

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant

Desmond Roussel NZOYEM

Superviseur

Stéphane LABBÉ

Enseignant référent

Christophe PRUD'HOMME



*Ce stage a été effectué dans le cadre du master 2 CSMI,
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
initié par le groupe SASIPau LJLL.*

Année académique 2020 - 2021

8 février 2021

Remerciements

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Remerciements | i |
| 1 Introduction | 1 |
| 2 Environnement économique du stage | 2 |
| 2.1 Le secteur d'activité | 2 |
| 2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions | 2 |
| 3 État de l'art | 3 |
| 3.1 Position du problème | 3 |
| 3.1.1 Modélisation d'un floe de glace | 3 |
| 3.2 État de l'art | 5 |
| 3.2.1 Le modèle du floe | 5 |
| 3.2.2 Le modèle de l'environnement | 7 |
| 4 Travaux et apports | 8 |
| 4.1 Les travaux effectués | 8 |
| 4.2 Les apports du stage | 8 |
| 5 Déroulement du stage | 9 |
| 5.1 Journal de bord | 9 |
| 6 Conclusion | 10 |
| Bibliographie | 11 |

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Environnement économique du stage

2.1 Le secteur d'activité

2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions

Chapitre 3

État de l'art

3.1 Position du problème

3.1.1 Modélisation d'un floe de glace

Nous commençons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécessaires pour décrire un floe sur la mer (voir figure 1) :

- Un ouvert connexe $\omega \in \mathbb{R}^2$ décrivant la section longitudinale du floe;
- Deux fonction $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$ décrivant l'épaisseur du floe, telle que $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$;
- Le centre de gravité du floe $G(w)$;
- Deux vecteurs $e_1(\omega)$ et $e_2(\omega)$ formant une base sur ω .

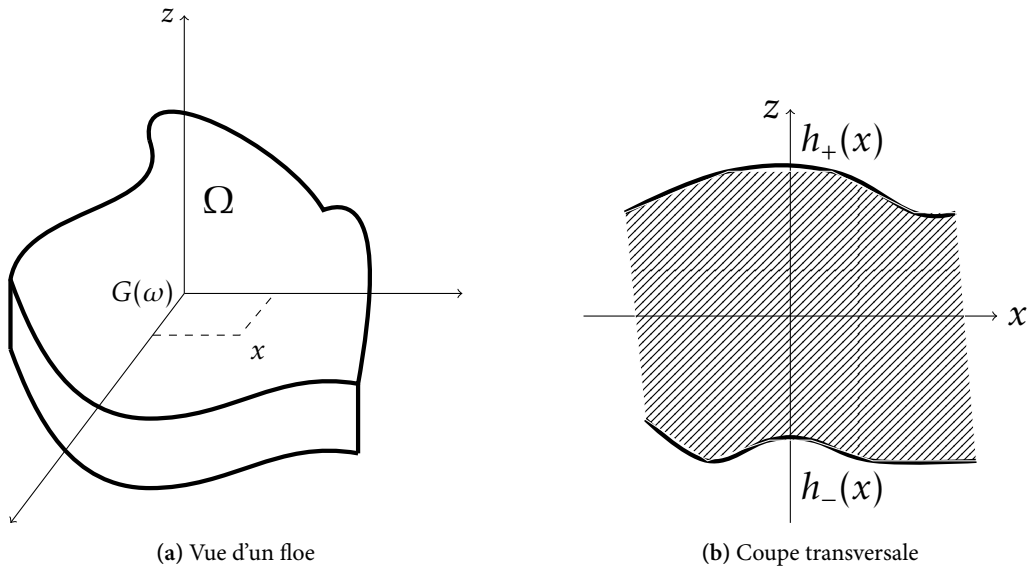


FIGURE 3.1 – Illustration de la géométrie d'un floe de glace Ω .

LES VECTEURS $E1$ ET $E2$ (ET TOUS LES AUTRES VECTEURS) DOIVENT ETRE EN GRAS!

Le volume Ω du floe est donné par :

$$\Omega = \{(x, z) | x \in \omega \in \mathbb{R}^2, z \in]h_-(x), h_+(x)[\}.$$

Les fonctions h_- et h_+ permettent de définir trois quantités (voir figure 2) :

- L'épaisseur moyenne du floe : $\bar{h} = \sup_{x \in \omega} h_+(x) - \inf_{x \in \omega} h_-(x)$;
- La plus forte épaisseur : $\bar{h}^* = \sup_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$.
- La plus faible épaisseur : $\underline{h}^* = \inf_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$.

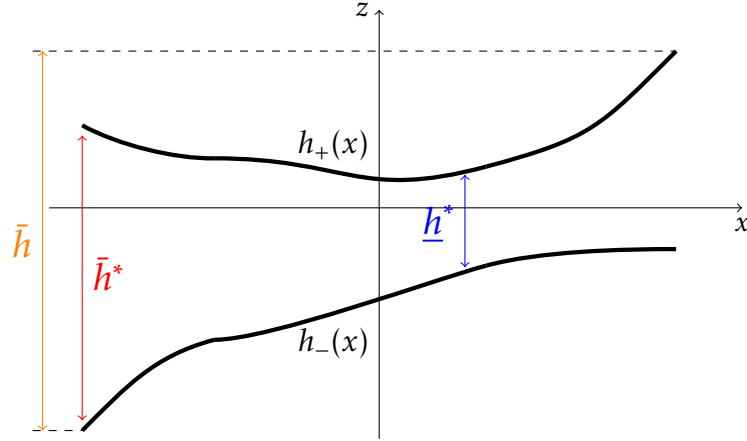


FIGURE 3.2 – Illustration des différentes épaisseurs décrivant le floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floes relativement plat (i.e \bar{h} faible), h_- sera pris identiquement nul, et h_+ constant.

Les vecteur $e_1(\omega)$ et $e_2(\omega)$ sont liés à ω , et pointent vers un point fixe du bord $\partial\omega$ du floe i.e :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega | e_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{\|\sigma_i - G(\omega)\|}, \text{ pour } i \in \{1, 2\},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . Notons que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, et $e_1(\omega) \cdot e_2(\omega) = 0$ de façon à ce que la base $(e_1(\omega), e_2(\omega))$ soit directe.

Un floe $F = (\omega, e_1(\omega), e_2(\omega), G(\omega), h_-, h_+)$ se déplace sur la mer¹ $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$. Au temps t après une translation de vecteur $u(t)$ (et de matrice $T_{u(t)}$), et une rotation de vecteur $\theta(t)$ (et de matrice $R_{\theta(t)}$), on obtient le floe F_t défini par (voir figure 3) :

$$F_t = (T_{u(t)}R_{\theta(t)}\omega, T_{u(t)}R_{\theta(t)}e_1(\omega), T_{u(t)}R_{\theta(t)}e_2(\omega), T_{u(t)}R_{\theta(t)}G(\omega), h_-, h_+).$$

REMPALCER CES TRANSFORMATION ENCOMBRANTES PAR UN *prime* SIMPLE!

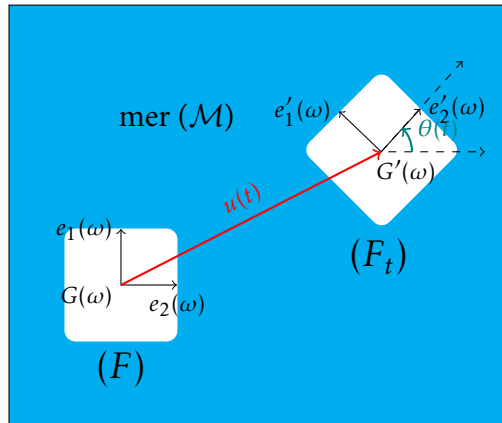


FIGURE 3.3 – Illustration du mouvement d'un floe de glace F dans la mer, après une translation de vecteur $u(t)$ et une rotation d'angle $\theta(t)$, pour obtenir le floe F_t . On observe la transformation des propriétés du floe, en particulier les vecteurs $e_1(\omega)$ et $e_2(\omega)$ qui restent liés au floe.

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans \mathbb{R}^2 . Plus tard, nous prendrons en compte son épaisseur lorsque nous la modéliserons par une sphère

Lors de leur mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et des courants océaniques. Nous nous intéresserons donc au phénomène de percussion en vue de l'initialisation des fractures dans les floes de glace.

Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère absolu, que notons $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. le repère associé au floe Ω_i sera noté $\mathcal{R}_{\Omega^i} = (O, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), \mathbf{k})$. Dans ce repère absolu, le floe possède 3 degrés de libertés : l'abscisse et l'ordonnée de son centre de gravité $G^i(\omega)$, et l'orientation du floe donné par l'angle $\theta^i(t)$ (voir figure 3.4).

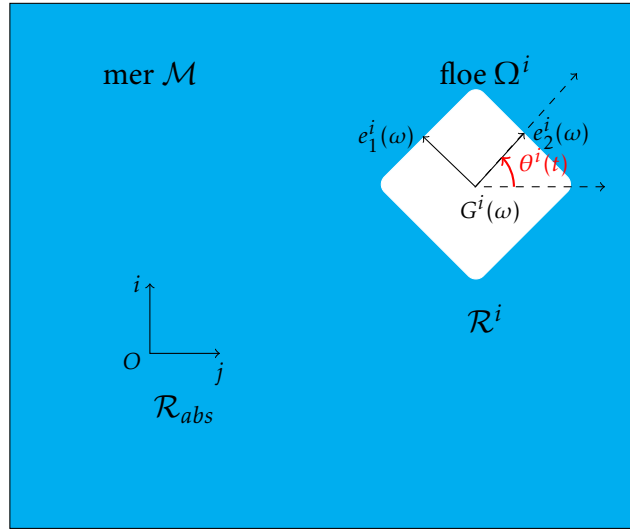


FIGURE 3.4 – Positionnement d'un floe de glace Ω^i dans le repère absolu \mathcal{R}_{abs} .

DEFINIR LE REPERE ABSOLUE DU FLOE EN 2D, AVEC LE REPERE LOCAL. ECRIRE LE VECTEUR POSITION, ET ECRIRE LES EQUATIONS DE NEWTON-EULER.

3.2 État de l'art

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL, 2015 et BALASOIU, 2020 ont extensivement traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de leurs raisonnements, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

3.2.1 Le modèle du floe

3.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans (RABATEL, 2015) consiste à définir le mouvement de chaque floe. Les obstacles sont des floes aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans (RABATEL, 2015), l'auteur travaille dans un repère orthormé direct $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, cependant, la mer est considérée plane, et le mouvement du floe peut être décrit dans le plan $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. On désigne la vitesse angulaire du floe Ω^i par

$$\boldsymbol{\theta}^i(t) = \theta^i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta^i(t))^T.$$

Soit P de coordonnées x un point quelconque de $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Sa vitesse dans le repère \mathcal{R}_{abs} est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}^i(t) + \boldsymbol{\theta}^i(t) \wedge \mathbf{G}^i \mathbf{P},$$

où le symbole \wedge représente le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 . La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M^i = \rho^i \int_{\Omega^i(t)} h_+^i(x) dx.$$

Ensuite, l'auteur défni :

- la somme des force par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe Ω^i :

$$\mathbf{F}^i = \rho^i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{F}(x) dx.$$

- le moment cinétique² en G :

$$L^i = \rho^i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t) dx.$$

- le moment dynamique³ en G :

$$\mathfrak{M}^i = \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \mathbf{F}(x) dx.$$

Sous le formalisme de Newton-Euler, RABATEL montre que chaque floe Ω^i vérifie :

$$\begin{cases} M^i \frac{d\dot{\mathbf{G}}^i(t)}{dt} = \mathbf{F}^i \\ \mathcal{I}^i \frac{d\dot{\boldsymbol{\theta}}^i(t)}{dt} = \mathfrak{M}^i \end{cases},$$

qui se réécrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}^i \frac{dW^i(t)}{dt} = \mathcal{H}^i(t), \quad (3.1)$$

avec

$$\mathcal{M}^i = \begin{pmatrix} M^i & 0 & 0 \\ 0 & M^i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}^i \end{pmatrix}, W^i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}^i(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^i(t) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{H}^i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^i(t) \\ \mathfrak{M}^i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système composé de n floes, l'équation précédente doit être satisfaite pour tous les floes. RABATEL, 2015, p.18 montre que cela revient au système d'équations

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t), \quad (3.2)$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}^i)_{1 \leq i \leq n}, W(t) = (W^i(t))_{1 \leq i \leq n} \text{ et } \mathcal{H}(t) = (\mathcal{H}^i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe Ω^i quant à elle sera donné par :

$$E^i(t) = \frac{1}{2} M^i \dot{\mathbf{G}}^i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}^i \dot{\boldsymbol{\theta}}^i(t)^2.$$

2. du à l'accélération du floe

3. du aux forces extérieures exercées sur le floe

3.2.1.2 L'interaction entre les floes

3.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

3.2.1.4 Conservation de l'énergie cinétique

3.2.1.5 Traitement des conditions aux bords

3.2.2 Le modèle de l'environnement

Chapitre 4

Travaux et apports

4.1 Les travaux effectués

4.2 Les apports du stage

- L'utilisation de TIKZ

Chapitre 5

Déroulement du stage

5.1 Journal de bord

Chapitre 6

Conclusion

Bibliographie

BALASOIU, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

RABATEL, Matthias (nov. 2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.