Rapport de stage

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Superviseur
Stéphane Labbé

Étudiant
Roussel Desmond Nzoyem

Enseignant référent
Christophe Prud'homme

Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
pour l'obtention du master 2 CSMI.

Année académique 2020 - 2021

4 avril 2021

Remerciements

Table des matières

Chapitre 1

Travaux et apports

1.1 Les missions du poste

- L'état de l'art de la partie précédente fait partie des missions.
- Modélisation
- Simulation

Nous souhaitons étudier le comportement mécanique d'un floe après collision avec un autre floe. Les étapes de travail envisagées sont les suivantes :

1. Ecire les systèmes differentiels pour les deux floes juste après le choc : pour l' instant on peut considérer que l'un des floes est immobile (celà revient au même si l'on exprimes les vitesses dans un repère lié à ce floe).
2. On exprime l'EDO vérifiée par les solutions, c'est à dire q pour le premier floes, et p pour le second.
3. On pourra ensuite simuler ces EDP limites et trouver les valeurs de p et q. Autrement dit, on connait la position de chaque point du réseau au temps final.
4. Si on connait p et/ou q, on connait la condition de Dirichlet sur le floe concerné, et on peut ainsi exprimer le déplacement et la possible fracture du floe.

1.2 Présentation des résulats obtenus

1.2.1 Modélisation du contact entre deux floes de glace

Les floes de glace Ω_k et Ω_l sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une moélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliés par des ressorts (de constante de raideur k), et par des dispositifs visqueux de constante μ. Nous désignerons par $n+1$ le nombre total de noeuds du floe Ω_k, chaque noeud ayant pour masse m. De facon similaire, on définit les constantes k', μ', $n'+1$, $m'+1$ pour le floe Ω_l. Les positions des noeds de Ω_k seront noté $(q_i)_{0\leq i\leq n}$, tandis que ceux de Ω_l seront notés $(p_i)_{0\leq i\leq n'}$ (voir figure 1.1).

On définit la matrice de contact C...(voir these Dimitri), et L_{0j}.. et u_{0j} ..

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisont le SI comme présenté par Balasoiu. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe Ω_k, nous

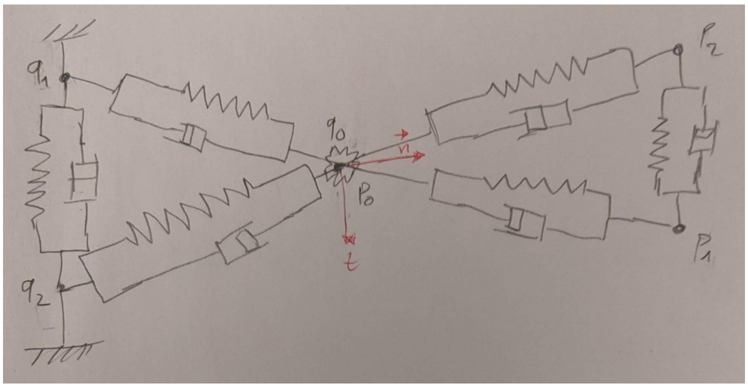


FIGURE 1.1 – Contact entre deux floes aux points $p_0 = q_0$.

écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire [1] au point de contact q_0 :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \tag{1.1}$$

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^{n} C_{0j} \left[\underbrace{k\Big(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}\Big)\mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu\Big\langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j}\Big\rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \tag{1.2}$$

représente la somme des forces de reaction et de disssipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud q_0 ; et $\mathbf{F}_0^c(t)$ la force de contact durant la collison entre les deux particules. En supposnat qu'il existe un repère de contact $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ associé au floe Ω_k (voir figure 1.1), on peut écrire, pour $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \tag{1.3}$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations équations (1.1) à (1.3). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \le i \le n. & \text{(SI)} \end{cases} \tag{E}$$

En ce qui concerne le floe Ω_l, nous procédons de facons similaire et appliqons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0^{'} - \mathbf{F}_0^c, & & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{'}, & \forall 1 \le i \le n', & \text{(SI)} \end{cases} \tag{E'}$$

où $(\mathbf{F}_i^{'})_{0 \le i \le n'}$ sont définis de facon similaire à $\mathbf{F}_0$ (voir équation (1.2)).

Ensuite, il nous faut introduire des conditions portant sur la conservation de l'énergie, et la condition de non-interpénétration de Signorini…

1. La rotation du point matériel q_0 n'est pas prise en compte ici, d'où l'abscence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

Modélisation et simulation 1D

Nous effectuons ici une modélisation 1D complète. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux noeuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse $\mathbf{v}_0$. On identifie les noeuds q_0 et p_0 de la section précédente à leur masses respectives m et m' (voir 1.2). On suppose que durant la

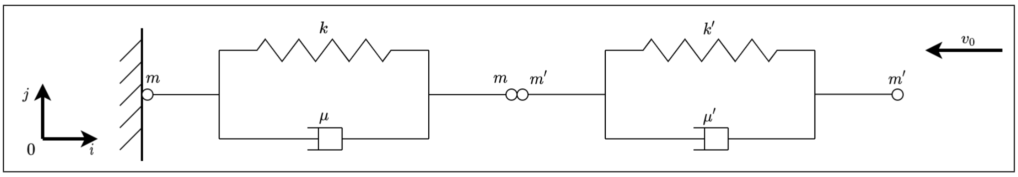
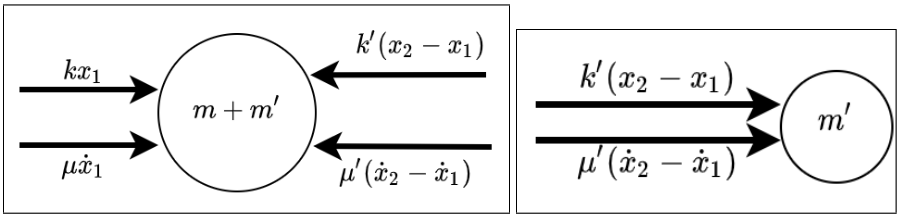


FIGURE 1.2 – Contact 1D entre deux floes.

dynamique non régulière, les masses m et m' en contact forment une seule masse $m+m'$ dont le déplacement des donné par la variable $x_1(t)$. Le déplacement de la masse m' à l'autre bout du système est nommé $x_2(t)$. La masse m fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses. En orientant convenablement le système (voir figure 1.2), on applique les lois de Newton-Euler



(a) Sur $m+m'$. **(b)** Sur m'.

FIGURE 1.3 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système.

linéaires pour obtenir les système suivant et ses conditions initiales[2] :

$$\begin{cases}(m+m')\ddot{x}_1 = kx_1 + \mu\dot{x}_1 - k'(x_2-x_1) - \mu'(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\\ m'\ddot{x}_2 = k'(x_2-x_1) + \mu'(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\end{cases} \tag{1.4}$$

À l'instant initial t_0, on a le système suivant

$$\begin{cases}(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0,0)\\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, v_0)\end{cases} \tag{1.5}$$

En posant $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, l' équation (1.5) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m+m' & 0\\ 0 & m'\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\mu+\mu' & -\mu'\\ -\mu' & \mu'\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}k+k' & -k'\\ -k' & k'\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases}\ddot{X}(t) = B'\dot{X}(t) + C'X(t),\\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ v_0\end{pmatrix}\right),\end{cases} \tag{1.7}$$

2. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de x_1 est-elle vraiment 0 ?

avec $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$.

Il s'agit la d'un suytème d'EDO du deuxième ordre, transformons le en un système du premier ordre pour une résolusiotn plus aisée. On pose donc $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^4$ et le système 1.7 équation (1.2) devient

1.3 Les apports du stage

Bibliographie

[Bal20] Dimitri Balasoiu. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132.