Rapport de stage

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Superviseur
Stéphane Labbé

Étudiant
Desmond Roussel Nzoyem

Enseignant référent
Christophe Prud'homme

Ce stage à été effectué dans le cadre du master 2 CSMI,
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021 ;
initié par le groupe SASIP au LJLL.

Année académique 2020 - 2021

1er mars 2021

Remerciements

Table des matières

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Résumé de thèse de D. Balasoiu

Les travaux de D. Balasoiu concernent la modélisation et la simulation du comportement mécanique de floes de glace [Bal20a]. Il s'agit d'une amélioration des travaux de M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss [Rab15; RLW15] prenant en compte la fracture des floes. Précisément, ce travail se focalise sur l'initiation de la fracture, ainsi que la prédiction du chemin que la fracture emprunte. Jusqu'à présent, les floes étaient considérés comme des corps rigides; dans sa thèse, Balasoiu les considère comme des corps élastiques. Son travail est divisé en deux parties. Il commence par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d'un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord (i.e. à une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, il cherche à obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe qui percute un autre floe ou une structure solide.

1.1.1 Théorie de la fracture : état de l'art

La théorie de fracture la plus répandue de nos jours est due à A.A. Griffith. Dans ses travaux[Gri21], in invalide les résultats que C. Inglis [Ing13] qui ne tenaient pas en compte la taille de la fracture; il présente donc la croissance d'une faille comme une compétition d'énergie entre l'énergie élastique [1] et l'énergie de surface [2].

Le critère de Griffith est un critère thermodynamique qui stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de moindre énergie. En effet, sur un matériau élastique Ω dont la frontière est subdivisée en deux zones $\partial\Omega_D$, et $\partial\Omega_N$, on pose [Bal20a, p.31] :

$$
\begin{aligned}
E_{el} &= \int_\Omega W(x, e(u))\,\mathrm{d}x \\
\mathcal{P}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega\setminus\sigma(t)} W(x, \nabla\varphi(t, \sigma(t)))\,\mathrm{d}x - \mathcal{F}(t, \sigma(t)) \\
\mathcal{F}(t, \sigma(t)) &= \int_\Omega f_v(x)\cdot\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x)\cdot\varphi\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

où

- E_{el} est l'énergie élastique du matériau sans faille.
- $\sigma(t)$ représente la fracture au temps t, supposée à l'équilibre.
- $\mathcal{P}$ l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille $\sigma(t)$ au temps t.
- $e(u)$ est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau.
- $\varphi = \mathrm{Id} + u$ représente le déplacement du matériau supposé suffisamment régulier.
- W est la densité d'énergie du matériau élastique, supposé hyper-élastique.

1. Énergie relâchée lorsqu'un défaut subit un accroissement. Cette énergie diminue durant la fracture.
2. Énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces – les bords de la fissure. Cette énergie augmente avec l'accroissement de la fracture.

— f_s est la contrainte surfacique appliquée sur le bord $\partial\Omega_N$.
— f_v est le champ de force volumique appliquée sur Ω.

D'après le critère de Griffith [Bal20a, p.32], la fonction $\sigma(t)$ doit vérifier :

1. $\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} \geq 0$;
2. $-\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\sigma}(t,\sigma(t)) \leq k$;
3. $\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}\sigma}(t,\sigma(t)) = k$.

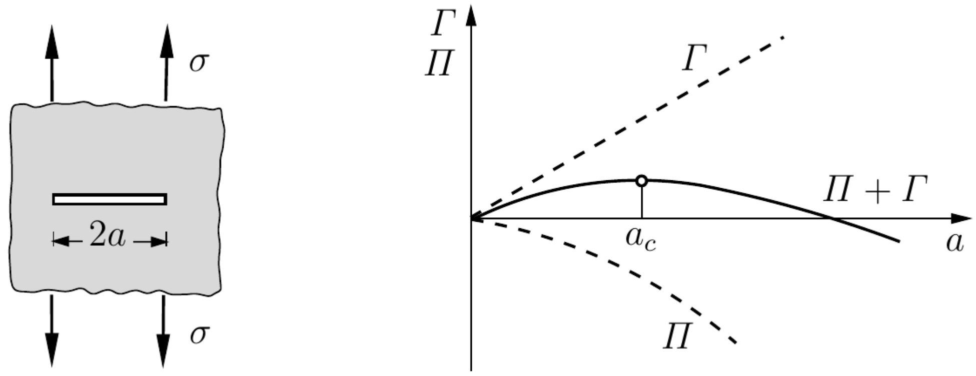


FIGURE 1.1 – Illustration du critère de Griffith [GS17]. (Π et Γ représentent les énergies potentielles et de fracture respectivement. *Cette figure est à refaire manuellement !*)

Une illustration de ce critère peut être observée à la figure 1.1. Comme mentionné plus haut, ce modèle souffre de problèmes de nucléation et de prédiction de la fracture. Pour contourner le problème de nucléation, les mécaniciens considèrent que tout matériau possède des microfissures, et ce sont ces dernières qui sont à l'origine des fissures observables à l'œil. Quant au problème du chemin emprunté par la fracture, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que les critères d'Irwin [Irw57] sont invalides car, ils impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne peut être courbé.

Le modèle proposé par Francfort et Marigo [FM98], suit un résultat théorique dû à De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci [DCL89], qui prouvent le théorème d'existence d'un minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah qui intervient dans la détection des contours d'une image. Présentons les données géométriques du problème [Bal20a, p.35]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe, dont la frontière $\partial\Omega$ est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté U_D, tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique f_v. On suppose que Ω est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée W. Ainsi, lorsque le matériau Ω subit (sans fracture) une déformation $\varphi = u + \mathrm{Id}$ suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\mathrm{el}}(u) = \int_\Omega W(x, e(u))\,\mathrm{d}x,$$

où l'on a noté u le champ de déplacement du matériau, et $e(u)$ son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture σ :

$$E_{\mathrm{el}}(u,\sigma) = \inf_{u \in V_{U_D,\sigma}} \int_{\Omega\setminus\sigma} W(x, e(u))\,\mathrm{d}x,$$

où l'on a défini l'espace fonctionnel $V_{U_D,\sigma}$,σ par :

$$V_{U_D,\sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \backslash \sigma, \mathbb{R}^N) \,|\, u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}.$$

Francfort et Marigo proposent l'énergie de fracture suivante sur $\partial\Omega_D$:

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_\sigma k(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire $k(x)$ traduit la rigidité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau ; $\mathcal{H}^{N-1}$ représente la mesure de Haussdorf de dimension $N-1$, qui peut être comprise comme la longueur du contour pour $N = 2$.

Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u,\sigma) &= E_{\text{el}}(u,\sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma) \\ &= \int_{\Omega\backslash\sigma} W(x, e(u))\,\mathrm{d}x + \int_\sigma k(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

où σ est une union dénombrable d'ensembles rectifiables. Ainsi donc, une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle E_{tot}. Signalons que Balasoiu montre, dans le cas d'un mouvement antiplan [3], que le modèle est quasiment identique au modèle de De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci, pour lequel un théorème d'existence a pu être exhibé.

La méthode numérique employée est la méthode à champ de phases. Elle repose sur la notion de Γ-convergence, en particulier sur le résultat de **convergence des minimums**. On remplace l'inconnue σ par une suite de fonctions lisses v_ε [AT90]. Par exemple, dans le cas du traitement d'image, pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dont se sont inspiré Bourdin, Francfort et Marigo, on constate d'après Ambrosio et Tortorelli [AT90] que la suite de fonctionnelle

$$G_\varepsilon() = \int_\Omega \left(|u-g|^2 + (v^2 + \eta_\varepsilon)|\nabla u|^2 + \varepsilon|\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) \mathrm{d}x,$$

Γ-converge vers la fonctionnelle limite

$$G_f = \int_\Omega |u-g|^2 + |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

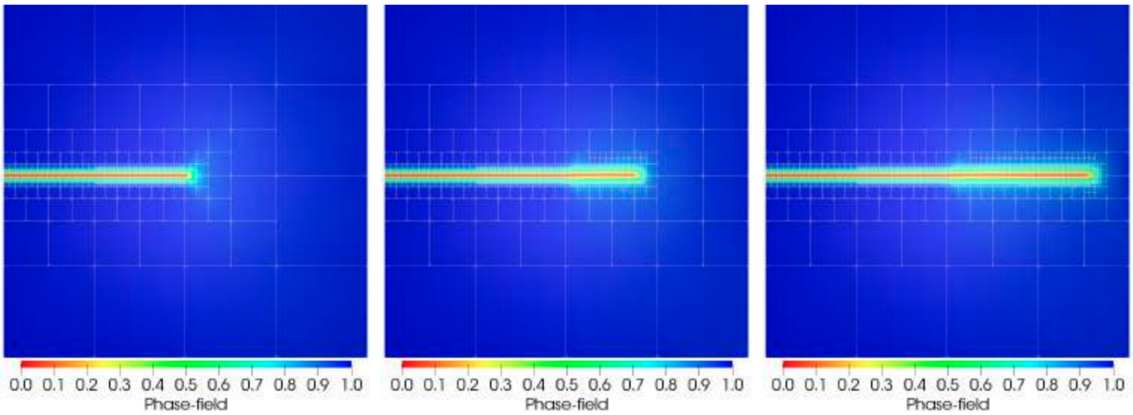
où $g : \Omega \mapsto [0,1]$ est la fonction de contraste de l'image, et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de u, noté S_u, qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables [Bal20a, pp.33-35].

Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat de Γ-convergence sont disponibles dans la littérature. On cite par exemple ici les résultats obtenus dans [Nag+19] à la figure 1.2.

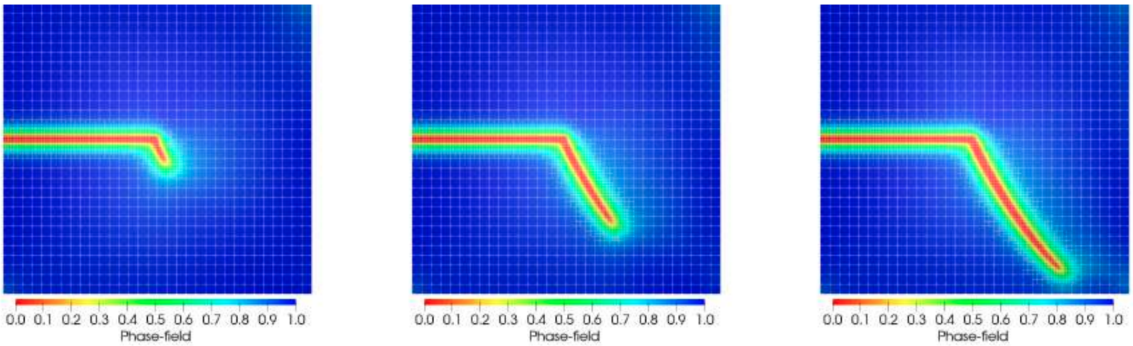
1.1.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace

Le modèle présenté dans la section précédente n'est pas adapté à notre étude. Balasoiu a donc développé un modèle qui ne nécessite pas de fonctionnelle lissée, comme l'on fait plusieurs modèles de glaciologie (voir [LLL15]), en supposant que les fractures sont des segments. Un résultat d'existence (dans les cas où le floe n'est pas encore fracturé) est prouvé à l'aide de la convergence de Mosco. De plus, Balasoiu introduit un problème d'évolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du

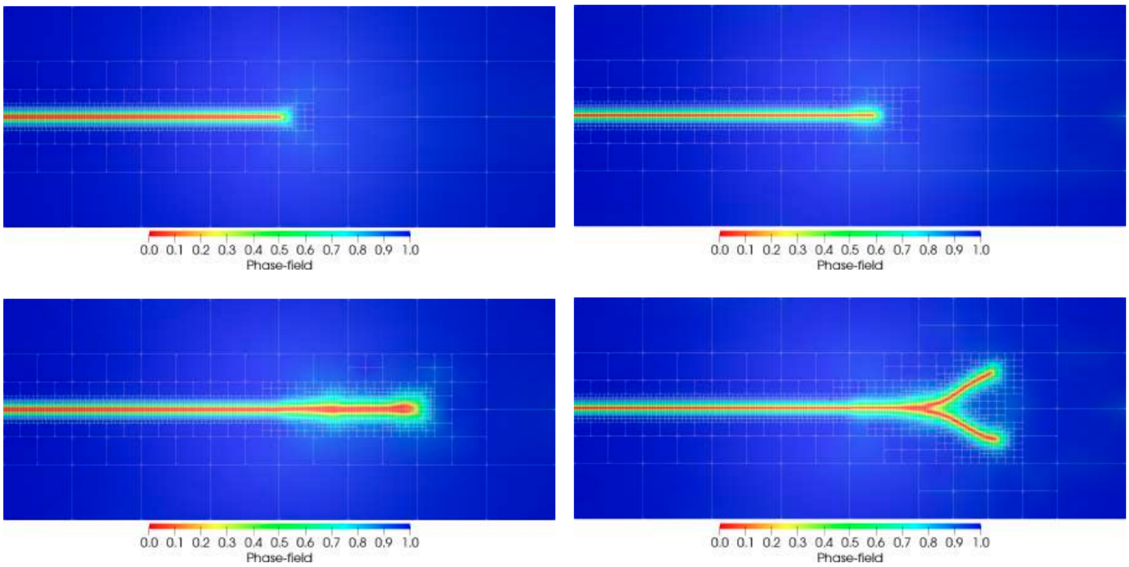
3. Un mouvement **antiplan** est mouvement pour lequel le champ de déplacement u est porté par un vecteur constant.



(**a**) Croissance d'une fracture



(**b**) Bifurcation d'une fracture



(**c**) Branchement d'une fracture

Figure 1.2 – Trois résultats numériques obtenus dans [Nag+19] à l'aide d'une discrétisation éléments finis (hp-FEM) et volumes finis en ne remaillant le domaine que lorsque c'est nécessaire.

floe. Les fractures obtenues par ce problème d'évolution sont ainsi des lignes brisées. Le résultat d'existence n'a pas été prouvé pour ce cas. Concernant le côté numérique, une méthode *meshless* [4] est proposée.

4. Car l'ensemble discrétisé des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé.

Les modifications apportées pour traiter le modèle statique (dans $\mathbb{R}^2$) sont décrites ci-bas. Lorsqu'on fixe la fracture σ, l'énergie élastique prend la forme :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(\cdot,\sigma) : A_\sigma &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega\setminus\sigma} Ae(u) : e(u)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

où A représente le tenseur de Lamé du matériau, i.e.

$$\forall e \in M_2\mathbb{R}, \quad Ae = \lambda\ \mathrm{tr}\,(e) I_2 + 2\mu e,$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau ; et l'ensemble des déplacements admissibles A_σ est :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega\setminus\sigma\,\mathbb{R}^2)\,|\, u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D\setminus\sigma \text{ et } (u^+ - u^-)\cdot\nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

avec u^+ et u les restrictions de u aux régions Ω^+ et Ω^- respectivement (obtenues par extension de la fracture σ de façon à ce qu'elle soit traversante [Bal20a, p.50]). ν (normale à la fracture orientée du bord vers le centre de Ω) et ν. On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-)\cdot\nu \geq 0 \text{ sur } \sigma$$

L'énergie totale s'écrit

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega\setminus\sigma} Ae(u) : e(u)\,\mathrm{d}x + k\mathcal{H}^1(\sigma), \end{aligned}$$

où Σ représenté l'ensemble les segments orientés partant de la frontière donnée par

$$\Sigma = \left\{ [a,b] \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega},]a,b[\in \Omega \right\}.$$

Une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple (u,σ) qui vérifie

$$E_{\text{tot}}(u,\sigma) = \min_{\sigma\in\Sigma} \min_{u\in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u,\sigma).$$

Ensuite, Balasoiu remarque que la solution n'est pas unique. Il définit donc un problème de d'évolution quasi-statique à la manière de [FM98], en considérant un problème de chargement monotone :

$$U_D(t) = tU_D.$$

On note $\overline{\Sigma}$ l'ensemble des lignes brisées de Ω, sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également $\mathrm{end}(\sigma)$ la fin d'une ligne brisée $\sigma \in \overline{\Sigma}$. On définit maintenant [Bal20a, p.48], pour toute ligne brisée $\sigma \in \overline{\Sigma}$ l'ensemble des fractures admissibles partant de σ :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \left\{ \sigma \cup [a,b] \in \mathbb{R}^2 \,|\, a = \mathrm{end}(\sigma), b \in \overline{\Omega},]a,b[\in \Omega\setminus\sigma \right\}.$$

On définit également l'ensemble des déplacements admissibles associées :

$$A_{t,\sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega\setminus\sigma\,\mathbb{R}^2)\,|\, u = tU_D \text{ sur } \partial\Omega_D\setminus\sigma \text{ et } (u^+ - u^-)\cdot\nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

pour tout $t \in [0,1]$ et pour toute ligne brisée σ. De ces définitions, on peut en exhiber un problème d'évolution discret, et un problème d'évolution continue en faisant tendre t vers 0. Le problème d'évolution continue admet des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets [MT02; Cha03].

Lorsque la fracture est fixée, Balasoiu prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation, en utilisant la théorie des inégalités variationnelles, l'inégalité de Korn [Cia94], le théorème de Lions-Stampacchia [LS67]. Pour le cas statique, il montre que le problème statique a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, ceci en se servant principalement de la convergence de Mosco. Pour le modèle quasi-statique, un résultat d'existence n'a pas été trouvé, et une conjecture pour une ligne brisée qui possède un point d'auto-intersection a été proposée.

1.1.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier

Dans ce chapitre, Balasoiu souhaite approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous n'étudions que l'état d'équilibre du réseau de ressorts.

Commencions par quelques définitions pour le maillage sur un floe. Pour définir un réseau de ressort τ, on définit l'ensemble de ses points τ_0 disposées en forme de grille.

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2$$

De façon similaire, l'ensemble des arrêtes se nomme τ_1, et l'ensemble des cellules τ_2. Le réseau τ est obtenu à partir de τ_0 en traçant les côtés de chaque carré; à la frontière, on trace les diagonales des carrés incomplets. On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de τ_0 dans $\mathbb{R}^2$. On définit également deux triangulations de ω à partir de , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions $e_x + e_y$ et $e_x e_y$. On note ces triangulations $\tilde{\tau}$ et $\hat{\tau}$ respectivement.

Afin d'éviter les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point, on définit avec l'ensemble des déplacements admissibles

$$W_{\mathrm{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \overline{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$

Sur chaque arête $\nu\tau_1$, on place un ressort de longueur à vide $l_\nu = |\nu|$, et de raideur k_ν (voir figure 1.3a). Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressorts, et $u = \varphi \mathrm{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \mathrm{Id}) \\ &= \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu}{2} (|\varphi(\nu)| - |\nu|)^2 \end{aligned}$$

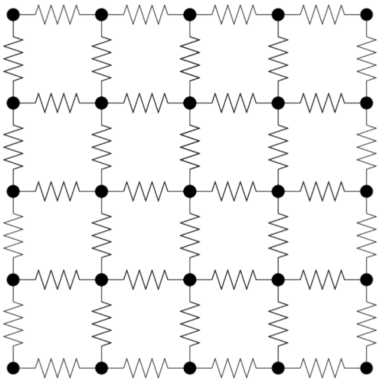
En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, d'angle de repos $\frac{\pi}{2}$, et de raideur $G|\nu|^2$ (voir figure 1.3b). L'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \mathrm{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} \frac{G|\nu|^2}{4} \left(\angle(\varphi(e_{\nu_1}), \varphi(e_{\nu_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

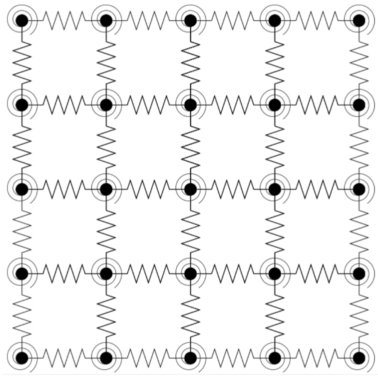
avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. On note enfin

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau$$

l'énergie totale du réseau.



(a) Réseau de ressorts régulier



(b) Réseau de ressorts régulier avec torsion

Figure 1.3 – Réseau de ressort considéré durant cette étude.

Ensuite, Balasoiu considère la suite τ_n de réseau défini, comme aux paragraphes précédents par

$$\tau_{n,0} = \Omega \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^2.$$

On rappelle que k_1, k_2 représentent les constantes de raideurs des ressorts sur les arrêtes du réseau dans les deux directions de Ω, et G la constante de torsion des ressorts aux nœuds. Sur le maillage τ_n, après définition des énergies redimensionnées élastiques de traction R_n, et de torsion T_n, [Bal20b, p.91] montre les théorèmes suivants.

Theorem 1 (Γ-convergence) *La suite d'énergie redimensionnée $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Γ-converge, pour la topologie faible de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, vers la fonctionnelle limite :*

$$\begin{aligned} E_{el} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega C_h e(u) : e(u)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

avec C_h le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie :

$$C_{h,ijkl}M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2,$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si l'on a $k_1 = k_2 = k = 8G$. Dans ce cas, on a :

$$E_{el}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega K_{\lambda,\mu} e(u) : e(u)\,\mathrm{d}x,$$

avec : $\lambda = 0$, et $\mu = \frac{k}{2}$.

Theorem 2 (Équi-coercivité) *Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de maillages du plan, et $(u_n) \in \mathbb{N}$ une suite de déplacements admissibles de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{adm}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Le théorème 1 permet de constater que le tenseur de rigidité obtenu, lorsqu'il est isotrope, a un coefficient de Poisson nul [5]. Balasoiu a donc proposé un calcul formel de la limite simple de la suite d'énergies discrètes dans le cas ou le réseau de ressorts serait stochastique, de loi isotrope. En particulier, il trouve dans ce cas un coefficient de Poisson fixe de 1/4.

1.1.4 Un processus stochastique de maillages isotropes

Le résumé du chapitre écrit dans [Bal20b, p.136] est le suivant.

Dans ce chapitre, Balasoiu a construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. il a également donné plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules nous se montrerons très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arrêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permet de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sure si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Balasoiu montre aussi que, si l'on dilate le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtenons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Nous avons également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle nous sera utile dans le chapitre suivant, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

1.1.5 Discussion

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse :

1. Le modèle suppose que les floes sont d'épaisseur négligeable devant leur extension horizontale ; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.
2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites.

5. Cela correspond par exemple à un étirement longitudinal du réseau de ressorts, sans effet (amincissement ou épaississement) sur la section transversale.

Bibliographie

[Bal20a] Dimitri Balasoiu. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes, 2020. url : https://www-ljk.imag.fr/membres/Dimitri.Balasoiu/These.pdf.

[Bal20b] Dimitri Balasoiu. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132.

[GS17] Dietmar Gross et Thomas Seelig. ***Fracture mechanics : with an introduction to micromechanics***. Springer, 2017.

[Rab15] Matthias Rabatel. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341.

[RLW15] Matthias Rabatel et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : ***Journal of Geophysical Research : Oceans*** 120.9 (2015), p. 5887-5909.