

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

**Roussel Desmond Nzoyem**

Pr. Stéphane Labbé, Pr. Christophe Prud'homme

Sorbonne Université  
Laboratoire Jacques-Louis Lions

Soutenance de fin de stage  
18 août 2021

# Sommaire

## 1 MOTIVATION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS 1D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes
- Fracturation des floes

## 4 TRAVAUX ET RÉSULTATS 2D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes

## 5 CONCLUSION

- Apports et recherches ultérieures
- Délivrables

## 1 MOTIVATION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS 1D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes
- Fracturation des floes

## 4 TRAVAUX ET RÉSULTATS 2D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes

## 5 CONCLUSION

- Apports et recherches ultérieures
- Délivrables

# Motivation

## Enjeux écologiques

- ▶ Etude climatique à échelle nature (SASIP)
- ▶ Prévisions climatiques avec précision



Figure – Image satellite de l'artique (MIZ Program, 2013)

# Motivation

## Enjeux écologiques

- ▶ Etude climatique à échelle nature (SASIP)
- ▶ Prévisions climatiques avec précision



Figure – Image satellite de l'artique (MIZ Program, 2013)

## Enjeux industriels

- ▶ Routes maritimes exploitables
- ▶ Étude des stations offshores



Figure – Un bateau industriel dans la MIZ (O Globo, 2012)

# Objectifs

## Objectifs généraux

- ▶ Comprendre le modèle de rupture de Griffith ([6 semaines](#));
- ▶ Comprendre le passage micro/macro de la percussion ([20 semaines](#));
- ▶ Intégrer le modèle dans un code de calcul à l'échelle des floes de glace ([0 semaines](#)).

## Objectifs intermédiaires

- 1 Prise en main de la notion de  $\Gamma$ -convergence;
- 2 Lecture des travaux précédents :
  - ▶ [M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss](#) : Dynamics of an assembly of rigid ice floes ([rabatel2015dynamics](#));
  - ▶ [Matthias Rabatel](#) : Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ([rabatel2015modellisation](#));
  - ▶ [Dimitri Balasoiu](#) : Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ([balasoiu2020modellisation](#)).
- 3 Modélisation et simulation du déplacement des nœuds d'un floe isolé :
  - ▶ en 1D;
  - ▶ en 2D;
- 4 Introduction de la percussion et de la fracture dans le code préexistant.

## 1 MOTIVATION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS 1D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes
- Fracturation des floes

## 4 TRAVAUX ET RÉSULTATS 2D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes

## 5 CONCLUSION

- Apports et recherches ultérieures
- Délivrables

# Cinétique du floe

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i, \end{cases} \quad (1)$$

où pour le floe  $i$ :

- ▶  $M_i$  : masse du floe;
- ▶  $\mathbf{F}_i$  : somme des forces par unité de volume;
- ▶  $\mathcal{I}_i$  : le moment d'inertie du floe  $i$ ;
- ▶  $\mathfrak{M}_i$  : le moment dynamique en  $G$ .

Le système (1) se réécrit sous la forme :

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t),$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

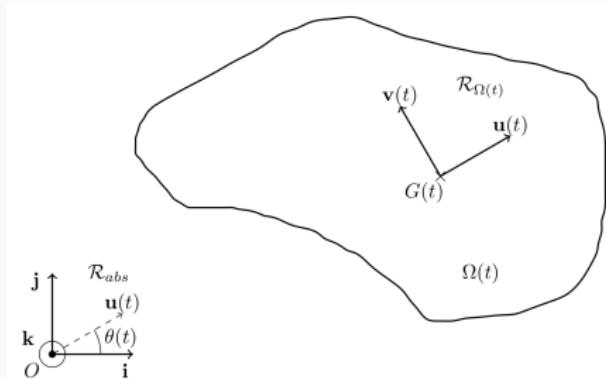


Figure – Repères abosolu et local pour un floe  
**(rabaté2015modélisation)**

# Interaction entre les floes

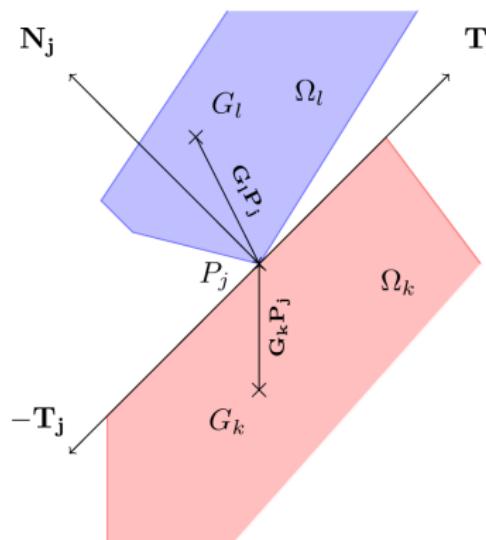


Figure – Interaction entre deux floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  au point  $P_j$  ([rabatel2015modélisation](#))

Deux conditions à respecter :

- ▶ **Condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration.
- ▶ **Loi de friction de Coulomb** : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision.

# Discussion sur la thèse

- ▶ Les floes sont rigides;
- ▶ Le modèle ne gère pas la rhéologie de la glace;
- ▶ Les coefficients de friction et de restitution sont limitants.

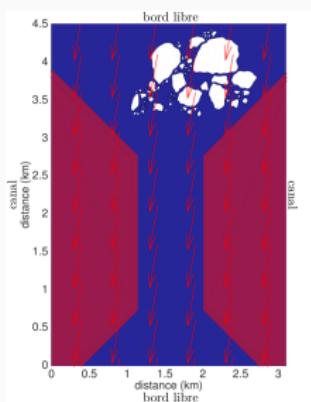
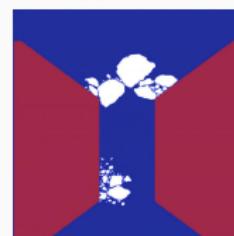


Figure – Configuration initiale  
(rabatel2015modélisation)



(a) à 2h04



(b) à 3h40

Figure – Dérive sous l'effet de la force de Coriolis  
(rabatel2015modélisation)

# Un modèle de fracture variationnel

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma),$$

Une solution du problème de fracture fragile est un couple  $(u^*, \sigma^*)$  qui vérifie :

$$E_{\text{tot}}(u^*, \sigma^*) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

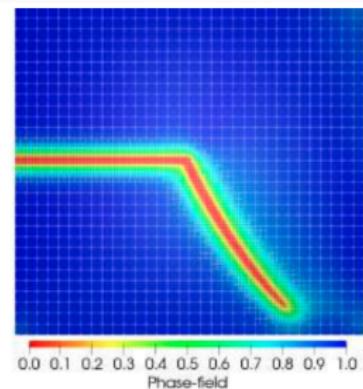
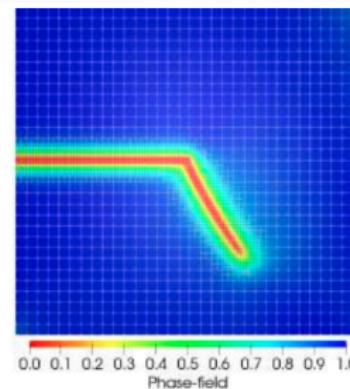
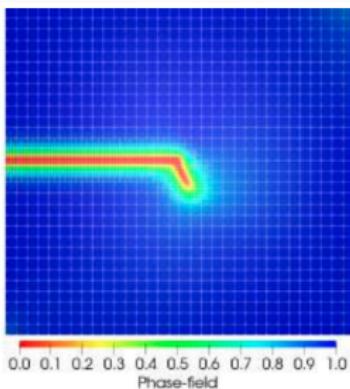


Figure – Bifurcation d'une fracture ([nagaraja2019phase](#))

# Réseaux de ressorts régulier

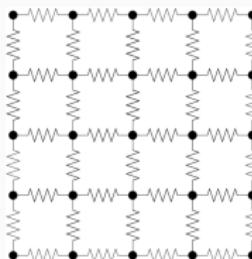


Figure – Réseau de ressorts régulier ([balasoiu2020modelisation](#))

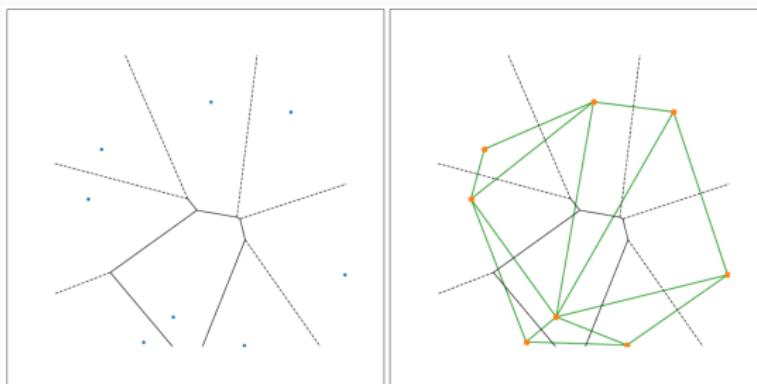


Figure – Tirage de points et diagrammes de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) ([balasoiu2020modelisation](#))

## **1** MOTIVATION

## **2** ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## **3** TRAVAUX ET RÉSULTATS 1D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes
- Fracturation des floes

## **4** TRAVAUX ET RÉSULTATS 2D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes

## **5** CONCLUSION

- Apports et recherches ultérieures
- Délivrables

# Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)

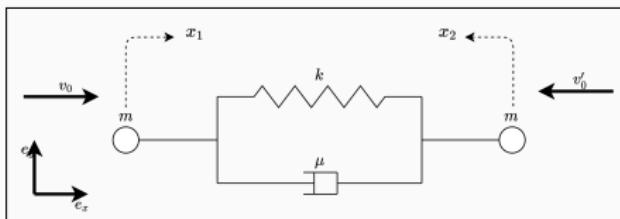


Figure – Floe de glace 1D

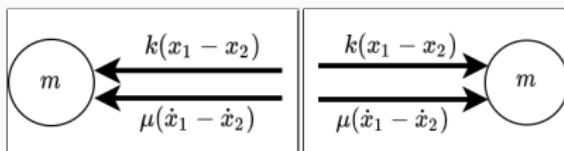


Figure – Bilan des forces

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases}$$

On préfère la forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T, \end{cases}$$

où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}, \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

# Déplacement des noeuds d'un floe isolé (2)

```

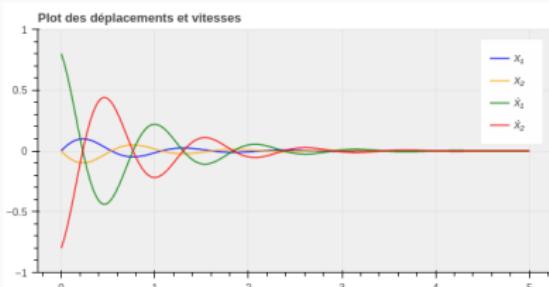
Y0 = np.array([0,0, v0, -v_0])
t = np.linspace(0, tmax, N+1)
def model(Y, t):
    return E @ Y
Y = odeint(model, Y0, t)

```

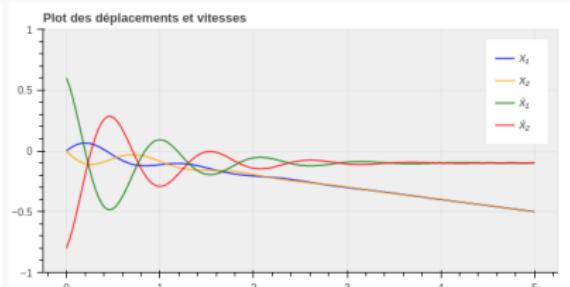
Listing – Code de simulation

## Théorème (Convergence du modèle 1D isolé)

Partant d'une position d'équilibre  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , les déplacements  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  des deux noeuds du floe 1D (avec viscosité  $\mu > 0$ ) convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont opposées, i.e.  $v_0 = -v'_0$ .



(a)  $v_0 = v'_0 = 0.8$



(b)  $v_0 = 0.6$  et  $v'_0 = 0.8$

Figure – Simulation du déplacement d'un floe 1D à 2 noeuds

# Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré

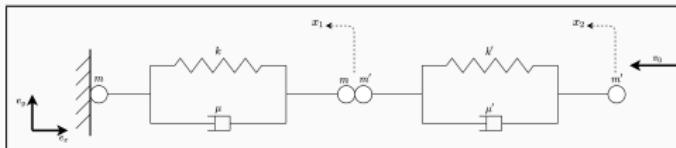


Figure – Collision 1D avec fixation d'un floe

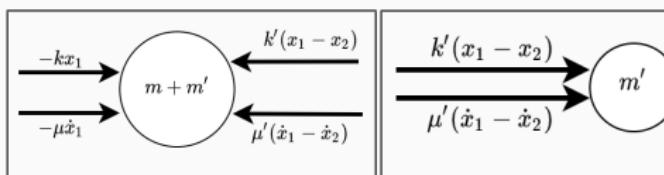


Figure – Bilan des forces

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \end{cases}$$

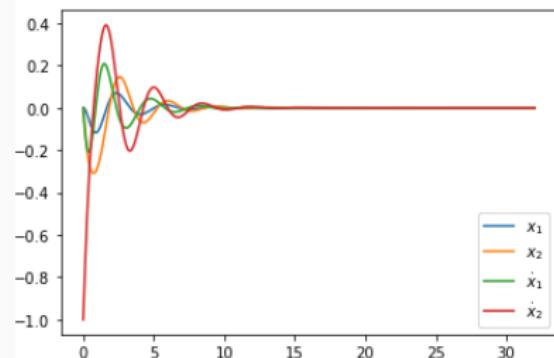


Figure – Résultat de simulation

# Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

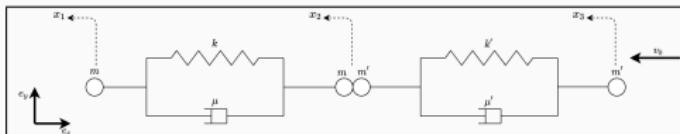


Figure – Collision 1D sans mur

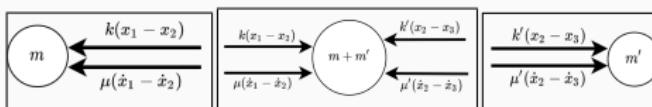
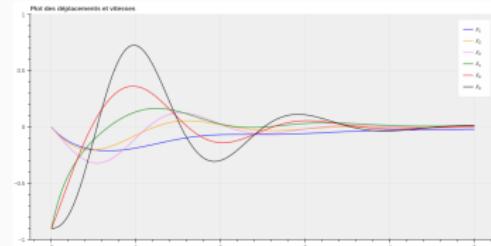


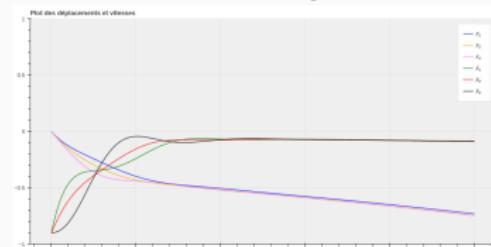
Figure – Bilan des forces

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases}$$



(a) Cas convergent



(b) Cas non convergent

Figure – Résultat de simulation

## Note

Le critère de convergence n'est pas clair (i.e.  $\mu << \mu'$ , etc.)!

# Collision inélastique avec séparation des masses

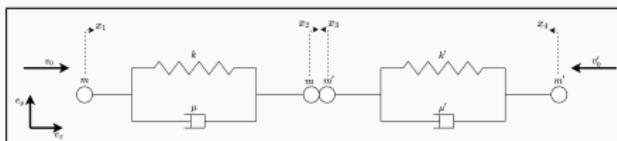


Figure – Collision 1D inélastique

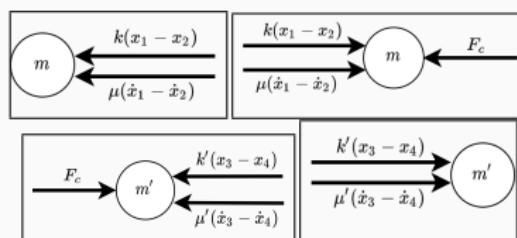


Figure – Bilan des forces

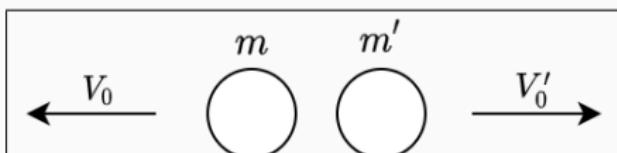


Figure – Situation après contact

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) , \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c , \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c , \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) . \end{cases}$$

Avec  $\varepsilon$  est le coefficient de restitution et :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt ,$$

les vitesses après contact sont :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1 + \varepsilon)m'v'_0}{m + m'} ,$$

$$V'_0 = \frac{I + (1 + \varepsilon)mv_0 + (m' - \varepsilon m)v'_0}{m + m'} .$$

# Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (1)

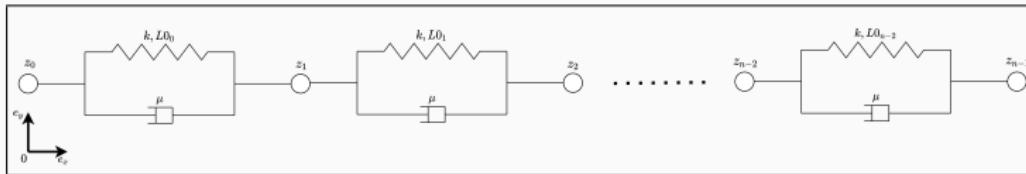


Figure – Illustration d'un floe 1D contenant  $n$  masses

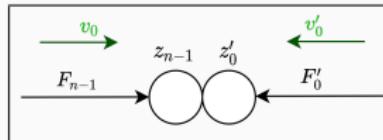
Sous forme matricielle, on a le système :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{z}_1 \\ \vdots \\ \ddot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & I_n & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & C \\ B & & & \end{pmatrix}}_{2n \times 2n} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & \mathbf{0} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & D \\ D & & & \end{pmatrix}}_{(2n) \times (2n-2)} \begin{pmatrix} L_{0_0} \\ L_{0_1} \\ \vdots \\ L_{0_{n-2}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

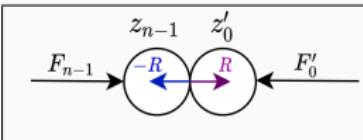
où :

$$B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & k & & & \\ k & -2k & k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & k & -2k & k \\ & & & k & -k \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -\mu & \mu & & & \\ \mu & -2\mu & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & -2\mu & \mu \\ & & & \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & -k & & & \\ k & -k & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -k \\ & & & & k \end{pmatrix}.$$

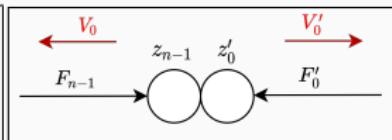
## Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (2)



(a) Avant le choc



(b) Pendant le choc



(c) Après le choc

Un modèle qui conserve l'énergie cinétique après chaque choc

$$v_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad v'_0 = v_0 + x, \quad (3)$$

avec :

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon(v_0 - v'_0), \quad Y = m(v_0)^2 + m'(v'_0)^2, \\ a &= m + m', \\ b &= -2m'X, \\ c &= m'X^2 - Y, \\ \Delta &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Un modèle qui met en évidence le coefficient de restitution ([hecker1997collision](#))

$$v_0 = v_0 + \frac{j - l}{m}, \quad v'_0 = v'_0 + \frac{k + l}{m'}, \quad (4)$$

avec :

$$l = \frac{(v_0 - v'_0)(1 + \varepsilon) + \frac{j}{m} - \frac{k}{m'}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}},$$

$$J = \int_{t^-}^{t^+} F_{n-1} dt = F_{n-1} \Delta t,$$

$$K = \int_{t^-}^{t^+} F'_0 dt = F'_0 \Delta t.$$

# Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (3)

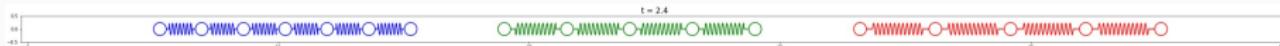


Figure – Configuration des floes pour la simulation

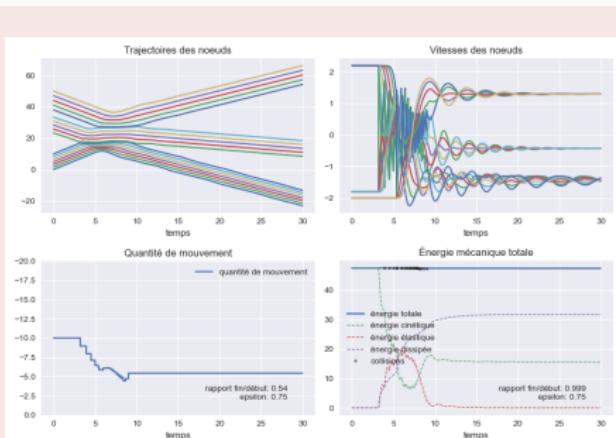


Figure – Résultat pour le modèle qui conserve l'énergie cinétique après chaque choc

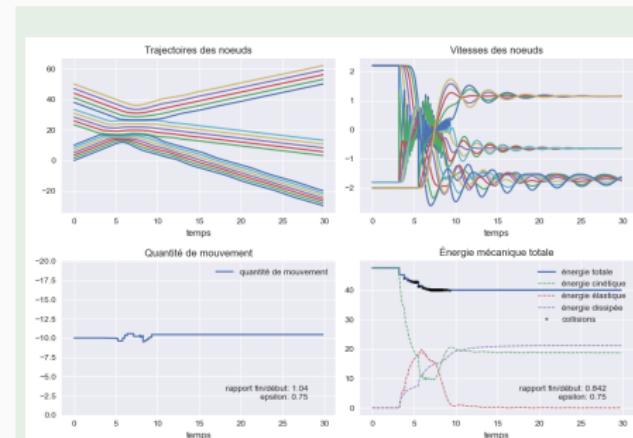


Figure – Résultat pour le modèle qui met en évidence le coefficient de restitution

# Différents modèles de fracture fragile

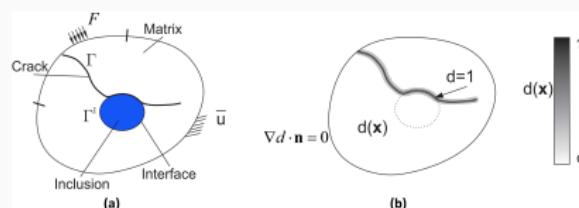


Figure – Champ de phase pour la régularisation d'une fissure ([yvonnet2018fissuration](#))

## Méthode du champ de phase

$$\begin{aligned} E &= \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{u}, \Gamma) d\Omega + G_c \int_{\Gamma} d\Gamma, \\ &\Downarrow \\ E &= \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{u}, \Gamma) d\Omega + G_c \int_{\Gamma} \gamma(\mathbf{d}, \nabla \mathbf{d}) d\Gamma. \end{aligned}$$

## Méthode combinatoire

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= \text{eng. pot. élastique au temps } t^{n+1} \\ &+ \text{ténacité} \times \lg. \text{de la fracture envisagée à } t^{n+1}. \end{aligned}$$

Animation de la fracture 1D par un algorithme *event-driven*

## 1 MOTIVATION

## 2 ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## 3 TRAVAUX ET RÉSULTATS 1D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes
- Fracturation des floes

## 4 TRAVAUX ET RÉSULTATS 2D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes

## 5 CONCLUSION

- Apports et recherches ultérieures
- Délivrables

# Déplacement des nœuds d'un floe isolé (1)

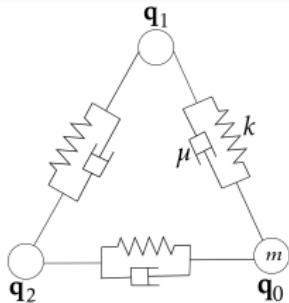


Figure – Floe de glace 2D

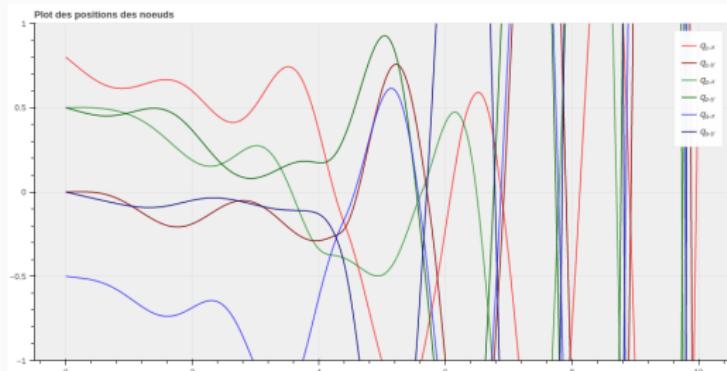


Figure – Simulation avec  $T = 10$

Les équations de Newton-Euler :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \underbrace{\sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right]}_{\mathbf{F}_i}.$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right].$$

# Déplacement des nœuds d'un floe isolé (2)

## Listing – Code de simulation et schéma avec Scipy

```

q0 = np.stack([q1_0, dotq1_0, q2_0, dotq2_0, q3_0, dotq3_0])
q_ = np.reshape(q0, (nb_nodes*4))

def model(t, Q_):
    Q = np.reshape(Q_, (nb_nodes*2, 2))
    Q_ret = np.zeros_like(Q)
    Q_ret[2*0] = 0; Q_ret[2*1] = 0

    for i in range(1, nb_nodes):  ## --- Node 0 is immobilized
        Q_ret[2*i] = Q[2*i+1]

        for neighbor in range(i+1, i+3):
            j = neighbor % nb_nodes
            u[i,j] = (Q[2*j] - Q[2*i]) / nplin.norm(Q[2*j] - Q[2*i])
            Q_ret[2*i+1] += (1 / m)*C[i,j]*k*(nplin.norm(Q[2*j]-Q[2*i]) - L[i,j])*u[i,j]
            - mu*(np.dot(Q[2*j+1] - Q[2*i+1], u[i,j]))*u[i,j]
    return np.reshape(Q_, (nb_nodes*4))

sol = solve_ivp(model, [0,T], q0_, t_eval=t)

```

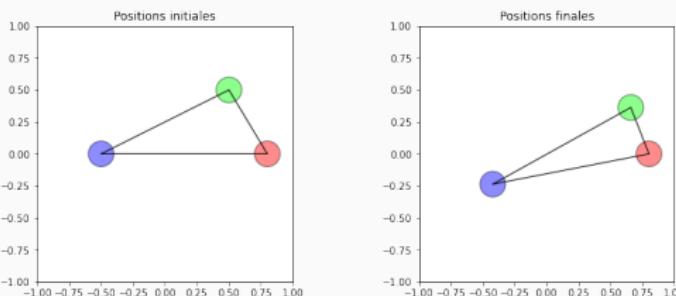


Figure – Illustration à  $t = 0$  et  $t = 4$

## En somme

Avec un schéma Euler explicite, symplectique ou Scipy (RK45), il faut fixer certains nœuds pour que le système reste stable!

# Collision parfaitement inélastique entre deux floes (1)

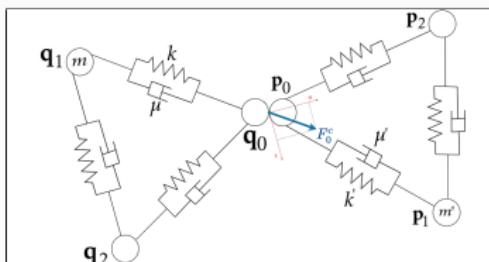


Figure – Illustration de la percussion 2D

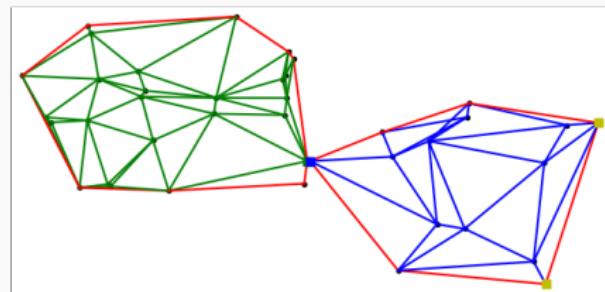


Figure – Un maillage 2D par processus de Poisson

## Animation de la percussion 2D

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0, & (\text{SE}) \\ \ddot{\mathbf{p}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0, \dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0 - \Delta_0, & (\text{SE}) \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1, & (\text{SI}) \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n'-1, & (\text{SI}) \end{cases}$$

où :  $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0)$ .

# Collision parfaitement inélastique entre deux floes (2)

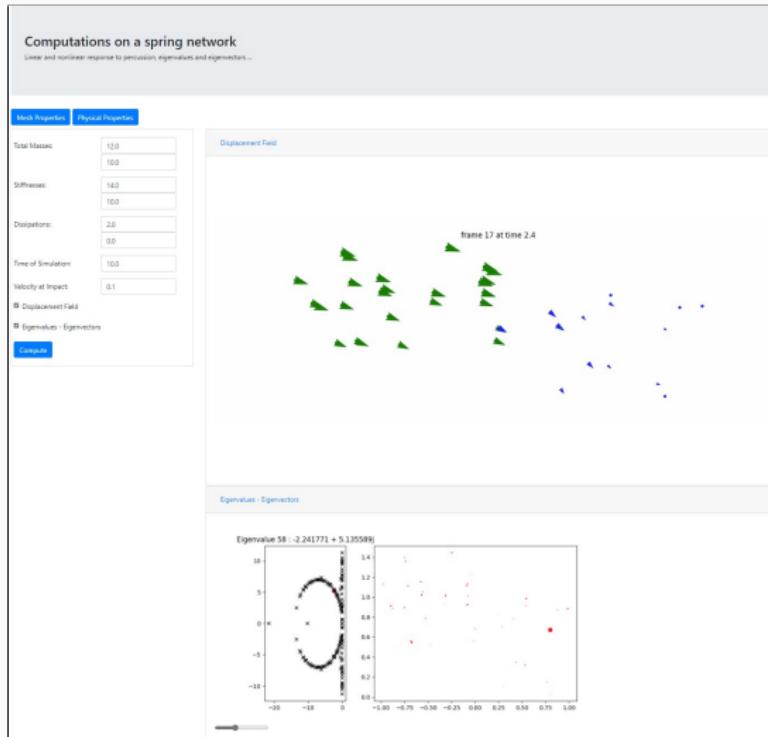


Figure – Client web développé et maintenu avec Flask

## **1** MOTIVATION

## **2** ÉTAT DE L'ART

- Thèse de M. Rabatel
- Thèse de D. Balasoiu

## **3** TRAVAUX ET RÉSULTATS 1D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes
- Fracturation des floes

## **4** TRAVAUX ET RÉSULTATS 2D

- Déplacement des nœuds
- Percussion entre floes

## **5** CONCLUSION

- Apports et recherches ultérieures
- Délivrables

# Apports et recherches ultérieures



Figure – Résumé du déroulement du stage

## Apports du stage

- ▶ Simulation de systèmes dynamiques en Python;
- ▶ Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.);
- ▶ Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnement);
- ▶ Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres;
- ▶ Recherche en milieu professionnel;
- ▶ Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

## Recherches ultérieures

- ▶ Implémentation de la méthode du champ de phase;
- ▶ Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D;
- ▶ Intégration de la fracture fragile au code de **rabatel2015modelisation**
- ▶ Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts;
- ▶ Optimiser les codes avec Cython ou en C++;
- ▶ Tests de validation en laboratoire.

# Checklist et délivrables

## Checklist des objectifs

- ✓ Prise en main de la notion de  $\Gamma$ -convergence;
- ✓ Assimilation des travaux antérieurs;
- ✓ Modélisation de la percussion (1D et 2D);
- ✓ Modélisation de la fracture :
  - ✓ en 1D;
  - ✗ en 2D.
- ✗ Calculs à l'échelle des floes de glace de l'Arctique.

## Délivrables

- 1 Rapport de stage : ↗ [GitHub](#);
- 2 Code de calcul : ↗ [GitHub](#) et ↗ [Framagit](#);
- 3 Quelques simulations : ↗ [Seafile](#).

## Références

Merci pour votre attention ☺!

Questions?