

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant

Roussel Desmond NZOYEM

Superviseur

Stéphane LABBÉ

Enseignant référent

Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

19 juin 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	ii
1 Travaux et apports	1
1.1 Les missions du poste	1
1.2 Présentation des résultats obtenus	1
1.2.1 Modélisation et simulation 1D	1
1.2.2 Modélisation et simulation 2D	12
Bibliographie	17

Chapitre 1

Travaux et apports

1.1 Les missions du poste

- L'état de l'art de la partie précédente fait partie des missions.
- Modélisation
- Simulation

Nous souhaitons étudier le comportement mécanique d'un floe après collision avec un autre floe. Les étapes de travail envisagées sont les suivantes :

1. Ecrire les systèmes différentiels pour les deux floes juste après le choc : pour l'instant on peut considérer que l'un des floes est immobile (cela revient au même si l'on exprime les vitesses dans un repère lié à ce floe).
2. On exprime l'EDO vérifiée par les solutions, c'est à dire q pour le premier floe, et p pour le second.
3. On pourra ensuite simuler ces EDP limites et trouver les valeurs de p et q . Autrement dit, on connaît la position de chaque point du réseau au temps final.
4. Si on connaît p et/ou q , on connaît la condition de Dirichlet sur le floe concerné, et on peut ainsi exprimer le déplacement et la possible fracture du floe.

1.2 Présentation des résultats obtenus

1.2.1 Modélisation et simulation 1D

1.2.1.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse v_0 . On identifie les nuds q_0 et p_0 de la section précédente à leur masses respectives m et m' (voir figure 1.1).

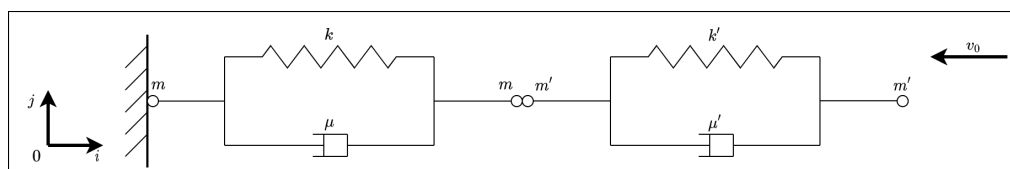


Figure 1.1 – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses m et m' en contact forment une seule masse¹ $m + m'$ dont le déplacement est donné par la variable $x_1(t)$. Le déplacement de la masse m' à l'autre bout du floe percuteur est nommé $x_2(t)$. La masse m qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.

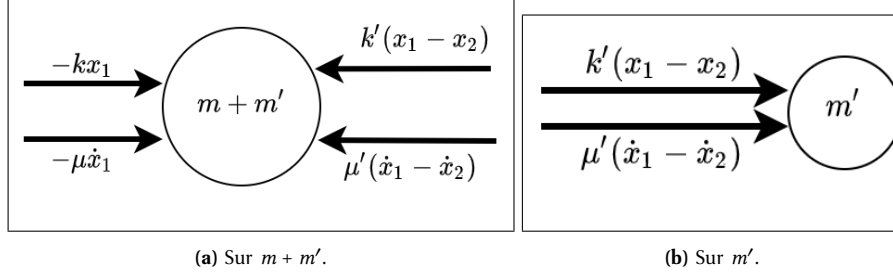


Figure 1.2 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ($v_0 < 0$ et donc $x_1 < 0$). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort k' , on peut imaginer x_1 immobile (on aura $x_2 < 0$, d'où $x_1 - x_2 > 0$) (voir [Hol0]).

En orientant convenablement le système (voir figure 1.1), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales² :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (1.1)$$

À l'instant initial t_0 , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (1.2)$$

En posant $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, l'équation (1.2) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B'\dot{X}(t) + C'X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$.

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$ et le système 1.4 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (1.5)$$

1. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.
2. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de x_1 est-elle vraiment nulle ?

avec la matrice par blocs

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

où I_2 désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Avec $t_0 = 0$, la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0 \quad (1.6)$$

La résolution analytique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice $E \in \mathbb{R}^4$, ce qui s'avère difficile du à la taille de ladite matrice. Nous optons donc pour une solution numérique (voir figure 1.3 issue du notebook `code/simu1D/Percussion1D-1.ipynb`) ...

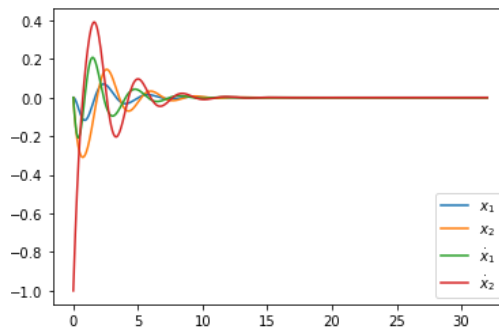


Figure 1.3 – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec $m = 1$, $m' = 1$, $k = 16$, $k' = 5$, $\mu = 6$, $\mu' = 2$, $v_0 = -1.0$, $t_f = 32$. On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$.

Pour certaines valeurs (specifiquement de μ et μ'), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$. Il nous reste dans cette section :

1. Calculer analytiquement et numériquement tous les état d'équilibres $Y_{eq} \in \ker(E)$; distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice E , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les parametres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

1.2.1.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé dans cette section. On obtient donc une troisième variable x_3 décrivant le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 1.4. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 1.5.

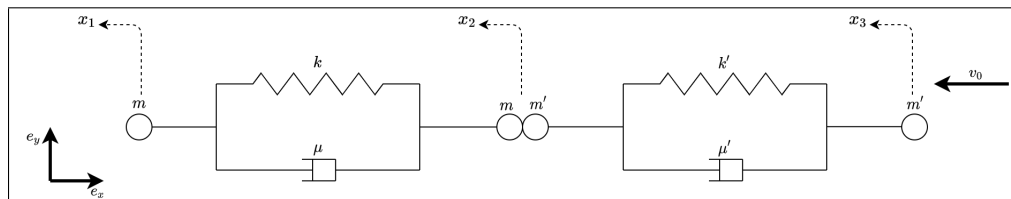


Figure 1.4 – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On reprénte également les variables x_1 , x_2 , et x_3 décrivant les mouvements de chaque noeud.

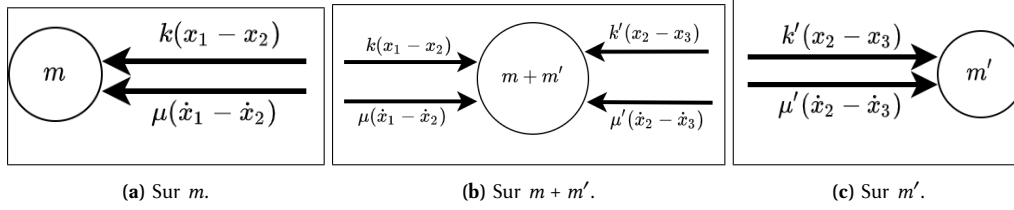


Figure 1.5 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 1.2 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (1.7)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible. En posant $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, le système d'EDO revient à l'équation (1.9) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (1.9)$$

où $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$. On pose ensuite $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$ et le système équation (1.9) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (1.10)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 1.1), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble $m + m'$ après collision et fixation de la masse m' (à vitesse v_0) sur la masse m (de vitesse v'_0)³. Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée v_f , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées P_{avant} et $P_{\text{après}}$. On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2mv_0 + 2m'v'_0 &= (2m + 2m')v_f \\ \Rightarrow v_f &= \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

3. Le vecteur v'_0 n'est pas marqué à la figure 1.4 (i.e. $v'_0 = 0$). L'introduction de ce vecteur permet de généraliser le problème.

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (1.10) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure figure 1.6 (issue du notebook code/simu1D/Percussion1D-2.ipynb).

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (1.11)$$

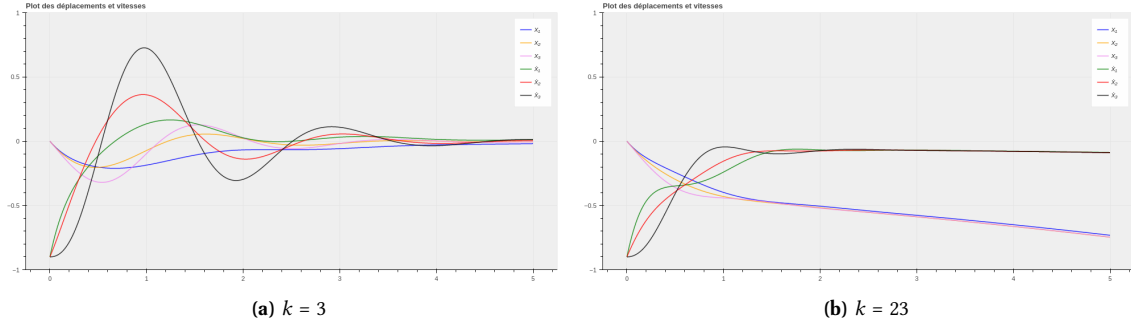


Figure 1.6 - Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec $m = 1$, $m' = 1$, $k' = 22$, $\mu = 6$, $\mu' = 2$, $v_0 = -1.8$, $t_f = 5$. Sous certaines conditions (forte dissipation, raideur du floe percuté élevée, etc.), on observe le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

La figure 1.6 permet d'observer la nuance avec le problème de contact parfaitement inélastique. Il est difficile de distinguer les cas qui aboutissent à une convergences des déplacements de ceux qui divergent. Observons donc à présent un problème de contact inélastique avec séparation des masses.

1.2.1.3 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

Avant d'entamer la question de la percussion avec séparation des masses (voir section 1.2.1.4), étudions le comportement d'un floe de glace 1D isolé et modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif visqueux, et 2 noeuds) (voir figure 1.7).

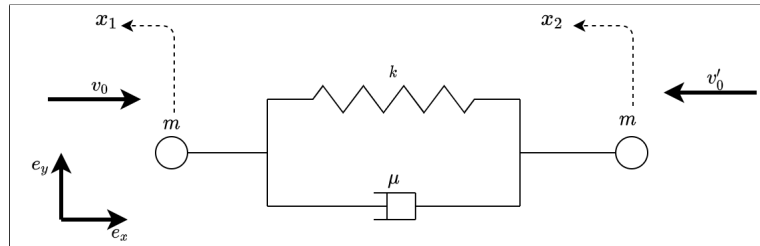


Figure 1.7 - Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieurs. Les variables x_1 et x_2 traduisent les déplacements des noeuds de gauche et de droite respectifs. À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses v_0 et v'_0 indiquées.

Un bilan des forces effectué sur les deux noeuds du floe (voir figure 1.8) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (1.12)$$

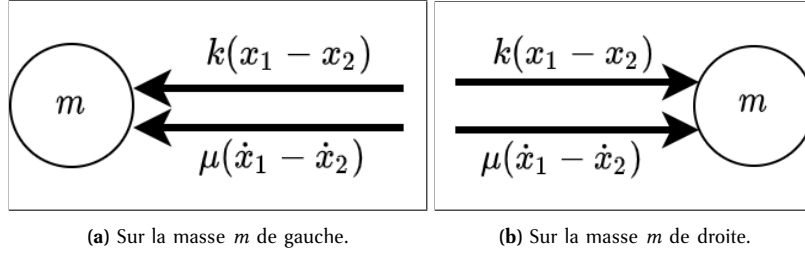


Figure 1.8 - Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple juste après l'instant initial, on a $x_1 > 0$, et $x_2 < 0$ d'où $k(x_1 - x_2) > 0$).

En remarquant que $m \neq 0$, on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$, et on reprend la condition initiale pour obtenir le système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (1.14)$$

La solution numérique est présentée dans à la figure 1.9 (voir fichier code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque $v_0 \neq v'_0$, les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements diverge.

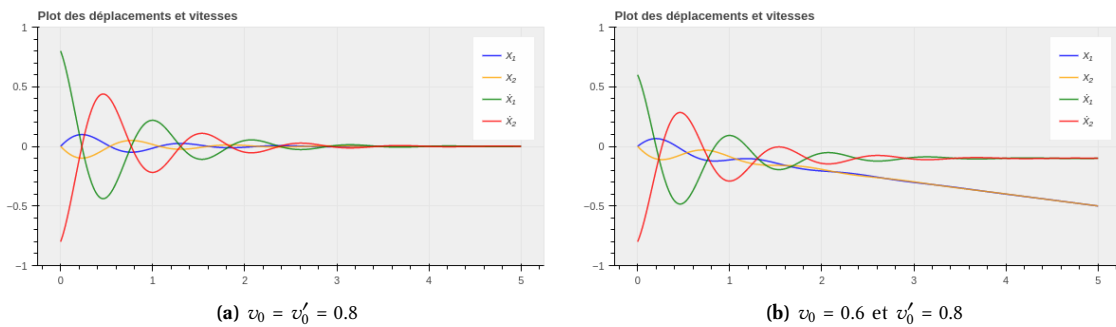


Figure 1.9 - Simulation du déplacement 1D d'un floe avec $m = 1$, $k = 18$, $\mu = 1.3$, $t_f = 5$. En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ lorsque $v_0 = v'_0$.

Avec $t_0 = 0$, la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par.

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (1.15)$$

Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 (Convergence du modèle 1D isolé). *Les déplacements x_1 et x_2 des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.*

Démonstration. Le calcul des solution analytique est plus délicat. Il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice E . Pour cela, nous devons diagonaliser (ou du moins trogonaliser) la matrice E . Son polynome caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k). \end{aligned}$$

Posons $\Delta = 4\mu^2 - 8km$. On distingue deux cas :

- Si $\Delta \geq 0$: on pose $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$ et $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$;
- Si $\Delta < 0$: on pose $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ et $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$.

Nous avons donc exhiber les trois valeurs propres de notre matrice : $\lambda_0 = 0$, λ_1 , et λ_2 . Avec λ désignant l'une des valeurs propres, on recherche les vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ appartenant aux sous espaces propres E_λ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0 \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

- Pour $\lambda = 0$, l'équation (1.16) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$, avec $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$.

- Pour $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$, on remarque que $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$. l'équation (1.16) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$, avec $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$; et $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$ avec $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$.

La meutlisicté arithmetique de $\lambda = 0$ est differente de sa multiplicité géométrique. La matrice E n'est donc pas diagonalisable. Son polynome caractéristique étant scindé, nous alons la trigonaliser. On pose donc une

base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dans laquelle la matrice E s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^4 (notée \mathcal{B}) à \mathcal{B}' . On a :

- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_1 s'écrit $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_1 = 0$. v_1 est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ dans \mathcal{B} ;
- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_2 s'écrit $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_2 = av_1$. On retourne dans \mathcal{B} en posant $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = a \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Avec $a = 1$, on écrit $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$.

- Dans \mathcal{B}' , le vecteur v_3 s'écrit $v_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ et on a $P^{-1}EPv_3 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$. En posant $b = d = 0$, v_3 devient un vecteur propre associé à λ_1 et on prend $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$ dans \mathcal{B} ;
- De façon similaire, on obtient $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ en posant $c = e = f = 0$.

Nous avons donc trigonaliser la matrice E , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente $A = D + N$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $E = P(D + N)P^{-1}$, nous pouvons facilement calculer $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN) P^{-1}$. Ce calcul délicat donne (à l'aide du logiciel de calcul symbolique Symbolab) :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons nous que la solution du problème de Cauchy équation (1.14) est donnée par $Y(t) = \exp(tE)Y_0$, avec $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$. Le calcul du déplacement x_1 donne :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} (v_0 + v'_0). \quad (1.17)$$

Le cas où $\Delta < 0$ (à étudier dans \mathbb{C}) peut se ramener au cas réel (dans \mathbb{R}) en posant $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$ (avec $\alpha = -\frac{\mu}{m}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{2km-\mu^2}}{m}$). En remarquant que $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$, on obtient :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) + \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0). \quad (1.18)$$

Les équations (1.17) et (1.19) permettent d'observer que le déplacement x_1 ne converge pas lorsque $t \rightarrow +\infty$, à moins que $v_0 = v'_0$, ce qui est observé à la figure 1.9. Pour le déplacement du deuxième noeud, on a :

$$x_2(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0); \quad (1.19)$$

On tire les mêmes conclusions en effectuant un raisonnement similaire. □

1.2.1.4 Collision inélastique avec séparation des masses

Reprennons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps $\delta t^* = [t^-, t^+]$ de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses m et m' en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 1.1 et 1.4), et nous le présentons à la figure 1.10 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 1.11.

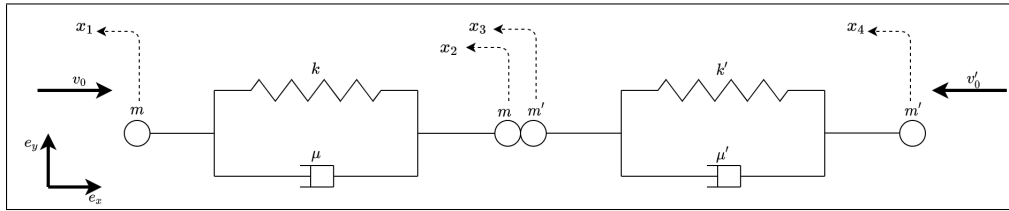


Figure 1.10 – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les nuds m et m' en contact sont étudiés séparément. On représente les variables x_1 , x_2 , x_3 , et x_4 décrivant les mouvements de chaque noeud.

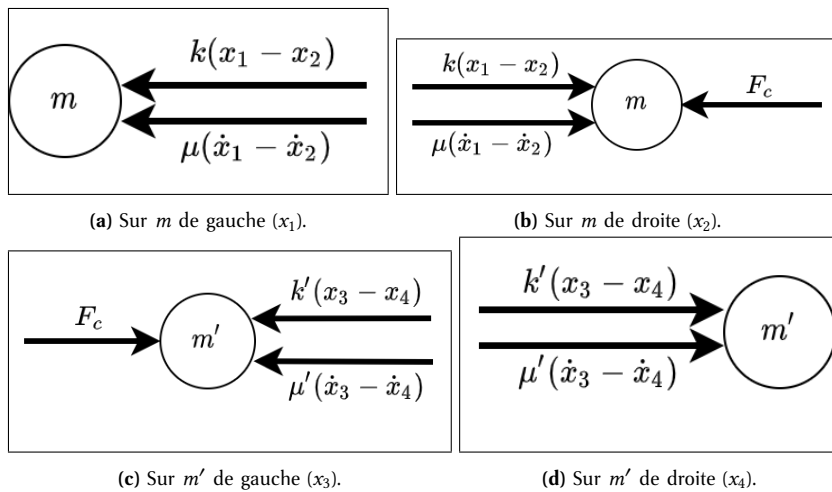


Figure 1.11 – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 1.2 et 1.5 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces. F_c représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.20)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de x_2 et x_3 pour éliminer la force de contact F_c et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (1.21a) \\ m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), & (1.21b) \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). & (1.21c) \end{cases}$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant $x_2(t) = x_3(t)$ p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses m et m' peuvent être étudiées comme une unique masse $m + m'$. La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble $m + m'$. Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses $\dot{x}_1(t^+)$, $\dot{x}_2(t^+)$, $\dot{x}_3(t^+)$ et $\dot{x}_4(t^+)$ immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (1.10)), nous réutilisons les quantités \dot{x}_1 et \dot{x}_4 données par ce système (l'équation (1.10) dans lequel x_2 et x_3 sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car x_1 et x_4 n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$ est aussi calculée suivant le modèle équation (1.10) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnues dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons l'équation (1.21b) entre les instants t^- et t^+ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_I. \quad (1.22)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$ et $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$ les vitesses des noeuds en contact avant collision, et $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$ et $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$ les vitesses après contact. L'équation (1.22) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (1.23)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution ε ⁴. On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 1.12.

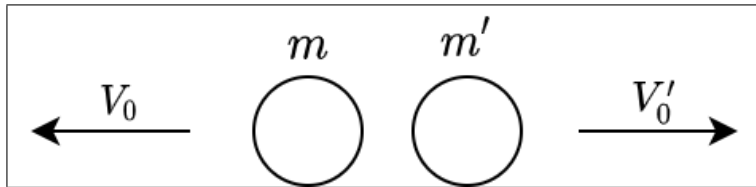


Figure 1.12 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (1.24) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (1.24)$$

4. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

Le système de Cramer qui découle des équations (1.23) et (1.24) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1 + \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 + \varepsilon)mv_0 + (m' - \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (1.25)$$

Une fois leur vitesses "initiales"⁵ obtenues, on calcule donc les déplacements des différents noeuds des réseaux, et les fractures éventuelles qui s'en suivent. Plus précisément, on a par exemple pour le premier floe :

- son noeud de gauche x_1 a pour vitesse v_0 avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc ;
- son noeud de droite x_2 a pour vitesse v_0 avant le choc, mais passe de façon discontinue à V_0 après le choc.

Il en est de même pour le deuxième floe.

1.2.1.5 Généralisation et implémentation du modèle 1D

Dans cette section, nous généralisons le modèle 1D présenté dans les deux sections précédentes (voir sections 1.2.1.3 et 1.2.1.4). Les floes sont cette fois représentés par une multitude de noeuds, de ressorts et de dispositifs visqueux.

Déplacement d'un floe. Considérons la FIGURE CI-BAS où n le nombre de noeuds du floe, k la constante de raideur uniforme de tous ses ressorts, et μ le coefficient de dissipation pour tous les dispositifs visqueux.

FIGURE MODÈLE 1D AVEC PLUSIEURS NOEUDS (NE PAS OUBLIÉ DE REPRÉSENTER LE REPÈRE ABSOLU).

Contrairement à l'approche par déplacement que nous avons adopté à la section 1.2.1.3, nous considérons ici une approche par position des noeuds dans le repère absolu (de la figure précédente).

RECOPIER LES PAGES 30 ET 31 DU BROUILLON EN RÉSUMANT TANT QUE POSSIBLE

Etude de la percussion. Observons que les équations (1.22) à (1.25) de la section 1.2.1.4 restent valident du moment que seuls 2 floes sont en contact. Soit n_1 et n_2 les nombres de floes respectifs pour les floes de gauche et de droite (voir FIGURE CI-DESSOUS)

FIGURE DE LA PERCUSSION 1D AVEC PLUSIEURS NOEUDS

La figure ci-dessus montre que la quantité I présenté à équation (1.22) s'écrit :

Et les vitesses après choc sont données par équation (1.25)⁶.

Algorithme de percussion 1D. Par définition, la percussion implique de nombreuses collisions entre les floes. Nous présentons donc l'algorithme ci-bas pour déterminer les vitesses et positions des noeuds des floes après la percussion.

1. Créer deux floes⁷ tous deux animés de mouvement uniforme rectilignes⁸
2. Créer le problème de percussion et y ajouter le deux floes et les paramètres physiques
3. Tant que non collision : - calculer les trajectoire des floes - doubler le temps de simulation avant choc
4. Tant que (collision) ou (temps simu atteint) ou (max recussion profondeur) : - identifier le moment de collision - calculer les vitesses des noeuds en contact après choc - calculer les trajectoires après choc

5. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour la deuxième phase de la percussion.

6. Notons que tous les noeuds qui ne sont pas en contact conservent leurs vitesses pendant le choc.

7. Le floe de gauche sera identifié par floe1 et le celui de droite floe2.

8. Tous les noeuds de chacun des floes ont la même vitesse.

diagramme UML du code. Le code de calcul est conservé dans le FICHIER-REPOSITORY... (INDIQUER COMMENT LACER LE CODE). Le diagramme UML définissant les différentes classes et fonctions de notre implémentation est le suivant :

DIAGRAMME UML DU CODE 1D

Visualisation des résultats. PRÉSENTER 5 A 10 TIME STEPS D'UNE SIMULATION AVEC PLUSIEURS FLOES

Validation du modèle. Le moyen principal de validation de notre modèle 1D fut l'étude énergétique. AU MOINS LES QUANTITÉS DE MOUVEMENT ET LES ÉNERGIES TOTALES JUSTE AVANT ET APRÈS CHAQUE CHOCS SONT LES MÊMES.

PLOT DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT ET ENERGIE TOTALES

1.2.2 Modélisation et simulation 2D

1.2.2.1 Déplacement d'un floe isolé

Étudions le comportement d'un floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts (3 ressort, 3 dispositif visqueux, et 3 noeuds) (voir figure 1.13).

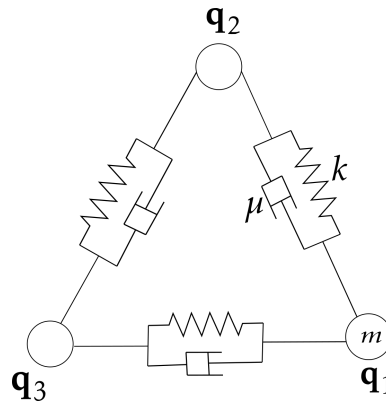


Figure 1.13 - Floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Tous les neuds du réseau ont la même masse m , tous les ressorts ont la même raideur k , et tous les dispositifs visqueux ont le même coefficient μ .

Comme nous l'avons présenté aux équations (1.29) et (E), le système de la figure 1.13 est régit par l' équation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad (1.26)$$

où L_{ij} représente la longueur au repos du ressort entre les noeuds i et j , et C_{ij} indique si les noeuds i et j sont connectés ou non (pour ce modèle 2D simple, $C_{ij} = 1 \forall 0 \leq i, j \leq 2$). Le vecteur unitaire \mathbf{u}_{ij} vaut :

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

Simulation par un schéma d'Euler explicite. On discrétise par un schéma de différence finies avec $N + 1$ pas de temps, et pour une temps de simulations T :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n = n\Delta t = n\frac{T}{N}, \quad \mathbf{q}_i(t^n) \approx \mathbf{q}_i^n.$$

L'équation (1.26) devient :

$$m \frac{\mathbf{q}_i^{n+1} - 2\mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \frac{\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right],$$

soit encore :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]. \quad (1.27)$$

La simulation de ce modèle par un schéma d'Euler explicite à pas constant sur un intervalle de temps faible ($T = 4$) est présentée à la figure 1.14, ainsi que les positions des 2 noeuds au début et à la fin de la simulation. La simulation à la figure 1.15 permet d'observer le problème avec ce schéma ($T = 10$).

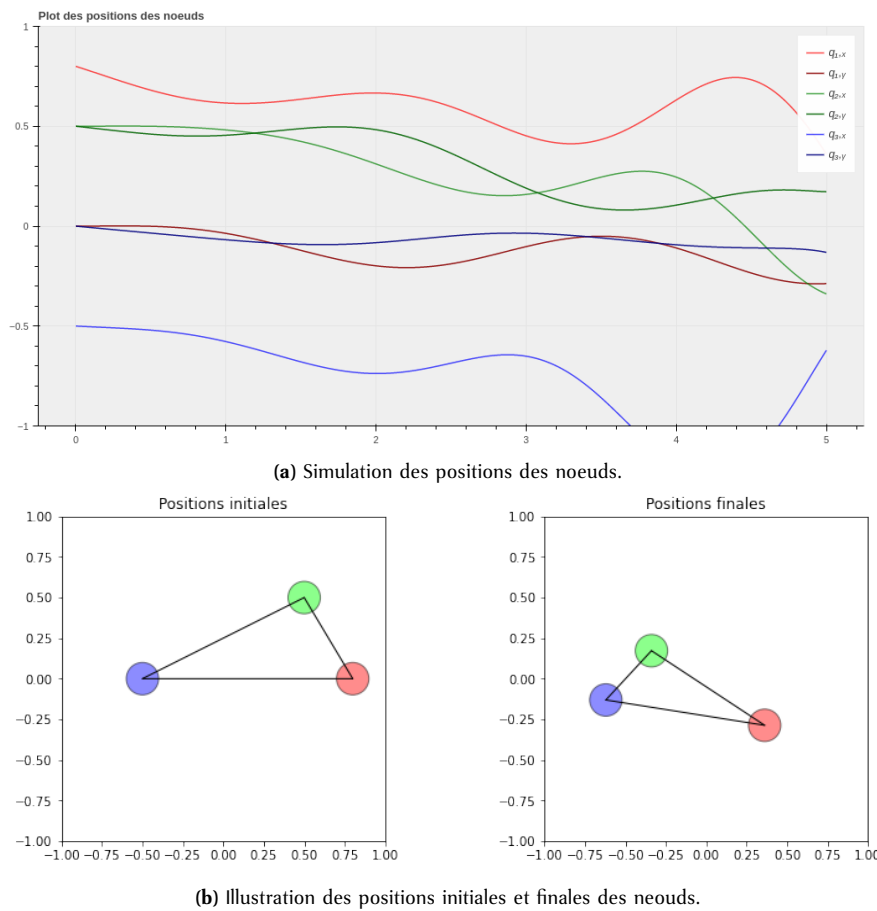


Figure 1.14 - Simulation du système 1.27 par un schéma d'Euler explicite avec $T = 4$. La couleur rouge représente le noeud \mathbf{q}_1 , le vert le noeud \mathbf{q}_2 , le bleu le \mathbf{q}_3 . Les paramètres utilisés ici sont les suivants : $m = 6.2$, $k = 23.3$, $\mu = 3$; à l'instant initial, les trois noeuds perturbés avec des vitesses d'intensité respectives $v_1 = 0.3$, $v_2 = 0.1$, et $v_3 = 0.1$. Par rapport à l'axe des abscisses, ces vitesses ont des orientations respectivement de $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 270^\circ$, et $\theta_3 = 240^\circ$ (voir `code/simu2D/Deplacement2D-1.ipynb`).

Les figures 1.14 et 1.15 permettent de constater que le schéma d'Euler explicite (peu importe son pas de temps), n'est pas adapté à ce problème. Nous étudierons donc d'autres alternatives.

Simulation à l'aide des fonction de la librairie Scipy. À travers ses fonction telle que `odeint` et `solve_ivp`, Scipy offre une solution robuste et élégante pour simuler les systèmes d'ODE de la forme $Y' = AY$.

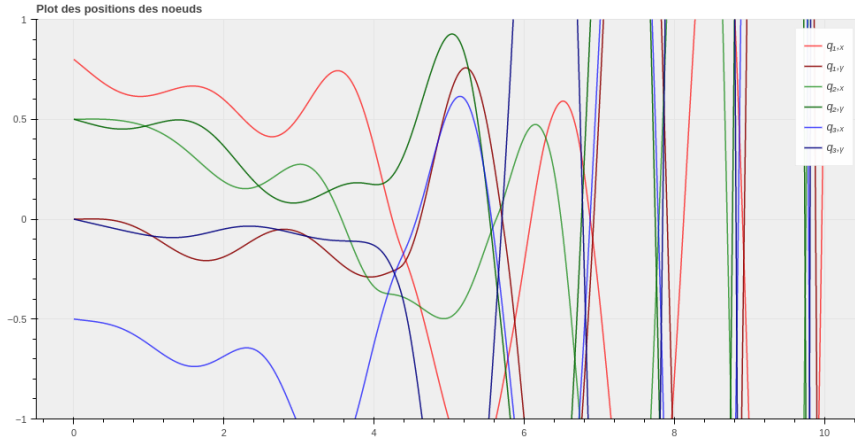


Figure 1.15 – Simulation du système 1.27 par un schéma d'Euler explicite avec $T = 10$. Cette figure utilise les même paramètres que la figure 1.14. On observe ici une divergence totale du système.

1.2.2.2 Modélisation du contact entre deux floes

Les floes de glace Ω_k et Ω_l sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une modélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliés par des ressorts (de constante de raideur k), et par des dispositifs visqueux de constante μ . Nous désignerons par $n + 1$ le nombre total de noeuds du floe Ω_k , chaque noeud ayant pour masse m . De façon similaire, on définit les constantes k' , μ' , $n' + 1$, $m' + 1$ pour le floe Ω_l . Les positions des noeuds de Ω_k seront noté $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$, tandis que ceux de Ω_l seront notés $(p_i)_{0 \leq i \leq n'}$ (voir figure 1.16).

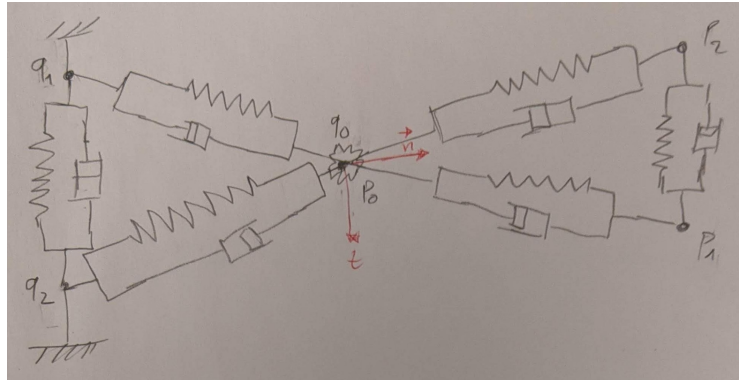


Figure 1.16 – Contact entre deux floes aux points $p_0 = q_0$.

On définit la matrice de contact $C...$ (voir these Dimitri), et $L_{0j}..$ et $u_{0j} ..$

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisons le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe Ω_k , nous écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire⁹ au point de contact q_0 :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (1.28)$$

9. La rotation du point matériel q_0 n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\underbrace{k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (1.29)$$

représente la somme des forces de réaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud q_0 ; et $\mathbf{F}_0^c(t)$ la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ associé au floe Ω_k (voir figure 1.16), on peut écrire, pour $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (1.30)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations (1.28) à (1.30). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E) \quad \text{(SI)}$$

En ce qui concerne le floe Ω_l , nous procédons de facons similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \end{cases} \quad (E') \quad \text{(SI)}$$

où $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$ sont définis de facon similaire à \mathbf{F}_0 (voir équation (1.29)) :

$$\mathbf{F}'_i = \sum_{j=i}^{n'} C_{ij} \left[k' (\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - L'_{ij}) \mathbf{u}'_{ij} - \mu' \langle \dot{\mathbf{p}}_j - \dot{\mathbf{p}}_i, \mathbf{u}'_{ij} \rangle \mathbf{u}'_{ij} \right]. \quad (1.31)$$

Ensuite, on additionne membre à membre les équations des systèmes extérieurs (SE) de équations (E) et (E') pour éliminer la force de contact. On obtient :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0. \quad (1.32)$$

Remarquons que les positions relatives des noeuds \mathbf{q}_0 et \mathbf{p}_0 restent inchangées durant la collision. A l'instant initial, on note donc $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0)$; ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{q}_0(t) - \mathbf{p}_0(t) = \Delta_0. \quad (1.33)$$

Nous avons ainsi obtenu les $n + n' + 2$ équations nécessaire pour que notre problème de percussion soit bien posé. Elles sont :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0, & \text{(SE)} \\ \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 = \Delta_0, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \quad \text{(SI)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

Ensuite, il nous faut introduire des conditions portant sur la conservation de l'énergie, et la condition de non-interpénétration de Signorini. . .

Bibliographie

- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.