

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant

Desmond Roussel NZOYEM

Superviseur

Stéphane LABBÉ

Enseignant référent

Christophe PRUD'HOMME



*Ce stage à été effectué dans le cadre du master 2 CSMI,
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
initié par le groupe SASIP au LJLL.*

Année académique 2020 - 2021

16 février 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	i
1 Introduction	1
2 Environnement économique du stage	2
2.1 Le secteur d'activité	2
2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions	2
3 État de l'art	3
3.1 Position du problème	3
3.2 Résumé de thèse de M. Rabatel	4
3.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer	5
3.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème	10
3.2.3 Validations et exploitations du modèle	13
3.2.4 Discussion	14
4 Travaux et apports	16
4.1 Les travaux effectués	16
4.2 Les apports du stage	16
5 Déroulement du stage	17
5.1 Journal de bord	17
6 Conclusion	18
Bibliographie	19

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Environnement économique du stage

2.1 Le secteur d'activité

2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions

Chapitre 3

État de l'art

3.1 Position du problème

Nous commençons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécessaires pour décrire le floe occupant la région fermée de l'espace Ω (voir figure 3.1) :

- Un ouvert connexe $\omega \in \mathbb{R}^2$ décrivant la section longitudinale du floe;
- Deux fonctions $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$ décrivant l'épaisseur du floe, telle que $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$;
- Le centre de masse du floe $G(\omega)$;
- Deux vecteurs $\mathbf{e}_1(\omega)$ et $\mathbf{e}_2(\omega)$ formant une base sur ω .

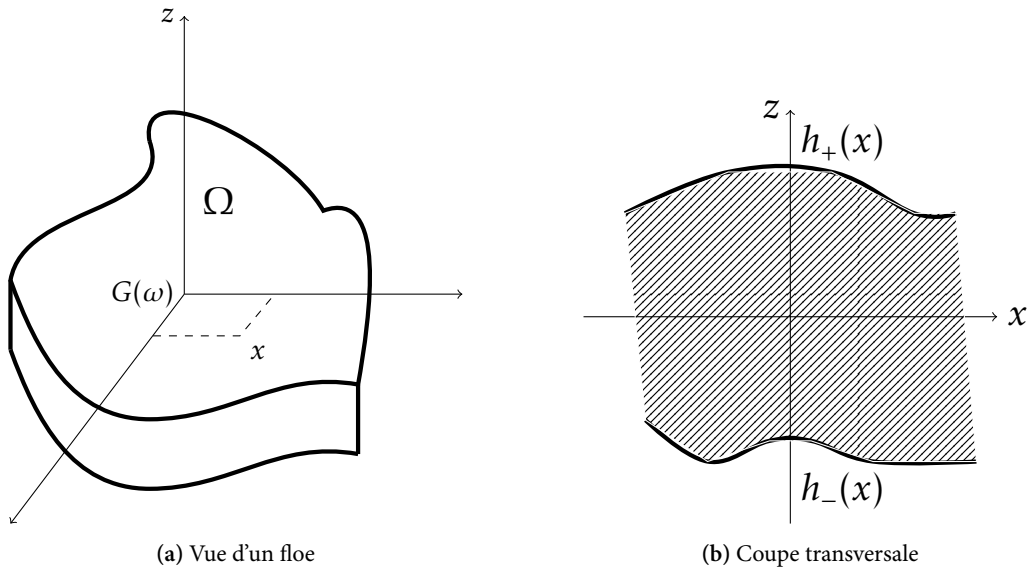


FIGURE 3.1 – Illustration de la géométrie d'un floe de glace Ω .

On confond le floe au volume qu'il occupe dans l'espace Ω :

$$\Omega = \{(x, z) \mid x \in \omega \in \mathbb{R}^2, z \in]h_-(x), h_+(x)[\}.$$

Les fonctions h_- et h_+ permettent de définir trois quantités (voir figure 3.2) :

- L'épaisseur moyenne du floe : $\bar{h} = \sup_{x \in \omega} h_+(x) - \inf_{x \in \omega} h_-(x)$;
- La plus forte épaisseur : $\bar{h}^* = \sup_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$;
- La plus faible épaisseur : $\underline{h}^* = \inf_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$.

Les vecteurs $\mathbf{e}_1(\omega)$ et $\mathbf{e}_2(\omega)$ sont liés à ω , et pointent vers un point fixe du bord $\partial\omega$ du floe c-à-d :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega \mid e_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{\|\sigma_i - G(\omega)\|}, \text{ pour } i \in \{1, 2\},$$

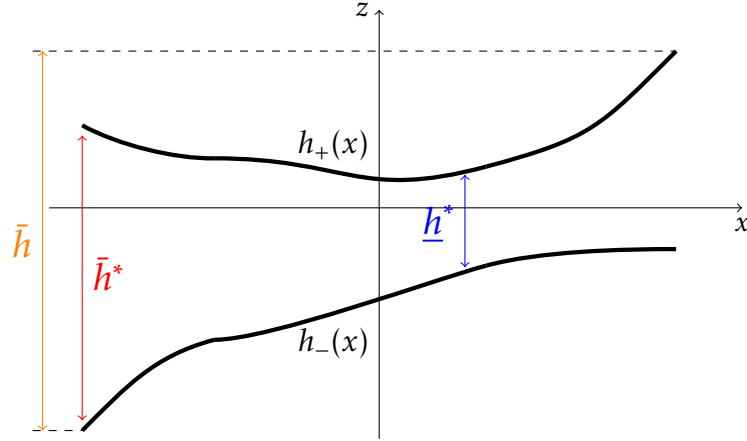


FIGURE 3.2 – Différentes épaisseurs décrivant un floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floe relativement plat (i.e \bar{h} faible), h_- sera pris identiquement nul, et h_+ constant.

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . Notons que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, et $\mathbf{e}_1(\omega) \cdot \mathbf{e}_2(\omega) = 0$ de façon à ce que la base orthonormée $(\mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega))$ soit directe.

Un floe $\Omega = (\omega, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), G(\omega), h_-, h_+)$ se déplace sur la mer¹ $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$. Au temps t après une translation de vecteur $u(t)$ (et de matrice $T_{u(t)}$), et une rotation de vecteur $\theta(t)$ (et de matrice $R_{\theta(t)}$), on obtient le floe $\Omega(t)$ défini par :

$$\Omega(t) = (\omega', \mathbf{e}^1(\omega'), \mathbf{e}^2(\omega'), G(\omega'), h_-, h_+),$$

avec

$$\begin{cases} \omega' = T_{u(t)} R_{\theta(t)} \omega, \\ \mathbf{e}_1(\omega') = T_{u(t)} R_{\theta(t)} \mathbf{e}_1(\omega), \\ \mathbf{e}_2(\omega') = T_{u(t)} R_{\theta(t)} \mathbf{e}_2(\omega), \\ G(\omega') = T_{u(t)} R_{\theta(t)} G(\omega). \end{cases}$$

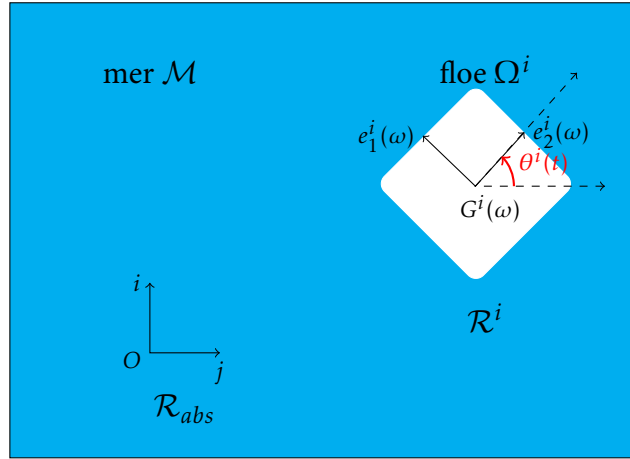
C'est cette dernière notation mettant en exergue la dépendance avec le temps que nous utiliserons tout au long de ce rapport.

Lors de leur mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et des courants océaniques, des phénomènes thermodynamiques, etc. Nous nous intéresserons donc au phénomène de percusion en vue de l'initialisation des fractures dans les floes de glace. Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère absolu, que nous notons $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le repère associé au floe Ω_i sera noté $\mathcal{R}_{\Omega_i} = (O, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), \mathbf{k})$. Dans ce repère absolu, le floe possède 3 degrés de libertés : l'abscisse et l'ordonnée de son centre de gravité $G_i(\omega)$, et son orientation donnée par l'angle $\theta_i(t)$ (voir figure 3.3).

3.2 Résumé de thèse de M. Rabatel

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL (et plus tard ceux de BALASOIU) ont extensivement traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de son raisonnement, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans \mathbb{R}^2 . Plus tard, nous prendrons en compte son épaisseur lorsque nous la modéliserons par une sphère de \mathbb{R}^3 .

FIGURE 3.3 – Positionnement d'un floe de glace Ω_i dans le repère absolu \mathcal{R}_{abs} .

3.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer

3.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans (RABATEL, 2015) utilise les mêmes notations que celles présentées à la section 3.1. Les obstacles² sont des floes aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans (RABATEL, 2015), l'auteur travaille dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$; cependant, vu que la mer est considérée plane, le mouvement du floe peut être décrit dans le plan $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Ensuite, RABATEL désigne la vitesse angulaire du floe Ω_i par

$$\boldsymbol{\theta}_i(t) = \theta_i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta_i(t))^T.$$

Soit P (de coordonnées x) un point quelconque de $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Sa vitesse dans le repère \mathcal{R}_{abs} est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \dot{\mathbf{G}}_i(t) + \boldsymbol{\theta}_i(t) \wedge \mathbf{G}_i\mathbf{P},$$

où le symbole \wedge représente le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 . La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} h_{i,+}(x) dx.$$

Ensuite, l'auteur définit :

- la somme des forces par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe Ω_i :

$$\mathbf{F}_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{F}(x) dx,$$

- le moment cinétique³ en G :

$$L_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t) dx,$$

- le moment dynamique en G :

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{GP} \wedge \mathbf{F}(x) dx.$$

2. Nous faisons allusion aux obstacles au déplacement des floes. Il peut s'agir des îles, des stations offshore, etc.

3. Il s'agit d'un moment dû à l'accélération du floe; alors que le moment dynamique est dû aux forces extérieures. Notons que ces deux vecteurs sont portés par \mathbf{k} , et peuvent donc être remplacés par des scalaires correspondants.

Sous le formalisme de Newton-Euler, RABATEL montre que chaque floe Ω_i vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i \end{cases},$$

où \mathcal{I}_i représente le moment d'inertie du floe i . Ce système se réécrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t), \quad (3.1)$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système S composé de n floes, le problème précédent doit être satisfait pour tous les floes. (RABATEL, 2015, p.18) montre que cela revient à résoudre l'équation

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t), \quad (3.2)$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad W(t) = (W_i(t))_{1 \leq i \leq n}, \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(t) = (\mathcal{H}_i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe Ω_i quant à elle sera donnée par :

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{\mathbf{G}}_i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{\theta}_i(t)^2.$$

3.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandement développé ces derniers siècles, avec plusieurs scientifiques qui ont tenté de décrire le phénomène de contact entre des corps rigides. Notons que le problème d'interaction entre les floes est un problème de dynamique non-régulière (contrairement au problème de déplacement des floes entre deux collisions qui lui, est un problème de dynamique régulière). Dans (RABATEL, 2015), l'auteur considère deux lois de contact afin de décrire des phénomènes précis :

- la condition unilatérale de Signorini (références) : afin de décrire la condition de non-interpénétration ; cette condition est portée par la composante normale⁴ de la force de contact⁵ lors de la collision.
- la loi de friction de Coulomb (références) : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision. Cette condition est portée par la composante tangentielle de la force de contact.

Afin de traiter ces problèmes de contact, deux approches principales ont été développées par les scientifiques : l'approche non-régulière et l'approche de régularisation des lois de contact.

Parmi les pionniers dans l'approche de régularisation pour la résolution de la condition unilatérale de Signorini, nous pouvons citer Hertz ; Nevins et Whitney (NEVINS et WHITNEY, 1972 ; WHITNEY, 1977), Moore (MOORE et WILHELMS, 1988) ; Ces méthodes se sont largement répandues dans les études liées à la robotique, à la réalité virtuelle ou encore dans les opérations assistées par ordinateur, pour simuler un grand nombre d'objets en contact en petites ou grandes déformations comme des habits, des cheveux ou encore des organes (voir (WITKIN et WELCH, 1990 ; VOLINO et al., 1995 ; « Andrew Witkin Large Steps in Cloth Simulation » ; RAGHUPATHI et al., 2004)). Concernant la seconde, la loi de friction de Coulomb, la discontinuité entre les phases de glissement et non glissement a été traitée de différentes façons ; en utilisant la notion de coefficient de restitution, ou des modèles masse-ressorts.

4. la composante normale permet aussi d'assurer dissipation de l'énergie à travers la loi de Poisson.

5. La force de contact est la somme d'une friction tangentielle, et d'une réaction normale.

L'approche non-régulière a été développée en utilisant les concepts d'inclusion différentielles; ceci afin de traiter la condition de Signorini. Moreau (MOREAU, 1985), Aubin (AUBIN et CELLINA, 2012) et Monteiro Marques (MONTEIRO MARQUES, 1985), ont montré des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème sans friction. Puis, des résultats similaires ont été établis pour le contact unique avec friction (voir (MOREAU, 1986; MONTEIRO MARQUES, 1988; PANAGIOTOPOULOS, 2012; JEAN et PRATT, 1985; MONTEIRO MARQUES, 1994)). Cependant, cette notion d'inclusion différentielle est difficile à manipuler; raison pour laquelle le problème du contact multiple avec friction reste encore très peu traité. Il a donc fallu attendre les années 80 avec l'essor des méthodes LCP pour donner un nouveau souffle à l'approche non régulière. Nous pouvons citer ici les travaux de Lötstedt qui des preuves d'existence et d'unicité pour le contact avec la friction de Coulomb (voir (LÖTSTEDT, 1981; LÖTSTEDT, 1982a; LÖTSTEDT, 1982b)). On cite aussi Klarbring et Pang, pour leur apport sur le plan des méthodes de programmations. (RABATEL, 2015) a opté pour cette approche car elle facilite la construction des solutions à partir d'algorithmes tels que ceux de Lemke (voir (LEMKE, 1978)). RABATEL s'inspire aussi des travaux de Baraff (BARAFF, 1993), qui écrit les forces de contact dans les repères locaux aux points de contact. Ces repères sont définis par la normale et la tangente aux points de contact. La condition de complémentarité se résume comme ceci : *"S'il y a contact alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et s'il n'y a pas contact l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle."* Cependant, les travaux de Baraff sur l'existence de solutions sont limités par l'approche accélération-force qui est utilisée, et le coefficient de friction. En utilisant des formulations en vitesse et impulsion, les chercheurs ont réussi à démontrer l'existence de solutions pour toute configuration à contacts multiples avec n'importe quel coefficient de friction.

Pour traiter le problème de collision entre les floes, les glaciologues retiennent une multitude de modèles principalement intégrés aux milieux continus. Par exemple, dans les articles de Solomon (SOLOMON, 1970), ceux de Hibler (HIBLER III, 1979) et ceux de Bratchie (BRATCHIE, 1984), la force résultante des interactions est due à une contrainte interne. On note aussi les modèles basés sur théorie des flux de particules. Dans (SHEN et al., 1986; HOPKINS, 1985) par exemple, les collisions ne sont pas détectées précisément et les paramètres décrivant la collision sont déterminés par une méthode de Monte Carlo. L'introduction de ces déformations dans les modèles discrets de la banquise a été initié dans les années 90 par Hopkins (HOPKINS, 1996), et récemment par Herman et Wilchinsky (HERMAN, 2011; WILCHINSKY et al., 2010). Cependant, elles sont basées sur la régularisation des lois de contact. Avant les travaux de RABATEL, il n'existait pas de modèle discret de banquise en utilisant une dynamique du contact non régulière.

Le modèle décrit par (RABATEL et al., 2015, p.5892) utilise deux conditions de complémentarité pour déterminer les vitesses des floes après le contact. La première est une condition de Signorini (SIGNORINI, 1933) pour s'assurer de la non-interpénétration⁶ des floes. Pour décrire ces conditions, il faut au préalable écrire le problème de contact entre floes comme un problème implicite, où les inconnus sont les impulsions après le choc⁷. Pour cette deuxième condition de complémentarité, RABATEL se base sur les travaux de Stewart et Trinkle (STEWART et TRINKLE, 1996) afin d'en extraire une qui vérifie la loi de friction de Coulomb. Le problème résultant a ensuite résolu en utilisant des algorithmes de Lemke.

Soit P_j , ($j \in \{1, \dots, n\}$) un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l (voir figure 3.4). Nous notons $\mathbf{F}_{kj}(t)$ la force de contact du floe Ω_k au floe Ω_l appliquée en P_j . Par convention, une matrice de contact \mathbf{M}_c est définie telle que son coefficient c_{kj} vaut :

- 0 si le point de contact P_j n'est pas un point de contact du floe Ω_k ;
- -1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k < l$;
- 1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k > l$.

6. Deux floes s'interpénètrent si la "distance" entre ces deux floes est négative.

7. Contrairement aux lois de contacts explicites (Hertz, Hooke, Coulomb), les lois implicites ne nécessitent pas la connaissance de la nature du contact entre les floes (glissement ou accroche).

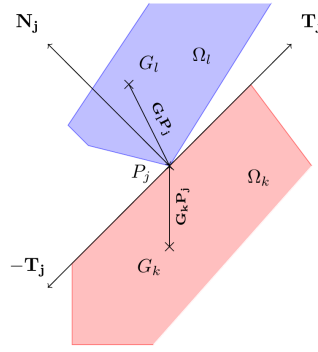


FIGURE 3.4 – Interaction entre deux floes Ω_k et Ω_l au point P_j (RABATEL, 2015, p.26).

En notant E_k l'ensemble des points de contact du floe Ω_k au temps t , (RABATEL, 2015, p.26) définit la résultante des forces de contact $\mathbf{F}_k^c(t)$, au floe Ω_k comme :

$$\mathbf{F}_k^c(t) = \sum_{j \in E_k} c_{jk} \mathbf{F}_{kj}(t).$$

En rajoutant ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l'équation (3.3), pour un floe $\Omega_k(t)$, on obtient :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j \in E_k} \left(\mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_{kj}(t) \right). \quad (3.3)$$

3.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de (RABATEL, 2015) opte pour le formalisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accélération-force. En effet, L'approche en vitesse impulsion apporte l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature du contact. Il nous faut donc définir les notions d'impulsion. Sur un intervalle de temps δt^* , s'il y a un contact entre les floes Ω_k et Ω_l au point P_j , nous dirons que le floe Ω_k a subi un choc provenant du floe Ω_l au point de contact P_j caractérisé par l'impulsion :

$$\mathcal{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj} \mathbf{F}_{kj}(t) dt.$$

RABATEL fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments équation (3.3) pour le floe Ω_k sur l'intervalle temporel δt^* :

$$\mathcal{M}_k \int_{\delta t^*} \dot{W}_k(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \sum_{j \in E_k} \left(\mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathcal{I}_{kj} \right).$$

En écrivant $\delta t^* = [t^-, t^+]$, on peut donc introduire les inconnues $\beta, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^m$ pour le problème de contact

$$\mathcal{M}(W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \mathbf{B}\beta + \mathbf{J}\lambda, \quad (3.4)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{J} sont deux matrices de $(\mathbb{R}^3)^{n \times m}$ telle que

$$\mathbf{B} = (d_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad d_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{T}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{T}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases},$$

$$\mathbf{J} = (s_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad s_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{N}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases}.$$

Les matrices \mathbf{B} et \mathbf{J} sont obtenues par décomposition des forces de contact dans le repère de contact $\mathcal{R}_{\Omega_j} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$ (voir figure Plus Haut).

Comme précédemment mentionné, afin de modéliser la friction dans une collision qui respecte la loi de Coulomb, (RABATEL, 2015) se base sur les travaux (STEWART et TRINKLE, 1996) qui définissent une condition de complémentarité reliant la composante tangentielle β_j de l'impulsion appliquée au point P_j , la composante normale λ_j , la vitesse relative tangentielle du point P_j et le coefficient de friction μ . On introduit le vecteur $\tilde{\beta}$ contenant les composantes de l'impulsion tangentielle dans chacune des directions possible de glissement \mathbf{T}_j et $-\mathbf{T}_j$. Il devient alors possible de formuler le problème de contact (sur tout le système S) sans interpénétration par le problème linéaire de complémentarité :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\mathbf{J} & -\mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \mu & -\mathbf{H}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

avec

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}^T W(t^+), \quad \mathbf{H}^T = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1 \leq j \leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq m},$$

μ est la matrice diagonale de diagonale (μ_1, \dots, μ_m) ,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2(i-1) + 1 \text{ ou } j = 2(i-1) + 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$D = (\mathbf{B}_1 | -\mathbf{B}_1 | \dots | \mathbf{B}_m | -\mathbf{B}_m)$ avec \mathbf{B}_j la colonne j de la matrice \mathbf{B} .

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact $W(t^+)$, à l'aide des composantes inconnues tangentielle et normale des impulsions dans les repères de contact $(\tilde{\beta}, \gamma)$, elles-mêmes inconnues du système.

3.2.1.4 Consistance énergétique

D'après l'auteur de (RABATEL, 2015, p.42), traiter le problème de contact à partir de lois non régulières ne permet pas d'obtenir des solutions satisfaisant à la fois la non-interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique. Le problème a donc été divisé en une phase de compression et une phase de décompression suivant la loi de Poisson. La phase de compression modélise la capacité maximale des floes à emmagasiner, par la déformation, une partie ou la totalité de l'énergie cinétique transmise lors du contact. L'impulsion normale λ^c calculée durant cette phase (en résolvant le problème de complémentarité (équation (3.5))) correspond à un coefficient de restitution $\varepsilon = 0$. Les impulsions obtenues durant cette phase correspondent

a celles nécessaires pour éviter la non pénétration, et correspondent donc à une énergie cinétique maximale emmagasinée. La phase de décompression correspond à la restitution partielle ou complète de l'énergie cinétique emmagasinée par la déformation des floes. L'impulsion lors de cette phase, notée λ^d , est déterminée par $\lambda^d = \varepsilon \lambda^c$ (l'hypothèse de Poisson (GLOCKER et PFEIFFER, 1995)). Durant la phase de décompression, RABATEL a donc opté pour la consistance énergétique et la non-interpénétration avec la solution :

$$W^N = (1 + \varepsilon)W^c - \varepsilon W(t^-),$$

où W^c représente les vitesses des floes après la phase de compression, et ε le coefficient de restitution pour les contacts considérés inélastiques.

3.2.1.5 Le modèle de l'environnement

L'environnement est l'ensemble des forces extérieures qui agissent sur les floes hormis les forces de contact qui sont décrites dans la partie précédente. Ces principales forces sont :

- La force de Coriolis \mathbf{F}_c donnée pour un floe $\Omega_i(t)$ par :

$$\mathbf{F}_{c,i}(t) = -f \mathbf{k} \wedge \dot{\mathbf{G}}_i(t),$$

avec f le paramètre de Coriolis et \mathbf{k} le vecteur dirigé vers le haut du repère absolu \mathcal{R}_{abs} .

- Les forces de traînée associées au vent $\boldsymbol{\tau}_a(t)$ et celle associée à l'océan $\boldsymbol{\tau}_w(t)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_a(t) &= \rho_a C_a \|\mathbf{U}_a(t)\| \mathbf{U}_a(t), \\ \boldsymbol{\tau}_w(t, P) &= \rho_w C_w \|\mathbf{U}_w(t) - \dot{\mathbf{P}}(t)\| (\mathbf{U}_w(t) - \dot{\mathbf{P}}(t)), \end{aligned}$$

avec ρ la masse volumique du fluide (l'indice a pour l'air et w pour l'eau) et C un coefficient de traînée sans dimension (voir [HI86]); \mathbf{U}_a , \mathbf{U}_w , $\dot{\mathbf{P}}(t)$ respectivement la vitesse du vent à l'interface glace/fluide, la vitesse du courant océanique à l'interface glace/fluide, et la vitesse d'un point P du floe.

Le modèle de dynamique régulière définit en équation (3.3) peut se voir expliciter :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} &= M_i \mathbf{F}_{c,i}(t) + \int_{\Omega_i(t)} \boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P) ds, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} &= \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}_i \mathbf{P} \wedge (\boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P)) ds. \end{cases}$$

L'algorithme décrivant en détail le processus de collision ainsi que la consistance énergétique se trouve à la page 43 du document (RABATEL, 2015).

3.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème

3.2.2.1 Discretisation temporelle

Pour simuler la dynamique des floes de glace soumis à des forces extérieures ET possiblement des collisions, il faut intégrer la dynamique régulière (entre deux collisions), et la dynamique non régulière; et il existe deux principales méthodes pour la discrétisation en temps dans de tels problèmes. La méthode **time-stepping** (voir (ACARY, 2013) pour les schémas de Moreau (MOREAU, 1986; JEAN, 1999), et de Schatzman-Paoli (PAOLI et SCHATZMAN, 2002a; PAOLI et SCHATZMAN, 2002b) par exemple, pour lesquels une convergence a pu être exhibée à partir de la convergence en graphe de Moreau (MOREAU, 1978)) offrent l'avantage de mieux traiter les points d'accumulation (RABATEL, 2015, p.58); et d'être plus performant sur des problèmes de multiples contacts. Cependant, RABATEL pour le schéma **event-driven** opte pour la précision de la localisation des collisions et la facilité de manipulation. En plus, elles permettent d'utiliser des schémas d'intégration existant d'ordre élevé pour des équations différentielles ordinaires. Le seuil de collision choisi est suffisamment grand pour éviter de traiter les collisions une par une. Le schéma utilisé pour intégrer l'équation (3.3) est un schéma du

type Euler explicite, pour sa facilité d'implémentation, sa facilité à prédire la localisation en espace et en temps des futures collisions et enfin sa capacité à dépasser les problèmes de points d'accumulation.

La simulation par la méthode event-driven demande la définition d'un pas de temps maximal pour lequel le schéma reste stable. Le pas de temps Δt_{max} sera utilisé s'il aucune collision n'est détectée entre les instants t et Δt . En se référant sur un modèle idéalisé 1D, RABATEL distingue deux critères pour la stabilité du schéma numérique au temps t :

- lorsque la vitesse caractéristique des floes $V_c(t) = N_a \mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)$ est constante sur l'intervalle de simulation I , alors pour :

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} = \min \left(\frac{\rho}{2|\mathbf{U}_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}, \frac{2K_t}{L_t} \right) \quad (3.6)$$

avec

$$\text{avec } L_t = \rho^{-1} \rho_w C_w \left(N_a^2 \mathbf{U}_a^2 + (N_a \mathbf{U}_a + 2\mathbf{U}_w)^2 \right), \text{ et } K_t = |V_c(t)| \text{ constant,}$$

le schéma est stable i.e $\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] = [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}]$;

- lorsque les variations de $V_c(t)$ entraînent une augmentation de K_t au cours du temps. La propriété de stabilité reste vérifiée car

$$\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] \subset [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}];$$

- lorsque les variations de $V_c(t)$ entraînent une diminution stricte de K_t au cours du temps, alors la condition de stabilité dans les deux cas précédent ne peut être vérifiée. RABATEL introduit donc une seconde définition de la stabilité pour traiter ce cas. Il remarque que pour

$$\Delta t_{max} \leq \begin{cases} \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-} & \text{si } x \in]-\infty, K_{t+\Delta t}] \\ \frac{-2x}{-\tilde{L}_t^+} & \text{si } x \in]K_{t+\Delta t}, +\infty] \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^- &= \rho^{-1} \rho_w C_w \left[N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 - (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2 \right] \\ \tilde{L}_t^+ &= \rho^{-1} \rho_w C_w \left[N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 + (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2 \right], \end{aligned}$$

on a la diminution de la vitesse des floes.

En conclusions, pour une vitesse infinitésimale initiale $\dot{\mathbf{G}}(0) \in [-K_0, K_0]$, pour tout $t \in I$, et pour tout Δt_{max} vérifiant les équations (3.6) et (3.7), nous avons les vitesses des floes majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t$$

RABATEL choisi donc de prendre

$$\Delta t_{max} = \min \left(\frac{3}{4} \frac{-2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^-}, \frac{3}{4} \frac{2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} -\tilde{L}_t^+}, \frac{\rho}{2(\max_{t \in I} |\mathbf{U}_a(t)|) \sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}} \right)$$

pour s'assurer que le modèle idéalisé vérifie les critères stabilité définis. Notons que le procédé global d'intégration de la dynamique pour le modèle se situe à la figure 2.2 du document (RABATEL, 2015, p.60), le schéma est repri à la figure 3.5.

3.2.2.2 Détection des collisions en espace

Des deux méthodes principales utilisées dans la littérature pour la détection des voisins, RABATEL a choisi la méthode de **hierarchie de volumes englobants** facilité de mise en place et pour son efficacité même avec de grands ratios de tailles. L'alternative était la méthode de **partitionnement de l'espace** qui elle, souffre de

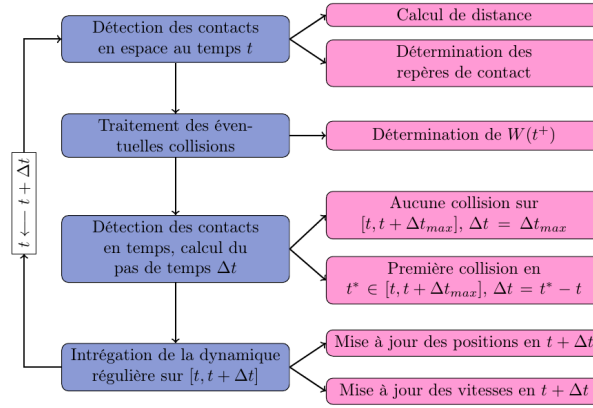


FIGURE 3.5 – Procédé global d'intégration de la dynamique pour notre modèle (RABATEL, 2015, p.60).

plusieurs défaut non surmontables pour le modèle développé. Les méthodes de volumes englobants consistent à englober le contour de l'objet par des volumes à des échelles de plus en plus fines pour améliorer la détection.

3.2.2.3 Détection des contacts en temps

Il s'agit ici de trouver le pas de temps optimal i.e. un pas de temps Δt pour lequel la configuration des floes ne contenant pas d'interpénétrations sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, contient au moins une interpénétration sur l'intervalle de temps $[t + \Delta t, t + \Delta t + \varepsilon]$ (RABATEL, 2015, p.87). Lorsque le critère de collision n'est pas vérifié, RABATEL montre qu'il suffit de prendre

$$\Delta t_{i,j} = -\frac{-\delta_{i,j}(t) - tol_3}{\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{\mathbf{G}}_i(t) - \dot{\mathbf{G}}_j(t))},$$

avec

$$\mathbf{A}_{i,j}(t) = \frac{C_{0,i}(t) - C_{0,i}(t)}{d(C_{0,i}(t), C_{0,i}(t))}, \text{ et } tol_3 = \frac{\xi}{20}.$$

Lorsque le critère de collision est vérifié, il faut plutôt prendre

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\min(\eta_i, \eta_j) - tol_3}{\Gamma(t)},$$

avec

$$\Gamma(t) = \max(\|\dot{\mathbf{Q}}_i^{i,j}(t)\|, \|\dot{\mathbf{Q}}_j^{j,i}(t)\|),$$

où $\dot{\mathbf{Q}}_i^{i,j}$ représente la distance parcourue par un point de $\Omega_i(t)$ relativement à $\Omega_j(t)$.

Une fois ce $\Delta t_{i,j}$ assurant la non-interpénétration trouvé, on peut donc de choisir

$$\Delta t = \min \left(\Delta t_{max}, \min_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ i \neq j}} \Delta t_{i,j} \right).$$

Le lecteur est renvoyé au document (RABATEL, 2015, p.91) pour plus de détails sur la détection des contacts en temps.

3.2.2.4 Construction des repères de contacts

La construction d'un repère de contact n'est effectuée que lorsque le contact entre deux floes Ω_k et Ω_l est linéique (RABATEL, 2015, p.79), ou ponctuel et le vecteur porté par les points en contacts appartient au cône normal de P . La normale N est alors déterminée comme le vecteur unité dirigé par PQ . Si Q n'est pas unique, on se retrouve dans la situation où il peut exister plusieurs repères de contact pour un point de contact. Dans les autres cas, le repère de contact associé au point P n'est pas construit et P n'est pas considéré dans le traitement des contacts (RABATEL, 2015, p.80). L'algorithme de détection des points de contacts afin de construire les repère de contact est explicité dans le document (RABATEL, 2015, p.76).

3.2.2.5 Simulation des événements collisions

Une fois les voisins détectés et les repères de contact construits, on peut passer à la prochaine étape qui consiste en la simulation de événements de collisions. Ici, plusieurs choix s'offrent à RABATEL : les méthodes dites de **régularisations**, les méthodes dites **itératives**, et les méthodes dites de **pivots** (RABATEL, 2015, p.82). La première est adaptée aux modèles régularisants, ce qui n'est le cas de notre modèle. La deuxième par contre a extensivement été utilisée dans la littérature ; on peut citer Moreau [MP88, Mor99, Jea99], Aitken [Ait50]. Malheureusement, dès que la matrice A du problème de complémentarité à résoudre n'est plus symétrique, ce deuxième groupe de techniques ne s'avère pas efficace. RABATEL choisit donc l'algorithme Lemke pour lequel il existe des preuves de convergence lorsque la matrice A est co-positive. Bien qu'il soit performant, il faut néanmoins noter que l'algorithme de Lemke étant une technique globale, c'est-à-dire traitant les contacts simultanément, il ne garantit pas une bonne propagation du contact.

3.2.2.6 Optimisations

La première optimisation apportée est celle sur les distances de collision : deux floes sont en contact si la distance entre-eux n'est pas nulle, mais supérieure à une seule appelée distance de collision.

La deuxième concerne la condition de non-interpénétration (RABATEL, 2015, p.85). En cas de congensation, il est difficile que les floes décollent après contact. En insistant que $\mathbf{J}^T W(t^+) > 0$ après collision, on risque de ne pas avoir de solution pour le problème linéaire de complémentarité associé. RABATEL relaxe donc la condition de Signorini en définissant un réel c et l'ensemble des vitesses admissibles devient :

$$V_c = \{w \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{J}^T w \geq c\}.$$

Une troisième optimisation concernant la définition de la notion d'erreur et de tolérance a été implémentée. La quatrième consiste en la résolution d'un LCP en trois tentatives (avec trois algorithmes de Lemke différents) même si cela augmente le nombre de calculs (RABATEL, 2015, p.86). Si cette optimisation ne s'avère pas suffisante, une dernière optimisation consiste en la modification aléatoire de certains coefficients de la matrice A , la permutation des lignes afin d'éviter des zéros sur la diagonale, la définition de la notion de contact actif.

3.2.3 Validations et exploitations du modèle

Les résultats ont été validés à travers plusieurs problèmes. Nous citons des exemples classiques tels que la boîte glissante, le berceau de Newton, le canon de Newton, la balle rebondissante, etc. Il a ensuite été validé sur des scénarios simples de dérive libre soumise à des courants océaniques et atmosphériques et des scénarios simples de collision. En effet, il a été vérifié que le comportement d'un objet simulé est cohérent avec le comportement théorique et avec les observations. Les principes physiques suivants ont ainsi pu être testés par RABATEL :

- la conservation de la symétrie d'une configuration
- la satisfaction du modèle de Coulomb
- le traitement d'un point d'accumulation
- la cohérence temporelle ou la propagation des ondes de choc

— la conservation de l'énergie cinétique

Des telles exploitations telles que la dérive dans un canal étroit, pour des floes en bassins a été étudié. Aussi, la dérive soumise à un vent et un courant variable avec des vitesses du vent provenant de ERAinterim, à partir du modèle glace de mer et océan TOPAZ.

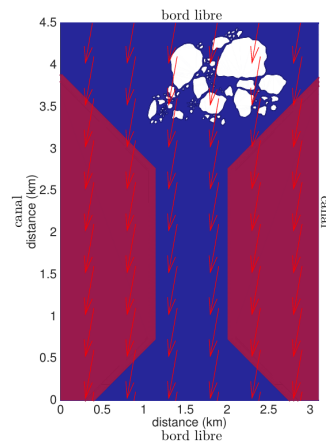


FIGURE 3.6 – Configuration à l'instant initial pour le scénario de dérive dans un canal étroit (RABATEL, 2015, p.124).

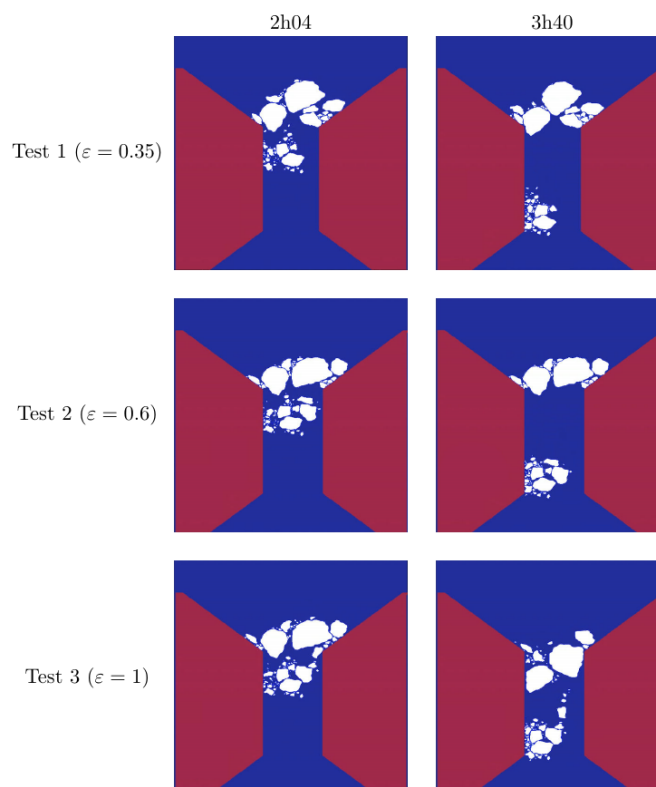


FIGURE 3.7 – Quelques résultats obtenus à deux heures différentes de la configuration des floes pour différentes valeurs du coefficient de restitution ε (RABATEL, 2015, p.126).

3.2.4 Discussion

Bien que les travaux de RABATEL on été testés et validés sur plusieurs configuration différentes, il reste néanmoins des points qui ne sont pas traités, et qui on e tres clairement été soulignés dans la thèse (RABATEL, 2015) :

1. le modèle ne gère pas la rhéologie⁸ de la glace : les floes sont des solides purement rigides (ils ne se déforment pas) et la dissipation d'énergie cinétique durant la collision est décrite en utilisant un coefficient purement empirique collision.
2. La loi de contact utilisée pour le glissement [Ste96], bien que très riche, ne prends en compte toutes les vitesses possibles de déplacement. La construction d'une loi qui donnerait accès à la région entière, demanderait de prendre en compte un grand nombre de phénomènes intrinsèques aux contacts. Leur compréhension et leur rôle à chacun est difficile à déterminer.
3. les coefficient de friction et de restitution utilisées sont limitants. En réalité, il n'est pas possible de prendre en compte ou d'interpréter mathématiquement certains effets lors du contact. par exemple, avec la dispersion de l'énergie (voir [NB14]). Cette dispersion est la conséquence de certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact. Seuls les effets de dissipation dus aux phénomènes locaux comme l'endommagement, la viscosité ou la plasticité sont pris en compte à travers l'utilisation des coefficients de restitution et de friction.
4. Les vitesses obtenues après la phase de décompression afin d'assurer la dissipation de l'énergie cinétique possèdent une faiblesse (Rab, p.41) : elles ne sont solutions que sous certaines conditions, comme le fait que les chocs soient frontaux et qu'il n'y ait pas d'apport des forces extérieures autres que les forces de contact durant la collision.

8. La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée.

Chapitre 4

Travaux et apports

4.1 Les travaux effectués

4.2 Les apports du stage

- L'utilisation de TIKZ

Chapitre 5

Déroulement du stage

5.1 Journal de bord

Chapitre 6

Conclusion

Bibliographie

- ACARY, Vincent (2013). « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256, p. 224-250.
- AUBIN, J-P et Arrigo CELLINA (2012). *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. T. 264. Springer Science & Business Media.
- BALASOIU, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.
- BARAFF, David. « Andrew Witkin Large Steps in Cloth Simulation ». In : *SIGGRAPH98Conference Proceedings* (), p. 43-54.
- (1993). « Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies ». In : *Algorithmica* 10.2, p. 292-352.
- BRATCHIE, Iain (1984). « Rheology of an ice-floe field ». In : *Annals of Glaciology* 5, p. 23-28.
- GLOCKER, Ch et Friedrich PFEIFFER (1995). « Multiple impacts with friction in rigid multibody systems ». In : *Nonlinear Dynamics* 7.4, p. 471-497.
- HERMAN, Agnieszka (2011). « Molecular-dynamics simulation of clustering processes in sea-ice floes ». In : *Physical Review E* 84.5, p. 056104.
- HIBLER III, WD (1979). « A dynamic thermodynamic sea ice model ». In : *Journal of physical oceanography* 9.4, p. 815-846.
- HOPKINS, Mark A (1985). « Collisional stresses in a rapidly deforming granular flow : a thesis ». Thèse de doct. Clarkson University.
- (1996). « On the mesoscale interaction of lead ice and floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 101.C8, p. 18315-18326.
- JEAN, Michel (1999). « The non-smooth contact dynamics method ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4, p. 235-257.
- JEAN, Michel et Elaine PRATT (1985). « A system of rigid bodies with dry friction ». In : *International journal of engineering science* 23.5, p. 497-513.
- LEMKE, Carlton E (1978). « Some pivot schemes for the linear complementarity problem ». In : *Complementarity and Fixed Point Problems*. Springer, p. 15-35.
- LÖTSTEDT, Per (1981). « Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 61.12, p. 605-615.
- (1982a). « Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 42.2, p. 281-296.
- (1982b). « Time-dependent contact problems in rigid body mechanics ». In : *Nondifferential and Variational Techniques in Optimization*. Springer, p. 103-110.
- MONTEIRO MARQUES, MD P (1994). « An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction ». In : *European journal of mechanics. A. Solids* 13.2, p. 277-306.
- MONTEIRO MARQUES, MDP (1985). « Chocs inélastiques standards : un résultat d'existence ». In : *Séminaire d'Analyse Convexe, USTL, Montpellier* 15.
- (1988). « Inclusões Diferenciais e Choques Inelásticos ». Thèse de doct. Ph D Thesis, Universidade de Lisboa, Lisbon.

- MOORE, Matthew et Jane WILHELMS (1988). « Collision detection and response for computer animation ». In : *Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, p. 289-298.
- MOREAU, Jean J (1985). « Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints ». In : *Unilateral problems in structural analysis*. Springer, p. 173-221.
- MOREAU, Jean Jacques (1978). « Approximation en graphe d'une évolution discontinue ». In : *RAIRO. Analyse numérique* 12.1, p. 75-84.
- (1986). « Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel; essais numériques ». Thèse de doct. Université des Sciences et Techniques du Languedoc.
- NEVINS, James L et Daniel E WHITNEY (1972). « The force vector assembler concept ». In : *On Theory and Practice of Robots and Manipulators*. Springer, p. 273-288.
- PANAGIOTOPOULOS, Panagiotis D (2012). *Inequality Problems in Mechanics and Applications : Convex and nonconvex energy functions*. Springer Science & Business Media.
- PAOLI, Laetitia et Michelle SCHATZMAN (2002a). « A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.2, p. 702-733.
- (2002b). « A numerical scheme for impact problems II : The multidimensional case ». In : *SIAM journal on numerical analysis* 40.2, p. 734-768.
- RABATEL, Matthias (nov. 2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- RABATEL, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9, p. 5887-5909.
- RAGHUPATHI, Laks et al. (2004). « An intestinal surgery simulator : Real-time collision processing and visualization ». In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 10.6, p. 708-718.
- SHEN, HH et al. (1986). « On applying granular flow theory to a deforming broken ice field ». In : *Acta Mechanica* 63.1, p. 143-160.
- SIGNORINI, Antonio (1933). « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze* 27, p. 69.
- SOLOMON, H (1970). « A study of ice dynamics relevant to AIDJEX ». In : *AIDJEX Bull* 2.33-50.
- STEWART, David E et Jeffrey C TRINKLE (1996). « An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39.15, p. 2673-2691.
- VOLINO, Pascal et al. (1995). « Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects ». In : *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, p. 137-144.
- WHITNEY, Daniel E (1977). « Force feedback control of manipulator fine motions ». In :
- WILCHINSKY, Alexander V et al. (2010). « Effect of shear rupture on aggregate scale formation in sea ice ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 115.C10.
- WITKIN, Andrew et William WELCH (1990). « Fast animation and control of nonrigid structures ». In : *Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, p. 243-252.