

RAPPORT DE STAGE

---

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

---

*Superviseur*  
Stéphane LABBÉ

*Étudiant*

Roussel Desmond NZOYEM

*Enseignant référent*  
Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;  
du 03 février 2021 au 31 juillet 2021;  
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

17 août 2021

## *Remerciements*

Avant tout développement sur cette expérience professionnelle, il apparaît opportun de commencer ce rapport de stage par des remerciements, à ceux qui m'ont appris des choses, et à ceux qui ont eu la gentillesse de faire de ce stage un moment agréable et profitable.

Ainsi, je remercie le Pr. Stéphane Labbé, mon maître de stage qui m'a formé et accompagné tout au long de cette expérience avec beaucoup de patience et de pédagogie. Étant donné la situation sanitaire de COVID-19, il a su me transmettre tous les enseignements et les ressources (livres, références, etc.) nécessaires pour effectuer mes différentes missions (et bien plus encore) à distance comme en présentiel. Je vous en suis profondément reconnaissant.

J'étends mes remerciements à mes illustres prédecesseurs Matthias Rabatel et Dimitri Balasoiu sans qui mon travail n'aurait pas eu lieu. Dimitri a su me guider dans les moments les plus difficiles du stage. Les mots ne sauraient exprimer ma reconnaissance envers les visio-conférence organisées afin de me permettre de prendre en main de son travail.

Je remercie aussi l'ensemble du personnel du Laboratoire Jacques-Louis Lions qui m'a permis d'effectuer un stage scientifique très enrichissant dans les meilleures conditions possibles. J'adresse mes salutations aux doctorants et aux étudiants en séjour de recherche pour leur unique regard sur les difficultés auxquelles nous avons fait face. En particulier, je remercie Mme Catherine Drouet de l'administration pour son assistance et ses conseils inestimables.

Enfin, je remercie mes proches, ma famille et mes amis pour leurs encouragements. Si un lecteur estime que son nom aurait dû figurer ici de façon explicite, faite ceci : imprimer cette page, montrer la moi, et cela sera votre coupon pour une bière gratuite (ou un café, ou autre chose). Les trucs gratuits sont mieux qu'une mention, n'est-ce pas ?

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	3
1.3 Environnement . . . . .	3
1.4 Objectifs . . . . .	3
1.5 Abstract . . . . .	4
<b>2 État de l'art</b>	<b>5</b>
2.1 Position du problème . . . . .	5
2.2 Résumé de thèse de M. Rabatet . . . . .	7
2.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer . . . . .	7
2.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème . . . . .	13
2.2.3 Validations et exploitations du modèle . . . . .	17
2.2.4 Discussion . . . . .	17
2.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu . . . . .	19
2.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art . . . . .	19
2.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace . . . . .	21
2.3.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier . . . . .	23
2.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes . . . . .	25
2.3.5 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope . . . . .	29
2.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur . . . . .	32
2.3.7 Discussion et questions ouvertes . . . . .	35
2.4 Résumé de l'état de l'art . . . . .	36
<b>3 Problème 1D et étude de la fracture</b>	<b>37</b>
3.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé . . . . .	37
3.2 Modélisation de la percussion . . . . .	41
3.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial . . . . .	41
3.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur . . . . .	43
3.2.3 Premier modèle pour la collision inélastique avec séparation des masses . . . . .	45
3.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses . . . . .	47
3.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses . . . . .	50
3.3 Modélisation de la fracture . . . . .	52
3.3.1 Méthode du champ de phase . . . . .	52
3.3.2 Une approche combinatoire pour la fracture . . . . .	55
3.4 Algorithme de calcul 1D . . . . .	56
3.5 Résumé des résultats obtenus . . . . .	59

<b>4 Problème 2D et percussion des floes</b>	<b>60</b>
4.1 Développement d'un modèle de déplacement des nœuds . . . . .	60
4.2 Développement d'un modèle de percussion des floes . . . . .	61
4.2.1 Présentation des travaux antérieurs . . . . .	61
4.2.2 Nouveaux travaux sur la percussion . . . . .	63
4.3 Code de calcul 2D . . . . .	65
4.4 Résumé des résultats obtenus . . . . .	68
<b>5 Déroulement et apports du stage</b>	<b>69</b>
5.1 Journal de bord . . . . .	69
5.2 Les apports du stage . . . . .	74
5.2.1 Compétences académiques . . . . .	74
5.2.2 Compétences techniques . . . . .	74
5.2.3 Compétences professionnelles . . . . .	75
5.3 Bilan et future travail . . . . .	75
<b>6 Conclusion</b>	<b>77</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>78</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

Le déclin massif de la glace arctique ces dernières décennies est considéré comme l'une des manifestations les plus marquantes du réchauffement climatique [Str+12]. Ce déclin présente des enjeux aussi climatiques qu'industriels. Premièrement, grâce à son étendue et son épaisseur immense, la zone arctique est un contributeur majeur du climat à travers ses échanges de chaleurs par rayonnement et par radiation avec l'atmosphère. Il est donc crucial de considérer l'évolution de la glace de mer dans les modèles climatiques. Deuxièmement, la chute de cette couverture de glace dans la MIZ<sup>1</sup> (voir figure 1.1) ouvre des routes maritimes facilitant l'exploitation de ses réserves d'hydrocarbures (qui, à ce jour, restent quasiment intactes). Il est donc nécessaire de pouvoir prédire l'évolution de la banquise dans l'Arctique (au moins) à court terme.

Parmi les éléments exacerbant ce déclin de glace dans l'Arctique, des études ont cité l'accélération de la vitesse et de la déformation des floes<sup>2</sup> [Ram+11; SKM11]. Pour les prédictions de l'évolution de la banquise, les modèles qui considèrent l'étendu de glace comme un milieu continu ne sont pas adapté, surtout à l'échelle de la MIZ. Au contraire, les modèles granulaires, bien que plus couteux doivent être privilégié afin de prendre en compte la nature discontinue de la banquise ainsi que sa rhéologie<sup>3</sup>. Des modèles granulaires pour l'évolution de la glace ont été utilisés par le passé [Hop96; KS14]. Cependant, les approches utilisées dans ces travaux limitent la géométrie (circulaire, rectangulaire) et le nombre de floes (de l'ordre de la centaine) et modélisent le contact entre floes comme une répulsion après interpénétration<sup>4</sup> (voir [Bal20, p.16]).

En 2015, M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss [RLW15; Rab15] ont développé un nouveau modèle granulaire prenant en compte la collision des floes sans passer par un processus d'interpénétration (voir figure 1.2). Dans leur modèle, le mouvement des floes vérifie les équations de préservation du moment angulaire et de la quantité de mouvement. Le modèle prend en compte la force de Coriolis et les interactions avec l'océan et l'atmosphère. En 2020, D. Balasoiu [Bal20] développe un modèle de fracture dans le but de le coupler au modèle granulaire d'interaction préexistant, en prenant en compte le phénomène de percussion<sup>5</sup>. Les floes de glace auparavant considérés comme des corps solides dans les travaux de M. Rabatel, sont dorénavant élastiques. En plus de proposer un modèle

---

1. Marginal Ice Zone : zone de transition entre l'océan et le cœur de la banquise, où la concentration de glace est inférieure à 80%, et/ou les morceaux de glace sont de faible épaisseur ( $\approx 1\text{m}$ ) et de petite taille (10m – 100km).

2. Un floe est un morceau individuel de glace rencontré dans la MIZ.

3. Étude de la résistance des matériaux aux contraintes et aux déformations.

4. Les détails sur le contact avec interpénétration sont donnés dans la section 2.2.

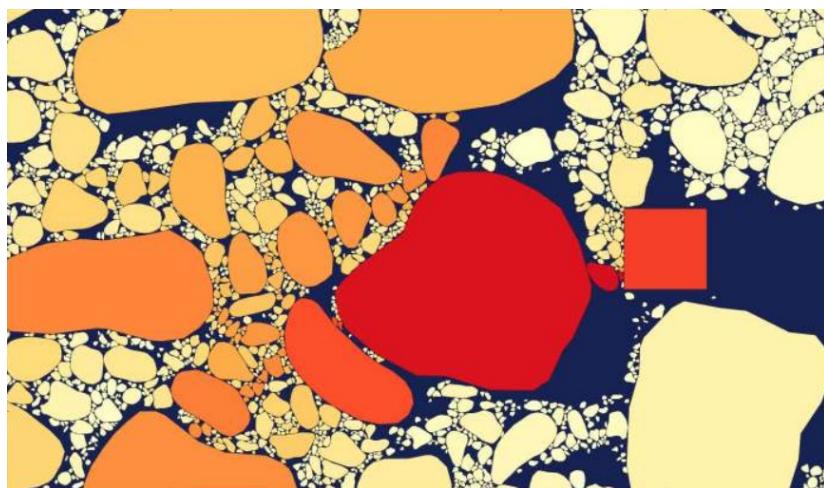
5. Dans ce rapport, nous désignerons par percussion la série de collisions à très courts intervalles de temps entre deux ou plusieurs floes.

de fracture fragile pour les floes de glace, D. Balasoiu obtient l'expression du déplacement limite d'un floe (considéré comme un réseau de masses reliées par des ressorts à fortes raideurs) qui est percuté par un objet ponctuel.

C'est dans ce contexte que le projet **SASIP** a été lancé. Il s'agit d'un projet à but de développer un modèle de glace de mer capable d'appréhender sa dynamique complexe afin d'améliorer sa représentation dans les futurs modèles de prédiction climatiques. Cette gigantesque entreprise pilotée par l'Institut des Géosciences de l'Environnement regroupe dix partenaires internationaux parmi lesquels la France, la Norvège, les Etats-Unis d'Amérique, l'Italie, le Royaume-Uni et l'Allemagne. Ce fut un grand honneur pour moi d'intégrer ce projet dans un stage de six mois avec pour missions de prendre en main et de poursuivre le développement du modèle de fracturation des floes existant; puis d'intégrer ce modèle dans un code de calcul de l'évolution de la banquise à l'échelle des floes de glace.



**FIGURE 1.1** – Un bateau industriel dans la MIZ.



**FIGURE 1.2** – Capture d'écran d'une simulation d'interaction glace structure avec contact rigide [Bal20, p.23].

## 1.2 Problématique

Ce stage a été pour moi une opportunité d'explorer la percussion et la fracture des floes de glace. J'ai eu à développer un modèle mathématique et à l'intégrer à un projet de développement logiciel. Plus précisément, ce rapport de stage se développe au prisme de la problématique du comportement d'un matériau élastique lors de la percussion avec un matériau voisin. En utilisant les principes de mécanique du contact et les équations aux dérivées ordinaires (EDO), nous nous sommes intéressés à la question : *Comment le matériau se déplace-t-il après de tel(s) choc(s) ?* Nous nous sommes aussi posés la question de savoir *dans quelle mesure une fracture apparaît-elle dans le matériau ?* Pour cette dernière tâche, nous nous sommes basés sur le modèle de Griffith et sur l'approche variationnelle de Francfort-Marigot.

## 1.3 Environnement

Mon stage s'est déroulé du 3 février 2021 au 31 juillet 2021 au sein du [Laboratoire Jacques-Louis Lions](#) (LJLL) de Sorbonne Université, sous la supervision du Professeur Stéphane Labbé. Ce stage s'inscrit dans la continuation directe de deux thèses effectuée par Matthias Rabaté [\[Rab15\]](#) et Dimitri Balasoiu [\[Bal20\]](#) au sein du [Laboratoire Jean Kuntzmann](#) de l'Université Grenoble Alpes, co-dirigée par le Professeur Stéphane Labbé et Monsieur Jérôme Weiss, en collaboration avec le groupe TOTAL. Le LJLL a constitué un environnement idéal pour ce travail de stage de par ses membres spécialisés dans divers domaines des mathématiques appliquées, et des ressources mises à ma disposition pour le remplissage de mes fonctions. Cependant, malgré la convivialité et l'esprit d'équipe régnant au sein de ce laboratoire, j'ai dû effectuer certaines tâches en télétravail ; ceci principalement dû à la situation de confinement imposée en France durant cette période trouble de pandémie de COVID-19.

## 1.4 Objectifs

Au vu des problèmes qui nous sont donnés de résoudre et des travaux qui ont précédés, nos **objectifs primaires** au début du stage (ainsi que leur temps approximatif d'exécution) sont les suivants :

1. Comprendre le modèle de rupture de Griffith dans les milieux élastiques en s'appropriant les travaux précédents (**6 semaines**) ;
2. Comprendre le passage micro/macro du modèle élastique pour travailler sur le modèle de percussion (**20 semaines**) ;
3. Intégrer le modèle dans un code de calcul de l'évolution de la banquise à l'échelle des floes de glace (**0 semaines**).

Afin de remplir au mieux ces missions, nous les avons fracturées en groupes de tâches singulières formant ainsi des **objectifs secondaires** étalés sur six mois (26 semaines) que sont :

- Prise en main de la notion de  $\Gamma$ -convergence en calcul des variations ;
- Lecture et assimilation de la thèse de Matthias Rabaté [\[Rab15\]](#) ;
- Lecture et assimilation de la thèse de Dimitri Balasoiu [\[Bal20\]](#) ;
- Modéliser, simuler et visualiser le déplacement d'un floe en une dimension (1D) après une collision ;
- Modéliser, simuler et visualiser le déplacement d'un floe en deux dimensions (2D) après une collision ;
- Implémenter le modèle de fracture de Griffith dans le modèle de collision 1D préexistant.

En vue de rendre compte de manière fidèle et analytique des six mois passés au sein du Laboratoire Jacques-Louis Lions, il apparaît logique de présenter à titre préalable les remarquables travaux qui ont précédés ce stage (chapitre 2); puis de présenter les différents modèles de glace de mer développés et étudiés en 1D (chapitre 3); ensuite en 2D (chapitre 4). Enfin, à l'aide d'un journal de bord, il sera précisé les différentes tâches que nous avons pu effectuer, et les nombreux apports qu'on en a tirer (chapitre 5).

## 1.5 Abstract

The rapid shrinking of the Arctic ice cap these last decades is seen as one of the most striking manifestations of global warming [Str+12]. This decrease in size opens way to new opportunities, namely the creation of routes beneficial to the industrial sector. The second major consequence of observation is the realization of the necessity to include the Marginal Ice Zone (MIZ) into climate prediction models. In 2015, Rabatet et al. [RLW15; Rab15] developed a sophisticated model for the dynamics of rigid ice floes. The model was later enhanced by Balasoiu in 2020 when he considered the ice floe not as rigid, but as an elastic material modeled by a mass-spring-damper lattice [Bal20]. Our main goal in this report is to study what happens when two or more ice floes collide (percussion, fracture, etc.), both in 1D and in 2D.

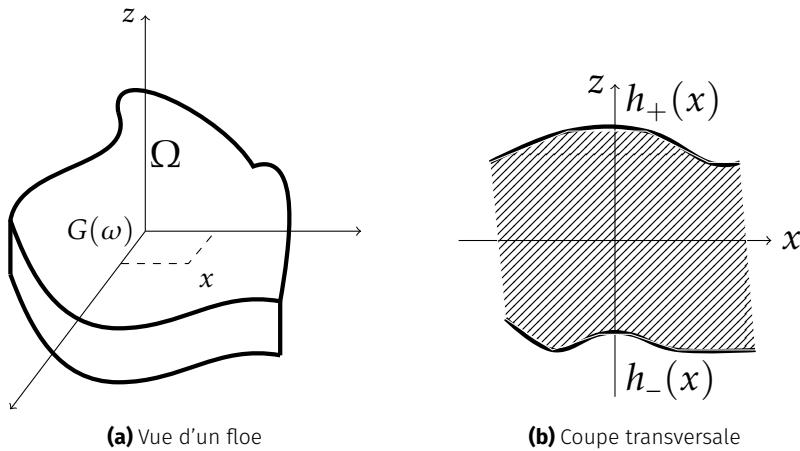
## Chapitre 2

# État de l'art

### 2.1 Position du problème

Nous commençons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécessaires pour décrire le floe occupant la région fermée de l'espace  $\Omega$  (voir figure 2.1) :

- Un ouvert connexe  $\omega \in \mathbb{R}^2$  décrivant la section longitudinale du floe;
- Deux fonctions  $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$  décrivant l'épaisseur du floe, telle que  $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$ ;
- Le centre de masse du floe  $G(\omega)$ ;
- Deux vecteurs  $\mathbf{e}_1(\omega)$  et  $\mathbf{e}_2(\omega)$  formant une base sur  $\omega$ .



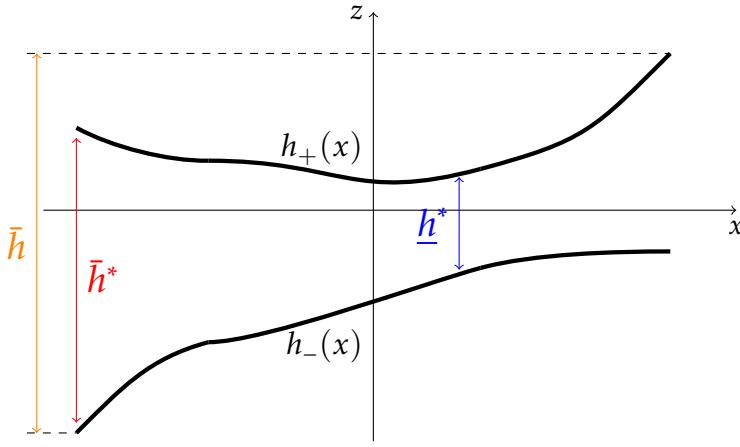
**FIGURE 2.1** – Illustration de la géométrie d'un floe de glace  $\Omega$ .

On confond le floe au volume qu'il occupe dans l'espace  $\Omega$  :

$$\Omega = \{(x, z) | x \in \omega \in \mathbb{R}^2, z \in ]h_-(x), h_+(x)[\}.$$

Les fonctions  $h_-$  et  $h_+$  permettent de définir trois quantités (voir figure 2.2) :

- L'épaisseur moyenne du floe :  $\bar{h} = \sup_{x \in \omega} h_+(x) - \inf_{x \in \omega} h_-(x)$ ;
- La plus forte épaisseur :  $\bar{h}^* = \sup_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$ ;
- La plus faible épaisseur :  $\underline{h}^* = \inf_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$ .



**FIGURE 2.2** – Différentes épaisseurs décrivant un floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floe relativement plat (i.e.  $\bar{h}$  faible),  $h_-(\cdot)$  sera pris identiquement nul, et  $h_+(\cdot)$  constant.

Les vecteurs  $\mathbf{e}_1(\omega)$  et  $\mathbf{e}_2(\omega)$  sont liés à  $\omega$ , et pointent vers un point fixe du bord  $\partial\omega$  du floe c-à-d :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega \mid \mathbf{e}_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{\|\sigma_i - G(\omega)\|}, \text{ pour } i \in \{1, 2\},$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ . Notons que  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , et  $\mathbf{e}_1(\omega) \cdot \mathbf{e}_2(\omega) = 0$  de façon à ce que la base orthonormée  $(\mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega))$  soit directe.

Un floe  $\Omega = (\omega, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), G(\omega), h_-(\cdot), h_+(\cdot))$  se déplace sur la mer <sup>1</sup>  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$ . Au temps  $t$ , après une translation de vecteur  $u(t)$  (et de matrice  $\mathbf{T}_{u(t)}$ ), et une rotation de vecteur  $\theta(t)$  (et de matrice  $\mathbf{R}_{\theta(t)}$ ), on obtient le floe  $\Omega(t)$  défini par :

$$\Omega(t) = (\omega', \mathbf{e}^1(\omega'), \mathbf{e}^2(\omega'), G(\omega'), h_-(\cdot), h_+(\cdot)),$$

avec :

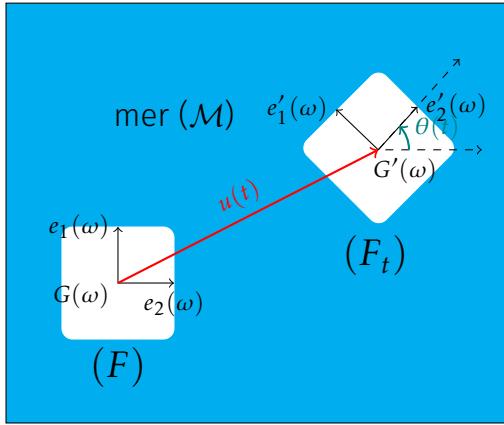
$$\begin{cases} \omega' = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \omega, \\ \mathbf{e}_1(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \mathbf{e}_1(\omega), \\ \mathbf{e}_2(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \mathbf{e}_2(\omega), \\ G(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} G(\omega). \end{cases}$$

C'est cette dernière notation mettant en exergue la dépendance avec le temps que nous utiliserons tout au long de ce rapport.

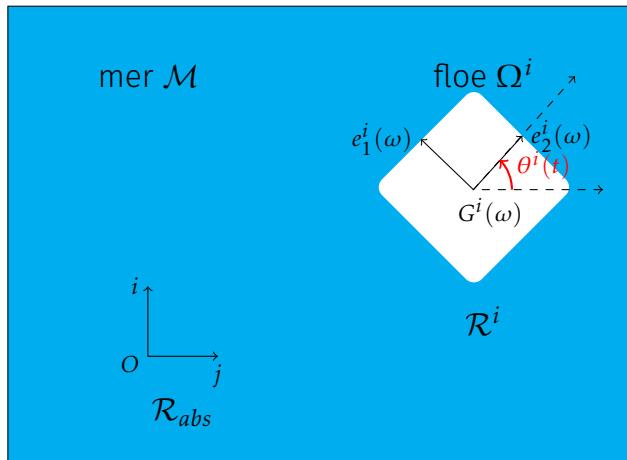
Lors de leurs mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et courants océaniques, des phénomènes thermodynamiques, etc. Nous nous intéresserons donc au phénomène de percussion <sup>2</sup> en vue de l'initialisation des fractures dans les floes de glace. Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère absolu, que nous notons  $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Le repère associé au floe  $\Omega_i$  sera noté  $\mathcal{R}_{\Omega_i} = (O, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), \mathbf{k})$ . Dans ce repère absolu, le floe possède 3 degrés de libertés : l'abscisse et l'ordonnée de son centre de gravité  $G_i(\omega)$ , et son orientation donnée par l'angle  $\theta_i(t)$  (voir figure 2.4).

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ . Plus tard, nous espérons prendre en compte son épaisseur lorsque nous la modéliserons par une sphère de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Une percussion est une succession de collisions à intervalles de temps extrêmement petits.



**FIGURE 2.3** – Illustration du mouvement d'un floe de glace  $F$  dans la mer, après une translation de vecteur  $u(t)$  et une rotation d'angle  $\theta(t)$ , pour obtenir le floe  $F_t$ . On observe la transformation des propriétés du floe, en particulier les vecteurs  $e_1(\omega)$  et  $e_2(\omega)$  qui restent liés au floe.



**FIGURE 2.4** – Positionnement d'un floe de glace  $\Omega_i$  dans le repère absolu  $\mathcal{R}_{abs}$ .

## 2.2 Résumé de thèse de M. Rabatel

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL (et plus tard ceux de BALASOIU) ont extensivement traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de son raisonnement, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

### 2.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer

#### 2.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans [Rab15] utilise les mêmes notations que celles présentées à la section 2.1. Les obstacles<sup>3</sup> sont des objets aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans [Rab15], l'auteur travaille dans un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ; cependant, vu que la mer est considérée plane, le mouvement du floe peut être décrit dans le plan  $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ . Ensuite, RABATEL désigne la vitesse angulaire du

3. Nous faisons allusion aux obstacles au déplacement des floes dans la mer. Il peut s'agir des îles, des stations offshore, etc.

floe  $\Omega_i$  par :

$$\boldsymbol{\theta}_i(t) = \theta_i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta_i(t))^T.$$

Soit  $P$  un point quelconque (de coordonné  $x$ ) de  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ . Sa vitesse dans le repère  $\mathcal{R}_{abs}$  est donnée est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}_i(t) + \boldsymbol{\theta}_i(t) \wedge \mathbf{G}_i \mathbf{P},$$

où le symbole  $\wedge$  représente le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par :

$$M_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} h_{i,+}(x) dx,$$

où  $dx$  représente l'élément de surface infinitésimal<sup>4</sup>. Ensuite, l'auteur définit :

- la somme des forces par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe  $\Omega_i$  :

$$\mathbf{F}_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{F}(x) dv,$$

- le moment cinétique<sup>5</sup> en  $G$  :

$$L_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}\mathbf{P} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t) dv,$$

- le moment dynamique en  $G$  :

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}\mathbf{P} \wedge \mathbf{F}(x) dv.$$

Sous le formalisme de Newton-Euler, RABATEL montre que chaque floe  $\Omega_i$  vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{M}_i, \end{cases}$$

où  $\mathcal{I}_i$  représente le moment d'inertie du floe  $\Omega_i$ . Ce système se réécrit facilement sous la forme :

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t), \quad (2.1)$$

avec :

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}_i(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système  $S$  composé de  $n$  floes, l'équation précédente doit être satisfaite par tous les floes. [Rab15, p.18] montre que cela revient à résoudre l'équation :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t), \quad (2.2)$$

4. Par la suite, nous désignerons par  $dv$  l'élément de volume infinitésimal.

5. Il s'agit d'un moment dû à l'accélération du floe; alors que le moment dynamique est dû aux forces extérieures. Notons que ces deux vecteurs sont portés par  $\mathbf{k}$ , et peuvent donc être remplacés par les scalaires correspondants.

avec :

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad W(t) = (W_i(t))_{1 \leq i \leq n}, \text{ et } \mathcal{H}(t) = (\mathcal{H}_i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe  $\Omega_i$  quant à elle sera donné par :

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{G}_i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{\theta}_i(t)^2.$$

### 2.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandement développé ces derniers siècles avec plusieurs scientifiques qui ont tenté de décrire le phénomène de contact entre des corps rigides. Notons que le problème d'interaction entre les floes est un problème de **dynamique non-régulière** (contrairement au problème de déplacement des floes entre deux collisions qui lui, est un problème de **dynamique régulière**). Dans [Rab15], l'auteur considère deux lois de contact afin de décrire les phénomènes qui se produisent de façon précise :

- Une **condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration ; cette condition est portée par la composante normale<sup>6</sup> de la force de contact<sup>7</sup> lors de la collision.
- Une **loi de friction de Coulomb** : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision. Cette condition est portée par la composante tangentielle de la force de contact.

Afin de traiter ces problèmes de contact, deux approches principales ont été d'enveloppées par les scientifiques : l'approche non-régulière et l'approche de régularisation des lois de contact.

Parmi les pionniers dans l'**approche de régularisation** pour la résolution de la condition unilatérale de Signorini, nous pouvons citer Hertz ; Nevins et Whitney [NW72 ; Whi77], Moore [MW88]. Ces méthodes se sont largement répandues dans les études liées à la robotique, à la réalité virtuelle ou encore dans les opérations assistées par ordinateur pour simuler un grand nombre d'objets en contact en petites ou grandes déformations comme des habits, des cheveux ou encore des organes (voir [WW90 ; VCMT95 ; Bar ; Rag+04]). Concernant la seconde, la loi de friction de Coulomb, la discontinuité entre les phases de glissement et non glissement a été traitée de différentes façons ; en utilisant la notion de coefficient de restitution, ou des modèles masses-ressorts.

L'**approche non régulière** a été développée en utilisant les concepts d'*inclusion différentielle* ; ceci afin de traiter la condition de Signorini. Moreau [Mor85], Aubin [AC12] et Monteiro Marques [MM85] ont montré des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème sans friction. Puis, des résultats similaires ont été établis pour le contact unique avec friction (voir [Mor86 ; MM88 ; Pan12 ; JP85 ; MM94]). Cependant, cette notion d'*inclusion différentielle* est difficile à manipuler ; c'est, d'après RABATEL, la raison pour laquelle le problème du contact multiple avec friction reste encore très peu traité. Il a donc fallu attendre les années 80 avec l'essor des méthodes LCP<sup>8</sup> pour donner un nouveau souffle à l'approche non régulière. Nous pouvons citer ici les travaux de Lötstedt qui fournit des preuves d'existence et d'unicité pour le contact avec la friction de Coulomb (voir [Löt81 ; Löt82a ; Löt82b]). On cite aussi Klarbring et Pang, pour leur apport sur le plan des méthodes de programmations.

RABATEL a opté pour l'approche non régulière car elle facilite la construction des solutions à partir d'algorithmes tels que ceux de Lemke (voir [Lem78]). RABATEL s'inspire aussi des travaux de Baraff [Bar93], qui écrit les forces de contact dans les repères locaux aux points de contact de chacun des objets concernés. Ces repères sont définis par la normale et la tangente aux points de contact. La condition de complémentarité se résume comme ceci : "S'il y a contact, alors la réaction est strictement

6. La composante normale permet aussi d'assurer la dissipation de l'énergie à travers la **loi de Poisson**.

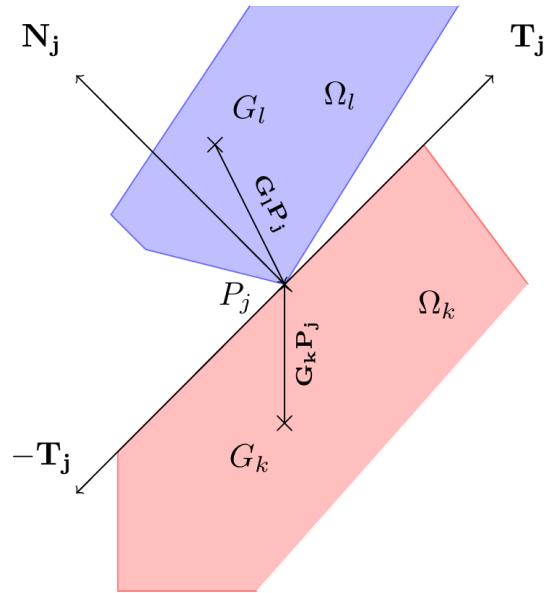
7. La force de contact est la somme d'une friction tangentielle, et d'une réaction normale.

8. Linear Complementarity Problem

positive et l'accélération relative nulle, et s'il n'y a pas contact, alors l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle.". Cependant, les travaux de Baraff sur l'existence de solutions sont limités par l'approche accélération-force et le coefficient de friction qui sont utilisés. En se servant des formulations en vitesse-impulsion, les chercheurs ont réussi à démontrer l'existence de solutions pour toute configuration à contacts multiples avec n'importe quel coefficient de friction [Rab15, p.23].

Pour traiter le problème de collision entre les floes, les glaciologues retiennent une multitude de modèles principalement intégrés aux milieux continus. Par exemple, dans les articles de Solomon [Sol70], ceux de Hibler [H179] et ceux de Bratchie [Bra84], la force résultante des interactions est due à une contrainte interne. On note aussi les modèles basés sur la théorie des flux de particules. Dans [SHL86; Hop85] par exemple, les collisions ne sont pas détectées avec précision et les paramètres décrivant la collision sont déterminés par une méthode de Monte Carlo. L'introduction de ces déformations dans les modèles discrets de la banquise a été initié dans les années 90 par Hopkins [Hop96], et récemment par Herman et Wilchinsky [Her11; WFH10]. Cependant, elles sont basées sur la régularisation des lois de contact. Avant les travaux de RABATEL, il n'existe pas de modèle discret de banquise en utilisant une dynamique du contact non régulière.

Le modèle décrit par [RLW15, p.5892] utilise deux conditions de complémentarité pour déterminer les vitesses des floes après le contact. La première est une condition de Signorini [Sig33] pour s'assurer de la non-interpénétration<sup>9</sup> des floes. Pour décrire ces conditions, il faut au préalable écrire le problème de contact entre floes comme un problème implicite, où les inconnus sont les impulsions après le choc<sup>10</sup>. Pour cette deuxième condition de complémentarité, RABATEL se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] afin d'en extraire une condition qui vérifie la loi de friction de Coulomb. Le problème résultant a ensuite été résolu en utilisant des algorithmes de Lemke.



**FIGURE 2.5** – Interaction entre deux floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  au point  $P_j$  [Rab15, p.26].

Soit  $P_j$ , ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  (voir figure 2.5). Nous notons  $F_{kj}(t)$  la force de contact du floe  $\Omega_k$  au floe  $\Omega_l$  appliquée en  $P_j$ . Par convention, une matrice de contact  $\mathbf{M}_c$  est définie telle que son coefficient  $c_{kj}$  vaut :

- 0 si le point de contact  $P_j$  n'est pas un point de contact du floe  $\Omega_k$ ;

9. Deux floes s'interpénètrent si la "distance" entre ces deux floes est négative.

10. Contrairement aux lois de contacts explicites (Hertz, Hooke, Coulomb), les lois implicites ne nécessitent pas la connaissance de la nature du contact entre les floes (glissement ou accroche).

- $-1$  si le point de contact  $P_j$  est un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  avec  $k < l$ ;
- $1$  si le point de contact  $P_j$  est un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  avec  $k > l$ .

En notant  $E_k$  l'ensemble des points de contact du floe  $\Omega_k$  au temps  $t$ , RABATEL définit la résultante des forces de contact  $\mathbf{F}_k^c(t)$  au floe  $\Omega_k$  comme :

$$\mathbf{F}_k^c(t) = \sum_{j \in E_k} c_{jk} \mathbf{F}_{kj}(t).$$

En rajoutent ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l'équation (2.2), on obtient, pour un floe  $\Omega_k(t)$  :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j \in E_k} \left( \mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_{kj}(t) \right). \quad (2.3)$$

### 2.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de [Rab15] opte pour le formalisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accélération-force. En effet, l'approche en **vitesse-impulsion** apporte l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature du contact. Pour comprendre les travaux de RABATEL, il nous faut au préalable définir le notion d'impulsion. Sur un intervalle de temps  $\delta t^*$ , s'il y a un contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  au point  $P_j$ , nous dirons que le floe  $\Omega_k$  a subi un choc provenant du floe  $\Omega_l$  au point de contact  $P_j$  caractérisé par l'impulsion :

$$\mathcal{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj} \mathbf{F}_{kj}(t) dt.$$

RABATEL fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments (2.2) pour le floe  $\Omega_k$  sur l'intervalle temporel  $\delta t^*$  :

$$\mathcal{M}_k \int_{\delta t^*} \dot{W}_k(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \sum_{j \in E_k} \left( \mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathcal{I}_{kj} \right).$$

En écrivant  $\delta t^* = [t^-, t^+]$ , on peut donc introduire les inconnues  $\beta, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^m$ <sup>11</sup> pour le problème de contact :

$$\mathcal{M} (W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \mathbf{B}\beta + \mathbf{J}\lambda, \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  sont deux matrices de  $(\mathbb{R}^3)^{n \times m}$  telle que :

$$\mathbf{B} = (d_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad d_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k, \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{T}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{T}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k, \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = (s_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad s_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k, \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{N}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k. \end{cases}$$

11. La variable  $m$  désigne le nombre total de contraintes unilatérales dans le système.

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  sont obtenues par décomposition des forces de contact dans le repère de contact  $\mathcal{R}_{\Omega_j} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$  (voir figure 2.5).

Comme précédemment mentionné, afin de modéliser la friction dans une collision qui respecte la loi de Coulomb, [Rab15] se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] qui définissent une condition de complémentarité reliant la composante tangentielle  $\beta_j$  de l'impulsion appliquée au point  $P_j$ , la composante normale  $\lambda_j$ , la vitesse relative tangentielle du point  $P_j$  et le coefficient de friction  $\mu$ . On introduit le vecteur  $\tilde{\beta}$  contenant les composantes de l'impulsion tangentielle dans chacune des directions possibles de glissement  $\mathbf{T}_j$  ou  $-\mathbf{T}_j$ . Il devient alors possible de formuler le problème de contact (sur tout le système  $S$ ) sans interpénétration par le problème linéaire de complémentarité de l'équation (2.5). Dans cette formulation, l'impulsion de contact est effectivement à l'intérieur du cône de Coulomb :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\mathbf{J} & -\mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \mu & -\mathbf{H}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec :

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}^T W(t^+), \quad \mathbf{H}^T = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1 \leq j \leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq m},$$

$\mu$  est la matrice diagonale de diagonale  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 2(i-1)+1 \text{ ou } j = 2(i-1)+2, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

$D = (\mathbf{B}_1 | -\mathbf{B}_1 | \dots | \mathbf{B}_m | -\mathbf{B}_m)$  avec  $\mathbf{B}_j$  la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{B}$ .

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact  $W(t^+)$ , à l'aide des composantes tangentielles et normales des impulsions dans les repères de contact  $(\tilde{\beta}, \lambda, \sigma)$ , elles-mêmes inconnues du système.

#### 2.2.1.4 Consistance énergétique

D'après l'auteur de [Rab15, p.42], traiter le problème de contact à partir de lois non régulières ne permet pas d'obtenir des solutions satisfaisant à la fois la non-interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique. En se focalisant sur la consistance énergétique, RABATEL a subdivisé le problème en deux : une phase de compression et une phase de décompression suivant la loi de Poisson. La **phase de compression** modélise la capacité maximale des floes à emmagasiner, par la déformation, une partie ou la totalité de l'énergie cinétique transmise lors du contact. L'impulsion normale  $\lambda^c$  calculée durant cette phase (en résolvant le problème de complémentarité (2.5)) correspond à un coefficient de restitution  $\varepsilon = 0$ . Les impulsions obtenues durant cette phase sont celles nécessaires pour éviter l'interpénétration, et correspondent donc à une énergie cinétique maximale emmagasinée. La **phase de décompression** correspond à la restitution partielle ou complète de l'énergie cinétique emmagasinée par la déformation des floes. L'impulsion lors de cette phase, notée  $\lambda^d$ , est déterminée par  $\lambda^d = \varepsilon \lambda^c$  (l'hypothèse de Poisson [GP95]). Durant la phase de décompression, RABATEL a donc opté pour la consistance énergétique et la non-interpénétration avec la solution :

$$W^N = (1 + \varepsilon) W^c - \varepsilon W(t^-),$$

où  $W^c$  représente les vitesses des floes après la phase de compression, et  $\varepsilon$  le coefficient de restitution pour les contacts considérés inélastiques.

### 2.2.1.5 Le modèle de l'environnement

L'environnement est l'ensemble des forces extérieures qui agissent sur les floes hormis les forces de contact décrites dans les sections précédentes. Ces principales forces sont :

- La force de Coriolis  $\mathbf{F}_c$  donnée pour un floe  $\Omega_i(t)$  par :

$$\mathbf{F}_{c,i}(t) = -f \mathbf{k} \wedge \dot{\mathbf{G}}_i(t),$$

avec  $f$  le paramètre de Coriolis et  $\mathbf{k}$  le vecteur dirigé vers le haut dans le repère absolu  $\mathcal{R}_{abs}$ .

- Les forces de trainée associées au vent  $\boldsymbol{\tau}_a(t)$  et celle associée à l'océan  $\boldsymbol{\tau}_w(t)$  :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_a(t) &= \rho_a C_a \|\mathbf{U}_a(t)\| \mathbf{U}_a(t), \\ \boldsymbol{\tau}_w(t, P) &= \rho_w C_w \|\mathbf{U}_w(t) - \dot{\mathbf{P}}(t)\| (\mathbf{U}_w(t) - \dot{\mathbf{P}}(t)),\end{aligned}$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide (l'indice  $a$  pour l'air et  $w$  pour l'eau) et  $C$  un coefficient de traînée sans dimension (voir [HI86]);  $\mathbf{U}_a$ ,  $\mathbf{U}_w$ ,  $\dot{\mathbf{P}}(t)$  respectivement la vitesse du vent à l'interface glace/fluide, la vitesse du courant océanique à l'interface glace/fluide, et la vitesse d'un point  $P$  du floe.

Le modèle de dynamique régulière définit en équation (2.2) peut se voir expliciter :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = M_i \mathbf{F}_{c,i}(t) + \int_{\Omega_i(t)} \boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P) ds, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}_i \mathbf{P} \wedge (\boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P)) ds. \end{cases}$$

L'algorithme décrivant en détail le processus de collision ainsi que la consistance énergétique se trouve à la page 43 du document [Rab15].

## 2.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème

### 2.2.2.1 Discrétisation temporelle

Pour simuler la dynamique des floes de glace soumis à des forces extérieures et possiblement des collisions, il faut intégrer la dynamique régulière, et la dynamique non régulière ; et il existe deux principales méthodes pour la discrétisation en temps dans de tels problèmes. La méthode *time-stepping* (voir [Aca13] pour les schémas de Moreau [Mor86; Jea99], et de Schatzman-Paoli [PS02a; PS02b] par exemple, pour lesquels une convergence a pu être exhibée à partir de la convergence en graphe de Moreau [Mor78]). Comparé aux autres méthodes, la méthode *time-stepping* traite mieux les points d'accumulation [Rab15, p.58] ; et est plus performante sur des problèmes de multiples contacts. Cependant, RABATEL opte pour le schéma *event-driven* pour sa précision dans la localisation des collisions et sa facilité de manipulation. En plus, elles permettent d'utiliser des schémas d'intégration existant d'ordre élevé pour des équations différentielles ordinaires. Le seuil de collision choisi est suffisamment grand pour éviter de traiter les collisions une par une. Le schéma utilisé pour intégrer l'équation (2.2) est un schéma du type Euler explicite, pour sa facilité d'implémentation, pour sa facilité à prédire la localisation en espace et en temps des futures collisions, et enfin, pour sa capacité à dépasser les problèmes de points d'accumulation.

La simulation par la méthode *event-driven* demande la définition d'un pas de temps maximal pour lequel le schéma reste stable. Le pas de temps  $\Delta t_{max}$  sera utilisé si aucune collision n'est détectée entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t_{max}$ . En se référant au modèle idéalisé 1D (voir [Rab15, p.49]), RABATEL distingue deux critères pour la stabilité du schéma numérique au temps  $t$  :

- lorsque la vitesse caractéristique des floes  $V_c(t) = N_a \mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)$  est constante sur l'intervalle de simulation  $I$ , alors pour :

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} = \min \left( \frac{\rho}{2|\mathbf{U}_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}, \frac{2K_t}{L_t} \right) \quad (2.6)$$

avec :

$$L_t = \rho^{-1} \rho_w C_w (N_a^2 \mathbf{U}_a^2 + (N_a \mathbf{U}_a + 2\mathbf{U}_w)^2), \text{ et } K_t = |V_c(t)| \text{ constant},$$

le schéma est stable c-à-d  $\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] = [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}]$ ;

- lorsque les variations de  $V_c(t)$  entraînent une augmentation de  $K_t$  au cours du temps. La propriété de stabilité reste vérifiée car :

$$\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] \subset [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}];$$

- lorsque les variations de  $V_c(t)$  entraînent une diminution stricte de  $K_t$  au cours du temps, alors la condition de stabilité dans les deux cas précédents ne peut être vérifiée. RABATEL introduit donc une seconde définition de la stabilité pour traiter ce cas. Il remarque que pour :

$$\Delta t_{max} \leq \begin{cases} \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-} & \text{si } x \in ]-\infty, K_{t+\Delta t}], \\ \frac{-2x}{-\tilde{L}_t^+} & \text{si } x \in ]K_{t+\Delta t}, +\infty], \end{cases} \quad (2.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^- &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 - (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2], \\ \tilde{L}_t^+ &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 + (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2], \end{aligned}$$

ce qui conduit à la diminution de la vitesse des floes.

En conclusion, pour une vitesse infinitésimale initiale  $\dot{\mathbf{G}}(0) \in [-K_0, K_0]$ , pour tout  $t \in I$ , et pour tout  $\Delta t_{max}$  vérifiant les équations (2.6) et (2.7), nous avons les vitesses des floes majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t.$$

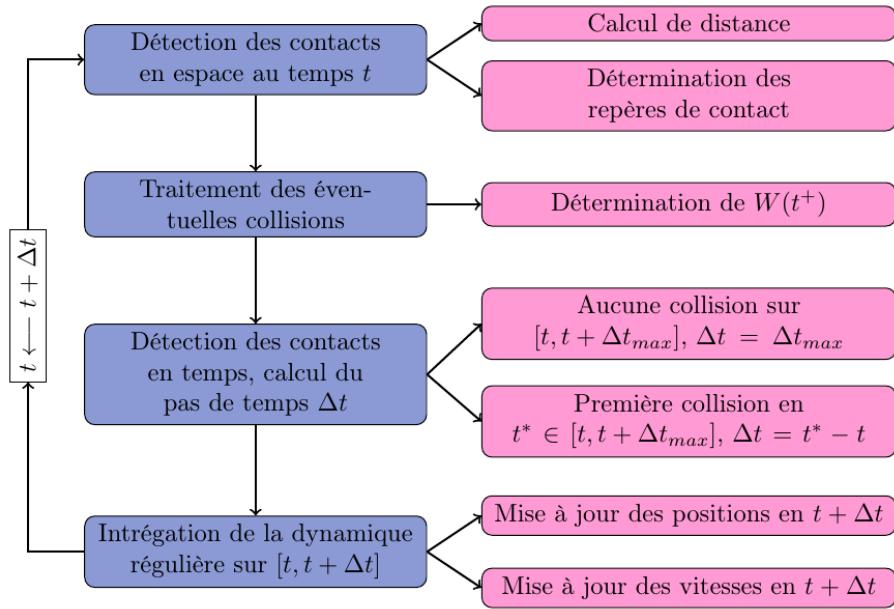
RABATEL choisi donc de prendre :

$$\Delta t_{max} = \min \left\{ \frac{3}{4} \left( \frac{-2 \max_{t \in I} K_t}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^-} \right), \frac{3}{4} \left( \frac{2 \max_{t \in I} K_t}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^+} \right), \frac{\rho}{2(\max_{t \in I} |\mathbf{U}_a(t)|) \sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}} \right\},$$

pour s'assurer que le modèle idéalisé vérifie les critères de stabilité définis. Notons que le procédé global d'intégration de la dynamique pour le modèle se trouve dans [Rab15, p.60]; le schéma est repris à la figure 2.6.

### 2.2.2.2 Détection des collisions en espace

Des deux méthodes principales utilisées dans la littérature pour la détection des voisins, RABATEL a choisi la méthode de **hiérarchie de volumes englobants** pour sa facilité de mise en place et pour



**FIGURE 2.6** – Procédé global d'intégration de la dynamique pour notre modèle [Rab15, p.60].

son efficacité même avec de grands ratios de tailles. L'alternative était la méthode de **partitionnement de l'espace** qui elle, souffre de plusieurs défauts non surmontables pour le modèle développé. Les méthodes de volumes englobants consistent à englober le contour de l'objet par des volumes à des échelles de plus en plus fines pour améliorer la détection.

### **2.2.2.3 Détection des contacts en temps**

Il s'agit ici de trouver le pas de temps optimal : c'est-à-dire un pas de temps  $\Delta t$  pour lequel la configuration des floes ne contient pas d'interpénétrations sur l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  et, pour tout  $\varepsilon > 0$ , contient au moins une interpénétration sur l'intervalle de temps  $[t + \Delta t, t + \Delta t + \varepsilon]$  [Rab15, p.87]. Lorsque le critère de collision n'est pas vérifié, RABATEL montre qu'il suffit de prendre :

$$\Delta t_{i,j} = -\frac{\delta_{i,j}(t) - tol_3}{\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{G}_i(t) - \dot{G}_j(t))},$$

avec :

$$\mathbf{A}_{i,j}(t) = \frac{C_{0,i}(t) - C_{0,i}(t)}{d(C_{0,i}(t), C_{0,i}(t))}, \text{ et } tol_3 = \frac{\xi}{20},$$

où  $C_{0,i}(t)$  désigne le centre du volume englobant de niveau 0 du floe  $\Omega_i(t)$ . Lorsque le critère de collision est vérifié, il faut plutôt prendre :

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\min(\eta_i, \eta_j) - tol_3}{\Gamma(t)},$$

avec :

$$\Gamma(t) = \max\left(\|\dot{Q}_i^{i,j}(t)\|, \|\dot{Q}_j^{j,i}(t)\|\right),$$

où  $\dot{Q}_i^{i,j}$  représente la distance parcourue par un point de  $\Omega_i(t)$  relativement à  $\Omega_j(t)$ . Une fois ce  $\Delta t_{i,j}$  assurant la non-interpénétration trouvé, on peut donc choisir

$$\Delta t = \min \left( \Delta t_{max}, \min_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ i \neq j}} \Delta t_{i,j} \right).$$

Le lecteur est renvoyé au document [Rab15, p.91] pour plus de détails sur la détection des contacts en temps.

#### 2.2.2.4 Construction des repères de contacts

La construction d'un repère de contact n'est effectuée que lorsque le contact entre deux floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  est **linéique** [Rab15, p.79], ou **ponctuel** et le vecteur porté par les points en contacts appartient au cône normal de  $P$ . La normale  $N$  est alors déterminée comme le vecteur unité dirigé par  $\mathbf{PQ}$ . Si  $Q$  n'est pas unique, on se retrouve dans la situation où il peut exister plusieurs repères de contact pour un point de contact. Dans les autres cas, le repère de contact associé au point  $P$  n'est pas construit et  $P$  n'est pas considéré dans le traitement des contacts [Rab15, p.80]. L'algorithme de détection des points de contacts afin de construire les repères de contact est explicité dans le document [Rab15, p.76].

#### 2.2.2.5 Simulation des événements collisions

Une fois les voisins détectés et les repères de contact construits, on peut passer à la prochaine étape qui consiste en la simulation des événements de collisions. Ici, plusieurs choix s'offrent à nous : les méthodes dites de **régularisations**, les méthodes dites **itératives**, et les méthodes dites de **pivots** [Rab15, p.82]. La première catégorie est adaptée aux modèles régularisants, ce qui n'est le cas de notre modèle. La deuxième par contre a extensivement été utilisée dans la littérature ; on peut citer Moreau [Mor88; Mor99; Jea99], Aitken [Ait50]. Malheureusement, dès que la matrice  $A$  du problème de complémentarité à résoudre n'est plus symétrique, ce deuxième groupe de techniques ne s'avère pas efficace. RABATEL choisi donc l'algorithme de Lemke pour lequel il existe des preuves de convergence lorsque la matrice  $A$  est copositive. Bien qu'il soit performant, il faut néanmoins noter que l'algorithme de Lemke étant une technique globale c'est-à-dire traitant les contacts simultanément, ne garantit pas une bonne propagation du contact [Rab15, p.82].

#### 2.2.2.6 Optimisations

La première optimisation apportée est celle sur les distances de collision : deux floes sont en contact si la distance entre eux n'est pas nulle, mais supérieure à un seuil appelée **distance de collision**.

La deuxième concerne la condition de non-interpénétration [Rab15, p.85]. En cas de congestion, il est difficile que les floes décollent après contact. En exigeant que  $\mathbf{J}^T W(t^+) > 0$  après collision, on risque ne pas avoir de solution pour le problème linéaire de complémentarité associé. RABATEL relaxe donc la condition de Signorini en définissant un réel  $c$ , et l'ensemble des vitesses admissibles devient donc :

$$V_c = \{w \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{J}^T w \geq c\}.$$

Une troisième optimisation concernant la définition de la **notion d'erreur** et de **tolérance** a été implémentée. La quatrième consiste en la résolution d'un LCP en trois tentatives (avec trois algorithmes de Lemke différents) même si cela augmente les coups de calculs [Rab15, p.86].

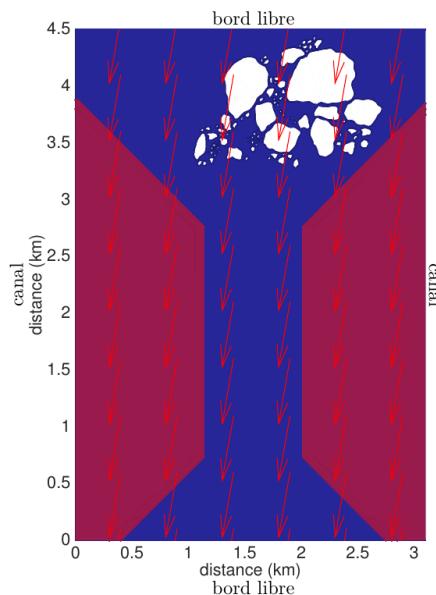
Si la troisième optimisation ne s'avère pas suffisante, une dernière optimisation consiste en la modification aléatoire de certains coefficients de la matrice  $A$ , la permutation des lignes afin d'éviter des zéros sur la diagonale, ou encore l'utilisation de la notion de **contact actif**.

### 2.2.3 Validations et exploitations du modèle

Les résultats ont été validés à travers plusieurs expériences. Nous citons des exemples classiques tels que la **boîte glissante**, le **berceau de Newton**, le **canon de Newton**, la **balle rebondissante**, etc. Le modèle a ensuite été validé sur des scénarios simples de dérive libre soumise à des courants océanique et atmosphérique, et des scénarios simples de collision. En effet, il a été vérifié que le comportement d'un objet simulé est cohérent avec le comportement théorique et avec les observations. Les principes physiques suivants ont ainsi pu être testé par RABATEL :

- la conservation de la symétrie d'une configuration ;
- la satisfaction du modèle de Coulomb ;
- le traitement d'un point d'accumulation ;
- la cohérence temporelle ou la propagation des ondes de choc ;
- la conservation de l'énergie cinétique.

Des telles exploitations telles que la dérive dans un canal étroit, pour des floes en bassins a été étudié (voir figures 2.7 et 2.8). Aussi, la dérive soumise à un vent et un courant variable avec des vitesses du vent provenant de ERAinterim, à partir du modèle glace de mer et océan TOPAZ a été étudiée.



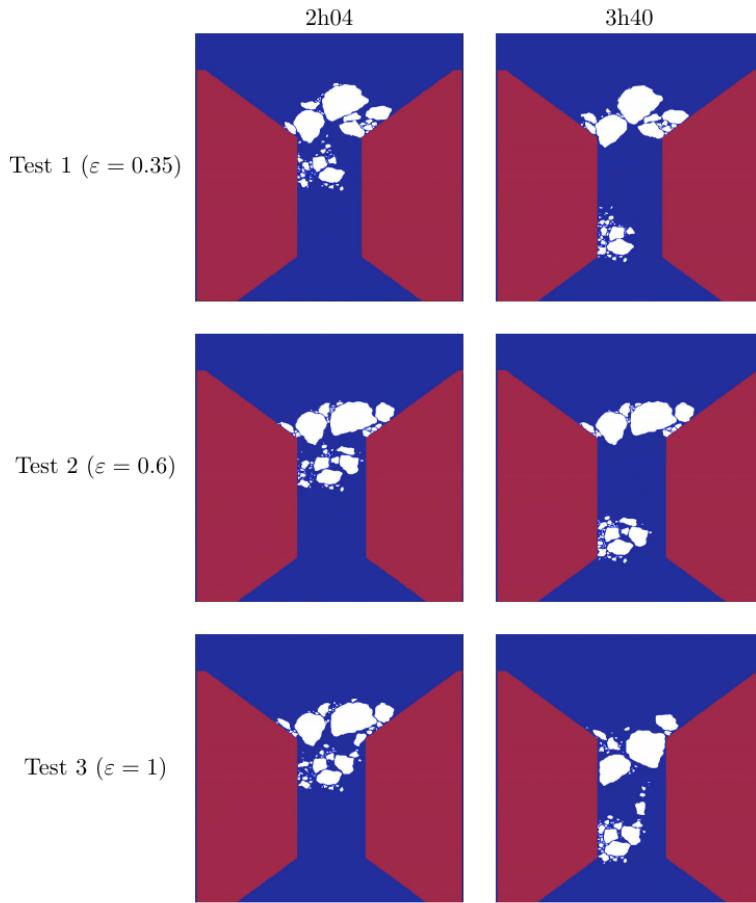
**FIGURE 2.7** – Configuration à l'instant initial pour le scénario de dérive dans un canal étroit [Rab15, p.124].

### 2.2.4 Discussion

Bien que les travaux de RABATEL ont été testés et validés sur plusieurs configurations différentes, il reste néanmoins des points qui ne sont pas traités, et qui ont très clairement été soulignés dans la thèse [Rab15] :

1. Le modèle ne gère pas la rhéologie<sup>12</sup> de la glace : les floes sont des solides purement rigides (ils ne se déforment pas) et la dissipation d'énergie cinétique durant la collision est décrite en utilisant un coefficient purement empirique de restitution  $\varepsilon$ .

12. La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée.



**FIGURE 2.8 –** Quelques résultats obtenus à deux heures différentes de la configuration des floes pour différentes valeurs du coefficient de restitution  $\varepsilon$  [Rab15, p.126].

2. La loi de contact utilisée pour le glissement (voir [ST96]), bien que très riche, ne prends pas en compte toutes les vitesses possibles de déplacement. La construction d'une loi qui donnerait accès à la région entière demanderait de prendre en compte un grand nombre de phénomènes intrinsèques aux contacts. Leur compréhension et leur rôle à chacun est difficile à déterminer.
3. Les coefficients de friction et de restitution utilisées sont limitants. En réalité, il n'est pas possible de prendre en compte ou d'interpréter mathématiquement certains effets lors du contact ; c'est le cas par exemple avec la dispersion de l'énergie (voir [NB14]). Cette dispersion est la conséquence de certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact. Seuls les effets de dissipation dus aux phénomènes locaux comme l'endommagement, la viscosité ou la plasticité sont pris en compte à travers l'utilisation des coefficients de restitution et de friction.
4. Les vitesses obtenues après la phase de décompression afin d'assurer la dissipation de l'énergie cinétique possèdent une faiblesse : elles ne sont solutions que sous certaines conditions, comme le fait que les chocs soient frontaux et qu'il n'y ait pas d'apport des forces extérieures autres que les forces de contact durant la collision [Rab15, p.41].

## 2.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu

Les travaux de D. Balasoiu concernent la modélisation et la simulation du comportement mécanique de floes de glace [Bal20]. Il s'agit d'une amélioration du modèle de M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss [Rab15; RLW15] prenant en compte la fracture des floes. Précisément, ce travail se focalise sur l'initiation de la fracture, ainsi que la prédiction du chemin que la fracture emprunte. Jusqu'à présent, les floes étaient considérés comme des corps rigides ; mais dans sa thèse, BALASOIU les considère comme des corps élastiques. Son travail est divisé en deux parties. Il commence par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d'un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement quasi-statique de son bord (une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, il cherche à obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe qui est percuté par une masse ponctuelle.

### 2.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art

La théorie de fracture la plus répandue de nos jours est due à A.A. Griffith. Dans ses travaux [Gri21], il invalide les résultats de C. Inglis [Ing13] qui ne tenaient pas en compte la taille de la fracture ; il présente donc la croissance d'une faille comme une compétition d'énergie entre l'énergie élastique<sup>13</sup> et l'énergie de surface<sup>14</sup>. Le critère de Griffith est un critère thermodynamique qui stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de moindre énergie. En effet, sur un matériau élastique  $\Omega$  dont la frontière est subdivisée en deux zones  $\partial\Omega_D$ , et  $\partial\Omega_N$ , on pose [Bal20, p.33] :

$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx, \\ \mathcal{F}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega} f_v(x) \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x) \cdot \varphi \, dx, \\ \mathcal{P}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega \setminus \sigma(t)} W(x, \nabla \varphi(t, \sigma(t))) \, dx - \mathcal{F}(t, \sigma(t)), \end{aligned}$$

où :

- $E_{el}$  est l'énergie élastique du matériau sans faille.
- $\sigma(t)$  représente la fracture au temps  $t$ , supposée à l'équilibre.
- $\mathcal{P}$  l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille  $\sigma(t)$  au temps  $t$ .
- $e(u)$  est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau.
- $\varphi = \text{Id} + u$  représente le déplacement du matériau supposé suffisamment régulier.
- $W$  est la densité d'énergie du matériau élastique, supposé hyper-élastique.
- $f_s$  est la contrainte surfacique appliquée sur le bord  $\partial\Omega_N$ .
- $f_v$  est le champ de force volumique appliquée sur  $\Omega$ .

D'après le critère de Griffith [Bal20, p.34], la fonction  $\sigma(t)$  doit vérifier :

1.  $\frac{d\sigma(t)}{dt} \geq 0$ ;
2.  $-\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) \leq k$ ;
3.  $\frac{d\sigma(t)}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) = k$ .

13. Aussi appelée énergie de déformation, elle diminue avec l'accroissement de la fracture.

14. Énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces (les bords de la fissure). Cette énergie augmente avec l'accroissement de la fracture.

Comme mentionné plus haut, ce modèle souffre de problèmes de nucléation et de prédition de la fracture. Pour contourner le problème de nucléation, les mécaniciens considèrent que tout matériau possède des microfissures, et ce sont ces dernières qui sont à l'origine des fissures observables à l'œil. Quant au problème du chemin emprunté par la fracture, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que les critères d'Irwin [Irw57] sont invalides car, ils impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne puisse être courbé.

Le modèle proposé par Francfort et Marigo [FM98] suit un résultat théorique dû à De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci [DGCL89], qui prouvent le théorème d'existence d'un minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah qui intervient dans la détection des contours d'une image. Présentons donc les données géométriques du problème [Bal20, p.37]. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert connexe, dont la frontière  $\partial\Omega$  est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où  $\partial\Omega_D$  et  $\partial\Omega_N$  sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté  $U_D$ , tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique  $f_v$ . On suppose que  $\Omega$  est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée  $W$ . Ainsi, lorsque le matériau  $\Omega$  subit (sans fracture) une déformation  $\varphi = u + \text{Id}$  suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a noté  $u$  le champ de déplacement du matériau, et  $e(u)$  son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture  $\sigma$  :

$$E_{\text{el}}(u, \sigma) = \inf_{u \in V_{U_D, \sigma}} \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a défini l'espace fonctionnel :

$$V_{U_D, \sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^N) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}.$$

Francfort et Marigo proposent ensuite l'énergie de fracture suivante sur :

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire  $k(x)$  traduit la ténacité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau;  $\mathcal{H}^{N-1}$  représente la mesure de Haussdorf de dimension  $N - 1$ , qui peut être comprise comme la longueur du contour pour  $N = 2$ . Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u, \sigma) &= E_{\text{el}}(u, \sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma) \\ &= \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx + \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

où  $\sigma$  est une union dénombrable d'ensembles rectifiables. Ainsi donc, une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle  $E_{\text{tot}}$ . Signalons que BALASOIU montre, dans le cas

d'un mouvement antiplan<sup>15</sup>, que le modèle est quasiment identique au modèle de De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci, pour lequel un théorème d'existence a pu être exhibé.

La méthode numérique employée est une approche à champ de phases. Elle repose sur la notion de  $\Gamma$ -convergence, en particulier sur le résultat de **convergence des minimums**. On remplace l'inconnue  $\sigma$  par une suite de fonctions lisses  $v_\varepsilon$ . Par exemple, dans le cas du traitement d'image, pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dont se sont inspiré Bourdin, Francfort et Marigo, on constate d'après Ambrosio et Tortorelli [AT90] que la suite de fonctionnelle :

$$G_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} \left( |u - g|^2 + (v^2 + \eta_\varepsilon) |\nabla u|^2 + \varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx,$$

$\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle limite :

$$G_f(u) = \int_{\Omega} |u - g|^2 + |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

où  $\eta_\varepsilon = o(\varepsilon)$ ,  $g : \Omega \mapsto [0, 1]$  est la fonction de contraste de l'image, et  $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$  est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de  $u$ , noté  $S_u$ , qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables [Bal20, pp.35-37]. Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat de  $\Gamma$ -convergence sont disponibles dans la littérature. On cite par exemple ici les résultats obtenus dans [Nag+19] à la figure 2.9.

### 2.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace

Le modèle présenté dans la section précédente n'est pas adapté à notre étude. BALASOIU a donc développé un modèle qui ne nécessite pas de fonctionnelle lissée, comme l'on fait plusieurs modèles de glaciologie (voir [LLL15]), en supposant que les fractures sont des segments. Un résultat d'existence (dans les cas où le floe n'est pas encore fracturé) est prouvé à l'aide de la convergence de Mosco. De plus, BALASOIU introduit un problème d'évolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du floe. Les fractures obtenues par ce problème d'évolution sont ainsi des lignes brisées. Le résultat d'existence n'a pas été prouvé pour ce dernier cas. Concernant le côté numérique, une méthode *meshless*<sup>16</sup> est proposée.

Les modifications apportées pour traiter le modèle statique (dans  $\mathbb{R}^2$ ) sont décrites ci-bas. Lorsqu'on fixe la fracture  $\sigma$ , l'énergie élastique prend la forme :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(\cdot, \sigma) : A_\sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx, \end{aligned}$$

où  $A$  représente le tenseur de Lamé du matériau, i.e.

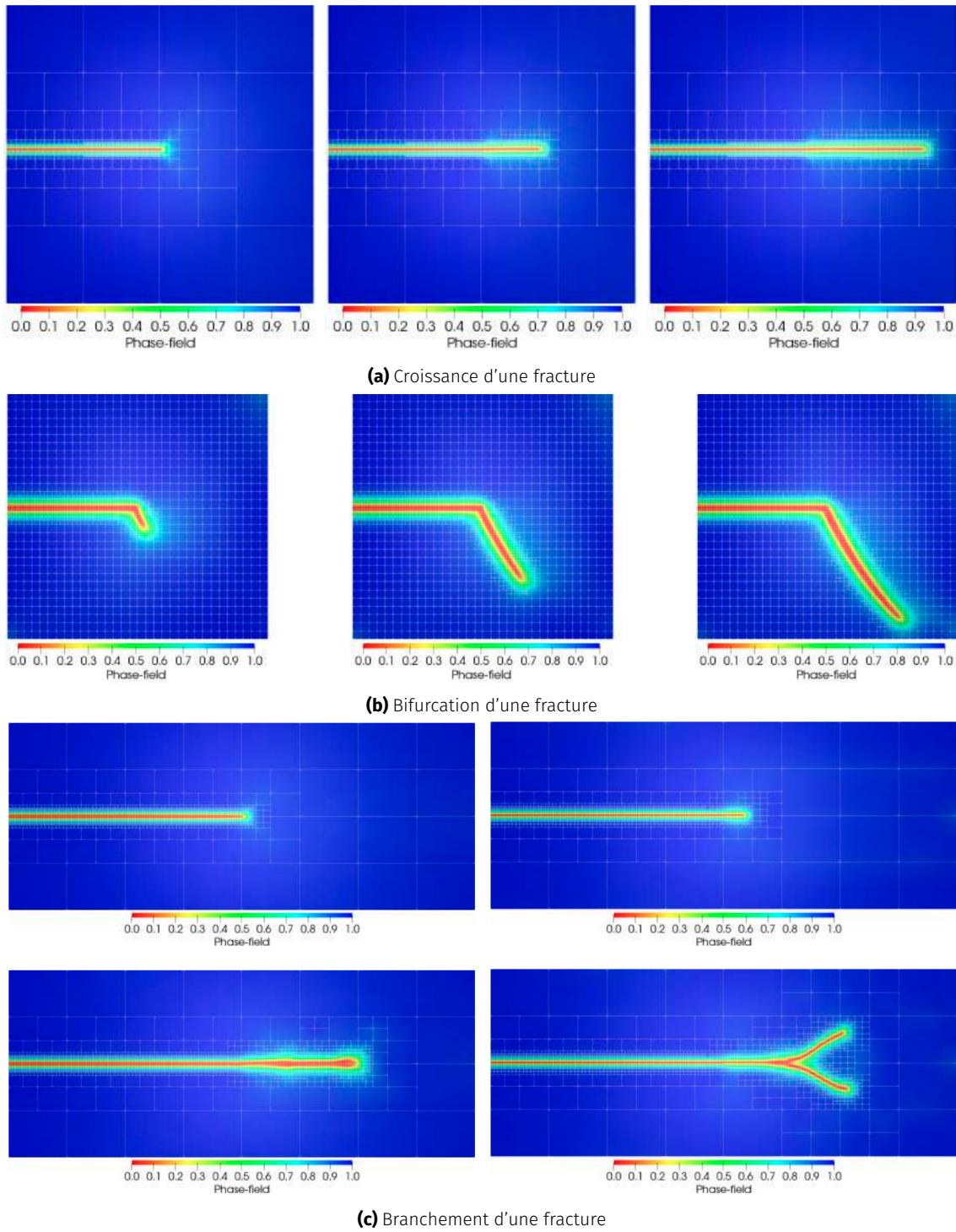
$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad Ae = \lambda \operatorname{tr}(e) I_2 + 2\mu e,$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau; et l'ensemble des déplacements admissibles  $A_\sigma$  est :

$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma \right\},$$

15. Un mouvement **antiplan** est un mouvement pour lequel le champ de déplacement  $u$  est porté par un vecteur constant.

16. Car l'ensemble discréte des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé.



**FIGURE 2.9 –** Trois résultats numériques obtenus dans [Nag+19] à l'aide d'une discréétisation éléments finis (*hp*-FEM) et volumes finis en ne remaillant le domaine que lorsque c'est nécessaire.

avec  $u^+$  et  $u$  les restrictions de  $u$  aux régions  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  respectivement (obtenues par extension de la fracture  $\sigma$  de façon à ce qu'elle soit traversante [Bal20, p.52]), dans les directions  $\nu$  (normale à la fracture orientée du bord vers le centre de  $\Omega$ ) et  $\nu$ . On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma.$$

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) \, dx + k\mathcal{H}^1(\sigma),$$

où  $\Sigma$  représentent l'ensemble des segments orientés partant de la frontière donnée par :

$$\Sigma = \{[a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega}, [a, b] \subset \Omega\}.$$

Une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple  $(u^*, \sigma^*)$  qui vérifie :

$$E_{\text{tot}}(u^*, \sigma^*) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Ensuite, BALASOIU remarque que la solution n'est pas unique. Il définit donc un problème d'évolution quasi-statique à la manière de [FM98], en considérant un problème de chargement monotone :

$$U_D(t) = t U_D.$$

On note  $\bar{\Sigma}$  l'ensemble des lignes brisées de  $\Omega$ , sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également  $\text{end}(\sigma)$  la fin d'une ligne brisée  $\sigma \in \bar{\Sigma}$ . On définit maintenant [Bal20, p.50], pour toute ligne brisée  $\sigma \in \bar{\Sigma}$  l'ensemble des fractures admissibles partant de  $\sigma$  :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \{\sigma \cup [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a = \text{end}(\sigma), b \in \overline{\Omega}, [a, b] \subset \Omega \setminus \sigma\}.$$

On définit également l'ensemble des déplacements admissibles associées :

$$A_{t,\sigma} = \{u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \mid u = tU_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma\},$$

pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour toute ligne brisée  $\sigma$ . De ces définitions, on peut exhiber un problème d'évolution discret, et un problème d'évolution continue en faisant tendre  $t$  vers 0. Le problème d'évolution continue admet des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets [DMT02; Cha03].

Lorsque la fracture est fixée, BALASOIU prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation, en utilisant la théorie des inégalités variationnelles, l'inégalité de Korn [Cia88] et le théorème de Lions-Stampacchia [LS67]. Pour le cas statique, il montre que le problème a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, ceci en se servant principalement de la convergence de Mosco. Pour le modèle quasi-statique, un résultat d'existence n'a pas été trouvé, et une conjecture pour une ligne brisée qui possède un point d'auto-intersection a été proposée.

### 2.3.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier

Dans ce chapitre, BALASOIU souhaite approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous n'étudions que l'état d'équilibre du réseau de ressorts.

Commencons par quelques définitions pour le maillage sur un floe. Pour définir un réseau de ressort  $\tau$ , on définit l'ensemble de ses points  $\tau_0$  disposés en forme de grille :

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2.$$

De façon similaire, l'ensemble des arêtes se nomme  $\tau_1$ , et l'ensemble des cellules  $\tau_2$ . Le réseau  $\tau$  est obtenu à partir de  $\tau_0$  en traçant les côtés de chaque carré ; à la frontière, on trace les diagonales des carrés incomplets. On note  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  l'ensemble des fonctions de  $\tau_0$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On définit également deux triangulations de  $\omega$  à partir de  $\tau$ , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions  $e_x + e_y$  et  $e_x - e_y$ . On note ces triangulations  $\tilde{\tau}$  et  $\hat{\tau}$  respectivement. Afin d'éviter les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point, on définit l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$

Sur chaque arête  $\nu \in \tau_1$ , on place un ressort de longueur à vide  $l_\nu = |\nu|$ , et de raideur  $k_\nu$  (voir figure 2.10a). Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressorts, et  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu}{2} (|\varphi(\nu)| - |\nu|)^2. \end{aligned}$$

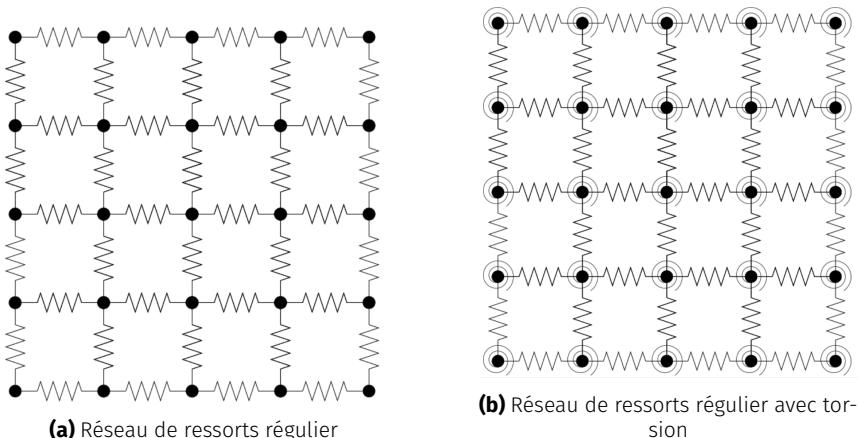
En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, d'angle au repos  $\frac{\pi}{2}$ , et de raideur  $G|\nu|^2$  (voir figure 2.10b). L'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut :

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} \frac{G|\nu|^2}{4} \left( \angle(\varphi(e_{\nu_1}), \varphi(e_{\nu_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

avec  $\angle(\cdot, \cdot)$  l'angle entre deux vecteurs du plan. On note enfin :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale du réseau.



**FIGURE 2.10** – Réseau de ressort considéré durant cette étude.

Ensuite, BALASOIU considère la suite  $\tau_n$  de réseau défini, comme aux paragraphes précédents par :

$$\tau_{n,0} = \Omega \cap \frac{1}{n} \mathbb{Z}^2.$$

On rappelle que  $k_1, k_2$  représentent les constantes de raideurs des ressorts sur les arrêtes du réseau dans les deux directions de  $\Omega$ , et  $G$  la constante de torsion des ressorts aux nœuds. Sur le maillage  $\tau_n$ , après définition des énergies redimensionnées élastiques de traction  $R_n$ , et de torsion  $T_n$ , [Bal20, p.91] montre les théorèmes ci-après.

**Théorème 2.3.1 ( $\Gamma$ -convergence).** *La suite d'énergie redimensionnée  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge, pour la topologie faible de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , vers la fonctionnelle limite :*

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h e(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

avec  $C_h$  le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie, pour un tenseur  $M$  d'ordre 2 :

$$C_{h,ijkl} M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2,$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si l'on a  $k_1 = k_2 = k = 8G$ . Dans ce cas, on a :

$$E_{\text{el}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{\lambda,\mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

avec :  $\lambda = 0$ , et  $\mu = \frac{k}{2}$ .

**Théorème 2.3.2 (Équi-coercivité).** *Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan, et  $(u_n) \in \mathbb{N}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

Le théorème 2.3.1 permet de constater que le tenseur de rigidité obtenu, lorsqu'il est isotrope, a un coefficient de Poisson nul<sup>17</sup>. BALASOIU a donc proposé un calcul formel de la limite simple de la suite d'énergies discrètes dans le cas où le réseau de ressorts serait stochastique et de loi isotrope. En particulier, il trouve dans ce cas un coefficient de Poisson fixe de 1/4.

### 2.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes

Le résumé du chapitre [Bal20, p.136] est ici très succinct. Ce chapitre fait appel à des outils fins de probabilité conditionnelle et de processus stochastiques, telles que **mesure et formules de Campbell, distribution de Palm**, etc.

Dans ce chapitre, BALASOIU a construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. Il commence par donner plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer

<sup>17</sup>. Cela correspond par exemple à un étirement longitudinal du réseau de ressorts, sans effet (amincissement ou épaissement) sur la section transversale.

l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules se montreront très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

La notion de processus ponctuel est un outil qui peut permettre de construire un ensemble de points dénombrable, sans point d'accumulation. BALASOIU définit un **processus stochastique simple de  $\mathbb{R}^d$**  comme : une variable aléatoire  $\Phi$  d'un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  dans l'espace  $(\Omega, \mathcal{N})$ . Elle induit une loi de probabilité  $\mathbb{P}_\Phi$  sur  $(\Omega, \mathcal{N})$  : l'espace  $(\Omega, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi)$  est un espace de probabilités. Dans cette définition, nous avons :

- $\Omega$  est ensemble des parties localement finies de  $\mathbb{R}^d$ . Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des motifs de points de  $\mathbb{R}^d$  ;
- $\mathcal{N}$  est la plus petite tribu (sur  $\Omega$ ) qui rende mesurable les applications qui comptent le nombre de points du processus.

Une fois le processus défini, on peut définir sa **mesure d'intensité**  $\Lambda(\cdot)$  :

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ \\ B &\mapsto \mathbb{E}(\Phi(B)) = \mathbb{E}(\text{Card } \Phi \cap B),\end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}(F)$  désigne l'espérance de la variable aléatoire  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

La première formule de Campbell permet de relier la moyenne d'une somme sur les points du processus avec l'intensité du processus. En effet, soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et positive, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x).$$

Un processus stochastique ponctuel  $\Phi$  est dit de Poisson (cf. figure 2.11) s'il vérifie les hypothèses suivantes :

1.  $\Phi$  est à épargillement indépendant, c'est-à-dire que si  $(B_i)_{i \in 1, \dots, k}$  sont des boréliens deux à deux disjoints ; alors les variables aléatoires  $\Phi(B_i)$  sont indépendantes ;
2. pour tout  $B$  borélien, la variable aléatoire  $\Phi(B) = \text{Card } (\Phi \cap B)$  suit une loi de Poisson de moyenne  $\mu = \lambda \nu_d(B)$ , c'est-à-dire que :

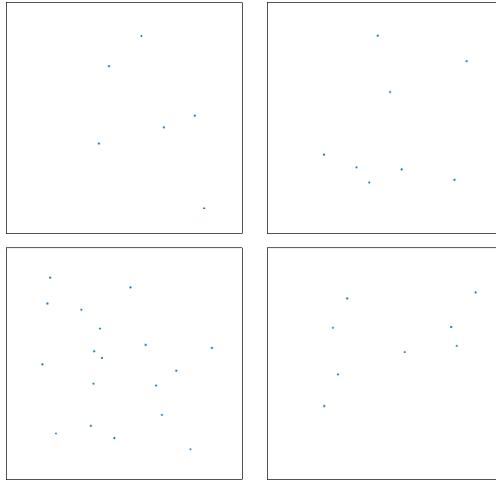
$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu).$$

BALASOIU ne s'arrête pas là. Il définit aussi les notions d'espace Polonais, mesure de comptage, et de convergence faible dièse. Ces notions sont importante vu la nécessité d'associer un point du processus ponctuel à une marque, i.e. un simplexe de  $\mathbb{R}^d$  dans notre cas. BALASOIU introduit la notion de mesure de Campbell, qui permet d'obtenir la seconde formule de Campbell. Ensuite il définit la distribution de Palm, permettant ainsi d'obtenir la très importante formule de Campbell-Mecke :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).$$

où  $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, mesurable et positive. Lorsque le processus ponctuel  $\Phi$  est stationnaire d'intensité  $\lambda$ , on a :

$$\int_{\Omega} \sum_{x \in \varphi} f(x, \varphi_{-x}) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x).$$



**FIGURE 2.11** – Tirages d'un processus de Poisson d'intensité 10 sur le carré unité [Bal20, p.137]. En premier, le nombre de point est obtenu par une v.a. suivant une loi de Poisson d'espérance 10. Ensuite les coordonnées des points sont obtenues par simulation de deux v.a. suivant des lois uniformes [Kee18].

où  $\mathbb{P}_0$  désigne la distribution de Palm. Le résultat de Slynvyak-Mecke suivant est une généralisation de cette dernière formule, lorsque le processus  $\Phi$  est de Poisson, et la fonction  $f : (\mathbb{R}^d)^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable positive :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi} f(x_1, \dots, x_n, \Phi) \right) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}(f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})) dx_1 \dots dx_n.$$

La prochaine étape consiste en la présentation d'un **théorème ergodique** qui lie la forme globale d'un seul tirage avec la forme moyenne en un point de plusieurs tirages. Ici aussi, BALASOIU se base sur les travaux de D. J. Daley et D. Vere-Jones [DVJ08].

**Théorème 2.3.3.** Soit  $\Phi$  un processus de Poisson, et  $f$  une fonction mesurable et positive qui vérifie :

$$\mathbb{E} \left( \sum_{x \in \Phi} f(\Phi_{-x}) \right) < +\infty.$$

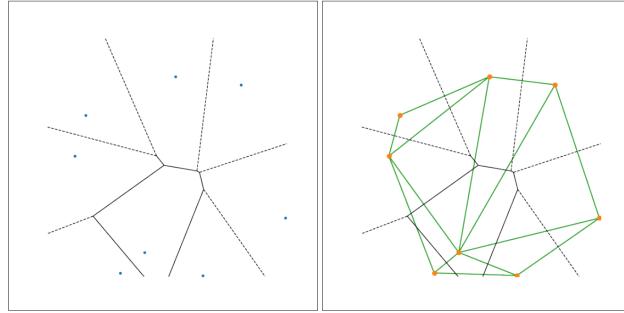
On note  $B_n$  la boule de  $\mathbb{R}^d$ , centrée en 0 et de rayon  $n$ . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(B_n)} \sum_{x_i \in B_n \cap \Phi} f(\Phi_{-x_i}) = \int_{\Omega} f(\varphi) d\mathbb{P}_0(x).$$

Ensuite, BALASOIU s'attaque aux notions de maillages et pavages, en particulier les **pavages de Voronoï** (cf. figure 2.12). Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permettra de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sûre si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Soit donc  $\varphi \in \Omega$  un ensemble localement fini de points. On appelle diagramme de Voronoi associé à  $\varphi$  le pavage régulier de  $\mathbb{R}^d$  par  $(C(x))_{x \in \varphi}$ , où la cellule  $C(x)$  est définie par :

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(y, x) < \inf_{z \in \varphi \setminus \{x\}} \text{dist}(y, z) \right\}.$$



**FIGURE 2.12** – Ensemble de points avec les diagrammes de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) associés [Bal20, p.138].

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (cf. théorème 2.3.3), BALASOIU montre que si  $\Phi$  est un processus de Poisson, alors les points de  $\varphi$  sont presque sûrement en **position générale**<sup>18</sup>. En corolaire, si  $\varphi$  est un ensemble de points en position générale, alors  $\varphi$  est l'ensemble des sommets du **maillage de Delaunay**<sup>19</sup>  $D_\varphi$  construit sur le pavage de Voronoi  $V_\varphi$ .

Ce chapitre se termine par la notion de convergence d'une suite de maillages. BALASOIU montre que, si l'on dilate (cf. figure 2.13) le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtiendrons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Il a également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle sera utile dans la section suivante, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

Soit donc  $D \subset \mathbb{R}^d$  un domaine, i.e. un ouvert connexe, de l'espace. Soit  $\Phi$  un processus ponctuel de l'espace qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  une suite positive, croissante et divergente. On définit, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le processus ponctuel  $\Phi_n$  par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}} \Phi.$$

On note  $\tau_n$  (cf. figure 2.13) le maillage par simplexe défini presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points  $\Phi_n \cap D$  :

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D},$$

ce qui permet d'obtenir le théorème suivant :

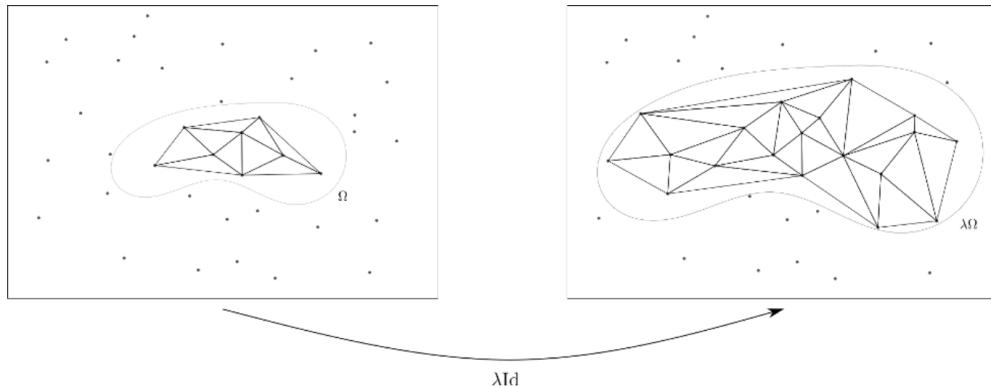
**Théorème 2.3.4.** *Si la suite d'intensités  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n),$$

*alors, presque sûrement, la suite  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de maillages de  $D$  converge uniformément vers  $D$ .*

18. Voir définition 4.4.5 de la thèse [Bal20, p.128].

19. Une triangulation de Delaunay maximise le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles.



**FIGURE 2.13 –** Dilatation de l’ouvert  $D$  [Bal20, p.138].

### 2.3.5 Étude asymptotique d’un réseau de ressorts isotrope

Dans cette partie, BALASOIU propose un second résultat d’approximation d’un matériau élastique par un réseau de ressorts. Dans la partie précédente, il avait proposé un résultat d’approximation d’un matériau élastique par un réseau régulier, à mailles carrées. Ici, les mailles seront triangulaires. Plus précisément Le réseau de ressorts que nous utiliserons dans ce chapitre est défini dans la section précédente, et repose sur la théorie des processus stochastiques ponctuels. Nous proposons dans ce chapitre un résultat de  $\Gamma$ -convergence de l’énergie élastique sur un réseau de ressorts, issu d’un processus stochastique de loi isotrope.

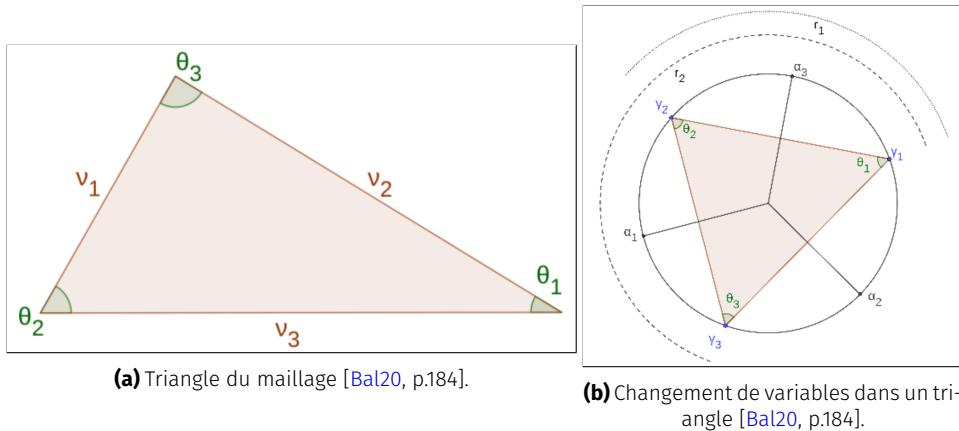
Présentons le réseau de ressorts utilisé pour approcher l’énergie élastique d’un matériau continu  $D$ . Il s’agit des mêmes définitions utilisées pour introduire le théorème 2.3.4 ci-haut, cette fois ci **en dimension 2**. On suppose que  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine du plan, i.e. un ouvert du plan, qui est connexe et dont la frontière est lisse. On considère une triangulation quelconque  $\tau$  du domaine  $D$ . On note  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  l’espace des éléments finis  $P1$  défini sur le maillage  $\tau$ . On note, comme précédemment,  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$  l’ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\}.$$

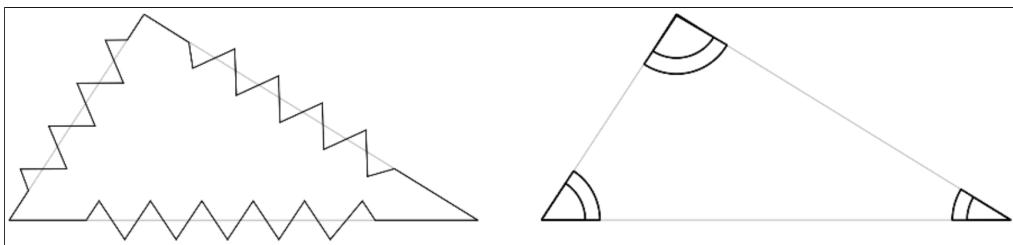
On souhaite construire un réseau de ressorts sur  $\tau$  tel que l’énergie totale  $E_\tau$  soit équi-coercive. Mais puisque l’on utilisera des triangulations construites sur un processus de Poisson, la coercivité n’est pas assurée. Pour remédier à ce manque de coercivité, on va placer sur  $\tau$  deux types de ressorts : **des ressorts de traction** et **des ressorts de torsion**. Les constantes de raideur des ressorts de traction et de torsion dépendent des angles du triangle de base des ressorts, et elles tendent vers l’infini si l’angle correspondant tend vers 0. Les constantes de rigidité des réseaux de ressorts sont supposées constantes. On note, comme aux sections précédents,  $R_\tau$  l’énergie du réseau de ressorts de traction, et  $T_\tau$  l’énergie du réseau de ressorts de torsion. On note de plus :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l’énergie totale sur le réseau  $\tau$ . On note également, pour tout triangle  $t \in \tau_2$  du maillage,  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  ses trois cotés, ainsi que  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  les trois angles opposés (voir figure 2.14a).



**FIGURE 2.14** – Illustration des éléments du maillages, et des coordonnées.



**FIGURE 2.15** – Ressorts de traction (à gauche) et de torsion (à droite) [Bal20, p.184].

On commence par définir l'énergie élastique du réseau de ressorts de traction  $R_\tau$ , et on renvoie à la figure 2.15. On note  $k > 0$  la constante de rigidité du réseau. On place, sur chaque arête  $v_i$  de chaque triangle  $t$  du maillage, un ressort de traction de longueur à vide  $l_i = |v_i|$  et de raideur  $k_i$ , avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad k_i = \frac{k}{\sin(\theta_i)}.$$

Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressort, et  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$R_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k|v_i|^2}{2\sin(\theta_i)} \left( \|\nabla \varphi e_{v_i}\| - 1 \right)^2.$$

On définit maintenant l'énergie  $T_\tau$ , et on renvoie aux figures 2.14b et 2.15. On note  $G > 0$  la constante de rigidité de torsion du réseau. On place, sur chaque angle  $\theta_i$  de chaque triangle  $t$  du maillage, un ressort de torsion de raideur  $G_i$  :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_i = \frac{G|v_{i+1}| |v_{i+2}|}{\sin(\theta_i)}.$$

On définit l'énergie élastique discrète de l'assemblage :

$$T_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G|v_{i+1}| |v_{i+2}|}{2\sin(\theta_i)} (\angle(\varphi(v_{i+1}), \varphi(v_{i+2})) - \angle(v_{i+1}, v_{i+2}))^2,$$

avec  $\angle(\cdot, \cdot)$  l'angle entre deux vecteurs du plan. Ensuite, on étend les énergies élastiques définies sur les réseaux à  $H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , en notant :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) \text{ si } u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) \text{ si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit maintenant la suite d'énergies élastiques définies sur la suite des réseaux  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On introduit un changement d'échelle des énergies  $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$  pour prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements. Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive qui tend vers 0. On note, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u), \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n.$$

On donne enfin une version modifiée des suites de fonctionnelles  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui prenne en compte une condition de Dirichlet sur le bord de  $D$ . Soit donc  $v \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  la donnée du bord. On note :

$$W_n^v(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \tau_0, \text{dist}(p, \partial D) \leq \lambda_n, u(p) = v(p) \right\}.$$

On pose ensuite, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} R_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) \text{ si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) \text{ si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que

$$E_n^v = R_n^v + T_n^v.$$

On énonce à présent les trois théorèmes principaux du chapitre.

**Théorème 2.3.5 (Convergence simple).** *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ , il existe une suite de déplacements discrets  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

et qui vérifie de plus :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} E_s(u)$$

avec :

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

où  $K_{\lambda, \mu}$  est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda, \mu} e : e = \lambda \text{tr}(e)^2 + 2\mu \text{tr}(e)^2,$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement les première et deuxième constantes de Lamé, qui valent :

$$\lambda = \frac{32k|A|}{9\pi^2} + \frac{3G|A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k|A|}{9\pi^2} - \frac{3G|A|}{4}.$$

**Théorème 2.3.6 ( $\Gamma$ -convergence).** Supposons que la suite de changements d'échelle  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

Alors, la suite de fonctionnelles redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{\text{hom}} : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$E_{\text{hom}}(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon ,} \end{cases}$$

où  $K_{\lambda, \mu}$  est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda_h, \mu_h} e : e = \lambda_h \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu_h \operatorname{tr}(e)^2.$$

De plus, pour toute donnée au bord  $v$  dans  $\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , la suite de fonctionnelles  $(E_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{\text{hom}}^v : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$E_{\text{hom}}^v(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u - v \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

**Théorème 2.3.7 (Équi-coercivité).** Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacements est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

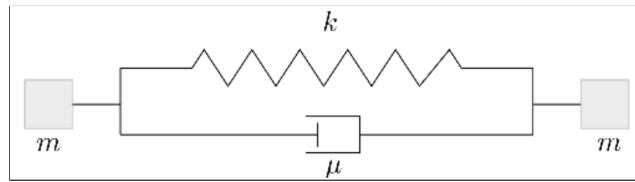
Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

### 2.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur

Ce dernier chapitre propose un résultat de quasi-staticité d'un réseau de ressorts percuté par un objet ponctuel lorsque la raideur du système et sa masse totale tendent vers l'infini. Lors de la collision de floes de glaces, la vitesse relative des floes (de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres par seconde, voir [Ram+09]) est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace (de l'ordre de grandeur de 1800 mètres par seconde pour les ondes de cisaillement, voir [Mar+19]). BALASOIU montre que, lors de la percussion d'un réseau masse-ressort par un objet solide, les effets dynamiques disparaissent lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini. Autrement dit, nous montrons que le réseau limite, de raideur infinie, est à chaque instant dans un état d'équilibre. Plus précisément, nous observerons que le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit **système intérieur** (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Le second, dit **système extérieur** (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts.

On étudie le phénomène de percussion d'un système masse-ressort de  $n+1$  particules, chacune de masse  $m$ , par un objet ponctuel  $P$  de masse  $M$ . Le système masse-ressort utilisé est de constante de raideur  $k > 0$ , et de constante de viscosité  $\mu > 0$ . Soit  $\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$  une triangulation compacte et connexe du plan. En chaque nœud  $q \in \tau_0$ , on place une masse ponctuelle  $m$ . Sur chaque arête  $\omega \in \tau_1$  de  $\tau$ , on place en parallèle (voir figure 2.16) :

1. un ressort de longueur à l'équilibre  $L_0$  et de raideur  $k$ ,
2. un dissipateur visqueux, de viscosité  $\mu$ .



**FIGURE 2.16 –** Système élémentaire masse-ressort utilisé.

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , le système masse-ressorts est à l'équilibre, et qu'il est percuté par la masse ponctuelle  $P$  au point  $q_0 \in \partial\tau_0$ . On note  $v_0$  la vitesse du point  $P$  lors de la collision. On suppose également que le système  $\{q_0, P\}$  devient inséparable, de masse  $m + M$ . Sur le maillage  $\tau$ , on note  $\tau_0$  l'ensemble des nœuds du système. On a donc :

$$\tau_0 = \{\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_n\},$$

où les  $\mathbf{q}_i$  sont les coordonnées des masses. On rappelle que le système est à l'équilibre au temps  $t = 0$ . On note  $a, b \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbb{R})$  les vecteurs de positions et vitesses initiales définis par :

$$\begin{cases} a = (\mathbf{q}_0(0), \dots, \mathbf{q}_n(0)), \\ b = (\mathbf{v}_0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

On note de plus  $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice de connectivité :

$$0 \leq i < j \leq n+1, C_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } q_i \in \mathcal{V}(\mathbf{q}_j), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\mathcal{V}(q)$  désigne l'ensemble des voisins de la particule  $q \in \tau_0$ . On note encore  $L_{ij} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice des longueurs à l'équilibre dont l'expression est déduite de  $\tau_0$ ; et  $\mathbf{u}_{ij}$  le vecteur unitaire (s'il existe) dans la direction de l'arête entre  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{q}_j$ . On obtient le système différentiel suivant en appliquant l'équation d'Euler-Newton sur les moments linéaires, et en exprimant la force de frottement du dispositif visqueux en fonction de  $\dot{q}$  :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M+m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \frac{\mu}{M+m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & (\text{SE}) \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right] \quad \forall 1 \leq i \leq n. & (\text{SI}) \end{cases}$$

D'un point de vue énergétique, on a la loi de conservation de l'énergie suivante :

$$E_{\text{el}}(t) + E_{\text{c}}(t) + E_{\text{r}}(t) = E_0,$$

où  $E_{\text{el}}(t)$ ,  $E_{\text{c}}$ , et  $E_{\text{r}}$  désignent respectivement l'énergie élastique du système, l'énergie cinétique, et l'énergie dissipée par les frottements visqueux [Bal20, p.188].  $E_0$  désigne l'énergie initiale du système

donnée par :

$$E_0 = \frac{1}{2}(M + m)\|\mathbf{v}_0\|^2.$$

Sous ces hypothèses et ces définitions, BALASOIU obtient le théorème d'existence globale ci-après.

**Théorème 2.3.8 (Existence d'une solution globale).** *On suppose que les conditions initiales adjointes au système d'équation ( $E$ ) vérifient la condition énergétique :*

$$E_0 < \frac{k}{4} \left( \inf_{\omega \in \tau_1} |\omega| \right)^2.$$

*Alors, le problème de Cauchy est bien posé<sup>20</sup> et ses solutions sont globales.*

Ensuite, afin d'obtenir un système à grande raideur et de supprimer les perturbations liées à la propagation des ondes élastiques, BALASOIU introduit une dépendance en  $\varepsilon$  des constantes physiques du système :  $k_\varepsilon$ ,  $M_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$ . En posant :

$$k_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon}, \quad M_\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^2}, \quad \mu_\varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

le système masse-ressort se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M + \varepsilon^2 m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \varepsilon \frac{\mu}{M + \varepsilon^2 m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], \\ \varepsilon^2 \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right] \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_\varepsilon)$$

On écrit également le système limite :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \frac{k}{M} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}, \\ \mathbf{0} = \sum_{j=0}^n C_{ij} \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_{lim})$$

Ce problème est un problème de perturbation singulière, pour lequel BALASOIU prouve le théorème de limite quasi-statique ci-bas (en se servant principalement du théorème classique de A.N.Tikhonov [Tik52; Hop66]).

**Théorème 2.3.9 (Limite quasi-statique).** *Les solutions  $\mathbf{q}_\varepsilon$  et  $\mathbf{q}$  respectivement des systèmes perturbé équation ( $E_\varepsilon$ ) et limite équation ( $E_{lim}$ ) munis des conditions initiales<sup>21</sup> existent, sont uniques et globales. De plus, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Du point de vue numérique, les simulations ont permis de comprendre l'influence des différents paramètres physiques présents (masse des deux objets, raideur des ressorts, vitesse d'impact etc.). De plus, le code Python et HTML/CSS développé fournira une bonne base pour analyser la localisation des vecteurs propres du système dynamique et identifier ceux qui agissent sur un déplacement du bord. Présentons le principal résultat numérique utilisé. À  $\varepsilon > 0$  fixé, on

20. Le système est bien posé si deux particules voisines restent à une distance  $c > 0$  l'une de l'autre.

21. Des conditions initiales satisfaisant le théorème 2.3.8.

note  $(\lambda_i(\varepsilon))_{i \in \{0, \dots, 4n+3\}}$  les valeurs propres de l'opérateur associé à la linéarisation du système équation  $(E_\varepsilon)$  autour de sa position d'équilibre, et on les ordonne ainsi :

$$0 \geq \Re(\lambda_8(\varepsilon)) \geq \Re(\lambda_9(\varepsilon)) \geq \dots \geq \Re(\lambda_{4n+3}(\varepsilon)).$$

Nous définissons le saut spectral  $\nu_\varepsilon$  associé au système  $(E_\varepsilon)$  de la manière suivante :

$$\nu_\varepsilon = \frac{\Re(\lambda_{12}(\varepsilon))}{\Re(\lambda_{11}(\varepsilon))}.$$

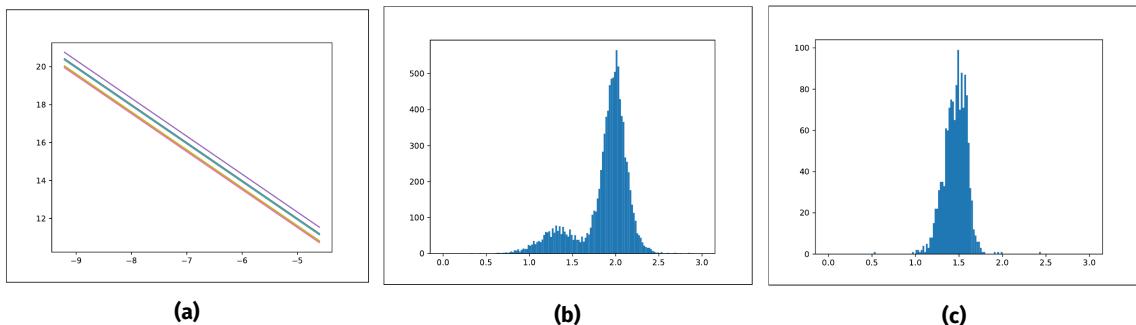
Ce saut représente l'écart entre les quatre premières valeurs propres non nulles du système, qui correspondent au système lent (SE), et la première valeur propre du système rapide (SI). Après avoir tracé le saut spectral  $\nu_\varepsilon$  pour différentes triangulations  $\tau$  (cf. figure 2.17a pour un exemple), BALASOIU constate qu'il s'agit de droites dont les pentes ne dépendent ni du tirage, ni de l'intensité du processus de Poisson-Delaunay. Il propose donc l'expression suivante pour  $\nu_\varepsilon$  :

$$\ln(\nu_\varepsilon) = a_0(\tau) + \alpha \ln(\varepsilon),$$

avec  $a_0(\tau)$  une quantité qui dépend du maillage  $\tau$ , et  $\alpha$  une constante universelle, indépendante de  $\tau$  et  $\varepsilon$  numériquement estimée à la valeur :

$$\alpha = 2 \pm 10^3.$$

La figure 2.17c ci-dessous a été obtenue, pour un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500000, l'histogramme de la valeur de  $a_0$  associée sur 1000 tirages. Ces résultats semblent indiquer, à grande



**FIGURE 2.17** – Principaux résultats numériques obtenus [Bal20, p.199]. **(a)** : saut spectral en fonction de la perturbation, en échelle log-log, sur dix tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 1000. **(b)** : histogrammes du paramètre  $a_0$ , sur 10000 tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 2500. **(c)** : histogramme du paramètre  $a_0$  sur 1000 tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500000.

échelle au moins, que  $a_0(\tau)$  prend ses valeurs entre 0.9 et 2.5. Nous observons également l'émergence de deux pics pour certaines intensités. Il semblerait que le pic de valeur moyenne la plus faible gagne en fréquence de représentation, jusqu'à concentrer la quasi-totalité des cas pour l'intensité de 500000.

### 2.3.7 Discussion et questions ouvertes

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse pour limiter la complexité du modèle. Ces simplifications sont à l'origine de simplifications que nous précisons ci bas :

1. Le modèle suppose que les floes sont d'épaisseur négligeable devant leur extension horizontale ; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.

2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites [Bal20, chp.2].
3. Au chapitre 6 [Bal20, p.187], il serait également intéressant d'intégrer, comme dans les chapitres 3, 4, et 5, des ressorts de torsion en chaque nœud du système masse-ressort [Bal20, p.187].
4. Au chapitre 5 BALASOIU, p.183, BALASOIU a montré que la suite d'énergies élastiques  $\Gamma$ -converge vers une énergie limite. De plus, lorsque le redimensionnement est suffisamment rapide, il a montré que la  $\Gamma$ -limite s'écrit comme l'énergie d'un matériau élastique homogène et isotrope, soumis à l'hypothèse des petits déplacements. Cette énergie dépend donc de deux paramètres, les deux constantes de Lamé du matériau homogénéisé. Il serait intéressant d'adapter l'étude numérique [OSAJ95] pour obtenir une expression des constantes de Lamé homogénéisées dans notre cas.
5. Il reste, à l'issue de la thèse, d'obtenir une seconde limite spatiale. Cette limite est une limite de couche, qui indiquerait l'expression du déplacement au bord du floe lors de la percussion. Nous pourrions l'obtenir en sélectionnant les vecteurs propres du système dynamique masse-ressorts qui influent sur le comportement d'une couche mince du bord du floe [Bal20, p.201].
6. Dans une prochaine étude, on pourrait étudier la percussion du système masse-ressort par un objet solide non ponctuel et qui ne serait pas fixé au système étudié. BALASOIU pense que le cas général peut se déduire du cas étudié au chapitre 6 [Bal20, p.187]. En effet, l'étude de la percussion complète reviendrait à ajouter, dans le système différentiel étudié, un nombre fini de perturbations singulières à des instants distincts.

## 2.4 Résumé de l'état de l'art

En résumé, nous constatons que Rabatel et Balasoiu ont fondamentalement posés les bases du travail que nous allons effectuer durant ce stage. Dans sa thèse, Rabatel s'est focalisé sur l'étude de la dérive des floes de glace dans la mer. Le puissant modèle qu'il a développé a pu être testé et validé sur des floes de glace en bassins, avec de données climatiques provenant d'**ERAinterim** et **TOPAZ**. Cependant, il a considéré les floes de glace comme des objets solides ne pouvant se briser, ce qui n'est pas le cas dans la nature.

C'est pour résoudre le problème de fracture que Balasoiu a considéré, dans sa thèse, les floes de glace comme un assemblage discrets de masses reliés par des ressorts à grandes raideurs et des dispositifs visqueux. Il a dans un premier temps étudié la nucléation et la propagation de la fracture dans un matériau élastique soumis à un chargement quasi-statique<sup>22</sup>. Balasoiu s'est ensuite penché sur la percussion d'un matériau élastique. Il a pour ceci considéré le floe comme un réseau de ressorts<sup>23</sup> et a étudié le résultat de la collision entièrement élastique d'un objet ponctuel avec un floe, au niveau d'un des nœud de ce dernier. Au terme de son travail, Balasoiu propose d'exhiber une deuxième limite spatiale, celle permettant de dériver de l'équation différentielle du système entier l'expression du déplacement au bord du floe.

Notre travail va consister en l'étude du phénomène de percussion de plus près. Nous extrairons les déplacements des nœuds des floes (et sur le bord en particulier) après une collision, et nous étudierons, à travers le modèle de Griffith et sa compétition entre les énergies de déformation et de fracture, dans quelles circonstances la fracture apparaît. Nous étudierons tout ceci à l'aide de simulations précises écrites en Python en 1D, et de 2D.

22. Balasoiu extraira, dans une seconde partie, une limite temporelle qui montre qu'un réseau limite de raideur infinie est, à chaque instant, dans un état d'équilibre; ce qui justifie l'hypothèse de quasi-staticité du phénomène de percussion.

23. Il justifie cette bonne approximation en exhibant une première limite spatiale.

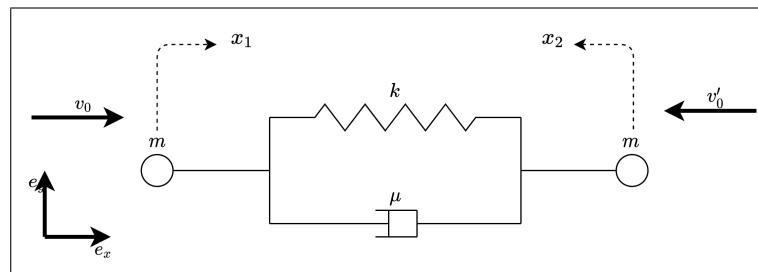
## Chapitre 3

# Problème 1D et étude de la fracture

Dans cette section, nous étudierons le floe de glace en une dimension (1D). Nous avons montré dans les sections précédentes qu'un assemblage de masses reliées par des ressorts et des dispositifs visqueux constitue une bonne approximation d'un matériau élastique et du phénomène de percussion associé. Nous partirons de cette approche par réseau de ressort pour modéliser dans un premier temps le déplacement d'un floe de glace contenant juste deux nœuds (masses), ensuite nous modéliserons la percussion inélastique des nœuds de floes avec et sans rebonds, avec un nombre variable de nœuds par floe (leur nombre aussi variable).

### 3.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

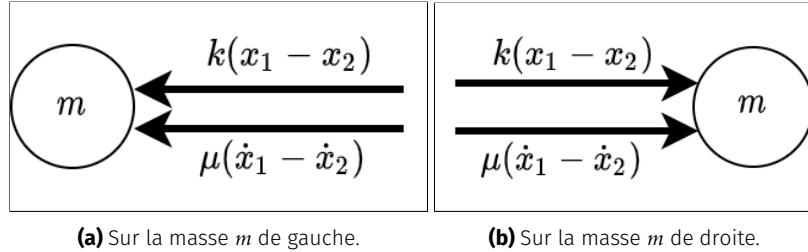
Avant d'entamer la question de la percussion avec séparation des masses (voir section 3.2.3), étudions le comportement d'un floe de glace 1D isolé et modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif visqueux, et 2 nœuds) (voir figure 3.1).



**FIGURE 3.1** – Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Les variables  $x_1$  et  $x_2$  traduisent les déplacements des nœuds de gauche et de droite respectifs. À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses  $v_0$  et  $v'_0$  indiquées.

Un bilan des forces effectué sur les deux nœuds du floe (voir figure 3.2) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (3.1)$$



**FIGURE 3.2** – Bilan des forces appliquées sur les nœuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple, juste après l'instant initial, on a  $x_1 > 0$ , et  $x_2 < 0$  d'où  $k(x_1 - x_2) > 0$ ).

En remarquant que  $m \neq 0$ , on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_B + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_C. \quad (3.2)$$

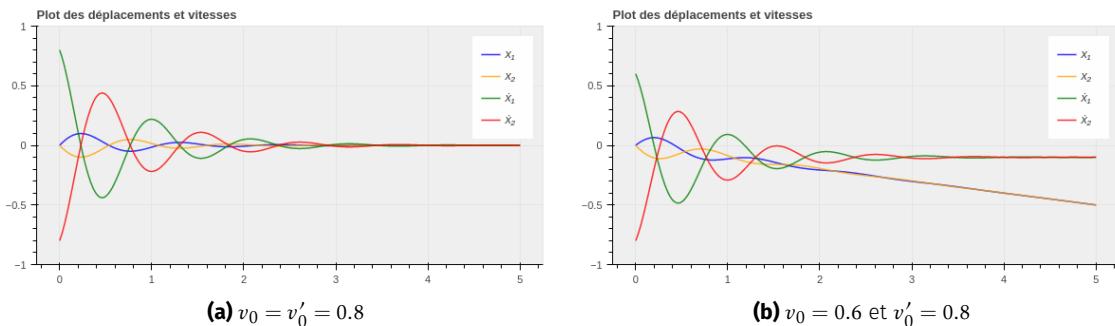
On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant  $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$ , et on reprend la condition initiale  $\dot{x}_1(0) = v_0$ ,  $\dot{x}_2(0) = -v'_0$ , pour obtenir le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution numérique est présentée à la figure 3.3 (voir fichier code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque  $v_0 \neq v'_0$ , les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements divergent.



**FIGURE 3.3** – Simulation du déplacement 1D d'un floe avec  $m = 1$ ,  $k = 18$ ,  $\mu = 1.3$ ,  $t_f = 5$ . En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$  lorsque  $v_0 = v'_0$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par :

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (3.4)$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1 (Non-convergence du modèle 1D isolé).** *Partant d'une position d'équilibre  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , les déplacements  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  des deux nœuds du floe 1D (avec viscosité  $\mu > 0$ ) convergent<sup>1</sup> si et seulement si leurs vitesses initiales sont opposées, i.e.  $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$ .*

*Démonstration.* Le calcul des solutions analytiques est très délicat car il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice  $E$ . Pour cela, nous devons la diagonaliser (ou du moins la trigonaliser). Son polynôme caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k). \end{aligned}$$

Posons  $\Delta = 4\mu^2 - 8km$ . On distingue deux cas :

- Si  $\Delta \geq 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$ ;
- Si  $\Delta < 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ .

Nous avons donc exhibé les trois valeurs propres de notre matrice :  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$ . Avec  $\lambda$  désignant l'une de ces valeurs propres, on recherche les vecteurs<sup>2</sup>  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$  appartenant aux sous espaces propres  $E_\lambda$ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1, \\ x_4 = \lambda x_2, \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0, \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

- Pour  $\lambda = 0$ , l'équation (3.5) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit  $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$ , avec  $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ .

- Pour  $\lambda = \lambda_1$  ou  $\lambda_2$ , on remarque que  $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$ . L'équation (3.5) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1, \\ x_4 = \lambda x_2, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

1. Convergence au sens où la fonction tend vers une limite finie.

2. **Attention** : ne pas confondre les composantes de ce vecteur avec les déplacements  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  recherchés.

On en déduit donc  $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$ , avec  $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$ ; et  $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$  avec  $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ .

La multiplicité arithmétique (égale à 2) de  $\lambda = 0$  est différente de sa multiplicité géométrique (égale à 1). La matrice  $E$  n'est donc pas diagonalisable. Son polynôme caractéristique étant scindé, nous allons la trigonaliser. On pose donc une base  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  dans laquelle la matrice  $E$  s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique (notée  $\mathcal{B}$ ) de  $\mathbb{R}^4$  à  $\mathcal{B}'$ . On a :

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_1$  s'écrit  $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EP v_1 = 0$ .  $v_1$  est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend  $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_2$  s'écrit  $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EP v_2 = av_1$ . On retourne dans  $\mathcal{B}$  en posant  $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a, \\ x_4 = a, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Avec  $a = 1$ , on écrit  $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$ .

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_3$  s'écrit  $v_3 = (0, 0, 1, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EP v_3 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$ . En posant  $b = d = 0$ ,  $v_3$  devient un vecteur propre associé à  $\lambda_1$  et on prend  $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- De façon similaire, on obtient  $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$  en posant  $c = e = f = 0$ .

Nous avons donc trigonaliser la matrice  $E$ , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \quad (3.7)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente; autrement dit,  $A = D + N$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant  $E = P(D+N)P^{-1}$ , nous pouvons facilement calculer  $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN)P^{-1}$ . Ce calcul délicat (effectué avec l'aide du logiciel de calcul symbolique Symbolab) donne :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons-nous que la solution du problème de Cauchy équation (3.3) est donnée par  $Y(t) = \exp(tE)Y_0$ , avec  $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$ . Le calcul du déplacement  $x_1(\cdot)$  donne donc :

$$x_1(t) = \frac{t}{2}(v_0 - v'_0) - \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}(v_0 + v'_0). \quad (3.8)$$

Le cas où  $\Delta < 0$  (à étudier dans  $\mathbb{C}$ ) peut se ramener au cas réel (dans  $\mathbb{R}$ ) en posant  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$  (avec  $\alpha = -\frac{\mu}{m}$  et  $\beta = -\frac{\sqrt{2km-\mu^2}}{m}$ ). En remarquant que  $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$ , on obtient :

$$x_1(t) = \frac{t}{2}(v_0 - v'_0) + \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta}(v_0 + v'_0). \quad (3.9)$$

Les équations (3.8) et (3.10) permettent d'observer que le déplacement  $x_1(\cdot)$  ne converge pas lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , à moins que  $v_0 = v'_0$ , ce qui est observé à la figure 3.3. Pour le déplacement du deuxième nœud, on a :

$$x_2(t) = \frac{t}{2}(v_0 - v'_0) + \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}(v_0 + v'_0) = \frac{t}{2}(v_0 - v'_0) - \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta}(v_0 + v'_0); \quad (3.10)$$

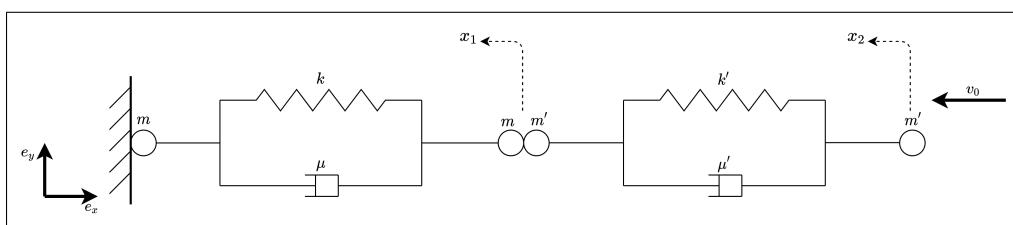
On tire les mêmes conclusions en effectuant un raisonnement similaire. De plus, si  $\mu = 0$ , nous avons  $\alpha = 0$  et donc pas de convergence pour  $x_1(\cdot)$  comme pour  $x_2(\cdot)$ .

□

## 3.2 Modélisation de la percussion

### 3.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

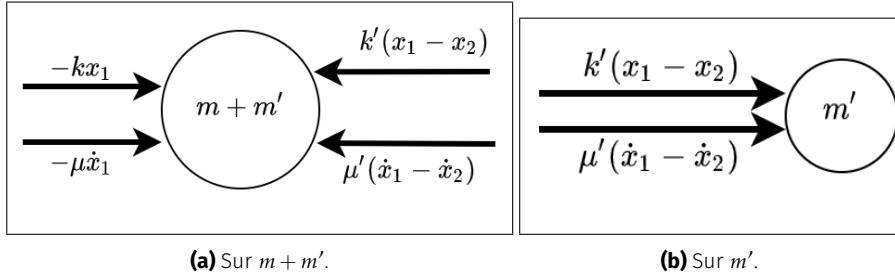
Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème de percussion. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nœuds. Le floe 1 est immobilisé face à un mur, et le floe 2 approche à la vitesse  $v_0$ . On identifie chaque nœud à la masse qu'il porte ( $m$  ou  $m'$ ), chaque ressort à sa raideur ( $k$  ou  $k'$ ), chaque dispositif visqueux à sa viscosité ( $\mu$  ou  $\mu'$ ) (voir figure 3.4).



**FIGURE 3.4** – Contact 1D parfaitement inélastique (choc mou) entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant, durant, et après le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses  $m$  et  $m'$  en contact forment une seule masse<sup>3</sup>  $m + m'$  dont le déplacement est donné par la variable  $x_1(t)$ . Le déplacement de la masse  $m'$  à l'autre bout du floe percuteur est nommé  $x_2(t)$ . La masse  $m$  qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.

3. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.



**FIGURE 3.5 –** Bilan des forces appliquées sur les nœuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ( $v_0 < 0$  et donc  $x_1 < 0$ ). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort  $k'$ , on peut imaginer  $x_1$  immobile (on aura  $x_2 < 0$ , d'où  $x_1 - x_2 > 0$ ) (voir [Ho10]).

En orientant convenablement le système, on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant (voir figure 3.5) :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \end{cases} \quad (3.11)$$

À l'instant initial  $t_0$ , on a le système suivant :

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0), \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0). \end{cases} \quad (3.12)$$

En posant  $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , l'équation (3.12) devient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B'\dot{X}(t) + C'X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (3.14)$$

avec  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ .

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons-le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc  $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$  et le système (3.14) devient :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T. \end{cases} \quad (3.15)$$

avec la matrice par blocs :

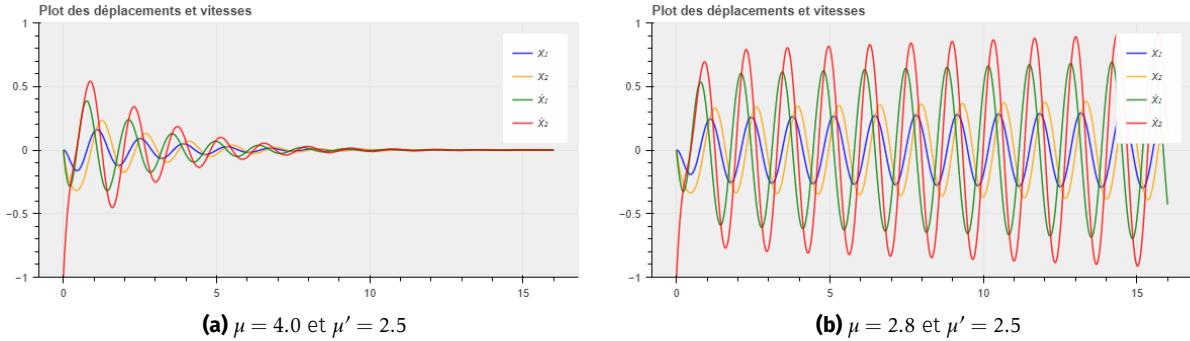
$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_2 \\ B' & C' \end{pmatrix},$$

où  $I_2$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par :

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (3.16)$$

La résolution analytique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice  $E \in \mathbb{R}^4$ , ce qui s'avère difficile dû à la taille de ladite matrice. Nous optons donc pour une solution numérique (voir figure 3.6) issue du notebook `code/simu1D/Percussion1D-1.ipynb`.



**FIGURE 3.6** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k = 16$ ,  $k' = 5$ ,  $v_0 = -1.0$ ,  $t_f = 32$ . Dans le premier cas (a), on observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . Dans le second cas (b), on constate que le système diverge.

Pour certaines valeurs (spécifiquement de  $\mu$  et  $\mu'$ ), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . En revanche pour certaines (voir figure 3.6b), il diverge<sup>4</sup>. Pour étendre les travaux dans cette section, on pourrait :

1. Calculer analytiquement et numériquement les états d'équilibres  $Y_{eq} \in \ker(E)$ ; puis distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice  $E$ , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les paramètres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

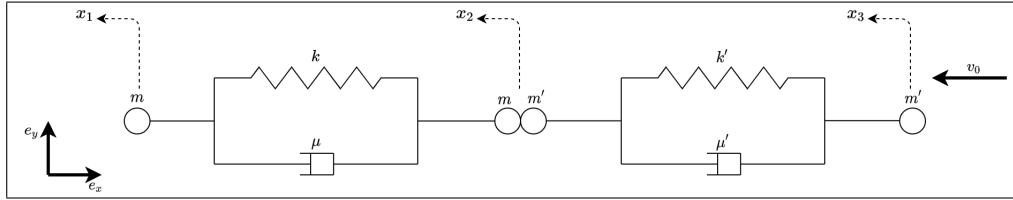
### 3.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé ici. On ajoute donc une troisième variable afin de décrire le comportement du noeud qui était rattaché au mur. Le schéma régissant ce système est donnée à la figure 3.7. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 3.8.

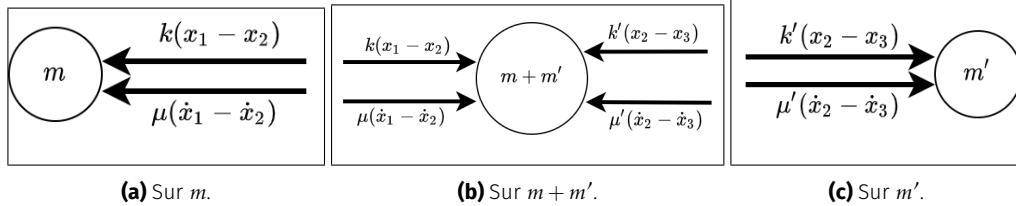
Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (3.17)$$

4. La divergence pour ce cas est particulièrement évidente lorsque  $\mu < \mu'$ .



**FIGURE 3.7 –** Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables \$x\_1\$, \$x\_2\$, et \$x\_3\$ décrivant les mouvements de chaque nœud.



**FIGURE 3.8 –** Bilan des forces appliquées sur les nœuds du système. On procède de façon similaire à figure 3.5 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Sous forme matricielle, on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m+m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k-k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu-\mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Puisque \$m, m' \neq 0\$, la matrice \$A\$ est inversible. En posant \$X = (x\_1, x\_2, x\_3)^T \in \mathbb{R}^3\$, le système d'EDO revient à l'équation (3.19) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (3.19)$$

où \$B' = A^{-1}B\$ et \$C' = A^{-1}C\$. On pose ensuite \$Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6\$ et le système équation (3.19) devient :

$$\dot{Y}(t) = EY(t). \quad (3.20)$$

avec :

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 3.4), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble de masse \$2(m+m')\$ après collision et fixation de la masse \$m'\$ (à vitesse \$\mathbf{v}\_0\$) sur la masse \$m\$ (de vitesse \$\mathbf{v}'\_0\$)<sup>5</sup>. Pour simplifier les calculs, nous considérons les nœuds comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée \$\mathbf{v}\_f\$, et les quantités de

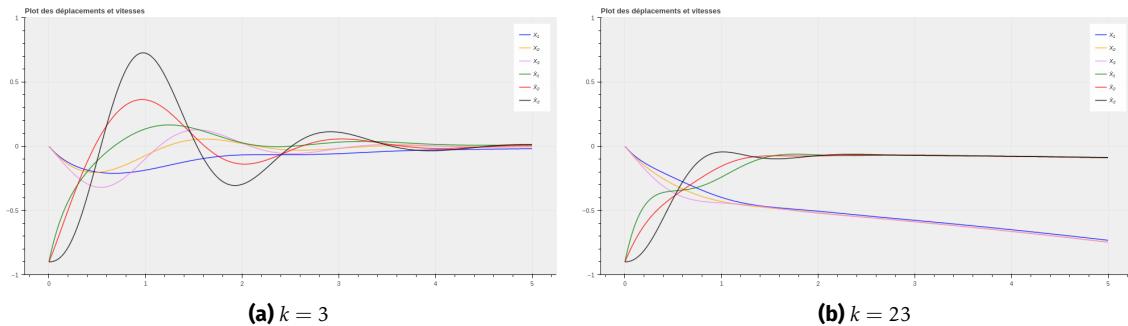
5. Le vecteur \$\mathbf{v}'\_0\$ n'est pas marqué à la figure 3.7 (i.e. \$\mathbf{v}'\_0 = 0\$). L'introduction de ce vecteur permet de généraliser le problème.

mouvement avant et après choc sont notées  $P_{\text{avant}}$  et  $P_{\text{après}}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}}, \\ \Rightarrow 2m\mathbf{v}_0 + 2m'\mathbf{v}'_0 &= (2m + 2m')\mathbf{v}_f, \\ \Rightarrow \mathbf{v}_f &= \frac{m\mathbf{v}_0 + m'\mathbf{v}'_0}{m + m'}. \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (3.20) pour obtenir le problème de Cauchy ci-dessus. Le résultat de la simulation est présenté à la figure figure 3.9 (issue du notebook code/simu1D/Percussion1D.ipynb).

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (3.21)$$

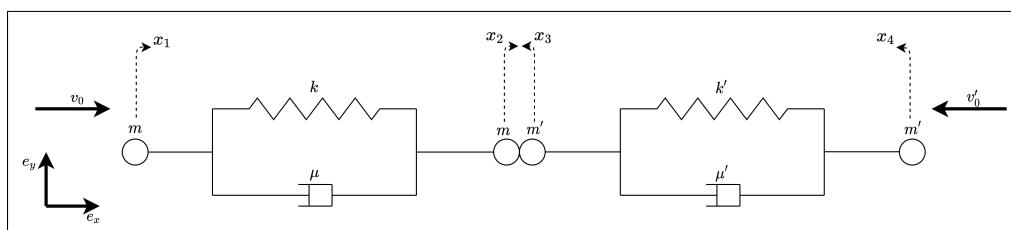


**FIGURE 3.9** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k' = 22$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.8$ ,  $t_f = 5$ . Sous certaines conditions (forte dissipation, raideur du floe percuté élevée, etc.), on observe le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

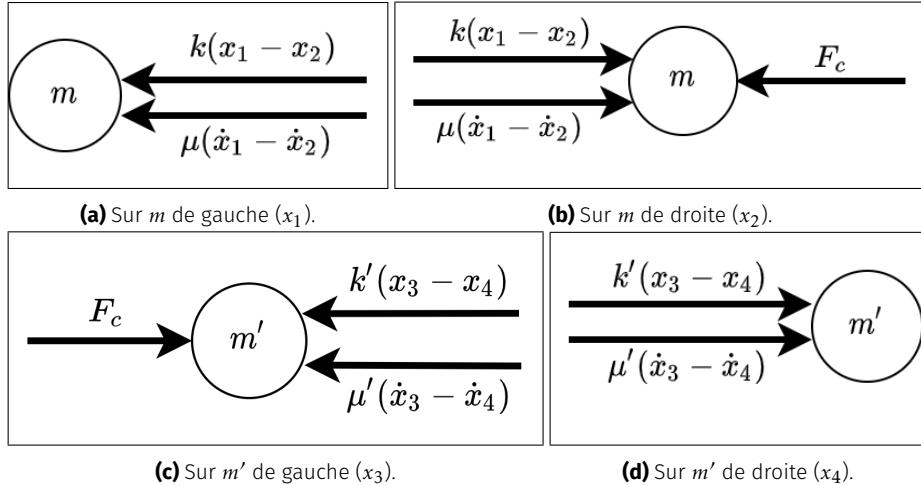
La figure 3.9 permet d'observer la nuance avec le problème de contact parfaitement inélastique. Il est difficile de distinguer les cas qui aboutissent à une convergence des déplacements de ceux qui divergent. Observons donc à présent un problème de contact inélastique avec séparation des masses.

### 3.2.3 Premier modèle pour la collision inélastique avec séparation des masses

Reprendons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps  $\delta t^* = [t^-, t^+]$  de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses  $m$  et  $m'$  en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 3.4 et 3.7), et nous le présentons à la figure 3.10 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 3.11.



**FIGURE 3.10** – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les noeuds  $m$  et  $m'$  en contact sont étudiés séparément. On représente les variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , et  $x_4$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**FIGURE 3.11** – Bilan des forces appliquées sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 3.5 et 3.8 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.  $F_c$  représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (3.22)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de  $x_2$  et  $x_3$  pour éliminer la force de contact  $F_c$  et obtenir le système :

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (3.23a)$$

$$m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), \quad (3.23b)$$

$$m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \quad (3.23c)$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant  $x_2(t) = x_3(t)$  p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses  $m$  et  $m'$  peuvent être étudiées comme une unique masse  $m + m'$ . La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble  $m + m'$ . Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses  $\dot{x}_1(t^+)$ ,  $\dot{x}_2(t^+)$ ,  $\dot{x}_3(t^+)$  et  $\dot{x}_4(t^+)$  immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (3.20)), nous réutilisons les quantités  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_4$  données par le système (3.20) dans lequel  $x_2$  et  $x_3$  sont confondus. On peut se permettre une telle approximation car  $x_1$  et  $x_4$  n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité  $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$  est aussi calculé suivant le modèle (3.20) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnues dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons l'équation (3.23b) entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_{I}. \quad (3.24)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons  $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$  et  $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$  les vitesses des deux nœuds concernés avant la collision, et  $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$  et  $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$  les vitesses après le contact. L'équation (3.24) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (3.25)$$

À présent, nous traduisons la perte d'énergie à ce niveau microscopique par le coefficient de restitution  $\varepsilon$ <sup>6</sup>. On suppose (algébriquement) que les nœuds prennent des directions indiquées à la figure 3.12.

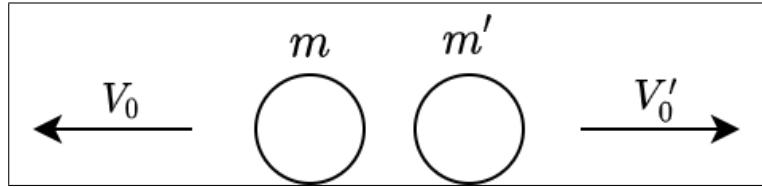


FIGURE 3.12 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (3.26) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (3.26)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (3.25) et (3.26) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1 + \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 + \varepsilon)mv_0 + (m' - \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (3.27)$$

Une fois leurs vitesses "initiales"<sup>7</sup> obtenues, on calcule les déplacements des différents nœuds du réseaux, et les fractures éventuelles qui s'ensuivent. Plus précisément, on a par exemple pour le premier floe :

- son nœud de gauche  $x_1$  a pour vitesse  $v_0$  avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc;
- son nœud de droite  $x_2$  a pour vitesse  $v_0$  avant le choc, mais passe de façon discontinue à  $V_0$  après le choc.

En procédant de manière similaire, nous obtenons les déplacements et les vitesses des nœuds du deuxième floe après la collision. Une simulation permet d'obtenir le résultat de la figure 3.13.

### 3.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses

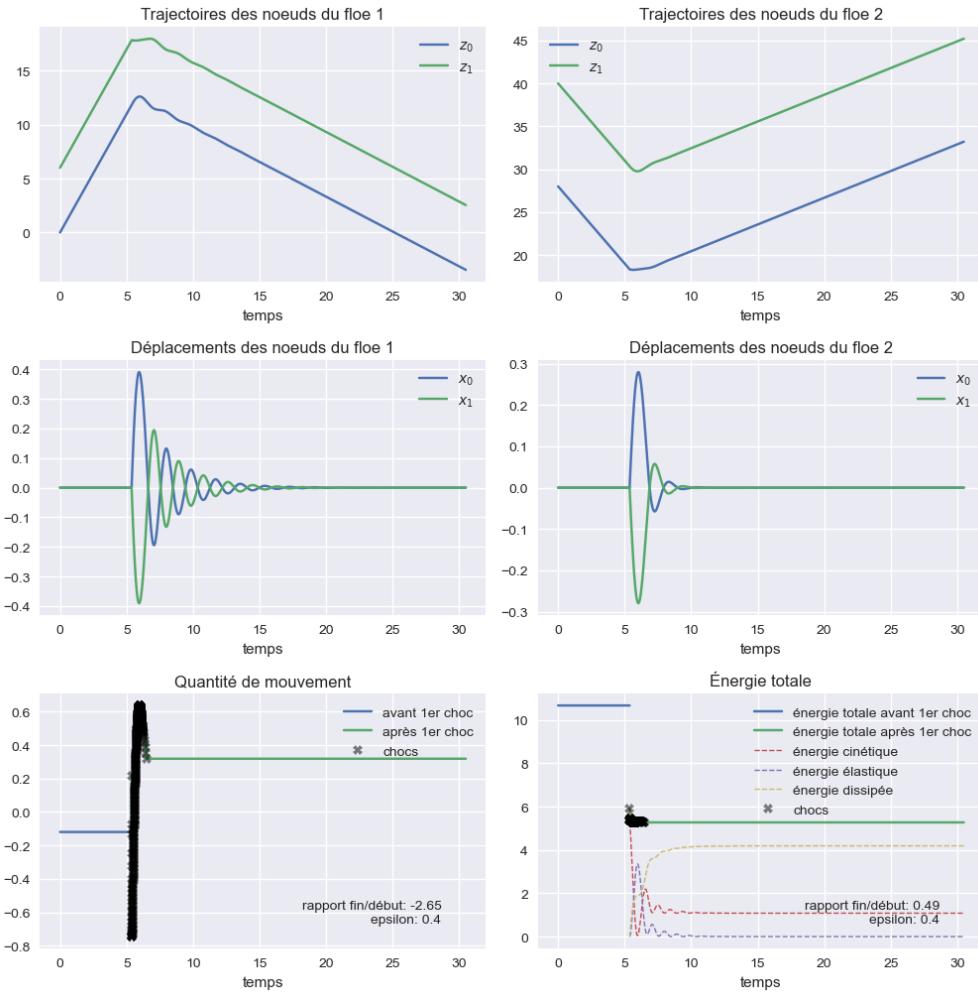
Dans cette section, nous introduisons un modèle 1D plus général que ceux présentés dans les deux sections précédentes (voir sections 3.1 et 3.2.3). Les floes sont cette fois représentés par une multitude de nœuds, de ressorts et de dispositifs visqueux. Contrairement à l'approche par déplacement que nous avons adopté à la section 3.1, nous considérons ici une approche par position des nœuds dans le repère absolu  $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  (voir figure 3.14)<sup>8</sup>. Signalons que dans la suite, les dispositifs visqueux ne seront plus représentés afin de faciliter les figures et les simulations.

Commençons par simuler les déplacements et les vitesses des nœuds d'un floe contenant  $n$  nœuds. De manière semblable aux sections précédentes, la loi de comportement du système est la

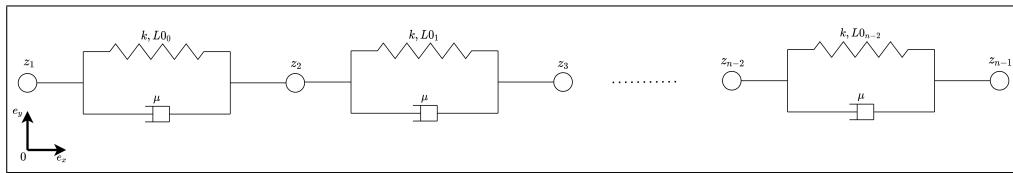
6. Le coefficient de restitution n'est pas forcément le même que celui utilisé dans [Rab15], qui lui était macroscopique.

7. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour la deuxième phase de la percussion.

8. Pour une raison inexpliquée, l'approche par déplacement ici ne conserve pas les positions à l'équilibre des ressorts.



**FIGURE 3.13** – Un résultat obtenu avec le premier modèle pour la percussion avec deux floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [Percussion-Solver.py](#)), et la simulation correspondante à travers [ce lien](#).



**FIGURE 3.14** – Modélisation d'un floe 1D comme un assemblage de  $n$  masses reliées par des ressorts et des dispositifs visqueux. Nous nous servons dorénavant des positions  $z$  des nœuds dans le repère absolu.  $k$  est la constante de raideur uniforme de tous ces ressorts, et  $\mu$  le coefficient de dissipation (ou viscosité) pour tous les dispositifs visqueux. Aussi, le terme  $L0_i$  désigne la longueur à vide du ressort  $i$ .

suivante :

$$\begin{cases} m\ddot{z}_0 = k(z_1 - z_0 - L0_0) + \mu(\dot{z}_1 - \dot{z}_0), \\ m\ddot{z}_1 = k(z_2 - z_1 - L0_1) + \mu(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k(z_1 - z_0 - L0_0) - \mu(\dot{z}_1 - \dot{z}_0), \\ \vdots \\ m\ddot{z}_{n-1} = k(z_{n-1} - z_{n-1} - L0_{n-2}) + \mu(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1}). \end{cases} \quad (3.28)$$

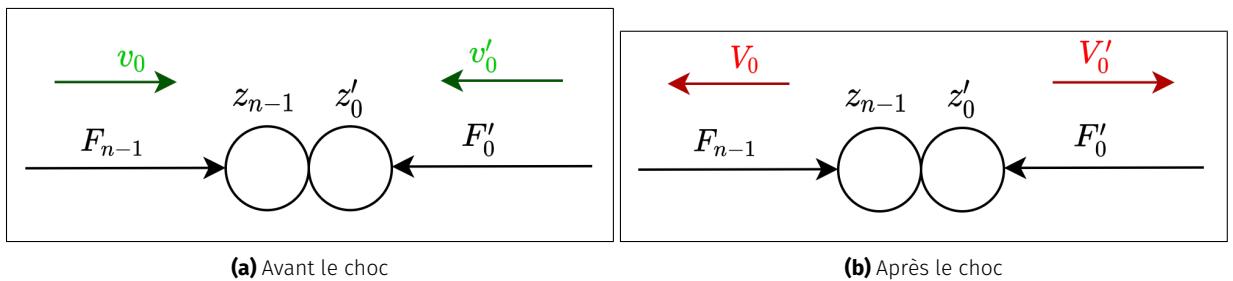
Pour résoudre ce système, nous le posons sous forme matricielle, et nous le transformons en un système d'EDO du premier ordre. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{z}_1 \\ \vdots \\ \ddot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ B & C \end{pmatrix}}_{2n \times 2n} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{(2n) \times (2n-2)} \begin{pmatrix} L_{00} \\ L_{01} \\ \vdots \\ L_{0,n-2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

où  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n$ ;  $B$  et  $C$  des matrices de taille  $n \times n$ ; et  $D$  une matrice de taille  $(n) \times (n-1)$ . On a :

$$B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & k & & \\ k & -2k & k & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & k & -2k & k \\ & & k & -k \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -\mu & \mu & & \\ \mu & -2\mu & \mu & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mu & -2\mu & \mu \\ & & \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & -k & & \\ k & -k & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & -k & \\ & & & k \end{pmatrix}.$$

Concernant la percussion<sup>9</sup>, nous proposons ici une approche différente pour calculer les vitesses des nœuds après choc. En effet, nous appliquons non pas le principe de la conservation de la quantité de mouvement, mais celui de la conservation de l'énergie cinétique. Ce choix provient du fait que dans ce modèle, les deux nœuds en contact ne forment pas un système isolé. En effet, les deux nœuds sont affectés par les forces des ressorts et des dispositifs visqueux qui leur sont rattachés (et le bilan de ces forces n'est pas forcément nul). De plus, ces forces ont un travail non nul et ne sont donc pas conservatives (voir figure 3.15).



**FIGURE 3.15** – Situation avant et après la percussion de deux floes. Nous considérons ici que le floe de gauche dans la percussion possède  $n$  nœuds. Les forces appliquées par les floes voisins aux nœuds en contact sont :  $F_{n-1} = k(z_{n-1} - z_{n-1} - L_{0,n-2}) + \mu(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})$ , et  $F'_0 = k'(z'_1 - z'_0 - L_{0,0}') + \mu(\dot{z}'_1 - \dot{z}'_0)$ , conformément à l'équation (3.28).

9. Tout comme dans les sections précédentes, nous réservons l'exposant "prime" ('') pour décrire les paramètres du deuxième floe de glace (celui de droite).

Nous appliquons donc la conservation de l'énergie cinétique pour obtenir une équation pour les vitesses après choc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m'(v'_0)^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}m'(V'_0)^2. \quad (3.30)$$

Nous maintenons l'équation de restitution (3.26) utilisée dans les sections précédentes :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (3.31)$$

La résolution du système ci-haut nous permet d'obtenir les vitesses  $V_0$  et  $V'_0$  respectivement pour les nœuds de gauche et de droite dans la collision <sup>10</sup> :

$$V_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad V'_0 = V_0 + X, \quad (3.32)$$

avec :

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon(v_0 - v'_0), \\ Y &= m(v_0)^2 + m'(v'_0)^2, \\ a &= m + m', \\ b &= -2m'X, \\ c &= m'X^2 - Y, \\ \Delta &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Pour tester ce modèle, nous effectuons des simulations avec trois nœuds ayant 7, 5 et 5 nœuds respectivement. Nous étudions aussi la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique totale <sup>11</sup> et nous obtenons les résultats présentés à la figure 3.16.

Bien que ce modèle conserve l'énergie mécanique du système (voir figure 3.16), nous nous rendons compte qu'il présente plusieurs manquements ; en particulier que la conservation de l'énergie cinétique entre en opposition directe avec la notion d'élasticité au rebondissement (traduite par le coefficient de restitution  $\varepsilon$ ). C'est pour résoudre ces problèmes que nous avons développé un troisième modèle pour la percussion 1D.

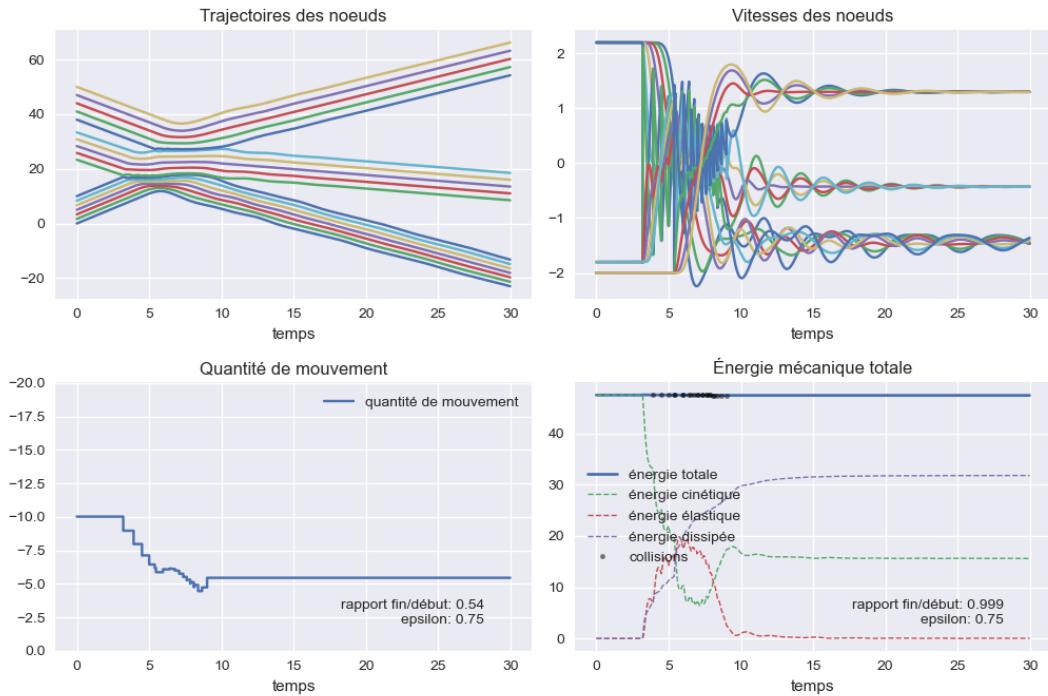
### 3.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses

Ce modèle a été développé pour aborder la question de non-conservation de l'énergie mécanique totale après la collision. Il prend plus au sérieux la question du passage macro/micro. Cela dit, les équations qui régissent les trajectoires des nœuds (voir équation (3.29)) de chaque floe en collision sont maintenues. La différence avec le modèle présenté dans la section 3.2.4 précédente apparaît au niveau du calcul des vitesses après choc.

Rappelons que le modèle macroscopique a été développé par M. Rabaté, S. Labbé, et J. Weiss [RLW15] et nous l'avons présenté avec détails à travers un résumé de la thèse de M. Rabaté [Rab15] dans la section 2.2. Le modèle qui y est développé considère un morceau de glace comme un solide indéformable et le système perd de l'énergie mécanique à travers le coefficient de restitution macroscopique  $\varepsilon$ . Dans le modèle microscopique que nous développons ici, les floes sont des solides élastiques (système masse-ressort-dispositif visqueux) et le problème est de trouver à quelle perte d'énergie le  $\varepsilon$  correspondrait lorsque deux nœuds de deux floes entrent en collision. Autrement

10. Notons que tous les nœuds qui ne sont pas en contact conservent leurs vitesses pendant le choc.

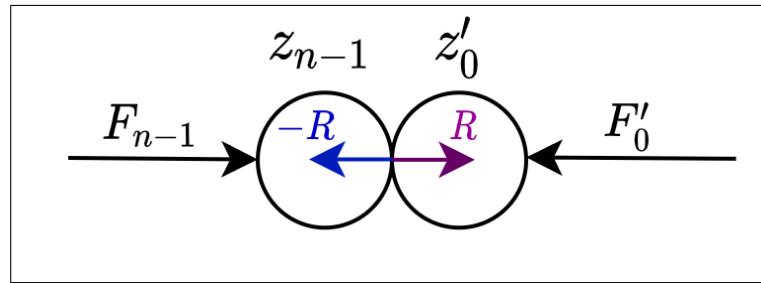
11. Somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle élastique, et de l'énergie dissipée par frottements visqueux.



**FIGURE 3.16** – Un résultat obtenu avec le deuxième modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [Fracture-Solver.py](#)), et la simulation correspondante à travers [ce lien](#).

dit, il faudrait trouver une correspondance entre les coefficients de restitution macroscopiques et microscopiques.

Notre système de deux nœuds, pendant la collision, perd donc de l'énergie. L'absence de forces de frottements<sup>12</sup> veut dire que l'énergie mécanique est transformée en énergie interne (thermique, vibratoire, etc.). Les figures 3.15 et 3.17 permettent de mieux appréhender la percussion dans ce cas.



**FIGURE 3.17** – Situation durant la percussion de deux floes. Nous observons ici la force  $R$  exercée par chaque nœud sur l'autre, qui suit la loi de l'action et de la réaction. Les forces  $F_{n-1}$  et  $F'_0$  sont appliquées aux nœuds par les ressorts et les dispositifs visqueux rattachés (non représentés ici).

Pour calculer les vitesses des nœuds après choc, nous reconsiderons équation (3.26) qui introduit le coefficient de restitution de Newton :

$$V_0 - V'_0 = -\varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (3.33)$$

12. Dans le modèle actuel, les frottements de l'air et de la mer ne sont pas pris en compte.

Pour trouver une deuxième équation et obtenir les vitesses des nœuds, nous nous tournons vers une technique fréquemment utilisée dans l'industrie du jeu vidéo [Hec97] pour gérer les collisions d'objets. Dans cette technique, nous considérons que la collision se produit entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . Cet intervalle de temps, très court, fut calculé durant les travaux de M. Rabatel [Rab15, p.87] sur la collision rigide entre deux floes. On a :

$$m\ddot{z}_{n-1} = F_{n-1} - R, \text{ et } m'z'_0 = F'_0 + R.$$

Après avoir intégré ces équations tout en supposant que les forces  $F_{n-1}$  et  $F'_0$  restent constantes<sup>13</sup> entre  $t^-$  et  $t^+$ , nous posons :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} R dt, \quad J = \int_{t^-}^{t^+} F_{n-1} dt = F_{n-1} \Delta t, \text{ et } K = \int_{t^-}^{t^+} F'_0 dt = F'_0 \Delta t.$$

On obtient donc deux équations supplémentaires pour former le système d'équations (3.33) à (3.35).

$$V_0 = v_0 + \frac{J - I}{m}, \tag{3.34}$$

$$V'_0 = v'_0 + \frac{K + I}{m'}. \tag{3.35}$$

Le calcul de la quantité  $I$  permet donc d'achever la résolution de ce système. À cet effet, nous obtenons :

$$I = \frac{(v_0 - v'_0)(1 + \varepsilon) + \frac{J}{m} - \frac{K}{m'}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}}. \tag{3.36}$$

Pour tester ce modèle, nous avons effectué la même simulation qu'avec le modèle précédent. Rappelons que la seule différence entre ces deux modèles est le traitement des vitesses après contact. Les résultats sont donc résumés à la figure 3.18 :

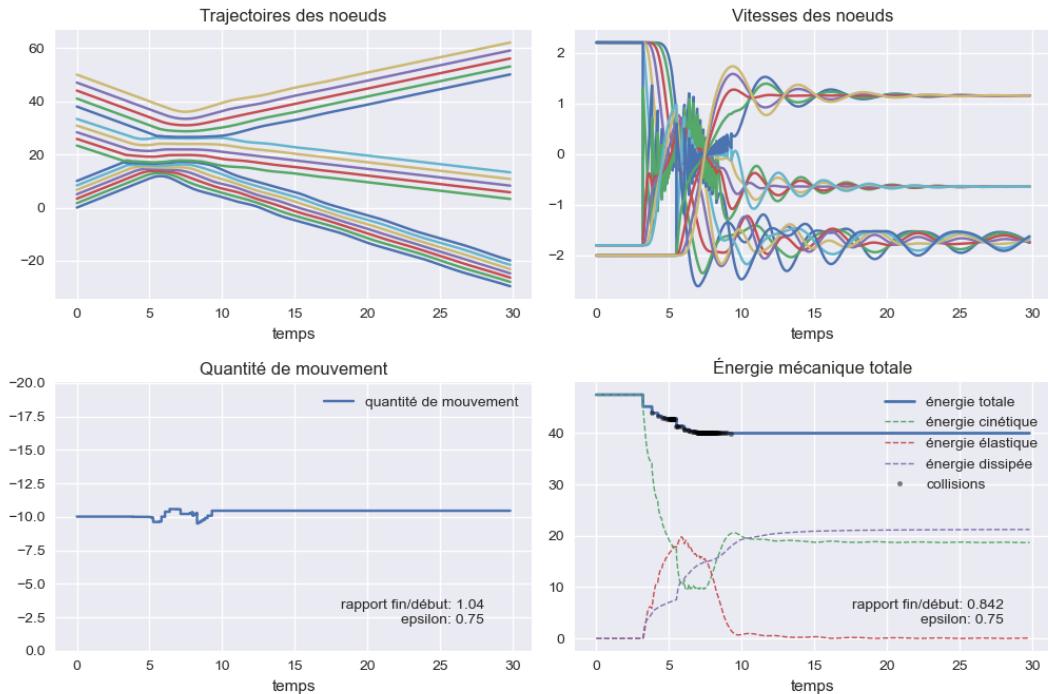
Nous observons effectivement qu'il y a diminution de l'énergie totale à chaque collision. Cependant, il reste à savoir si cette perte d'énergie au niveau microscopique correspond à la perte observée au niveau macroscopique (passage micro/macro), surtout lorsque surviennent des fractures dans les floes.

### 3.3 Modélisation de la fracture

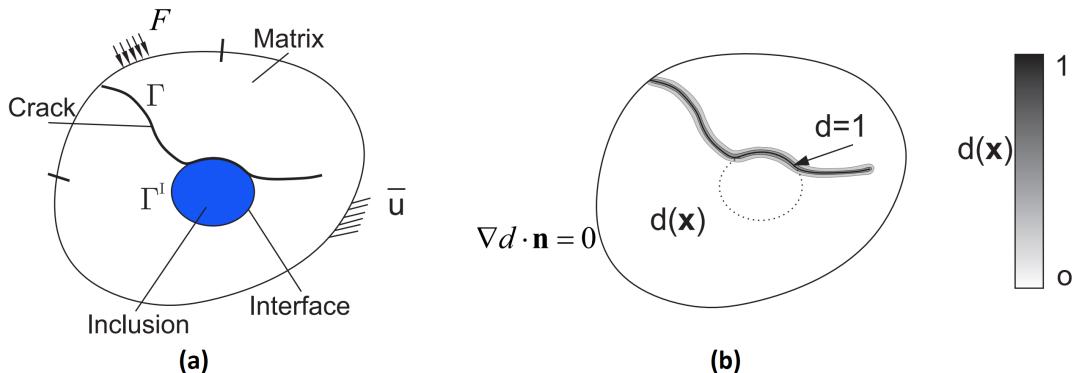
#### 3.3.1 Méthode du champ de phase

La nécessité de prédire les fractures dans les matériaux industriels gagne en importance chaque année. En mécanique des sciences computationnelles, la Virtual Crack Closure Technique (VCCT), la Extended Finite Element Method (X-FEM), la Cohesive Zone Method (CZM), et d'autres techniques de fractures discrètes représentent la faille comme une entité discontinue à partir de laquelle la variable d'intérêt est obtenue. Ces méthodes demandent non seulement des re-maillages plus fins, mais aussi des algorithmes robustes. Ceci est numériquement couteux, particulièrement lorsque les fractures ont des géométries complexes.

13. En effet, la durée de la percussion est négligeable à l'échelle des temps de simulation.



**FIGURE 3.18** – Un résultat obtenu avec le troisième modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [Fracture-Solver.py](#)), et la simulation correspondante à travers [ce lien](#).



**FIGURE 3.19** – Représentation régularisée d'une fissure et d'une interface pour la méthode du champ de phase issue de [Yvo+18] : (a) solide contenant une interface et une fissure, la fissure pouvant passer par l'interface ; (b) représentation régularisée d'une interface.

L'approche par champ de phase (voir figure 3.19) est née des travaux de Francfort et Marigo [FM98], et de leur régularisation par Bourdin de al. [BFM08]. Rappelons que l'approche variationnelle développée dans ces derniers travaux consiste à formuler le problème de fissuration comme un problème de minimisation de l'énergie du solide fissuré, exprimée comme :

$$E = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{u}, \Gamma) d\Omega + G_c \int_{\Gamma} d\Gamma, \quad (3.37)$$

où  $\Psi(\mathbf{u}, \Gamma)$  est une fonction densité d'énergie dépendant du champ de déplacements et de la répartition des fissures, notées collectivement  $\Gamma$ , et  $G_c$  est la ténacité du matériau. Cette approche conduit à une implémentation numérique élégante où les complexités dues aux fractures discrètes sont éliminées. Pour éviter ladite difficulté, une approche régularisée de la description des discontinuités

associées aux fissures consiste à remplacer la fonctionnelle originale par une fonctionnelle approchée (voir [Yvo+18]). Dans ce cadre, les fissures ne sont plus décrites par des surfaces mais par un champ de phase endommagé  $d(\mathbf{x})$ . L'énergie est alors exprimée par :

$$E = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{u}, \Gamma) d\Omega + G_c \int_{\Gamma} \gamma(d, \nabla d) d\Gamma, \quad (3.38)$$

où  $\gamma$  est une fonction décrivant la densité de fissures. Introduisons une discréttisation en temps  $T = \{t^0, t^1, \dots, t^n, t^{n+1}, \dots, t^N\}$ . À chaque pas de temps  $t^{n+1}$ , le problème consiste à déterminer le champ de déplacements  $\mathbf{u}^{n+1}$  et le champ de phase endommagé  $d^{n+1}$  tels que :

$$\mathbf{u}^{n+1}, d^{n+1} = \underset{\mathbf{u} \in \mathcal{K}_A, 0 \leq d^n \leq d^{n+1}}{\operatorname{argmin}} E, \quad (3.39)$$

où  $\mathcal{K}_A$  est un champ de déplacement cinématiquement admissible. Un exemple de densité de fissure pour un modèle de premier ordre est donné par :

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} \nabla d \cdot \nabla d,$$

où  $l$  est un paramètre de régularisation des discontinuités de fissures. Une fonction d'histoire est introduite pour décrire les effets d'histoire, et des possibles chargements et déchargements [MHW10] :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \Psi^+(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.40)$$

Dans équation (3.40),  $\Psi^+$  est la partie positive de la fonction densité d'énergie élastique telle que  $\Psi(\varepsilon) = \Psi^+(\varepsilon) + \Psi^-(\varepsilon)$  et est définie par :

$$\Psi^+(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2} (\langle \operatorname{tr}(\varepsilon) \rangle_+)^2 + \mu \operatorname{tr}\{(\varepsilon^+)^2\}, \quad (3.41)$$

où  $\varepsilon$  est le tenseur des déformations linéarisé.  $\langle x \rangle_{\pm} = (x \pm |x|)/2$  et  $\varepsilon^{\pm}$  sont les parties positives et négatives du tenseur des déformations. Nous posons à présent  $g_c$  le taux de libération critique de l'énergie de type Griffith [MHW10, p.5],  $\mathbf{f}$  un vecteur de forces de volumes,  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{\mathbf{F}}$  les déplacements et efforts imposés sur les bords associés  $\partial\Omega_u$  et  $\partial\Omega_F$  (voir figure 3.19). Nous écrivons enfin la loi de comportement comme :

$$\sigma = ((1-d)^2 + k) \left\{ \lambda \langle \operatorname{tr}(\varepsilon) \rangle_+ \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon^+ \right\} + \lambda \langle \operatorname{tr}(\varepsilon) \rangle_- \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon^-, \quad (3.42)$$

ce qui nous permet d'obtenir le problème couplé sous sa formulation forte pour déterminer  $d(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  :

$$\begin{cases} 2(1-d)\mathcal{H} - \frac{g_c}{l} \{d - l^2 \Delta d\} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ d(\mathbf{x}) = 1 & \text{sur } \Gamma, \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.43)$$

et :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, d) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } \partial\Omega_u, \\ \sigma \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}} & \text{sur } \partial\Omega_F. \end{cases} \quad (3.44)$$

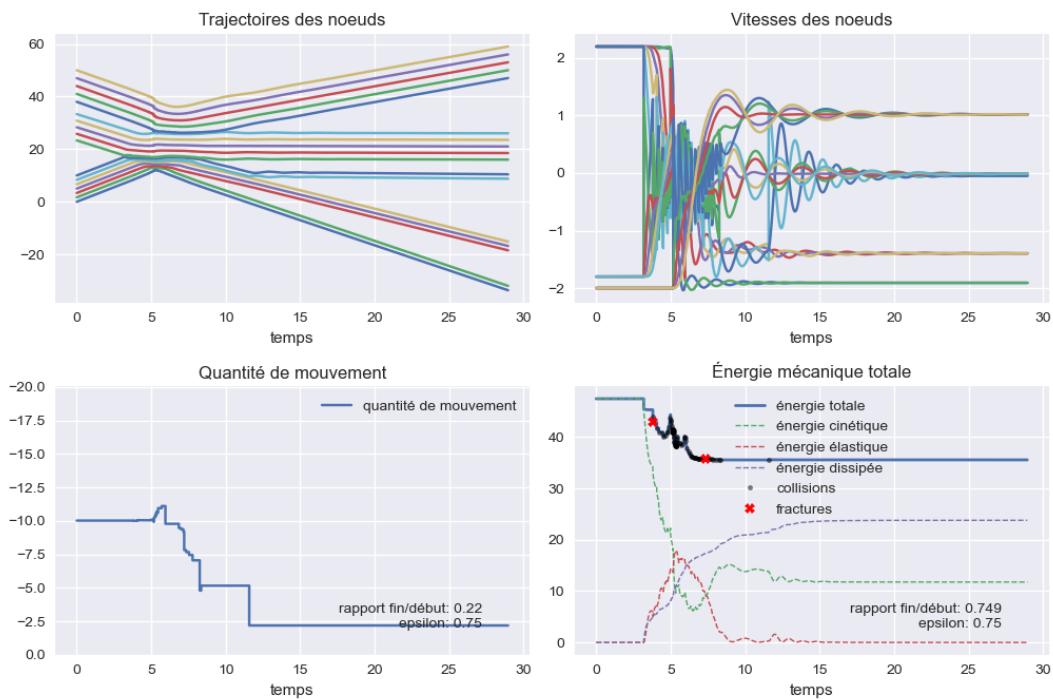
Quelques résultats obtenus par cette méthode ont été présentés dans les travaux de D. Balasoiu à la figure 2.9. Malgré l'efficacité de cette méthode, notre travail à son sujet durant ce stage s'est limité à son assimilation. En effet, nous ne l'avons pas implémenté pour faute de temps. Il se trouve qu'en 1D avec un faible nombre de noeuds, une astuce alternative est envisageable.

### 3.3.2 Une approche combinatoire pour la fracture

Étant donné le déplacement des noeuds du floe à un temps précis  $t^{n+1}$ , nous recherchons la fracture qui minimise l'énergie potentielle totale au temps  $t^{n+1}$  :

$$\boxed{E^{n+1} = \text{énergie potentielle élastique au temps } t^{n+1} + \text{ténacité} \times \text{longueur de la fracture envisagée au temps } t^{n+1}.} \quad (3.45)$$

La longueur de la fracture correspondant ici à la longueur à vide du ressort<sup>14</sup> à cette position si celui-ci s'était brisé. Notons que nous pouvons remplacer l'énergie potentielle élastique dans l'équation (3.45) par l'énergie de déformation du matériau (énergie potentielle élastique + énergie dissipée par frottements visqueux). Notre approche combinatoire consiste ainsi à calculer les énergies correspondant à toutes les fractures possibles dans le floe, et nous récupérons la plus petite de ces énergies  $E_{\min}^{n+1}$ . Conformément à l'approche de Griffith, une fracture n'apparaît que si  $E_{\min}^{n+1} \leq E_{\min}^n$  (voir figure 3.20).



**FIGURE 3.20** – Un résultat obtenu par l'approche combinatoire pour la fracture avec trois floes. Les données de cette étude sont les mêmes que celles des figures 3.16 et 3.18, en plus de la définition de la ténacité des floes. Elles peuvent être récupérées dans le dépôt GitHub (voir [FractureSolver.py](#)), et la simulation correspondante à travers [ce lien](#).

L'approche combinatoire n'est sérieusement envisageable qu'en 1D car à chaque pas de temps, il y a autant de fractures admissibles qu'il y a de ressorts<sup>15</sup>. En effet, à chaque ressort brisé, c'est un

14. Nous utiliserons la désignation *ressort* ici pour indiquer à la fois le ressort et le dispositif visqueux situé entre deux noeuds adjacents.

15. En réalité, les deux ressorts extrêmes ne peuvent se briser, car cela donnerait naissance à des floes sans ressorts.

nouveau floe qui est créé, ce qui simplifie considérablement le travail ; alors qu'en 2D, il aurait fallu étudier bien plus de combinaisons. Cette implication élimine en outre le problème de *propagation de la fracture* ; en 1D, nous ne traiterons donc que le problème de *nucléation de la fracture*. Tous ceci n'est évidemment pas le cas en dimension supérieur, et nous devons étudier toutes les combinaisons possibles de ressorts qui cèdent simultanément ; ce qui est très couteux. Il est donc primordial d'implémenter la méthode du champ de phase pour toute adaptation de nos résultats en dimension 2 ou 3.

### 3.4 Algorithme de calcul 1D

Nous présentons dans cette section l'algorithme que nous avons adopté pour développer notre code de simulation de la percussion ainsi que la fracture de floes 1D. Notons que l'implémentation de la percussion correspond au modèle présenté à la section 3.2.5. Cependant, les autres modèles de percussion peuvent facilement être obtenus en changeant le contenu de la fonction `computeAtContact` dans la classe `Fracture`. Quant à la fracture, nous avons implémenté l'approche combinatoire présentée à la section 3.3.2 à l'aide d'un algorithme *event-driven*. Un résumé de la procédure dans l'intervalle de temps  $[t^n, t^N]$  est présenté à l'algorithme 1.

Notons que l'algorithme 1 omet plusieurs détails indispensables pour une implémentation efficace en langage Python. Par exemple, l'invalidation des quantités est prise en main par les fonctions de détection des collisions et de fracture. Nous fournissons donc la méthode `runSimulation()` de la classe `Fracture` (voir listing 3.1). Notre code est stocké dans un dépôt [GitHub](#) privé dont une explication du contenu est donnée dans le fichier README dont la capture est présentée à la figure 3.21. Nous avons effectué plusieurs simulations avec ce code. En particulier, nous avons observé que les ressorts des floes se fracturent quand ils sont soumis soit à une compression ou à une élongation intense. Nous pouvons observer cela sur [cette simulation](#) fournie à titre d'exemple.

```
def runSimulation(self):
    """
    Runs the simulation for the complete fracture problem
    """

    ## Run uniform mouvement phase up to the first collision
    self.computeBeforeContact()

    for key in self.floes.keys():
        self.checkFracFrom[key] = self.t.size

    while self.t.size <= self.NBef + self.NAft and max(self.collCount.values()) < 1000:

        self.computeAfterContact()

        ## (Potential) fracture detection
        floeDict = deepcopy(self.floes)
        for floe in floeDict.values():
            self.checkFracture(floe.id)

        ## Collision detection
        for floe in self.floes.values():
            for node in floe.nodes:
                res = self.checkCollision(node.id, node.rightNode)

        ## Assign the same value to all keys to check collision from now on
        smallestCheckCollFrom = min(self.checkCollFrom.values())
        for key in self.checkCollFrom.keys():
            self.checkCollFrom[key] = smallestCheckCollFrom
        self.collLoc.append(smallestCheckCollFrom)

        ## Assign the same value to all keys tp check fracture from now on
        smallestCheckFracFrom = min(self.checkFracFrom.values())
```

```

for key in self.checkFracFrom.keys():
    self.checkFracFrom[key] = min([smallestCheckFracFrom, smallestCheckCollFrom])

## Truncate exceeding data (not strictly necessary)
self.x = self.x[:self.NBef+self.NAft+2, :]
self.v = self.v[:self.NBef+self.NAft+2, :]
self.t = self.t[:self.NBef+self.NAft+2]

```

**Listing 3.1** – Code de simulation 1D.

README.md

## Fracture of ice floes by percussion in a granular model

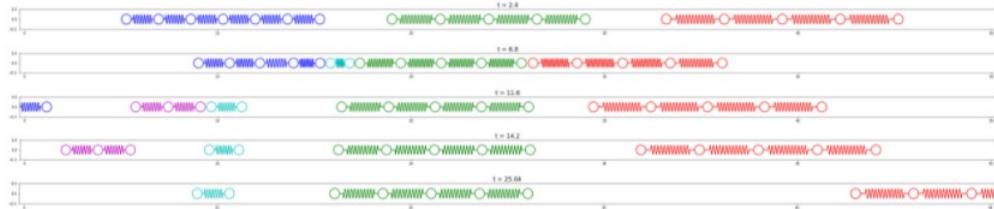
This repository contains files used and developed for the percussion and the fracture of an ice floe (viewed as mass-spring-damper system in 1D and in 2D), following the Griffith model. This repository was created for the purpose of a Master's level internship at the Jacques Louis-Lions Laboratory.

### Structure

- docs contains useful information to understand the problem at hand. The most important files here are the two theses: Rabaté (2015), and Balasoiu (2020).
- reports contains weekly reports during the internship, and the final report.
- slides contains a presentation for the Master thesis defense.
- pdfs contains the PDF files (final report and slides) submitted for thesis defense.
- code contains the 1D and 2D code that was developed. To launch a 1D simulation, adjusts parameters and run the Python scripts `Percussion1D-CLI.py` and `Fracture1D-CLI.py` (this latter script also deals with Percussion). Jupyter notebooks are also available to test specific aspects of the problem.

### Screenshots

A few results from simulations are available through [this link](#).



### Resources

All the classic scientific computing libraries (Numpy, Scipy, etc.) will have to be installed to run the scripts. Additionally, one might need:

- Bokeh for interactive plotting in Notebooks.
- PILImage for exporting simulation results as gifs.

**FIGURE 3.21** – Apperçu du dépôt principal `ice-floes` utilisé durant le stage.

**Algorithme 1 :** Algorithme de simulation de percussion et de fracture

**Données :** Les positions  $\mathbf{q}^n$ , les vitesses  $\mathbf{v}^n$  de tous les noeuds de tous les floes à l'instant  $t^n$  sont connus<sup>a</sup>; Mettre à jours les chargements aux bords au temps courant  $t^{n+1}$ ; Pour chaque noeud  $e$ , début des vérifications de collision à partir de  $Coll_e = 0$ ; Pour chaque floe  $f$ , une fracture potentielle apparaît au temps  $Frac_f = N$ ;

**Résultat :** Positions et vitesses des noeuds à l'instant  $t^N$ ;

**si**  $n = 0$  (*premier pas de temps*) **alors**

  Calcul des trajectoires des noeuds  $\mathbf{q}^{n+1}, \dots, \mathbf{q}^N$  et des vitesses associées  $\mathbf{v}^{n+1}, \dots, \mathbf{v}^N$ ;

  Vérification de l'apparition d'au moins une collision;

**tant que** (*pas de collision*) **faire**

    doubler le temps de simulation;

    recalculer les trajectoires;

    pour tous les noeud  $e$ ,  $Coll_e = k$  ( $k$  est le pas de temps courant);

    revérifier la collision;

**fin**

**fin**

**tant que** ( $Coll_e < N$  pour tous les noeuds  $e$ ) **faire**

  Calcul des déplacements après chocs;

  Détection des fractures : pour chaque pas de temps  $t^k \in [t^{n+1}, t^N]$  et pour chaque floe, rechercher la configuration qui présente l'énergie potentielle totale minimale  $E_{min}^k$  et la comparer avec l'énergie  $E_{min}^n$ ;

**si** (*fracture sur le floe f, i.e.  $E_{min}^k \leq E_{min}^n$* ) **alors**

$Frac_f = k$ ;

**sinon**

$Frac_f = N$ ;

**fin**

  Détection des collisions : pour chaque pas de temps  $t^k \in [t^{n+1}, t^N]$  et pour chaque noeud, on se demande s'il y a collision avec le noeud voisin de droite;

**si** (*collision entre  $e_1$  et  $e_2$* ) **alors**

$Coll_{e_1} = Coll_{e_2} = k$ ;

**sinon**

$Coll_{e_1} = Coll_{e_2} = N$ ;

**fin**

  Mise à jour des indices potentiels de fracture : tous ces indices sont réinitialisés au minimum de tous les indices de fracture  $Frac = \min_{f \in \mathcal{F}} Frac_f$ , où  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble des floes;

  Mise à jour des indices potentiels de collision : désignons par  $Coll'$  le minimum de tous les indices de collisions  $\min_{e \in \mathcal{E}} Coll_e$ , où  $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des noeuds du problème. Tous les indices sont réinitialisés à  $Coll = \min\{Coll', Frac\}$ .

  Invalidation des quantités : toutes les positions et les vitesses calculées qui surviennent après une collision ou une fracture sont invalidées (cependant, les nouveaux calculs ne débutent qu'à partir de  $Coll$ ).

**fin**

a. Pour simplifier nos calculs, aucun chargement n'est imposé aux bords du floe; nous avons des conditions de Neumann durant toutes nos simulations.

## 3.5 Résumé des résultats obtenus

Pour le problème 1D, nous avons non seulement étudié le déplacement des noeuds d'un floe, mais aussi ce qui se passe après une collision de ces noeuds. En considérant le floe comme un réseau de ressorts, nous avons pu étudier la nucléation (et la propagation) d'une fracture suivant le modèle de Griffith sans recourir à la méthode du champ de phase.

Nous avons effectué plusieurs simulations qui ont montré que les ressorts se brisent lorsqu'ils sont fortement compressés ou étirés. Le modèle 1D final (voir section 3.2.5) a également montré que le système perd de son énergie (cinétique) au cours du temps, ce qui est consistant avec notre notion de coefficient de restitution de Newton.

Quant à la validation des résultats, nous n'avons pas réussi à effectuer des tests en laboratoire. Cette tâche représente la prochaine étape avant l'adoption de ce modèle 1D. Ceci dit, les floes de glace sont généralement considérés comme des objets 2D du fait de leur taille négligeable face au rayon de la terre. Une étude en dimension supérieure est donc indispensable pour un déploiement de notre modèle de fracture à l'échelle des floes de glace.

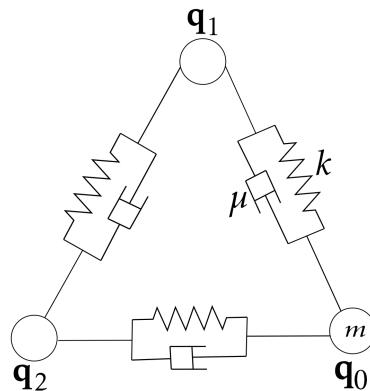
## Chapitre 4

# Problème 2D et percussion des floes

Dans cette section, nous étudierons le floe de glace en deux dimensions (2D). Nous reprendrons le même cheminement qu'en 1D. En d'autres termes, nous partirons de l'approche par réseau de ressort introduite par Balasoiu pour modéliser dans un premier temps le déplacement d'un floe de glace contenant juste trois nœuds (masses) ; ensuite nous modéliserons la percussion inélastique sans rebond des nœuds après choc.

### 4.1 Développement d'un modèle de déplacement des nœuds

Étudions le comportement d'un floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts (3 ressort, 3 dispositifs viseux, et 3 nœuds) (voir figure 4.1).



**FIGURE 4.1** – Floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Tous les nœuds du réseau ont la même masse  $m$ , tous les ressorts ont la même raideur  $k$ , et tous les dispositifs visqueux ont la même viscosité  $\mu$ .

Comme nous l'avons présenté aux équations (4.4) et (E), le système de la figure 4.1 est régi par l'équation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} [k(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij})\mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij}], \quad (4.1)$$

où  $L_{ij}$  représente la longueur au repos du ressort entre les nœuds  $i$  et  $j$ , et  $C_{ij}$  indique si les nœuds  $i$  et  $j$  sont connectés ou non (pour ce modèle 2D simple,  $C_{ij} = 1 \forall 0 \leq i, j \leq 2$ ). Le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{ij}$

vaut :

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

**Simulation par un schéma d'Euler explicite.** On discrétise par un schéma de différences finies avec  $N + 1$  pas de temps, et pour un temps de simulations  $T$  :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall n \in [[0, N]], \quad t^n = n\Delta t = n\frac{T}{N}, \quad \mathbf{q}_i(t^n) \approx \mathbf{q}_i^n.$$

L'équation (4.1) devient :

$$m \frac{\mathbf{q}_i^{n+1} - 2\mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k(\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left( \frac{\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{u}_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} \right],$$

soit encore :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k(\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right]. \quad (4.2)$$

La simulation de ce modèle par un schéma d'Euler explicite à pas constant sur un intervalle de temps faible ( $T = 4$ ) est présentée à la figure 4.2, ainsi que les positions des noeuds au début et à la fin de la simulation. La simulation à la figure 4.3 permet d'observer le problème avec ce même schéma à quelques différences près (i.e.  $T = 10$ ).

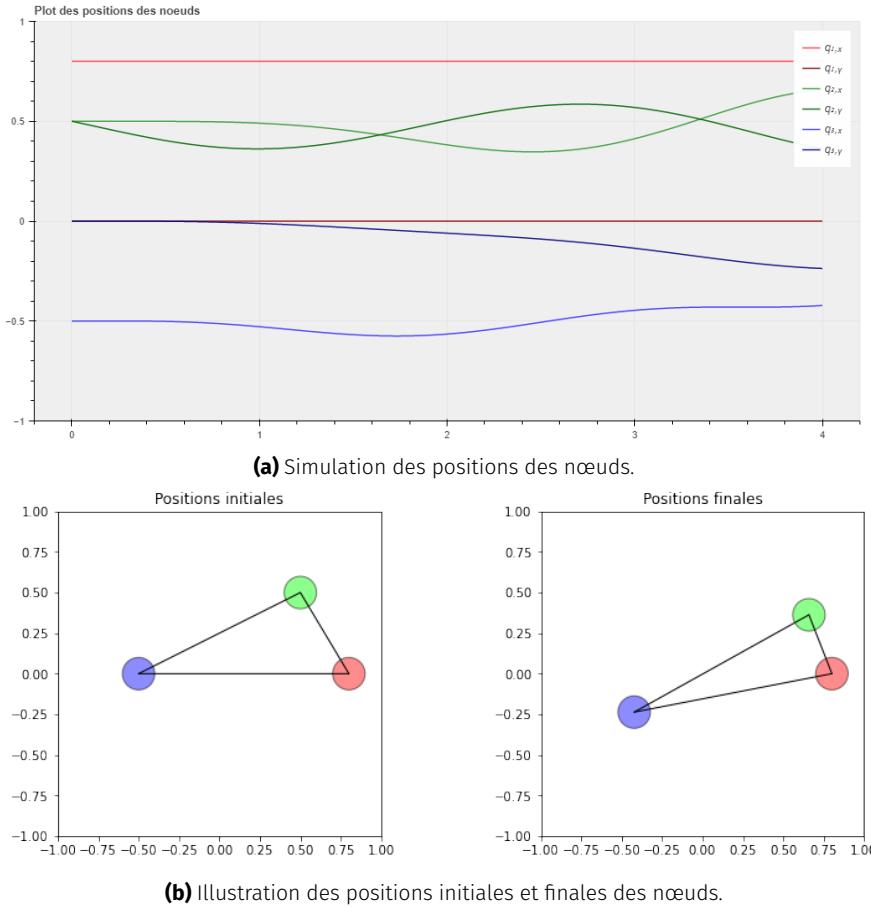
Les figures 4.2 et 4.3 sembleraient indiquer que le schéma d'Euler explicite (peu importe son pas de temps), n'est pas adapté à ce problème. On se pose également la question de savoir si la non-stabilité est due au schéma utilisé. En réalité, Balasoiu [Bal20] a effectué des simulations similaires avec un schéma symplectique et a aussi dû fixer certains noeuds pour avoir la stabilité. Nous étudierons donc d'autres alternatives.

**Simulation à l'aide des fonctions de la librairie Scipy.** À travers ses fonction telle que `odeint` et `solve_ivp`, Scipy offre une solution robuste et élégante pour simuler les systèmes d'ODE de la forme  $\dot{Y} = AY$ . Avec Scipy, nous résolvons numériquement nos EDO à l'ordre RK45. Autrement dit, l'erreur est contrôlée par un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4, et les pas de temps sont pris à l'ordre 5.

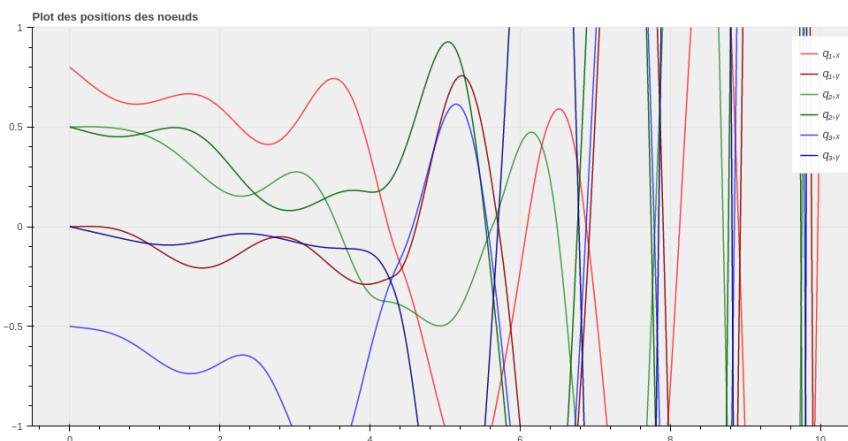
## 4.2 Développement d'un modèle de percussion des floes

### 4.2.1 Présentation des travaux antérieurs

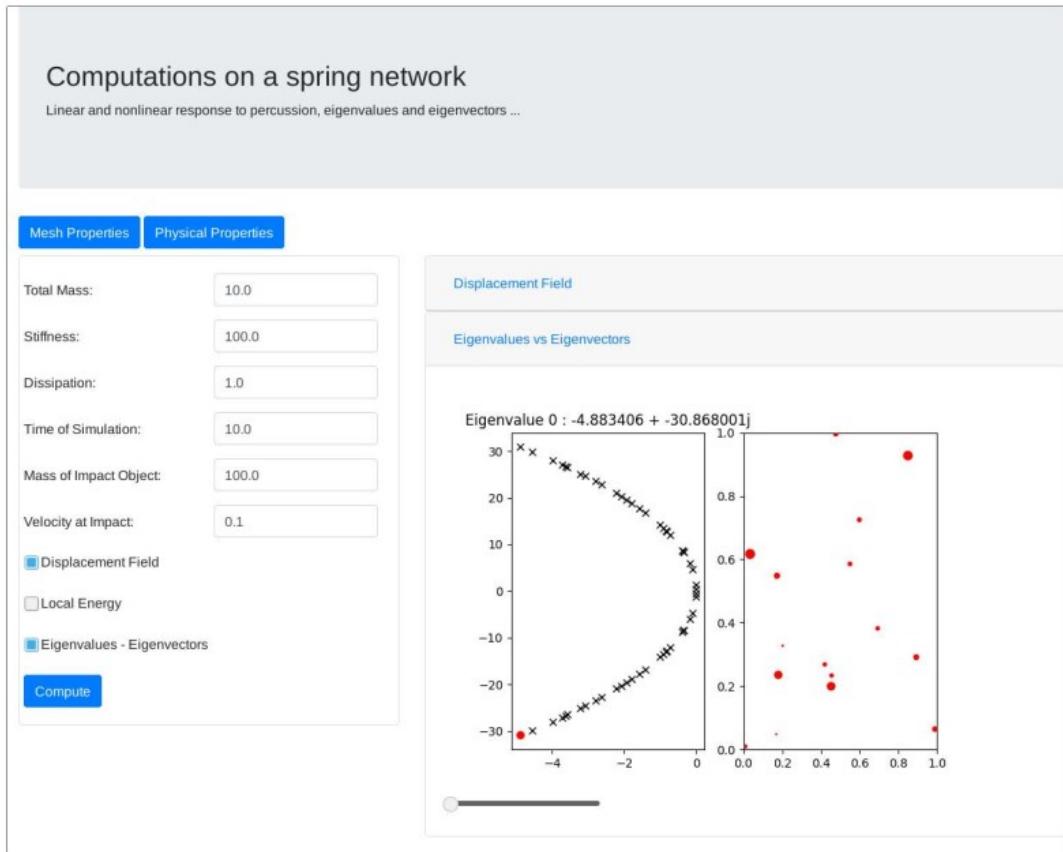
Les travaux antérieures sur le problème 2D ont été présentés dans la chapitre 2. Particulièrement, nous avons adopté et améliorer des résultats obtenus par D. Balasoiu [Bal20]. Ces résultats concernent la simulation du comportement d'un floe de glace une fois percuté par un objet ponctuel; et ont été présentés à la section 2.3.6 (voir aussi figure 4.4 pour un client web pour interagir avec le programme). Avec cela, nous espérons avoir suffisamment explicité les points sur lesquels nous nous sommes directement inspirés pour notre travail de stage.



**FIGURE 4.2** – Simulation du système 4.2 par un schéma d’Euler explicite avec  $T = 4$  lorsqu’un des nœuds est fixé (le nœud rouge). La couleur rouge représente le nœud  $\mathbf{q}_1$ , le vert le nœud  $\mathbf{q}_2$ , la bleue le  $\mathbf{q}_3$ . Les paramètres utilisés ici sont les suivants :  $m = 6.2$ ,  $k = 23.3$ ,  $\mu = 3$ ; à l’instant initiale, les trois nœuds perturbés avec des vitesses d’intensité respectives  $v_1 = 0.3$ ,  $v_2 = 0.1$ , et  $v_3 = 0.1$ . Par rapport à l’axe des abscisses, ces vitesses sont orientées respectivement de  $\theta_1 = 180^\circ$ ,  $\theta_2 = 270^\circ$ , et  $\theta_3 = 240^\circ$  (voir code/simu2D/Deplacement2D-1.ipynb).



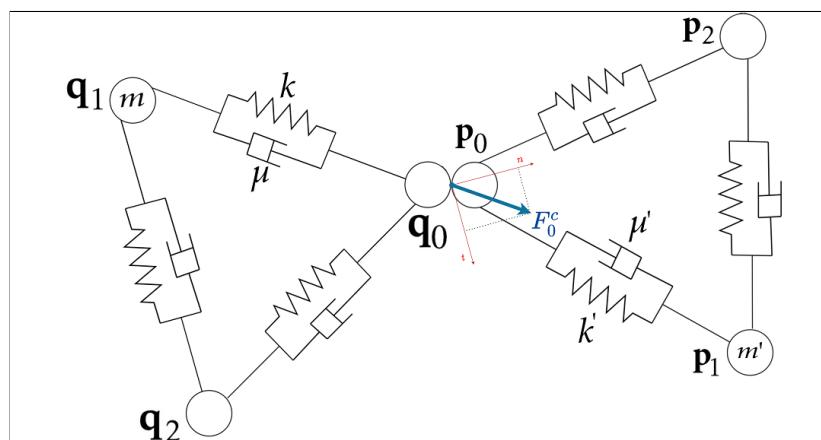
**FIGURE 4.3** – Simulation du système 4.2 par un schéma d’Euler explicite avec  $T = 10$  lorsqu’aucun des nœuds n’est fixé. Cette figure utilise les mêmes paramètres que la figure 4.2. On observe ici une divergence complète du système (voir code/simu2D/Deplacement2D-2.ipynb).



**FIGURE 4.4** – Client web `springslattice-web.py` développé dans [Bal20, p.197].

### 4.2.2 Nouveaux travaux sur la percussion

Les floes de glace  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une modélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliés par des ressorts (de constante de raideur  $k$ ), et par des dispositifs visqueux de constante  $\mu$ . Nous désignerons par  $n$  le nombre total de nœuds du floe  $\Omega_k$ , chaque nœud ayant pour masse  $m$ . De façon similaire, on définit les constantes  $k'$ ,  $\mu'$ ,  $n'$ ,  $m'$  pour le floe  $\Omega_l$ . Les positions des nœuds de  $\Omega_k$  seront notées  $(\mathbf{q}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ , tandis que celles de  $\Omega_l$  seront notées  $(\mathbf{p}_i)_{0 \leq i \leq n'-1}$  (voir figure 4.5).



**FIGURE 4.5** – Contact entre deux floes aux points  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{p}_0$  respectivement.

On définit la longueur du ressort à vide  $L_{0j}$  entre le nœud  $\mathbf{q}_0$  et le nœud  $\mathbf{q}_j$ , et le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{0j}$  (orienté de  $\mathbf{q}_0$  vers  $\mathbf{q}_j$ )<sup>1</sup>. On définit aussi la matrice de connectivité  $C$  :

$$\forall 0 \leq i < j \leq n-1, \quad C_{ij} = C_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{q}_i \text{ est voisin de } \mathbf{q}_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisons le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet percutant dans le système masse-ressorts percuté. Pour dériver le SE sur le floe  $\Omega_k$ , nous écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire<sup>2</sup> au point de contact  $\mathbf{q}_0$  :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (4.3)$$

où :

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^{n-1} C_{0j} \left[ \underbrace{k(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j})\mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (4.4)$$

représente la somme des forces de réaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le nœud  $\mathbf{q}_0$ ; et  $\mathbf{F}_0^c$  la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact  $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  associé au floe  $\Omega_k$  (voir figure 4.5), on peut écrire, pour  $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (4.5)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations équations (4.3) à (4.5). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres nœuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n-1. \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad (E)$$

En ce qui concerne le floe  $\Omega_l$ , nous procédons de façon similaire et appliquons la troisième loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n'-1, \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad (E')$$

où les  $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'-1}$  sont définis de façon similaire à  $\mathbf{F}_0$  (voir équation (4.4)) :

$$\mathbf{F}'_i = \sum_{j=i}^{n'-1} C_{ij} \left[ k'(\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - L'_{ij})\mathbf{u}'_{ij} - \mu' \langle \dot{\mathbf{p}}_j - \dot{\mathbf{p}}_i, \mathbf{u}'_{ij} \rangle \mathbf{u}'_{ij} \right]. \quad (4.6)$$

1. Notons que ces définitions sont naturellement adaptables si nous remplaçons le nœud  $\mathbf{q}_0$  par un nœud  $(\mathbf{q}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ .

2. La rotation du point matériel  $\mathbf{q}_0$  n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

Ensuite, on additionne membre à membre les équations des systèmes extérieurs (SE) des équations ( $E$ ) et ( $E'$ ) pour éliminer la force de contact. On obtient :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0. \quad (4.7)$$

Remarquons que les positions relatives des nœuds  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{p}_0$  restent inchangées durant la collision. A l'instant initial, on note donc  $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0)$ , et  $\dot{\mathbf{q}}_0(0) = \dot{\mathbf{p}}_0(0)$ ; idéalement, nous voudrions que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{q}_0(t) - \mathbf{p}_0(t) = \Delta_0. \quad (4.8)$$

Pour satisfaire cette condition, nous exhibons autant d'équations nécessaires pour que notre problème de percussion soit bien posé. Elles sont :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0, & (\text{SE}) \\ \ddot{\mathbf{p}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0, \quad \dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0 - \Delta_0, & (\text{SE}) \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1. & (\text{SI}) \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n'-1, & (\text{SI}) \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

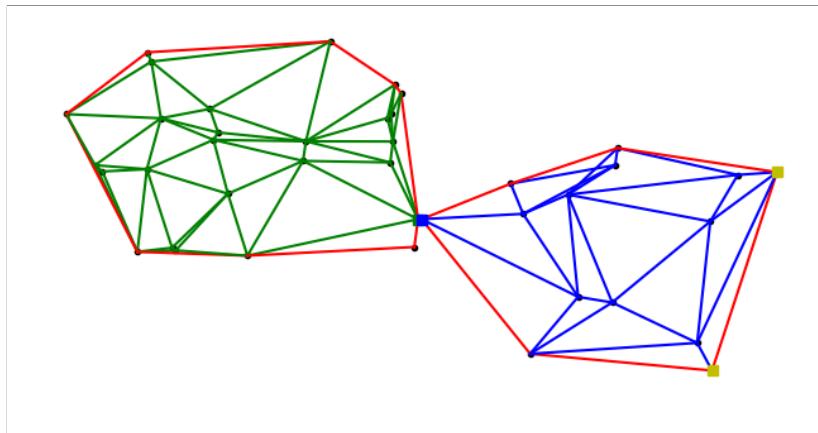
Quant à la visualisation des résultats, nous avons construit une interface web pour interagir avec le programme. À travers ce client, nous pouvons modifier tous les paramètres du problème et lancer des simulations. Un tel exemple se trouve à la figure 4.7, et la simulation correspondante peut être visualisée via [ce lien](#).

## 4.3 Code de calcul 2D

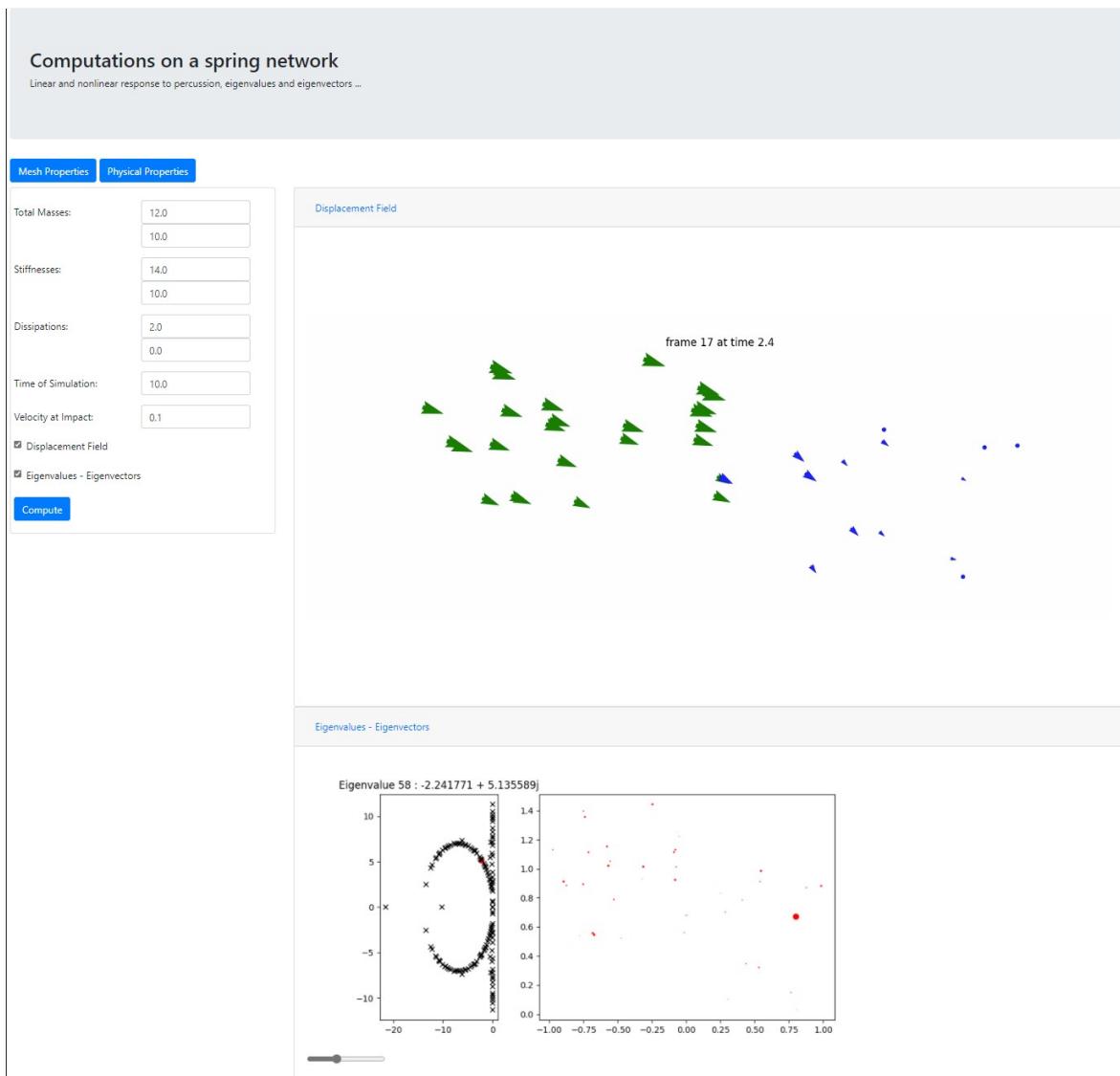
L'algorithme de calcul 2D est largement inspiré des travaux de BALASOIU. En effet, nous avons ajouté des modules Python au package `springslattice` qu'il a développé pour traiter les réseaux de ressorts. Ces nouveaux modules sont :

1. **multimesh** : pour la création d'un réseau de ressort constitué de deux floes de glace en contact, qui nous servira de maillage (voir figure 4.6).
2. **multisolver** : pour la création du solveur 2D suivant l'équation ( $\mathcal{P}$ ) pour simuler les nœuds d'un objet `multimesh`. Une fois les calculs faits dans la fonction `Fhom`, nous les vérifions à l'aide d'un schéma symplectique.
3. **percussion-cli** : pour l'exécution des simulations avec des paramètres donnés en ligne de commande (ou ceux insérer par défaut).
4. **percussion-web** : pour l'exécution des simulations avec des paramètres donnés dans une interface web. Ici, on peut en plus observer les vecteurs et les valeurs propres (toutes négatives) du système (voir figure 4.7).

Nous présentons à la figure 4.8 le fichier README du dépôt `springslattice` sur [Framagit](#) créé par Balasoiu dans ses travaux, et maintenu et amélioré par nous durant ce stage. Tout comme le dépôt principal `ice-floes` sur GitHub, ce dépôt secondaire est privé.



**FIGURE 4.6 –** Exemple de maillage 2D pour la percussion.



**FIGURE 4.7 –** Client web développé durant le stage pour les percussions 2D. Comparativement à la figure 4.4, on constate la présence de plus de champ, surtout ceux pour préciser les paramètres du second floe entrant en collision.

**Readme.md**

This python package is the implementation of the numerical method for the impact simulation of a mass-spring lattice of Poisson-Delaunay type. It also implements head-on collision between two distinct mass-spring lattices.

It uses python3.

---

### Installation commands:

First, your system requires :

- Virtualenv
- Cython
- Tkinter: `sudo apt-get install python3-tk`
- Ffmpeg: `sudo apt install ffmpeg` (for the web interface)

Next, follow these steps:

```
pip install virtualenv
python -m venv venv
source venv/bin/activate
pip install -r requirements.txt
python setup.py build_ext --inplace
```

---

### Use cases

#### Mass-spring lattice behavior

This is the main purpose of the code. The simulations can be done via the cli application :

```
python springslattice-cli.py
```

Or via the web client :

```
python springslattice-web.py
```

#### Percussion between two lattices

Based on the mass-spring behavior of a lattice, we have both cli and web clients:

```
python percussion-cli.py
```

```
python percussion-web.py
```

#### Linear vs nonlinear domain

The script :

```
plotlineardomain.py
```

can test if your parameters are in the linear domain or not.

#### Eigengap

The script :

```
ploteigengap.py
```

plots the eigengap of the singular perturbation problem.

**FIGURE 4.8 –** Apperçu du dépôt secondaire `springslattice` maintenu et amélioré durant le stage.

## 4.4 Résumé des résultats obtenus

Bien que le modèle de fracture 1D soit facilement adaptable aux calculs 2D, nous ne l'avons pas fait faute de temps. En résumé, nous avons fait ceci :

- Modélisation du déplacement des noeuds d'un floe de glace 2D soumis à aucune force sur son bord ;
- Modélisation de la collision (élastique) de deux floes de glace. Vu que le temps de la collision est connu (voir [Rab15]), nous pouvons étendre ces travaux à la collision avec séparation des masses, comme nous l'avons fait en 1D ;
- Création d'un interface web pour introduire les paramètres et obtenir les résultats d'une simulation.

Les résultats obtenus en 2D sont prometteurs, tout comme ceux obtenus en 1D. Ils ont été obtenu pendant un stage qui a demandé un discipline et une encadrement de taille. Au bout de ce travail, j'ai vu mes compétences dans divers domaines considérablement améliorées.

## Chapitre 5

# Déroulement et apports du stage

### 5.1 Journal de bord

Le stage s'est globalement déroulé dans une méthodologie *agile*. Chaque semaine, un rapport d'activité fut rédigé. Dans ce dernier figurait principalement le travail effectué, les difficultés rencontrées, et le travail à faire durant la semaine à venir. Dans cette section, nous résumons le travail effectué durant chacune de ces 26 semaines. Pour des rapports détaillés, le lecteur est invité à se rendre sur le dépôt [ice-floes](#).

#### Semaine 1 (3 février 2021 - 9 février 2021)

1. Mise en place du dépôt [GitHub privé](#) pour le suivi de la rédaction des différents documents et pour un travail à distance plus aisé.
2. Lecture de l'article de M. Rabatel et al. [[RLW15](#)].
3. Lecture de la thèse de M. Rabatel [[Rab15](#)] (Introduction, chapitres 1 et 2) et rédaction dans l'état de l'art.
4. Apprentissage et utilisation des principales fonctionnalités du module TikZ.

#### Semaine 2 (10 février 2021 - 16 février 2021)

1. Fin de lecture des chapitres 2 et 3 de la thèse de M. Rabatel [[Rab15](#)].
2. Début de lecture de la thèse de D. Balasoiu [[Bal20](#)].
3. Continuation de rédaction de l'état de l'art pour le rapport de stage.

#### Semaine 3 (17 février 2021 - 23 février 2021)

1. Révision des notions de mécanique de la rupture (et de mécanique du solide) à travers le livre [[GS17](#)].
2. Lecture de la première partie de la thèse de D. Balasoiu [[Bal20](#)]).
3. Début de lecture de la deuxième partie (chapitre 3) [[Bal20](#)].

#### Semaine 4 (24 février 2021 - 2 mars 2021)

1. Lecture du chapitre 3, et démonstration de la proposition 3.3.1 [[Bal20](#), p.93].
2. Lecture des annexes et relecture (rapide) des chapitres 1 et 2 de la thèse [[Bal20](#)].

3. Lecture du chapitre 4 (sans vraiment comprendre). Des outils avancés de **théorie de la mesure**, de **probabilité appliquée**, de **géométrie stochastique**, etc. sont nécessaires pour comprendre.
4. Lecture du chapitre 1 du livre [Chi+13] cité à plusieurs reprises dans le chapitre 4 de la thèse [Bal20].

### Semaine 5 (3 mars 2021 - 9 mars 2021)

1. Réessaie de lecture du chapitre 4 du livre [Bal20].
2. Lecture du chapitre 2 du livre [Chi+13].
3. Révisions de notions de théorie de la mesure : **mesure et formules de Campbell, distribution de Palm**, etc.
4. Lecture des chapitres 5 et 6 de la thèse [Bal20].

### Semaine 6 (10 mars 2021 - 16 mars 2021)

1. Lecture approfondie des chapitres 4 et 5 du livre [Bal20].
2. Rédaction de l'état de l'art dans le rapport de stage.

### Semaine 7 (17 mars 2021 - 23 mars 2021)

1. Test et debuggage du code `spingslattice` sur [Framagit](#).
2. Étude de l'état de l'art pour des problèmes de collision utilisant des réseaux de ressorts [IS20 ; GN19 ; Ho10 ; MIS21].
3. Relecture de la section 1.1.2 du chapitre 1 de la thèse de RABATEL [Rab15, p.18], et proposition d'un problème linéaire de complémentarité pour modéliser la collision singulière.

### Semaine 8 (24 mars 2021 - 30 mars 2021)

1. Relecture des parties importantes pour la modélisation dans les thèses [Bal20 ; Rab15].
2. Lecture de travaux ayant trait au contact ponctuel entre deux solides (par exemple [Löt81], etc.).
3. Développement du modèle de percussion et essais de résolution analytique.

### Semaine 9 (31 mars 2021 - 6 avril 2021)

1. Lecture de plusieurs modèles de systèmes masses-ressorts avec dispositifs visqueux, en particulier dans [Ho10].
2. Posage du problème de percussion 1D, et écriture des équations régissant le système.
3. Simulation du modèle à l'aide des librairies Scipy et Bokeh (la simulation interactive a permis de constater des erreurs dans le modèle qui ont aussitôt été corrigées).

### Semaine 10 (7 avril 2021 - 13 avril 2021)

1. J'ai modélisé le contact avec séparation, tout en simulant les différents systèmes 1D décrits dans *Percussion1D-3.ipynb*.
2. Preuve des questions d'existence, d'unicité, etc. par rapport au modèle développé.

**Semaine 11 (13 avril 2021 - 20 avril 2021)**

1. La principale tâche effectuée à été l'animation du modèle de percussion 1D. J'ai divisé cette partie en deux phases :
  - **Avant le contact** : pour faciliter les travaux, on suppose que les floes sont en mouvement rectilignes uniformes.
  - **Après le contact** : la semaine dernière, nous avons calculé les "vitesses initiales" pour cette phase. On les utilise pour simuler le déplacement.

**Semaine 12 (21 avril 2021 - 27 avril 2021)**

1. Démonstration de la non-convergence du modèle 1D; Une trigonalisation de la matrice du système permet d'exhiber l'expression explicite des déplacements, et de conclure.
2. Initialisation de la modélisation et de la simulation du modèle 2D.

**Semaine 13 (28 avril 2021 - 4 mai 2021)**

1. Vérification du modèle et du code de calcul 2D. Étude des paramètres et du système masse-ressort en Python.
2. Relecture du code et la thèse de Dimitri afin de trouver des nouvelles idées.

**Semaine 14 (5 mai 2021 - 11 mai 2021)**

1. Lecture détaillée du code de Dimitri; compréhension des fonctions et demande d'aide lorsque nécessaire.
2. Développement d'un modèle de percussion en 2D compatible avec le code préexistant.
3. Début d'écriture d'une présentation Beamer pour la soutenance de mi-stage.

**Semaine 15 (12 mai 2021 - 18 mai 2021)**

1. Fin de l'écriture de la présentation Beamer pour la soutenance de mi-stage. Modification et incorporation des différentes remarques de M. Labbé.
2. Suite de la lecture détaillée du code de Dimitri.

**Semaine 16 (19 mai 2021 - 25 mai 2021)**

1. Suite de lecture du code de Dimitri, en particulier le module `Mesh`. J'ai commencé à définir le module `MultiMesh`, qui représente deux floes en contact.
2. Codage de la deuxième phase de la percussion 1D. Les résultats ne sont pas au point, et seront sans doute améliorés dans les semaines à venir.

**Semaine 17 (26 mai 2021 - 1<sup>er</sup> juin 2021)**

1. Finition de l'animation 1D en corrigeant les bugs.
2. Rédaction du problème de percussion 2D dans le rapport.
3. Définition et test du maillage `MultiMesh` en vue de la percussion; et intégration au code de Dimitri.

**Semaine 18 (2 juin 2021 - 8 juin 2021)**

1. Début d'implémentation de la classe `MultiSolver` pour gérer la percussion 2D dans le code de Dimitri.
2. Revisitation de l'animation 1D en distinguant deux cas en fonction des vitesses des floes après le contact.
3. Étude énergétique pour la validation du système.
4. Début de l'étude d'une percussion avec plusieurs nœuds par floe (voir `FractureSolver.py`).

**Semaine 19 (9 juin 2021 - 15 juin 2021)**

1. Implémentation du module `FractureSolver.py` pour la simulation de la percussion.
2. Migration du code préexistant (depuis les notebooks Python) vers le module `FractureSolver.py` lorsque possible afin d'accélérer le travail.
3. Étude du coefficient de restitution utilisé en mécanique du contact (voir [`acary2004coefficients`]).
4. Étude énergétique pour la validation du nouveau système.

**Semaine 20 (16 juin 2021 - 22 juin 2021)**

1. Rédaction du travail de modélisation et de simulation 1D dans le rapport de stage.
2. Implémentation du module `multisolver.py` et du script `percussion-cli.py` pour la simulation de la percussion 2D. En se servant des codes préexistants, on n'a pas à calculer les vitesses après choc.

**Semaine 21 (23 juin 2021 - 29 juin 2021)**

1. Implémentation d'une interface web adaptée au problème de percussion 2D.
2. Étude approfondie de l'énergie totale du système en 1D. Après avoir décelé une erreur de quadrature dans mes calculs, j'ai du complètement changer le modèle pour avoir la conservation de l'énergie totale.
3. Début d'étude du système 1D *à grande raideur*.

**Semaine 22 (30 juin 2021 - 5 juillet 2021)**

1. Relecture des chapitres 1 et 2 de la thèse de Dimitri, et des parties de la thèse de Mr. Hanen Amor [`amor2008approche`].
2. Extraction des déplacements des nœuds de chaque floe impliqués dans la percussion en supprimant le mouvement d'ensemble du floe par comparaison des positions des nœuds à celle du centre de masse du floe.
3. Étude de la rentabilité d'une fracture suivant le modèle de Griffith.

**Semaine 23 (7 juillet 2021 - 13 juillet 2021)**

1. Redesign du code de calcul 1D : en effet, le code préexistant ne traitait que deux floes, alors qu'on veut à présent en traiter potentiellement plusieurs (*à chaque fracture d'un ressort, c'est un nouveau floe de glace qui se forme*).
2. Début de l'écriture du code avec debuggage et test au fur et à mesure (approche *agile*).

### Semaine 24 (14 juillet 2021 - 20 juillet 2021)

1. Suppression des dictionnaires et adoption d'une approche par classes; ce qui a considérablement accélérer le développement.
2. Implémentation des différentes fonctions nécessaires pour simuler le déplacement de plus de deux floes 1D simultanément.

### Semaine 25 (21 juillet 2021 - 27 juillet 2021)

1. Reconception du code. Nous avons dû éliminer la méthode par numéro de confirmation postulée la semaine dernière;
2. Simulation de la fracture de deux floes suivant le modèle de Griffith par une approche combinatoire;
3. Correction de la visualisation des différents floes après percussion et fracture.

### Semaine 26 (28 juillet 2021 - 3 août 2021)

1. Réussite de la simulation de la percussion et de la fracture de plusieurs floes 1D.
2. Re-étude de l'influence du coefficient de restitution  $\epsilon$ . En effet, l'énergie totale (en particulier l'énergie cinétique) ne devrait pas être conservée pour  $\epsilon \neq 1$ .
3. Rédaction de l'introduction du rapport de stage.

### Semaine 27 (4 août 2021 - 13 août 2021)

1. Rédaction du corps et de la conclusion pour le rapport de stage.
2. Génération des plots et écriture des équations à introduire dans le rapport.

### Semaine 28 (14 août 2021 - 20 août 2021)

1. Incorporation des notes et des remarques de M. Labbé dans le rapport de stage.
2. Rédaction de la présentation de fin de stage.

Pour résumer les tâches effectuées et mieux observer le déroulement du stage, nous avons réalisé le graphique de la figure 5.1. En comparant ce graphique aux objectifs que nous nous sommes fixés dans la section 1.4, nous pouvons faire un bilan du travail qui a été fait.



**FIGURE 5.1 – Résumé du déroulement du stage.**

## 5.2 Les apports du stage

J'ai maîtrisé la majeure partie des objectifs que nous nous étions fixés. Cela dit, les apports de ce stage ont été indénombrables, et sur plusieurs plans. Tout d'abord sur un plan académique, où j'ai pris en mains des notions clés des mathématiques appliquées et de l'informatique. Ensuite sur un plan technique, j'ai pu maîtriser des outils et faire usage de ressources variées. Enfin, sur un plan professionnel où j'ai pu apprendre d'avantage sur le monde de la recherche.

### 5.2.1 Compétences académiques

- **Simulation de processus physiques** : Ce stage m'a appris à simuler des objets répondant à une loi de comportement bien précise (loi de Newton-Euler, EDO du second ordre) par l'intermédiaire de schémas appropriés. Par exemple, le schéma explicite d'ordre 2 pour le problème 2D diverge presque toujours, et les schéma symplectique où explicite Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) à pas de temps suivant RK5 (comme ceux implémenté par [Scipy](#)) convergent et conservent les invariants du système (à condition de fixer certains des nœuds système).
- **Prise en main du modèle de rupture de Griffith dans les milieux élastiques** : En lisant les travaux qui ont précédé [Bal20], j'ai pu apprendre beaucoup sur le modèle de Griffith et la compétition entre les énergies de déformation et de fracture du matériau. J'ai aussi lu les articles [FM98 ; BFM08] et j'ai ainsi assimilé l'approche variationnelle de Francfort, Marigo, et Bourdin. Ces notions m'ont poussé à (re)visiter des outils mathématiques très puissants tels que le calcul des variations et la  $\Gamma$ -convergence.
- **Maitrise des réseaux de ressorts** : Les travaux de BALASOIU m'ont également appris comment étudier un matériau élastique (réseau de ressorts) par l'intermédiaire d'un processus de Poisson [Kha11]<sup>1</sup>. J'ai par exemple appris comment créer (manuellement ou en se servant de la librairie Scipy) un processus de Poisson répondant à un certain nombre de critères (en particulier l'*intensité* du processus).
- **Développement d'applications en langage Python** : Durant ce stage, j'ai énormément amélioré mes compétences en simulation numérique. J'ai par exemple appris comment créer, modifier et déployer un package Python, comment utiliser plusieurs librairies ([numdifftools](#), [Pillow](#)) de calcul scientifique et de visualisation pour mener à bien un projet.

### 5.2.2 Compétences techniques

- **Utilisation de TikZ** : Le premier outil que j'ai maîtrisé durant ce stage fut le package LaTeX nommé [TikZ](#). Sous la recommandation de M. Labbé, je l'ai utilisé au départ comme complémentaire à [diagrams.net](#) et [Inkscape](#), mais j'ai très vite vu son potentiel et la possibilité de l'utiliser pour virtuellement tous les types de dessins.
- **Maitrise de Flask** : [Flask](#) est une micro-framework de développement web en Python. J'ai trouvé que cet outil permet de construire de belles interfaces pour configurer et visualiser des simulations. Ainsi, l'utilisateur n'a pas besoin d'être familier ni avec notre code de calcul ni avec le terminal pour s'en servir.
- **Maitrise de Bokeh** : Je me suis très vite rendu compte de la nécessité de visualiser les résultats. J'ai pris en main la librairie Python [Bokeh](#) pour visualiser les déplacements et les vitesses des réseaux de ressorts dans les notebooks interactifs.
- **Maitrise de Symbolab** : [Symbolab](#) est un logiciel de calcul symbolique que j'utilise depuis longtemps. Durant ce stage j'ai découvert de nouvelles fonctionnalités et des raccourcis, puis je m'en suis servi surtout pour faire des calculs matriciels en taille élevée ( $4 \times 4$  par exemple).

---

1. Merci à M. Labbé de m'avoir prêté ce livre :).

### 5.2.3 Compétences professionnelles

- **Recherche en milieu professionnel :** La première compétence professionnelle que j'ai gagnée est celle de la recherche dans un milieu aussi prestigieux que le Laboratoire Jacques-Louis Lions. Je n'ai pas manqué d'aide ni de moyens pour effectuer mes tâches. J'ai appris à collaborer avec mes pairs et demander de l'aide lorsque nécessaire. Bien que le LJLL soit un lieu très convivial, la situation sanitaire actuelle m'a amené à me discipliner suffisamment pour pouvoir conduire mes travaux de recherche en télétravail.
- **Vision globale dans tous projets :** J'ai appris à quel point il est important d'avoir une vision globale portée vers le futur lorsqu'on entreprend un projet. Par exemple, j'ai du (re)concevoir et (re)développer le code de calcul 1D (souvent de fond en comble) à chaque fois qu'il fallait ajouter une fonctionnalité majeure. J'estime à au moins un mois le retard acculé dû à ces (re)implémentations. Cela aurait pu être évité si j'avais été plus ambitieux dès le départ.
- **Savoir-faire transférables :** À travers les journées *thé du labo* au LJLL, ceci fut l'occasion de mieux se connaître et de tisser des liens. Parmi les compétences transférables que j'ai pu acquérir durant ce stage, je peux citer l'esprit de recherche, d'entreprise, la gestion du temps et la collaboration.

## 5.3 Bilan et future travail

Durant ce stage, nous avons modélisé et simuler la percussion de floes de glace. Nous avons fait cela en une dimension et nous avons convenablement adapté les résultats en dimension supérieure, en se servant des travaux précédents sur le sujet. En plus, nous avons modélisé et implémenté la fracture d'un floe de glace 1D. Ceci dit, plusieurs tâches restent à effectuer pour porter à fruition notre objectif primaire de création d'un code de calcul de l'évolution de la banquise à l'échelle des floes de glace :

- **Implémentation de la méthode du champ de phase sur le modèle 1D :** L'approche du champ de phase a longuement été présentée à la section 3.3.1. Comme nous l'avons indiquée, elle est la mieux adaptée à l'étude de la fracture suivant l'approche variationnelle de Francfort et Marigo.
- **Implementation de la fracture au problème 2D :** Durant sa thèse, BALASOIU a implémenté un modèle quasi-statique de fracture variationnel à travers une méthode éléments finis reposant sur une approche par champ de phase pour régulariser la fracture. Ces travaux sont regroupés dans le dépôt sur Framagit nommé [Griffith](#). Il faudra intégrer ces travaux au modèle de percussion 2D que nous avons développé durant ce stage.
- **Intégration de la fracture fragile au code de RABATEL :** Comme nous l'avons précisé, RABATEL, durant sa thèse, a étudié la dérive d'un ensemble de floes de glace dans la mer. Il faudra donc introduire la fracture de la glace dans ce modèle.
- **Passage en dimension supérieure.** Pour aller plus loin, nous conseillons de passer en trois dimensions. Cela dit, les tailles des floes sont négligeable devant le rayon de la Terre, où la taille de la mer. Il faudra donc prendre cela en considération pour faire des simplifications et possiblement passer en dimension "2.5".
- **Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts :** D'après la modélisation de Balasoiu [Bal20], un assemblage de masses reliées par des ressorts n'est une bonne approximation que si les raideurs sont fortes. IL faudra donc augmenter la raideur des ressorts dans les simulations pour observer le comportement des floes ; cela permettra d'extraire une deuxième limite spatiale conjecturée par Balasoiu. De plus, Balasoiu a ajouté les dispositifs visqueux pour dissiper les vibrations dans le matériau. Un futur travail pourrait donc étudier la nécessité d'introduire ces dispositifs (qui complexifient considérablement les calculs) dans nos modèles.

- **Optimiser les codes avec Cython :** En effet, les codes hérités, maintenus et développés sont écrits en Python. Ce langage interprété ne nous permet pour l'instant que d'effectuer en temps raisonnable des simulations avec un nombre restreint de noeuds<sup>2</sup>. On pourra donc utiliser Cython pour faire appel aux fonctions à haute performance du langage C. Ou mieux encore, nous pourront (re)implémenter le code en C++ en intégrant les librairies HPC telles que Blas, OpenMP, CUDA, etc.
- **Tests de validation en laboratoire :** Des tests en laboratoire sont nécessaires pour valider les modèles développés. Tout comme RABATEL l'a fait, l'on pourra se servir des données ERAinterim et TOPAZ pour effectuer ces tests.

---

2. Sur [ce lien](#), nous pouvons observer une simulation 1D contenant 100 noeuds au total.

## Chapitre 6

# Conclusion

Pour conclure, j'ai effectué mon stage de fin d'étude au Laboratoire Jacques-Louis Lions sous la supervision du professeur Stéphane Labbé. Durant six mois au sein de ce célèbre laboratoire de mathématiques appliquées, je me suis confronté au problème de la *fracturation des floes de glace* dans un modèle granulaire. J'ai ainsi pu mettre en pratique mes connaissances en calcul scientifique, en analyse numérique, en EDP, en analyse fonctionnelle, et en développement Python (et bien d'autres) acquises durant ma formation de [CSMI](#).

À travers les objectifs secondaires que nous nous sommes fixés, j'ai pu comprendre le modèle de rupture de Griffith dans les milieux élastiques en assimilant des domaines clés de l'analyse fonctionnelle tels que la  $\Gamma$ -convergence, la résonance, et la probabilité; j'ai posé les bases du passage micro/macro du modèle élastique et j'ai développé plusieurs modèles de percussion (1D et 2D). J'ai acquis de l'expérience en programmation d'un modèle mathématique par différents schémas numériques, et en suivi de son intégration à un projet de développement logiciel. Sur un plan technique, j'ai maîtrisé plusieurs outils informatiques tels que TikZ, Flask, Bokeh, et Symbolab.

Cela dit, il reste plusieurs travaux à effectuer pour conclure ce travail. Nous pouvons par exemple citer l'implémentation de la méthode du champ de phase dans le modèle 1D, l'implémentation de la fracture dans le problème 2D, le passage en dimension supérieure (2.5D ou 3D), l'optimisation du code, des tests de confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts à grande raideur, et des tests de validation des modèles en laboratoire.

Fort de cette expérience et de ses enjeux cruciaux pour l'industrie et pour la planète, j'aimerais apporter ma contribution à la science à travers ce projet et d'autres similaires. Le projet [SASIP](#) qui a fait de la compréhension du *réchauffement climatique en zone polaire* sa mission phare est une initiative à soutenir et à répéter.

# Bibliographie

- [AC12] J-P AUBIN et Arrigo CELLINA. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. T. 264. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Aca13] Vincent ACARY. « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), p. 224-250.
- [Ait50] Alexander C AITKEN. « Iv.—studies in practical mathematics. v. on the iterative solution of a system of linear equations ». In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics* 63.1 (1950), p. 52-60.
- [AT90] Luigi AMBROSIO et Vincenzo Maria TORTORELLI. « Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43.8 (1990), p. 999-1036.
- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. url : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Bar] David BARAFF. « Andrew Witkin Large Steps in Cloth Simulation ». In : *SIGGRAPH98 Conference Proceedings* (), p. 43-54.
- [Bar93] David BARAFF. « Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies ». In : *Algorithmica* 10.2 (1993), p. 292-352.
- [BFM08] Blaise BOURDIN et al. « The variational approach to fracture ». In : *Journal of elasticity* 91.1 (2008), p. 5-148.
- [Bra84] Iain BRATCHIE. « Rheology of an ice-floe field ». In : *Annals of Glaciology* 5 (1984), p. 23-28.
- [CFM09] Antonin CHAMBOLLE et al. « When and how do cracks propagate ? » In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.9 (2009), p. 1614-1622.
- [Cha03] Antonin CHAMBOLLE. « A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 167.3 (2003), p. 211-233.
- [Chi+13] Sung Nok CHIU et al. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [Cia88] Philippe G CIARLET. *Three-dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [DGCL89] E DE GIORGI et al. « Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set ». In : *Ennio De Giorgi* (1989), p. 654.
- [DMT02] Gianni DAL MASO et Rodica TOADER. « A model for the quasi-static growth of brittle fractures based on local minimization ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12.12 (2002), p. 1773-1799.
- [DVJ08] Daryl J DALEY et David VERE-JONES. *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume II : General Theory and Structure*. Springer, 2008.
- [FM98] Gilles A FRANCFORST et J-J MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46.8 (1998), p. 1319-1342.

- [GN19] H GERIVANI et M NAZARI. « Proposing a lattice spring damper model for simulation of interaction between elastic/viscoelastic filaments and fluid flow in immersed boundary-lattice Boltzmann framework ». In : *Journal of Molecular Liquids* 296 (2019), p. 111969.
- [GP95] Ch GLOCKER et Friedrich PFEIFFER. « Multiple impacts with friction in rigid multibody systems ». In : *Nonlinear Dynamics* 7.4 (1995), p. 471-497.
- [Gri21] Alan Arnold GRIFFITH. « VI. The phenomena of rupture and flow in solids ». In : *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593 (1921), p. 163-198.
- [GS17] Dietmar GROSS et Thomas SEELIG. *Fracture mechanics : with an introduction to micro-mechanics*. Springer, 2017.
- [Hec97] Chris HECKER. « Physics, Part 3 :Collision Response ». In : *Game Developer Magazine* (1997). URL : <https://www.chrishecker.com/images/e/e7/Gdmphys3.pdf>.
- [Her11] Agnieszka HERMAN. « Molecular-dynamics simulation of clustering processes in sea-ice floes ». In : *Physical Review E* 84.5 (2011), p. 056104.
- [HI79] WD HIBLER III. « A dynamic thermodynamic sea ice model ». In : *Journal of physical oceanography* 9.4 (1979), p. 815-846.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Hop66] Frank Charles HOPPENSTEADT. « Singular perturbations on the infinite interval ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 123.2 (1966), p. 521-535.
- [Hop85] Mark A HOPKINS. « Collisional stresses in a rapidly deforming granular flow : a thesis ». Thèse de doct. Clarkson University, 1985.
- [Hop96] Mark A HOPKINS. « On the mesoscale interaction of lead ice and floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 101.C8 (1996), p. 18315-18326.
- [Ing13] Charles Edward INGLIS. « Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners ». In : *Trans Inst Naval Archit* 55 (1913), p. 219-241.
- [Irw57] George R IRWIN. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate ». In : (1957). URL : [https://www.scirp.org/\(S\(oyulxb452alnt1aej1nfow45\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379](https://www.scirp.org/(S(oyulxb452alnt1aej1nfow45))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379).
- [IS20] Md Rushdie Ibne ISLAM et Amit SHAW. « Numerical modelling of crack initiation, propagation and branching under dynamic loading ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 224 (2020), p. 106760.
- [Jea99] Michel JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4 (1999), p. 235-257.
- [JP85] Michel JEAN et Elaine PRATT. « A system of rigid bodies with dry friction ». In : *International journal of engineering science* 23.5 (1985), p. 497-513.
- [Kee18] Paul KEELER. « Simulating a homogeneous Poisson point process on a rectangle ». In : (2018).
- [Kha11] Rafail KHASMINSKII. *Stochastic stability of differential equations*. T. 66. Springer Science & Business Media, 2011.
- [KS14] Øyvind Kåre KJERSTAD et Roger SKJETNE. « Modeling and control for dynamic positioned marine vessels in drifting managed sea ice ». In : (2014).
- [Lem78] Carlton E LEMKE. « Some pivot schemes for the linear complementarity problem ». In : *Complementarity and Fixed Point Problems*. Springer, 1978, p. 15-35.
- [LLL15] Wenjun LU et al. « In-plane fracture of an ice floe : A theoretical study on the splitting failure mode ». In : *Cold Regions Science and Technology* 110 (2015), p. 77-101.
- [Löt81] Per LÖTSTEDT. « Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 61.12 (1981), p. 605-615.

- [Löt82a] Per LÖTSTEDT. « Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 42.2 (1982), p. 281-296.
- [Löt82b] Per LÖTSTEDT. « Time-dependent contact problems in rigid body mechanics ». In : *Non-differential and Variational Techniques in Optimization*. Springer, 1982, p. 103-110.
- [LS67] Jacques-Louis LIONS et Guido STAMPACCHIA. « Variational inequalities ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 20.3 (1967), p. 493-519.
- [Mar+19] David MARSAN et al. « Characterizing horizontally-polarized shear and infragravity vibrational modes in the Arctic sea ice cover using correlation methods ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.3 (2019), p. 1600-1608.
- [MHW10] Christian MIEHE et al. « A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.45-48 (2010), p. 2765-2778.
- [MIS21] AM MANEA et al. « Simplified mathematical model for frontal impact study ». In : *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*. T. 1037. 1. IOP Publishing. 2021, p. 012055.
- [MM85] MDP MONTEIRO MARQUES. « Chocs inélastiques standards : un résultat d'existence ». In : *Séminaire d'Analyse Convexe, USTL, Montpellier* 15 (1985).
- [MM88] MDP MONTEIRO MARQUES. « Inclusões Diferenciais e Choques Inelásticos ». Thèse de doct. Ph D Thesis, Universidade de Lisboa, Lisbon, 1988.
- [MM94] MD P MONTEIRO MARQUES. « An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction ». In : *European journal of mechanics. A. Solids* 13.2 (1994), p. 277-306.
- [Mor78] Jean Jacques MOREAU. « Approximation en graphe d'une évolution discontinue ». In : *RAIRO. Analyse numérique* 12.1 (1978), p. 75-84.
- [Mor85] Jean J MOREAU. « Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints ». In : *Unilateral problems in structural analysis*. Springer, 1985, p. 173-221.
- [Mor86] Jean Jacques MOREAU. « Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel ; essais numériques ». Thèse de doct. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1986.
- [Mor88] Jean J MOREAU. « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics ». In : *Nonsmooth mechanics and Applications*. Springer, 1988, p. 1-82.
- [Mor99] Jean Jacques MOREAU. « Numerical aspects of the sweeping process ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4 (1999), p. 329-349.
- [MW88] Matthew MOORE et Jane WILHELMS. « Collision detection and response for computer animation ». In : *Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1988, p. 289-298.
- [Nag+19] Sindhu NAGARAJA et al. « Phase-field modeling of brittle fracture with multi-level hp-FEM and the finite cell method ». In : *Computational Mechanics* 63.6 (2019), p. 1283-1300.
- [NB14] Ngoc Son NGUYEN et Bernard BROGLIATO. *Multiple impacts in dissipative granular chains*. T. 3. Springer, 2014.
- [NW72] James L NEVINS et Daniel E WHITNEY. « The force vector assembler concept ». In : *On Theory and Practice of Robots and Manipulators*. Springer, 1972, p. 273-288.
- [OSAJ95] M OSTOJA-STARZEWSKI et al. « Linear elasticity of planar Delaunay networks. III : Self-consistent approximations ». In : *Acta mechanica* 110.1 (1995), p. 57-72.
- [Pan12] Panagiotis D PANAGIOTOUPOULOS. *Inequality Problems in Mechanics and Applications : Convex and nonconvex energy functions*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [PS02a] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.2 (2002), p. 702-733.

- [PS02b] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems II : The multidimensional case ». In : *SIAM journal on numerical analysis* 40.2 (2002), p. 734-768.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. url : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Rag+04] Laks RAGHUPATHI et al. « An intestinal surgery simulator : Real-time collision processing and visualization ». In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 10.6 (2004), p. 708-718.
- [Ram+09] Pierre RAMPAL et al. « Arctic sea ice velocity field : General circulation and turbulent-like fluctuations ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 114.C10 (2009).
- [Ram+11] P RAMPAL et al. « IPCC climate models do not capture Arctic sea ice drift acceleration : Consequences in terms of projected sea ice thinning and decline ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 116.C8 (2011).
- [RLW15] Matthias RABATEL et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9 (2015), p. 5887-5909.
- [SHL86] HH SHEN et al. « On applying granular flow theory to a deforming broken ice field ». In : *Acta Mechanica* 63.1 (1986), p. 143-160.
- [Sig33] Antonio SIGNORINI. « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze* 27 (1933), p. 69.
- [SKM11] Gunnar SPREEN et al. « Trends in Arctic sea ice drift and role of wind forcing : 1992–2009 ». In : *Geophysical Research Letters* 38.19 (2011).
- [Sol70] H SOLOMON. « A study of ice dynamics relevant to AIDJEX ». In : *AIDJEX Bull* 2.33-50 (1970).
- [ST96] David E STEWART et Jeffrey C TRINKLE. « An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39.15 (1996), p. 2673-2691.
- [Str+12] Julienne C STROEVE et al. « Trends in Arctic sea ice extent from CMIP5, CMIP3 and observations ». In : *Geophysical Research Letters* 39.16 (2012).
- [Tik52] Andrei Nikolaevich TIKHONOV. « Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives ». In : *Matematicheskii sbornik* 73.3 (1952), p. 575-586.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effecter Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.
- [VCMT95] Pascal VOLINO et al. « Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects ». In : *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1995, p. 137-144.
- [WFH10] Alexander V WILCHINSKY et al. « Effect of shear rupture on aggregate scale formation in sea ice ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 115.C10 (2010).
- [Whi77] Daniel E WHITNEY. « Force feedback control of manipulator fine motions ». In : (1977).
- [WW90] Andrew WITKIN et William WELCH. « Fast animation and control of nonrigid structures ». In : *Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1990, p. 243-252.
- [Yvo+18] Julien YVONNET et al. « Fissuration dans les microstructures de matériaux cimentaires : outils de simulation par la méthode de champ de phase ». In : *Colloque national MECAMAT Aussois «Matériaux Numériques*. 2018.