

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant

Roussel Desmond NZOYEM

Superviseur

Stéphane LABBÉ

Enseignant référent

Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

Remerciements

Avant tout développement sur cette expérience professionnelle, il apparaît opportun de commencer ce rapport de stage par des remerciements, à ceux qui m'ont appris des choses, et à ceux qui ont eu la gentillesse de faire de ce stage un moment agréable et profitable.

Ainsi, je remercie le Pr. Stéphane Labbé, mon maître de stage qui m'a formé et accompagné tout au long de cette expérience avec beaucoup de patience et de pédagogie. Étant donné la situation sanitaire de COVID-19, il a su me transmettre tous les enseignements et les ressources (livres, références, etc.) nécessaires pour effectuer mes différentes missions (et bien plus encore), à distance comme en présentiel. Je vous en suis profondément reconnaissant.

J'exprime mes remerciements à mes illustres prédécesseurs Matthias Rabatel et Dimitri Balasoiu sans qui mon travail n'aurait pas eu lieu. Dimitri a su me guider dans les moments les plus difficiles du stage. Les mots ne sauraient exprimer ma reconnaissance envers les visio-conférences organisées afin de me permettre de prendre en main de son travail.

Je remercie aussi l'ensemble du personnel du Laboratoire Jacques-Louis Lions qui m'a permis d'effectuer un stage scientifique très enrichissant dans les meilleures conditions possibles. J'adresse mes salutations aux doctorants et aux étudiants en séjour de recherche pour leur unique regard sur les difficultés auxquelles fait face. En particulier, je remercie Madame Catherine Drouet de l'administration pour son assistance et ses conseils inestimables.

Enfin, je remercie mes proches, ma famille et mes amis pour leurs encouragements. Si un lecteur estime que son nom aurait dû figurer ici de façon explicite, faite ceci : imprimer cette page, montrer la moi, et cela sera votre coupon pour une bière gratuite (ou un café, ou autre chose). Les trucs gratuits sont mieux qu'une mention, n'est-ce pas ?

Table des matières

Remerciements	ii
1 Problème ID et étude de la fracture	1
1.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé	1
1.2 Modélisation de la percussion	5
1.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial	5
1.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur	7
1.2.3 Premier modèle pour la collision inélastique avec séparation des masses	8
1.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses	10
1.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses	13
1.3 Modélisation de la fracture	16
1.3.1 Méthode du champ de phase	16
1.3.2 Une approche combinatoire pour la fracture	17
1.4 Algorithme de calcul ID	17
1.5 Résumé des résultats obtenus	18
Bibliographie	20

Chapitre 1

Problème 1D et étude de la fracture

Dans cette section, nous étudierons le floe de glace en une dimension (1D). Nous avons montré dans les sections précédentes qu'un assemblage de masses reliées par des ressorts et de dispositifs visqueux constitue une bonne approximation d'un matériau élastique et du phénomène de percussion associé. Nous partirons de cette approche par réseau de ressort pour modéliser dans un premier temps le déplacement d'un floe de glace contenant juste deux noeuds (masses), ensuite nous modéliserons la percussion inélastique des noeuds de floes avec et sans rebonds, avec un nombre variable de noeuds par floes.

1.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

Avant d'entamer la question de la percussion avec séparation des masses (voir section 1.2.3), étudions le comportement d'un floe de glace 1D isolé et modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif visqueux, et 2 noeuds) (voir figure 1.1).

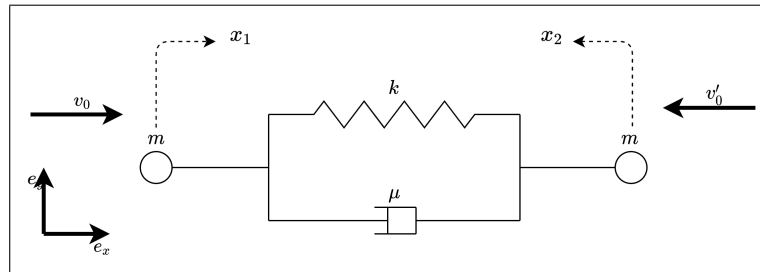


Figure 1.1 – Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Les variables x_1 et x_2 traduisent les déplacements des noeuds de gauche et de droite respectifs. À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses v_0 et v'_0 indiquées.

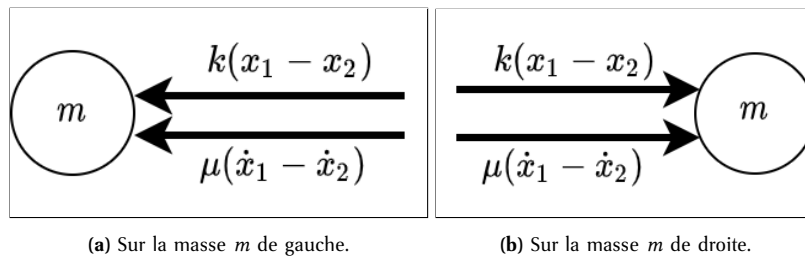


Figure 1.2 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple juste après l'instant initial, on a $x_1 > 0$, et $x_2 < 0$ d'où $k(x_1 - x_2) > 0$).

Un bilan des forces effectué sur les deux noeuds du floe (voir figure 1.2) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (1.1)$$

En remarquant que $m \neq 0$, on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$, et on reprend la condition initiale pour obtenir le système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (1.3)$$

La solution numérique est présentée dans à la figure 1.3 (voir fichier code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque $v_0 \neq v'_0$, les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements diverge.

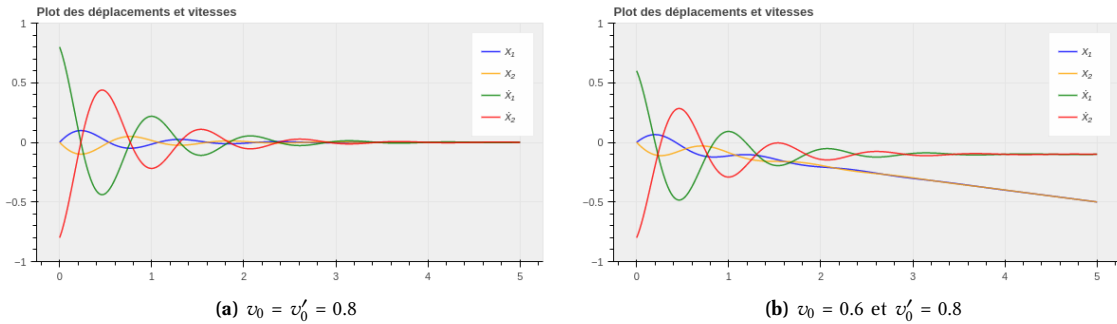


Figure 1.3 – Simulation du déplacement 1D d'un floe avec $m = 1$, $k = 18$, $\mu = 1.3$, $t_f = 5$. En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ lorsque $v_0 = v'_0$.

Avec $t_0 = 0$, la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par.

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (1.4)$$

Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 (Convergence du modèle 1D isolé). *Partant d'une position d'équilibre $x_1(0) = x_2(0) = 0$, les déplacements x_1 et x_2 des deux noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des*

vecteurs opposés.

Démonstration. Le calcul des solution analytique est plus délicat. Il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice E . Pour celà, nous devons diagonaliser (ou du moins trogonaliser) la matrice E . Son polynome caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k). \end{aligned}$$

Posons $\Delta = 4\mu^2 - 8km$. On distingue deux cas :

- Si $\Delta \geq 0$: on pose $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$ et $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$;
- Si $\Delta < 0$: on pose $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ et $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$.

Nous avons donc exhiber les trois valeurs propres de notre matrice : $\lambda_0 = 0$, λ_1 , et λ_2 . Avec λ désignant l'une des valeurs propres, on recherche les vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ appartenant aux sous espaces propres E_λ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0 \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

- Pour $\lambda = 0$, l'équation (1.5) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$, avec $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$.

- Pour $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$, on remarque que $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$. l'équation (1.5) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$, avec $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$; et $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$ avec $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$.

La meutlisicté arithmetique de $\lambda = 0$ est differente de sa multiplicité géométrique. La matrice E n'est donc pas diagonalisable. Son polynome caractéristique étant scindé, nous alons la trigonaliser. On pose donc une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dans laquelle la matrice E s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^4 (notée \mathcal{B}) à \mathcal{B}' . On a :

- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_1 s'écrit $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_1 = 0$. v_1 est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ dans \mathcal{B} ;
- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_2 s'écrit $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_2 = av_1$. On retourne dans \mathcal{B} en posant $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = a \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Avec $a = 1$, on écrit $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$.

- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_3 s'écrit $v_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_3 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$. En posant $b = d = 0$, v_1 devient un vecteur propre associé à λ_1 et on prend $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$ dans \mathcal{B} ;
- De façon similaire, on obtient $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ en posant $c = e = f = 0$.

Nous avons donc trigonaliser la matrice E , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente $A = D + N$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $E = P(D + N)P^{-1}$, nous pouvons facilement calculer $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN) P^{-1}$. Ce calcul délicat donne (à l'aide du logiciel de calcul symbolique Symbolab) :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons nous que la solution du problème de Cauchy équation (1.3) est donnée par $Y(t) = \exp(tE)Y_0$, avec $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$. Le calcul du déplacement x_1 donne :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} (v_0 + v'_0). \quad (1.6)$$

Le cas où $\Delta < 0$ (à étudier dans \mathbb{C}) peut se ramener au cas réel (dans \mathbb{R}) en posant $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$ (avec $\alpha = -\frac{\mu}{m}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$). En remarquant que $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$, on obtient :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) + \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0). \quad (1.7)$$

Les équations (1.6) et (1.8) permettent d'observer que le déplacement x_1 ne converge pas lorsque $t \rightarrow +\infty$, à moins que $v_0 = v'_0$, ce qui est observé à la figure 1.3. Pour le déplacement du deuxième noeud, on a :

$$x_2(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0); \quad (1.8)$$

On tire les mêmes conclusions en effectuant un raisonnement similaire.



1.2 Modélisation de la percussion

1.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème de percussion. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux noeuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse v_0 . On identifie chaque noeud à la masse qu'il porte (m ou m'), chaque ressort à sa raideur (k ou k'), chaque dispositif visqueux à sa viscosité (μ ou μ') (voir figure 1.4).

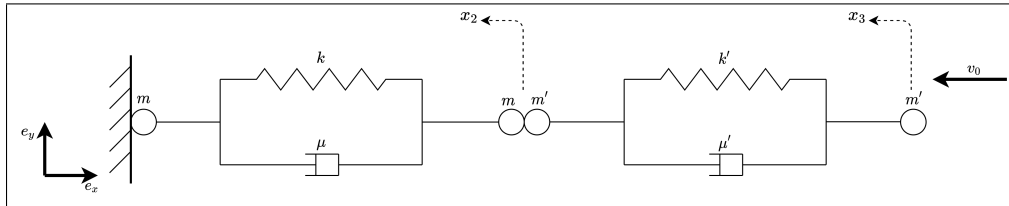


Figure 1.4 - Contact 1D parfaitement inélastique (choc mou) entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant, durant, et après le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses m et m' en contact forment une seule masse¹ $m + m'$ dont le déplacement est donné par la variable $x_1(t)$. Le déplacement de la masse m' à l'autre bout du floe percuteur est nommé $x_2(t)$. La masse m qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.

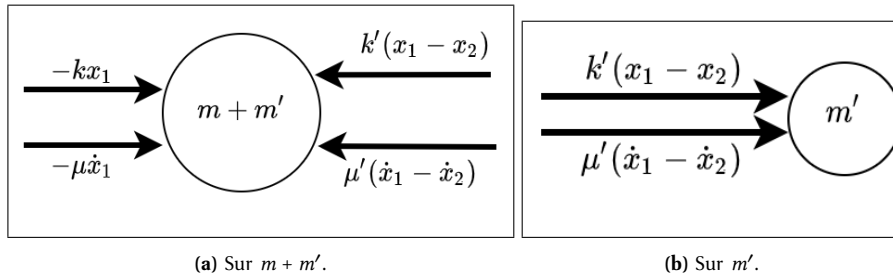


Figure 1.5 - Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ($v_0 < 0$ et donc $x_1 < 0$). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort k' , on peut imaginer x_1 immobile (on aura $x_2 < 0$, d'où $x_1 - x_2 > 0$) (voir [Hol0]).

En orientant convenablement le système (voir figure 1.4), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales² :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (1.9)$$

À l'instant initial t_0 , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (1.10)$$

1. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.
2. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de x_1 est-elle vraiment nulle?

En posant $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, l'équation (1.10) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B' \dot{X}(t) + C' X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (1.12)$$

avec $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$.

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$ et le système 1.12 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (1.13)$$

avec la matrice par blocs

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B' & C' \end{pmatrix},$$

où I_2 désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Avec $t_0 = 0$, la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0 \quad (1.14)$$

La résolution analytique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice $E \in \mathbb{R}^4$, ce qui s'avère difficile du à la taille de ladite matrice. Nous optons donc pour une solution numérique (voir figure figure 1.6a) issue du notebook code/simu1D/Percussion1D-1.ipynb.

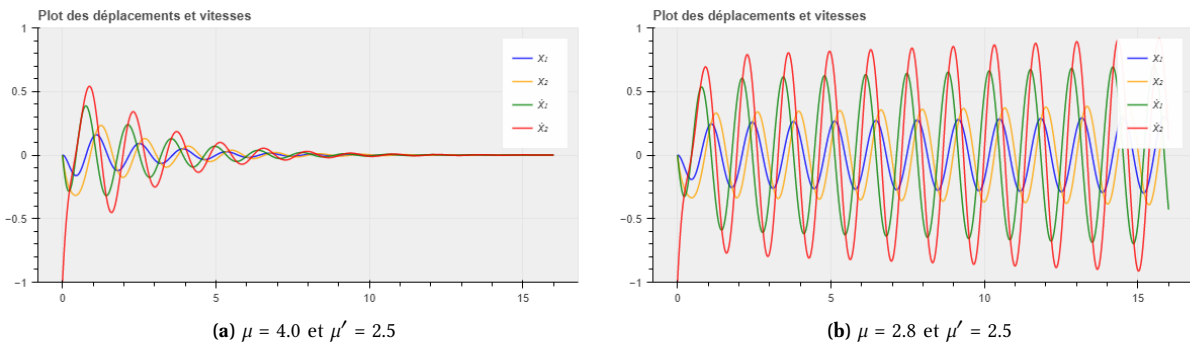


Figure 1.6 – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec $m = 1$, $m' = 1$, $k = 16$, $k' = 5$, $v_0 = -1.0$, $t_f = 32$. Dans le premier cas (a), on observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$. Dans le second cas (b), on constate que le système diverge.

Pour certaines valeurs (specifiquement de μ et μ'), on constate que le système converge vers son état

d'équilibre attendu $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$. En revanche pour certaines (voir figure 1.6b), il diverge³. Pour étendre les travaux dans cette section, on pourrait :

1. Calculer analytiquement et numériquement les état d'équilibres $Y_{eq} \in \ker(E)$; puis en distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice E , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les parametres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

1.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé ici. On ajoute donc une troisième variable afin de décrire le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 1.7. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 1.8.

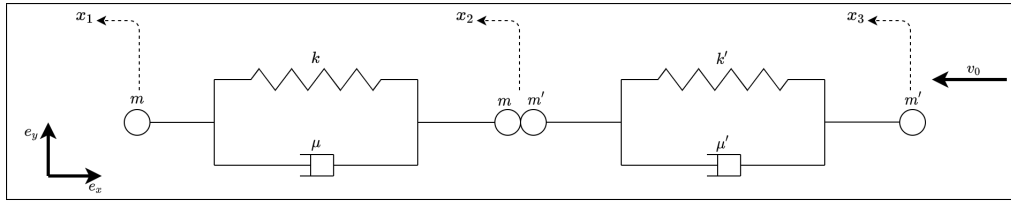


Figure 1.7 – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables x_1 , x_2 , et x_3 décrivant les mouvements de chaque noeud.

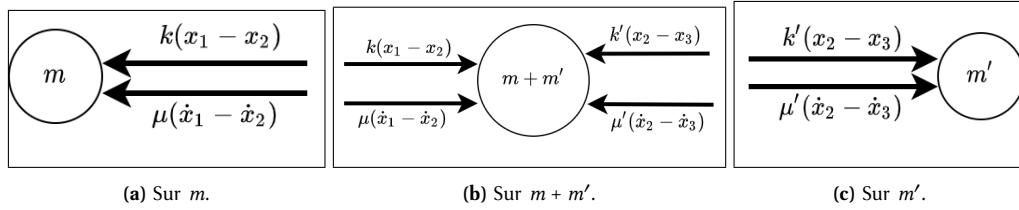


Figure 1.8 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 1.5 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (1.15)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}. \quad (1.16)$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible. En posant $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, le système d'EDO revient à l'équation (1.17) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (1.17)$$

3. La divergence pour ce cas est particulièrement évidente lorsque $\mu < \mu'$.

où $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$. On pose ensuite $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$ et le système équation (1.17) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (1.18)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 1.4), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble de masse $2(m + m')$ après collision et fixation de la masse m' (à vitesse v_0) sur la masse m (de vitesse v'_0)⁴. Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée v_f , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées P_{avant} et $P_{\text{après}}$. On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2mv_0 + 2m'v'_0 &= (2m + 2m')v_f \\ \Rightarrow v_f &= \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (1.18) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure figure 1.9 (issue du notebook code/simu1D/Percussion1D-2.ipynb).

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (1.19)$$

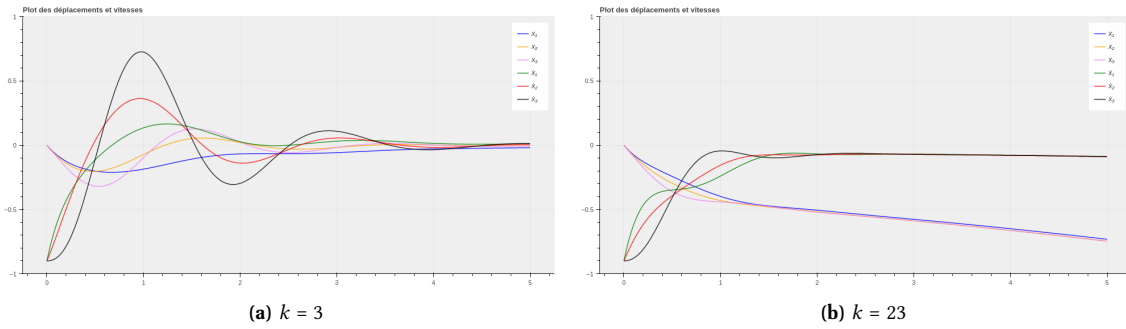


Figure 1.9 – Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec $m = 1$, $m' = 1$, $k' = 22$, $\mu = 6$, $\mu' = 2$, $v_0 = -1.8$, $t_f = 5$. Sous certaines conditions (forte dissipation, raideur du floe percuté élevée, etc.), on observe le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

La figure 1.9 permet d'observer la nuance avec le problème de contact parfaitement inélastique. Il est difficile de distinguer les cas qui aboutissent à une convergence des déplacements de ceux qui divergent. Observons donc à présent un problème de contact inélastique avec séparation des masses.

1.2.3 Premier modèle pour la collision inélastique avec séparation des masses

Reprenons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps $\delta t^* = [t^-, t^+]$ de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses m et m' en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités

4. Le vecteur v'_0 n'est pas marqué à la figure 1.7 (i.e. $v'_0 = 0$). L'introduction de ce vecteur permet de généraliser le problème.

précédemment (figures 1.4 et 1.7), et nous le présentons à la figure 1.10 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 1.11.

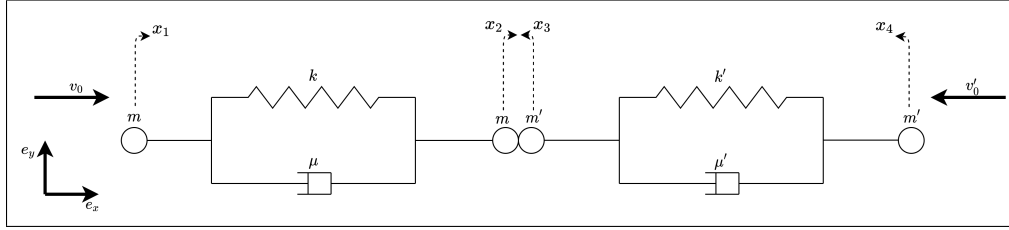


Figure 1.10 – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les nuds m et m' en contact sont étudiés séparément. On représente les variables x_1 , x_2 , x_3 , et x_4 décrivant les mouvements de chaque noeud.

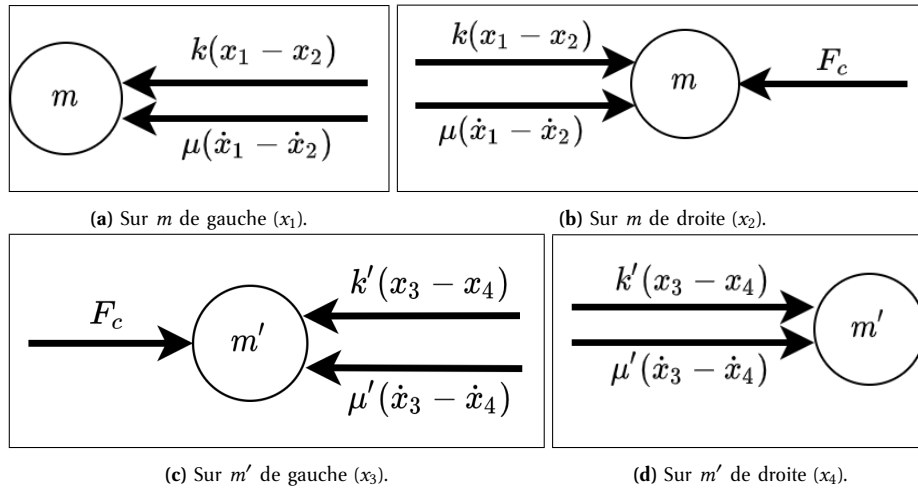


Figure 1.11 – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 1.5 et 1.8 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces. F_c représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.20)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de x_2 et x_3 pour éliminer la force de contact F_c et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (1.21a) \\ m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), & (1.21b) \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). & (1.21c) \end{cases}$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant $x_2(t) = x_3(t)$ p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses m et m' peuvent être étudiées comme une unique masse $m + m'$. La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble $m + m'$. Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses $\dot{x}_1(t^+)$, $\dot{x}_2(t^+)$, $\dot{x}_3(t^+)$ et $\dot{x}_4(t^+)$ immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (1.18)), nous réutilisons les quantités \dot{x}_1 et \dot{x}_4 données par ce système (l'équation (1.18)) dans

lequel x_2 et x_3 sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car x_1 et x_4 n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$ est aussi calculé suivant le modèle équation (1.18) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnue dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons l'équation (1.21b) entre les instants t^- et t^+ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_I. \quad (1.22)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$ et $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$ les vitesses des noeuds en contact avant collision, et $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$ et $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$ les vitesses après contact. L'équation (1.22) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (1.23)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution ε ⁵. On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 1.12.

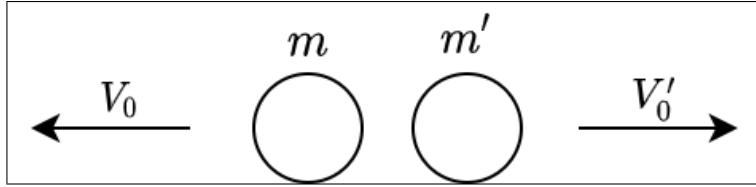


Figure 1.12 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (1.24) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (1.24)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (1.23) et (1.24) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1 + \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 + \varepsilon)m v_0 + (m' - \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (1.25)$$

Une fois leur vitesses "initiales"⁶ obtenues, on calcule donc les déplacements des différents noeuds des réseaux, et les fractures éventuelles qui s'en suivent. Plus précisément, on a par exemple pour le premier floe :

- son noeud de gauche x_1 a pour vitesse v_0 avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc ;
- son noeud de droite x_2 a pour vitesse v_0 avant le choc, mais passe de façon discontinue à V_0 après le choc.

En procédant de manière similaire, nous obtenons les déplacements et les vitesses des noeuds du deuxième floe après la collision. Une simulation permet d'obtenir le résultat de la figure 1.13.

1.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses

Dans cette section, nous introduisons un modèle 1D plus général que ceux présentés dans les deux sections précédentes (voir sections 1.1 et 1.2.3). Les floes sont cette fois représentés par une multitude de noeuds, de ressorts et de dispositifs visqueux. Contrairement à l'approche par déplacement que nous avons adopté à la section 1.1, nous considérons ici une approche par position des noeuds dans le repère absolu

5. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

6. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour le deuxième phase de la percussion.

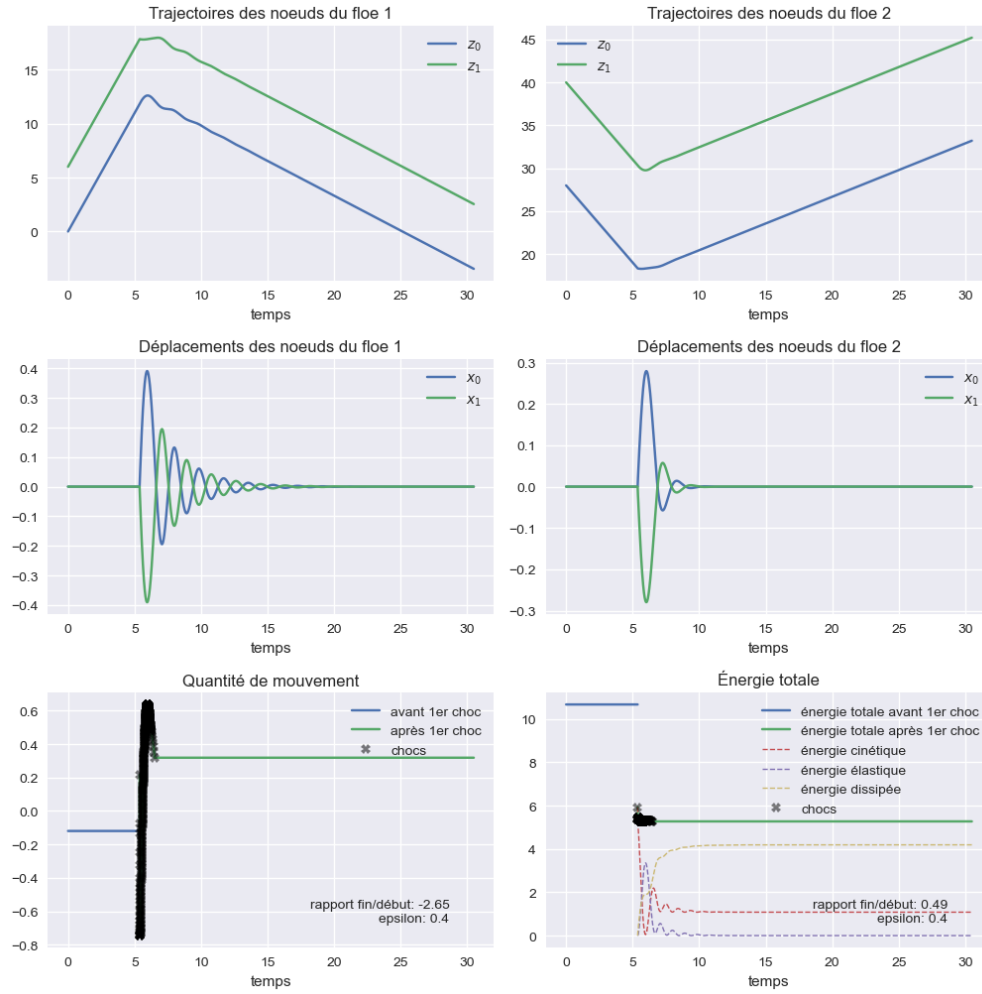


Figure 1.13 - Un résultats obtenus avec le premier modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [PercussionSolver.py](#)), et la simulation correspondante à travers ce LIEN SEAFILE.

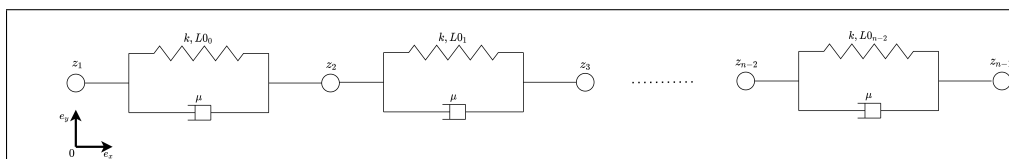


Figure 1.14 - Modélisation d'un floe 1D comme un assemblage de n masses reliées par des ressorts et des dispositifs visqueux. Nous nous servons dorénavant des positions z des nœuds dans le repère absolu. k est la constante de raideur uniforme de tous ses ressorts, et μ le coefficient de dissipation pour tous les dispositifs visqueux. Aussi, le terme $L0_i$ désigne les longueur à vide du ressort i .

$\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (voir figure 1.14).⁷ Signalons que dans la suite, les dispositifs visqueux ne seront plus représentés afin de faciliter les simulations.

7. Pour une raison inexpliquée, l'approche par déplacement ici ne conserve pas les positions à l'équilibre des ressorts.

Commençons par simuler les déplacements et les vitesses des noeuds d'un floe contenant n noeuds. De facons similaire aux sections précédentes, la loi de comportement du système est la suivante :

$$\begin{cases} m\ddot{z}_0 = k(z_1 - z_0 - L0_0) + \mu(\dot{z}_1 - \dot{z}_0), \\ m\ddot{z}_1 = k(z_2 - z_1 - L0_1) + \mu(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k(z_1 - z_0 - L0_0) - \mu(\dot{z}_1 - \dot{z}_0), \\ \vdots \\ m\ddot{z}_{n-1} = k(z_n - z_{n-1} - L0_{n-2}) + \mu(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1}). \end{cases} \quad (1.26)$$

Pour résoudre ce système, nous le posons sous forme matricielle, et nous le transformons en un système d'EDO du premier ordre. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{z}_1 \\ \vdots \\ \ddot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ B & C \end{pmatrix}}_{2n \times 2n} \underbrace{\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix}}_{(2n) \times (2n-2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{(2n) \times (2n-2)} \underbrace{\begin{pmatrix} L0_0 \\ L0_1 \\ \vdots \\ L0_{n-2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(2n-2) \times 1}, \quad (1.27)$$

où I_n est la matrice identité de taille n ; B et C des matrices de taille $n \times n$; et D une matrice de taille $(n) \times (n-1)$. On a :

$$B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & k & & & \\ k & -2k & k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & k & -2k & k \\ & & & k & -k \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -\mu & \mu & & & \\ \mu & -2\mu & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & -2\mu & \mu \\ & & & \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & & & & \\ k & -k & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -k \\ & & & & k \end{pmatrix}.$$

Concernant la percussion⁸, nous proposons aussi une approche différente de calculer les vitesses des noeuds après choc. En effet, nous appliquons non pas le principe de la conservation de la quantité de mouvement, mais celui de la conservation de l'énergie cinétique. Ce choix provient du fait que dans ce modèle, les deux noeuds en contact ne sont pas considérés comme un système isolé. En effet, les deux noeuds sont affectés par les forces des ressorts et des dispositifs visqueux qui leur sont rattachés. Ces deux forces ont un travail non nul et ne sont donc pas conservatives (voir figure 1.15). Nous appliquons donc la conservation de l'énergie cinétique pour obtenir une équation pour les vitesses après choc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m'(v'_0)^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}m'(V'_0)^2. \quad (1.28)$$

Nous maintenons l'équation de restitution équation (1.24) utilisé dans les sections précédentes :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (1.29)$$

8. Tout comme dans les sections précédentes, nous réservons l'exposant "prime" (') pour décrire les paramètres du deuxième floe de glace.

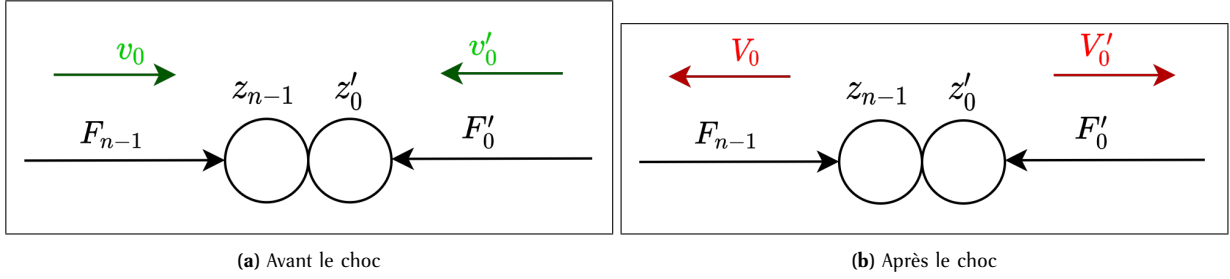


Figure 1.15 – Situation avant et après la percussion de deux floes. Nous considérons ici que le floe de gauche dans la percussion possède n noeuds. Les forces appliquées par les floes voisins aux noeuds en contact sont : $F_{n-1} = k(z_{n-1} - z_{n-1} - L0_{n-2}) + \mu(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})$, et $F'_0 = k'(z'_1 - z'_0 - L0'_0) + \mu(\dot{z}'_1 - \dot{z}'_0)$, conformément à l'équation (1.26).

La résolution du système ci-haut nous permet d'obtenir les vitesses V_0 et V'_0 respectivement pour les noeuds de gauche et de droite dans la collision⁹ :

$$V_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ et } V'_0 = V_0 + X, \quad (1.30)$$

avec :

$$X = \varepsilon(v_0 - v'_0), Y = m(v_0)^2 + m'(v'_0)^2, a = m + m', b = -2m'X, c = m'X^2 - Y, \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour tester ce modèle, nous effectuons des simulations avec trois noeuds ayant 7 et 8 noeuds respectivement. Nous étudions aussi la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique totale¹⁰ et nous obtenons les résultats présentés à la figure 1.16. Bien que ce modèle conserve l'énergie mécanique du système (voir figure 1.16), nous nous rendons compte qu'il présente plusieurs manquements ; en particulier que la conservation de l'énergie cinétique entre en opposition directe avec la notion d'élasticité au rebondissement (traduite par le coefficient de restitution ε). C'est pour résoudre ces problèmes que nous avons développé un troisième modèle pour la percussion 1D.

1.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses

Ce modèle a été développé pour aborder la question de non conservation de l'énergie mécanique totale après la collision. Il prend plus au sérieux la question du passage macro/micro. Celà dit, les équations qui régissent le déplacement des noeuds (voir EQUATION ...) de chaque floe en collision sont maintenues. La différence avec le modèle présenté dans la sous-section précédente (section 1.2.4) apparaît au niveau du calcul des vitesses après choc.

Rappelons que le modèle macroscopique a été développé par M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss [RLW15] et nous l'avons présenté avec détails à travers un résumé de la thèse de M. Rabatel [Rab15] dans la ???. Le modèle qui y est développé considère un morceau de glace comme un solide indéformable et le système perd de l'énergie mécanique à travers le coefficient de restitution macroscopique ε . Dans le modèle microscopique que développons ici, les floes sont des solides élastiques (système masse-ressort-dispositif visqueux) et le problème est de trouver à quelle perte d'énergie le ε correspondrait lorsque deux noeuds de deux floes entrent en collision. Autrement dit, il faudrait trouver une correspondance entre les coefficients de restitution macroscopiques et microscopiques.

Notre système de deux noeuds au moment de la collision perd donc de l'énergie. L'absence de forces de frottements¹¹ veut dire que l'énergie mécanique est transformée en énergie interne (thermique). Les figures 1.15

9. Notons que les tous les noeuds qui ne sont pas en contact conservent leurs vitesses pendant le choc.

10. Somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle élastique, et de l'énergie dissipée par frottement visqueux.

11. Dans le modèle actuel, les frottements de l'air et de la mer ne sont pas pris en compte.

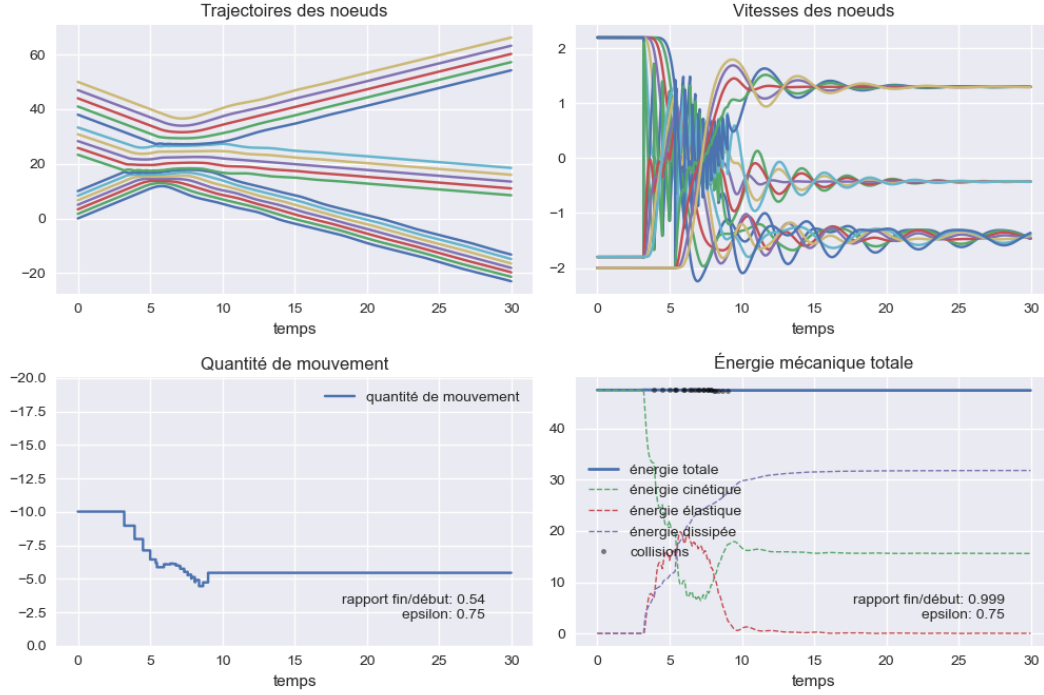


Figure 1.16 – Un résultats obtenus avec le deuxième modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [FractureSolver.py](#)), et la simulation correspondante à travers ce LIEN SEAFILE.

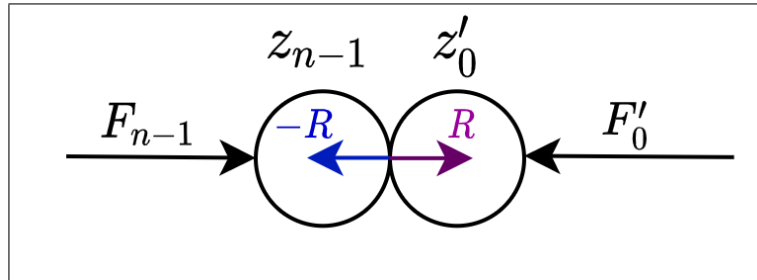


Figure 1.17 – Situation durant la percussion de deux floes. Nous observons ici la force R exercée par chaque noeud sur l'autre, qui suit la loi de l'action et de la réaction.

et 1.17 permettent de mieux appréhender la percussion dans ce cas. Pour calculer les vitesses des noeuds après choc, nous reconsidérons l'équation (1.24) qui introduit le coefficient de restitution de Newton :

$$V_0 - V'_0 = -\varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (1.31)$$

Pour trouver une deuxième équation et obtenir les vitesses des noeuds, nous nous tournons vers une technique fréquemment utilisée dans l'industrie du jeu vidéo [Hec97] pour gérer les collisions d'objets. Dans cette technique, nous considérons que la collision se produit entre les instants t^- et t^+ . Cet intervalle de temps, très court, fut calculé durant les travaux de M. Rabatel [Rab15, p.87] sur la collision rigide entre deux floes. On a :

$$m\ddot{z}_{n-1} = F_{n-1} - R, \text{ et } m'\ddot{z}'_0 = F'_0 + R.$$

Après avoir intégré ces équations tout en supposant que les forces F_{n-1} et F'_0 restent constantes¹² entre t^- et t^+ , nous posons :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} R dt, \quad J = \int_{t^-}^{t^+} F_{n-1} dt = F_{n-1} \Delta t, \quad \text{et} \quad K = \int_{t^-}^{t^+} F'_0 dt = F'_0 \Delta t.$$

On obtient donc deux équations supplémentaires pour former le système d'équations (1.31) à (1.33).

$$V_0 = v_0 + \frac{J - I}{m}, \quad (1.32)$$

$$V'_0 = v'_0 + \frac{K + I}{m'}. \quad (1.33)$$

Le calcul de la quantité I permet donc d'achever la résolution de ce système. A cet effet, nous obtenons :

$$I = \frac{(v_0 - v'_0)(1 + \varepsilon) + \frac{J}{m} - \frac{K}{m'}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}} \quad (1.34)$$

Pour tester ce modèle, nous avons effectué la même simulation qu'avec le modèle précédent. Rappelons que la seule différence entre ces deux modèles est le traitement des vitesses après contact. Les résultats sont donc résumés à la FIGURE CI-BAS :

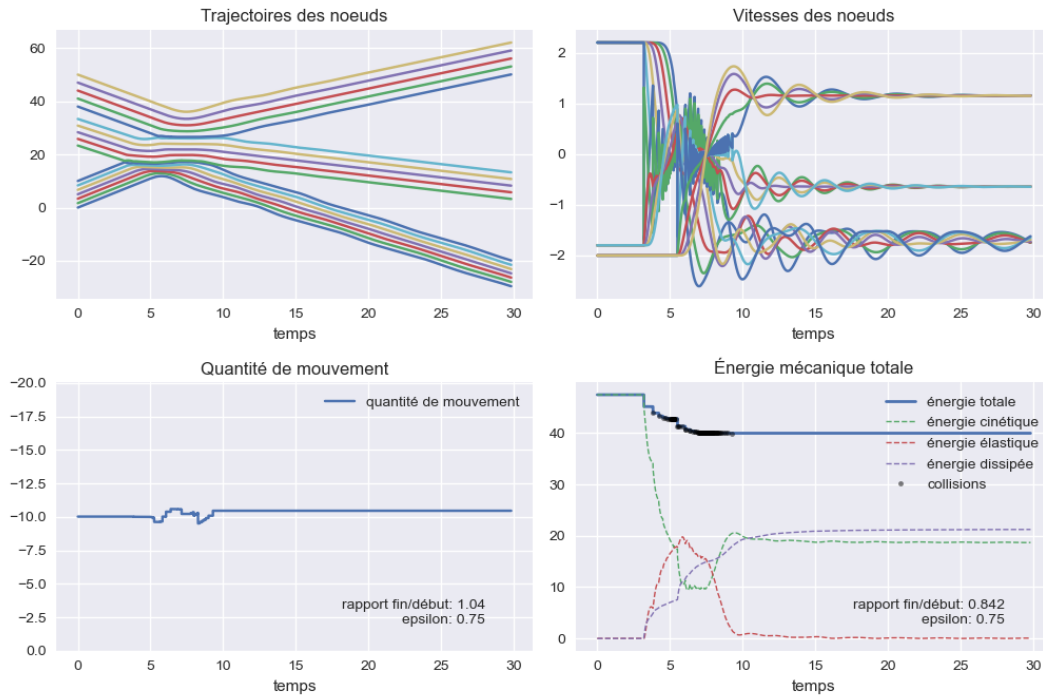


Figure 1.18 – Un résultats obtenus avec le troisième modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [FractureSolver.py](#)), et la simulation correspondante à travers ce LIEN SEAFILE.

Nous observons effectivement qu'il y a diminution de l'énergie totale à chaque collision. Cependant, il reste à savoir si cette perte d'énergie au niveau microscopique correspond à la perte observée au niveau macroscopique (passage micro/macro), surtout lorsque surviennent des fractures dans les floes.

12. En effet, la durée de la percussion est négligeable à l'échelle des temps de simulation.

1.3 Modélisation de la fracture

1.3.1 Méthode du champ de phase

La nécessité de prédire les fractures des matériaux dans les matériaux industriels gagne en importance chaque année. En mécanique des sciences computationnelles, la Virtual Crack Closure Technique (VCCT) (REFERENCE A LA PAGE 2 DE PHASE FIELD EN ANGLAIS), la Extended Finite Element Method (X-FEM), Cohesive Zone Method (CZM), et d'autres modèles de fractures discret représentent la fracture comme une entité discontinue à partir de laquelle la variable d'intérêt est obtenue. Ces méthodes demandent non seulement des re-maillages plus fins, mais aussi des algorithmes robustes pour pouvoir capturer les fractures. Ceci est numériquement coûteux, particulièrement lorsque les fractures ont des géométries complexes.

FIGURES (a) et (c) de FIGURE 1 DU PHASE FIELD EN FRANCAIS

L'approche par champ de phase est née des travaux de Franckfort et Marigo (REFERENCE), et de leur régularisation par Bourdin de al. (REF). Rappelons que l'approche variationnelle développée dans ces travaux consiste à formuler le problème de fissuration comme un problème de minimisation de l'énergie du solide fissuré exprimée comme :

ÉQUATION 1 DE PHASE FIELD EN FRANCAIS

Cette approche conduit à une implémentation numérique élégante où les complexités dues aux fractures discrètes sont éliminées. Pour éviter cette difficulté, une approche régularisée de la description des discontinuités associées aux fissures consiste à remplacer la fonctionnelle originale par une fonctionnelle approchée (REFERENCES PHASE FIELD EN FRANCAIS). Dans ce cadre, les fissures ne sont plus décrites par des surfaces mais par un champ de phase endommagée $d(\mathbf{x})$. L'énergie est alors exprimée par :

ÉQUATION 2 DE PHASE FIELD EN FRANCAIS

En introduisant une discrétisation en temps $T = \{t^0, t^1, \dots, t^n, t^{n+1}, \dots, t^N\}$. A chaque pas de temps t^{n+1} , le problème consiste à déterminer le champ de déplacements \mathbf{u}^{n+1} et le champ de phase endommagée d^{n+1} tels que :

$$\mathbf{u}^{n+1}, d^{n+1} = \underset{\mathbf{u} \in \mathcal{K}_A, 0 \leq d^n \leq d^{n+1}}{\operatorname{argmin}} E$$

où \mathcal{K}_A est un champ de déplacements cinématiquement admissible. Un exemple de densité de fissure pour un modèle de premier ordre est donné par :

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} \nabla d \cdot \nabla d,$$

où l est un paramètre de régularisation des discontinuités de fissures. Une fonction d'histoire est introduite pour décrire les effets d'histoire, et des possibles chargements et déchargements [MHW10] :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \Psi^+(\mathbf{x}, \tau). \quad (1.35)$$

Dans équation (1.35), Ψ^+ est la partie positive de la fonction densité d'énergie élastique telle que $\Psi(\varepsilon) = \Psi^+(\varepsilon) + \Psi^-(\varepsilon)$ et est définie par :

EQUATION 8

où ε est le tenseur des déformations linéarisé. $\langle x \rangle_{\pm} = (x \pm |x|)/2$ et ε^{\pm} sont les parties positives et négatives du tenseur des déformations. Nous posons à présent g_c le taux de libération critique de l'énergie de type Griffith [MHW10, p.5], \mathbf{f} un vecteur de forces de volumes, $\bar{\mathbf{u}}$ et $\bar{\mathbf{F}}$ les déplacements et efforts imposés sur les bords associés $\partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_F$ (VOIR FIGURE CI-HAUT). Nous écrivons enfin la loi de comportement comme :

EQUATION 9

ce qui nous permet d'obtenir le problème couplé suivant pour déterminer $d(\mathbf{x})$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

EQUATIONS 5 ET 6

Quelques résultats obtenus par cette méthode ont été présentés dans les travaux de D. Balasoiu à la SECTION (VOIR FIGURE). Malgré l'efficacité de cette méthode, notre travail à son sujet durant ce stage s'est limité à son assimilation. En effet, nous ne l'avons pas implémentée par faute de temps. Il se trouve qu'en 1D avec un faible nombre de noeuds, une astuce alternative est envisageable.

1.3.2 Une approche combinatoire pour la fracture

Etant donné le déplacement des noeuds du floes à un temps précis t^{n+1} , nous recherchons la fracture qui minimise l'énergie potentielle totale au temps t^{n+1} :

$$E^{n+1} = \text{énergie potentielle élastique au temps } t^{n+1} + \text{ténacité} \times \text{longueur de la fracture éventuelle au temps } t^{n+1}. \quad (1.36)$$

La longueur de la fracture correspondant ici à la longueur à vide du ressort¹³ à cette position si celui-ci s'était brisé. Notre approche combinatoire consiste ainsi à calculer les énergies correspondantes à toutes les fractures possibles dans le floe, et nous récupérerons la plus petite de ces énergies E_{min}^{n+1} . Conformément à l'approche de Griffith, une fracture n'apparaît que si $E_{min}^{n+1} \leq E_{min}^n$.

FIGURE ILLUSTRATIVE DE CETTE APPROCHE

L'approche combinatoire n'est supportable qu'en 1D car à chaque pas de temps, il y a autant de fractures admissibles qu'il y a de ressorts¹⁴. En effet, à chaque ressort brisé, c'est un nouveau floe qui est créé. Cette simplification élimine aussi le problème de *propagation de la fracture*; en 1D, nous ne traiterons donc que le problème de *nucléation de la fracture*.

Tous ceci n'est évidemment pas le cas en dimension supérieure, et nous devons étudier toutes les combinaisons possibles de ressorts qui cèdent simultanément; ce qui est très coûteux. Il est donc primordial d'implémenter la méthode du champ de phase pour toute adaptation de nos résultats en dimension 2 ou 3.

1.4 Algorithme de calcul 1D

Nous présentons dans cette section l'algorithme que nous avons adopté pour développer notre code de simulation de la percussion ainsi que la fracture de floes 1D. Notons que l'implémentation de la percussion correspond au modèle présenté à la section 1.2.5. Cependant, les autres modèles de percussion peuvent facilement être obtenus en changeant le contenu de la fonction `computeAtContact` que nous détaillerons plus tard. Quant à la fracture, nous avons implémenté l'approche combinatoire présentée à la section 1.3.2. En résumé, l'algorithme dans l'intervalle de temps $[t^n, t^N]$ est le suivant :

METTRE L'ALGORITHME DANS UNE BOITE

1. Initialisation : Les positions \mathbf{q}^n , les vitesses \mathbf{v}^n de tous les noeuds de tous les floes sont connus. Mettre à jours les chargements aux bords au temps courant t^{n+1} ¹⁵
2. Calcul des déplacements : Calcul des positions des noeuds $\mathbf{q}^{n+1}, \dots, \mathbf{q}^N$ et des vitesses associées $\mathbf{v}^{n+1}, \dots, \mathbf{v}^N$. Nous utilisons ici les équations ...

13. Nous utiliserons la désignation *ressort* ici pour indiquer à la fois le ressort et le dispositif visqueux situé entre deux noeuds adjacents (VOIR FIGURE SUR LA PARTIE PRÉCÉDENTE)

14. En réalité, les deux ressorts extrêmes ne peuvent se briser, car cela donnerait naissance à des floes sans ressorts

15. Pour simplifier nos calculs, aucun chargement n'est imposé aux bords du floe; nous avons des conditions de Neumann durant toutes nos simulations.

3. Détection des fractures : pour chaque pas de temps $t^k \in [t^{n+1}, t^N]$ et pour chaque floe, rechercher la configuration qui présente l'énergie potentielle totale minimale E_{min}^k , et la comparer avec l'énergie E_{min}^n . En cas de fracture, i.e. $E_{min}^k \leq E_{min}^n$, on retient l'indice de fracture potentielle¹⁶ du floe concerné (disons f) $checkFrac_f = k$; sinon, $checkFrac_f = N$.
4. Détection des collisions : pour chaque pas de temps $t^k \in [t^{n+1}, t^N]$ et pour chaque noeud, on se demande s'il y a collision avec le noeud voisin de droite. En cas de collision, on retient l'indice de collision potentielle des noeuds concerné (disons e_1 et e_2) $checkColl_{e_1} = checkColl_{e_2} = k$; sinon, $checkColl_{e_1} = checkColl_{e_2} = N$.
5. Mise à jour des indices potentielles de fracture : Tous ces indices sont reinitialisés au minimum de tous les indices de fracture $checkFrac = \min checkFrac_{f \in \mathcal{F}}$, où \mathcal{F} désigne l'ensemble des floes.
6. Mise à jour des indices potentielles de collision : Désignons par $checkColl'$ le minimum de tous les indices de collisions $\min checkColl_{e \in \mathcal{E}}$, où \mathcal{E} désigne l'ensemble des neouds du problème. Tous les indices sont reinitialisés à $checkColl = \min checkColl', checkFrac$.
7. Invalidation des quantités : Toutes les positions et les vitesses calculées (à l'étape 2) qui survienne après une collision ou une fracture sont invalidées.
8. Finalisation : on recommence à l'étape 1 à partir de $checkColl$. On repète ainsi jusqu'à ce que $checkColl = N$

Notons que l'algorithme présenté ci-haut omet plusieurs détails indispensables pour une implémentation efficace en langage Python. Par exemple, l'invalidation des quantités est prise en main par les fonctions de détection des collision et de fracture. Nous fournissons donc la méthode `runSimulation()` de la classe `FractureSolver` ci-bas :

COLLER COLLER `runSimulation` (Indiquer ce que chacune des fonction indiquée fait)

Pour mieux assimiler le programme, nous proposons ci-bas un diagramme UML qui illustre la structure du code à travers ses différentes classes et fonctions.

DIAGRAMME UML ET README DU REPOSITORY (Indiquer qu'il suffit de changer la fonction `computeAtContact` pour passer d'un modèle à l'autre.)

Tous ce code est stocké dans un dépôt GitHub privé dont une explication du contenu est donnée dans le fichier README dont la capture est présentée ci-bas.

README DU REPO GITHUB

Nous fournissons aussi ci-bas quelques frames d'un simulation obtenue par le l'algorithme et le code Python présentés ci-haut :

PRÉSENTER 5 A 10 TIME STEPS D'UNE SIMULATION AVEC PLUSIEURS FLOES

1.5 Résumé des résultats obtenus

Pour le problème 1D, nous avons non seulement étudié le déplacement des noeuds d'un floe, mais aussi ce qui se passe après une collision de ces noeuds. En considérant le floe comme un réseau de ressorts, nous avons pu étudier la nucléation (et la propagation) d'une fracture suivant le modèle de Griffith sans recourir à la méthode du champ de phase.

Nous avons effectué plusieurs simulation qui ont montrer que les ressorts se brisent lorsqu'ils sont fortement comprimés. Le modèle 1D adopté (voir section 1.2.5) a également montré que le système perd de son énergie (cinétique) au cours du temps, ce qui

16. Les indices potentielles sont aussi les temps à partir desquels nous vérifions les fractures/collisions à l'étape suivante

Quand à la validation des résultats, nous n'avons pas réussi à effectuer des tests en laboratoire. Cette tâche représente la prochaine étape avant l'adoption de ce modèle 1D. Ceci dit, les floes de glace sont généralement considérés comme des objets 2D du fait de leur taille négligeable face au rayon de la terre. Une étude en dimension supérieure est donc indispensable pour un déploiement de notre modèle de fracture à l'échelle des floes de glace.

Bibliographie

- [Hec97] Chris HECKER. « Physics, Part 3 :Collision Response ». In : *Game Developer Magazine* (1997). URL : <https://www.chrishecker.com/images/e/e7/Gdmphys3.pdf>.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/ae3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [MHW10] Christian MIEHE et al. « A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.45-48 (2010), p. 2765-2778.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [RLW15] Matthias RABATEL et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9 (2015), p. 5887-5909.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.