.23a)$$

$$m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \quad (2.23b)$$

$$(2.23c)$$

Remarquons que ce système reviens au même système étudié dans la partie précédente en posant $x_2(t) = x_3(t)$ p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses m et m' peuvent être étudiées comme une unique masse $m + m'$. La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble $m + m'$. Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses $\dot{x}_1(t^+)$, $\dot{x}_2(t^+)$, $\dot{x}_3(t^+)$ et $\dot{x}_4(t^+)$ immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (2.20)), nous réutilisons les quantités \dot{x}_1 et \dot{x}_4 données par ce système (l'équation (2.20) dans lequel x_2 et x_3 sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car x_1 et x_4 n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$ est aussi calculé suivant le modèle équation (2.20) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnues dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons l'équation (2.23b) entre les instants t^- et t^+ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_{I}. \quad (2.24)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$ et $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$ les vitesses des noeuds en contact avant collision, et $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$ et $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$ les vitesses après contact. L'équation équation (2.24) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (2.25)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution ϵ^4 . On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 2.13.

4. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

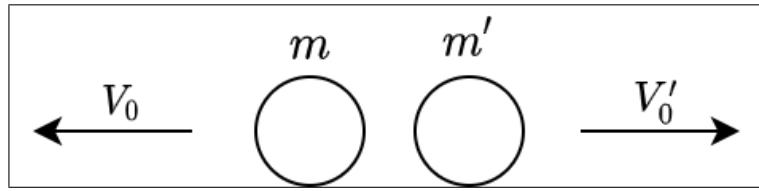


Figure 2.13 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (2.26) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (2.26)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (2.25) et (2.26) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m + \varepsilon m')v_0 + (1 - \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 - \varepsilon)m v_0 + (m' + \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (2.27)$$

Nous faisons donc ici la grosse hypothèse que le mouvement de x_2 et x_3 devient uniforme après la collision. Une fois leur vitesses "initiales"⁵ obtenues, on calcule donc les déplacements des différents noeuds des réseaux, et les fractures éventuelles qui s'en suivent.

Analyse du modèle. Observons le premier floe de plus près :

- Son noeud de gauche x_1 a pour vitesse v_0 avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc ;
- Son noeud de droite x_2 a pour vitesse v_0 avant le choc, mais passe de façon discontinue à V_0 après le choc.

N'ayant aucune garantie que les vecteurs vitesses v_0 et V_0 seront opposés immédiatement après le choc, nous ne pouvons garantir la convergence de ce modèle (voir théorème 2.2.1). Ce modèle dégénère (probablement) après la première collision. Effectuons à présent une modélisation 2D et observons si le même problème se repète.

2.2.3 Modélisation et simulation 2D

2.2.3.1 Déplacement d'un floe isolé

Étudions le comportement d'un floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts (3 ressort, 3 dispositif viseux, et 3 noeuds) (voir figure 2.14).

Comme nous l'avons présenté aux équations (2.2) et (E), le système de la figure 2.14 est régit par l'équation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} [k(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij}], \quad (2.28)$$

où L_{ij} représente la longeur au repos du ressort entre les noeuds i et j , et C_{ij} indique si les noeuds i et j sont connectés ou non (pour ce modèle 2D simple, $C_{ij} = 1 \forall 0 \leq i, j \leq 2$). Le vecteur unitaire \mathbf{u}_{ij} vaut :

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

5. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour le deuxième phase de la percussion.

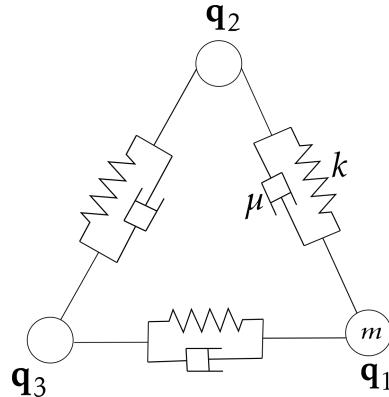


Figure 2.14 – Floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Tous les noeuds du réseau ont la même masse m , tous les ressorts ont la même raideur k , et tous les dispositifs visqueux ont le même coefficient μ .

Simulation par un schéma d'Euler explicite. On discrétise par un schéma de différence finies avec $N+1$ pas de temps, et pour une temps de simulations T :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n = n\Delta t = n\frac{T}{N}, \quad \mathbf{q}_i(t^n) \approx \mathbf{q}_i^n.$$

L'équation (2.28) devient :

$$m \frac{\mathbf{q}_i^{n+1} - 2\mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \frac{\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right],$$

soit encore :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]. \quad (2.29)$$

La simulation de ce modèle par un schéma d'Euler explicite à pas constant sur un intervalle de temps faible ($T = 4$) est présentée à la figure 2.15, ainsi que les positions des 2 noeuds au début et à la fin de la simulation. La simulation à la figure 2.16 permet d'observer le problème avec ce schéma ($T = 10$).

Les figures 2.15 et 2.16 permettent de constater que le schéma d'Euler explicite (peu importe son pas de temps), n'est pas adapté à ce problème. Nous étudierons donc d'autres alternatives.

Simulation à l'aide des fonction de la librairie Scipy. À travers ses fonction telle que `odeint` et `solve_ivp`, Scipy offre une solution robuste et élégante pour simuler les systèmes d'ODE de la forme $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$.

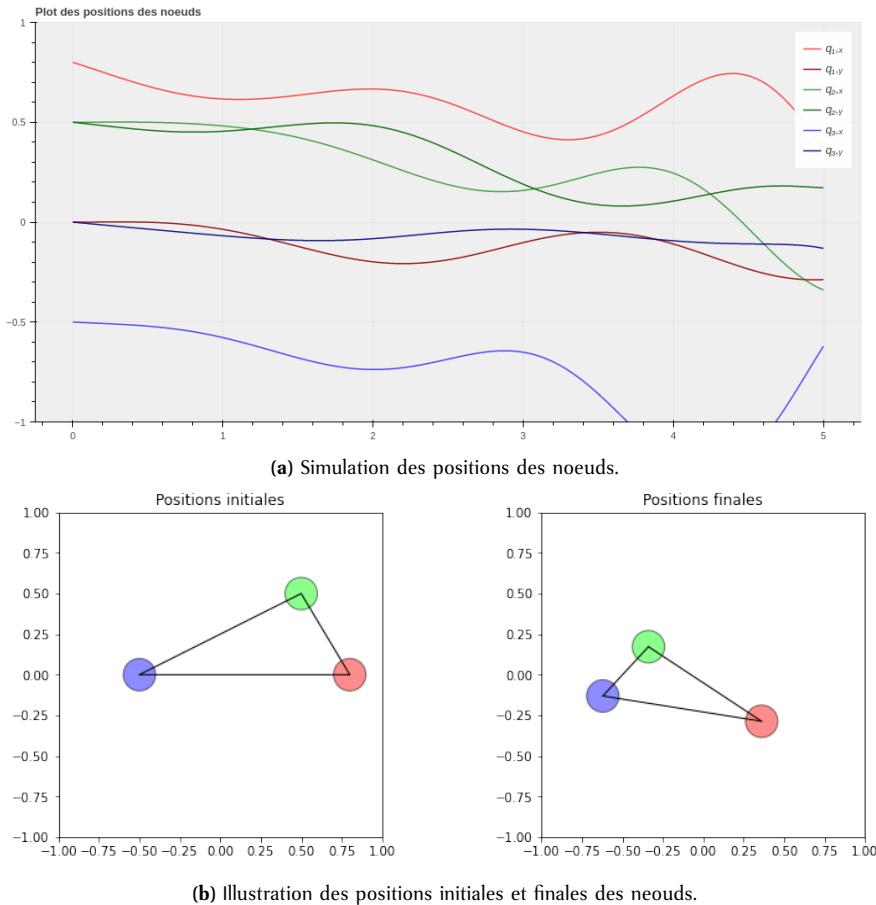


Figure 2.15 – Simulation du système 2.29 par un schéma d’Euler explicite avec $T = 4$. La couleurs rouge représente le noeud q_1 , le vert le noeud q_2 , le bleue le q_3 . Les paramètres utilisés ici sont les suivants : $m = 6.2$, $k = 23.3$, $\mu = 3$; à l’instant initiale, les trois noeuds perturbés avec des vitesses d’intensité respectives $v_1 = 0.3$, $v_2 = 0.1$, et $v_3 = 0.1$. Par rapport à l’axe des abscisses, ces vitesses ont sont orientées respectivement de $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 270^\circ$, et $\theta_3 = 240^\circ$ (voir code/simu2D/Deplacement2D-1.ipynb).

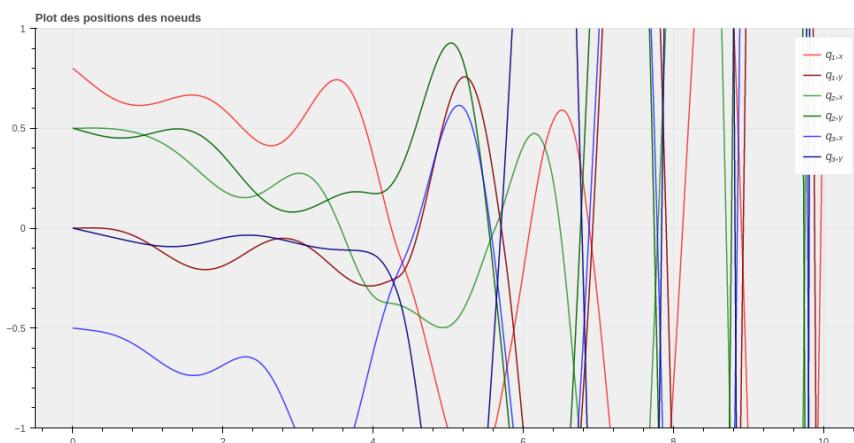


Figure 2.16 – Simulation du système 2.29 par un schéma d’Euler explicite avec $T = 10$. Cette figure utilise les même paramètres que la figure 2.15. On observe ici une divergence totale du système.

Bibliographie

- [AC12] J-P AUBIN et Arrigo CELLINA. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. T. 264. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Acal3] Vincent ACARY. « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulombs friction ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), p. 224-250.
- [Ait50] Alexander C AITKEN. « Iv.studies in practical mathematics. v. on the iterative solution of a system of linear equations ». In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics* 63.1 (1950), p. 52-60.
- [AT90] Luigi AMBROSIO et Vincenzo Maria TORTORELLI. « Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43.8 (1990), p. 999-1036.
- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Bar] David BARAFF. « Andrew Witkin Large Steps in Cloth Simulation ». In : *SIGGRAPH98 Conference Proceedings* 0, p. 43-54.
- [Bar93] David BARAFF. « Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies ». In : *Algorithmica* 10.2 (1993), p. 292-352.
- [Bra84] Iain BRATCHIE. « Rheology of an ice-floe field ». In : *Annals of Glaciology* 5 (1984), p. 23-28.
- [CFM09] Antonin CHAMBOLLE et al. « When and how do cracks propagate ? » In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.9 (2009), p. 1614-1622.
- [Cha03] Antonin CHAMBOLLE. « A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 167.3 (2003), p. 211-233.
- [Cia88] Philippe G CIARLET. *Three-dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [DGCL89] E DE GIORGI et al. « Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set ». In : *Ennio De Giorgi* (1989), p. 654.
- [DMT02] Gianni DAL MASO et Rodica TOADER. « A model for the quasi-static growth of brittle fractures based on local minimization ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12.12 (2002), p. 1773-1799.
- [DVJ08] Daryl J DALEY et David VERE-JONES. *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume II : General Theory and Structure*. Springer, 2008.
- [FM98] Gilles A FRANCFORST et J-J MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46.8 (1998), p. 1319-1342.
- [GP95] Ch GLOCKER et Friedrich PFEIFFER. « Multiple impacts with friction in rigid multibody systems ». In : *Nonlinear Dynamics* 7.4 (1995), p. 471-497.
- [Gri21] Alan Arnold GRIFFITH. « VI. The phenomena of rupture and flow in solids ». In : *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593 (1921), p. 163-198.
- [GS17] Dietmar GROSS et Thomas SEELIG. *Fracture mechanics : with an introduction to micromechanics*. Springer, 2017.

- [Her11] Agnieszka HERMAN. « Molecular-dynamics simulation of clustering processes in sea-ice floes ». In : *Physical Review E* 84.5 (2011), p. 056104.
- [Hi79] WD HIBLER III. « A dynamic thermodynamic sea ice model ». In : *Journal of physical oceanography* 9.4 (1979), p. 815-846.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Hop66] Frank Charles HOPPENSTEADT. « Singular perturbations on the infinite interval ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 123.2 (1966), p. 521-535.
- [Hop85] Mark A HOPKINS. « Collisional stresses in a rapidly deforming granular flow : a thesis ». Thèse de doct. Clarkson University, 1985.
- [Hop96] Mark A HOPKINS. « On the mesoscale interaction of lead ice and floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 101.C8 (1996), p. 18315-18326.
- [Ing13] Charles Edward INGLIS. « Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners ». In : *Trans Inst Naval Archit* 55 (1913), p. 219-241.
- [Irw57] George R IRWIN. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate ». In : (1957). URL : [https://www.scirp.org/\(S\(oyulxb452alnt1aej1nfow45\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379](https://www.scirp.org/(S(oyulxb452alnt1aej1nfow45))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379).
- [Jea99] Michel JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4 (1999), p. 235-257.
- [JP85] Michel JEAN et Elaine PRATT. « A system of rigid bodies with dry friction ». In : *International journal of engineering science* 23.5 (1985), p. 497-513.
- [Keel18] Paul KEELER. « Simulating a homogeneous Poisson point process on a rectangle ». In : (2018).
- [Lem78] Carlton E LEMKE. « Some pivot schemes for the linear complementarity problem ». In : *Complementarity and Fixed Point Problems*. Springer, 1978, p. 15-35.
- [LLL15] Wenjun Lu et al. « In-plane fracture of an ice floe : A theoretical study on the splitting failure mode ». In : *Cold Regions Science and Technology* 110 (2015), p. 77-101.
- [Löt81] Per LÖTSTEDT. « Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 61.12 (1981), p. 605-615.
- [Löt82a] Per LÖTSTEDT. « Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 42.2 (1982), p. 281-296.
- [Löt82b] Per LÖTSTEDT. « Time-dependent contact problems in rigid body mechanics ». In : *Nondifferential and Variational Techniques in Optimization*. Springer, 1982, p. 103-110.
- [LS67] Jacques-Louis LIONS et Guido STAMPACCHIA. « Variational inequalities ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 20.3 (1967), p. 493-519.
- [Mar+19] David MARSAN et al. « Characterizing horizontally-polarized shear and infragravity vibrational modes in the Arctic sea ice cover using correlation methods ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.3 (2019), p. 1600-1608.
- [MM85] MDP MONTEIRO MARQUES. « Chocs inélastiques standards : un résultat d'existence ». In : *Séminaire d'Analyse Convexe, USTL, Montpellier* 15 (1985).
- [MM88] MDP MONTEIRO MARQUES. « Inclusões Diferenciais e Choques Inelásticos ». Thèse de doct. Ph D Thesis, Universidade de Lisboa, Lisbon, 1988.
- [MM94] MD P MONTEIRO MARQUES. « An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction ». In : *European journal of mechanics. A. Solids* 13.2 (1994), p. 277-306.
- [Mor78] Jean Jacques MOREAU. « Approximation en graphe d'une évolution discontinue ». In : *RAIRO. Analyse numérique* 12.1 (1978), p. 75-84.
- [Mor85] Jean J MOREAU. « Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints ». In : *Unilateral problems in structural analysis*. Springer, 1985, p. 173-221.

- [Mor86] Jean Jacques MOREAU. « Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel; essais numériques ». Thèse de doct. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1986.
- [Mor88] Jean J MOREAU. « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics ». In : *Nonsmooth mechanics and Applications*. Springer, 1988, p. 1-82.
- [Mor99] Jean Jacques MOREAU. « Numerical aspects of the sweeping process ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4 (1999), p. 329-349.
- [MW88] Matthew MOORE et Jane WILHELM. « Collision detection and response for computer animation ». In : *Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1988, p. 289-298.
- [Nag+19] Sindhu NAGARAJA et al. « Phase-field modeling of brittle fracture with multi-level hp-FEM and the finite cell method ». In : *Computational Mechanics* 63.6 (2019), p. 1283-1300.
- [NB14] Ngoc Son NGUYEN et Bernard BROGLIATO. *Multiple impacts in dissipative granular chains*. T. 3. Springer, 2014.
- [NW72] James L NEVINS et Daniel E WHITNEY. « The force vector assembler concept ». In : *On Theory and Practice of Robots and Manipulators*. Springer, 1972, p. 273-288.
- [OSAJ95] M OSTOJA-STARZEWSKI et al. « Linear elasticity of planar Delaunay networks. III : Self-consistent approximations ». In : *Acta mechanica* 110.1 (1995), p. 57-72.
- [Pan12] Panagiotis D PANAGIOTOPoulos. *Inequality Problems in Mechanics and Applications : Convex and nonconvex energy functions*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [PS02a] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.2 (2002), p. 702-733.
- [PS02b] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems II : The multidimensional case ». In : *SIAM journal on numerical analysis* 40.2 (2002), p. 734-768.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Rag+04] Laks RAGHUPATHI et al. « An intestinal surgery simulator : Real-time collision processing and visualization ». In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 10.6 (2004), p. 708-718.
- [Ram+09] Pierre RAMPAL et al. « Arctic sea ice velocity field : General circulation and turbulent-like fluctuations ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 114.C10 (2009).
- [RLW15] Matthias RABATEL et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9 (2015), p. 5887-5909.
- [SHL86] HH SHEN et al. « On applying granular flow theory to a deforming broken ice field ». In : *Acta Mechanica* 63.1 (1986), p. 143-160.
- [Sig33] Antonio SIGNORINI. « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze* 27 (1933), p. 69.
- [Sol70] H SOLOMON. « A study of ice dynamics relevant to AIDJEX ». In : *AIDJEX Bull* 2.33-50 (1970).
- [ST96] David E STEWART et Jeffrey C TRINKLE. « An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39.15 (1996), p. 2673-2691.
- [Tik52] Andrei Nikolaevich TIKHONOV. « Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives ». In : *Matematicheskii sbornik* 73.3 (1952), p. 575-586.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.
- [VCMT95] Pascal VOLINO et al. « Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects ». In : *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1995, p. 137-144.
- [WFH10] Alexander V WILCHINSKY et al. « Effect of shear rupture on aggregate scale formation in sea ice ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 115.C10 (2010).
- [Whi77] Daniel E WHITNEY. « Force feedback control of manipulator fine motions ». In : (1977).

- [WW90] Andrew WITKIN et William WELCH. « Fast animation and control of nonrigid structures ». In : *Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1990, p. 243-252.