

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant
Desmond Roussel NZOYEM

Superviseur
Stéphane LABBÉ

Enseignant référent
Christophe PRUD'HOMME



*Ce stage a été effectué dans le cadre du master 2 CSMI,
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021 ;
initié par le groupe SASIP au LJLL.*

Année académique 2020 - 2021

22 février 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	i
1 État de l'art	1
1.1 Résumé de thèse de D. Balasoiu	1
1.1.1 Théorie de la fracture : état de l'art	1
1.1.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace	3
1.1.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier	6
1.1.4 Discussion	7
Bibliographie	8

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Résumé de thèse de D. Balasoiu

Les travaux de D. Balasoiu concernent la modélisation et la simulation du comportement mécanique de floes de glace [Bal20a]. Il s'agit d'une amélioration des travaux de M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss [Rab15; RLW15] prenant en compte la fracture des floes. Précisément, ce travail se focalise sur l'initiation de la fracture, ainsi que la prédiction du chemin que la fracture emprunte. Jusqu'à présent, les floes étaient considérés comme des corps rigides; dans sa thèse, BALASOIU les considère comme des corps élastiques. Son travail est divisé en deux parties. Il commence par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d'un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord (i.e. à une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, il cherche à obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe qui percute un autre floe ou une structure solide.

1.1.1 Théorie de la fracture : état de l'art

La théorie de fracture la plus répandue de nos jours est due à A.A. Griffith. Dans ses travaux [Gri21], il invalide les résultats que C. Inglis [Ing13] qui ne tenaient pas en compte la taille de la fracture; il présente donc la croissance d'une faille comme une compétition d'énergie entre l'énergie élastique¹ et l'énergie de surface².

Le critère de Griffith est un critère thermodynamique qui stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de moindre énergie. En effet, sur un matériau élastique Ω dont la frontière est subdivisée en deux zones $\partial\Omega_D$, et $\partial\Omega_N$, on pose [Bal20a, p.31] :

$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx \\ \mathcal{P}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega \setminus \sigma(t)} W(x, \nabla \varphi(t, \sigma(t))) \, dx - \mathcal{F}(t, \sigma(t)) \\ \mathcal{F}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega} f_v(x) \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x) \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

où

- E_{el} est l'énergie élastique du matériau sans faille.
- $\sigma(t)$ représente la fracture au temps t , supposée à l'équilibre.
- \mathcal{P} l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille $\sigma(t)$ au temps t .
- $e(u)$ est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau.
- $\varphi = \text{Id} + u$ représente le déplacement du matériau supposé suffisamment régulier.
- W est la densité d'énergie du matériau élastique, supposé hyper-élastique.

1. Énergie relâchée lorsqu'un défaut subit un accroissement. Cette énergie diminue durant la fracture.

2. Énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces – les bords de la fissure. Cette énergie augmente avec l'accroissement de la fracture.

- f_s est la contrainte surfacique appliquée sur le bord $\partial\Omega_N$.
- f_v est le champ de force volumique appliquée sur Ω .

D'après le critère de Griffith [Bal20a, p.32], la fonction $\sigma(t)$ doit vérifier :

1. $\frac{d\sigma(t)}{dt} \geq 0$;
2. $-\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) \leq k$;
3. $\frac{d\sigma(t)}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) = k$.

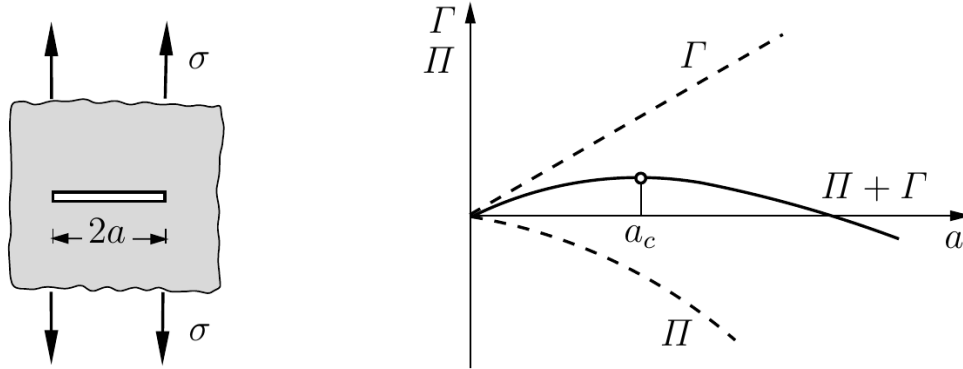


FIGURE 1.1 – Illustration du critère de Griffith [GS17]. (Π et Γ représentent les énergie potentielles et de fracture respectivement. Cette figure est à refaire manuellement !)

Une illustration de ce critère peut être observée à la figure 1.1. Comme mentionné plus haut, ce modèle souffre de problèmes de nucléation et de prédiction de la fracture. Pour contourner le problème de nucléation, les mécaniciens considèrent que tout matériau possède des micro-fissures, et ce sont ces dernières qui sont à l'origine des fissures observables à l'œil. Quant au problème du chemin emprunté par la fracture, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que les critères d'Irwin [Irw57] sont invalides car, ils impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne peut être courbé.

Le modèle proposé par Francfort et Marigo [FM98], suit un résultat théorique du à De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci [DCL89], qui prouvent le théorème d'existence de minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah qui intervient dans la détection des contours d'une image. Présentons les données géométriques du problème [Bal20a, p.35]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe, dont la frontière $\partial\Omega$ est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté U_D , tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique f_v . On suppose que Ω est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée W . Ainsi, lorsque le matériau Ω subit (sans fracture) une déformation $\varphi = u + \text{Id}$ suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) dx,$$

où l'on a noté u le champ de déplacement du matériau, et $e(u)$ son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture σ :

$$E_{\text{el}}(u, \sigma) = \inf_{u \in V_{U_D, \sigma}} \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) dx,$$

où l'on a défini l'espace fonctionnel $V_{U_D, \sigma}$, σ par :

$$V_{U_D, \sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^N) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}.$$

Francfort et Marigo proposent l'énergie de fracture suivante sur $\partial\Omega_D$:

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_{\sigma} k(x) d\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire $k(x)$ traduit la rigidité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau; \mathcal{H}^{N-1} représente la mesure de Hausdorff de dimension $N - 1$, qui peut être comprise comme la longueur du contour pour $N = 2$.

Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u, \sigma) &= E_{\text{el}}(u, \sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma) \\ &= \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) dx + \int_{\sigma} k(x) d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

où σ est une union dénombrable d'ensembles rectifiables. Ainsi donc, une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle E_{tot} . Rappelons que dans le cas d'un mouvement antiplan, BALASOIU montre, dans le cas d'un mouvement antiplan³, que ce modèle est quasiment identique au modèle de De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci, pour lequel un théorème d'existence a pu être exhibé.

La méthode numérique employée est la méthode à champ de phases. Elle repose sur la notion de Γ -convergence, en particulier sur le résultat de **convergence des minimums**. On remplace l'inconnue σ par une suite de fonctions lisses v_ϵ [AT90]. Par exemple, dans le cas du traitement d'image, pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dont se sont inspiré Bourdin, Francfort et Marigo, on constate d'après Ambrosio et Tortorelli [AT90] que la suite de fonctionnelle

$$G_\epsilon() = \int_{\Omega} \left(|u - g|^2 + (v^2 + \eta_\epsilon) |\nabla u|^2 + \epsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\epsilon} \right) dx,$$

Γ -converge vers la fonctionnelle limite

$$G_f = \int_{\Omega} |u - g|^2 + |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

où $g : \Omega \mapsto [0, 1]$ est la fonction de contraste de l'image, et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de u , noté S_u , qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables [Bal20a, pp.33-35].

Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat de Γ -convergence sont disponibles dans la littérature. On cite par exemple ici les résultats obtenus dans [Nag+19] à la figure 1.2.

1.1.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace

Le modèle présenté dans la section précédente n'est pas adapté à notre étude. BALASOIU a donc développé un modèle qui ne nécessite pas de fonctionnelle lissée, comme l'on fait plusieurs modèles de glaciologie (voir [LLL15]), en supposant que les fractures sont des segments. Une résultat d'existence (dans les cas où le floe n'est pas encore fracturé) est prouvé à l'aide de la convergence de Mosco. De plus, BALASOIU introduit un problème d'évolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du

3. Un mouvement **antiplan** est mouvement pour lequel le champ de déplacement u est porté par un vecteur constant.

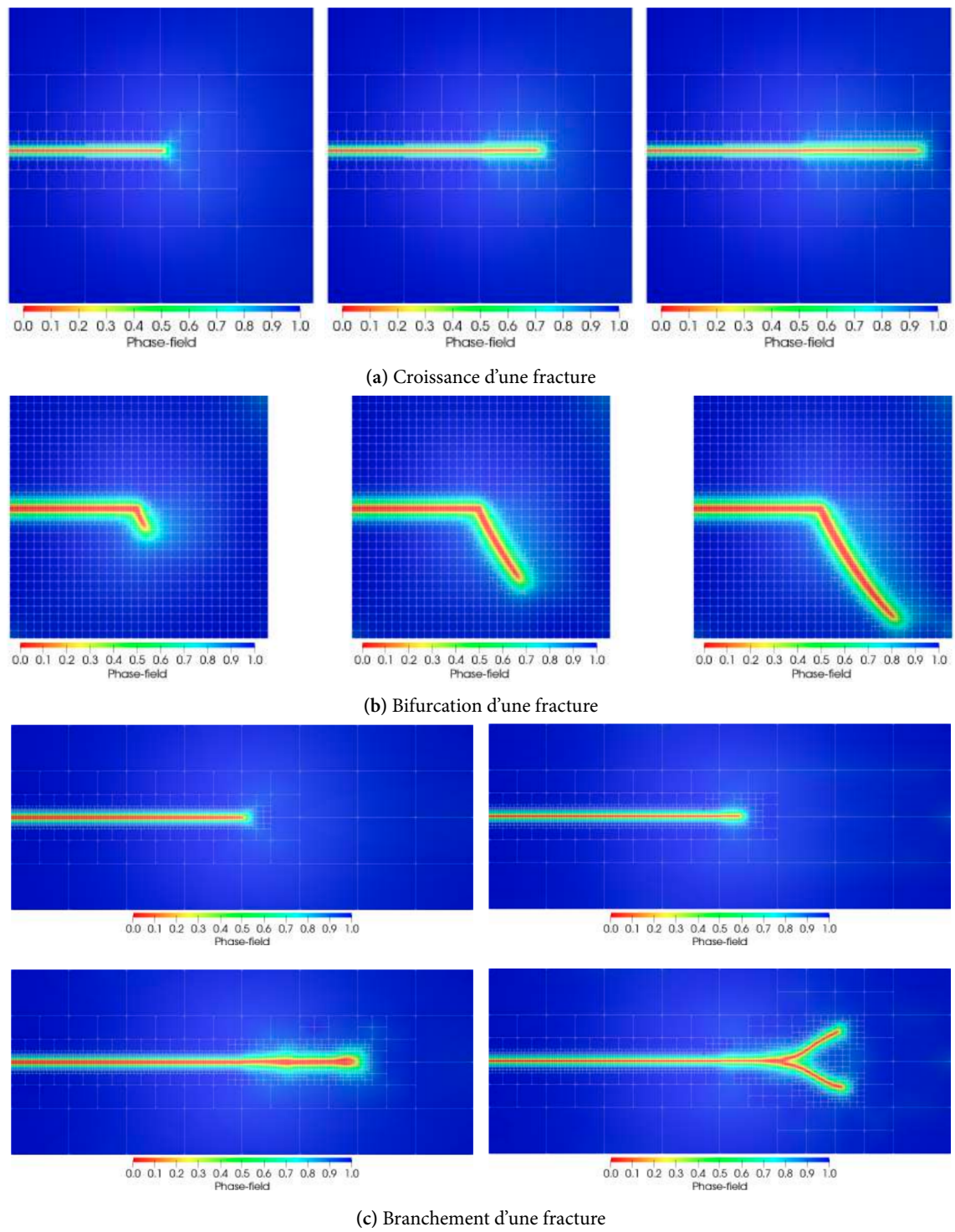


FIGURE 1.2 – Trois résultats numériques obtenus dans [Nag+19] à l'aide d'une discrétisation éléments finis (hp-FEM) et volume finis en ne remaillant le domaine que lorsque c'est nécessaire.

floe. Les fractures obtenues par ce problème d'évolution sont ainsi des lignes brisées. Le résultat d'existence n'a pas été prouvé pour ce cas. Concernant le côté numérique, une méthode *meshless*⁴ est proposée.

4. Car l'ensemble discrétisé des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé.

Les modifications apportées pour traiter le modèle statique (dans \mathbb{R}^2) sont décrites ci-bas. Lorsqu'on fixe la fracture σ , l'énergie élastique prend la forme :

$$E_{\text{el}}(\cdot, \sigma) : A_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx,$$

où A représente le tenseur de Lamé du matériau, i.e.

$$\forall e \in M_2\mathbb{R}, \quad Ae = \lambda \operatorname{tr}(e)I_2 + 2\mu e,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau; et l'ensemble des déplacements admissibles A_σ est :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma; \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

avec u^+ et u^- les restrictions de u aux régions Ω^+ et Ω^- respectivement (obtenues par extension de la fracture σ de façon à ce qu'elle soit traversante [Bal20a, p.50]). ν (normale à la fracture orientée du bord vers le centre de Ω) et ν . On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma$$

L'énergie totale s'écrit

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx + k\mathcal{H}^1(\sigma),$$

où Σ représente l'ensemble des segments orientés partant de la frontière donné par

$$\Sigma = \left\{ [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega}, [a, b] \cap \Omega \neq \emptyset \right\}.$$

Une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple (u, σ) qui vérifie

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Ensuite, BALASOIU remarque aussi que la solution n'est pas unique. Il définit ensuite un problème de d'évolution quasi-statique à la manière de [FM98], en considérant un chargement un problème de chargement monotone :

$$U_D(t) = tU_D.$$

On note $\overline{\Sigma}$ l'ensemble des lignes brisées de Ω , sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également $\operatorname{end}(\sigma)$ la fin d'une ligne brisée $\sigma \in \overline{\Sigma}$. On définit maintenant [Bal20a, p.48], pour toute ligne brisée $\sigma \in \overline{\Sigma}$ l'ensemble des fractures admissibles partant de σ :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \left\{ \sigma \cup [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a = \operatorname{end}(\sigma), b \in \overline{\Omega}, [a, b] \cap \Omega \neq \emptyset \right\}.$$

On définit également l'ensemble des déplacements admissibles associées :

$$A_{t,\sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma; \mathbb{R}^2) \mid u = tU_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et pour toute ligne brisée σ . De ces définitions, on peut en exhiber un problème d'évolution discret, et un problème d'évolution continue en faisant tendre t vers 0. Le problème d'évolution continue admet

des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets [MT02; Cha03].

Lorsque la fracture est fixée, BALASOIU prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation, en utilisant la théorie des inégalités variationnelles, l'inégalité de Korn [Cia94], le théorème de Lions-Stampacchia [LS67]. Pour le cas statique, il montre que le problème statique a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, ceci en se servant principalement de la convergence de Mosco. Pour le modèle quasi-statique, un résultat d'existence n'a pas été trouvé, et une conhjecture pour une ligne brisée qui possède un point d'auto-intersection.

1.1.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier

Dans ce chapitre, BALASOIU souhaite approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous n'étudions que l'état d'équilibre du réseau de ressorts.

Commencions par des quqlques définitions pour le maillage sur un floe. Pour définir un réseau de ressort τ , on définit l'ensemble de ses points τ_0 disposées en forme de grille.

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2$$

De facon similaire, l'ensemble des arrete se nomme τ_1 , et l'ensemble des cellules τ_2 . Le réseau τ est obtenu à partir de τ_0 en tracant les cotés de chaque carrés; à la frontière, on trace les diagonales des carrés incomplets. On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de τ_0 dans \mathbb{R}^2 . On définit également deux triangulations de ω à partir de τ , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions $e_x + e_y$ et $e_x e_y$. On note ces triangulations $\tilde{\tau}$ et $\hat{\tau}$ respectivement.

Afin d'éviter les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point, on définit avec l'ensemble des déplacements admissibles

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \overline{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$

Sur chaque arête $v\tau_1$, on place un ressort de longueur à vide $l_v = |v|$, et de raideur k_v (voir figure 1.3a). Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressorts, et $u = \varphi \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{v \in \tau_1} \frac{k_v}{2} (|\varphi(v)| - |v|)^2 \end{aligned}$$

En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, d'angle de repos $\frac{\pi}{2}$, et de raideur $G|v|^2$ (voir figure 1.3b). L'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{v_1, v_2 \in c \cap \tau_1 \\ v_1 \cap v_2 \in \tau_0}} \frac{G|v|^2}{4} \left(\angle(\varphi(e_{v_1}), \varphi(e_{v_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. On note enfin

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau$$

l'énergie totale du réseau.

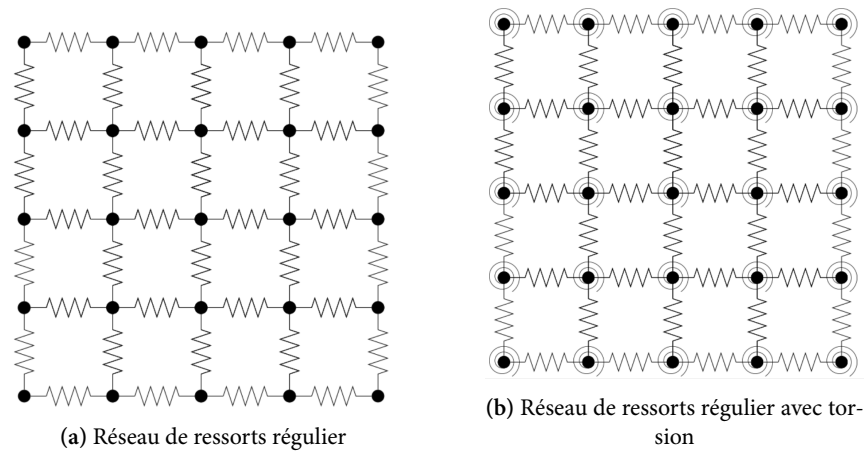


FIGURE 1.3 – Réseau de ressort considéré durant cette étude.

1.1.4 Discussion

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse :

1. Le modèle suppose que les floes sont d'épaisseur négligeable devant leur extension horizontale; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.
2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites.

Bibliographie

- [Bal20a] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes, 2020. URL : <https://www-ljk.imag.fr/membres/Dimitri.BalasoIU/These.pdf>.
- [Bal20b] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [GS17] Dietmar GROSS et Thomas SEELIG. *Fracture mechanics : with an introduction to micromechanics*. Springer, 2017.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [RLW15] Matthias RABATEL et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9 (2015), p. 5887-5909.