



Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Roussel Desmond Nzoyem

Stéphane Labbé, Christophe Prud'homme

Sorbonne Université
Laboratoire Jacques-Louis Lions

Soutenance de mi-stage
18 mai 2021

Sommaire

1 INTRODUCTION

2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoïu

3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

1 INTRODUCTION

2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

Motivation

Enjeux écologiques

- ▶ Etude climatique à échelle nature (SASIP)
- ▶ Prévisions climatiques avec précision

Enjeux industriels

- ▶ Routes maritimes exploitables
- ▶ Étude des stations offshore

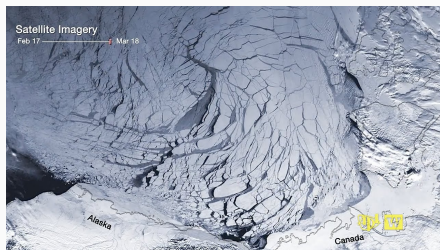


FIGURE – Image satellite de l'artique (MIZ Program, 2013)



FIGURE – Un navire dans la MIZ (O Globo, 2012)

2021-05-18

FRACTURATION DE FLOES DE GLACE

INTRODUCTION

Motivation

Motivation

Échelle Géologique

- ▶ Étude climatique à échelle nationale (NATOP)
- ▶ Prévisions climatiques avec précision



Figure 1 - Image satellite de l'Arctique (NSIS Program, 2012)

Échelle Industrielle

- ▶ Routes maritimes exploitables
- ▶ Étude des stations offshore



Figure 2 - Ice melting dans la R22 (© Statistique, 2012)

Floe : Un floe est un morceau de glace;

Albédo : la cryosphère reflète entre 90 et 95 % des rayonnement recus par la planète.

Objectifs

Objectifs généraux

- ▶ Modélisation et analyse mathématique de la notion de percussion
- ▶ Poursuite du développement d'un modèle de fracturation des floes

Objectifs intermédiaires

- 1 Lecture des travaux précédents :
 - ▶ **M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss** : Dynamics of an assembly of rigid ice floes (2015);
 - ▶ **Matthias Rabatel** : Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides (2015);
 - ▶ **Dimitri Balasoïu** : Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace (2020).
- 2 Modélisation et simulation du déplacement des noeuds d'un floe isolé :
 - ▶ en 1D;
 - ▶ en 2D.
- 3 Introduction de la percussion dans le code préexistant.

1 INTRODUCTION

2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

Cinétique du floe

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i, \end{cases} \quad (1)$$

où pour le floe i :

- ▶ M_i : masse du floe ;
- ▶ \mathbf{F}_i : somme des forces par unité de volume ;
- ▶ \mathcal{I}_i : le moment d'inertie du floe i ;
- ▶ \mathfrak{M}_i : le moment dynamique en G .

Le système (1) se réécrit sous la forme :

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t),$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

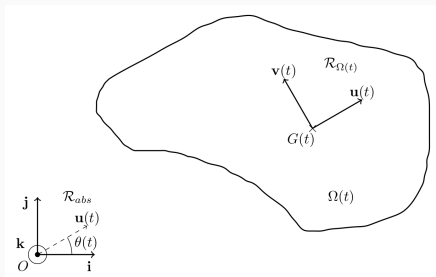


FIGURE – Repères abosolu et local pour un floe (RABATEL, 2015)

Interaction entre les floes

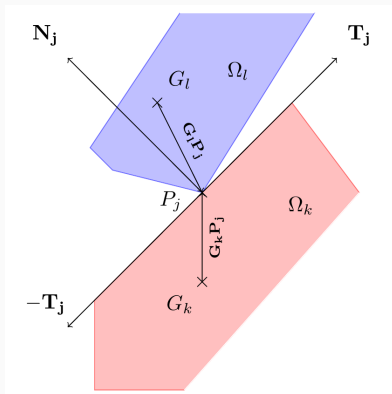


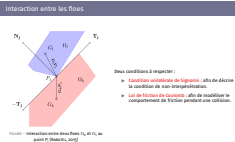
FIGURE – Interaction entre deux floes Ω_k et Ω_l au point P_j (RABATEL, 2015)

Deux conditions à respecter :

- **Condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration.
- **Loi de friction de Coulomb** : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision.

Historiquement, on distingue ici deux approches :

- l'approche par régularisation : Hertz (force de contact proportionnelle à la distance d'inter-pénétration); largement répandues en robotique, en VR, habits, etc...MAIS ON NE VEUT PAS D'INTERPÉNÉTRATION!
- l'approche non-régulière : développée par inclusion différentielle : efficace, mais difficile à manipuler. D'où l'essor des méthodes LCP.



Discussion sur la thèse

- ▶ Les floes sont rigides;
- ▶ Le modèle ne gère pas la rhéologie de la glace;
- ▶ Les coefficients de friction et de restitution sont limitants.

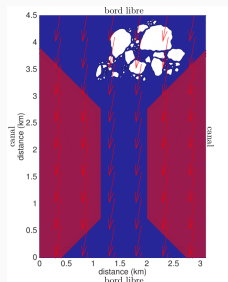


FIGURE – Configuration initiale (RABATEL, 2015)



(a) à 2h04



(b) à 3h40

FIGURE – Dérive sous l'effet de la force de Coriolis (RABATEL, 2015)

Un modèle de fracture variationnel

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_{\sigma} \times \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma),$$

Une solution du problème de fracture fragile est un couple (u^*, σ^*) qui vérifie :

$$E_{\text{tot}}(u^*, \sigma^*) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_{\sigma}} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

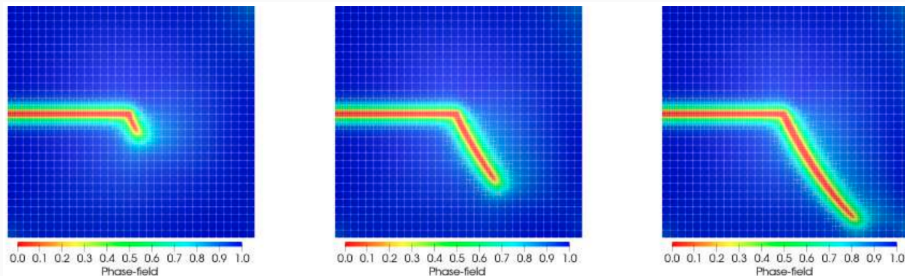


FIGURE – Bifurcation d'une fracture (NAGARAJA et al., 2019)

Réseaux de ressorts régulier

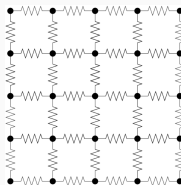


FIGURE – Réseau de ressorts régulier (BALASOIU, 2020)

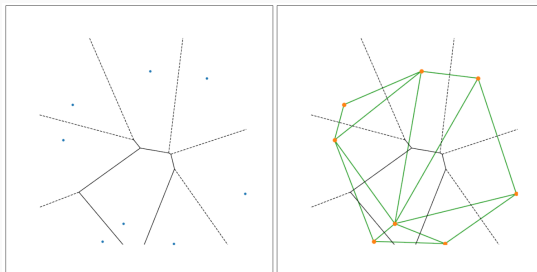


FIGURE – Tirage de points et diagrammes de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) (BALASOIU, 2020)

FRACTURATION DE FLOES DE GLACE

ÉTAT DE L'ART

Thèse de D. Balasoiu

Réseaux de ressorts régulier

Réseaux de ressorts régulier



FIGURE 1 - Réseau de ressorts régulier (Balasoiu, 2020)



FIGURE 2 - Choix de points et diagrammes de Voronoi (a gauche) et Delaunay (b droite) (Balasoiu, 2020)

Afin d'établir la condition de Dirichlet nécessaire pour engendrer la fracture, on passe du modèle macroscopique à un modèle microscopique.

1 INTRODUCTION

2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

3 TRAVAUX ET RÉSULTATS

- Résultats en 1D
- Résultats en 2D

Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)

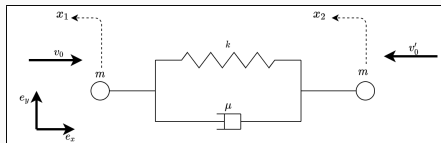


FIGURE – Floe de glace 1D

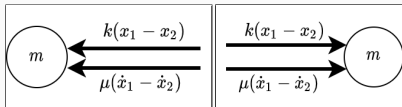


FIGURE – Bilan des forces

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases}$$

On préfère la forme générique :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T, \end{cases}$$

où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}, \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

FRACTURATION DE FLOES DE GLACE

TRAVAUX ET RÉSULTATS

Résultats en 1D

Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)

Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)



Floes - Floe de glace 1D

Les équations de Newton-d'Alembert :

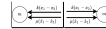
$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = -B(u_1 - u_2) - \mu(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ m\ddot{u}_2 = B(u_1 - u_2) + \mu(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \end{cases}$$

On pose la forme générique :

$$\begin{cases} M\ddot{U} = B(U) \\ \dot{U}_0 = \dot{U}(0) = (U_1(0), U_2(0), -\dot{u}_0)^T \end{cases}$$

où :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ B & -B & \mu & -\mu \\ -B & B & -\mu & \mu \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}$$



Floes - Floe de glace

Ici, ne pas utiliser un repère absolu, on peut utiliser un qui soit relatif au floe. Dans ce cas, on a convergence.

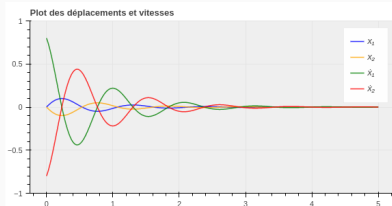
Déplacement des noeuds d'un floe isolé (2)

Listing 1 – Code de simulation avec Scipy

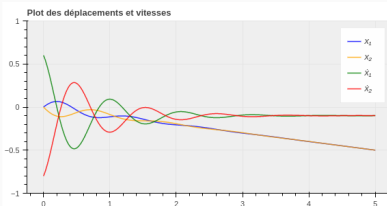
```
Y0 = np.array([0,0, v0, -v_0])
t = np.linspace(0, tmax, N+1)
def model(Y, t):
    return E @ Y
Y = odeint(model, Y0, t)
```

Théorème (Convergence du modèle 1D isolé)

Les déplacements x_1 et x_2 des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.



(a) $v_0 = v'_0 = 0.8$



(b) $v_0 = 0.6$ et $v'_0 = 0.8$

FIGURE – Simulation du déplacement d'un floe en 1D

Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

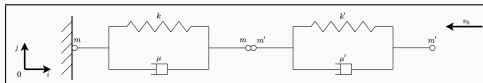


FIGURE – Collision 1D avec fixation d'un floe

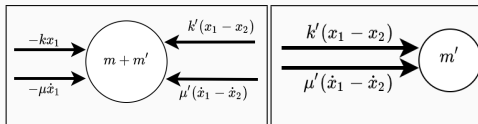


FIGURE – Bilan des forces

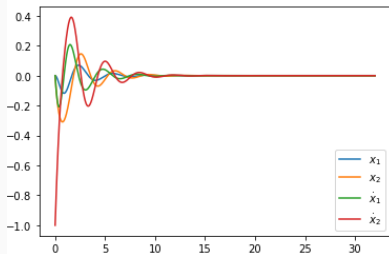


FIGURE – Résultat de simulation

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

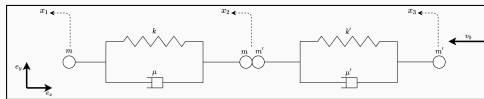


FIGURE – Collision 1D sans mur

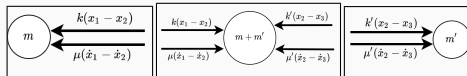
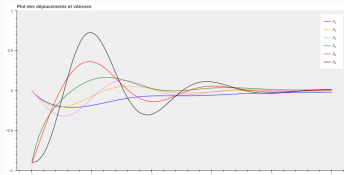


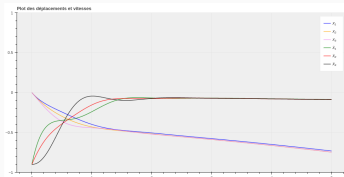
FIGURE – Bilan des forces

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases}$$



(a) Cas convergent



(b) Cas non convergent

FIGURE – Résultat de simulation

Note

Critère de convergence pas clair!

Collision inélastique avec séparation des masses (1)

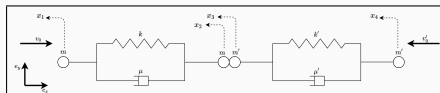


FIGURE – Collision 1D inélastique

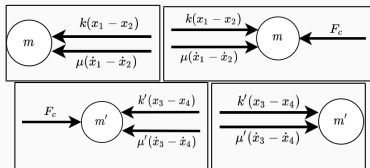


FIGURE – Bilan des forces

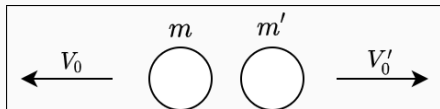


FIGURE – Situation après contact

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases}$$

Avec ε est le coefficient de restitution et :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} [k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)] dt,$$

les vitesses après contact sont :

$$V_0 = \frac{I + (m + \varepsilon m')v_0 + (1 - \varepsilon)m'v_0'}{m + m'},$$

$$V_0' = \frac{I + (1 - \varepsilon)mv_0 + (m' + \varepsilon m)v_0'}{m + m'}.$$

Collision inélastique avec séparation des masses (2)

Animation de la première phase de la percussion (**avant** contact)

Déplacement d'un floe isolé (1)

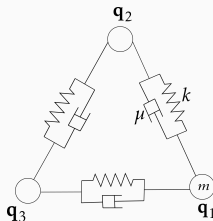


FIGURE – Floe de glace 2D

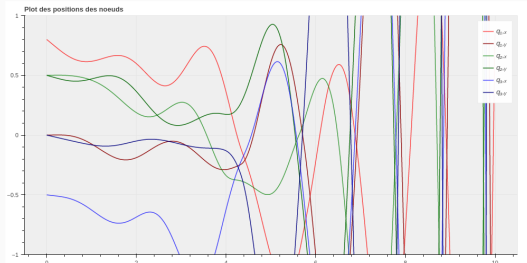


FIGURE – Simulation avec $T = 10$

Les équations de Newton-Euler :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} + \{1\}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right].$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right].$$

Déplacement d'un floe isolé (2)

Listing 2 – Code de simulation et schéma avec Scipy

```
q0 = np.stack([q1_0, dotq1_0, q2_0, dotq2_0, q3_0, dotq3_0])
q0_ = np.reshape(q0, (nb_nodes*4))

def model(t, Q_):
    Q = np.reshape(Q_, (nb_nodes*2, 2))
    Q_ret = np.zeros_like(Q)
    Q_ret[2*0] = 0; Q_ret[2*1] = 0

    for i in range(1, nb_nodes):
        Q_ret[2*i] = Q[2*i+1]

        for neighbor in range(i+1, i+3):
            j = neighbor % nb_nodes
            u[i,j] = (Q[2*j] - Q[2*i]) / nplin.norm(Q[2*j] - Q[2*i])
            Q_ret[2*i+1] += (1 / m)*C[i,j]*( k*(nplin.norm(Q[2*j]-Q[2*i]) - L[i,j])*u[i,j]
                               - mu*(np.dot(Q[2*j+1] - Q[2*i+1], u[i,j]))*u[i,j] )

    return np.reshape(Q_ret, (nb_nodes*4))

sol = solve_ivp(model, [0,T], q0_, t_eval=t)
```

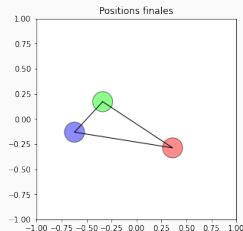
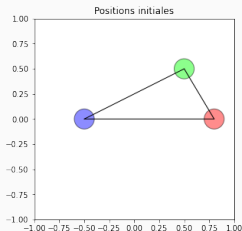


FIGURE – Illustration à $T = 4$

Références

BALASOIU, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

NAGARAJA, Sindhu et al. (2019). « Phase-field modeling of brittle fracture with multi-level hp-FEM and the finite cell method ». In : *Computational Mechanics* 63.6, p. 1283-1300.

RABATEL, Matthias (2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

RABATEL, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9, p. 5887-5909.

Merci pour votre attention 😊!

Questions?