

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant
Roussel Desmond NZOYEM

Superviseur
Stéphane LABBÉ

Enseignant référent
Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

16 mars 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	ii
1 État de l'art	1
1.1 Résumé de thèse de D. Balasoiu	1
1.1.1 Théorie de la fracture : état de l'art	1
1.1.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace	3
1.1.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier	6
1.1.4 Un processus stochastique de maillages isotropes	8
1.1.5 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope	11
1.1.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur	14
1.1.7 Discussion et questions ouvertes	17
Bibliographie	19

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Résumé de thèse de D. Balasoiu

Les travaux de D. Balasoiu concernent la modélisation et la simulation du comportement mécanique de floes de glace [Bal20a]. Il s'agit d'une amélioration des travaux de M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss [Rab15; RLW15] prenant en compte la fracture des floes. Précisément, ce travail se focalise sur l'initiation de la fracture, ainsi que la prédiction du chemin que la fracture emprunte. Jusqu'à présent, les floes étaient considérés comme des corps rigides; dans sa thèse, BALASOIU les considère comme des corps élastiques. Son travail est divisé en deux parties. Il commence par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d'un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord (i.e. à une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, il cherche à obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe qui percute un autre floe ou une structure solide.

1.1.1 Théorie de la fracture : état de l'art

La théorie de fracture la plus répandue de nos jours est due à A.A. Griffith. Dans ses travaux [Gri21], il invalide les résultats que C. Inglis [Ing13] qui ne tenaient pas en compte la taille de la fracture; il présente donc la croissance d'une faille comme une compétition d'énergie entre l'énergie élastique¹ et l'énergie de surface². Le critère de Griffith est un critère thermodynamique qui stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de moindre énergie. En effet, sur un matériau élastique Ω dont la frontière est subdivisée en deux zones $\partial\Omega_D$, et $\partial\Omega_N$, on pose [Bal20a, p.31] :

$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx \\ \mathcal{P}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega \setminus \sigma(t)} W(x, \nabla \varphi(t, \sigma(t))) \, dx - \mathcal{F}(t, \sigma(t)) \\ \mathcal{F}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega} f_v(x) \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x) \cdot \varphi \, dx \end{aligned}$$

où

- E_{el} est l'énergie élastique du matériau sans faille.
- $\sigma(t)$ représente la fracture au temps t , supposée à l'équilibre.
- \mathcal{P} l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille $\sigma(t)$ au temps t .
- $e(u)$ est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau.

1. Énergie relâchée lorsqu'un défaut subit un accroissement. Cette énergie diminue durant la fracture.

2. Énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces (les bords de la fissure). Cette énergie augmente avec l'accroissement de la fracture.

- $\varphi = \text{Id} + u$ représente le déplacement du matériau supposé suffisamment régulier.
- W est la densité d'énergie du matériau élastique, supposé hyper-élastique.
- f_s est la contrainte surfacique appliquée sur le bord $\partial\Omega_N$.
- f_v est le champ de force volumique appliquée sur Ω .

D'après le critère de Griffith [Bal20a, p.32], la fonction $\sigma(t)$ doit vérifier :

1. $\frac{d\sigma(t)}{dt} \geq 0$;
2. $-\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) \leq k$;
3. $\frac{d\sigma(t)}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) = k$.

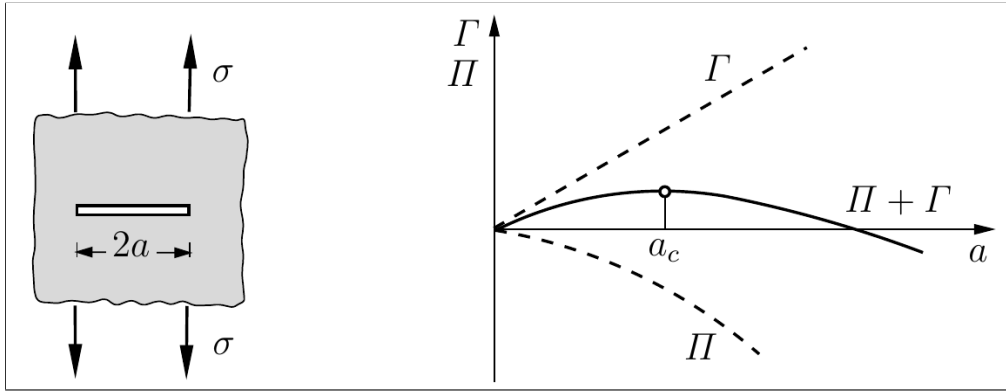


FIGURE 1.1 – Illustration du critère de Griffith [GS17]. (Π et Γ représentent les énergies potentielles et de fracture respectivement. Cette figure est à refaire manuellement!)

Une illustration de ce critère peut être observée à la figure 1.1. Comme mentionné plus haut, ce modèle souffre de problèmes de nucléation et de prédiction de la fracture. Pour contourner le problème de nucléation, les mécaniciens considèrent que tout matériau possède des microfissures, et ce sont ces dernières qui sont à l'origine des fissures observables à l'œil. Quant au problème du chemin emprunté par la fracture, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que les critères d'Irwin [Irw57] sont invalides car, ils impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne peut être courbé.

Le modèle proposé par Francfort et Marigo [FM98], suit un résultat théorique dû à De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci [DGCL89], qui prouvent le théorème d'existence d'un minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah qui intervient dans la détection des contours d'une image. Présentons les données géométriques du problème [Bal20a, p.35]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe, dont la frontière $\partial\Omega$ est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté U_D , tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique f_v . On suppose que Ω est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée W . Ainsi, lorsque le matériau Ω subit (sans fracture) une déformation $\varphi = u + \text{Id}$ suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a noté u le champ de déplacement du matériau, et $e(u)$ son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture σ :

$$E_{\text{el}}(u, \sigma) = \inf_{u \in V_{U_D, \sigma}} \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a défini l'espace fonctionnel $V_{U_D, \sigma}$ par :

$$V_{U_D, \sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^N) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}.$$

Francfort et Marigo proposent l'énergie de fracture suivante sur $\partial\Omega_D$:

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_{\sigma} k(x) d\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire $k(x)$ traduit la rigidité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau; \mathcal{H}^{N-1} représente la mesure de Hausdorff de dimension $N - 1$, qui peut être comprise comme la longueur du contour pour $N = 2$. Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u, \sigma) &= E_{\text{el}}(u, \sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma) \\ &= \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) dx + \int_{\sigma} k(x) d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

où σ est une union dénombrable d'ensembles rectifiables. Ainsi donc, une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle E_{tot} . Signalons que BALASOIU montre, dans le cas d'un mouvement anti-plan³, que le modèle est quasiment identique au modèle de De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci, pour lequel un théorème d'existence a pu être exhibé.

La méthode numérique employée est la méthode à champ de phases. Elle repose sur la notion de Γ -convergence, en particulier sur le résultat de **convergence des minimums**. On remplace l'inconnue σ par une suite de fonctions lisses v_{ε} . Par exemple, dans le cas du traitement d'image, pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dont se sont inspiré Bourdin, Francfort et Marigo, on constate d'après Ambrosio et Tortorelli [AT90] que la suite de fonctionnelle

$$G_{\varepsilon}() = \int_{\Omega} \left(|u - g|^2 + (v^2 + \eta_{\varepsilon}) |\nabla u|^2 + \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx,$$

Γ -converge vers la fonctionnelle limite

$$G_f = \int_{\Omega} |u - g|^2 + |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

où $g : \Omega \mapsto [0, 1]$ est la fonction de contraste de l'image, et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de u , noté S_u , qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables [Bal20a, pp.33-35]. Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat de Γ -convergence sont disponibles dans la littérature. On cite par exemple ici les résultats obtenus dans [Nag+19] à la figure 1.2.

1.1.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace

Le modèle présenté dans la section précédente n'est pas adapté à notre étude. BALASOIU a donc développé un modèle qui ne nécessite pas de fonctionnelle lissée, comme l'on fait plusieurs modèles de glaciologie (voir [LLL15]), en supposant que les fractures sont des segments. Un résultat d'existence (dans les cas où le floe n'est pas encore fracturé) est prouvé à l'aide de la convergence de Mosco. De plus, BALASOIU introduit un problème d'évolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du floe. Les fractures obtenues par ce problème d'évolution sont ainsi des lignes brisées. Le résultat d'existence n'a pas été prouvé pour ce cas. Concernant le côté numérique, une méthode *meshless*⁴ est proposée.

3. Un mouvement **antiplan** est mouvement pour lequel le champ de déplacement u est porté par un vecteur constant.

4. Car l'ensemble discrétisé des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé.

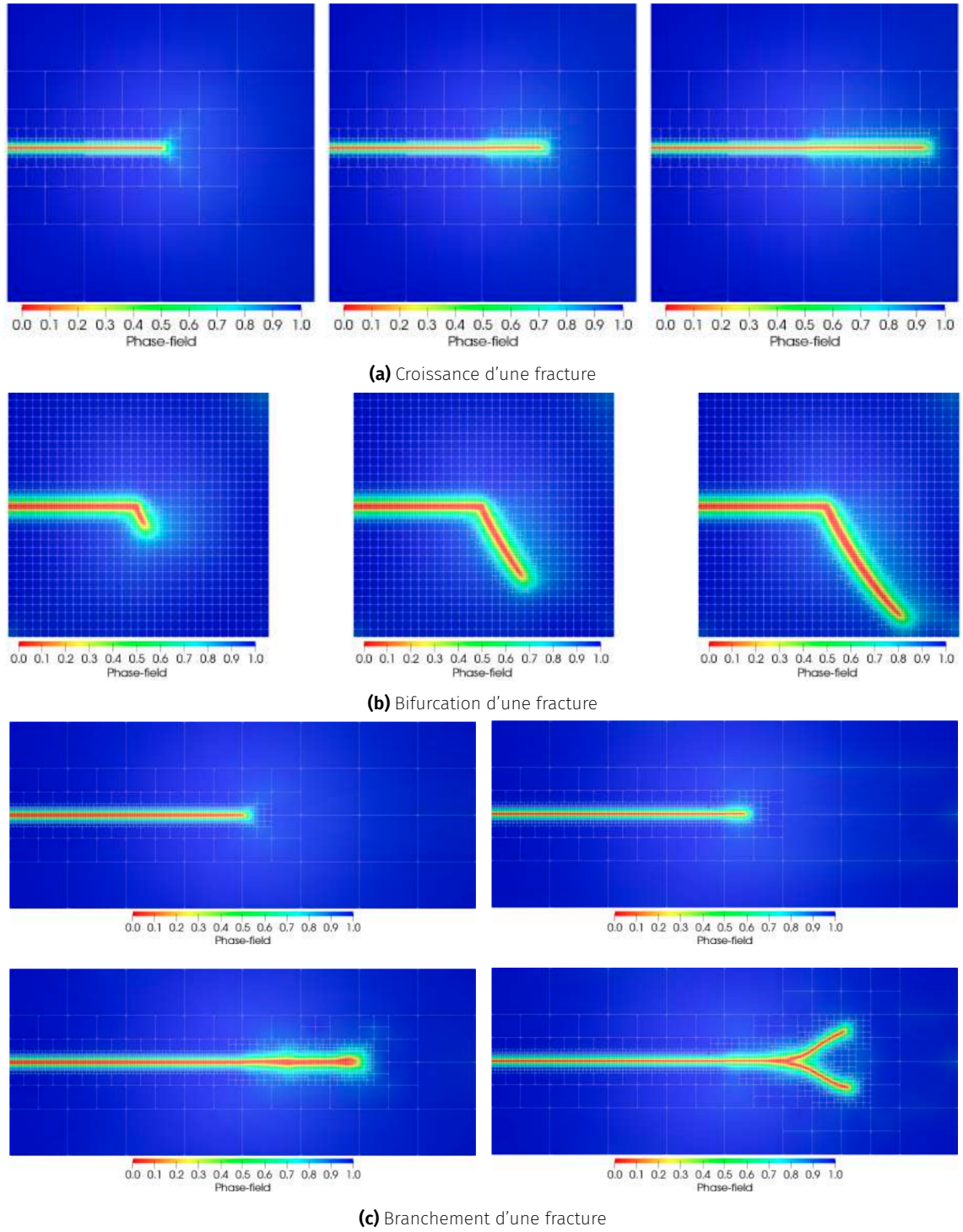


FIGURE 1.2 – Trois résultats numériques obtenus dans [Nag+19] à l'aide d'une discrétisation éléments finis (hp-FEM) et volumes finis en ne remaillant le domaine que lorsque c'est nécessaire.

Les modifications apportées pour traiter le modèle statique (dans \mathbb{R}^2) sont décrites ci-bas. Lorsqu'on fixe la fracture σ , l'énergie élastique prend la forme :

$$E_{\text{el}}(\cdot, \sigma) : A_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx,$$

où A représente le tenseur de Lamé du matériau, i.e.

$$\forall e \in M_2\mathbb{R}, \quad Ae = \lambda \operatorname{tr}(e)I_2 + 2\mu e,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau; et l'ensemble des déplacements admissibles A_σ est :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma; \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

avec u^+ et u^- les restrictions de u aux régions Ω^+ et Ω^- respectivement (obtenues par extension de la fracture σ de façon à ce qu'elle soit traversante [Bal20a, p.50]). ν (normale à la fracture orientée du bord vers le centre de Ω) et ν . On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma$$

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx + k\mathcal{H}^1(\sigma),$$

où Σ représente l'ensemble des segments orientés partant de la frontière donnée par

$$\Sigma = \left\{ [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega},]a, b[\subset \Omega \right\}.$$

Une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple (u, σ) qui vérifie

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Ensuite, BALASOIU remarque que la solution n'est pas unique. Il définit donc un problème de d'évolution quasi-statique à la manière de [FM98], en considérant un problème de chargement monotone :

$$U_D(t) = tU_D.$$

On note $\overline{\Sigma}$ l'ensemble des lignes brisées de Ω , sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également $\operatorname{end}(\sigma)$ la fin d'une ligne brisée $\sigma \in \overline{\Sigma}$. On définit maintenant [Bal20a, p.48], pour toute ligne brisée $\sigma \in \overline{\Sigma}$ l'ensemble des fractures admissibles partant de σ :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \left\{ \sigma \cup [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a = \operatorname{end}(\sigma), b \in \overline{\Omega},]a, b[\subset \Omega \setminus \sigma \right\}.$$

On définit également l'ensemble des déplacements admissibles associées :

$$A_{t,\sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma; \mathbb{R}^2) \mid u = tU_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et pour toute ligne brisée σ . De ces définitions, on peut en exhiber un problème d'évolution discret, et un problème d'évolution continue en faisant tendre t vers 0. Le problème d'évolution continue admet des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets [DMT02; Cha03].

Lorsque la fracture est fixée, BALASOIU prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation, en utilisant la théorie des inégalités variationnelles, l'inégalité de Korn [Cia88], le théorème de Lions-Stampacchia [LS67]. Pour le cas statique, il montre que le problème statique a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, ceci en se servant principalement de la convergence de Mosco. Pour le modèle quasi-statique, un résultat d'existence n'a pas été trouvé, et une conjecture pour une ligne brisée qui possède un point

d'auto-intersection a été proposée.

1.1.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier

Dans ce chapitre, BALASOIU souhaite approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous n'étudions que l'état d'équilibre du réseau de ressorts.

Commençons par quelques définitions pour le maillage sur un floe. Pour définir un réseau de ressort τ , on définit l'ensemble de ses points τ_0 disposées en forme de grille.

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2$$

De façon similaire, l'ensemble des arrêtes se nomme τ_1 , et l'ensemble des cellules τ_2 . Le réseau τ est obtenu à partir de τ_0 en traçant les côtés de chaque carré; à la frontière, on trace les diagonales des carrés incomplets. On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de τ_0 dans \mathbb{R}^2 . On définit également deux triangulations de ω à partir de τ , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions $e_x + e_y$ et $e_x - e_y$. On note ces triangulations $\tilde{\tau}$ et $\hat{\tau}$ respectivement. Afin d'éviter les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point, on définit avec l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \overline{w}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$

Sur chaque arête $v \in \tau_1$, on place un ressort de longueur à vide $l_v = |v|$, et de raideur k_v (voir figure 1.3a). Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressorts, et $u = \varphi - \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{v \in \tau_1} \frac{k_v}{2} (|\varphi(v)| - |v|)^2. \end{aligned}$$

En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, d'angle de repos $\frac{\pi}{2}$, et de raideur $G|v|^2$ (voir figure 1.3b). L'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{v_1, v_2 \in c \cap \tau_1 \\ v_1 \cap v_2 \in \tau_0}} \frac{G|v|^2}{4} \left(\angle(\varphi(e_{v_1}), \varphi(e_{v_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. On note enfin

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale du réseau.

Ensuite, BALASOIU considère la suite τ_n de réseau défini, comme aux paragraphes précédents par

$$\tau_{n,0} = \Omega \cap \frac{1}{n} \mathbb{Z}^2.$$

On rappelle que k_1, k_2 représentent les constantes de raideurs des ressorts sur les arrêtes du réseau dans les deux directions de Ω , et G la constante de torsion des ressorts aux nœuds. Sur le maillage τ_n , après définition des énergies redimensionnées élastiques de traction R_n , et de torsion T_n , [Bal20b, p.91] montre les théorèmes suivants.

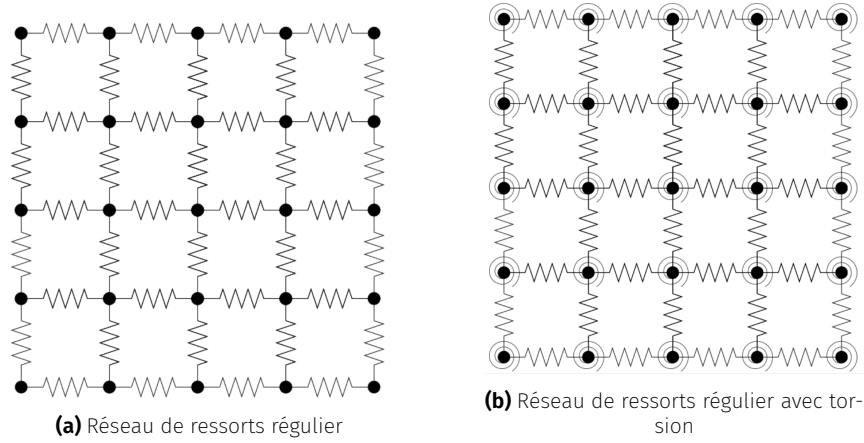


FIGURE 1.3 – Réseau de ressort considéré durant cette étude.

Theorème 1.1.1 (Γ -convergence) *La suite d'énergie redimensionnée $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge, pour la topologie faible de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, vers la fonctionnelle limite :*

$$E_{\text{el}} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h e(u) : e(u) \, dx,$$

avec C_h le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie :

$$C_{h,ijkl} M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2,$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si l'on a $k_1 = k_2 = k = 8G$. Dans ce cas, on a :

$$E_{\text{el}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

avec : $\lambda = 0$, et $\mu = \frac{k}{2}$.

Theorème 1.1.2 (Équi-coercivité) *Soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maillages du plan, et $(u_n) \in \mathbb{N}$ une suite de déplacements admissibles de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Le théorème 1.1.1 permet de constater que le tenseur de rigidité obtenu, lorsqu'il est isotrope, a un coefficient de Poisson nul⁵. BALASOIU a donc proposé un calcul formel de la limite simple de la suite d'énergies discrètes dans le cas où le réseau de ressorts serait stochastique, de loi isotrope. En particulier, il trouve dans ce cas un coefficient de Poisson fixe de 1/4.

5. Cela correspond par exemple à un étirement longitudinal du réseau de ressorts, sans effet (amincissement ou épaissement) sur la section transversale.

1.1.4 Un processus stochastique de maillages isotropes

Le résumé du chapitre écrit dans [Bal20b, p.136] est le suivant. Ce chapitre fait appel à des outils fin de probabilité conditionnelle et de processus stochastiques, telles que *mesure et formules de Campbell*, *distribution de Palm*, etc.

Dans ce chapitre, BALASOIU a construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. Il comence par donner plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules nous se montrerons très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

La notions de processus ponctuel est un outil qui peut permettre de construire un ensemble de points dénombrable, sans point d'accumulation. BALASOIU définit un **processus stochastique simple de \mathbb{R}^d** comme : une variable aléatoire Φ d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans l'espace $(\mathcal{I}, \mathcal{N})$. Elle induit une loi de probabilité \mathbb{P}_Φ sur $(\mathcal{I}, \mathcal{N})$: l'espace $(\mathcal{I}, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi)$ est un espace de probabilités. Dans cette définition, nous avons :

- \mathcal{I} est ensemble des parties localement finies de \mathbb{R}^d . Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des motifs de points de \mathbb{R}^d ;
- \mathcal{N} est la plus petite tribu (sur \mathcal{I}) qui rende mesurable les applications qui comptent le nombre de points du processus.

Une fois le processus défini, on peut définir sa **mesure d'intensité** Λ :

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ B &\mapsto \mathbb{E}(\Phi(B)) = \mathbb{E}(\text{Card } \Phi \cap B),\end{aligned}$$

où $\mathbb{E}(F)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$.

La première formule de Campbell permet de relier la moyenne d'une somme sur les points du processus avec l'intensité du processus. En effet, soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x).$$

Un processus stochastique ponctuel Φ est dit de Poisson (cf. figure 1.4) s'il vérifie les hypothèses suivantes :

1. Φ est à éparpillement indépendant, c'est à dire que si $(B_i)_{i \in 1, \dots, k}$ sont des boréliens deux à deux disjoints; alors les variables aléatoires $\Phi(B_i)$ sont indépendantes;
2. pour tout B borélien, la variable aléatoire $\Phi(B) = \text{Card } \Phi \cap B$ suit une loi de poisson de moyenne $\mu = \lambda \nu_d(B)$, c'est à dire que :

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu).$$

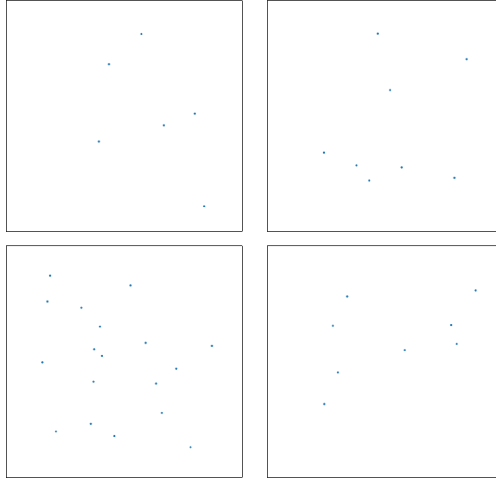


FIGURE 1.4 – Tirages d’un processus de Poisson d’intensité 10 sur le carré unité [Bal20b, p.137]. En premier, le nombre de point est obtenu par une v.a. suivant une loi de Poisson d’espérance 10. Ensuite les coordonnées des points sont obtenus par simulation de deux v.a. suivant des lois uniformes [Kee18].

BALASOIU ne s’arrête pas là. Il définit aussi les notions d’espace Polonais, mesure de comptage, et de convergence faible dièse. Ces notions sont importante vu la nécessité d’associer un point du processus ponctuel à une marque, i.e. un simplexe de \mathbb{R}^d dans notre cas. BALASOIU introduit les notions de mesure de Campbell, qui permet d’obtenir la seconde formule de Campbell. Ensuite il définit la distribution de Palm, permettant ainsi d’obtenir la très importante formule de Campbell-Mecke :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).$$

où $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, mesurable et positive. Lorsque le processus ponctuel Φ est stationnaire d’intensité λ , on a :

$$\int_{\Omega} \sum_{x \in \varphi} f(x, \varphi_{-x}) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x).$$

où \mathbb{P}_0 désigne la distribution de Palm. Le résultant de Slynvyak-Mecke suivant est une généralisation de cette dernière formule, lorsque les processus Φ est de Poisson, et la fonction mesurable positive $f : (\mathbb{R}^d)^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi} f(x_1, \dots, x_n, \Phi) \right) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}(f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})) dx_1 \dots dx_n.$$

La prochaine étape consiste en la présentation d’un **theoreme ergodique** qui lie la forme globale d’un seul tirage avec la forme moyenne en un point de plusieurs tirages. Ici aussi, BALASOIU se base sur les travaux de D. J. Daley et D. Vere-Jones [DVJ08].

Theorème 1.1.3 Soit Φ un processus de Poisson, et f une fonction mesurable et positive qui vérifie :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(\Phi_{-x}) \right) < +\infty.$$

On note B_n la boule de \mathbb{R}^d , centrée en 0 et de rayon n . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(B_n)} \sum_{x_i \in B_n \cap \Phi} f(\Phi_{-x_i}) = \int_{\Omega} f(\varphi) d\mathbb{P}_0(x).$$

Ensuite, BALASOIU s'attaque aux notions de maillages et pavages, en particulier les **pavages de Voronoi** (cf. figure 1.5). Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arrêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permetra de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sûre si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Soit donc $\varphi \in \Omega$ un ensemble localement fini de points. On appelle diagramme de Voronoi associé à φ le pavage régulier de \mathbb{R}^d par $(C(x))_{x \in \varphi}$ où la cellule $C(x)$ est définie par :

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(y, x) < \inf_{z \in \varphi \setminus \{x\}} \text{dist}(y, z) \right\}.$$

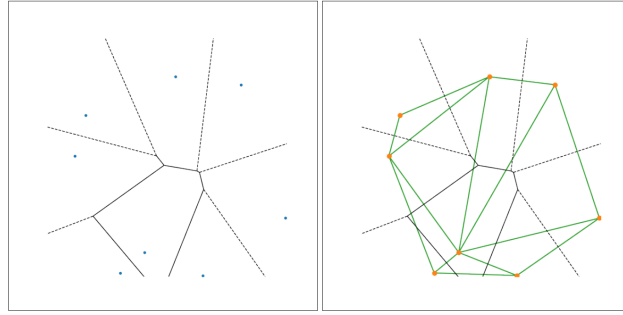


FIGURE 1.5 – Ensemble de points avec les diagramme de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) associés [Bal20b, p.138].

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (cf. théorème 1.1.3), BALASOIU montre que si Φ est un processus de Poisson, alors les points de φ sont presque sûrement en **position générale**⁶. En corrolaire, si φ est un ensemble de points en position générale, alors φ est l'ensemble des sommets du **maillage de Delaunay**⁷ D_φ construit sur le pavage de Voronoi V_φ .

Ce chapitre se termine par la notion de convergence d'une suite de maillages. BALASOIU montre que, si l'on dilate (cf. figure 1.6) le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtenons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Il a également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle sera utile dans le chapitre suivant, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

Soit donc $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, i.e. un ouvert connexe, de l'espace. Soit Φ un processus ponctuel de l'espace qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ une suite positive, croissante et divergente. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le processus ponctuel Φ_n par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}} \Phi.$$

6. Voir définition 4.4.5 de la thèse [Bal20b, p.128].

7. Une triangularisation de Delaunay maximise le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles.

On note τ_n (cf. figure 1.6) le maillage par simplexe définit presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points $\Phi_n \cap D$:

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D},$$

ce qui permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 1.1.4 *Si la suite d'intensités $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n),$$

alors, presque sûrement, la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de maillages de D converge uniformément vers D .

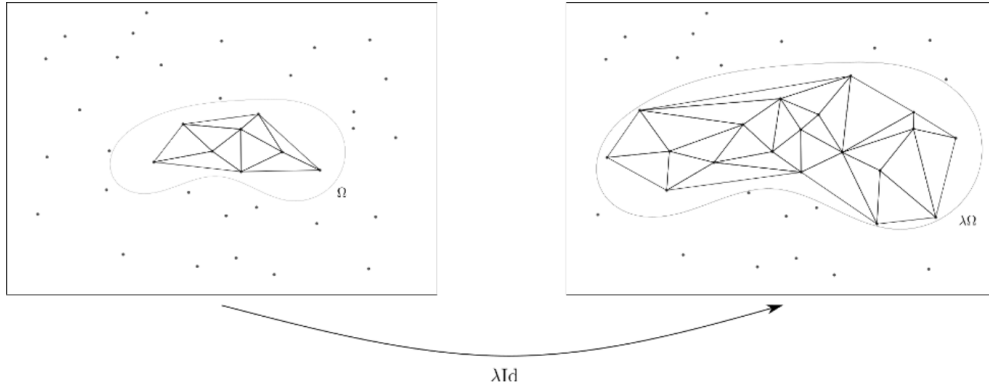


FIGURE 1.6 – Dilatation de l'ouvert D [Bal20b, p.138].

1.1.5 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope

Dans cette partie, BALASOIU propose un second résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau de ressorts. Dans la partie précédente, il avait proposé un résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau régulier, à mailles carrées. Ici, les mailles seront triangulaires. Plus précisément Le réseau de ressorts que nous utiliserons dans ce chapitre est défini dans la section précédente, et repose sur la théorie des processus stochastiques ponctuels. Nous proposons dans ce chapitre un résultat de Γ -convergence de l'énergie élastique sur un réseau de ressorts, issu d'un processus stochastique de loi isotrope.

Présentons le réseau de ressorts utilisé pour approcher l'énergie élastique d'un matériel continu D . Il s'agit des mêmes définitions utilisées pour introduire le théorème 1.1.4 ci-haut, cette fois ci **en dimension 2**. On suppose que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine du plan, i.e. un ouvert du plan, qui est connexe et dont la frontière est lisse. On considère une triangulation quelconque τ du domaine D . On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'espace des éléments finis $P1$ défini sur le maillage τ . On note, comme précédemment, $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \overline{w}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\}.$$

On souhaite construire un réseau de ressorts sur τ tel que l'énergie totale E_τ soit équi-coercive. Mais puisque l'on utilisera des triangulations construites sur un processus de Poisson, la coercivité n'est pas assurée. Pour remédier à ce manque de coercivité, on va placer sur τ deux types de ressorts : des **ressorts de traction** et des **ressorts de torsion**. Les constantes de raideur des ressorts de traction et de torsion dépendent des angles du triangle de base des ressorts, et elles tendent vers l'infini si l'angle correspondant tend vers 0. Les constantes de rigidité des réseaux de ressorts sont supposées constantes. On note, comme aux chapitres précédents, R_τ l'énergie du réseau de ressorts de traction, et T_τ l'énergie du réseau de ressorts de torsion. On note de plus :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale sur le réseau τ . On note également, pour tout triangle $t \in \tau_2$ du maillage, v_1 , v_2 et v_3 ses trois cotés, ainsi que θ_1 , θ_2 et θ_3 les trois angles opposés (voir figure 1.7a).

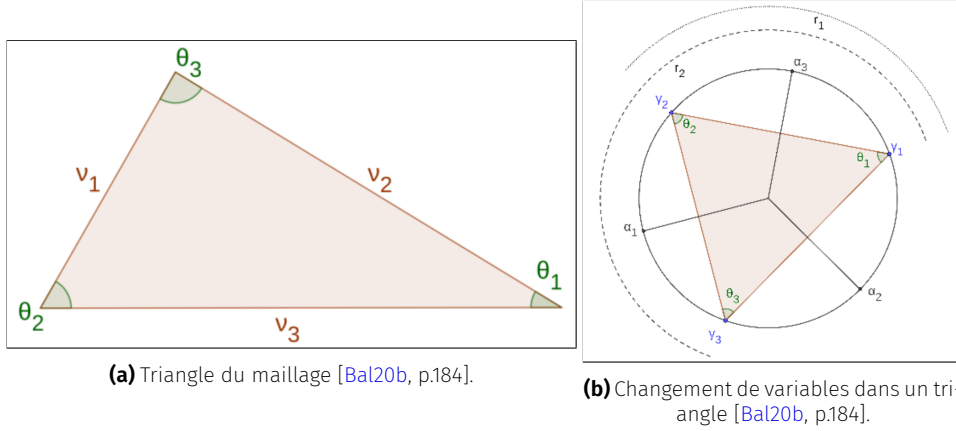


FIGURE 1.7 – Illustration des éléments du maillages, et des coordonnées.

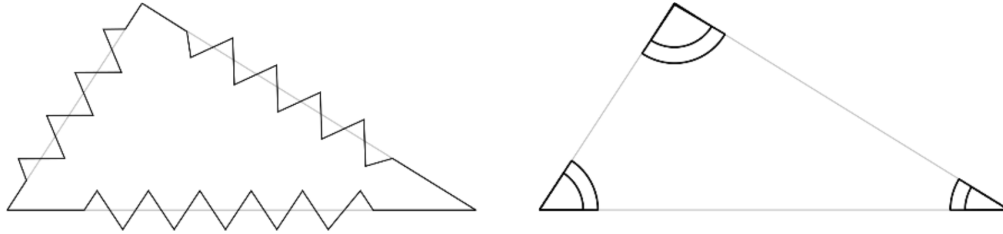


FIGURE 1.8 – Ressorts de traction (à gauche) et de torsion (à droite) [Bal20b, p.184].

On commence par définir l'énergie élastique du réseau de ressorts de traction R_τ , et on renvoie à la figure 1.8. On note $k > 0$ la constante de rigidité du réseau. On place, sur chaque arête v_i de chaque triangle t du maillage, un ressort de traction de longueur à vide $l_i = |v_i|$ et de raideur k_i , avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad k_i = \frac{k}{\sin(\theta_i)}.$$

Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressort, et $u = \varphi - \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$R_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k|v_i|^2}{2\sin(\theta_i)} \left(\|\nabla \varphi e_{v_i}\| - 1 \right)^2.$$

On définit maintenant l'énergie T_τ , et on renvoie aux figures 1.7b et 1.8. On note $G > 0$ la constante de rigidité de torsion du réseau. On place, sur chaque angle θ_i de chaque triangle t du maillage, un ressort de torsion de raideur G_i :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_i = \frac{G|v_{i+1}||v_{i+2}|}{\sin(\theta_i)}.$$

On définit l'énergie élastique discrète de l'assemblage :

$$T_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G|v_{i+1}||v_{i+2}|}{2\sin(\theta_i)} \left(\angle(\varphi(v_{i+1}), v_{i+2}) - \angle(v_{i+1}, v_{i+2}) \right)^2,$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. Ensuite, on étend les énergies élastiques définies sur les réseaux à $H^1(D, \mathbb{R}^2)$, en notant :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) & \text{si } u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) & \text{si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit maintenant la suite d'énergies élastiques définies sur la suite des réseaux $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On introduit un changement d'échelle des énergies $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive qui tend vers 0. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u), \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n$$

On donne enfin une version modifiée des suites fonctionnelles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui prenne en compte une condition de Dirichlet sur le bord de D . Soit donc $v \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la donnée du bord. On note :

$$W_n^v(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \tau_0, \text{dist}(p, \partial D) \leq \lambda_n, u(p) = v(p) \right\}.$$

On pose ensuite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que

$$E_n^v = R_n^v + T_n^v.$$

On énonce maintenant les trois théorèmes principaux du chapitre.

Théorème 1.1.5 (Convergence simple) *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, il existe une suite de déplacements discrets $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

et qui vérifie de plus :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_s(u)$$

avec :

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) dx,$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda, \mu} e : e = \lambda \text{tr}(e)^2 + 2\mu \text{tr}(e)^2,$$

avec λ et μ les premières et deuxième constantes de Lamé, qui valent :

$$\lambda = \frac{32k|A|}{9\pi^2} + \frac{3G|A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k|A|}{9\pi^2} - \frac{3G|A|}{4}$$

Theorème 1.1.6 (Γ -convergence) Supposons que la suite de changements d'échelle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

Alors, la suite de fonctionnelles redimensionnées $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle $E_{\text{hom}} : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$E_{\text{hom}}(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda_h, \mu_h} e : e = \lambda_h \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu_h \operatorname{tr}(e)^2.$$

De plus, pour toute donnée au bord v dans $\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, la suite de fonctionnelles $(E_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle $E_{\text{hom}}^v : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$E_{\text{hom}}^v(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u - v \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Theorème 1.1.7 (Équi-coercivité) Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de maillages du plan et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de déplacements admissibles de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, i.e. vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacements est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

1.1.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur

Ce dernier chapitre propose un résultat de quasi-staticité d'un réseau de ressorts percuté par un objet ponctuel lorsque la raideur du système et sa masse totale tendent vers l'infini. Lors de la collision de floes de glaces, la vitesse relative des floes (de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres par seconde, voir [Ram+09]) est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace (de l'ordre de grandeur de 1800 mètres par seconde pour les ondes de cisaillement, voir [Mar+19]). BALASOIU montre que, lors de la percussion d'un réseau masse-ressort par un objet solide, les effets dynamiques disparaissent lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini. Autrement dit, nous montrons que le réseau limite, de raideur infinie, est à chaque instant dans un état d'équilibre. Plus précisément, nous observerons que le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit **système intérieur** (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Le second, dit **système extérieur** (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts.

On étudie le phénomène de percussion d'un système masse-ressort de $n + 1$ particules, chacune de masse m , par un objet ponctuel P de masse M . Le système masse-ressort utilisé est de constante de raideur $k > 0$, et de constante de viscosité $\mu > 0$. Soit $\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ une triangulation compacte et connexe du plan. En chaque

noeud $q \in \tau_0$, on place une masse ponctuelle m . Sur chaque arête $\omega \in \tau_1$ de τ , on place en parallèle (voir figure 1.9) :

1. un ressort de longueur à l'équilibre ω et de raideur k ,
2. un dissipateur visqueux, de viscosité μ .

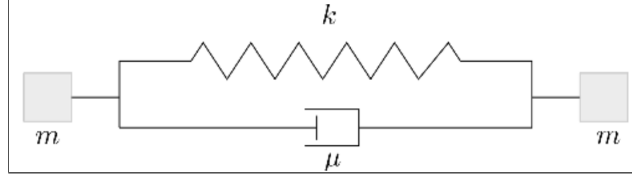


FIGURE 1.9 – Système élémentaire masse-ressort utilisé.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système masse-ressorts est à l'équilibre, et qu'il est percuté par la masse ponctuelle P au point $q_0 \in \partial\tau_0$. On note v_0 la vitesse du point P lors de la collision. On suppose également que le système $\{q_0, P\}$ devient **inséparable**, de masse $m + M$. Sur le maillage τ , on note τ_0 l'ensemble des noeuds du système. On a donc :

$$\tau_0 = \{q_0, \dots, q_n\},$$

où les q_i sont les coordonnées des masses. On rappelle que le système est à l'équilibre au temps $t = 0$. On note $a, b \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbb{R})$ les vecteurs de positions et vitesses initiales définis par :

$$\begin{cases} a = (q_0(0), \dots, q_n(0)), \\ b = (v_0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

On note de plus $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de connectivité :

$$0 \leq i < j \leq n+1, C_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } q_i \in \mathcal{V}(q_j), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{V}(q)$ désigne l'ensemble des voisins de la particule $q \in \tau_0$. On note encore $L_{ij} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de longueurs à l'équilibre dont l'expression est déduite de 0 ; et u_{ij} le vecteur unitaire (s'il existe) dans la direction de l'arête entre q_i et q_j . On obtient le système différentiel suivant en appliquant l'équation d'Euler-Newton sur les moments linéaires, et en exprimant la force de frottement du dispositif visqueux en fonction de \dot{q} :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\frac{k}{M+m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \frac{\mu}{M+m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[\frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(E)}$$

D'un point de vue énergétique, on a loi de conservation de l'énergie suivante :

$$E_{\text{el}}(t) + E_c(t) + E_r(t) = E_0$$

où $E_{\text{el}}(t)$, E_c , et E_r désignent respectivement l'énergie élastique du système, l'énergie cinétique, et l'énergie dissipée par les frottement visqueux [Bal20b, p.188]. E_0 désigne l'énergie initiale du système donnée par

$$E_0 = \frac{1}{2} (M + m) \|\mathbf{v}_0\|^2.$$

Sous ces hypothèses et ces définitions, BALASOIU obtient le théorème d'existence globale suivant.

Theorème 1.1.8 (Existence d'une solution globale) *On suppose que les conditions initiales adjointes au système équation (E) vérifient la condition énergétique :*

$$E_0 < \frac{k}{4} \left(\inf_{\omega \in \tau_1} |\omega| \right)^2.$$

Alors, le problème de Cauchy est bien posé⁸ et ses solutions sont globales.

Ensuite, afin d'obtenir un système a grande raideur et de supprimer la perturbations liées à la propagation des ondes élastiques, BALASOIU introduit une dépendance en ε des constantes physiques du système : k_ε , M_ε et μ_ε . En posant

$$k_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon}, \quad M_\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^2}, \quad \mu_\varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

le système masse-ressort se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\frac{k}{M + \varepsilon^2 m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \varepsilon \frac{\mu}{M + \varepsilon^2 m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], \\ \varepsilon^2 \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[\frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_\varepsilon)$$

On écrit également le système limite :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \frac{k}{M} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} \\ \mathbf{0} = \sum_{j=0}^n C_{ij} \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_{lim})$$

Ce problème est un problème de perturbation singulière, pour lequel BALASOIU prouve le théorème de limite quasi-statique ci-bas (en se servant principalement du théorème classique de A.N.Tikhonov [Tik52; Hop66]).

Theorème 1.1.9 (Limite quasi-statique) *Les solutions \mathbf{q}_ε et \mathbf{q} respectivement des systèmes perturbé équation (E_ε) et limite équation (E_{lim}) munis des conditions initiales⁹ existent, sont uniques, et globales. De plus, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Du point de vue numérique, les simulations ont permis de comprendre l'influence des différents paramètres physiques présents (masse des deux objets, raideur des ressorts, vitesse d'impact ...). De plus, le code Python et HTML/CSS développé fournira une bonne base pour analyser la localisation des vecteurs propres du système dynamique et identifier ceux qui agissent sur un déplacement du bord. Le principal résultat numérique utilisé est le suivant. À $\varepsilon > 0$ fixé, on note $(\lambda_i(\varepsilon))_{i \in \{0, \dots, 4n+3\}}$ les valeurs propres de l'opérateur associé à la linéarisation du système équation (E_ε) autour de sa position d'équilibre, et on les ordonne ainsi :

$$0 \geq \Re(\lambda_8(\varepsilon)) \geq \Re(\lambda_9(\varepsilon)) \geq \dots \geq \Re(\lambda_{4n+3}(\varepsilon)).$$

Nous définissons le saut spectral v_ε associé au système équation (E_ε) de la manière suivante :

$$v_\varepsilon = \frac{\Re(\lambda_{12}(\varepsilon))}{\Re(\lambda_{11}(\varepsilon))}.$$

8. Le système est bien posé si deux particules voisines restent à une distance $c > 0$ l'une de l'autre.

9. Des conditions initiales satisfaisant le théorème 1.1.8.

Ce saut représente l'écart entre les quatre premières valeurs propres non nulles du système, qui correspondent au système lent (SE), et la première valeur propre du système rapide (SI). Après avoir tracé le saut spectral ν_ε pour différentes triangulations τ (cf. figure 1.10a pour un exemple), BALASOIU constate qu'il s'agit de droites dont la pentes ne dépendent ni du tirage, ni de l'intensité du processus de Poisson-Delaunay. Il propose donc l'expression suivante pour ν_ε :

$$\ln(\nu_\varepsilon) = a_0(\tau) + \alpha \ln(\varepsilon),$$

avec $a_0(\tau)$ une quantité qui dépend du maillage τ , et α une constante universelle, indépendante de τ et ε numériquement estimée à la valeur :

$$\alpha = 2 \pm 10^3.$$

La figure 1.10c ci-dessous a été obtenue, pour un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500000, l'histogramme de la valeur de a_0 associée sur 1000 tirages.

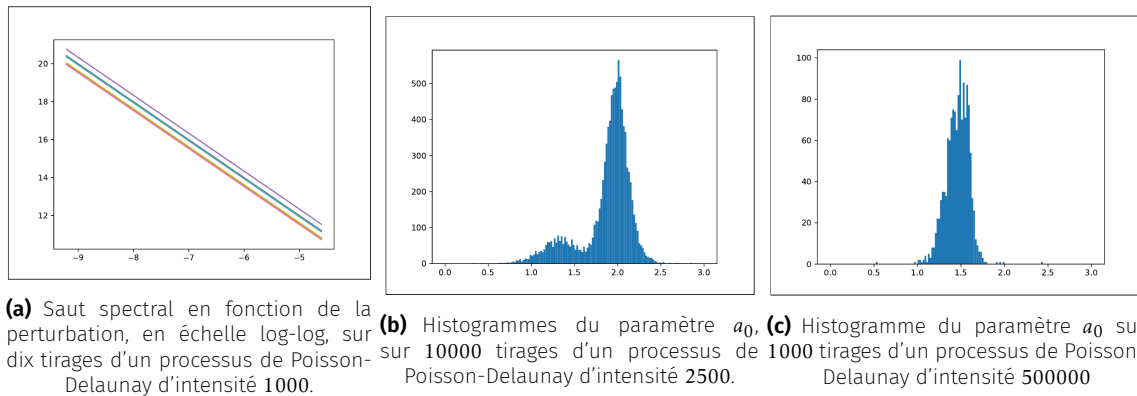


FIGURE 1.10 – Principaux résultats numériques obtenus [Bal20b, p.199].

Ces résultats semblent indiquer, à grande échelle au moins, que $a_0(\tau)$ prend ses valeurs entre 0.9 et 2.5. Nous observons également l'émergence de deux pics pour certaines intensités. Il semblerait que le pic de valeur moyenne la plus faible gagne en fréquence de représentation, jusqu'à concentrer la quasi-totalité des cas pour l'intensité de 500000.

1.1.7 Discussion et questions ouvertes

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse pour limiter la complexité du modèle. Ces simplifications sont à l'origine de simplifications que nous précisons ci bas :

1. Le modèle suppose que les floes sont d'épaisseur négligeable devant leur extension horizontale; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.
2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites [Bal20b, chp.2].
3. Au chapitre 6 [Bal20b, p.187], il serait également intéressant d'intégrer, comme dans les chapitres 3, 4, et 5, des ressorts de torsion en chaque noeud du système masse-ressort [Bal20b, p.187].
4. Au chapitre 5 BALASOIU, p.183, BALASOIU a montré que la suite d'énergies élastiques Γ -converge vers une énergie limite. De plus, lorsque le redimensionnement est suffisamment rapide, il a montré que la Γ -limite s'écrit comme l'énergie d'un matériau élastique homogène et isotrope, soumis à l'hypothèse des petits déplacements. Cette énergie dépend donc de deux paramètres, les deux constantes de Lamé du matériau homogénéisé. Il serait intéressant d'adapter l'étude numérique [OSAJ95] pour obtenir une expression des constantes de Lamé homogénéisées dans notre cas.
5. Il reste, à l'issue de la thèse, à obtenir une seconde limite spatiale. Cette limite est une limite de couche, qui indiquerait l'expression du déplacement au bord du floe lors de la percussio. Nous pourrions l'obtenir en sélectionnant les vecteurs propres du système dynamique masse-ressorts qui influent sur le comportement d'une couche mince du bord du floe [Bal20b, p.201].

6. Dans une prochaine étude, on pourrait étudier la percussion du système masse-ressort par un objet solide non ponctuel et qui ne serait pas fixé au système étudié. BALASOIU pense que le cas général peut se déduire du cas étudié au chapitre 6 [[Bal20b](#), p.187]. En effet, l'étude de la percussion complète reviendrait à ajouter, dans le système différentiel étudié, un nombre fini de perturbations singulières à des instants distincts.

Bibliographie

- [AT90] Luigi AMBROSIO et Vincenzo Maria TORTORELLI. « Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43.8 (1990), p. 999-1036.
- [Bal20a] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes, 2020. URL : <https://www-ljk.imag.fr/membres/Dimitri.BalasoIU/These.pdf>.
- [Bal20b] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [CFM09] Antonin CHAMBOLLE et al. « When and how do cracks propagate? » In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.9 (2009), p. 1614-1622.
- [Cha03] Antonin CHAMBOLLE. « A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 167.3 (2003), p. 211-233.
- [Cia88] Philippe G CIARLET. *Three-dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [DGCL89] E DE GIORGI et al. « Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set ». In : *Ennio De Giorgi* (1989), p. 654.
- [DMT02] Gianni DAL MASO et Rodica TOADER. « A model for the quasi-static growth of brittle fractures based on local minimization ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12.12 (2002), p. 1773-1799.
- [DVJ08] Daryl J DALEY et David VERE-JONES. *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume II: General Theory and Structure*. Springer, 2008.
- [FM98] Gilles A FRANCFORT et J-J MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46.8 (1998), p. 1319-1342.
- [Gri21] Alan Arnold GRIFFITH. « VI. The phenomena of rupture and flow in solids ». In : *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593 (1921), p. 163-198.
- [GS17] Dietmar GROSS et Thomas SEELIG. *Fracture mechanics : with an introduction to micromechanics*. Springer, 2017.
- [Hop66] Frank Charles HOPPENSTEADT. « Singular perturbations on the infinite interval ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 123.2 (1966), p. 521-535.
- [Ing13] Charles Edward INGLIS. « Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners ». In : *Trans Inst Naval Archit* 55 (1913), p. 219-241.
- [Irw57] George R IRWIN. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate ». In : (1957). URL : [https://www.scirp.org/\(S\(oyulxb452alnt1aej1nfow45\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379](https://www.scirp.org/(S(oyulxb452alnt1aej1nfow45))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379).
- [Kee18] Paul KEELER. « Simulating a homogeneous Poisson point process on a rectangle ». In : (2018).
- [LLL15] Wenjun LU et al. « In-plane fracture of an ice floe : A theoretical study on the splitting failure mode ». In : *Cold Regions Science and Technology* 110 (2015), p. 77-101.
- [LS67] Jacques-Louis LIONS et Guido STAMPACCHIA. « Variational inequalities ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 20.3 (1967), p. 493-519.

- [Mar+19] David MARSAN et al. « Characterizing horizontally-polarized shear and infragravity vibrational modes in the Arctic sea ice cover using correlation methods ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.3 (2019), p. 1600-1608.
- [Nag+19] Sindhu NAGARAJA et al. « Phase-field modeling of brittle fracture with multi-level hp-FEM and the finite cell method ». In : *Computational Mechanics* 63.6 (2019), p. 1283-1300.
- [OSAJ95] M OSTOJA-STARZEWSKI et al. « Linear elasticity of planar Delaunay networks. III : Self-consistent approximations ». In : *Acta mechanica* 110.1 (1995), p. 57-72.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Ram+09] Pierre RAMPAL et al. « Arctic sea ice velocity field : General circulation and turbulent-like fluctuations ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 114.C10 (2009).
- [RLW15] Matthias RABATEL et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9 (2015), p. 5887-5909.
- [Tik52] Andrei Nikolaevich TIKHONOV. « Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives ». In : *Matematicheskii sbornik* 73.3 (1952), p. 575-586.