

## RAPPORT DE STAGE

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

*Superviseur*  
Stéphane LABBÉ

*Étudiant*

Roussel Desmond NZOYEM

*Enseignant référent*  
Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;  
du 03 février 2021 au 31 juillet 2021;  
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

15/8/2021

## *Remerciements*

Avant tout développement sur cette expérience professionnelle, il apparaît opportun de commencer ce rapport de stage par des remerciements, à ceux qui m'ont appris des choses, et à ceux qui ont eu la gentillesse de faire de ce stage un moment agréable et profitable.

Ainsi, je remercie le Pr. Stéphane Labbé, mon maître de stage qui m'a formé et accompagné tout au long de cette expérience avec beaucoup de patience et de pédagogie. Étant donné la situation sanitaire de COVID-19, il a su me transmettre tous les enseignements et les ressources (livres, références, etc.) nécessaires pour effectuer mes différentes missions (et bien plus encore), à distance comme en présentiel. Je vous en suis profondément reconnaissant.

J'attends mes remerciements à mes illustre prédécesseurs Matthias Rabatel et Dimitri Balasoïui sans qui mon travail n'aurait pas eu lieu. Dimitri a su me guider dans les moments les plus difficiles du stage. Les mots ne sauraient exprimer ma reconnaissance envers les visio-conférence organisées afin de me permettre de prendre en main de son travail.

Je remercie aussi l'ensemble du personnel du Laboratoire Jacques-Louis Lions qui m'a permis d'effectuer un stage scientifique très enrichissant dans les meilleures conditions possibles. J'adresse mes salutations aux doctorants et aux étudiants en séjour de recherche pour leur unique regard sur les difficultés auxquelles fait face. En particulier, je remercie Madame Catherine Drouet de l'administration pour son assistance et ses conseils inestimables.

Enfin, je remercie mes proches, ma famille et mes amis pour leurs encouragements. Si un lecteur estime que son nom aurait du figurer ici de façon explicite, faite ceci : imprimer cette page, montrer la moi, et cela sera votre coupon pour une bière gratuite (ou un café, ou autre chose). Les trucs gratuits sont mieux qu'une mention, n'est-ce pas ?

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	3
1.3 Environnement . . . . .	3
1.4 Objectifs . . . . .	3
1.5 Abstract . . . . .	4
<b>2 État de l'art</b>	<b>5</b>
2.1 Position du problème . . . . .	5
2.2 Résumé de thèse de M. Rabatet . . . . .	7
2.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer . . . . .	7
2.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème . . . . .	13
2.2.3 Validations et exploitations du modèle . . . . .	16
2.2.4 Discussion . . . . .	18
2.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu . . . . .	18
2.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art . . . . .	18
2.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace . . . . .	21
2.3.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier . . . . .	23
2.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes . . . . .	25
2.3.5 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope . . . . .	29
2.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur . . . . .	32
2.3.7 Discussion et questions ouvertes . . . . .	35
2.4 Résumé de l'état de l'art . . . . .	36
<b>3 Problème 1D et étude de la fracture</b>	<b>37</b>
3.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé . . . . .	37
3.2 Modélisation de la percussion . . . . .	41
3.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial . . . . .	41
3.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur . . . . .	43
3.2.3 Premier modèle pour la collision inélastique avec séparation des masses . . . . .	45
3.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses . . . . .	47
3.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses . . . . .	51
3.3 Modélisation de la fracture . . . . .	53
3.3.1 Méthode du champ de phase . . . . .	53
3.3.2 Une approche combinatoire pour la fracture . . . . .	54
3.4 Algorithme de calcul 1D . . . . .	56
3.5 Résumé des résultats obtenus . . . . .	57

<b>4 Problème 2D et percussion des floes</b>	<b>59</b>
4.1 Développement d'un modèle de déplacement des noeuds . . . . .	59
4.2 Développement d'un modèle de percussion des floes . . . . .	60
4.2.1 Présentation des travaux antérieurs . . . . .	60
4.2.2 Nouveaux travaux sur la percussion . . . . .	60
4.3 Code de calcul 2D . . . . .	64
4.4 Résumé des résultats obtenus . . . . .	64
<b>5 Déroulement et apports du stage</b>	<b>67</b>
5.1 Journal de bord . . . . .	67
5.2 Bilan et future travail . . . . .	71
5.3 Les apports du stage . . . . .	72
5.3.1 Compétences académique . . . . .	73
5.3.2 Compétences techniques . . . . .	73
5.3.3 Compétences professionnelles . . . . .	73
<b>6 Conclusion</b>	<b>75</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>76</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte

Le déclin de la glace Artique ces dernières décennies est considéré comme l'une manifestations les plus marquante du changement climatique (voir [Str+12]). Ce déclin présente des enjeux aussi climatiques qu'industriels. Premièrement, de par son étendue et son épaisseur immense, la zone artique est un contributeur majeur climat à travers ses échanges de chaleurs par rayonnement et radiation avec l'atmosphère. Il est donc crucial de considérer l'évolution de la glace dans les modèles climatiques. Deuxièmement, la chute de cette couverture de glace dans la MIZ<sup>1</sup> (voir figure 1.1) ouvre des routes maritimes facilitant l'exploitation de ses réserves d'hydrocarbures (qui restent quasiment intactes). Il est donc nécessaire de pouvoir prédire l'évolution de la banquise Artique (au moins) à court terme.

Parmis les éléments exacerbant ce déclin de glace Artique, des études ont cité l'accélération de la vitesse et de la déformation des floes<sup>2</sup> (RWDC11, SKM11). Pour les prédictions de l'évolution de la banquise, les modèles qui considèrent la glace comme un milieu continu ne sont pas adaptés, surtout à l'échelle de la MIZ. Au contraire, les modèles granulaires, bien que plus coûteux doivent être privilégiés afin de prendre en compte la nature discontinue de la banquise et sa rhéologie<sup>3</sup>. Des modèles granulaires pour l'évolution de la glace ont été utilisés par le passé (Hop96, KS14). Cependant, les approches utilisées dans ces travaux limitent la géométrie (circulaire, rectangulaire) et le nombre de floes (de l'ordre de la centaine) et modélisent donc le contact entre floes comme une répulsion après interpénétration<sup>4</sup> (voir [Bal20a, p.16]).

En 2015, M. Rabatel, S. Labbé et J. Weiss [RLW15; Rab15] ont développé un nouveau modèle granulaire prenant en compte la collision des floes sans passer par un processus d'interpénétration (voir figure 1.2). Dans leur modèle, le mouvement des floes vérifie les équations de préservation du moment angulaire et de la quantité de mouvement. Le modèle prend en compte la force de Coriolis et les interactions avec l'océan et l'atmosphère. En 2020, D. Balasoiu [Bal20a] développe un modèle de fracture dans le but de coupler au modèle granulaire d'interaction préexistant, en prenant en compte le phénomène de percussion<sup>5</sup>. Les floes de glace auparavant considérés comme des corps solides dans les travaux de M. Rabatel, sont dorénavant des corps élastiques. En plus de proposer un

---

1. Marginal Ice Zone : zone de transition entre l'océan et le cœur de la banquise, où la concentration de glace est inférieure à 80%, et/ou les morceaux de glace sont de faible épaisseur ( $\approx 1\text{m}\psi\text{tre}$ ) et de petite taille ( $10\text{m} - 100\text{km}$ ).

2. Un floe est un morceau individuel de glace rencontré dans la MIZ

3. étudie la résistance des matériaux aux contraintes et aux déformations.

4. Les détails sur l'interpénétration sont donnés à la ...

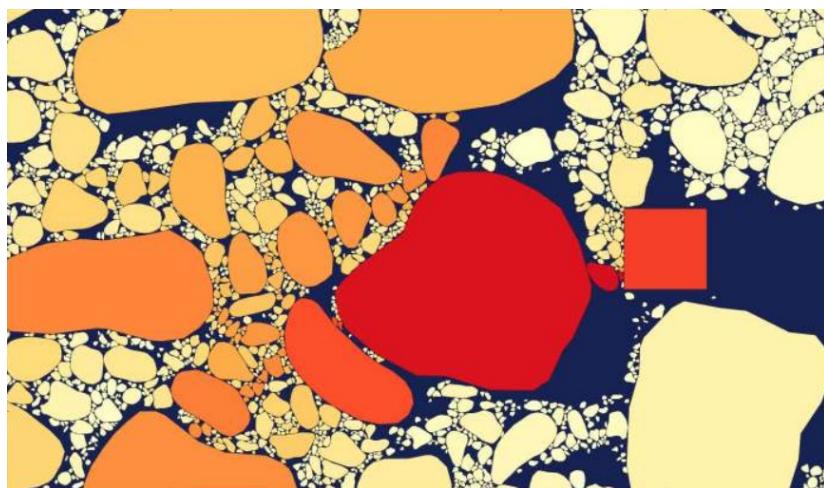
5. Dans ce rapport, nous désignerons par percussion la série de collision à très courts intervalles de temps entre deux ou plusieurs floes.

modèle de fracture fragile pour les floes de glace, D. Balasoiu obtient l'expression du déplacement d'un floe (cette fois ci considéré comme un réseau de masses-ressorts-dispositifs visqueux) qui est percuté par object ponctuel.

C'est dans ce contexte que le projet SASIP a été lancé. Il s'agit d'un projet à but de développer un nouveau modèle de glace de mer capable d'appréhender sa dynamique complexe afin d'améliorer sa représentation dans les futurs modèles de prédition climatiques. Cette gigantesque entreprise pilotée par l'Institut des Géosciences de l'Environnement regroupe dix partenaires internationaux parmi lesquels la France, la Norvège, les Etats-Unis d'Amérique, l'Italie, le Royaume-Uni, et l'Allemagne. Ce fut un grand honneur pour moi d'intégrer ce projet dans un stage de six mois avec pour missions : prendre en main puis de poursuivre le développement du modèle de fracturation des floes existant ; intégrer ce modèle dans un code de calcul de l'évolution de la banquise à l'échelle des floes de glace.



**FIGURE 1.1 –** Un bateau industriel dans la Marginal Ice Zone (MIZ).



**FIGURE 1.2 –** Capture d'écran d'une simulation d'interaction glace structure avec contact rigide [Bal20a, p.23].

## 1.2 Problématique

Ce stage a été pour moi une opportunité d'explorer la percussion et la fracture des floes de glace. J'ai eu à développer un modèle mathématique et à l'intégrer à un projet de développement logiciel. Plus précisément, ce rapport de stage se développe au prisme de la problématique du comportement d'un matériaux élastique lors de la percussion avec un matériaux voisin. En utilisant les principes de mécanique du contact et les équation aux dérivées ordinaires (EDO), nous nous sommes intéressés à la question : *Comment le matériau se déplace-t-il après de tel(s) choc(s) ?* Nous nous sommes aussi posé la question de savoir *dans quelle mesure une fracture apparaît-t-elle dans le matériau ?* Pour cette dernière tâche, nous nous sommes basés sur le modèle de Griffith et de l'approche de Franckfort-Marigot.

## 1.3 Environnement

Mon stage s'est déroulé du 02 février au 31 juillet 2021 au sein du Laboratoire Jacques Louis Lions (LJLL) de Sorbonne Université, sous la supervision du Professeur Stéphane Labbé. Ce stage s'inscrit dans la continuation directe de deux thèses effectuée par Matthias Rabatel [Rab15] et Dimitri Balasiou [Bal20a] au sein du Laboratoire Jean Kuntzmann de l'Université Grenoble Alpes, co-dirigées par le Professeur Stéphane Labbé, et Monsieur Jérôme Weiss, en collaboration avec le groupe TOTAL. Le LJLL a constitué un environnement idéal pour ce travail de stage de par ses membres spécialisés dans divers domaines des mathématiques appliquées, et des ressources mises à ma disposition pour le remplissage de mes fonctions. Cependant, malgré la convivialité et l'esprit d'équipe régnant au sein du LJLL, j'ai effectué certaines de mes tâches en télétravail principalement du à la situation de confinement imposée en France durant cette période trouble de pandémie liée à la COVID-19.

## 1.4 Objectifs

Au vu des problèmes qui nous sont donné de résoudre et des travaux qui ont précédés, nos *objectifs primaires* de ce rapport de stage (ainsi que leur temps approximatif d'exécution) sont les suivants :

1. Comprendre le modèle de rupture de Griffith dans les milieux élastiques (6 semaines).
2. Comprendre le passage micro/macro du modèle élastique pour travailler sur le modèle de percussion.
3. Intégrer le modèle dans un code de calcul de l'évolution de la banquise à l'échelle des floes de glace.

Afin de remplir au mieux ces missions, nous les avons fracturé en groupes de tâches singulières formant ainsi des *objectifs secondaires* étalé sur six mois (26 semaines) que sont :

- Prise en main de la notion de Gamma-Convergence en calcul des variations (effectuée avant le début du stage)
- Lecture et assimilation de la thèse de Matthias Rabatel (jusqu'au 23 février 2021)
- Lecture et assimilation de la thèse de Dimitri Balasoiu (jusqu'au 16 février 2021)
- Modéliser, simuler, et visualiser le déplacement d'un floe en une dimension (1D) après une collision (jusqu'au 30 mai 2021)
- Modéliser, simuler, et visualiser le déplacement d'un floe en deux dimension (2D) après une collision (jusqu'au 30 juin 2021)
- Implémenter le modèle de fracture de Griffith dans le modèle de collision 1D préexistant (30 juillet 2021)

En vue de rendre compte de manière fidèle et analytique des six mois passés au sein du Laboratoire Jacques-Louis Lions, il apparaît logique de présenter à titre préalable les remarquables travaux qui ont précédé ce stage (chapitre 2); puis de présenter les différents modèles de glace de mer développés et étudiés en 1D (chapitre 3); ensuite en 2D (chapitre 4). Enfin, à l'aide d'un journal de bord, il sera précisé les différentes tâches que j'ai pu effectuer, et les nombreux apports que j'ai pu en tirer (chapitre 5).

## 1.5 Abstract

The rapid shrinking of the Arctic ice cap these last decades is considered as one of the most striking manifestations of global warming [Str+12]. The decrease in size opens way to new opportunities. Namely ice routes beneficial to the industrial sector. The second major consequence is these studies is the necessity to include the MIZ into climate prediction models. In 2015, Rabatel et al. [RLW15; Rab15] developed a sophisticated model for the dynamics of rigid ice floes. The model was later enhanced by Balasouï in 2020 when he considered the ice floes not as rigid, but as elastic materials easily modeled by a mass-spring-damper lattice [Bal20a]. Our goal is to introduce the fracture into this model. Specifically, we will study what happens when two or more ice floes collide (percussion, fracture, etc.) both in 1D and in 2D.

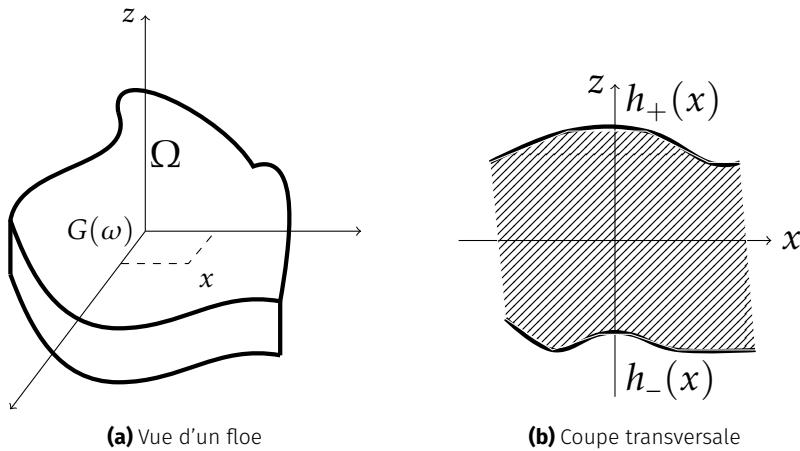
## Chapitre 2

# État de l'art

### 2.1 Position du problème

Nous commençons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécessaires pour décrire le floe occupant la région fermée de l'espace  $\Omega$  (voir figure 2.1) :

- Un ouvert connexe  $\omega \in \mathbb{R}^2$  décrivant la section longitudinale du floe;
- Deux fonctions  $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$  décrivant l'épaisseur du floe, telle que  $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$ ;
- Le centre de masse du floe  $G(\omega)$ ;
- Deux vecteurs  $\mathbf{e}_1(\omega)$  et  $\mathbf{e}_2(\omega)$  formant une base sur  $\omega$ .



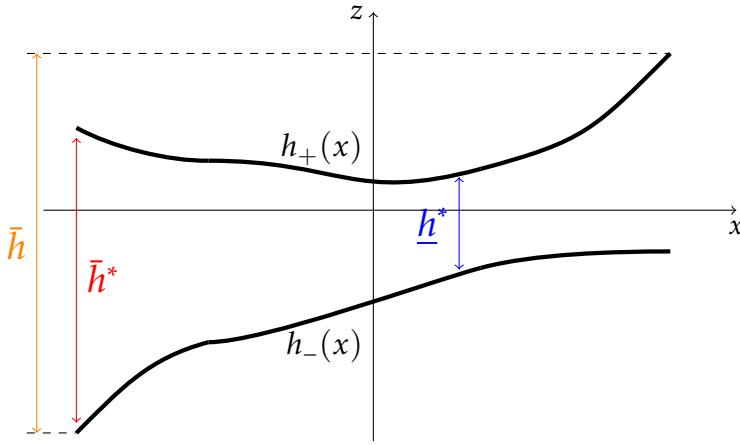
**FIGURE 2.1** – Illustration de la géométrie d'un floe de glace  $\Omega$ .

On confond le floe au volume qu'il occupe dans l'espace  $\Omega$  :

$$\Omega = \{(x, z) | x \in \omega \in \mathbb{R}^2, z \in ]h_-(x), h_+(x)[\}.$$

Les fonctions  $h_-$  et  $h_+$  permettent de définir trois quantités (voir figure 2.2) :

- L'épaisseur moyenne du floe :  $\bar{h} = \sup_{x \in \omega} h_+(x) - \inf_{x \in \omega} h_-(x)$ ;
- La plus forte épaisseur :  $\bar{h}^* = \sup_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$ ;
- La plus faible épaisseur :  $\underline{h}^* = \inf_{x \in \omega} |h_+(x) - h_-(x)|$ .



**FIGURE 2.2** – Différentes épaisseurs décrivant un floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floe relativement plat (i.e  $\bar{h}$  faible),  $h_-$  sera pris identiquement nul, et  $h_+$  constant.

Les vecteurs  $\mathbf{e}_1(\omega)$  et  $\mathbf{e}_2(\omega)$  sont liés à  $\omega$ , et pointent vers un point fixe du bord  $\partial\omega$  du floe c-à-d :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega | \mathbf{e}_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{\|\sigma_i - G(\omega)\|}, \text{ pour } i \in \{1, 2\},$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ . Notons que  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , et  $\mathbf{e}_1(\omega) \cdot \mathbf{e}_2(\omega) = 0$  de façon à ce que la base orthonormée  $(\mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega))$  soit directe.

Un floe  $\Omega = (\omega, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), G(\omega), h_-, h_+)$  se déplace sur la mer <sup>1</sup>  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$ . Au temps  $t$  après une translation de vecteur  $u(t)$  (et de matrice  $\mathbf{T}_{u(t)}$ ), et une rotation de vecteur  $\theta(t)$  (et de matrice  $\mathbf{R}_{\theta(t)}$ ), on obtient le floe  $\Omega(t)$  défini par :

$$\Omega(t) = (\omega', \mathbf{e}^1(\omega'), \mathbf{e}^2(\omega'), G(\omega'), h_-, h_+),$$

avec

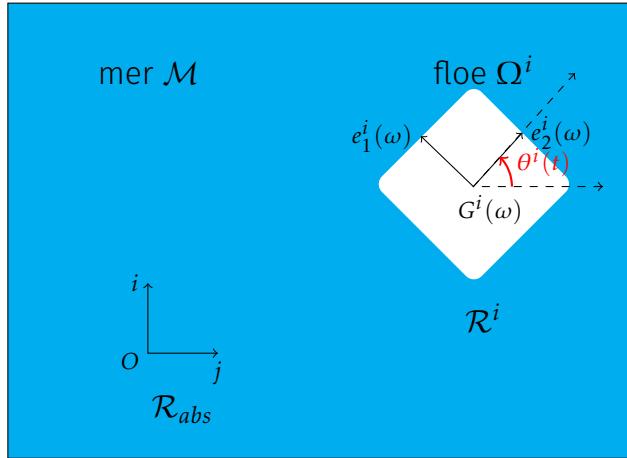
$$\begin{cases} \omega' = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \omega, \\ \mathbf{e}_1(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \mathbf{e}_1(\omega), \\ \mathbf{e}_2(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} \mathbf{e}_2(\omega), \\ G(\omega') = \mathbf{T}_{u(t)} \mathbf{R}_{\theta(t)} G(\omega). \end{cases}$$

C'est cette dernière notation mettant en exergue la dépendance avec le temps que nous utiliserons tout au long de ce rapport.

Lors de leur mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et des courants océaniques, des phénomènes thermodynamiques, etc. Nous nous intéresserons donc au phénomène de percussion<sup>2</sup> en vue de l'initialisation des fractures dans les floes de glace. Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère absolu, que nous notons  $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Le repère associé au floe  $\Omega_i$  sera noté  $\mathcal{R}_{\Omega_i} = (O, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), \mathbf{k})$ . Dans ce repère absolu, le floe possède 3 degrés de libertés : l'abscisse et l'ordonnée de son centre de gravité  $G_i(\omega)$ , et son orientation donnée par l'angle  $\theta_i(t)$  (voir figure 2.3).

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ . Plus tard, nous prendrons en compte son épaisseur lorsque nous la modéliserons par une sphère de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Une percussion est une succession de collisions à intervalles de temps extrêmement petits.



**FIGURE 2.3** – Positionnement d'un floe de glace  $\Omega_i$  dans le repère absolu  $\mathcal{R}_{abs}$ .

## 2.2 Résumé de thèse de M. Rabatel

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL (et plus tard ceux de BALASOIU) ont extensively traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de son raisonnement, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

### 2.2.1 Modélisation théorique de la dynamique des glaces de mer

#### 2.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans [Rab15] utilise les mêmes notations que celles présentées à la section 2.1. Les obstacles<sup>3</sup> sont des floes aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans [Rab15], l'auteur travaille dans un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ; cependant, vu que la mer est considérée plane, le mouvement du floe peut être décrit dans le plan  $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ . Ensuite, RABATEL désigne la vitesse angulaire du floe  $\Omega_i$  par

$$\boldsymbol{\Theta}_i(t) = \theta_i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta_i(t))^T.$$

Soit  $P$  (de coordonné  $x$ ) un point quelconque de  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ . Sa vitesse dans le repère  $\mathcal{R}_{abs}$  est donnée est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}_i(t) + \boldsymbol{\Theta}_i(t) \wedge \mathbf{G}_i P,$$

où le symbole  $\wedge$  représente le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} h_{i,+}(x) dx.$$

Ensuite, l'auteur défini :

- la somme des forces par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe  $\Omega_i$  :

$$\mathbf{F}_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{F}(x) dx,$$

3. Nous faisons allusion aux obstacles au déplacement des floes. Il peut s'agir des iles, des stations offshore, etc.

- le moment cinétique<sup>4</sup> en  $G$  :

$$L_i = \rho_i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t) dx,$$

- le moment dynamique en  $G$  :

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \mathbf{F}(x) dx.$$

Sous le formalisme de Newton-Euler, RABATEL montre que chaque floe  $\Omega_i$  vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \mathfrak{m}_i, \end{cases}$$

où  $\mathcal{I}_i$  représente le moment d'inertie du floe  $i$ . Ce système se réécrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}_i \frac{dW_i(t)}{dt} = \mathcal{H}_i(t), \quad (2.1)$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{m}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système  $S$  composé de  $n$  floes, le problème précédent doit être satisfait pour tous les floes. [Rab15, p.18] montre que cela revient à résoudre l'équation

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t), \quad (2.2)$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad \mathcal{W}(t) = (W_i(t))_{1 \leq i \leq n}, \text{ et } \mathcal{M}(t) = (\mathcal{M}_i(t))_{1 \leq i \leq n}.$$

L'énergie cinétique du floe  $\Omega_i$  quant à elle sera donné par :

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{G}_i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_i \dot{\theta}_i(t)^2.$$

### 2.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandement développé ces derniers siècles, avec plusieurs scientifiques qui ont tenté de décrire le phénomène de contact entre des corps rigides. Notons que le problème d'interaction entre les floes est un problème de **dynamique non-régulière** (contrairement au problème de déplacement des floes entre deux collisions qui lui, est un problème de **dynamique régulière**). Dans [Rab15], l'auteur considère deux lois de contact afin de décrire les phénomènes qui se produisent de façon précise :

- Une **condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration ; cette condition est portée par la composante normale<sup>5</sup> de la force de contact<sup>6</sup> lors de la collision.

4. Il s'agit d'un moment dû à l'accélération du floe ; alors que le moment dynamique est dû aux forces extérieures. Notons que ces deux vecteurs sont portés par  $\mathbf{k}$ , et peuvent donc être remplacé par des scalaires correspondants.

5. La composante normale permet aussi d'assurer la dissipation de l'énergie à travers la **loi de Poisson**.

6. La force de contact est la somme d'une friction tangentielle, et d'une réaction normale.

— **Une loi de friction de Coulomb** : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision. Cette condition est portée par la composante tangentielle de la force de contact. Afin de traiter ces problèmes de contact, deux approches principales ont été d'enveloppées par les scientifiques : l'approche non-régulière et l'approche de régularisation des lois de contact.

Parmi les pionniers dans l'**approche de régularisation** pour la résolution de la condition unilatérale de Signorini, nous pouvons citer Hertz ; Nevins et Whitney [NW72 ; Whi77], Moore [MW88]. Ces méthodes se sont largement répandues dans les études liées à la robotique, à la réalité virtuelle ou encore dans les opérations assistées par ordinateur, pour simuler un grand nombre d'objets en contact en petites ou grandes déformations, comme des habits, des cheveux ou encore des organes (voir [WW90 ; VCMT95 ; Bar ; Rag+04]). Concernant la seconde, la loi de friction de Coulomb, la discontinuité entre les phases de glissement et non-glissement a été traitée de différentes façons ; en utilisant la notion de coefficient de restitution, ou des modèles masse-ressorts.

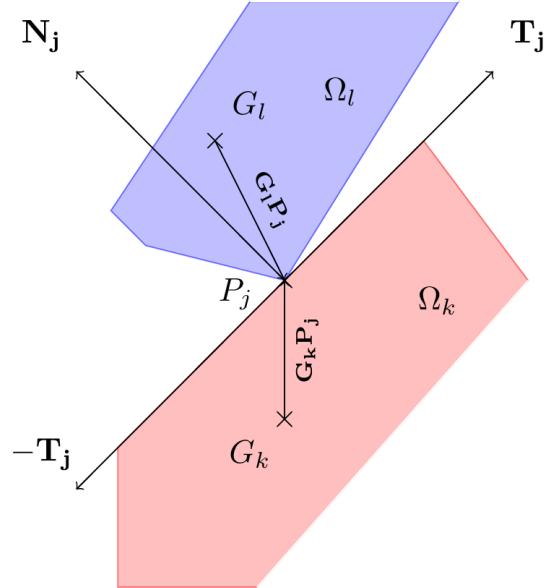
L'**approche non-régulière** a été développée en utilisant les concepts d'inclusion différentielles ; ceci afin de traiter la condition de Signorini. Moreau [Mor85], Aubin [AC12] et Monteiro Marques [MM85], ont montré des résultats d'existence et d'unicité de solutions du problème sans friction. Puis, des résultats similaires ont été établis pour le contact unique avec friction (voir [Mor86 ; MM88 ; Pan12 ; JP85 ; MM94]). Cependant, cette notion d'inclusion différentielle est difficile à manipuler ; c'est, d'après RABATEL la raison pour laquelle le problème du contact multiple avec friction reste encore très peu traité. Il a donc fallu attendre les années 80 avec l'essor des méthodes LCP pour donner un nouveau souffle à l'approche non régulière. Nous pouvons citer ici les travaux de Löts-tedt qui fournit des preuves d'existence et d'unicité pour le contact avec la friction de Coulomb (voir [Löt81 ; Löt82a ; Löt82b]). On cite aussi Klarbring et Pang, pour leur apport sur le plan des méthodes de programmations. RABATEL a opté pour cette approche car elle facilite la construction des solutions à partir d'algorithmes tels que ceux de Lemke (voir [Lem78]). RABATEL s'inspire aussi des travaux de Baraff [Bar93], qui écrit les forces de contact dans les repères locaux aux points de contact. Ces repères sont définis par la normale et la tangente aux points de contact. La condition de complémentarité se résume comme ceci : "*S'il y a contact alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et s'il n'y a pas contact l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle.*". Cependant, les travaux de Baraff sur l'existence de solutions sont limités par l'ap-proche accélération-force, et le coefficient de friction qui sont utilisés. En utilisant des formulations en vitesse et impulsion, les chercheurs ont réussi à démontrer l'existence de solutions pour toute configuration à contacts multiples avec n'importe quel coefficient de friction.

Pour traiter le problème de collision entre les floes, les glaciologues retiennent une multitude de modèles principalement intégrés aux milieux continus. Par exemple, dans les articles de Solomon [Sol70], ceux de Hibler [HI79] et ceux de Bratchie [Bra84], la force résultante des interactions est due à une contrainte interne. On note aussi les modèles basés sur théorie des flux de particules. Dans [SHL86 ; Hop85] par exemple, les collisions ne sont pas détectées précisément et les para-mètres décrivant la collision sont déterminés par une méthode de Monte Carlo. L'introduction de ces déformations dans les modèles discrets de la banquise a été initié dans les années 90 par Hopkins [Hop96], et récemment par Herman et Wilchinsky [Her11 ; WFH10]. Cependant, elles sont basées sur la régularisation des lois de contact. Avant les travaux de RABATEL, il n'existe pas de modèle discret de banquise en utilisant une dynamique du contact non régulière.

Le modèle décrit par [RLW15, p.5892] utilise deux conditions de complémentarité pour dé-terminer les vitesses des floes après le contact. La première est une condition de Signorini [Sig33] pour s'assurer de la non-interpénétration<sup>7</sup> des floes. Pour décrire ces conditions, il faut au préalable

7. Deux floes s'interpénètrent si la "distance" entre ces deux floes est négative.

écrire le problème de contact entre floes comme un problème implicite, où les inconnus sont les impulsions après le choc<sup>8</sup>. Pour cette deuxième condition de complémentarité, RABATEL se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] afin d'en extraire une condition qui vérifie la loi de friction de Coulomb. Le problème résultant a ensuite été résolu en utilisant des algorithmes de Lemke.



**FIGURE 2.4** – Interaction entre deux floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  au point  $P_j$  [Rab15, p.26].

Soit  $P_j$ , ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  (voir figure 2.4). Nous notons  $\mathbf{F}_{kj}(t)$  la force de contact du floe  $\Omega_k$  au floe  $\Omega_l$  appliquée en  $P_j$ . Par convention, une matrice de contact  $\mathbf{M}_c$  est définie telle que son coefficient  $c_{kj}$  vaut :

- 0 si le point de contact  $P_j$  n'est pas un point de contact du floe  $\Omega_k$ ;
- -1 si le point de contact  $P_j$  est un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  avec  $k < l$ ;
- 1 si le point de contact  $P_j$  est un point de contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  avec  $k > l$ .

En notant  $E_k$  l'ensemble des points de contact du floe  $\Omega_k$  au temps  $t$ , [Rab15, p.26] définit la résultante des forces de contact  $\mathbf{F}_k^c(t)$ , au floe  $\Omega_k$  comme :

$$\mathbf{F}_k^c(t) = \sum_{j \in E_k} c_{jk} \mathbf{F}_{kj}(t).$$

En rajoutent ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l'équation (2.2), pour un floe  $\Omega_k(t)$ , on obtient :

$$\mathcal{M} \frac{dW(t)}{dt} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j \in E_k} \left( \mathbf{G}^k \mathbf{P}_j \wedge \mathbf{F}_{kj}(t) \right). \quad (2.3)$$

### 2.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de [Rab15] opte pour le formalisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accélération-force. En effet, l'approche en **vitesse-impulsion** apporte l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de

8. Contrairement aux lois de contacts explicites (Hertz, Hooke, Coulomb), les lois implicites ne nécessitent pas la connaissance de la nature du contact entre les floes (glissement ou accroche).

connaître la nature du contact. Il nous faut donc définir les notions d'impulsion. Sur un intervalle de temps  $\delta t^*$ , s'il y a un contact entre les floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  au point  $P_j$ , nous dirons que le floe  $\Omega_k$  a subi un choc provenant du floe  $\Omega_l$  au point de contact  $P_j$  caractérisé par l'impulsion :

$$\mathcal{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj} \mathbf{F}_{kj}(t) dt.$$

RABATEL fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments équation (2.2) pour le floe  $\Omega_k$  sur l'intervalle temporel  $\delta t^*$  :

$$\mathcal{M}_k \int_{\delta t^*} \dot{W}_k(t) dt = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \sum_{j \in E_k} \left( \mathbf{G}_k \mathbf{P}_j \wedge \mathcal{I}_{kj} \right).$$

En écrivant  $\delta t^* = [t^-, t^+]$ , on peut donc introduire les inconnues  $\beta, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^m$  pour le problème de contact

$$\mathcal{M}(W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt + \mathbf{B}\beta + \mathbf{J}\lambda, \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  sont deux matrices de  $(\mathbb{R}^3)^{n \times m}$  telle que

$$\mathbf{B} = (d_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad d_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{T}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{T}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases},$$

$$\mathbf{J} = (s_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad s_{kj} = \begin{cases} 0 \in \mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k \\ \begin{pmatrix} c_{kj} \mathbf{N}_j \\ c_{kj} \mathbf{P}_j \mathbf{G}_k \wedge \mathbf{N}_j \end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k \end{cases}.$$

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  sont obtenues par décomposition des forces de contact dans le repère de contact  $\mathcal{R}_{\Omega_j} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$  (voir figure 2.4).

Comme précédemment mentionné, afin de modéliser la friction dans une collision qui respecte la loi de Coulomb, [Rab15] se base sur les travaux de Stewart et Trinkle [ST96] qui définissent une condition de complémentarité reliant la composante tangentielle  $\beta_j$  de l'impulsion appliquée au point  $P_j$ , la composante normale  $\lambda_j$ , la vitesse relative tangentielle du point  $P_j$  et le coefficient de friction  $\mu$ . On introduit le vecteur  $\tilde{\beta}$  contenant les composantes de l'impulsion tangentielle dans chacune des directions possible de glissement  $\mathbf{T}_j$  ou  $-\mathbf{T}_j$ . Il devient alors possible de formuler le problème de contact (sur tout le système  $S$ ) sans interénétration par le problème linéaire de complémentarité suivant. Dans cette formulation, l'impulsion de contact est effectivement à l'intérieur du cône de Coulomb :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\mathbf{J} & -\mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \mu & -\mathbf{H}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t) dt - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}^T W(t^+), \quad \mathbf{H}^T = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1 \leq j \leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq m},$$

$\mu$  est la matrice diagonale de diagonale  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 2(i-1)+1 \text{ ou } j = 2(i-1)+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$D = (\mathbf{B}_1| - \mathbf{B}_1| \dots | \mathbf{B}_m| - \mathbf{B}_m)$  avec  $\mathbf{B}_j$  la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{B}$ .

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact  $W(t^+)$ , à l'aide des composantes inconnues tangentielle et normale des impulsions dans les repères de contact  $(\tilde{\beta} \gamma)$ , elles-mêmes inconnues du système.

#### 2.2.1.4 Consistance énergétique

D'après l'auteur de [Rab15, p.42], traiter le problème de contact à partir de lois non régulières ne permet pas d'obtenir des solutions satisfaisant à la fois la non-interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique. En se focalisant sur la consistance énergétique, RABATEL a subdivisé le problème en deux : une phase de compression et une phase de décompression suivant la loi de Poisson. La **phase de compression** modélise la capacité maximale des floes à emmagasiner, par la déformation, une partie ou la totalité de l'énergie cinétique transmise lors du contact. L'impulsion normale  $\lambda^c$  calculée durant cette phase (en résolvant le problème de complémentarité (équation (2.5))) correspond à un coefficient de restitution  $\varepsilon = 0$ . Les impulsions obtenues durant cette phase correspondent à celles nécessaire pour éviter la non-interpénétration, et correspondent donc à une énergie cinétique maximale emmagasinée. La **phase de décompression** correspond à la restitution partielle ou complète de l'énergie cinétique emmagasinée par la déformation des floes. L'impulsion lors de cette phase, notée  $\lambda^d$ , est déterminée par  $\lambda^d = \varepsilon \lambda^c$  (l'hypothèse de Poisson [GP95]). Durant la phase de décompression, RABATEL a donc opté pour la consistance énergétique et la non-interpénétration avec la solution :

$$W^N = (1 + \varepsilon) W^c - \varepsilon W(t^-),$$

où  $W^c$  représente les vitesses des floes après la phase de compression, et  $\varepsilon$  le coefficient de restitution pour les contacts considérés inélastiques.

#### 2.2.1.5 Le modèle de l'environnement

L'environnement est l'ensemble des forces extérieures qui agissent sur les floes hormis les forces de contact qui sont décrites dans la partie précédente. Ces principales forces sont :

- La force de Coriolis  $\mathbf{F}_c$  donnée pour un floe  $\Omega_i(t)$  par :

$$\mathbf{F}_{c,i}(t) = -f \mathbf{k} \wedge \dot{\mathbf{G}}_i(t),$$

avec  $f$  le paramètre de Coriolis et  $\mathbf{k}$  le vecteur dirigé vers le haut du repère absolu  $\mathcal{R}_{abs}$ .

- Les forces de trainée associées au vent  $\boldsymbol{\tau}_a(t)$  et celle associée à l'océan  $\boldsymbol{\tau}_w(t)$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_a(t) &= \rho_a C_a \|\mathbf{U}_a(t)\| \mathbf{U}_a(t), \\ \boldsymbol{\tau}_w(t, P) &= \rho_w C_w \|\mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t)\| (\mathbf{U}_w(t) - \dot{P}(t)), \end{aligned}$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide (l'indice  $a$  pour l'air et  $w$  pour l'eau) et  $C$  un coefficient de traînée sans dimension (voir [HI86]);  $\mathbf{U}_a$ ,  $\mathbf{U}_w$ ,  $\dot{P}(t)$  respectivement la vitesse du vent à

l'interface glace/fluide, la vitesse du courant oceanique à l'interface glace/fluide, et la vitesse d'un point  $P$  du floe.

Le modèle de dynamique régulière définit en équation (2.2) peut se voir expliciter :

$$\begin{cases} M_i \frac{d\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{dt} = M_i \mathcal{F}_{c,i}(t) + \int_{\Omega_i(t)} \boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P) ds, \\ \mathcal{I}_i \frac{d\dot{\theta}_i(t)}{dt} = \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{G}_i \mathbf{P} \wedge (\boldsymbol{\tau}_a(t) + \boldsymbol{\tau}_w(t, P)) ds. \end{cases}$$

L'algorithme décrivant en détail le processus de collision ainsi que la consistance énergétique se trouve à la page 43 du document [Rab15].

## 2.2.2 Méthodes numériques et algorithmiques pour la résolution du problème

### 2.2.2.1 Discrétisation temporelle

Pour simuler la dynamique des floes de glace soumis à des forces extérieures et possiblement des collisions, il faut intégrer la dynamique régulière (entre deux collisions), et la dynamique non régulière; et il existe deux principales méthodes pour la discrétisation en temps dans de tels problèmes. La méthode *time-stepping* (voir [Aca13] pour les schéma de Moreau [Mor86; Jea99], et de Schatzman-Paoli [PS02a; PS02b] par exemple, pour lesquels une convergence a pu être exhibée à partir de la convergence en graphe de Moreau [Mor78]); comparé aux autres méthodes, la méthode *time-stepping* traite mieux les points d'accumulation [Rab15, p.58]; et est plus performante sur des problèmes de multiples contacts. Cependant, RABATEL pour le schéma *event-driven* pour sa précision dans la localisation des collisions et sa facilité de manipulation. En plus, elles permettent d'utiliser des schémas d'intégration existant d'ordre élevé pour des équations différentielles ordinaires. Le seuil de collision choisi est suffisamment grand pour éviter de traiter les collisions une par une. Le schéma utilisé pour intégrer l'équation équation (2.2) est un schéma du type Euler explicite, pour sa facilité d'implémentation, sa facilité à prédire la localisation en espace et en temps des futures collisions et enfin, sa capacité à dépasser les problèmes de points d'accumulation.

La simulation par la méthode *event-driven* demande la définition d'un pas de temps maximal pour lequel le schéma reste stable. Le pas de temps  $\Delta t_{max}$  sera utilisé si aucune collision n'est détectée entre les instants  $t$  et l'instant  $t + \Delta t_{max}$ . En se référant au un modèle idéalisé 1D (voir [Rab15, p.49]), RABATEL distingue deux critères pour la stabilité du schéma numérique au temps  $t$  :

- lorsque la vitesse caractéristique des floes  $V_c(t) = N_a \mathbf{U}_a(t) + \mathbf{U}_w(t)$  est constante sur l'intervalle de simulation  $I$ , alors pour :

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} = \min \left( \frac{\rho}{2|\mathbf{U}_a(t)|\sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}}, \frac{2K_t}{L_t} \right) \quad (2.6)$$

avec

$$\text{avec } L_t = \rho^{-1} \rho_w C_w (N_a^2 \mathbf{U}_a^2 + (N_a \mathbf{U}_a + 2\mathbf{U}_w)^2), \text{ et } K_t = |V_c(t)| \text{ constant},$$

le schéma est stable c-à-d.  $\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] = [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}]$ ;

- lorsque les variations de  $V_c(t)$  entraînent une augmentation de  $K_t$  au cours du temps. La propriété de stabilité reste vérifiée car

$$\dot{\mathbf{G}}(t + \Delta t) \in [-K_t, K_t] \in [-K_{t+\Delta t}, K_{t+\Delta t}];$$

- lorsque les variations de  $V_c(t)$  entraînent une diminution stricte de  $K_t$  au cours du temps, alors la condition de stabilité dans les deux cas précédents ne peut être vérifiée. RABATEL

introduit donc une seconde définition de la stabilité pour traiter ce cas. Il remarque que pour

$$\Delta t_{max} \leq \begin{cases} \frac{-2x}{\tilde{L}_t^-} & \text{si } x \in ]-\infty, K_{t+\Delta t}] \\ \frac{-2x}{\tilde{L}_t^+} & \text{si } x \in ]K_{t+\Delta t}, +\infty] \end{cases} \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^- &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 - (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2] \\ \tilde{L}_t^+ &= \rho^{-1} \rho_w C_w [N_a^2 \mathbf{U}_a(t + \Delta t)^2 + (\mathbf{U}_w(t + \Delta t) - x)^2], \end{aligned}$$

on a la diminution de la vitesse des floes.

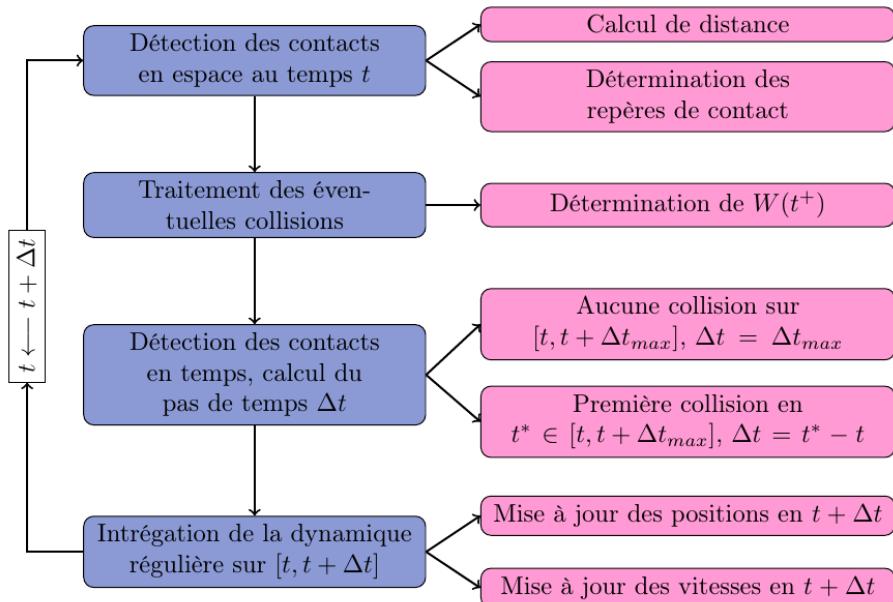
En conclusion, pour une vitesse infinitésimale initiale  $\dot{G}(0) \in [-K_0, K_0]$ , pour tout  $t \in I$ , et pour tout  $\Delta t_{max}$  vérifiant les équations (2.6) et (2.7), nous avons les vitesses des floes majorées par :

$$\max_{t \in I} K_t$$

RABATEL choisi donc de prendre

$$\Delta t_{max} = \min \left( \frac{3}{4} \frac{-2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^-}, \frac{3}{4} \frac{2(\max_{t \in I} K_t)}{\max_{t \in I} \tilde{L}_t^+}, \frac{\rho}{2(\max_{t \in I} |\mathbf{U}_a(t)|) \sqrt{\rho_a C_a \rho_w C_w}} \right)$$

pour s'assurer que le modèle idéalisé vérifie les critères de stabilité définis. Notons que le procédé global d'intégration de la dynamique pour le modèle se situe à la figure 2.2 du document [Rab15, p.60], le schéma est repris à la figure 2.5.



**FIGURE 2.5** – Procédé global d'intégration de la dynamique pour notre modèle [Rab15, p.60].

### 2.2.2.2 Détection des collisions en espace

Des deux méthodes principales utilisées dans la littérature pour la détection des voisins, RABATEL a choisi la méthode de **hiérarchie de volumes englobants** pour sa facilité de mise en place et pour

son efficacité même avec de grands ratios de tailles. L'alternative était la méthode de **partitionnement de l'espace** qui elle, souffre de plusieurs défauts non surmontables pour le modèle développé. Les méthodes de volumes englobants consistent à englober le contour de l'objet par des volumes à des échelles de plus en plus fines pour améliorer la détection.

### 2.2.2.3 Détection des contacts en temps

Il s'agit ici de trouver le pas de temps optimal c'est-à-dire un pas de temps  $\Delta t$  pour lequel la configuration des floes ne contenant pas d'interpénétrations sur l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  et, pour tout  $\varepsilon > 0$ , contient au moins une interpénétration sur l'intervalle de temps  $[t + \Delta t, t + \Delta t + \varepsilon]$  [Rab15, p.87]. Lorsque le critère de collision n'est pas vérifié, RABATEL montre qu'il suffit de prendre

$$\Delta t_{i,j} = -\frac{-\delta_{i,j}(t) - tol_3}{\mathbf{A}_{ij}(t) \cdot (\dot{\mathbf{G}}_i(t) - \dot{\mathbf{G}}_j(t))},$$

avec

$$\mathbf{A}_{i,j}(t) = \frac{C_{0,i}(t) - C_{0,j}(t)}{d(C_{0,i}(t), C_{0,j}(t))}, \text{ et } tol_3 = \frac{\xi}{20}.$$

Lorsque le critère de collision est vérifié, il faut plutôt prendre

$$\Delta t_{i,j} = \frac{\min(\eta_i, \eta_j) - tol_3}{\Gamma(t)},$$

avec

$$\Gamma(t) = \max\left(\|\dot{\mathbf{Q}}_i^{i,j}(t)\|, \|\dot{\mathbf{Q}}_j^{j,i}(t)\|\right),$$

où  $\dot{\mathbf{Q}}_i^{i,j}$  représente la distance parcourue par un point de  $\Omega_i(t)$  relativement à  $\Omega_j(t)$ .

Une fois ce  $\Delta t_{i,j}$  assurant la non-interpénétration trouvé, on peut donc choisir

$$\Delta t = \min\left(\Delta t_{max}, \min_{\substack{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ i \neq j}} \Delta t_{i,j}\right).$$

Le lecteur est renvoyé au document [Rab15, p.91] pour plus de détails sur la détection des contacts en temps.

### 2.2.2.4 Construction des repères de contacts

La construction d'un repère de contact n'est effectuée que lorsque le contact entre deux floes  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  est **linéique** [Rab15, p.79], ou **ponctuel** et le vecteur porté par les points en contacts appartient au cône normal de  $P$ . La normale  $\mathbf{N}$  est alors déterminée comme le vecteur unité dirigé par  $\mathbf{PQ}$ . Si  $\mathbf{Q}$  n'est pas unique, on se retrouve dans la situation où il peut exister plusieurs repères de contact pour un point de contact. Dans les autres cas, le repère de contact associé au point  $P$  n'est pas construit et  $P$  n'est pas considéré dans le traitement des contacts [Rab15, p.80]. L'algorithme de détection des points de contacts afin de construire les repères de contact est explicité dans le document [Rab15, p.76].

### 2.2.2.5 Simulation des événements collisions

Une fois les voisins détectés et les repères de contact construits, on peut passer à la prochaine étape qui consiste en la simulation des événements de collisions. Ici, plusieurs choix s'offrent à nous : les méthodes dites de **régularisations**, les méthodes dites **itératives**, et les méthodes dites **de pivots** [Rab15, p.82]. La première catégorie est adaptée aux modèles régularisants, ce qui n'est le cas de notre modèle. La deuxième par contre a extensivement été utilisée dans la littérature ; on peut citer Moreau [Mor88; Mor99; Jea99], Aitken [Ait50]. Malheureusement, dès que la matrice  $A$  du problème de complémentarité à résoudre n'est plus symétrique, ce deuxième groupe de techniques ne s'avère pas efficace. RABATEL choisi donc l'algorithme de Lemke pour lequel il existe des preuves de convergence lorsque la matrice  $A$  est co-positive. Bien qu'il soit performant, il faut néanmoins noter que l'algorithme de Lemke étant une technique globale, c'est-à-dire traitant les contacts simultanément, il ne garantit pas une bonne propagation du contact [Rab15, p.82].

### 2.2.2.6 Optimisations

La première optimisation apporté est celle sur les distances de collision : deux floes sont en contact si la distance entre eux n'est pas nulle, mais supérieure à un seul appelée **distance de collision**.

La deuxième concerne la condition de non-interpénétration [Rab15, p.85]. En cas de congestion, il est difficile que les floes décollent après contact. En exigeant que  $\mathbf{J}^T W(t^+) > 0$  après collision, on risque ne pas avoir de solution pour le problème linéaire de complémentarité associé. RABATEL relaxe donc la condition de Signorini en définissant un réel  $c$ , et l'ensemble des vitesses admissibles devient donc :

$$V_c = \left\{ w \in \mathbb{R}^{3n} \mid \mathbf{J}^T w \geq c \right\}.$$

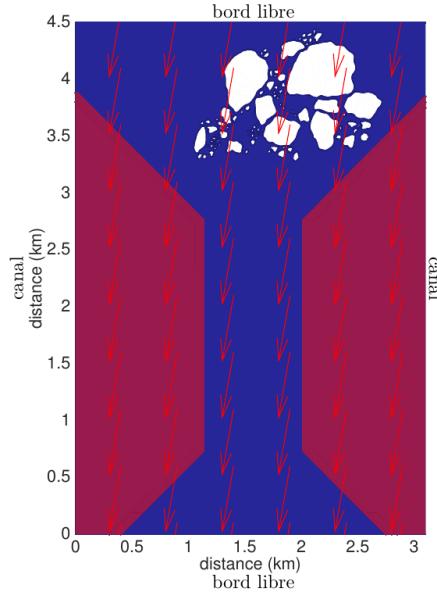
Une troisième optimisation concernant la définition de la **notion d'erreur** et de **tolérance** a été implémentée. La quatrième consiste en la résolution d'un LCP en trois tentatives (avec trois algorithmes de Lemke différents) même si cela augmente les coups de calculs [Rab15, p.86]. Si cette optimisation ne s'avère pas suffisante, une dernière optimisation consiste en la modification aléatoire de certains coefficients de la matrice  $A$ , la permutation des lignes afin d'éviter des zéros sur la diagonale, ou encore l'utilisation de la notion de **contact actif**.

### 2.2.3 Validations et exploitations du modèle

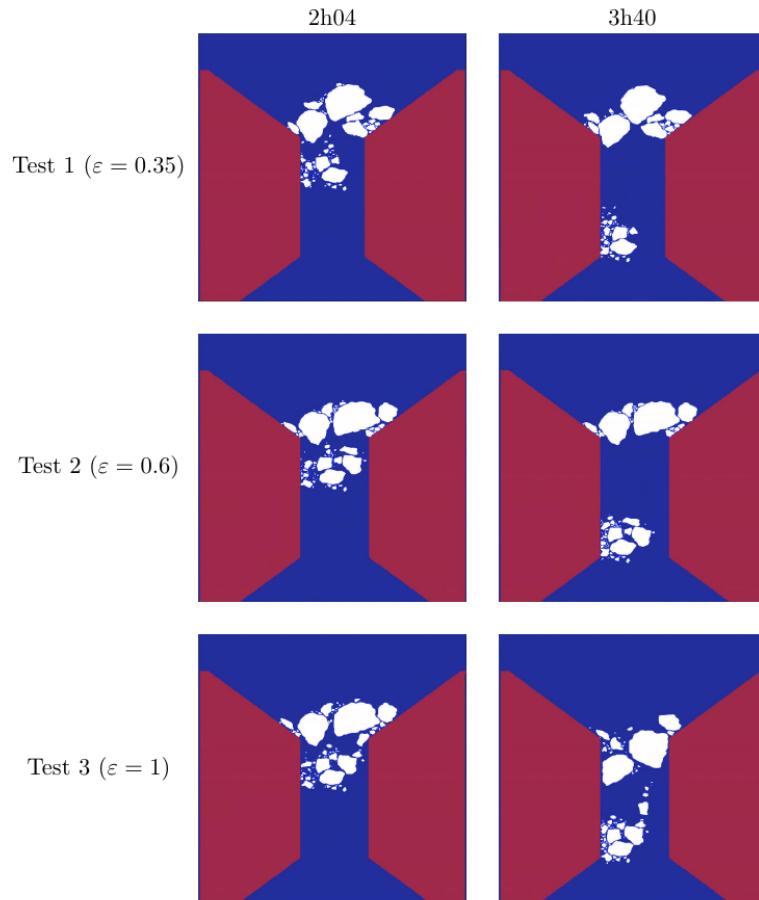
Les résultats ont été validés à travers plusieurs expériences. Nous citons des exemples classique tels que la **boîte glissante**, le **berceau de Newton**, le **canon de Newton**, la **balle rebondissante**, etc. Le modèle a ensuite été validé sur des scénarios simples de dérive libre soumise à des courants océanique et atmosphérique et des scénarios simples de collision. En effet, il a été vérifié que le comportement d'un objet simulé est cohérent avec le comportement théorique et avec les observations. Les principes physiques suivants ont ainsi pu être testé par RABATEL :

- la conservation de la symétrie d'une configuration ;
- la satisfaction du modèle de Coulomb ;
- le traitement d'un point d'accumulation ;
- la cohérence temporelle ou la propagation des ondes de choc ;
- la conservation de l'énergie cinétique.

Des telles exploitations telles que la dérive dans un canal étroit, pour des floes en bassins a été étudié (voir figures 2.6 et 2.7). Aussi, la dérive soumise à un vent et un courant variable avec des vitesses du vent provenant de ERAinterim, à partir du modèle glace de mer et océan TOPAZ a été étudiée.



**FIGURE 2.6** – Configuration à l'instant initial pour le scénario de dérive dans un canal étroit [Rab15, p.124].



**FIGURE 2.7** – Quelques résultats obtenus à deux heures différentes de la configuration des floes pour différentes valeurs du coefficient de restitution  $\varepsilon$  [Rab15, p.126].

## 2.2.4 Discussion

Bien que les travaux de RABATEL ont été testés et validés sur plusieurs configurations différentes, il reste néanmoins des points qui ne sont pas traités, et qui ont très clairement été soulignés dans la thèse [Rab15] :

1. Le modèle ne gère pas la rhéologie<sup>9</sup> de la glace : les floes sont des solides purement rigides (ils ne se déforment pas) et la dissipation d'énergie cinétique durant la collision est décrite en utilisant un coefficient purement empirique collision.
2. La loi de contact utilisée pour le glissement (voir [ST96]), bien que très riche, ne prends pas en compte toutes les vitesses possibles de déplacement. La construction d'une loi qui donnerait accès à la région entière, demanderait de prendre en compte un grand nombre de phénomènes intrinsèques aux contacts. Leur compréhension et leur rôle à chacun est difficile à déterminer.
3. Les coefficients de friction et de restitution utilisées sont limitants. En réalité, il n'est pas possible de prendre en compte ou d'interpréter mathématiquement certains effets lors du contact ; par exemple, avec la dispersion de l'énergie (voir [NB14]). Cette dispersion est la conséquence de certains effets vibratoires à travers une chaîne de contact. Seuls les effets de dissipation dus aux phénomènes locaux comme l'endommagement, la viscosité ou la plasticité sont pris en compte à travers l'utilisation des coefficients de restitution et de friction.
4. Les vitesses obtenues après la phase de décompression afin d'assurer la dissipation de l'énergie cinétique possèdent une faiblesse : elles ne sont solutions que sous certaines conditions, comme le fait que les chocs soient frontaux et qu'il n'y ait pas d'apport des forces extérieures autres que les forces de contact durant la collision [Rab15, p.41].

## 2.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu

Les travaux de D. Balasoiu concernent la modélisation et la simulation du comportement mécanique de floes de glace [Bal20a]. Il s'agit d'une amélioration des travaux de M. Rabatet, S. Labbé, et J. Weiss [Rab15; RLW15] prenant en compte la fracture des floes. Précisément, ce travail se focalise sur l'initiation de la fracture, ainsi que la prédiction du chemin que la fracture emprunte. Jusqu'à présent, les floes étaient considérés comme des corps rigides ; dans sa thèse, BALASOIU les considère comme des corps élastiques. Son travail est divisé en deux parties. Il commence par proposer un modèle efficace pour la fracture fragile d'un floe de glace, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord (i.e. à une condition au bord de type Dirichlet). Puis, dans un second temps, il cherche à obtenir l'expression du déplacement au bord d'un floe qui percute un autre floe ou une structure solide.

### 2.3.1 Théorie de la fracture : état de l'art

La théorie de fracture la plus répandue de nos jours est due à A.A. Griffith. Dans ses travaux [Gri21], il invalide les résultats que C. Inglis [Ing13] qui ne tenaient pas en compte la taille de la fracture ; il présente donc la croissance d'une faille comme une compétition d'énergie entre l'énergie élastique<sup>10</sup> et l'énergie de surface<sup>11</sup>. Le critère de Griffith est un critère thermodynamique qui stipule que la fracture progresse si et seulement si cela permet au matériau d'atteindre un état de

9. La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée.

10. Énergie relâchée lorsqu'un défaut subit un accroissement. Cette énergie diminue durant la fracture.

11. Énergie nécessaire à la création des deux nouvelles surfaces (les bords de la fissure). Cette énergie augmente avec l'accroissement de la fracture.

moindre énergie. En effet, sur un matériau élastique  $\Omega$  dont la frontière est subdivisée en deux zones  $\partial\Omega_D$ , et  $\partial\Omega_N$ , on pose [Bal20a, p.33] :

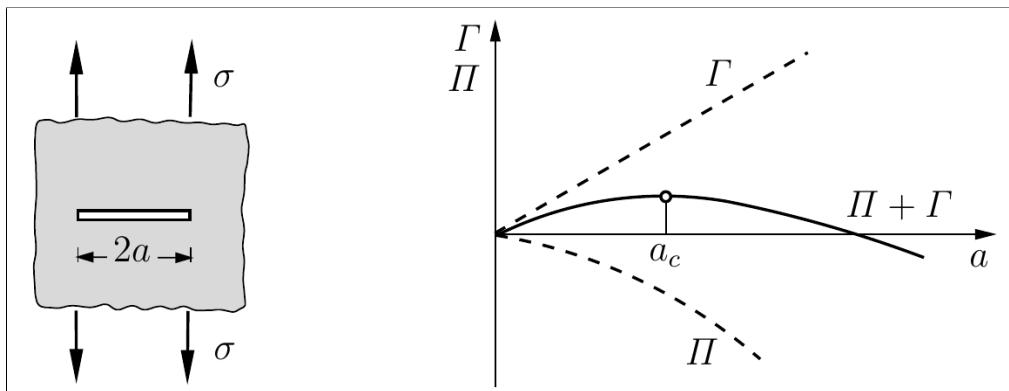
$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_{\Omega} W(x, e(u)) dx \\ \mathcal{P}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega \setminus \sigma(t)} W(x, \nabla \varphi(t, \sigma(t))) dx - \mathcal{F}(t, \sigma(t)) \\ \mathcal{F}(t, \sigma(t)) &= \int_{\Omega} f_v(x) \cdot \varphi dx + \int_{\partial\Omega_N} f_s(x) \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

où

- $E_{el}$  est l'énergie élastique du matériau sans faille.
- $\sigma(t)$  représente la fracture au temps  $t$ , supposée à l'équilibre.
- $\mathcal{P}$  l'énergie potentielle du matériau qui possède une fracture de taille  $\sigma(t)$  au temps  $t$ .
- $e(u)$  est le tenseur de Green-St Venant, qui représente la déformation locale du matériau.
- $\varphi = \text{Id} + u$  représente le déplacement du matériau supposé suffisamment régulier.
- $W$  est la densité d'énergie du matériau élastique, supposé hyper-élastique.
- $f_s$  est la contrainte surfacique appliquée sur le bord  $\partial\Omega_N$ .
- $f_v$  est le champ de force volumique appliquée sur  $\Omega$ .

D'après le critère de Griffith [Bal20a, p.34], la fonction  $\sigma(t)$  doit vérifier :

1.  $\frac{d\sigma(t)}{dt} \geq 0$ ;
2.  $-\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) \leq k$ ;
3.  $\frac{d\sigma(t)}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{d\mathcal{P}}{d\sigma}(t, \sigma(t)) = k$ .



**FIGURE 2.8 –** Illustration du critère de Griffith [GS17]. ( $\Pi$  et  $\Gamma$  représentent les énergies potentielles et de fracture respectivement. Cette figure est à refaire manuellement !)

Une illustration de ce critère peut être observée à la figure 2.8. Comme mentionné plus haut, ce modèle souffre de problèmes de nucléation et de prédiction de la fracture. Pour contourner le problème de nucléation, les mécaniciens considèrent que tout matériau possède des microfissures, et ce sont ces dernières qui sont à l'origine des fissures observables à l'œil. Quant au problème du chemin emprunté par la fracture, A. Chambolle, G. Francfort et J.-J. Marigo [CFM09] montrent que les critères d'Irwin [Irw57] sont invalides car, ils impliquent que, dans un matériau homogène et isotrope, le chemin de la fracture ne peut être courbé.

Le modèle proposé par Francfort et Marigo [FM98], suit un résultat théorique dû à De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci [DGCL89], qui prouvent le théorème d'existence d'un minimum pour la

fonctionnelle de Mumford-Shah qui intervient dans la détection des contours d'une image. Présentons les données géométriques du problème [Bal20a, p.37]. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert connexe, dont la frontière  $\partial\Omega$  est suffisamment lisse. On partitionne sa frontière :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N,$$

où  $\partial\Omega_D$  et  $\partial\Omega_N$  sont les bords où l'on applique respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann. Sur la partie Dirichlet, on applique un déplacement du bord noté  $U_D$ , tandis que l'on laisse libre la partie de Neumann. On suppose également que le matériau est soumis à un champ de force volumique  $f_v$ . On suppose que  $\Omega$  est un matériau hyper-élastique, dont la densité d'énergie est notée  $W$ . Ainsi, lorsque le matériau  $\Omega$  subit (sans fracture) une déformation  $\varphi = u + \text{Id}$  suffisamment lisse, son énergie élastique vaut :

$$E_{\text{el}}(u) = \int_{\Omega} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a noté  $u$  le champ de déplacement du matériau, et  $e(u)$  son gradient symétrisé. On notera l'énergie élastique du matériau qui présente une fracture  $\sigma$  :

$$E_{\text{el}}(u, \sigma) = \inf_{u \in V_{U_D, \sigma}} \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx,$$

où l'on a défini l'espace fonctionnel  $V_{U_D, \sigma}$  par :

$$V_{U_D, \sigma} = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^N) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}.$$

Francfort et Marigo proposent l'énergie de fracture suivante sur  $\partial\Omega_D$  :

$$E_{\text{frac}}(\sigma) = \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

où le champ scalaire  $k(x)$  traduit la rigidité du matériau, et est supposée strictement positive sur tout le matériau;  $\mathcal{H}^{N-1}$  représente la mesure de Haussdorff de dimension  $N - 1$ , qui peut être comprise comme la longueur du contour pour  $N = 2$ . Ainsi, l'énergie totale du matériau vaut :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(u, \sigma) &= E_{\text{el}}(u, \sigma) + E_{\text{frac}}(\sigma) \\ &= \int_{\Omega \setminus \sigma} W(x, e(u)) \, dx + \int_{\sigma} k(x) \, d\mathcal{H}^{N-1}, \end{aligned}$$

où  $\sigma$  est une union dénombrable d'ensembles rectifiables. Ainsi donc, une solution du problème de fracture est un minimum de la fonctionnelle  $E_{\text{tot}}$ . Signalons que BALASOIU montre, dans le cas d'un mouvement antiplan<sup>12</sup>, que le modèle est quasiment identique au modèle de De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci, pour lequel un théorème d'existence a pu être exhibé.

La méthode numérique employée est la méthode à champ de phases. Elle repose sur la notion de  $\Gamma$ -convergence, en particulier sur le résultat de **convergence des minimums**. On remplace l'inconnue  $\sigma$  par une suite de fonctions lisses  $v_\varepsilon$ . Par exemple, dans le cas du traitement d'image, pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dont se sont inspiré Bourdin, Francfort et Marigo, on constate

---

12. Un mouvement **antiplan** est mouvement pour lequel le champ de déplacement  $u$  est porté par un vecteur constant.

d'après Ambrosio et Tortorelli [AT90] que la suite de fonctionnelle

$$G_\varepsilon(\cdot) = \int_{\Omega} \left( |u - g|^2 + (v^2 + \eta_\varepsilon)|\nabla u|^2 + \varepsilon|\nabla v|^2 + \frac{(v - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx,$$

$\Gamma$ -converge vers la fonctionnelle limite

$$G_f = \int_{\Omega} |u - g|^2 + |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u),$$

où  $g : \Omega \mapsto [0, 1]$  est la fonction de contraste de l'image, et  $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$  est la restriction de la mesure de Hausdorff à l'ensemble des sauts de  $u$ , noté  $S_u$ , qui est un ensemble mesurable et composé d'une union dénombrable d'ensembles rectifiables [Bal20a, pp.35-37]. Plusieurs études numériques reposant sur ce résultat de  $\Gamma$ -convergence sont disponibles dans la littérature. On cite par exemple ici les résultats obtenus dans [Nag+19] à la figure 2.9.

### 2.3.2 Un modèle de fracture variationnel et efficace

Le modèle présenté dans la section précédente n'est pas adapté à notre étude. BALASOIU a donc développé un modèle qui ne nécessite pas de fonctionnelle lissée, comme l'on fait plusieurs modèles de glaciologie (voir [LLL15]), en supposant que les fractures sont des segments. Un résultat d'existence (dans les cas où le floe n'est pas encore fracturé) est prouvé à l'aide de la convergence de Mosco. De plus, BALASOIU introduit un problème d'évolution quasi-statique en appliquant progressivement la condition de Dirichlet sur une partie du bord du floe. Les fractures obtenues par ce problème d'évolution sont ainsi des lignes brisées. Le résultat d'existence n'a pas été prouvé pour ce cas. Concernant le côté numérique, une méthode *meshless*<sup>13</sup> est proposée.

Les modifications apportées pour traiter le modèle statique (dans  $\mathbb{R}^2$ ) sont décrites ci-bas. Lorsqu'on fixe la fracture  $\sigma$ , l'énergie élastique prend la forme :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}}(\cdot, \sigma) : A_\sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx, \end{aligned}$$

où  $A$  représente le tenseur de Lamé du matériau, i.e.

$$\forall e \in M_2 \mathbb{R}, \quad Ae = \lambda \operatorname{tr}(e) I_2 + 2\mu e,$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau; et l'ensemble des déplacements admissibles  $A_\sigma$  est :

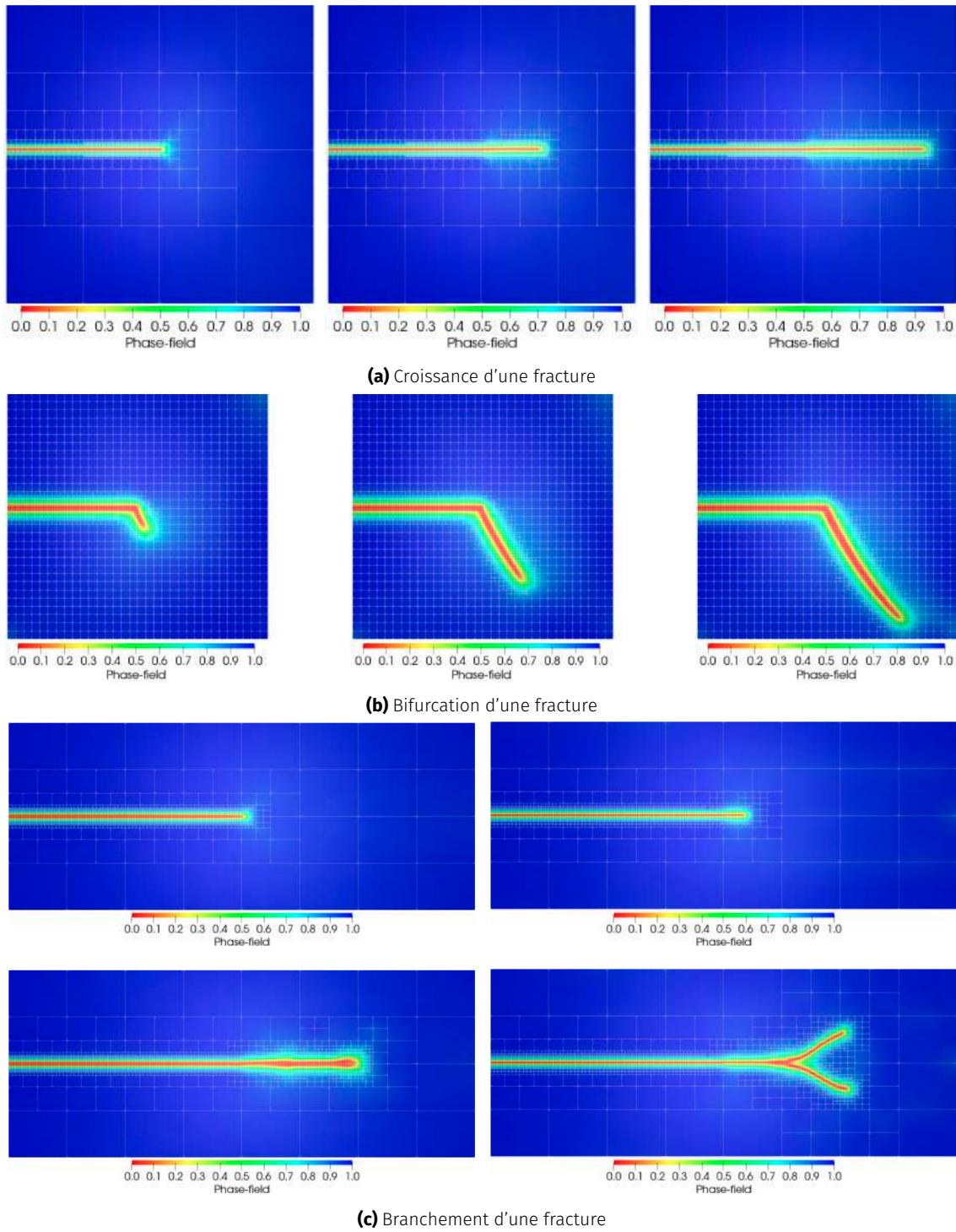
$$A_\sigma = \left\{ u \in H^1(\Omega \setminus \sigma \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma \right\},$$

avec  $u^+$  et  $u$  les restrictions de  $u$  aux régions  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  respectivement (obtenues par extension de la fracture  $\sigma$  de façon à ce qu'elle soit traversante [Bal20a, p.52]).  $\nu$  (normale à la fracture orientée du bord vers le centre de  $\Omega$ ) et  $\nu$ . On note la présence d'une condition de type Signorini :

$$(u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma$$

---

13. Car l'ensemble discréte des fractures admissibles ne dépend pas du maillage utilisé.



**FIGURE 2.9 –** Trois résultats numériques obtenus dans [Nag+19] à l'aide d'une discréétisation éléments finis (*hp*-FEM) et volumes finis en ne remaillant le domaine que lorsque c'est nécessaire.

L'énergie totale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} A e(u) : e(u) \, dx + k \mathcal{H}^1(\sigma),
 \end{aligned}$$

où  $\Sigma$  représentent l'ensemble les segments orientés partant de la frontière donnée par

$$\Sigma = \{[a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \overline{\Omega}, ]a, b[\in \Omega\}.$$

Une solution de notre modèle de fracture fragile est un couple  $(u, \sigma)$  qui vérifie

$$E_{\text{tot}}(u, \sigma) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma).$$

Ensuite, BALASOIU remarque que la solution n'est pas unique. Il définit donc un problème de d'évolution quasi-statique à la manière de [FM98], en considérant un problème de chargement monotone :

$$U_D(t) = t U_D.$$

On note  $\bar{\Sigma}$  l'ensemble des lignes brisées de  $\Omega$ , sans point d'auto-intersection et qui partent de la frontière. On note également  $\text{end}(\sigma)$  la fin d'une ligne brisée  $\sigma \in \bar{\Sigma}$ . On définit maintenant [Bal20a, p.50], pour toute ligne brisée  $\sigma \in \bar{\Sigma}$  l'ensemble des fractures admissibles partant de  $\sigma$  :

$$\Sigma_\emptyset = \Sigma, \quad \Sigma_\sigma = \{\sigma \cup [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a = \text{end}(\sigma), b \in \overline{\Omega}, ]a, b[\in \Omega \setminus \sigma\}.$$

On définit également l'ensemble des déplacements admissibles associées :

$$A_{t,\sigma} = \{u \in H^1(\Omega \setminus \sigma; \mathbb{R}^2) \mid u = t U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma \text{ et } (u^+ - u^-) \cdot \nu \text{ sur } \sigma\},$$

pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour toute ligne brisée  $\sigma$ . De ces définitions, on peut en exhiber un problème d'évolution discret, et un problème d'évolution continue en faisant tendre  $t$  vers 0. Le problème d'évolution continue admet des solutions, comme limite de solutions des problèmes d'évolutions discrets [DMT02; Cha03].

Lorsque la fracture est fixée, BALASOIU prouve l'existence de solutions à notre problème de minimisation, en utilisant la théorie des inégalités variationnelles, l'inégalité de Korn [Cia88], le théorème de Lions-Stampacchia [LS67]. Pour le cas statique, il montre que le problème statique a des solutions lorsque l'ouvert n'est pas encore fracturé, ceci en se servant principalement de la convergence de Mosco. Pour le modèle quasi-statique, un résultat d'existence n'a pas été trouvé, et une conjecture pour une ligne brisée qui possède un point d'auto-intersection a été proposée.

### 2.3.3 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts régulier

Dans ce chapitre, BALASOIU souhaite approcher l'énergie élastique d'un matériau continu par l'énergie élastique d'un réseau de ressorts, dans un cadre statique, lorsque celui-ci est soumis à un déplacement de son bord. Autrement dit, nous ne nous intéressons pas au mouvement des particules, nous n'étudions que l'état d'équilibre du réseau de ressorts.

Commencons par quelques définitions pour le maillage sur un floe. Pour définir un réseau de ressort  $\tau$ , on définit l'ensemble de ses points  $\tau_0$  disposées en forme de grille.

$$\tau_0 = \Omega \cap \mathbb{Z}^2$$

De façon similaire, l'ensemble des arêtes se nomme  $\tau_1$ , et l'ensemble des cellules  $\tau_2$ . Le réseau  $\tau$  est obtenu à partir de  $\tau_0$  en traçant les côtés de chaque carré ; à la frontière, on trace les diagonales des carrés incomplets. On note  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  l'ensemble des fonctions de  $\tau_0$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On définit également deux triangulations de  $\omega$  à partir de  $\tau$ , en prenant respectivement les diagonales des carrés dans les directions  $e_x + e_y$  et  $e_x - e_y$ . On note ces triangulations  $\tilde{\tau}$  et  $\hat{\tau}$  respectivement. Afin d'éviter les déformations qui envoient deux points voisins sur le même point, on définit avec l'ensemble des

déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\},$$

Sur chaque arête  $\nu \in \tau_1$ , on place un ressort de longueur à vide  $l_\nu = |\nu|$ , et de raideur  $k_\nu$  (voir figure 2.10a). Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressorts, et  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, l'énergie élastique de traction de l'assemblage :

$$\begin{aligned} R_\tau(u) &= R_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{\nu \in \tau_1} \frac{k_\nu}{2} (|\varphi(\nu)| - |\nu|)^2. \end{aligned}$$

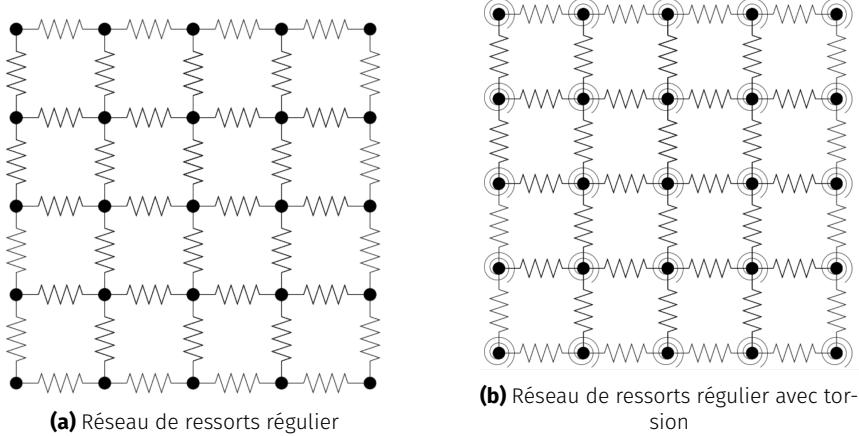
En chaque point du maillage, on ajoute un ressort de torsion, d'angle de repos  $\frac{\pi}{2}$ , et de raideur  $G|\nu|^2$  (voir figure 2.10b). L'énergie élastique de torsion de l'assemblage vaut

$$\begin{aligned} T_\tau(u) &= T_\tau(\varphi - \text{Id}) \\ &= \sum_{c \in \tau_2} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \in c \cap \tau_1 \\ \nu_1 \cap \nu_2 \in \tau_0}} \frac{G|\nu|^2}{4} \left( \angle(\varphi(e_{\nu_1}), \varphi(e_{\nu_2})) - \frac{\pi}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

avec  $\angle(\cdot, \cdot)$  l'angle entre deux vecteurs du plan. On note enfin

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale du réseau.



**FIGURE 2.10** – Réseau de ressort considéré durant cette étude.

Ensuite, BALASOIU considère la suite  $\tau_n$  de réseau défini, comme aux paragraphes précédents par

$$\tau_{n,0} = \Omega \cap \frac{1}{n} \mathbb{Z}^2.$$

On rappelle que  $k_1, k_2$  représentent les constantes de raideurs des ressorts sur les arêtes du réseau dans les deux directions de  $\Omega$ , et  $G$  la constante de torsion des ressorts aux nœuds. Sur le maillage  $\tau_n$ , après définition des énergies redimensionnées élastiques de traction  $R_n$ , et de torsion  $T_n$ , [Bal20a, p.91] montre les théorèmes suivants.

**Théorème 2.3.1 ( $\Gamma$ -convergence).** La suite d'énergie redimensionnée  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge, pour la topologie faible de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , vers la fonctionnelle limite :

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_h e(u) : e(u) \, dx, \end{aligned}$$

avec  $C_h$  le tenseur de rigidité du matériau homogénéisé, qui vérifie :

$$C_{h,ijkl} M : M = k_1 M_{1,1}^2 + k_2 M_{2,2}^2 + 16G(M_{1,2} + M_{2,1})^2,$$

De plus, ce tenseur est celui d'un matériau élastique homogène et isotrope si et seulement si l'on a  $k_1 = k_2 = k = 8G$ . Dans ce cas, on a :

$$E_{\text{el}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_{\lambda,\mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

avec :  $\lambda = 0$ , et  $\mu = \frac{k}{2}$ .

**Théorème 2.3.2 (Équi-coercivité).** Soit  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan, et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacement est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

Le théorème 2.3.1 permet de constater que le tenseur de rigidité obtenu, lorsqu'il est isotrope, a un coefficient de Poisson nul<sup>14</sup>. BALASOIU a donc proposé un calcul formel de la limite simple de la suite d'énergies discrètes dans le cas où le réseau de ressorts serait stochastique, de loi isotrope. En particulier, il trouve dans ce cas un coefficient de Poisson fixe de 1/4.

### 2.3.4 Un processus stochastique de maillages isotropes

Le résumé du chapitre [Bal20a, p.136] est ici très succinct. Ce chapitre fait appel à des outils fins de probabilité conditionnelle et de processus stochastiques, telles que **mesure et formules de Campbell, distribution de Palm**, etc.

Dans ce chapitre, BALASOIU a construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. Il commence par donner plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules nous se montreront très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

La notion de processus pointuel est un outil qui peut permettre de construire un ensemble de points dénombrable, sans point d'accumulation. BALASOIU définit un **processus stochastique simple de  $\mathbb{R}^d$**  comme : une variable aléatoire  $\Phi$  d'un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  dans l'espace  $(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ . Elle induit une loi de probabilité  $\mathbb{P}_\Phi$  sur  $(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$  : l'espace  $(\Omega, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi)$  est un espace de probabilités. Dans cette définition, nous avons :

14. Cela correspond par exemple à un étirement longitudinal du réseau de ressorts, sans effet (amincissement ou épaissement) sur la section transversale.

- $\Omega$  est ensemble des parties localement finies de  $\mathbb{R}^d$ . Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des motifs de points de  $\mathbb{R}^d$ ;
- $\mathcal{N}$  est la plus petite tribu (sur  $\Omega$ ) qui rende mesurable les applications qui comptent le nombre de points du processus.

Une fois le processus défini, on peut définir sa **mesure d'intensité**  $\Lambda$  :

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ B &\mapsto \mathbb{E}(\Phi(B)) = \mathbb{E}(\text{Card } \Phi \cap B),\end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}(F)$  désigne l'espérance de la variable aléatoire  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

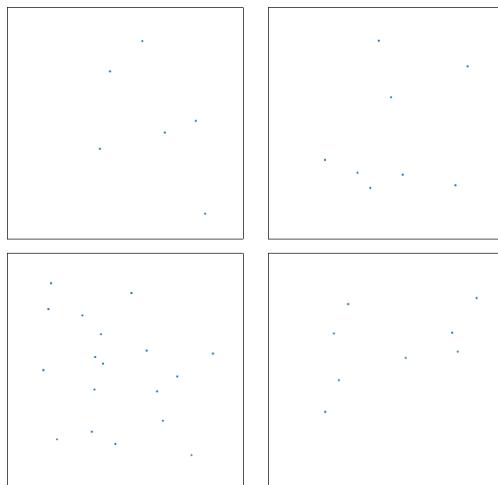
La première formule de Campbell permet de relier la moyenne d'une somme sur les points du processus avec l'intensité du processus. En effet, soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable et positive, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x).$$

Un processus stochastique ponctuel  $\Phi$  est dit de Poisson (cf. figure 2.11) s'il vérifie les hypothèses suivantes :

1.  $\Phi$  est à éparpillement indépendant, c'est à dire que si  $(B_i)_{i \in 1, \dots, k}$  sont des boréliens deux à deux disjoints ; alors les variables aléatoires  $\Phi(B_i)$  sont indépendantes ;
2. pour tout  $B$  borélien, la variable aléatoire  $\Phi(B) = \text{Card } \Phi \cap B$  suit une loi de poisson de moyenne  $\mu = \lambda \nu_d(B)$ , c'est à dire que :

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu).$$



**FIGURE 2.11** – Tirages d'un processus de Poisson d'intensité 10 sur le carré unité [Bal20a, p.137]. En premier, le nombre de point est obtenu par une v.a. suivant une loi de Poisson d'espérance 10. Ensuite les coordonnées des points sont obtenus par simulation de deux v.a. suivant des lois uniformes [Kee18].

BALASOIU ne s'arrête pas là. Il définit aussi les notions d'espace Polonais, mesure de compatage, et de convergence faible dièse. Ces notions sont importante vu la nécessité d'associer un point du processus ponctuel à une marque, i.e. un simplexe de  $\mathbb{R}^d$  dans notre cas. BALASOIU introduit les notions de mesure de Campbell, qui permet d'obtenir la seconde formule de Campbell. Ensuite il

définit la distribution de Palm, permettant ainsi d'obtenir la très importante formule de Campbell-Mecke :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).$$

où  $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable et positive. Lorsque le processus ponctuel  $\Phi$  est stationnaire d'intensité  $\lambda$ , on a :

$$\int_{\Omega} \sum_{x \in \varphi} f(x, \varphi_{-x}) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x).$$

où  $\mathbb{P}_0$  désigne la distribution de Palm. Le résultant de Slynvyak-Mecke suivant est une généralisation de cette dernière formule, lorsque les processus  $\Phi$  est de Poisson, et la fonction mesurable positive  $f : (\mathbb{R}^d)^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi} f(x_1, \dots, x_n, \Phi)\right) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}(f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})) dx_1 \dots dx_n.$$

La prochaine étape consiste en la présentation d'un **théorème ergodique** qui lie la forme globale d'un seul tirage avec la forme moyenne en un point de plusieurs tirages. Ici aussi, BALASOIU se base sur les travaux de D. J. Daley et D. Vere-Jones [DVJ08].

**Théorème 2.3.3.** Soit  $\Phi$  un processus de Poisson, et  $f$  une fonction mesurable et positive qui vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{x \in \Phi} f(\Phi_{-x})\right) < +\infty.$$

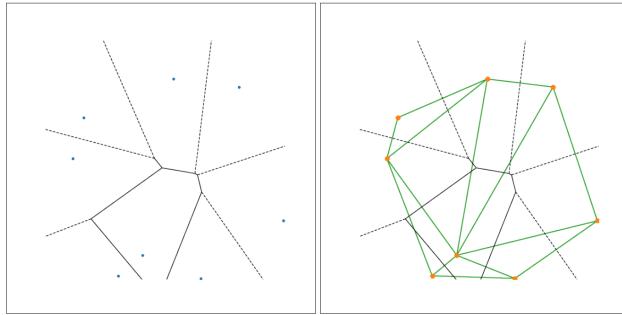
On note  $B_n$  la boule de  $\mathbb{R}^d$ , centrée en 0 et de rayon  $n$ . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(B_n)} \sum_{x_i \in B_n \cap \Phi} f(\Phi_{-x_i}) = \int_{\Omega} f(\varphi) d\mathbb{P}_0(x).$$

Ensuite, BALASOIU s'attaque aux notions de maillages et pavages, en particulier les **pavages de Voronoï** (cf. figure 2.12). Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arrêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permettra de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sûre si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Soit donc  $\varphi \in \Omega$  un ensemble localement fini de points. On appelle diagramme de Voronoï associé à  $\varphi$  le pavage régulier de  $\mathbb{R}^d$  par  $(C(x))_{x \in \varphi}$  où la cellule  $C(x)$  est définie par :

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(y, x) < \inf_{z \in \varphi \setminus \{x\}} \text{dist}(y, z) \right\}.$$



**FIGURE 2.12** – Ensemble de points avec les diagramme de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) associés [Bal20a, p.138].

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (cf. théorème 2.3.3), BALASOIU montre que si  $\Phi$  est un processus de Poisson, alors les points de  $\varphi$  sont presque sûrement en **position générale**<sup>15</sup>. En corollaire, si  $\varphi$  est un ensemble de points en position générale, alors  $\varphi$  est l'ensemble des sommets du **maillage de Delaunay**<sup>16</sup>  $D_\varphi$  construit sur le pavage de Voronoi  $V_\varphi$ .

Ce chapitre se termine par la notion de convergence d'une suite de maillages. BALASOIU montre que, si l'on dilate (cf. figure 2.13) le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtenons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Il a également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle sera utile dans le chapitre suivant, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

Soit donc  $D \subset \mathbb{R}^d$  un domaine, i.e. un ouvert connexe, de l'espace. Soit  $\Phi$  un processus ponctuel de l'espace qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  une suite positive, croissante et divergente. On définit, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le processus ponctuel  $\Phi_n$  par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}} \Phi.$$

On note  $\tau_n$  (cf. figure 2.13) le maillage par simplexe défini presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points  $\Phi_n \cap D$  :

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D},$$

ce qui permet d'obtenir le théorème suivant :

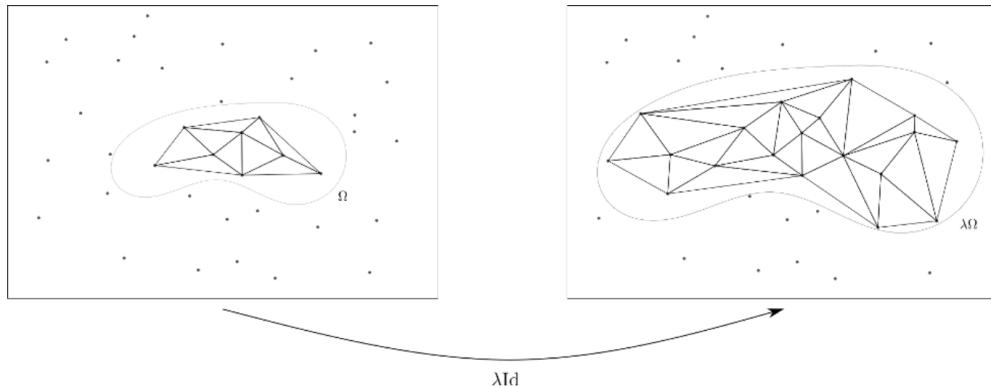
**Théorème 2.3.4.** *Si la suite d'intensités  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n),$$

*alors, presque sûrement, la suite  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de maillages de  $D$  converge uniformément vers  $D$ .*

15. Voir définition 4.4.5 de la thèse [Bal20a, p.128].

16. Une triangulation de Delaunay maximise le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles.



**FIGURE 2.13** – Dilatation de l’ouvert  $D$  [Bal20a, p.138].

### 2.3.5 Étude asymptotique d’un réseau de ressorts isotrope

Dans cette partie, BALASOIU propose un second résultat d’approximation d’un matériau élastique par un réseau de ressorts. Dans la partie précédente, il avait proposé un résultat d’approximation d’un matériau élastique par un réseau régulier, à mailles carrées. Ici, les mailles seront triangulaires. Plus précisément Le réseau de ressorts que nous utiliserons dans ce chapitre est défini dans la section précédente, et repose sur la théorie des processus stochastiques ponctuels. Nous proposons dans ce chapitre un résultat de  $\Gamma$ -convergence de l’énergie élastique sur un réseau de ressorts, issu d’un processus stochastique de loi isotrope.

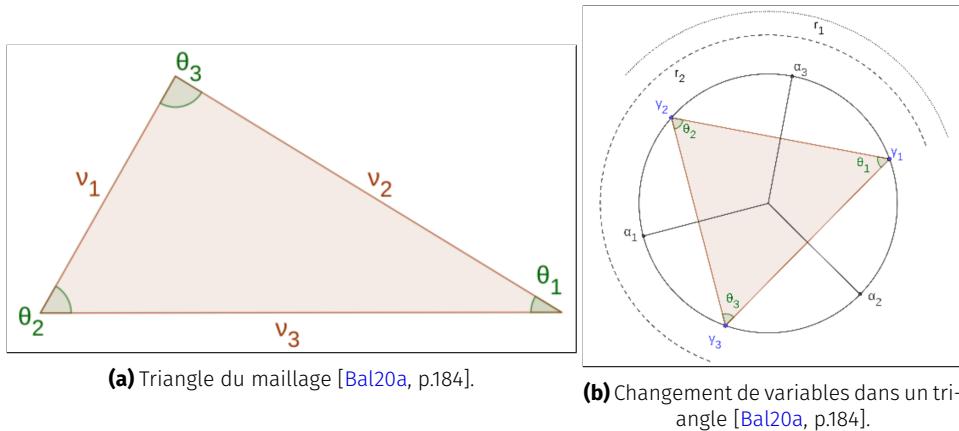
Présentons le réseau de ressorts utilisé pour approcher l’énergie élastique d’un matériel continu  $D$ . Il s’agit des mêmes définitions utilisées pour introduire le théorème 2.3.4 ci-haut, cette fois ci en dimension 2. On suppose que  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine du plan, i.e. un ouvert du plan, qui est connexe et dont la frontière est lisse. On considère une triangulation quelconque  $\tau$  du domaine  $D$ . On note  $W(\tau, \mathbb{R}^2)$  l’espace des éléments finis  $P1$  défini sur le maillage  $\tau$ . On note, comme précédemment,  $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$  l’ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau_2, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \bar{\omega}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\}.$$

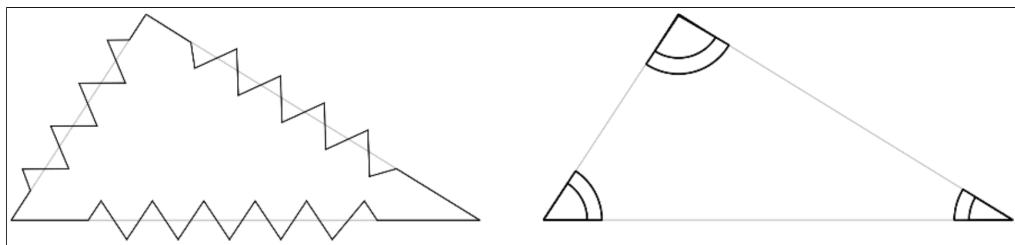
On souhaite construire un réseau de ressorts sur  $\tau$  tel que l’énergie totale  $E_\tau$  soit équi-coercive. Mais puisque l’on utilisera des triangulations construites sur un processus de Poisson, la coercivité n’est pas assurée. Pour remédier à ce manque de coercivité, on va placer sur  $\tau$  deux types de ressorts : **des ressorts de traction** et **des ressorts de torsion**. Les constantes de raideur des ressorts de traction et de torsion dépendent des angles du triangle de base des ressorts, et elles tendent vers l’infini si l’angle correspondant tend vers 0. Les constantes de rigidité des réseaux de ressorts sont supposées constantes. On note, comme au chapitres précédents,  $R_\tau$  l’énergie du réseau de ressorts de traction, et  $T_\tau$  l’énergie du réseau de ressorts de torsion. On note de plus :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l’énergie totale sur le réseau  $\tau$ . On note également, pour tout triangle  $t \in \tau_2$  du maillage,  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  ses trois cotés, ainsi que  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  les trois angles opposés (voir figure 2.14a).



**FIGURE 2.14** – Illustration des éléments du maillages, et des coordonnées.



**FIGURE 2.15** – Ressorts de traction (à gauche) et de torsion (à droite) [Bal20a, p.184].

On commence par définir l'énergie élastique du réseau de ressorts de traction  $R_\tau$ , et on renvoie à la figure 2.15. On note  $k > 0$  la constante de rigidité du réseau. On place, sur chaque arrête  $v_i$  de chaque triangle  $t$  du maillage, un ressort de traction de longueur à vide  $l_i = |v_i|$  et de raideur  $k_i$ , avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad k_i = \frac{k}{\sin(\theta_i)}.$$

Si  $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$  est une déformation du réseau de ressort, et  $u = \varphi - \text{Id}$  est le déplacement associé, l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$R_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k|v_i|^2}{2\sin(\theta_i)} \left( \|\nabla \varphi e_{v_i}\| - 1 \right)^2.$$

On définit maintenant l'énergie  $T_\tau$ , et on renvoie aux figures 2.14b et 2.15. On note  $G > 0$  la constante de rigidité de torsion du réseau. On place, sur chaque angle  $\theta_i$  de chaque triangle  $t$  du maillage, un ressort de torsion de raideur  $G_i$  :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_i = \frac{G|v_{i+1}| |v_{i+2}|}{\sin(\theta_i)}.$$

On définit l'énergie élastique discrète de l'assemblage :

$$T_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G|v_{i+1}| |v_{i+2}|}{2\sin(\theta_i)} \left( \angle(\varphi(v_{i+1}), v_{i+2}) - \angle(v_{i+1}, v_{i+2})^2 \right),$$

avec  $\angle(\cdot, \cdot)$  l'angle entre deux vecteurs du plan. Ensuite, on étend les énergies élastiques définies sur les réseaux à  $H^1(D, \mathbb{R}^2)$ , en notant :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto &\begin{cases} R_\tau(u) \text{ si } u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} & u \mapsto &\begin{cases} T_\tau(u) \text{ si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit maintenant la suite d'énergies élastiques définies sur la suite des réseaux  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On introduit un changement d'échelle des énergies  $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$  pour prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements. Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive qui tend vers 0. On note, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & & u \mapsto \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n$$

On donne enfin une version modifiée des suites fonctionnelles  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui prenne en compte une condition de Dirichlet sur le bord de  $D$ . Soit donc  $v \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  la donnée du bord. On note :

$$W_n^v(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \tau_0, \text{dist}(p, \partial D) \leq \lambda_n, u(p) = v(p) \right\}.$$

On pose ensuite, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} R_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto &\begin{cases} R_\tau(u) \text{ si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} & u \mapsto &\begin{cases} T_\tau(u) \text{ si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que

$$E_n^v = R_n^v + T_n^v.$$

On énonce maintenant les trois théorèmes principaux du chapitre.

**Théorème 2.3.5 (Convergence simple).** *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction  $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ , il existe une suite de déplacements discrets  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

et qui vérifie de plus :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} E_s(u)$$

avec :

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

où  $K_{\lambda, \mu}$  est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda, \mu} e : e = \lambda \text{tr}(e)^2 + 2\mu \text{tr}(e)^2,$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  les premières et deuxième constantes de Lamé, qui valent :

$$\lambda = \frac{32k|A|}{9\pi^2} + \frac{3G|A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k|A|}{9\pi^2} - \frac{3G|A|}{4}$$

**Théorème 2.3.6 ( $\Gamma$ -convergence).** Supposons que la suite de changements d'échelle  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\lambda_n n^{1/2+\alpha}}\right).$$

Alors, la suite de fonctionnelles redimensionnées  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{\text{hom}} : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$E_{\text{hom}}(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon ,} \end{cases}$$

où  $K_{\lambda, \mu}$  est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}), \quad K_{\lambda_h, \mu_h} e : e = \lambda_h \operatorname{tr}(e)^2 + 2\mu_h \operatorname{tr}(e)^2.$$

De plus, pour toute donnée au bord  $v$  dans  $\operatorname{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , la suite de fonctionnelles  $(E_n^v)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle  $E_{\text{hom}}^v : L^2(D, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$E_{\text{hom}}^v(u) = \begin{cases} \int_D K_{\lambda_h, \mu_h} e(u) : e(u) \, dx & \text{si } u - v \in H^1(D, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

**Théorème 2.3.7 (Équi-coercivité).** Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages du plan et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de déplacements admissibles de  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , i.e. vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2).$$

On suppose de plus que cette suite de déplacements est bornée pour l'énergie :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n(u_n) \leq C.$$

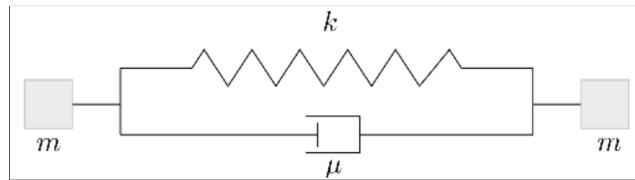
Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

### 2.3.6 Résultat de quasi-staticité à grande raideur

Ce dernier chapitre propose un résultat de quasi-staticité d'un réseau de ressorts percuté par un objet ponctuel lorsque la raideur du système et sa masse totale tendent vers l'infini. Lors de la collision de floes de glaces, la vitesse relative des floes (de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres par seconde, voir [Ram+09]) est bien inférieure à la vitesse de propagation des ondes élastiques dans la glace (de l'ordre de grandeur de 1800 mètres par seconde pour les ondes de cisaillement, voir [Mar+19]). BALASOIU montre que, lors de la percussion d'un réseau masse-ressort par un objet solide, les effets dynamiques disparaissent lorsque la raideur des ressorts tend vers l'infini. Autrement dit, nous montrons que le réseau limite, de raideur infinie, est à chaque instant dans un état d'équilibre. Plus précisément, nous observerons que le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit **système intérieur** (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Le second, dit **système extérieur** (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts.

On étudie le phénomène de percussion d'un système masse-ressort de  $n+1$  particules, chacune de masse  $m$ , par un objet ponctuel  $P$  de masse  $M$ . Le système masse-ressort utilisé est de constante de raideur  $k > 0$ , et de constante de viscosité  $\mu > 0$ . Soit  $\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$  une triangulation compacte et connexe du plan. En chaque noeud  $q \in \tau_0$ , on place une masse ponctuelle  $m$ . Sur chaque arrête  $\omega \in \tau_1$  de  $\tau$ , on place en parallèle (voir figure 2.16) :

1. un ressort de longueur à l'équilibre  $L_0$  et de raideur  $k$ ,
2. un dissipateur visqueux, de viscosité  $\mu$ .



**FIGURE 2.16 –** Système élémentaire masse-ressort utilisé.

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , le système masse-ressorts est à l'équilibre, et qu'il est percuté par la masse ponctuelle  $P$  au point  $q_0 \in \partial\tau_0$ . On note  $v_0$  la vitesse du point  $P$  lors de la collision. On suppose également que le système  $\{q_0, P\}$  devient inséparable, de masse  $m + M$ . Sur le maillage  $\tau$ , on note  $\tau_0$  l'ensemble des noeuds du système. On a donc :

$$\tau_0 = \{q_0, \dots, q_n\},$$

où les  $q_i$  sont les coordonnées des masses. On rappelle que le système est à l'équilibre au temps  $t = 0$ . On note  $a, b \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbb{R})$  les vecteurs de positions et vitesses initiales définis par :

$$\begin{cases} a = (q_0(0), \dots, q_n(0)), \\ b = (v_0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

On note de plus  $C \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice de connectivité :

$$0 \leq i < j \leq n+1, C_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } q_i \in \mathcal{V}(q_j), \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où  $\mathcal{V}(q)$  désigne l'ensemble des voisins de la particule  $q \in \tau_0$ . On note encore  $L_{ij} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice de longueurs à l'équilibre dont l'expression est déduite de ; et  $u_{ij}$  le vecteur unitaire (s'il existe) dans la direction de l'arete entre  $q_i$  et  $q_j$ . On obtient le système différentiel suivant en appliquant l'équation d'Euler-Newton sur les moments linéaires, et en exprimant la force de frottement du dispositif visqueux en fonction de  $\dot{q}$  :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M+m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \frac{\mu}{M+m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], & (\text{SE}) \\ \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (\text{SI})$$

D'un point de vue énergétique, on a la loi de conservation de l'énergie suivante :

$$E_{\text{el}}(t) + E_c(t) + E_r(t) = E_0$$

où  $E_{\text{el}}(t)$ ,  $E_c$ , et  $E_r$  désignent respectivement l'énergie élastique du système, l'énergie cinétique, et l'énergie dissipée par les frottements visqueux [Bal20a, p.188].  $E_0$  désigne l'énergie initiale du système

donnée par

$$E_0 = \frac{1}{2}(M + m)\|\mathbf{v}_0\|^2.$$

Sous ces hypothèses et ces définitions, BALASOIU obtient le théorème d'existence globale suivant.

**Théorème 2.3.8 (Existence d'une solution globale).** *On suppose que les conditions initiales adjointes au système équation ( $E$ ) vérifient la condition énergétique :*

$$E_0 < \frac{k}{4} \left( \inf_{\omega \in \tau_1} |\omega| \right)^2.$$

*Alors, le problème de Cauchy est bien posé<sup>17</sup> et ses solutions sont globales.*

Ensuite, afin d'obtenir un système à grande raideur et de supprimer la perturbations liées à la propagation des ondes élastiques, BALASOIU introduit une dépendance en  $\varepsilon$  des constantes physiques du système :  $k_\varepsilon$ ,  $M_\varepsilon$  et  $\mu_\varepsilon$ . En posant

$$k_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon}, \quad M_\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^2} \quad \mu_\varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon},$$

le système masse-ressort se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \frac{k}{M + \varepsilon^2 m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} - \varepsilon \frac{\mu}{M + \varepsilon^2 m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j} \right], \\ \varepsilon^2 \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=0}^n C_{ij} \left[ \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \varepsilon \frac{\mu}{m} \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_\varepsilon)$$

On écrit également le système limite :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \frac{k}{M} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j} \\ \mathbf{0} = \sum_{j=0}^n C_{ij} \frac{k}{m} (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E_{lim})$$

Ce problème est un problème de perturbation singulière, pour lequel BALASOIU prouve le théorème de limite quasi-statique ci-bas (en se servant principalement du théorème classique de A.N.Tikhonov [Tik52 ; Hop66]).

**Théorème 2.3.9 (Limite quasi-statique).** *Les solutions  $\mathbf{q}_\varepsilon$  et  $\mathbf{q}$  respectivement des systèmes perturbé équation ( $E_\varepsilon$ ) et limite équation ( $E_{lim}$ ) munis des conditions initiales<sup>18</sup> existent, sont uniques, et globales. De plus, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{q}_\varepsilon(t) = \mathbf{q}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Du point de vue numérique, les simulations ont permis de comprendre l'influence des différents paramètres physiques présents (masse des deux objets, raideur des ressorts, vitesse d'impact ...). De plus, le code Python et HTML/CSS développé fournira une bonne base pour analyser la localisation des vecteurs propres du système dynamique et identifier ceux qui agissent sur un déplacement du bord. Le principal résultat numérique utilisé est le suivant. À  $\varepsilon > 0$  fixé, on

17. Le système est bien posé si deux particules voisines restent à une distance  $c > 0$  l'une de l'autre.

18. Des conditions initiales satisfaisant le théorème 2.3.8.

note  $(\lambda_i(\varepsilon))_{i \in \{0, \dots, 4n+3\}}$  les valeurs propres de l'opérateur associé à la linéarisation du système équation  $(E_\varepsilon)$  autour de sa position d'équilibre, et on les ordonne ainsi :

$$0 \geq \Re(\lambda_8(\varepsilon)) \geq \Re(\lambda_9(\varepsilon)) \geq \dots \geq \Re(\lambda_{4n+3}(\varepsilon)).$$

Nous définissons le saut spectral  $\nu_\varepsilon$  associé au système équation  $(E_\varepsilon)$  de la manière suivante :

$$\nu_\varepsilon = \frac{\Re(\lambda_{12}(\varepsilon))}{\Re(\lambda_{11}(\varepsilon))}.$$

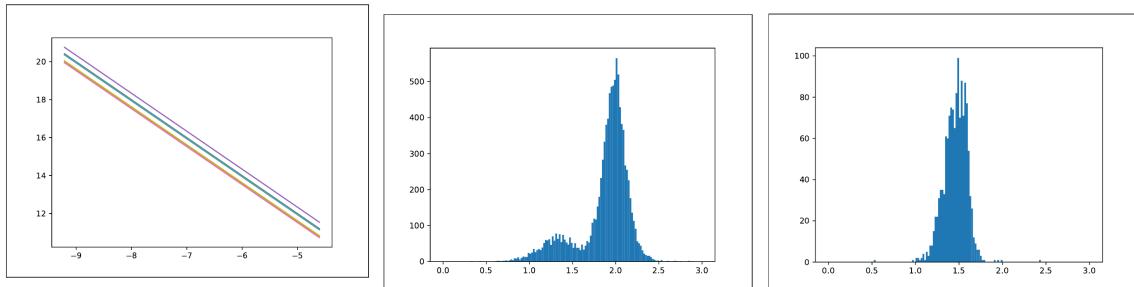
Ce saut représente l'écart entre les quatre premières valeurs propres non nulles du système, qui correspondent au système lent (SE), et la première valeur propre du système rapide (SI). Après avoir tracé le saut spectral  $\nu_\varepsilon$  pour différentes triangulations  $\tau$  (cf. figure 2.17a pour un exemple), BALASOIU constate qu'il s'agit de droites dont la pentes ne dépendent ni du tirage, ni de l'intensité du processus de Poisson-Delaunay. Il propose donc l'expression suivante pour  $\nu_\varepsilon$  :

$$\ln(\nu_\varepsilon) = a_0(\tau) + \alpha \ln(\varepsilon),$$

avec  $a_0(\tau)$  une quantité qui dépend du maillage  $\tau$ , et  $\alpha$  une constante universelle, indépendante de  $\tau$  et  $\varepsilon$  numériquement estimée à la valeur :

$$\alpha = 2 \pm 10^3.$$

La figure 2.17c ci-dessous a été obtenue, pour un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500000, l'histogramme de la valeur de  $a_0$  associée sur 1000 tirages.



**(a)** Saut spectral en fonction de la perturbation, en échelle log-log, sur dix tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 1000. **(b)** Histogrammes du paramètre  $a_0$ , sur 10000 tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 2500. **(c)** Histogramme du paramètre  $a_0$  sur 1000 tirages d'un processus de Poisson-Delaunay d'intensité 500000.

**FIGURE 2.17** – Principaux résultats numériques obtenus [Bal20a, p.199].

Ces résultats semblent indiquer, à grande échelle au moins, que  $a_0(\tau)$  prend ses valeurs entre 0.9 et 2.5. Nous observons également l'émergence de deux pics pour certaines intensités. Il semblerait que le pic de valeur moyenne la plus faible gagne en fréquence de représentation, jusqu'à concentrer la quasi-totalité des cas pour l'intensité de 500000.

### 2.3.7 Discussion et questions ouvertes

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse pour limiter la complexité du modèle. Ces simplifications sont à l'origine de simplifications que nous précisons ci bas :

1. Le modèle suppose que les floes sont d'épaisseur négligeable devant leur extension horizontale ; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.

2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites [Bal20a, chp.2].
3. Au chapitre 6 [Bal20a, p.187], il serait également intéressant d'intégrer, comme dans les chapitres 3, 4, et 5, des ressorts de torsion en chaque noeud du système masse-ressort [Bal20a, p.187].
4. Au chapitre 5 BALASOIU, p.183, BALASOIU a montré que la suite d'énergies élastiques  $\Gamma$ -converge vers une énergie limite. De plus, lorsque le redimensionnement est suffisamment rapide, il a montré que la  $\Gamma$ -limite s'écrit comme l'énergie d'un matériau élastique homogène et isotrope, soumis à l'hypothèse des petits déplacements. Cette énergie dépend donc de deux paramètres, les deux constantes de Lamé du matériau homogénéisé. Il serait intéressant d'adapter l'étude numérique [OSAJ95] pour obtenir une expression des constantes de Lamé homogénéisées dans notre cas.
5. Il reste, à l'issue de la thèse, à obtenir une seconde limite spatiale. Cette limite est une limite de couche, qui indiquerait l'expression du déplacement au bord du floe lors de la percussion. Nous pourrions l'obtenir en sélectionnant les vecteurs propres du système dynamique masse-ressorts qui influent sur le comportement d'une couche mince du bord du floe [Bal20a, p.201].
6. Dans une prochaine étude, on pourrait étudier la percussion du système masse-ressort par un objet solide non ponctuel et qui ne serait pas fixé au système étudié. BALASOIU pense que le cas général peut se déduire du cas étudié au chapitre 6 [Bal20a, p.187]. En effet, l'étude de la percussion complète reviendrait à ajouter, dans le système différentiel étudié, un nombre fini de perturbations singulières à des instants distincts.

## 2.4 Résumé de l'état de l'art

En résumé, nous constatons que Rabatet et Balasouï ont fondamentalement posés les bases du travail que nous allons effectuer durant ce stage. Dans sa thèse, Rabatet s'est focalisé sur l'étude de la dérive des floes de glace dans la mer. Le puissant modèle qu'il a développé a pu être testé et validé sur des floes de glace en bassins, avec de données climatiques provenant d'**ERAinterim** et **TOPAZ**. Cependant, il a considéré les floes de glace comme des objets solides ne pouvant se briser, ce qui n'est pas le cas dans la nature.

C'est pour résoudre le problème de fracture que Balasouï a considéré, dans sa thèse, les floes de glace comme un assemblage discrets de masses reliés par des ressorts à grandes raideurs et des dispositifs visqueux. Il a dans un premier temps étudié la nucléation et la propagation de la fracture dans un matériau élastique soumis à un chargement quasi-statique<sup>19</sup>. Balasouï s'est ensuite penché sur la percussion d'un matériaux élastique. Il a pour ceci considérer le floe comme un réseau de ressorts<sup>20</sup> et a étudié le résultat de la collision entièrement élastique d'un object ponctuel avec un floe, au niveau d'un des noeud de ce derniers. Au terme de son travail, Balasouï propose d'exhiber une deuxième limite spatiale, celle permettant de dériver de l'équation différentielle du système entier l'expression du déplacement au bord du floe.

Notre travail a consisté en l'étudier du phénomène de percussion de plus près. Nous extraîrons le déplacement des noeuds des floes (et sur le bord en particulier) après une collision, et nous étudierons, à travers le modèle de Griffith et la compétition entre les énergie de déformation et de fracture, dans quelles circonstances la fracture apparaît. Nous étudierons tout ceci à l'aide de simulation précises écrites en Python en 1D, et de 2D.

19. Il extraira, dans une seconde partie, une limite temporelle qui montre qu'un réseau limite de raideur infinie est, à chaque instant, dans un état d'équilibre; ce qui justifie l'hypothèse de quasi-staticité du phénomène de percussion

20. Il justifie cette bonne approximation en exhibant une première limite spatiale

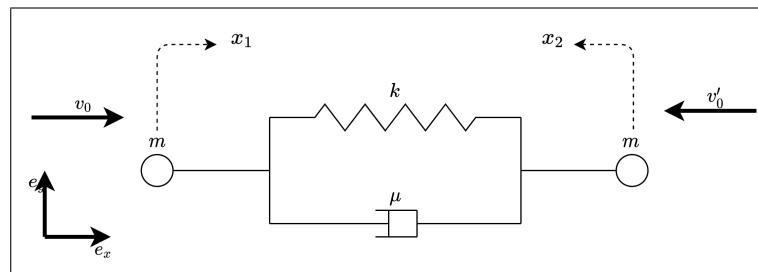
## Chapitre 3

# Problème 1D et étude de la fracture

Dans cette section, nous étudierons le floe de glace en une dimension (1D). Nous avons montré dans les sections précédentes qu'un assemblage de masses reliées par des ressorts et de dispositifs visqueux constitue une bonne approximation d'un matériau élastique et du phénomène de percussion associé. Nous partirons de cette approche par réseau de ressort pour modéliser dans un premier temps le déplacement d'un floe de glace contenant juste deux noeuds (masses), ensuite nous modéliserons la percussion inélastique des noeuds de floes avec et sans rebonds, avec un nombre variable de noeuds par floe.

### 3.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

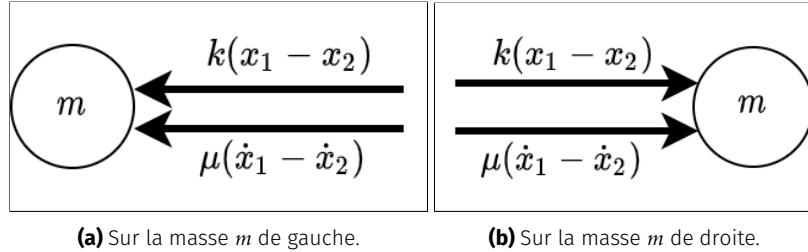
Avant d'entamer la question de la percussion avec séparation des masses (voir section 3.2.3), étudions le comportement d'un floe de glace 1D isolé et modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif visqueux, et 2 noeuds) (voir figure 3.1).



**FIGURE 3.1** – Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Les variables  $x_1$  et  $x_2$  traduisent les déplacements des noeuds de gauche et de droite respectifs. À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses  $v_0$  et  $v'_0$  indiquées.

Un bilan des forces effectué sur les deux noeuds du floe (voir figure 3.2) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (3.1)$$



**FIGURE 3.2** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple juste après l'instant initial, on a  $x_1 > 0$ , et  $x_2 < 0$  d'où  $k(x_1 - x_2) > 0$ ).

En remarquant que  $m \neq 0$ , on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_B + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_C. \quad (3.2)$$

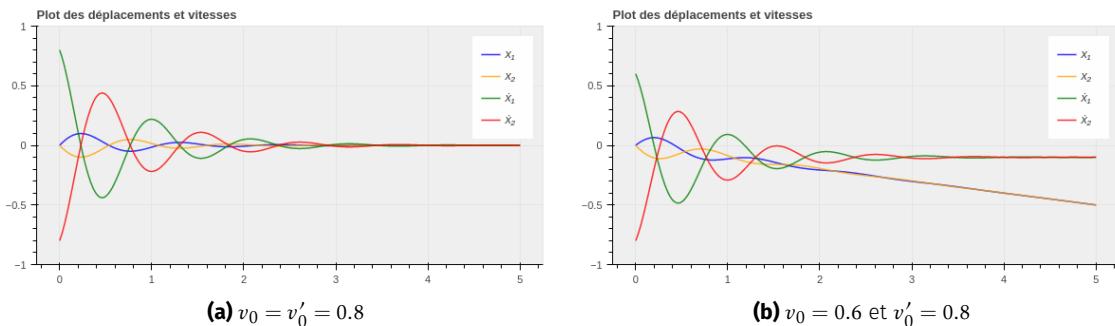
On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant  $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$ , et on reprend la condition initiale  $\dot{x}_1(0) = v_0$ ,  $\dot{x}_2(0) = -v'_0$ , pour obtenir le système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution numérique est présentée dans à la figure 3.3 (voir fichier code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque  $v_0 \neq v'_0$ , les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements divergent.



**FIGURE 3.3** – Simulation du déplacement 1D d'un floe avec  $m = 1$ ,  $k = 18$ ,  $\mu = 1.3$ ,  $t_f = 5$ . En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$  lorsque  $v_0 = v'_0$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par :

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (3.4)$$

Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1 (Non-convergence du modèle 1D isolé).** *Partant d'une position d'équilibre  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , les déplacements  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  des deux noeuds du floe 1D (avec viscosité  $\mu \neq 0$ ) convergent<sup>1</sup> si et seulement si leurs vitesses initiales sont opposées, i.e.  $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$ .*

*Démonstration.* Le calcul des solution analytique est plus délicat. Il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice  $E$ . Pour cela, nous devons diagonaliser (ou du moins trogonaliser) la matrice  $E$ . Son polynôme caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k). \end{aligned}$$

Posons  $\Delta = 4\mu^2 - 8km$ . On distingue deux cas :

- Si  $\Delta \geq 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$ ;
- Si  $\Delta < 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ .

Nous avons donc exhiber les trois valeurs propres de notre matrice :  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$ . Avec  $\lambda$  désignant l'une de ces valeurs propres, on recherche les vecteurs<sup>2</sup>  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$  appartenant aux sous espaces propres  $E_\lambda$ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1, \\ x_4 = \lambda x_2, \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0, \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

- Pour  $\lambda = 0$ , l'équation (3.5) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit  $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$ , avec  $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ .

- Pour  $\lambda = \lambda_1$  ou  $\lambda_2$ , on remarque que  $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$ . L'équation (3.5) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1, \\ x_4 = \lambda x_2, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

1. Convergence au sens où la fonction tend vers une limite finie.

2. Attention : ne pas confondre les composantes de ce vecteur avec les déplacement  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  recherchés.

On en déduit donc  $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$ , avec  $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$ ; et  $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$  avec  $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ .

La meutilisicté arithmetique de  $\lambda = 0$  (égale à 2) est differente de sa multiplicité géométrique (égale à 1). La matrice  $E$  n'est donc pas diagonalisable. Son polynome caractéristique étant scindé, nous allons la trigonaliser. On pose donc une base  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  dans laquelle la matrice  $E$  s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  (notée  $\mathcal{B}$ ) à  $\mathcal{B}'$ . On a :

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_1$  s'écrit  $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EP v_1 = 0$ .  $v_1$  est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend  $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_2$  s'écrit  $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EP v_2 = av_1$ . On retourne dans  $\mathcal{B}$  en posant  $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a, \\ x_4 = a, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Avec  $a = 1$ , on écrit  $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$ .

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_3$  s'écrit  $v_1 = (0, 0, 1, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EP v_1 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$ . En posant  $b = d = 0$ ,  $v_1$  devient un vecteur propre associé à  $\lambda_1$  et on prend  $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- De facon similaire, on obtient  $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$  en posant  $c = e = f = 0$ .

Nous avons donc trigonaliser la matrice  $E$ , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \quad (3.7)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente  $A = D + N$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant  $E = P(D+N)P^{-1}$ , nous pouvons facilemtn calculer  $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN)P^{-1}$ . Ce calcul délicat donne (à l'aide du logiciel de calcul symbolique Symbolab) :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons nous que la solution du problème de Cauchy équation (3.3) est donnée par  $Y(t) = \exp(tE)Y_0$ , avec  $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$ . Le calcul du déplacement  $x_1$  donne :

$$x_1(t) = \frac{t}{2}(v_0 - v'_0) - \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}(v_0 + v'_0). \quad (3.8)$$

Le cas où  $\Delta < 0$  (à étudier dans  $\mathbb{C}$ ) peut se ramener au cas réel (dans  $\mathbb{R}$ ) en posant  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$  (avec  $\alpha = -\frac{\mu}{m}$  et  $\beta = -\frac{\sqrt{2km-\mu^2}}{m}$ ). En remarquant que  $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$ , on obtient :

$$x_1(t) = \frac{t}{2}(v_0 - v'_0) + \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta}(v_0 + v'_0). \quad (3.9)$$

Les équations (3.8) et (3.10) permettent d'observer que le déplacement  $x_1(\cdot)$  ne converge pas lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , à moins que  $v_0 = v'_0$ , ce qui est observé à la figure 3.3. Pour le déplacement du deuxième noeud, on a :

$$x_2(t) = \frac{t}{2}(v_0 - v'_0) - \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta}(v_0 + v'_0); \quad (3.10)$$

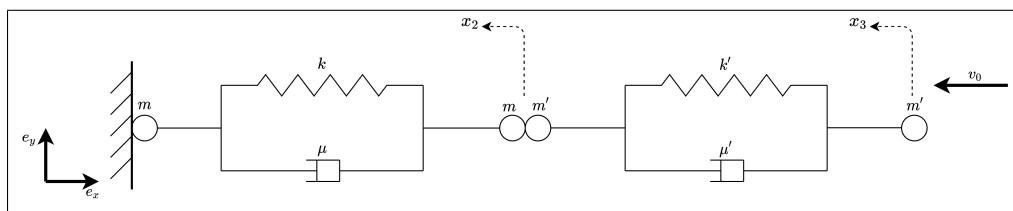
On tire les mêmes conclusions en effectuant un raisonnement similaire. De plus, si  $\mu = 0$ , nous avons  $\alpha = 0$  et donc pas de convergence pour  $x_1(\cdot)$  comme pour  $x_2(\cdot)$ .

□

## 3.2 Modélisation de la percussion

### 3.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

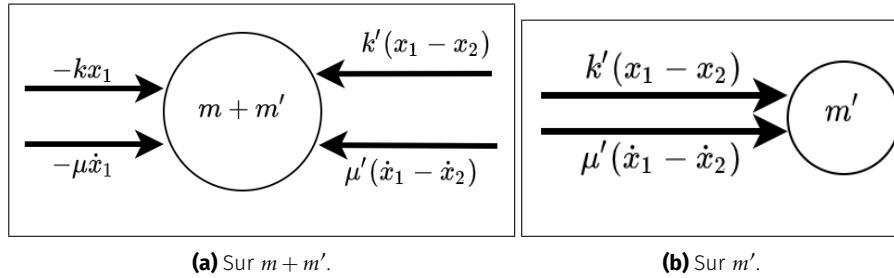
Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème de percussion. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux noeuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse  $v_0$ . On identifie chaque noeud à la masse qu'il porte ( $m$  ou  $m'$ ), chaque ressort à sa raideur ( $k$  ou  $k'$ ), chaque dispositif visqueux à sa viscosité ( $\mu$  ou  $\mu'$ ) (voir figure 3.4).



**FIGURE 3.4** – Contact 1D parfaitement inélastique (choc mou) entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant, durant, et après le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses  $m$  et  $m'$  en contact forment une seule masse<sup>3</sup>  $m + m'$  dont le déplacement est donné par la variable  $x_1(t)$ . Le déplacement de la masse  $m'$  à l'autre bout du floe percuteur est nommé  $x_2(t)$ . La masse  $m$  qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.

3. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.



**FIGURE 3.5 –** Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ( $\mathbf{v}_0 < 0$  et donc  $x_1 < 0$ ). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort  $k'$ , on peut imaginer  $x_1$  immobile (on aura  $x_2 < 0$ , d'où  $x_1 - x_2 > 0$ ) (voir [Ho10]).

En orientant convenablement le système (voir figure 3.4), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales<sup>4</sup> :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (3.11)$$

À l'instant initial  $t_0$ , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (3.12)$$

En posant  $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , l'équation (3.12) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B'\dot{X}(t) + C'X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (3.14)$$

avec  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ .

Il s'agit d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons-le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc  $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$  et le système 3.14 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (3.15)$$

avec la matrice par blocs

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B' & C' \end{pmatrix},$$

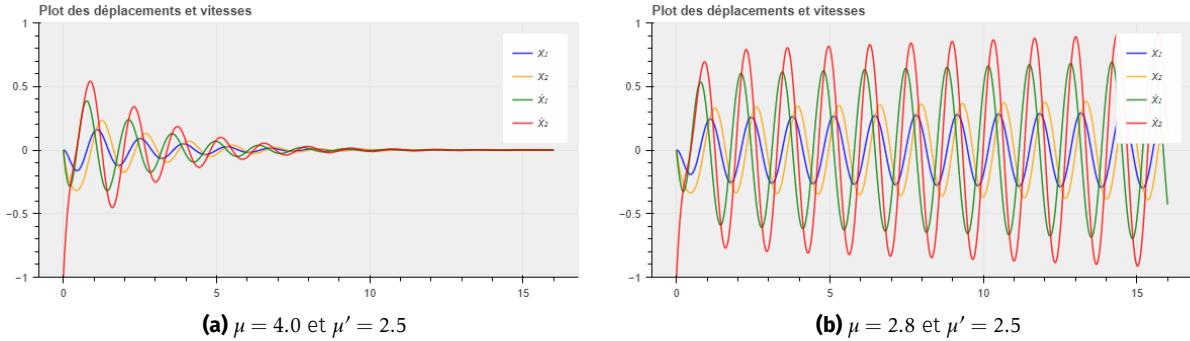
où  $I_2$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

4. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de  $x_1$  est-elle vraiment nulle ?

Avec  $t_0 = 0$ , la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0 \quad (3.16)$$

La résolution analytique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice  $E \in \mathbb{R}^4$ , ce qui s'avère difficile du à la taille de ladite matrice. Nous optons donc pour une solution numérique (voir figure figure 3.6a) issue du notebook code/simu1D/Percussion1D-1.ipynb.



**FIGURE 3.6** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k = 16$ ,  $k' = 5$ ,  $v_0 = -1.0$ ,  $t_f = 32$ . Dans le premier cas (a), on observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . Dans le second cas (b), on constate que le système diverge.

Pour certaines valeurs (spécifiquement de  $\mu$  et  $\mu'$ ), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . En revanche pour certaines (voir figure 3.6b), il diverge<sup>5</sup>. Pour étendre les travaux dans cette section, on pourrait :

1. Calculer analytiquement et numériquement les état d'équilibres  $Y_{eq} \in \ker(E)$ ; puis en distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice  $E$ , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les paramètres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

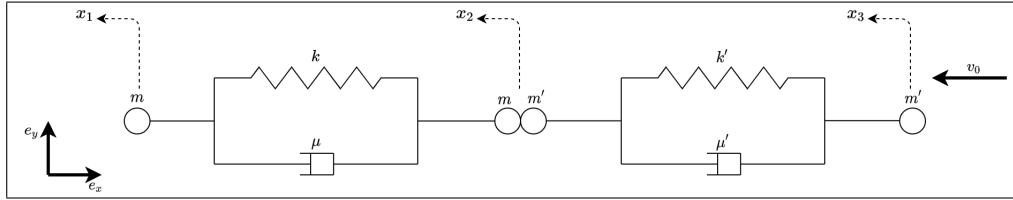
### 3.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé ici. On ajoute donc une troisième variable afin de décrire le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 3.7. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 3.8.

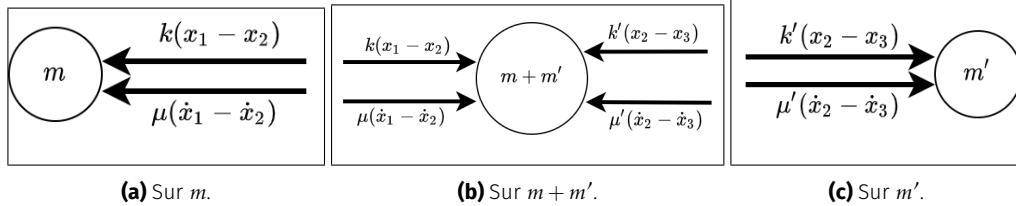
Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (3.17)$$

5. La divergence pour ce cas est particulièrement évidente lorsque  $\mu < \mu'$ .



**FIGURE 3.7** – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $x_3$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**FIGURE 3.8** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 3.5 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m+m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k-k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu-\mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible. En posant  $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , le système d'EDO revient à l'équation (3.19) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (3.19)$$

où  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ . On pose ensuite  $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$  et le système équation (3.19) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (3.20)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 3.4), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble de masse  $2(m+m')$  après collision et fixation de la masse  $m'$  (à vitesse  $v_0$ ) sur la masse  $m$  (de vitesse  $v'_0$ )<sup>6</sup>. Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée  $v_f$ , et les quantités de mouvement

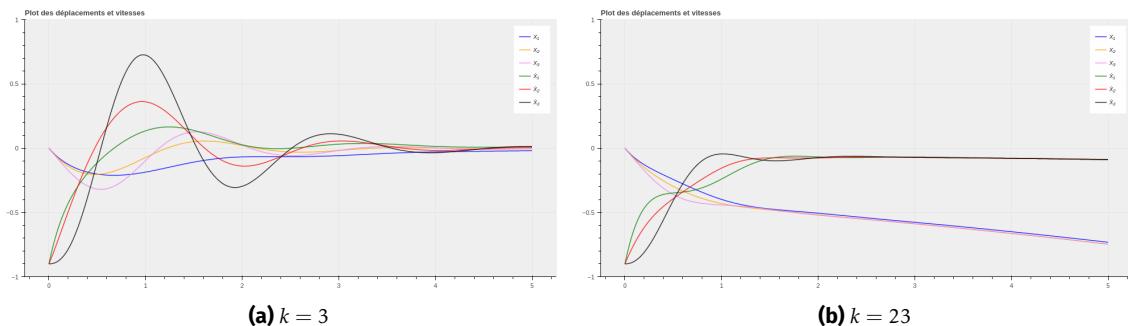
6. Le vecteur  $v'_0$  n'est pas marqué à la figure 3.7 (i.e.  $v'_0 = 0$ ). L'introduction de ce vecteur permet de généraliser le problème.

avant et après choc sont notées  $P_{\text{avant}}$  et  $P_{\text{après}}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2m\mathbf{v}_0 + 2m'\mathbf{v}'_0 &= (2m + 2m')\mathbf{v}_f \\ \Rightarrow \mathbf{v}_f &= \frac{m\mathbf{v}_0 + m'\mathbf{v}'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (3.20) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure figure 3.9 (issue du notebook code/simu1D/Percussion1D-2.ipynb).

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (3.21)$$

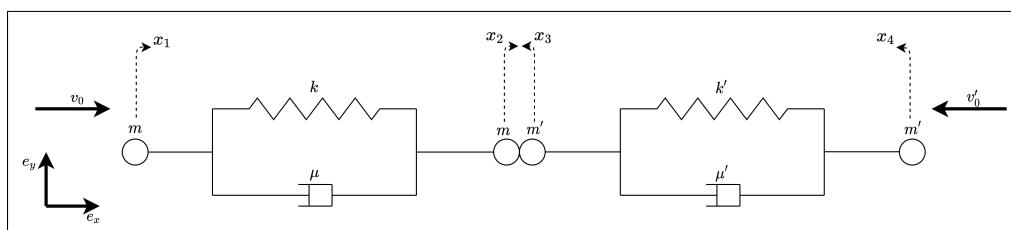


**FIGURE 3.9** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k' = 22$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.8$ ,  $t_f = 5$ . Sous certaines conditions (forte dissipation, raideur du floe percuté élevée, etc.), on observe le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

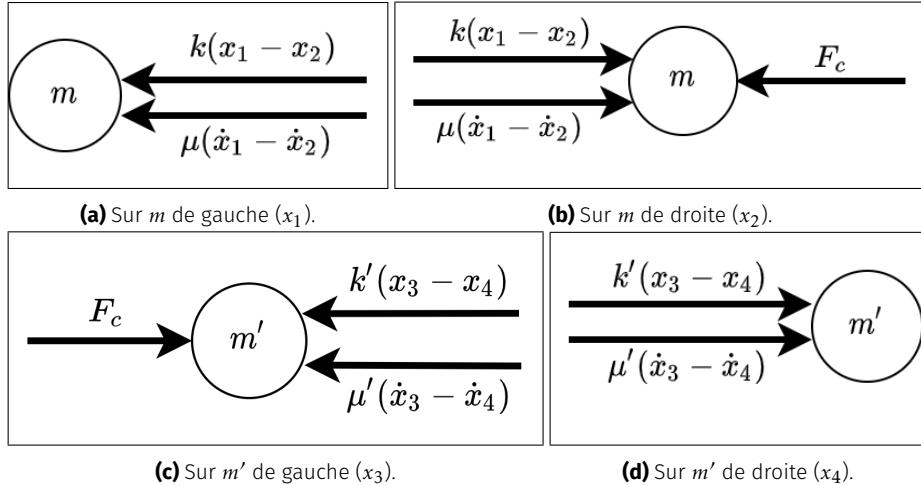
La figure 3.9 permet d'observer la nuance avec le problème de contact parfaitement inélastique. Il est difficile de distinguer les cas qui aboutissent à une convergences des déplacements de ceux qui divergent. Observons donc à présent un problème de contact inélastique avec séparation des masses.

### 3.2.3 Premier modèle pour la collision inélastique avec séparation des masses

Reprendrons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps  $\delta t^* = [t^-, t^+]$  de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses  $m$  et  $m'$  en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 3.4 et 3.7), et nous le présentons à la figure 3.10 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 3.11.



**FIGURE 3.10** – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les noeuds  $m$  et  $m'$  en contact sont étudiés séparément. On représente les variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , et  $x_4$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**FIGURE 3.11** – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 3.5 et 3.8 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.  $F_c$  représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (3.22)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de  $x_2$  et  $x_3$  pour éliminer la force de contact  $F_c$  et obtenir le système :

$$m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (3.23a)$$

$$m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), \quad (3.23b)$$

$$m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \quad (3.23c)$$

Remarquons que ce système reviens au même système étudié dans la partie précédente en posant  $x_2(t) = x_3(t)$  p.p. En effet, durant la phase de contact, les massess  $m$  et  $m'$  peuvent etrs étudiées comme une unique masse  $m + m'$ . La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définitions de la vitesse initiale de l'ensemble  $m + m'$ . Celà dit, nous cherchons à trouver les vitessses  $\dot{x}_1(t^+)$ ,  $\dot{x}_2(t^+)$ ,  $\dot{x}_3(t^+)$  et  $\dot{x}_4(t^+)$  immédiatemet après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (3.20)), nous réutilisons les quantités  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_4$  données par ce système (l'équation (3.20) dans lequel  $x_2$  et  $x_3$  sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car  $x_1$  et  $x_4$  n'interviennent pas directemet dans la collision. De plus, la quantité  $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$  est aussi calculé suivant le modèle équation (3.20) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnue dans notre dynamique irrégulièrre.

Intégrons l'équation (3.23b) entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_{I}. \quad (3.24)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons  $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$  et  $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$  les vitesses des noeuds en contact avant collision, et  $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$  et  $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$  les vitesses après contact. L'équation équation (3.24) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (3.25)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution  $\varepsilon$ <sup>7</sup>. On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 3.12.

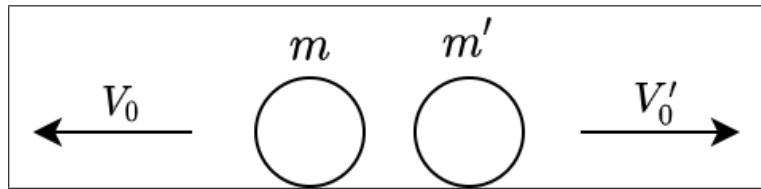


FIGURE 3.12 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (3.26) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (3.26)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (3.25) et (3.26) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1 + \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 + \varepsilon)mv_0 + (m' - \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (3.27)$$

Une fois leur vitesses "initiales"<sup>8</sup> obtenues, on calcule donc les déplacements des différents noeuds des réseaux, et les fractures éventuelles qui s'en suivent. Plus précisément, on a par exemple pour le premier floe :

- son noeud de gauche  $x_1$  a pour vitesse  $v_0$  avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc;
- son noeud de droite  $x_2$  a pour vitesse  $v_0$  avant le choc, mais passe de façon discontinue à  $V_0$  après le choc.

En procédant de manière similaire, nous obtenons les déplacements et les vitesses des noeuds du deuxième floe après la collision. Une simulation permet d'obtenir le résultat de la figure 3.13.

### 3.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses

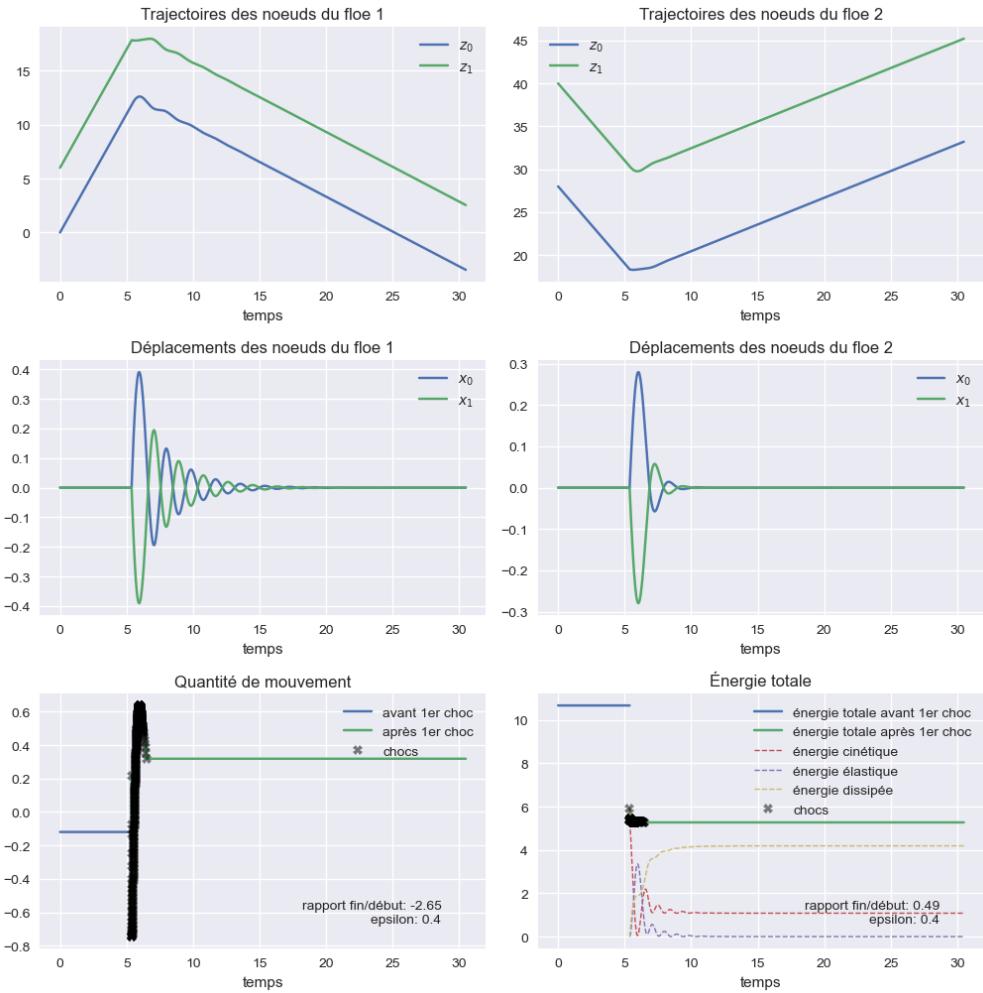
Dans cette section, nous introduisons un modèle 1D plus général que ceux présentés dans les deux sections précédentes (voir sections 3.1 et 3.2.3). Les floes sont cette fois représentés par une multitude de noeuds, de ressorts et de dispositifs visqueux. Contrairement à l'approche par déplacement que nous avons adopté à la section 3.1, nous considérons ici une approche par position des noeuds dans le repère absolu  $\mathcal{R} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  (voir figure 3.14).<sup>9</sup> Signalons que dans la suite, les dispositifs visqueux ne seront plus représentés afin de faciliter les simulations.

Commençons par simuler les déplacements et les vitesses des noeuds d'un floe contenant  $n$  noeuds. De façons similaire aux sections précédentes, la loi de comportement du système est la

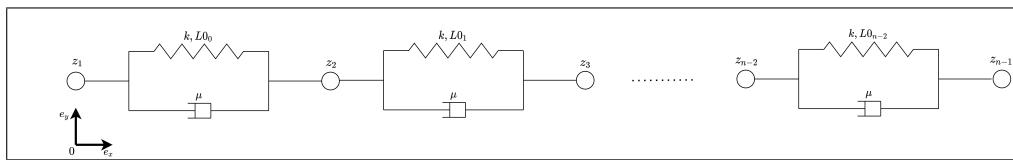
7. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

8. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour la deuxième phase de la percussion.

9. Pour une raison inexpliquée, l'approche par déplacement ici ne conserve pas les positions à l'équilibre des ressorts.



**FIGURE 3.13** – Un résultats obtenus avec le premier modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [Percussion-Solver.py](#)), et la simulation correspondante à travers ce LIEN SEAFILE.



**FIGURE 3.14** – Modélisation d'un floe 1D comme un assemblage de  $n$  masses reliées par des ressorts et des dispositifs visqueux. Nous nous servons dorénavant des positions  $z$  des noeuds dans le repère absolu.  $k$  est la constante de raideur uniforme de tous ses ressorts, et  $\mu$  le coefficient de dissipation pour tous les dispositifs visqueux. Aussi, le terme  $L_{0i}$  désigne les longueurs à vide du ressort  $i$ .

suivante :

$$\begin{cases} m\ddot{z}_0 = k(z_1 - z_0 - L_{00}) + \mu(\dot{z}_1 - \dot{z}_0), \\ m\ddot{z}_1 = k(z_2 - z_1 - L_{01}) + \mu(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k(z_1 - z_0 - L_{00}) - \mu(\dot{z}_1 - \dot{z}_0), \\ \vdots \\ m\ddot{z}_{n-1} = k(z_{n-1} - z_{n-1} - L_{0n-2}) + \mu(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1}). \end{cases} \quad (3.28)$$

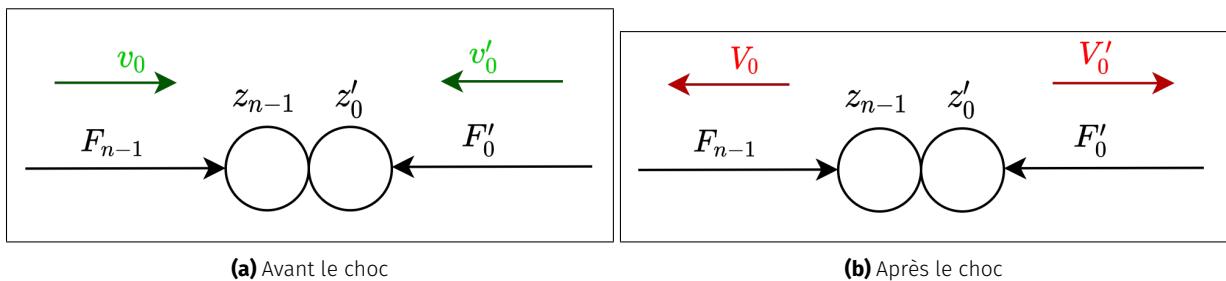
Pour résoudre ce système, nous le posons sous forme matricielle, et nous le transformons en un système d'EDO du premier ordre. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{z}_1 \\ \vdots \\ \ddot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ B & C \end{pmatrix}}_{2n \times 2n} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{(2n) \times (2n-2)} \begin{pmatrix} L_{00} \\ L_{01} \\ \vdots \\ L_{0,n-2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

où  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n$ ;  $B$  et  $C$  des matrices de taille  $n \times n$ ; et  $D$  une matrice de taille  $(n) \times (n-1)$ . On a :

$$B = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & k & & & \\ k & -2k & k & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & k & -2k & k & \\ & & k & -k & \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -\mu & \mu & & & \\ \mu & -2\mu & \mu & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mu & -2\mu & \mu & \\ & & \mu & -\mu & \end{pmatrix}, \text{ et } D = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -k & & & & \\ k & -k & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & -k & & \\ & & & & k \end{pmatrix}.$$

Concernant la percussion <sup>10</sup>, nous proposons aussi une approche différente de calculer les vitesses des noeuds après choc. En effet, nous appliquons non pas le principe de la conservation de la quantité de mouvement, mais celui de la conservation de l'énergie cinétique. Ce choix provient du fait que dans ce modèle, les deux noeuds en contact ne sont pas considérés comme un système isolé. En effet, les deux noeuds sont affectés par les forces des ressorts et des dispositifs visqueux qui leur sont rattachés. Ces deux forces ont un travail non nul et ne sont donc pas conservatives (voir figure 3.15). Nous appliquons donc la conservation de l'énergie cinétique pour obtenir une équation



**FIGURE 3.15** – Situation avant et après la percussion de deux floes. Nous considérons ici que le floe de gauche dans la percussion possède  $n$  noeuds. Les forces appliquées par les floes voisins aux noeuds en contact sont :  $F_{n-1} = k(z_{n-1} - z_{n-1} - L_{0,n-2}) + \mu(\dot{z}_n - \dot{z}_{n-1})$ , et  $F'_0 = k'(z'_1 - z'_0 - L_{0,0}') + \mu(\dot{z}'_1 - \dot{z}'_0)$ , conformément à l'équation (3.28).

pour les vitesses après choc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m'(v'_0)^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}m'(V'_0)^2. \quad (3.30)$$

10. Tout comme dans les sections précédentes, nous réservons l'exposant "prime" ('') pour décrire les paramètres du deuxième floe de glace.

Nous maintenons l'équation de restitution équation (3.26) utilisé dans les sections précédentes :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (3.31)$$

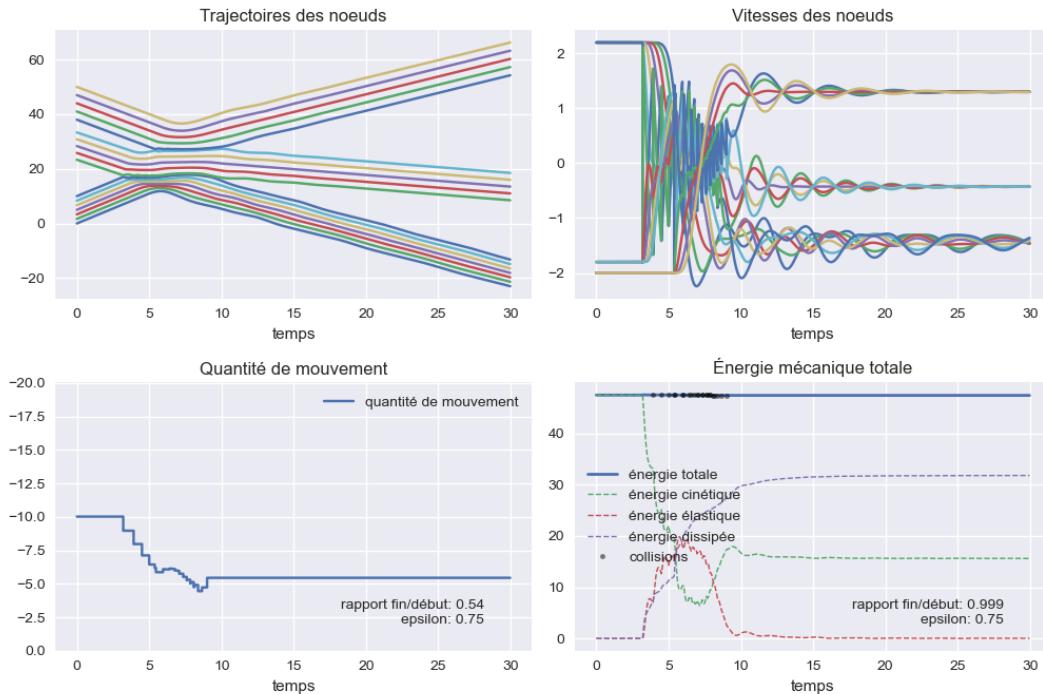
La résolution du système ci-haut nous permet d'obtenir les vitesses  $V_0$  et  $V'_0$  respectivement pour les noeuds de gauche et de droite dans la collision<sup>11</sup> :

$$V_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ et } V'_0 = V_0 + X, \quad (3.32)$$

avec :

$$X = \varepsilon(v_0 - v'_0), Y = m(v_0)^2 + m'(v'_0)^2, a = m + m', b = -2m'X, c = m'X^2 - Y, \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour tester ce modèle, nous effectuons des simulations avec trois noeuds ayant 7 et 8 neuods respectivement. Nous étudions aussi la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique totale<sup>12</sup> et nous obtenons les résultats présentés à la figure 3.16. Bien que ce modèle



**FIGURE 3.16** – Un résultats obtenus avec le deuxième modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [Fracture-Solver.py](#)), et la simulation correspondante à travers ce LIEN SEAFILE.

conserve l'énergie mécanique du système (voir figure 3.16), nous nous rendons compte qu'il présente plusieurs manquements ; en particulier que la conservation de l'énergie cinétique entre en opposition directe avec la notion d'élastitité au rebondissement (traduite par le coefficient de restitution  $\varepsilon$ ). C'est pour résoudre ces problèmes que nous avons développé un troisième modèle pour la percussion 1D.

11. Notons que les tous les noeuds qui ne sont pas en contact conservent leurs vitesss pendant le choc.

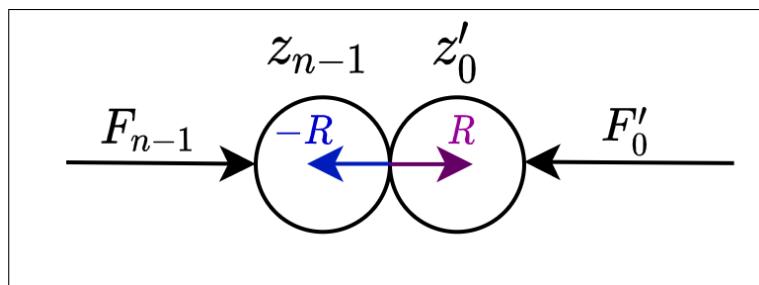
12. Somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle élastique, et de l'énergie dissipée par frottement visqueux.

### 3.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses

Ce modèle a été développé pour aborder la question de non conservation de l'énergie mécanique totale après la collision. Il prend plus au sérieux la question du passage macro/micro. Celà dit, les équations qui régissent le déplacement des noeuds (voir EQUATION ...) de chaque floe en collision sont maintenues. La différence avec le modèle présenté dans la sous-section précédente (section 3.2.4) apparait au niveau du calcul des vitesses après choc.

Rappelons que le modèle macroscopique a été développé par M. Rabaté, S. Labbé, et J. Weiss [RLW15] et nous l'avons présenté avec détails à travers un résumé de la thèse de M. Rabaté [Rab15] dans la section 2.2. Le modèle qui y est développé considère un morceau de glace comme un solide indéformable et le système perd de l'énergie mécanique à travers le coefficient de restitution macroscopique  $\varepsilon$ . Dans le modèle microscopique que développons ici, les floes sont des solides élastiques (système masse-ressort-dispositif visqueux) et le problème est de trouver à quelle perte d'énergie le  $\varepsilon$  correspondrait lorsque deux noeuds de deux floes entrent en collision. Autrement dit, il faudrait trouver une correspondance entre les coefficients de restitution macroscopiques et microscopiques.

Notre système de deux noeuds au moment de la collision perd donc de l'énergie. L'absence de forces de frottements<sup>13</sup> veut dire que l'énergie mécanique est transformée en énergie interne (thermique). Les figures 3.15 et 3.17 permettent de mieux appréhender la percussion dans ce cas.



**FIGURE 3.17** – Situation durant la percussion de deux floes. Nous observons ici la force  $R$  exercée par chaque noeud sur l'autre, qui suit la loi de l'action et de la réaction.

Pour calculer les vitesses des noeuds après choc, nous reconsidérons équation (3.26) qui introduit le coefficient de restitution de Newton :

$$V_0 - V'_0 = -\varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (3.33)$$

Pour trouver une deuxième équation et obtenir les vitesses des noeuds, nous nous tournons vers une technique fréquemment utilisée dans l'industrie du jeux vidéo[Hec97] pour gérer les collisions d'objets. Dans cette technique, nous considérons que la collision se produit entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . Cet intervalle de temps, très court, fut calculé durant les travaux de M. Rabaté [Rab15, p.87] sur la collision rigide entre deux floes. On a :

$$m\ddot{z}_{n-1} = F_{n-1} - R, \text{ et } m'\ddot{z}'_0 = F'_0 + R.$$

Après avoir intégré ces équations tout en supposant que les forces  $F_{n-1}$  et  $F'_0$  restent constantes<sup>14</sup> entre  $t^-$  et  $t^+$ , nous posons :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} R dt, \quad J = \int_{t^-}^{t^+} F_{n-1} dt = F_{n-1} \Delta t, \text{ et } K = \int_{t^-}^{t^+} F'_0 dt = F'_0 \Delta t.$$

13. Dans le modèle actuel, les frottements de l'air et de la mer ne sont pas pris en compte.

14. En effet, la durée de la percussion est négligeable à l'échelle des temps de simulation.

On obtient donc deux équations supplémentaires pour former le système d'équations (3.33) à (3.35).

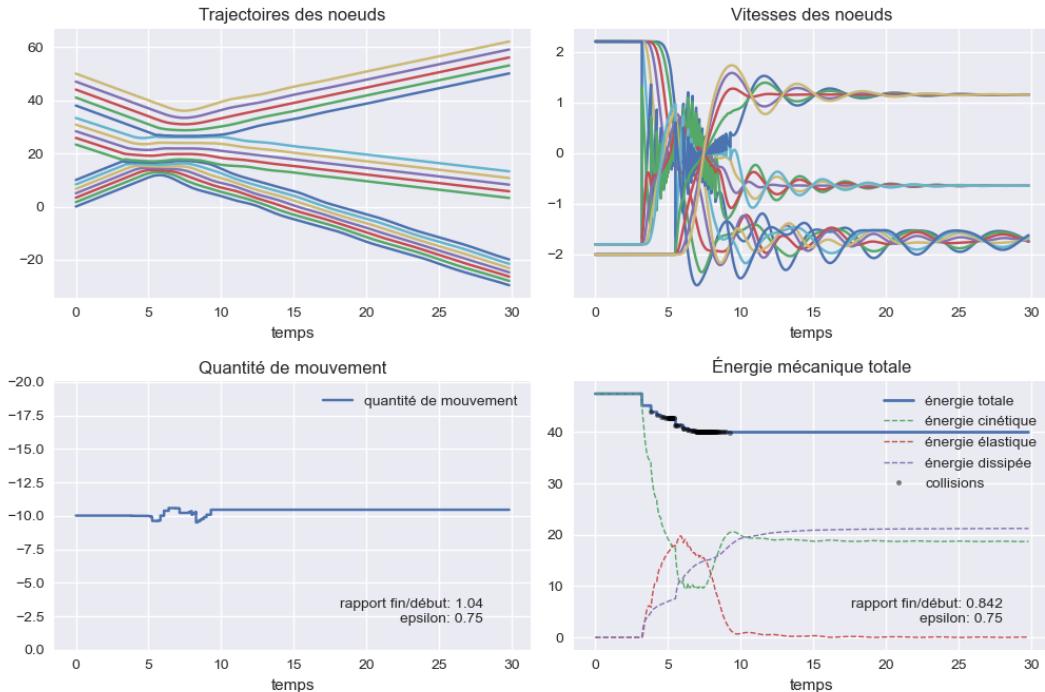
$$V_0 = v_0 + \frac{J - I}{m}, \quad (3.34)$$

$$V'_0 = v'_0 + \frac{K + I}{m'}. \quad (3.35)$$

Le calcul de la quantité  $I$  permet donc d'achever la résolution de ce système. A cet effet, nous obtenons :

$$I = \frac{(v_0 - v'_0)(1 + \varepsilon) + \frac{J}{m} - \frac{K}{m'}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}} \quad (3.36)$$

Pour tester ce modèle, nous avons effectué la mêmes simulation qu'avec le modèle précédent. Rappelons que la seule différence entre ces deux modèles est le traitement des vitesses après contact. Les résultats sont donc résumés à la FIGURE CI-BAS :



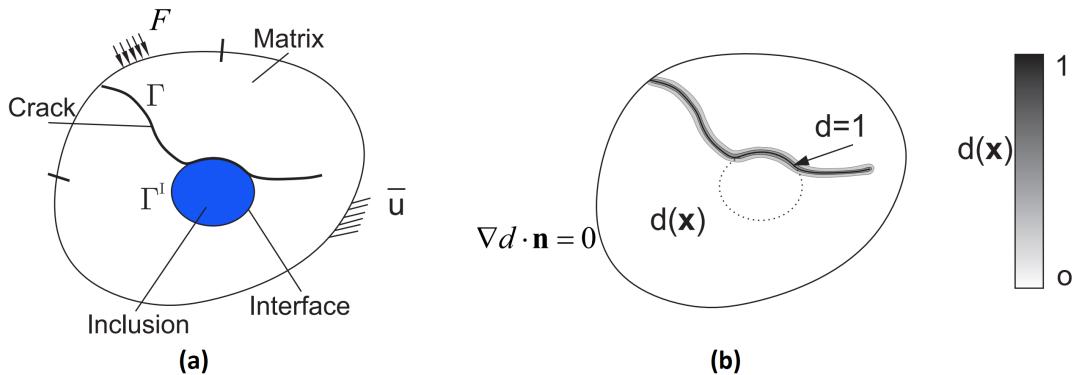
**FIGURE 3.18 –** Un résultats obtenus avec le troisième modèle pour la percussion avec trois floes. Les paramètres de ce problème peuvent être récupérés dans le dépôt GitHub (voir [Fracture-Solver.py](#)), et la simulation correspondante à travers ce LIEN SEAFILE.

Nous observons effectivement qu'il y a diminution de l'énergie totale à chaque collision. Cependant, il reste à savoir si cette perte d'énergie au niveau microscopique correspond à la perte observée au niveau macroscopique (passage micro/macro), surtout lorsque surviennent des fractures dans les floes.

### 3.3 Modélisation de la fracture

#### 3.3.1 Méthode du champ de phase

La nécessité de prédire les fractures des matériaux dans les matériaux industriels gagne en importance chaque année. En mécanique des sciences computationnelles, la Virtual Crack Closure Technique (VCCT), la Extended Finite Element Method (X-FEM), Cohesive Zone Method (CZM), et d'autres modèles de fractures discrets représentent la fracture comme une entité discontinue à partir de laquelle la variable d'intérêt est obtenue. Ces méthodes demandent non seulement des remaillages plus fins, mais aussi des algorithmes robustes pour pouvoir capturer les fractures. Ceci est numériquement coûteux, particulièrement lorsque les fractures ont des géométries complexes.



**FIGURE 3.19** – Représentation régularisée d'une fissure et d'une interface pour la méthode du champ de phase issue de [Yvo+18] : (a) solide contenant une interface et une fissure, la fissure pouvant passer par l'interface; (b) représentation régularisée d'une interface.

L'approche par champ de phase (voir figure 3.19) est née des travaux de Francfort et Marigo [FM98], et de leur régularisation par Bourdin et al. [BFM08]. Rappelons que l'approche variationnelle développée dans ces travaux consiste à formuler le problème de fissuration comme un problème de minimisation de l'énergie du solide fissuré exprimée comme :

$$E = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{u}, \Gamma) d\Omega + G_c \int_{\Gamma} d\Gamma, \quad (3.37)$$

où  $\Psi(\mathbf{u}, \Gamma)$  est une fonction densité d'énergie dépendant du champ de déplacements et de la répartition des fissures, notées collectivement  $\Gamma$ , et  $G_c$  est la ténacité. Cette approche conduit à une implémentation numérique élégante où les complexités dues aux fractures discrètes sont éliminées. Pour éviter cette difficulté, une approche régularisée de la description des discontinuités associées aux fissures consiste à remplacer la fonctionnelle originale par une fonctionnelle approchée (voir [Yvo+18]). Dans ce cadre, les fissures ne sont plus décrites par des surfaces mais par un champ de phase endommagée  $d(\mathbf{x})$ . L'énergie est alors exprimée par :

$$E = \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{u}, \Gamma) d\Omega + G_c \int_{\Gamma} \gamma(d, \nabla d) d\Gamma. \quad (3.38)$$

En introduisant une discréttisation en temps  $T = \{t^0, t^1, \dots, t^n, t^{n+1}, \dots, t^N\}$ . A chaque pas de temps  $t^{n+1}$ , le problème consiste à déterminer le champ de déplacements  $u^{n+1}$  et le champ de phase endommagée  $d^{n+1}$  tels que :

$$\mathbf{u}^{n+1}, d^{n+1} = \underset{\mathbf{u} \in \mathcal{K}_A, 0 \leq d^n \leq d^{n+1}}{\operatorname{argmin}} E, \quad (3.39)$$

où  $\mathcal{K}_A$  est un champ de déplacements cinématiquement admissible. Un exemple de densité de fissure pour un modèle de premier ordre est donné par :

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} \nabla d \cdot \nabla d,$$

où  $l$  est un paramètre de régularisation des discontinuités de fissures. Une fonction d'histoire est introduite pour décrire les effets d'histoire, et des possibles chargements et déchargements [MHW10] :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \Psi^+(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.40)$$

Dans équation (3.40),  $\Psi^+$  est la partie positive de la fonction densité d'énergie élastique telle que  $\Psi(\varepsilon) = \Psi^+(\varepsilon) + \Psi^-(\varepsilon)$  et est définie par :

$$\Psi^+(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2} (\langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_+)^2 + \mu \text{tr}\{(\varepsilon^+)^2\}, \quad (3.41)$$

où  $\varepsilon$  est le tenseur des déformations linéarisé.  $\langle x \rangle_{\pm} = (x \pm |x|)/2$  et  $\varepsilon^{\pm}$  sont les parties positives et négatives du tenseur des déformations. Nous posons à présent  $g_c$  le taux de liération critique de l'énergie de type Griffith [MHW10, p.5],  $\mathbf{f}$  un vecteur de forces de volumes,  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{\mathbf{F}}$  les déplacements et efforts imposés sur les bords associés  $\partial\Omega_u$  et  $\partial\Omega_F$  (voir figure 3.19). Nous écrivons enfin la loi de comportement comme :

$$\sigma = ((1-d)^2 + k) \left\{ \lambda \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_+ \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon^+ \right\} + \lambda \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_- \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon^-, \quad (3.42)$$

ce qui nous permet d'obtenir le problème couplé sous sa formulation forte pour déterminer  $d(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  :

$$\begin{cases} 2(1-d)\mathcal{H} - \frac{g_c}{l} \{d - l^2 \Delta d\} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ d(\mathbf{x}) = 1 & \text{sur } \Gamma, \\ \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.43)$$

et :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, d) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} & \text{sur } \partial\Omega_u, \\ \sigma \mathbf{n} = \bar{\mathbf{F}} & \text{sur } \partial\Omega_F. \end{cases} \quad (3.44)$$

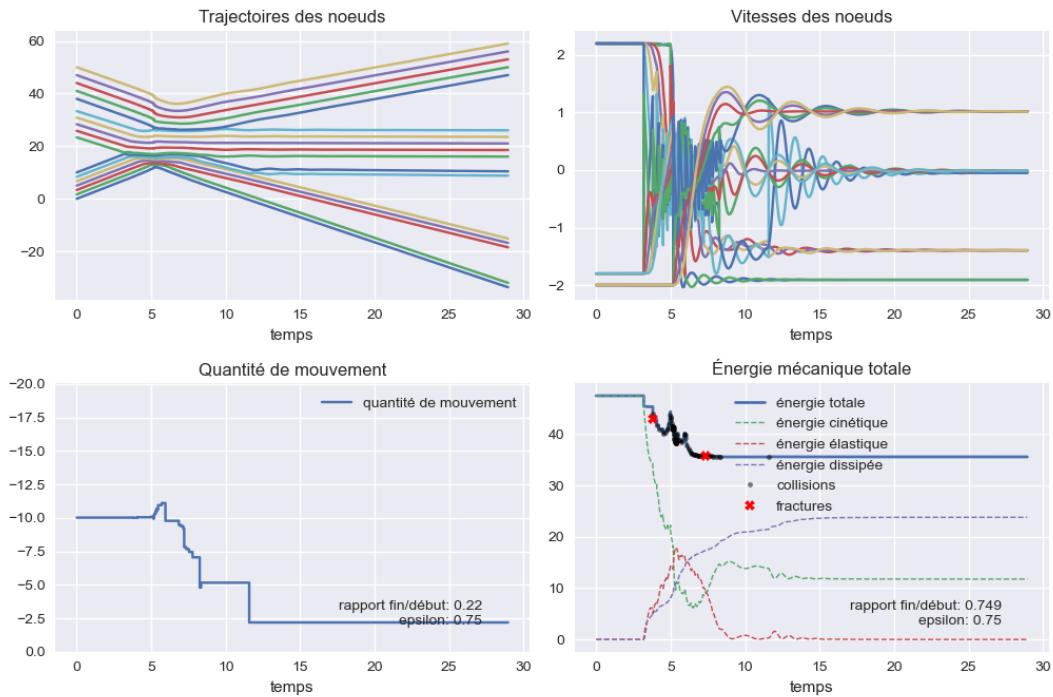
Quelques résultats obtenus par cette méthode ont été présentés dans les travaux de D. Balasoiu à la figure 2.9. Malgré l'efficacité de cette méthode, notre travail à son sujet durant ce stage s'est limité à son assimilation. En effet, nous ne l'avons pas implémentée par faute de temps. Il se trouve qu'en 1D avec un faible nombre de noeuds, une astuce alternative est envisageable.

### 3.3.2 Une approche combinatoire pour la fracture

Etant donné le déplacement des noeuds des floes à un temps précis  $t^{n+1}$ , nous recherchons la fracture qui minimise l'énergie potentielle totale au temps  $t^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= \text{énergie potentielle élastique au temps } t^{n+1} \\ &+ \text{ténacité} \times \text{longueur de la fracture envisagée au temps } t^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

La longeur de la fracture correspondant ici à la longueur à vide du ressort<sup>15</sup> à cette position si celui ci s'était brisé. Notons que nous pouvons remplacer l'énergie potentielle élastique dans l'équation (3.45) par la l'énergie de déformation du matériau (énergie potentielle élastique + énergie dissipée par frottement visqueux). Notre approche combinatoire consiste ainsi à calculer les énergie correspond à toutes les fractures possibles dans le floe, et nous récupérons la plus petite de ces énergies  $E_{min}^{n+1}$ . Conformément à l'approche de Griffith, une fracture n'apparaît que si  $E_{min}^{n+1} \leq E_{min}^n$  (voir figure 3.20).



**FIGURE 3.20** – Un résultats obtenus par l'approche combinatoire pour la fracture avec trois floes. Les données de cette étude sont les mêmes que celles des figures 3.16 et 3.18, en plus de la définition de la tenacité des floes. Elles peuvent être récupérées dans le dépôt GitHub (voir [FractureSolver.py](#)), et la simulation correspondante à travers ce LIEN SEAFILE.

L'approche combinatoire n'est sérieusement envisageable qu'en 1D car à chaque pas de temps, il y a autant de fractures admissibles qu'il y a de ressorts<sup>16</sup>. En effet, à chaque ressort brisé, c'est un nouveau floe qui est créé, ce qui simplifie considérablement le travail; alors qu'en 2D, il aurait fallu étudier bien plus de combinaisons. Cette simplification élimine en outre le problème de *propagation de la fracture*; en 1D, nous ne traiterons donc que le problème de *ncléation de la fracture*.

Tous ceci n'est évidemment pas le cas en dimension supérieure, et nous devons étudier toutes les combinaisons possibles de ressorts qui céderont simultanément; ce qui est très coûteux. Il est donc primordial d'implémenter la méthode du champ de phase pour toute adaptation de nos résultats en dimension 2 ou 3.

15. Nous utiliserons la désignation *ressort* ici pour indiquer à la fois le ressort et le dispositif visqueux situé entre deux noeuds adjacents (VOIR FIGURE SUR LA PARTIE PRÉCÉDENTE)

16. En réalité, les deux ressorts extrêmes ne peuvent se briser, car cela donnerait naissance à des floes sans ressorts

### 3.4 Algorithme de calcul 1D

Nous présentons dans cette section l'algorithme que nous avons adopté pour développer notre code de simulation de la percussion ainsi que la fracture de floes 1D. Notons que l'implémentation de la percussion correspond au modèle présenté à la section 3.2.5. Cependant, les autres modèles de percussion peuvent facilement être obtenus en changeant le contenu de la fonction `computeAtContact` que nous détaillerons plus tard. Quant à la fracture, nous avons implémenter l'approche combinatoire présentée à la section 3.3.2. Un résumé de la procédure dans l'intervalle de temps  $[t^n, t^N]$  est présenté à la ?? 1.

---

#### Algorithme 1 : Algorithme de simulation de percussion et de fracture

---

**Données :** Les positions  $\mathbf{q}^n$ , les vitesses  $\mathbf{v}^n$  de tous les noeuds de tous les floes à l'instant  $t^n$  sont connus<sup>17</sup>; Mettre à jours les chargements aux bords au temps courant  $t^{n+1}$ ;  
Pour chaque neud  $e$ , début des vérifications de collision à partir de  $Coll_e = 0$ ; Pour chaque floe  $f$ , une fracture potentielle apparaît au temps  $Frac_f = N$ ;

**Résultat :** Positions et vitesses des noeuds à l'instants  $t^N$

**lfn = 0** (premier pas de temps) Calcul des trajectoires des noeuds  $\mathbf{q}^{n+1}, \dots, \mathbf{q}^N$  et des vitesses associées  $\mathbf{v}^{n+1}, \dots, \mathbf{v}^N$ ; Vérification de l'apparition d'au moins une collision;

**tant que (pas de collision) faire**

  doubler le temps de simulation; recalculer le trajectoires; pour tous les noeud  $e$ ,  $Coll_e = k$  ( $k$  est le pas de temps courant); revérifier la collision;

**fin**

**tant que ( $Coll_e < N$  pour tous les noeuds  $e$ ) faire**

  Calcul des déplacements après chocs; Détection des fractures : pour chaque pas de temps  $t^k \in [t^{n+1}, t^N]$  et pour chaque floe, rechercher la configuration qui présente l'énergie potentielle totale minimale  $E_{min}^k$ , et la comparer avec l'énergie  $E_{min}^n$ ;

**si (fracture sur le floe  $f$ , i.e.  $E_{min}^k \leq E_{min}^n$ ) alors**

$Frac_f = k$ ;

**sinon**

$Frac_f = N$ ;

**fin**

  Détection des collisions : pour chaque pas de temps  $t^k \in [t^{n+1}, t^N]$  et pour chaque noeud, on se demande s'il y a collision avec le noeud voisin de droite;

**si (collision entre  $e_1$  et  $e_2$ ) alors**

$Coll_{e_1} = Coll_{e_2} = k$ ;

**sinon**

$Coll_{e_1} = Coll_{e_2} = N$ ;

**fin**

  Mise à jour des indices potentiels de fracture : tous ces indices sont reinitialisés au minimum de tous les indices de fracture  $Frac = \min_{f \in \mathcal{F}} Frac_f$ , où  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble des floes;

  Mise à jour des indices potentielles de collision : Désignons par  $Coll'$  le minimum de tous les indices de collisions  $\min_{e \in \mathcal{E}} Coll_e$ , où  $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des noeuds du problème. Tous les indices sont reinitialisés à  $Coll = \min\{Coll', Frac\}$ .

  Invalidation des quantités : toutes les positions et les vitesses calculées qui surviennent après une collision ou une fracture sont invalidées (cependant, les nouveaux calculs ne débutent qu'à partir de  $Coll$ , et s'arrêtent à  $Frac$ ).

**fin**

---

Notons que l'algorithme ?? 1 omet plusieurs détails indispensables pour une implémentation

efficace en langage Python. Par exemple, l'invalidation des quantités est prise en main par les fonctions de détection des collision et de fracture. Nous fournissons donc la méthode `runSimulation()` de la classe `FractureSolver` (voir liste 3.1).

```
def runSimulation(self):
    """
    Runs the simulation for the complete fracture problem
    """

    ## Run uniform mouvement phase up to the first collision
    self.computeBeforeContact()

    for key in self.floes.keys():
        self.checkFracFrom[key] = self.t.size

    while self.t.size <= self.NBef + self.NAft and max(self.collCount.values()) < 1000:
        self.computeAfterContact()

        ## (Potential) Fracture detection
        floeDict = deepcopy(self.floes)
        for floe in floeDict.values():
            self.checkFracture(floe.id)

        ## Collision detection
        for floe in self.floes.values():
            for node in floe.nodes:
                res = self.checkCollision(node.id, node.rightNode)

        ## Assign the same value to all keys to check collision from now on
        smallestCheckCollFrom = min(self.checkCollFrom.values())
        for key in self.checkCollFrom.keys():
            self.checkCollFrom[key] = smallestCheckCollFrom
        self.collLoc.append(smallestCheckCollFrom)

        ## Assign the same value to all keys tp check fracture from now on
        smallestCheckFracFrom = min(self.checkFracFrom.values())
        for key in self.checkFracFrom.keys():
            self.checkFracFrom[key] = min([smallestCheckFracFrom, smallestCheckCollFrom])

        ## Truncate exceeding data (not strickly necessary)
        self.x = self.x[:self.NBef+self.NAft+2, :]
        self.v = self.v[:self.NBef+self.NAft+2, :]
        self.t = self.t[:self.NBef+self.NAft+2]
```

**Listing 3.1** – Code de simulation 1D.

Notre code est stocké dans un dépôt GitHub privé dont une explication du contenu est donnée dans le fichier README<sup>18</sup> dont la capture est présentée à la figure 3.21. Nous avons effectué plusieurs simulations avec ce code. En particulier, nous avons observé que que les ressorts des floes se fractures quand il sont soumis soit à une compression ouà une élongation intense. Nous pouvons observer celà sur [cette simulation LIEN SEAFILE](#), fournie à titre d'exemple.

## 3.5 Résumé des résultats obtenus

Pour le problème 1D, nous avons non seulement étudié le déplacement des noeuds d'un floe, mais aussi ce qui se passe après une collision de ces noeuds. En considérant le floe comme un réseau de ressorts, nous avons pu étudier la nucléation (et la propagation) d'une fracture suivant le modèle de Griffith sans recourir à la méthode du champ de phase.

18. Précisons que ce dépôt sur GitHub est privé.

README.md

## Fracture of ice floes by percussion in a granular model

This repository contains files used and developed for the percussion and the fracture of an ice floe (viewed as mass-spring-damper system in 1D and in 2D), following the Griffith model. This repository was created for the purpose of a Master's level internship at the Jacques Louis-Lions Laboratory.

---

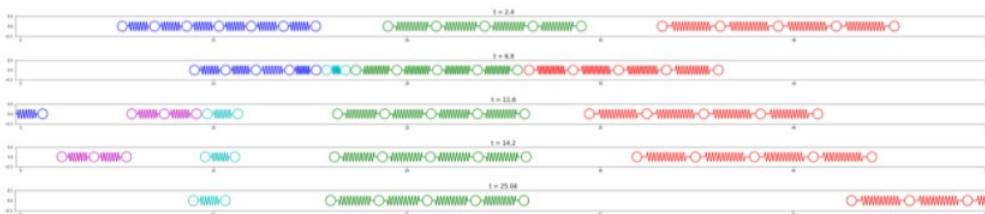
### Structure

- `docs` contains useful information to understand the problem at hand. The most important files here are the two theses: Rabaté (2015), and Balasoiu (2020).
- `reports` contains weekly reports during the internship, and the final report.
- `slides` contains a presentation for the Master thesis defense.
- `pdfs` contains the PDF files (final report and slides) submitted for thesis defense.
- `code` contains the 1D and 2D code that was developed. To launch a 1D simulation, adjusts parameters and run the Python scripts `Percussion1D-CLI.py` and `Fracture1D-CLI.py` (this latter script also deals with Percussion). Jupyter notebooks are also available to test specific aspects of the problem.

---

### Screenshots

A few results from simulations are available through [this link](#).




---

### Resources

All the classic scientific computing libraries (Numpy, Scipy, etc.) will have to be installed to run the scripts. Additionally, one might need:

- [Bokeh](#) for interactive plotting in Notebooks.
- [PILImage](#) for exporting simulation results as gifs.

**FIGURE 3.21** – Apperçu du dépôt principal `ice-floes` utilisé durant le stage.

Nous avons effectué plusieurs simulations qui ont montré que les ressorts se brisent lorsqu'ils sont fortement comprimés. Le modèle 1D adopté (voir section 3.2.5) a également montré que le système perd de son énergie (cinétique) au cours du temps, ce qui

Quand à la validation des résultats, nous n'avons pas réussi à effectuer des tests en laboratoire. Cette tâche représente la prochaine étape avant l'adoption de ce modèle 1D. Ceci dit, les floes de glace sont généralement considérés comme des objets 2D du fait de leur taille négligeable face au rayon de la Terre. Une étude en dimension supérieure est donc indispensable pour un déploiement de notre modèle de fracture à l'échelle des floes de glace.

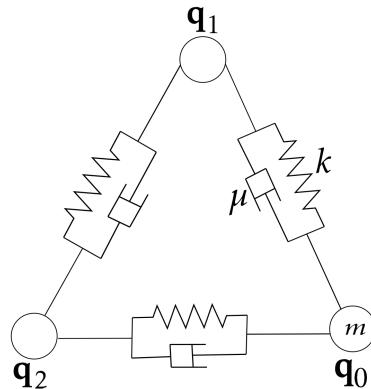
## Chapitre 4

# Problème 2D et percussion des floes

Dans cette section, nous étudierons le floe de glace en deux dimension (2D). Nous reprendrons le même cheminement qu'en 1D. En d'autres termes, nous partirons de l'approche approche par réseau de ressort introduite par Balasoiu pour modéliser dans un premier temps le déplacement d'un floe de glace contenant juste trois noeuds (masses), ensuite nous modéliserons la percussion inélastique sans rebond des noeuds de floes.

### 4.1 Développement d'un modèle de déplacement des noeuds

Étudions le comportement d'un floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts (3 ressort, 3 dispositif viseux, et 3 noeuds) (voir figure 4.1).



**FIGURE 4.1** – Floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Tous les noeuds du réseau ont la même masse  $m$ , tous les ressorts ont la même raideur  $k$ , et tous les dispositifs visqueux ont le même coefficient  $\mu$ .

Comme nous l'avons présenté aux équations (4.4) et (E), le système de la figure 4.1 est régit par l'équation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} [k(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij})\mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij}], \quad (4.1)$$

où  $L_{ij}$  représente la longeur au repos du ressort entre les noeuds  $i$  et  $j$ , et  $C_{ij}$  indique si les noeuds  $i$  et  $j$  sont connectés ou non (pour ce modèle 2D simple,  $C_{ij} = 1 \forall 0 \leq i, j \leq 2$ ). Le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{ij}$

vaut :

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

**Simulation par un schéma d'Euler explicite.** On discrétise par un schéma de différence finies avec  $N + 1$  pas de temps, et pour une temps de simulations  $T$  :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall n \in [[0, N]], \quad t^n = n\Delta t = n\frac{T}{N}, \quad \mathbf{q}_i(t^n) \approx \mathbf{q}_i^n.$$

L'équation (4.1) devient :

$$m \frac{\mathbf{q}_i^{n+1} - 2\mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \frac{\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right],$$

soit encore :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]. \quad (4.2)$$

La simulation de ce modèle par un schéma d'Euler explicite à pas constant sur un intervalle de temps faible ( $T = 4$ ) est présentée à la figure 4.2, ainsi que les positions des 2 noeuds au début et à la fin de la simulation. La simulation à la figure 4.3 permet d'observer le problème avec ce schéma ( $T = 10$ ).

Les figures 4.2 et 4.3 permettent de constater que le schéma d'Euler explicite (peu importe son pas de temps), n'est pas adapté à ce problème. Nous étudierons donc d'autres alternatives.

**Simulation à l'aide des fonctions de la librairie Scipy.** À travers ses fonction telle que `odeint` et `solve_ivp`, Scipy offre une solution robuste et élégante pour simuler les systèmes d'ODE de la forme  $\dot{Y} = AY$ . Avec Scipy, nous résolvons numériquement nos EDO à l'ordre RK45. Autrement dit, l'erreur est contrôlée par un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4, et les pas de temps sont pris à l'ordre 5.

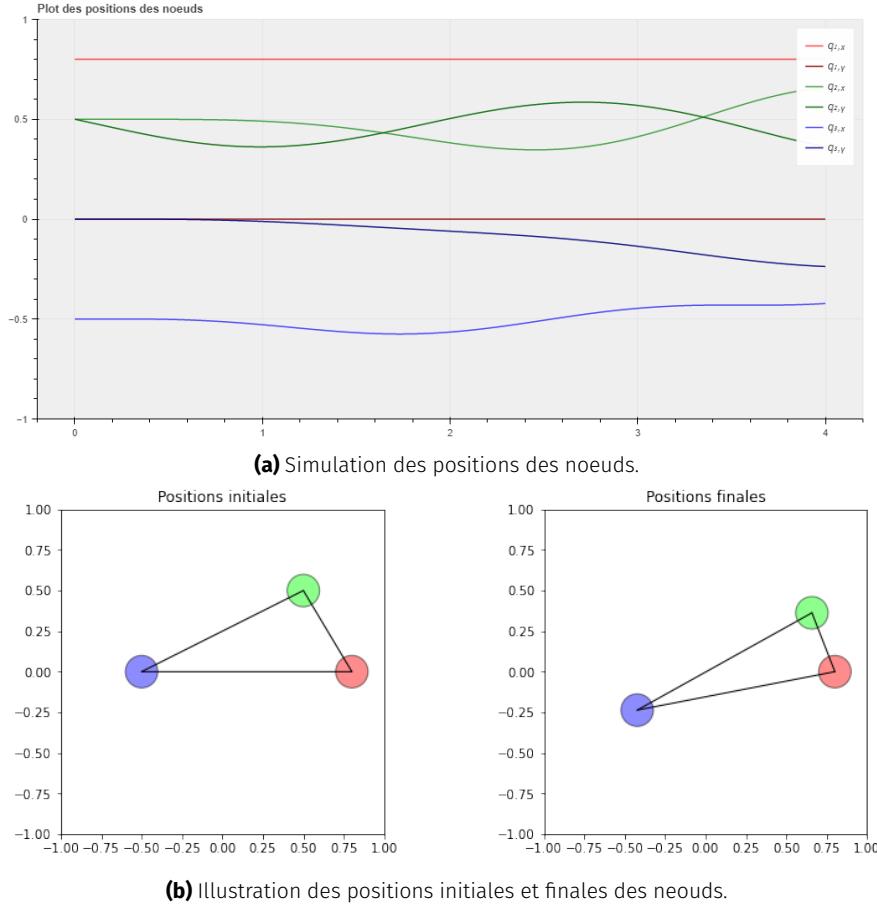
## 4.2 Développement d'un modèle de percussion des floes

### 4.2.1 Présentation des travaux antérieurs

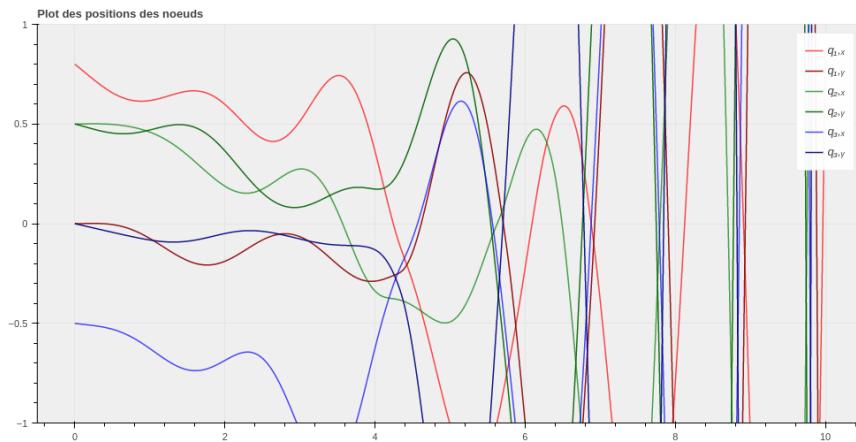
Les travaux antérieures sur le problème 2D ont été présentés dans la chapitre 2. Particulièrement, nous avons adopté et amélioré des résultats obtenus par D. Balasiou [Bal20a]. Ces résultats concernent la simulation du comportement des floes de glace une fois une fois percuté par un object ponctuel ; et ont été présentés à la section 2.3.6 (voir aussi figure 4.4 pour une interface graphique web pour interagir avec le programme). Ici, nous explicitons les points sur lesquels nous nous sommes directement inspirés pour notre travail de stage.

### 4.2.2 Nouveaux travaux sur la percussion

Les floes de glace  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une modélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliées par des ressorts (de constante de raideur  $k$ ), et par des dispositifs visqueux de

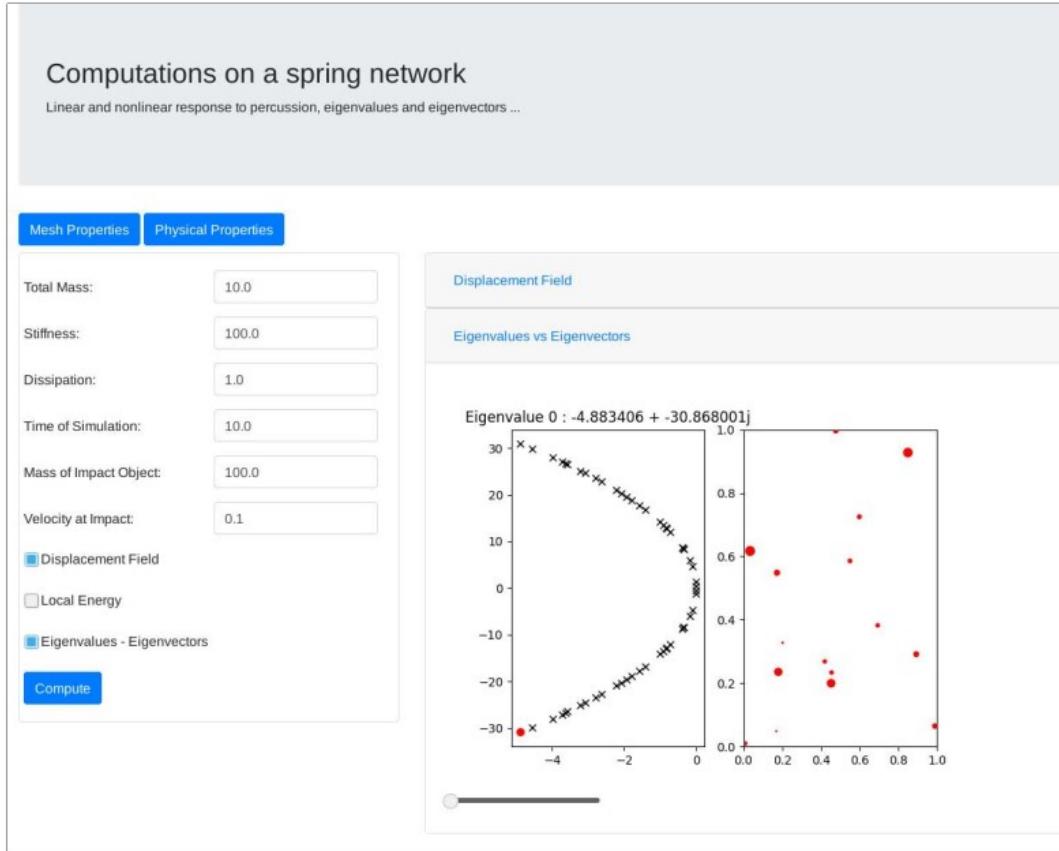


**FIGURE 4.2** – Simulation du système 4.2 par un schéma d'Euler explicite avec  $T = 4$  lorsqu'**un des noeuds est fixé** (le noeud rouge). La couleur rouge représente le noeud  $q_1$ , le vert le noeud  $q_2$ , le bleu le  $q_3$ . Les paramètres utilisés ici sont les suivants :  $m = 6.2$ ,  $k = 23.3$ ,  $\mu = 3$ ; à l'instant initiale, les trois noeuds perturbés avec des vitesses d'intensité respectives  $v_1 = 0.3$ ,  $v_2 = 0.1$ , et  $v_3 = 0.1$ . Par rapport à l'axe des abscisses, ces vitesses ont sont orientées respectivement de  $\theta_1 = 180^\circ$ ,  $\theta_2 = 270^\circ$ , et  $\theta_3 = 240^\circ$  (voir `code/simu2D/Deplacement2D-1.ipynb`).



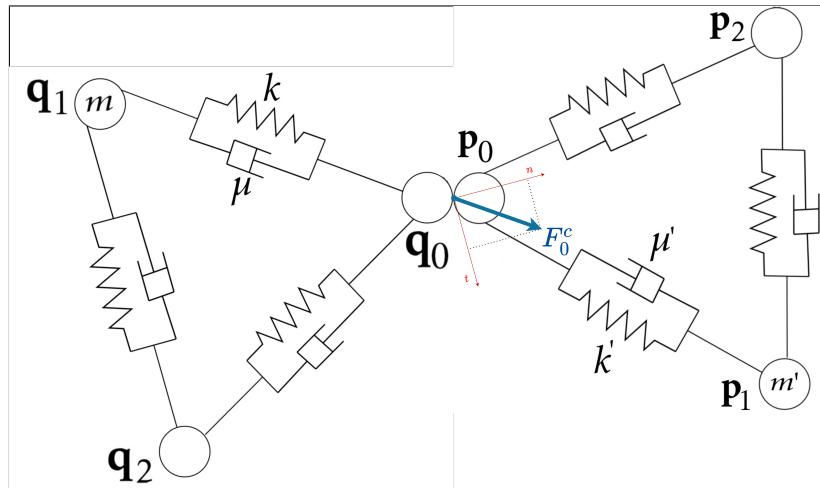
**FIGURE 4.3** – Simulation du système 4.2 par un schéma d'Euler explicite avec  $T = 10$  lorsqu'**aucun des noeuds n'est fixé**. Cette figure utilise les mêmes paramètres que la figure 4.2. On observe ici une divergence complète du système (voir `code/simu2D/Deplacement2D-2.ipynb`).

constante  $\mu$ . Nous désignerons par  $n+1$  le nombre total de noeuds du floe  $\Omega_k$ , chaque noeud ayant pour masse  $m$ . De façon similaire, on définit les constantes  $k'$ ,  $\mu'$ ,  $n'+1$ ,  $m'+1$  pour le floe  $\Omega_l$ . Les



**FIGURE 4.4** – Client web `springslattice-web.py` développé dans [Bal20a, p.197].

positions des noeuds de  $\Omega_k$  seront noté  $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$ , tandis que ceux de  $\Omega_l$  seront notés  $(p_i)_{0 \leq i \leq n'-1}$  (voir figure 4.5).



**FIGURE 4.5** – Contact entre deux floes aux points  $q_0$  et  $p_0$  respectivement.

On définit la longueur à vide  $L_{0j}$  et le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{0j}$  (orienté de  $q_0$  vers  $q_j$ ) entre le noeud  $q_0$  et le noeud  $q_j$  et  $u_{0j}$ . Notons que ces définitions restent valable si nous remplaçons le noeud  $q_0$  par

un noeud  $(\mathbf{q}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ . On définit aussi la matrice de connectivité  $C$  :

$$\forall 0 \leq i < j \leq n-1, \quad C_{ij} = C_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{q}_i \text{ est voisin de } \mathbf{q}_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme présenté dans les travaux [Bal20a, p.186], le système différentiel qui modélise la percusion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisont le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe  $\Omega_k$ , nous écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire<sup>1</sup> au point de contact  $q_0$  :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (4.3)$$

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \underbrace{k(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j})\mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (4.4)$$

représente la somme des forces de reaction et de disssipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud  $q_0$ ; et  $\mathbf{F}_0^c(t)$  la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposnat qu'il existe un repère de contact  $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  associé au floe  $\Omega_k$  (voir figure 4.5), on peut écrire, pour  $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (4.5)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations équations (4.3) à (4.5). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (E)$$

En ce qui concerne le floe  $\Omega_l$ , nous procédons de facons similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n'-1, \end{cases} \quad (E')$$

où  $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$  sont définis de facon similaire à  $\mathbf{F}_0$  (voir équation (4.4)) :

$$\mathbf{F}'_i = \sum_{j=i}^{n'} C_{ij} \left[ k'(\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - L'_{ij})\mathbf{u}'_{ij} - \mu' \langle \dot{\mathbf{p}}_j - \dot{\mathbf{p}}_i, \mathbf{u}'_{ij} \rangle \mathbf{u}'_{ij} \right]. \quad (4.6)$$

---

1. La rotation du point matériel  $q_0$  n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

Ensuite, on additionne membre à membre les équations des systèmes extérieurs (SE) de équations ( $E$ ) et ( $E'$ ) pour éliminer la force de contact. On obtient :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0. \quad (4.7)$$

Remarquons que les positions relatives des noeuds  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{p}_0$  restent inchangées durant la collision. A l'instant initial, on note donc  $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0)$ , et  $\dot{\mathbf{q}}_0(0) = \dot{\mathbf{p}}_0(0)$ ; idéalement, nous voudrions que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{q}_0(t) - \mathbf{p}_0(t) = \Delta_0. \quad (4.8)$$

Pour satifaire cette condition, nous exhibons autant d'équations nécessaire pour que notre problème de percussion soit bien posé. Elles sont :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0, & (\text{SE}) \\ \ddot{\mathbf{p}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0, \quad \dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0 - \Delta_0, & (\text{SE}) \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1. & (\text{SI}) \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n'-1, & (\text{SI}) \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

Quant à la visualisation des résultats, nous avons construit une interface graphique web pour interagir avec le programme. A travers cette interface, nous pouvons modifier tous les paramètres du problèmes et lancer des simulations. Un tel exemple se trouve à la figure figure 4.6, et la simulation correspondant peut être visualisée via [ce lien SEAFILE](#).

### 4.3 Code de calcul 2D

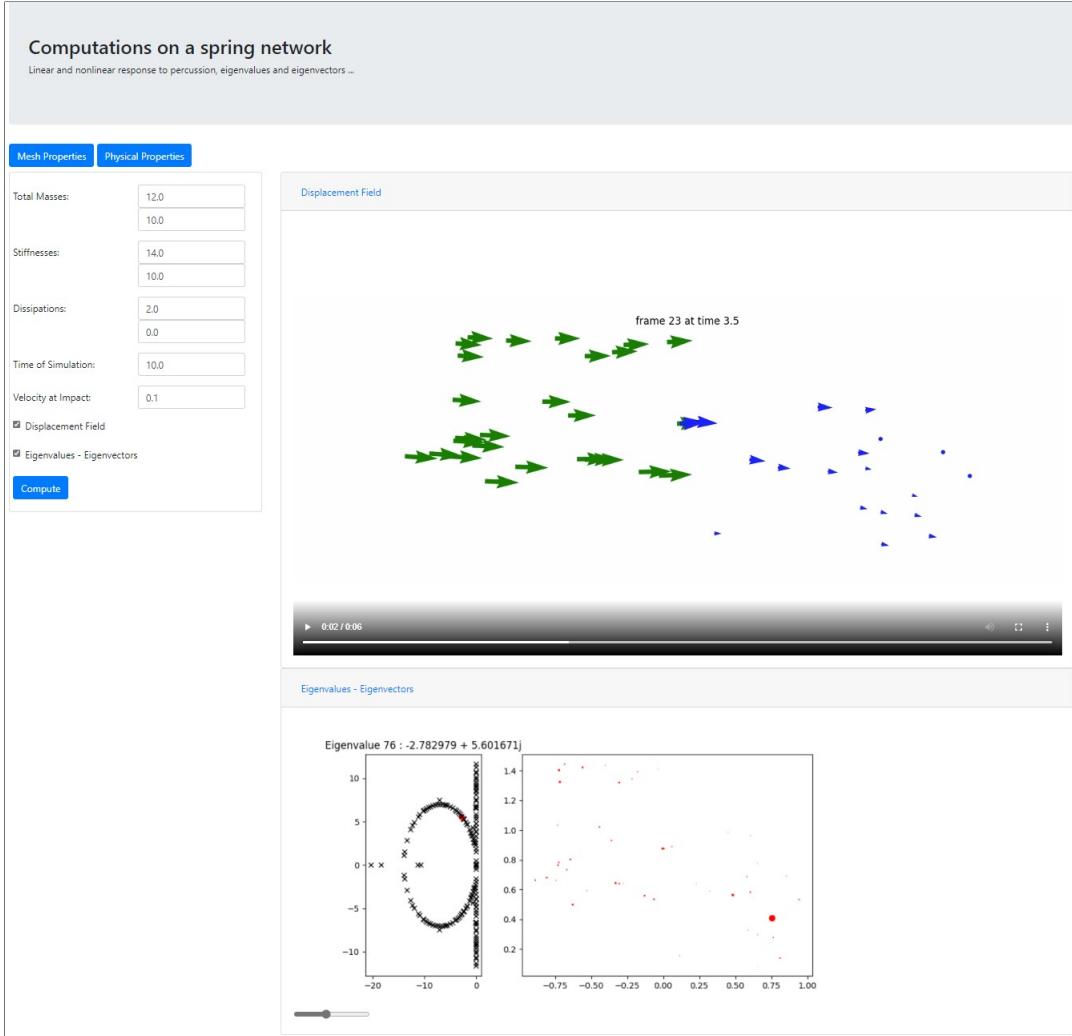
L'algorithme de calcul 2D est largement inspiré des travaux de BALASOIU. En effet, nous avons ajouté des modules Python à la librarie `springslattice` qu'il a développé pour traiter les réseaux de ressorts. Ces modules sont :

1. **multimesh** : pour la création d'un réseau de ressort constitué de deux floes de glace en contact, que nous considérerons comme un maillage.
2. **multisolver** : pour la création du solveur 2D suivant l'équation ( $\mathcal{P}$ ) pour simuler les noeuds d'un objet `multimesh`. Une fois les caluls fait dans la fonction `Fhom`, nous les vérifions à l'aide d'un schéma symplectique (voir ??).
3. **percussion-cli** : pour l'execusion des simulations avec des paramètres donnés en ligne de commande (ou ceux insérer par défaut).
4. **percussion-web** : pour l'execusion des simulations avec des paramètres donnés dans une interface web. Ici, on peut en plus observer les vecteur et les valeurs propres (toutes négatives) du système.

Nous présentons à la figure 4.7 le fichier README du dépôt `springslattice` sur Framagit créer par Balasoiu dans ses travaux, et amélioré par nous durant ce stage. Tout comme le dépôt principal `ice-floes` sur GitHub, ce dépôt secondaire est privé.

### 4.4 Résumé des résultats obtenus

Bien que le modèle de fracture 1D soit facilement adaptable au calculs 2D, nous ne l'avons pas fait fait faute de temps. En particulier, nous avons :



**FIGURE 4.6** – Client web développé durant le stage pour les percussion 2D. Comparativement à la figure 4.4, on constate la présence de plus de champ pour préciser les paramètre du second floe entrant en collision.

- Modélisation du déplacement des noeuds d'un floe de glace 2D soumis à aucune force sur bord;
- Modélisation de la collision (élastique) de deux floe de glace. Vu que le temps de la collision est connu (voir [Rab15]), nous pouvons limiter étendre ces travaux à la collision avec séparation des masses, comme nous l'avons fait en 1D.
- Crédit d'un interface web pour introduire les paramètres et obtenir les résultats d'une simulation.

Les travaux obtenus en 2D sont prometteurs, tout comme ceux obtenu en 1D. Ils ont été obtenu pendant un stage qui a demandé une discipline et une encadrement de taille. Au bout de ce travail, j'ai pu en tirer plusieurs bénéfices.

**Readme.md**

This python package is the implementation of the numerical method for the impact simulation of a mass-spring lattice of Poisson-Delaunay type. It also implements head-on collision between two distinct mass-spring lattices.

It uses python3.

### Installation commands:

First, your system requires :

- Virtualenv
- Cython
- Tkinter: `sudo apt-get install python3-tk`
- Ffmpeg: `sudo apt install ffmpeg` (for the web interface)

Next, follow these steps:

```
pip install virtualenv
python -m venv venv
source venv/bin/activate
pip install -r requirements.txt
python setup.py build_ext --inplace
```

### Use cases

#### Mass-spring lattice behavior

This is the main purpose of the code. The simulations can be done via the cli application :

```
python springslattice-cli.py
```

Or via the web client :

```
python springslattice-web.py
```

#### Percussion between two lattices

Based on the mass-spring behavior of a lattice, we have both cli and web clients:

```
python percussion-cli.py
```

```
python percussion-web.py
```

#### Linear vs nonlinear domain

The script:

```
plotlineardomain.py
```

can test if your parameters are in the linear domain or not.

#### Eigengap

The script:

```
ploteigengap.py
```

plots the eigengap of the singular perturbation problem.

**FIGURE 4.7** – Appercu du dépôt secondaire `springslattice` maintenu et amélioré durant le stage.

## Chapitre 5

# Déroulement et apports du stage

### 5.1 Journal de bord

Le stage s'est déroulé de façon agile. Chaque semaine, un rapport d'activité fut rédigé. Dans ce dernier figurait principalement le travail effectué, les difficultés rencontrées, et le travail à venir durant la nouvelle semaine à venir. Dans cette section, nous résumons le travail effectué durant chacune de ces 26 semaines. Pour des rapports détaillés, le lecteur est invité à se rendre sur le dépôt [ice-floes](#).

#### Semaine 1 (3/2/2021 - 9/2/2021)

1. Mise en place du [dépot GitHub privé](#) pour le suivi de la rédaction des différents documents et le travail à distance plus aisés;
2. Lecture de l'article de M. Rabatel et al. [[RLW15](#)]
3. Lecture de la thèse de M. Rabatel [[Rab15](#)] (introduction, chapitres 1 et 2) :
4. Apprentissage et utilisation des principales fonctionnalités du module TikZ.

#### Semaine 2 (10/2/2021 - 16/2/2021)

1. Fin de lecture des chapitres 2 et 3 de la thèse de M. Rabatel [[Rab15](#)].
2. Début de lecture de la thèse de D. Balasoiu [[Bal20b](#)].
3. Continuation de rédaction de l'état de l'art pour le rapport de stage.

#### Semaine 3 (17/2/2021 - 23/2/2021)

1. Révision des notions de mécanique de la rupture (et de mécanique du solide) à travers le livre [[GS17](#)].
2. Lecture de la première partie de la thèse de D. Balasoiu [[Bal20a](#)]).
3. Début de lecture de la deuxième partie (chapitre 3) [[Bal20a](#)].

#### Semaine 4 (24/2/2021 - 2/3/2021)

1. Lecture du chapitre 3, et démonstration de la proposition 3.3.1 [[Bal20a](#), p.93].
2. Lecture des annexes et relecture (rapide) des chapitres 1 et 2 de la thèse [[Bal20a](#)].

3. Lecture du chapitre 4 (sans vraiment comprendre). Des outils avancés de **théorie de la mesure**, de **probabilité appliquée**, de **géométrie stochastique**, etc. sont nécessaires pour comprendre.
4. Lecture du chapitre 1 du livre [Chi+13] cité à plusieurs reprises dans le chapitre 4 de la thèse [Bal20a].

### Semaine 5 (3/3/2021 - 9/3/2021)

1. Réessaie de lecture du chapitre 4 du livre [Bal20a].
2. Lecture du chapitre 2 du livre [Chi+13].
3. Révisions de notions de théorie de la mesure : **mesure et formules de Campbell**, **distribution de Palm**, etc.
4. Lecture des chapitres 5 et 6 de la thèse [Bal20a].

### Semaine 6 (10/3/2021 - 16/3/2021)

1. Lecture approfondie des chapitres 4 et 5 du livre [Bal20a];
2. Rédaction de l'état de l'art dans le rapport de stage.

### Semaine 7 (17/3/2021 - 23/3/2021)

1. Test et debuggage du code `spingslattice` sur [Framagit](#).
2. Étude de l'état de l'art pour des problèmes de collision utilisant des réseaux de ressorts [IS20 ; GN19 ; Ho10 ; MIS21].
3. Relecture de la section 1.1.2 du chapitre 1 de la thèse de RABATEL [Rab15, p.18], et proposition d'un problèmes lineaires de complémentarité pour modéliser la collision singulière.

### Semaine 8 (24/3/2021 - 30/3/2021)

1. Relecture des parties importantes pour la modélisation dans les thèses [Bal20a ; Rab15];
2. Lecture de travaux ayant trait au contact ponctuel entre deux solides (par exemple [Löt81], etc.);
3. Développement du modèle de percussion et essais de résolution analytique.

### Semaine 9 (31/3/2021 - 6/4/2021)

1. Lecture de plusieurs modèles de systèmes masses-ressorts avec dispositifs visqueux, en particulier dans [Ho10].
2. Posage du problème de percussion 1D, et d'écrire les équations régissant le système.
3. Simulation du modèle à l'aide des librairies Scipy et Bokeh (la simulation interactive a permis de constater des erreurs dans le modèle qui ont aussitot été corrigées).

### Semaine 10 (7/4/2021 - 13/4/2021)

1. J'ai modélisé le contact avec séparation, tout en simulant les différents systèmes 1D décrits dans *Percussion1D-3.ipynb*.
2. Preuve des questions d'existence, d'unicité, etc. par rapport au modèle développé.

**Semaine 11 (13/4/2021 - 20/4/2021)**

1. La principale tâche effectuée à été l'animation du modèle de percussion 1D. J'ai divisé cette partie en deux phase :
  - **Avant le contact** : pour faciliter les travaux, on suppose que les floes sont en mouvement rectilignes uniformes.
  - **Après le contact** : la semaine dernière, nous avons calculé les "vitesses initiales" pour cette phase. On les utilise pour simuler le déplacement.

**Semaine 12 (21/4/2021 - 27/4/2021)**

1. Démonstration de la non-convergence du modèle 1D; Une trigonalisation de la matrice du système permet d'exhiber l'expression explicite des déplacements, et de conclure.
2. Initialisation de la modélisation et de la simulation du modèle 2D.

**Semaine 13 (28/4/2021 - 4/5/2021)**

1. Vérification du modèle et du code de calcul 2D. Etude des paramètres et du système masse-ressort en Python.
2. Relecture du code et la thèse de Dimitri afin de trouver des nouvelles idées.

**Semaine 14 (5/5/2021 - 11/5/2021)**

1. Lecture détaillée du code de Dimitri ; compréhension des fonction et demande d'aide lorsque nécessaire.
2. Développement d'un modèle de percussion en 2D compatible avec le code préexistant.
3. Début d'écriture d'une présentation Beamer pour la soutenance de mi-stage.

**Semaine 15 (12/5/2021 - 18/5/2021)**

1. Fin de l'écriture de la présentation Beamer pour la soutenance de mi-stage. Modification et incorporation des différentes remarques de M. Labbé.
2. Suite de la lecture détaillée du code de Dimitri.

**Semaine 16 (19/5/2021 - 25/5/2021)**

1. Suite de lecture du code de Dimitri, en particulier le module `Mesh`. J'ai commencé à définir le module `MultiMesh`, qui représente deux floes en contact.
2. Codage de la deuxième phase de la percussion 1D. Les résultats ne sont pas au point, et seront sans doute améliorés dans les semaines à venir.

**Semaine 17 (26/5/2021 - 1/6/2021)**

1. Finition de l'animation 1D en corrigeant les bugs;
2. Rédaction du problème de percussion 2D dans le rapport;
3. Définition et test du maillage `MultiMesh` en vue de la percussion; et intégration au code de Dimitri.

**Semaine 18 (2/6/2021 - 8/6/2021)**

1. Début d'implémentation de la classe `MultiSolver` pour gérer la percussion 2D dans le code de Dimitri.
2. Revisitation de l'animation 1D en distinguant deux cas en fonction des vitesses des floes après le contact.
3. Étude énergétique pour la validation du système.
4. Début de l'étude d'une percussion avec plusieurs noeuds par floe (voir `FractureSolver.py`).

**Semaine 19 (9/6/2021 - 15/6/2021)**

1. Implémentation du module `FractureSolver.py` pour la simulation de la percussion.
2. Migration du code préexistant (depuis les notebook Python) vers le module `FractureSolver.py` lorsque possible afin d'accélérer le travail.
3. Étude du coefficient de restitution utilisé en mécanique du contact (voir [`acary2004coefficients`]).
4. Étude énergétique pour la validation du nouveau système.

**Semaine 20 (16/6/2021 - 22/6/2021)**

1. Rédaction du travail de modélisation et de simulation 1D dans le rapport de stage.
2. Implémentation du module `multisolver.py` et du script `percussion-cli.py` pour la simulation de la percussion 2D. En se servant des code préexistant, on n'a pas à calculer les vitesses après choc.

**Semaine 21 (23/6/2021 - 29/6/2021)**

1. Implémentation d'une interface web adaptée au problème de percussion 2D.
2. Étude approfondie de l'énergie totale du système en 1D. Après avoir décelé une erreur de quadrature dans mes calculs, j'ai du complètement changer le modèle pour avoir la conservation de l'énergie totale.
3. Début d'étude du système 1D *à grande raideur*.

**Semaine 22 (30/6/2021 - 5/7/2021)**

1. Relecture des chapitres 1 et 2 de la thèse de Dimitri, et des parties de la thèse de Mr. Hanen Amor [`amor2008approche`].
2. Extraction des déplacements des noeuds de chaque floe impliqués dans la percussion en supprimer le mouvement d'ensemble du floe par comparaison des positions des noeuds à celle du centre de masse du floe.
3. Étude de la rentabilité d'une fracture suivant le modèle de Griffith.

**Semaine 23 (7/7/2021 - 13/7/2021)**

1. Redesign du code de calcul 1D : en effet, le code préexistant ne traitait que deux floes, alors qu'on veut à présent en traiter potentiellement plusieurs (*à chaque fracture d'un ressort, c'est un nouveau floe de glace qui se forme*).
2. Début de l'écriture du code avec debuggage et test au fur et à mesure (approche *agile*).

**Semaine 24 (14/7/2021 - 20/7/2021)**

1. Suppression des dictionnaires et adoption d'une approche par classes; ce qui a considérablement accélérer le développement.
2. Implémentation des différentes fonctions nécessaires pour simuler le déplacement de plus de deux floes 1D simultanément.

**Semaine 25 (21/7/2021 - 27/7/2021)**

1. Reconception du code. Nous avons dû éliminer la méthode par numéro de confirmation postulée la semaine dernière;
2. Simulation de la fracture de deux floes suivant le modèle de Griffith par une approche combinatoire;
3. Correction de la visualisation des différents floes après percussion et fracture.

**Semaine 26 (28/7/2021 - 3/8/2021)**

1. Réussite de la simulation de la percussion et de la fracture de plusieurs floes 1D.
2. Réétude de l'influence du coefficient de restitution  $\varepsilon$ . En effet, l'énergie totale (en particulier l'énergie cinétique) ne devrait pas être conservée pour  $\varepsilon \neq 1$ .
3. Rédaction de l'introduction du rapport de stage.

**Semaine 27 (4/8/2021 - 13/8/2021)**

1. Rédaction du corps et de la conclusion pour le rapport de stage;
2. Génération des plots et écriture des équations à introduire dans le rapport.

**Semaine 28 (14/8/2021 - 20/8/2021)**

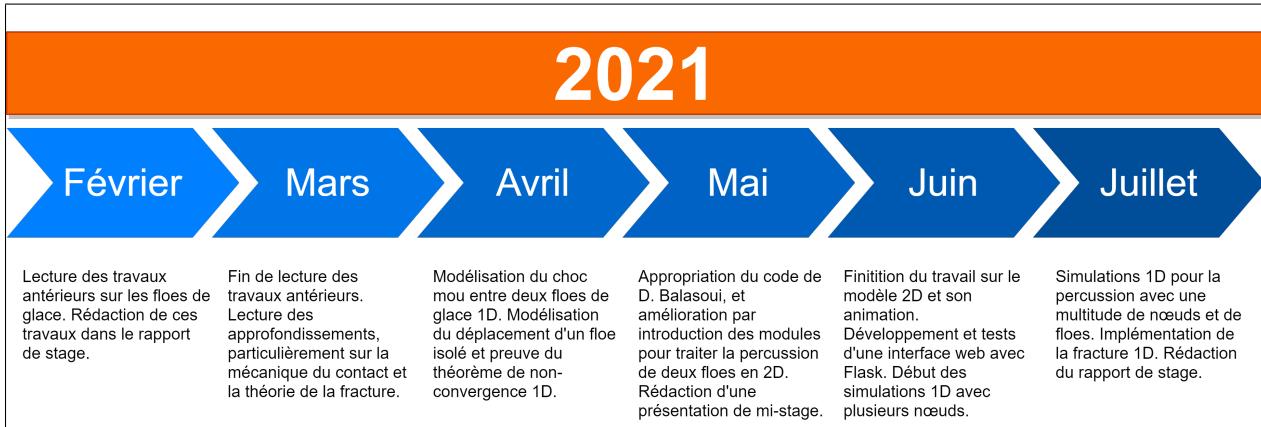
1. Incorporation des notes et des remarques de M. Labbé dans le rapport de stage.
2. Mise à jour de la présentation de mi-stage;
3. Rédaction de la présentation de soutenance de stage.

Pour résumer les tâches effectuées et mieux observer le déroulement du stage, nous avons effectué le graphique de la figure 5.1. En comparant ce graphique aux objectifs que nous nous sommes fixés dans la section 1.4, nous pouvons faire un bilan du travail qui a été fait.

## 5.2 Bilan et future travail

Durant ce stage, nous avons modéliser et simuler la percussion de floes de glace. Nous avons fait cela en 1 dimension et nous avons convenablement adapté les résultats en dimension supérieure, en se servant des travaux précédents sur ce sujet. En plus, nous modélisé et implémenté la fracture en d'un floe de glace 1D. Ceci dit, plusieurs tâches restent à effectuer pour porter à fruption notre objectif primaire de création d'un code de calcul de l'évolution de la banquise à l'échelle des floes de glace :

- **Implémentation de la méthode du champ de phase sue le modèle 1D.** L'approche du champ de phase a longement été présentée à la section 3.3.1. Comme nous l'avons indiquée, elle est la mieux adaptée à l'étude de la fracture suivant l'approche variationnel de Francfort et Marigo.



**FIGURE 5.1 –** Résumé du déroulement du stage.

- **Implementation de la fracture au problème 2D.** Durant sa thèse, BALASOIU a implémenté un modèle quasi-statique de fracture variationnel à travers une méthode éléments finis reposant sur une approche par champ de phase pour régulariser la fracture. Ces travaux sont regroupés dans le dépôt sur [framagit](#) nommé [Griffith](#). Il faudra intégrer ces travaux au modèle de percussion 2D que nous avons développé durant ce stage.
- **Intégration de la fracture fragile au code de RABATEL.** Comme nous l'avons précisé, RABATEL a, durant sa thèse étudié la dérive d'un ensemble de floes de glace dans la mer. Il faudra donc introduire la fracture de la glace dans ce modèle.
- **Passage en dimension supérieure.** Pour aller plus loin, nous conseillons de passer en trois dimensions. Cela dit, les tailles des floes peuvent être négligeables devant le rayon de la Terre, où la taille de la mer. Il faudra donc prendre cela en considération pour faire des simplifications.
- **Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts.** D'après la modélisation de Balasouï [Bal20a], un assemblage de masses reliées par des ressorts n'est pas une bonne approximation que si elles sont rigides ou très raides. Il faudra donc augmenter la rigidité des ressorts dans les simulations pour observer le comportement des floes, cela permettra d'extraire une deuxième limite spatiale. De plus, Balasouï a ajouté des dispositifs visqueux pour dissiper les vibrations dans les matériaux. Un futur travail pourrait donc étudier la nécessité d'introduire ces dispositifs (qui compliquera considérablement les calculs) dans nos modèles.
- **Optimiser des codes avec Cython.** En effet, les codes sont écrits en Python durant cette phase. Ce langage ne nous permet pas d'effectuer des simulations avec un nombre important de noeuds. On pourra donc utiliser [Cython](#) pour faire appel aux fonctions à haute performance du langage C. Ou mieux encore, nous pourrons reimplémenter tous le code en C++ en intégrant les bibliothèques HPC telles que [Blas](#), [OpenMP](#), [CUDA](#), etc.
- **Tests de validation en laboratoire.** Des tests en laboratoire sont nécessaires pour valider les modèles développés. Tout comme RABATEL l'a fait, l'on pourra se servir des données [ERAinterim](#) et [TOPAZ](#) pour effectuer ces tests.

### 5.3 Les apports du stage

J'ai maîtrisé la majeure partie des objectifs que nous nous étions fixés. Cela dit, les apports de ce stage ont été incomptables, et sur plusieurs plans. Tout d'abord sur un plan académique, où j'ai pris en mains des notions clés des mathématiques appliquées et de l'informatique. Ensuite sur un plan technique, j'ai pu maîtriser des outils et faire usage de ressources variées. Enfin, sur un plan professionnel où j'ai pu apprendre davantage sur le monde de la recherche.

### 5.3.1 Compétences académique

- **Simulation de processus physiques :** Ce stage m'a appris à simuler des objets répondant à une loi de comportement bien précise (loi de Newton-Euler, EDO du second ordre) par l'intermédiaire de schéma appropriés. Par exemple, un schéma explicite d'ordre 2 pour l'SYSTÈME 2D diverge très fréquemment, alors qu'un schéma symplectique (voir ??), où un schéma explicite Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) à pas de temps suivant RK5 (comme ceux implémenté par Scipy) conserve les invariants du système.
- **Prise en main du modèle de rupture de Griffith dans les milieux élastiques :** En lisant les travaux qui ont précédé [Bal20a], j'ai pu apprendre beaucoup sur le modèle de Griffith et la compétition entre l'énergie de déformation et de fracture du matériau. J'ai aussi lu les articles [FM98; BFM08] et j'ai ainsi assimilé l'approche variationnelle de Francfort, Marigo, Bourdin. Ces notions m'ont poussé à visiter des outils mathématiques très puissants tels que le calcul des variations et la  $\Gamma$ -convergence (voir ??).
- **Maitrise des réseaux de ressorts :** Les travaux de BALASOIU m'ont également appris comment étudier un matériaux élastiques (réseau de ressorts) par l'intermédiaire d'un processus de poisson [Kha11]<sup>1</sup>. J'ai par exemple appris comment créer (manuellement ou en se servant de la librairie Scipy) un processus de Poisson répondant à un certain nombre de critères (en particulier l'*intensité*).
- **Développement d'applications en language Python :** Durant ce stage, j'ai énormément améliorer mes compétences en simulation numérique via Python. J'ai par exemple appris comment créer, modifier et déployer un package Python, comment utiliser plusieurs libraries (numdifftools) de calcul scientifique pour mener à bien un projet.

### 5.3.2 Compétences techniques

- **Utilisation de TikZ :** Le premier outils que j'ai maîtrisé durant ce stage fut le package LaTex nommé TikZ. Sous la recommandation de M. Labbé, je l'ai utilisé au départ comme complémentaire à [diagrams.net](#) et [Inkscape](#), mais j'ai très vite vu son potentiel et la possibilité de l'utiliser pour virtuellement toutes les types de dessins.
- **Maitrise de Flask :** Flask est une micro-framework de développement web en Python. J'ai trouvé que c'est un outil permet de construire de belles interfaces pour effectuer des simulations. Ainsi, l'utilisateur n'a pas besoin d'être familier avec notre code de calcul pour s'en servir.
- **Maitrise de Bokeh :** Je me suis très vite rendu compte de la nécessité de visualiser les résultats. J'ai pris en main la librairie Python Bokeh pour visualiser les déplacements et les vitesses des réseaux de ressorts dans les notebooks interactifs.
- **Maitrise de Symbolab :** Symbolab est un logiciel de calcul symbolique que j'utilise depuis longtemps. Durant ce stage j'ai découvert de nouvelles fonctionnalités et des raccourcis, puis je m'en suis servi surtout pour faire des calculs matriciels en taille élevée ( $4 \times 4$  par exemple).

### 5.3.3 Compétences professionnelles

- **Recherche en milieu professionnel :** La première compétence professionnelle que j'ai gagnée est celle de la recherche dans un milieu aussi prestigieux que le Laboratoire Jacques-Louis Lions. Je n'ai pas manqué d'aide ni de moyens pour effectuer mes tâches. J'ai appris à collaborer avec mes pairs et demander de l'aide lorsque nécessaire. Bien que le LJLL soit un lieu très convivial, la situation sanitaire actuelle m'a amené à me discipliner pour pouvoir conduire mes travaux de recherche en télétravail.
- **Vision globale dans tout projet :** J'ai appris à quel point il est important d'avoir une vision globale portée vers le futur lorsqu'on entreprend un projet. Par exemple, j'ai du reconcevoir

1. Merci à M. Labbé de m'avoir offert ce livre :)

et reedvelopper le code de calcul 1D (souvent de font en comble) à chaque fois qu'il fallait ajouter une fonctionnalité. J'estime à un mois le retard acculé du à ces reimplementations. Celà aurait pu être éviter si j'avais été plus ambitieux dès le départ.

- **Savoir-faire transférables :** A travers ses journées "thé du labo". Ce fut l'occasion de mieux se connaître et de tisser des liens. Parmis les compétences transferables que j'ai pu acquerrir durant ce stage, je peux citer l'esprit de recherche, d'entreprise, la gestion du temps, et la collaboration.

## Chapitre 6

# Conclusion

Pour conclure, j'ai effectué mon stage de fin d'étude au Laboratoire Jacques-Louis Lions sous la supervision du professeur Stéphane Labbé. Durant six mois au sein de ce laboratoire de mathématiques appliquées, je me suis confronté au problème de la *fracturation des floes de glace* dans un modèle granulaire. J'ai ainsi pu mettre en pratique mes connaissances en calcul scientifique, en analyse numérique, et en développement Python (et bien d'autres) acquises durant ma formation de CSMI.

A travers les objectifs secondaires que nous nous sommes fixés, j'ai pu comprendre le modèle de rupture de Griffith dans les milieux élastiques en assimilant des domaines clés de l'analyse fonctionnelles tels que la  $\Gamma$ -convergence, la résonance, et la probabilité; j'ai posé les bases du passage micro/macro du modèle élastique et j'ai développer plusieurs modèles de percussion (1D et 2D). J'ai acquis de l'expérience en développement d'un modèle mathématique et en suivant son intégration à un projet de développement logiciel. Sur un plan technique, j'ai matrisé plusieurs outils informatiques tel que TikZ, Flask, Bokeh, et Symbolab.

Celà dit, il reste plusieurs travaux à effectuer pour conclure ce travail. Nous pouvons par exemple citer l'implémentation de la méthode du champ de phase sur le modèle 1D, l'implémentation de la fracture au problème 2D, le passage en dimension supérieure (2.5D ou 3D), l'optimisation du code, et des tests de validation en laboratoire.

Fort de cette expérience et ses enjeux cruciaux pour l'industrie et pour la planète, j'aimerais apporter ma contribution à la science à travers ce projet et d'autres similaires. Le projet SASIP qui a fait de la compréhension du *rechauffement climatique en zone polaire* sa mission phare est une initiative à soutenir et à repéter.

# Bibliographie

- [AC12] J-P AUBIN et Arrigo CELLINA. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. T. 264. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Aca13] Vincent ACARY. « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (2013), p. 224-250.
- [Ait50] Alexander C AITKEN. « Iv.—studies in practical mathematics. v. on the iterative solution of a system of linear equations ». In : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics* 63.1 (1950), p. 52-60.
- [AT90] Luigi AMBROSIO et Vincenzo Maria TORTORELLI. « Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via t-convergence ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 43.8 (1990), p. 999-1036.
- [Bal20a] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Bal20b] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes, 2020. URL : <https://www-ljk.imag.fr/membres/Dimitri.Balasoiu/These.pdf>.
- [Bar] David BARAFF. « Andrew Witkin Large Steps in Cloth Simulation ». In : *SIGGRAPH98 Conference Proceedings* (), p. 43-54.
- [Bar93] David BARAFF. « Issues in computing contact forces for non-penetrating rigid bodies ». In : *Algorithmica* 10.2 (1993), p. 292-352.
- [BFM08] Blaise BOURDIN et al. « The variational approach to fracture ». In : *Journal of elasticity* 91.1 (2008), p. 5-148.
- [Bra84] Iain BRATCHIE. « Rheology of an ice-floe field ». In : *Annals of Glaciology* 5 (1984), p. 23-28.
- [CFM09] Antonin CHAMBOLLE et al. « When and how do cracks propagate ? » In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.9 (2009), p. 1614-1622.
- [Cha03] Antonin CHAMBOLLE. « A density result in two-dimensional linearized elasticity, and applications ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 167.3 (2003), p. 211-233.
- [Chi+13] Sung Nok CHIU et al. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [Cia88] Philippe G CIARLET. *Three-dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- [DGCL89] E DE GIORGI et al. « Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set ». In : *Ennio De Giorgi* (1989), p. 654.
- [DMT02] Gianni DAL MASO et Rodica TOADER. « A model for the quasi-static growth of brittle fractures based on local minimization ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 12.12 (2002), p. 1773-1799.
- [DVJ08] Daryl J DALEY et David VERE-JONES. *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume II : General Theory and Structure*. Springer, 2008.

- [FM98] Gilles A FRANCFORST et J-J MARIGO. « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46.8 (1998), p. 1319-1342.
- [GN19] H GERIVANI et M NAZARI. « Proposing a lattice spring damper model for simulation of interaction between elastic/viscoelastic filaments and fluid flow in immersed boundary-lattice Boltzmann framework ». In : *Journal of Molecular Liquids* 296 (2019), p. 111969.
- [GP95] Ch GLOCKER et Friedrich PFEIFFER. « Multiple impacts with friction in rigid multibody systems ». In : *Nonlinear Dynamics* 7.4 (1995), p. 471-497.
- [Gri21] Alan Arnold GRIFFITH. « VI. The phenomena of rupture and flow in solids ». In : *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593 (1921), p. 163-198.
- [GS17] Dietmar GROSS et Thomas SEELIG. *Fracture mechanics : with an introduction to micro-mechanics*. Springer, 2017.
- [Hec97] Chris HECKER. « Physics, Part 3 :Collision Response ». In : *Game Developer Magazine* (1997). URL : <https://www.chrishecker.com/images/e/e7/Gdmphys3.pdf>.
- [Her11] Agnieszka HERMAN. « Molecular-dynamics simulation of clustering processes in sea-ice floes ». In : *Physical Review E* 84.5 (2011), p. 056104.
- [HI79] WD HIBLER III. « A dynamic thermodynamic sea ice model ». In : *Journal of physical oceanography* 9.4 (1979), p. 815-846.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Hop66] Frank Charles HOPPENSTEADT. « Singular perturbations on the infinite interval ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 123.2 (1966), p. 521-535.
- [Hop85] Mark A HOPKINS. « Collisional stresses in a rapidly deforming granular flow : a thesis ». Thèse de doct. Clarkson University, 1985.
- [Hop96] Mark A HOPKINS. « On the mesoscale interaction of lead ice and floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 101.C8 (1996), p. 18315-18326.
- [Ing13] Charles Edward INGLIS. « Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners ». In : *Trans Inst Naval Archit* 55 (1913), p. 219-241.
- [Irw57] George R IRWIN. « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate ». In : (1957). URL : [https://www.scirp.org/\(S\(oyulxb452alnt1aej1nfow45\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379](https://www.scirp.org/(S(oyulxb452alnt1aej1nfow45))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=129379).
- [IS20] Md Rushdie Ibne ISLAM et Amit SHAW. « Numerical modelling of crack initiation, propagation and branching under dynamic loading ». In : *Engineering Fracture Mechanics* 224 (2020), p. 106760.
- [Jea99] Michel JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4 (1999), p. 235-257.
- [JP85] Michel JEAN et Elaine PRATT. « A system of rigid bodies with dry friction ». In : *International journal of engineering science* 23.5 (1985), p. 497-513.
- [Kee18] Paul KEELER. « Simulating a homogeneous Poisson point process on a rectangle ». In : (2018).
- [Kha11] Rafail KHASMINSKII. *Stochastic stability of differential equations*. T. 66. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Lem78] Carlton E LEMKE. « Some pivot schemes for the linear complementarity problem ». In : *Complementarity and Fixed Point Problems*. Springer, 1978, p. 15-35.
- [LLL15] Wenjun Lu et al. « In-plane fracture of an ice floe : A theoretical study on the splitting failure mode ». In : *Cold Regions Science and Technology* 110 (2015), p. 77-101.
- [Löt81] Per LÖTSTEDT. « Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems ». In : *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 61.12 (1981), p. 605-615.

- [Löt82a] Per LÖTSTEDT. « Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 42.2 (1982), p. 281-296.
- [Löt82b] Per LÖTSTEDT. « Time-dependent contact problems in rigid body mechanics ». In : *Non-differential and Variational Techniques in Optimization*. Springer, 1982, p. 103-110.
- [LS67] Jacques-Louis LIONS et Guido STAMPACCHIA. « Variational inequalities ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 20.3 (1967), p. 493-519.
- [Mar+19] David MARSAN et al. « Characterizing horizontally-polarized shear and infragravity vibrational modes in the Arctic sea ice cover using correlation methods ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.3 (2019), p. 1600-1608.
- [MHW10] Christian MIEHE et al. « A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.45-48 (2010), p. 2765-2778.
- [MIS21] AM MANEA et al. « Simplified mathematical model for frontal impact study ». In : *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*. T. 1037. 1. IOP Publishing. 2021, p. 012055.
- [MM85] MDP MONTEIRO MARQUES. « Chocs inélastiques standards : un résultat d'existence ». In : *Séminaire d'Analyse Convexe, USTL, Montpellier* 15 (1985).
- [MM88] MDP MONTEIRO MARQUES. « Inclusões Diferenciais e Choques Inelásticos ». Thèse de doct. Ph D Thesis, Universidade de Lisboa, Lisbon, 1988.
- [MM94] MD P MONTEIRO MARQUES. « An existence, uniqueness and regularity study of the dynamics of systems with one-dimensional friction ». In : *European journal of mechanics. A. Solids* 13.2 (1994), p. 277-306.
- [Mor78] Jean Jacques MOREAU. « Approximation en graphe d'une évolution discontinue ». In : *RAIRO. Analyse numérique* 12.1 (1978), p. 75-84.
- [Mor85] Jean J MOREAU. « Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints ». In : *Unilateral problems in structural analysis*. Springer, 1985, p. 173-221.
- [Mor86] Jean Jacques MOREAU. « Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel ; essais numériques ». Thèse de doct. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1986.
- [Mor88] Jean J MOREAU. « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics ». In : *Nonsmooth mechanics and Applications*. Springer, 1988, p. 1-82.
- [Mor99] Jean Jacques MOREAU. « Numerical aspects of the sweeping process ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 177.3-4 (1999), p. 329-349.
- [MW88] Matthew MOORE et Jane WILHELMS. « Collision detection and response for computer animation ». In : *Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1988, p. 289-298.
- [Nag+19] Sindhu NAGARAJA et al. « Phase-field modeling of brittle fracture with multi-level hp-FEM and the finite cell method ». In : *Computational Mechanics* 63.6 (2019), p. 1283-1300.
- [NB14] Ngoc Son NGUYEN et Bernard BROGLIATO. *Multiple impacts in dissipative granular chains*. T. 3. Springer, 2014.
- [NW72] James L NEVINS et Daniel E WHITNEY. « The force vector assembler concept ». In : *On Theory and Practice of Robots and Manipulators*. Springer, 1972, p. 273-288.
- [OSAJ95] M OSTOJA-STARZEWSKI et al. « Linear elasticity of planar Delaunay networks. III : Self-consistent approximations ». In : *Acta mechanica* 110.1 (1995), p. 57-72.
- [Pan12] Panagiotis D PANAGIOTOUPOULOS. *Inequality Problems in Mechanics and Applications : Convex and nonconvex energy functions*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [PS02a] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.2 (2002), p. 702-733.

- [PS02b] Laetitia PAOLI et Michelle SCHATZMAN. « A numerical scheme for impact problems II : The multidimensional case ». In : *SIAM journal on numerical analysis* 40.2 (2002), p. 734-768.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. url : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Rag+04] Laks RAGHUPATHI et al. « An intestinal surgery simulator : Real-time collision processing and visualization ». In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 10.6 (2004), p. 708-718.
- [Ram+09] Pierre RAMPAL et al. « Arctic sea ice velocity field : General circulation and turbulent-like fluctuations ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 114.C10 (2009).
- [RLW15] Matthias RABATEL et al. « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9 (2015), p. 5887-5909.
- [SHL86] HH SHEN et al. « On applying granular flow theory to a deforming broken ice field ». In : *Acta Mechanica* 63.1 (1986), p. 143-160.
- [Sig33] Antonio SIGNORINI. « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze* 27 (1933), p. 69.
- [Sol70] H SOLOMON. « A study of ice dynamics relevant to AIDJEX ». In : *AIDJEX Bull* 2.33-50 (1970).
- [ST96] David E STEWART et Jeffrey C TRINKLE. « An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and coulomb friction ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39.15 (1996), p. 2673-2691.
- [Str+12] Julienne C STROEVE et al. « Trends in Arctic sea ice extent from CMIP5, CMIP3 and observations ». In : *Geophysical Research Letters* 39.16 (2012).
- [Tik52] Andrei Nikolaevich TIKHONOV. « Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives ». In : *Matematicheskii sbornik* 73.3 (1952), p. 575-586.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effectuator Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.
- [VCMT95] Pascal VOLINO et al. « Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects ». In : *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1995, p. 137-144.
- [WFH10] Alexander V WILCHINSKY et al. « Effect of shear rupture on aggregate scale formation in sea ice ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 115.C10 (2010).
- [Whi77] Daniel E WHITNEY. « Force feedback control of manipulator fine motions ». In : (1977).
- [WW90] Andrew WITKIN et William WELCH. « Fast animation and control of nonrigid structures ». In : *Proceedings of the 17th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1990, p. 243-252.
- [Yvo+18] Julien YVONNET et al. « Fissuration dans les microstructures de matériaux cimentaires : outils de simulation par la méthode de champ de phase ». In : *Colloque national MECAMAT Aussois «Matériaux Numériques*. 2018.