

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant
Roussel Desmond NZOYEM

Superviseur
Stéphane LABBÉ

Enseignant référent
Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

12 avril 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	ii
1 Travaux et apports	1
1.1 Les missions du poste	1
1.2 Présentation des résultats obtenus	1
1.2.1 Modélisation générale du contact entre deux floes de glace	1
1.2.2 Modélisation et simulation 1D	3
Bibliographie	9

Chapitre 1

Travaux et apports

1.1 Les missions du poste

- L'état de l'art de la partie précédente fait partie des missions.
- Modélisation
- Simulation

Nous souhaitons étudier le comportement mécanique d'un floe après collision avec un autre floe. Les étapes de travail envisagées sont les suivantes :

1. Ecrire les systèmes différentiels pour les deux floes juste après le choc : pour l'instant on peut considérer que l'un des floes est immobile (cela revient au même si l'on exprime les vitesses dans un repère lié à ce floe).
2. On exprime l'EDO vérifiée par les solutions, c'est à dire q pour le premier floe, et p pour le second.
3. On pourra ensuite simuler ces EDP limites et trouver les valeurs de p et q . Autrement dit, on connaît la position de chaque point du réseau au temps final.
4. Si on connaît p et/ou q , on connaît la condition de Dirichlet sur le floe concerné, et on peut ainsi exprimer le déplacement et la possible fracture du floe.

1.2 Présentation des résultats obtenus

1.2.1 Modélisation générale du contact entre deux floes de glace

Les floes de glace Ω_k et Ω_l sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une modélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliées par des ressorts (de constante de raideur k), et par des dispositifs visqueux de constante μ . Nous désignerons par $n + 1$ le nombre total de noeuds du floe Ω_k , chaque noeud ayant pour masse m . De façon similaire, on définit les constantes $k', \mu', n' + 1, m' + 1$ pour le floe Ω_l . Les positions des noeuds de Ω_k seront notés $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$, tandis que ceux de Ω_l seront notés $(p_i)_{0 \leq i \leq n'}$ (voir figure 1.1).

On définit la matrice de contact $C...$ (voir these Dimitri), et $L_{0j}..$ et $u_{0j} ..$

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisons le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe Ω_k , nous

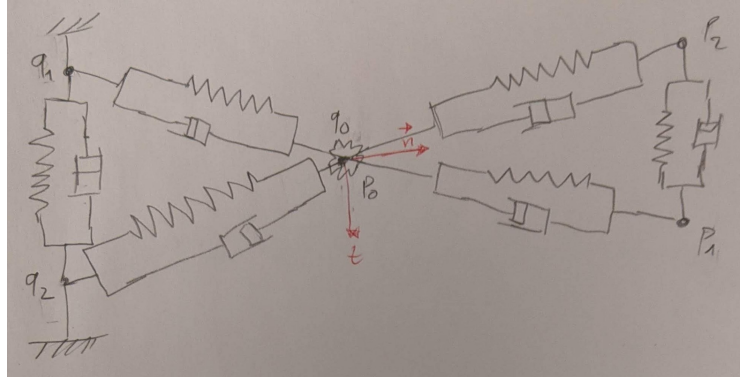


FIGURE 1.1 – Contact entre deux floes aux points $p_0 = q_0$.

écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire¹ au point de contact q_0 :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (1.1)$$

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[\underbrace{k(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (1.2)$$

représente la somme des forces de réaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud q_0 ; et $\mathbf{F}_0^c(t)$ la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ associé au floe Ω_k (voir figure 1.1), on peut écrire, pour $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (1.3)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations (1.1) à (1.3). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(E)} \quad \text{(SI)}$$

En ce qui concerne le floe Ω_l , nous procédons de facons similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \end{cases} \quad \text{(E')} \quad \text{(SI)}$$

où $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$ sont définis de facon similaire à \mathbf{F}_0 (voir équation (1.2)).

Ensuite, il nous faut introduire des conditions portant sur la conservation de l'énergie, et la condition de non-interpénétration de Signorini...

1. La rotation du point matériel q_0 n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

1.2.2 Modélisation et simulation 1D

1.2.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nœuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse \mathbf{v}_0 . On identifie les nœuds q_0 et p_0 de la section précédente à leur masses respectives m et m' (voir figure 1.2).

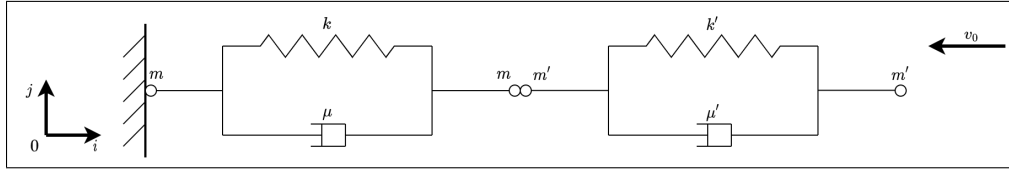


FIGURE 1.2 – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses m et m' en contact forment une seule masse² $m + m'$ dont le déplacement est donné par la variable $x_1(t)$. Le déplacement de la masse m' à l'autre bout du floe percuteur est nommé $x_2(t)$. La masse m qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.

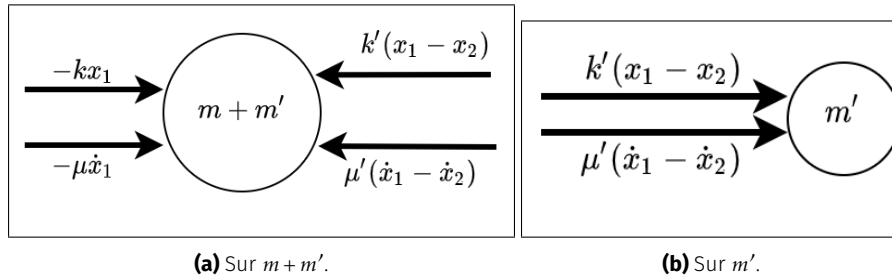


FIGURE 1.3 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ($\mathbf{v}_0 < 0$ et donc $x_1 < 0$). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort k' , on peut imaginer x_1 immobile (on aura $x_2 < 0$, d'où $x_1 - x_2 > 0$) (voir [Ho10]).

En orientant convenablement le système (voir figure 1.2), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales³ :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (1.4)$$

À l'instant initial t_0 , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (1.5)$$

En posant $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, l'équation (1.5) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

2. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.

3. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de x_1 est-elle vraiment nulle ?

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B' \dot{X}(t) + C' X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (1.7)$$

avec $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$.

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$ et le système 1.7 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = E Y(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (1.8)$$

avec la matrice par blocs

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

où I_2 désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Avec $t_0 = 0$, la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE) Y_0 \quad (1.9)$$

La résolution numérique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice $E \in \mathbb{R}^4$ (VOIR figure ci-bas et NOTEBOOK) ...

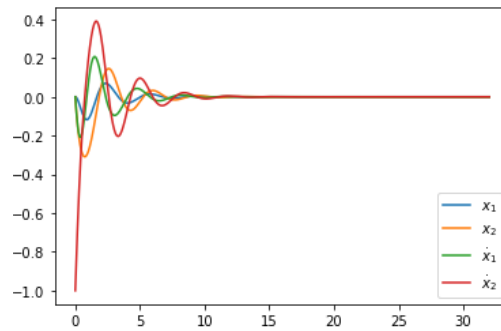


FIGURE 1.4 – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec $m = 1$, $m' = 1$, $k = 16$, $k' = 5$, $\mu = 6$, $\mu' = 2$, $v_0 = -1.0$, $t_f = 32$. On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$.

Pour certaines valeurs (spécifiquement de μ et μ'), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$. Il nous reste dans cette section :

1. Calculer analytiquement et numériquement tous les états d'équilibre $Y_{eq} \in \ker(E)$; distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice E , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les paramètres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

1.2.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé dans cette section. On obtient donc une troisième variable x_3 décrivant le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 1.5. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 1.6.

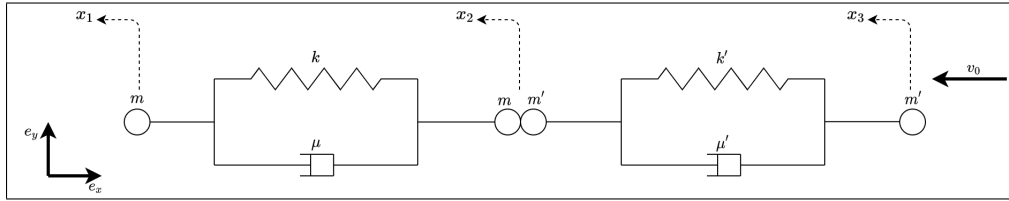


FIGURE 1.5 – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On reprénte également les variables x_1 , x_2 , et x_3 décrivant les mouvements de chaque noeud.

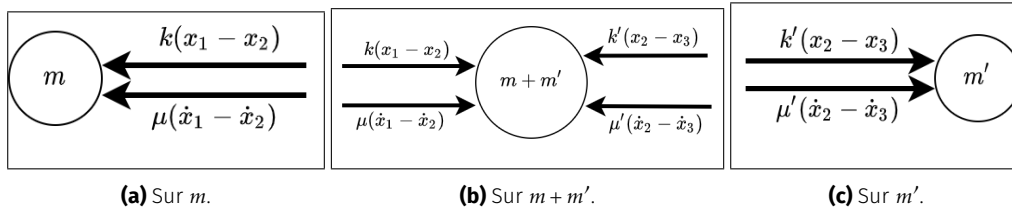


FIGURE 1.6 – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 1.3 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (1.10)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Puisque $m, m' \neq 0$, la matrice A est inversible. En posant $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, le système d'EDO revient à l'équation (1.12) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (1.12)$$

où $B' = A^{-1}B$ et $C' = A^{-1}C$. On pose ensuite $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$ et le système équation (1.12) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (1.13)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 1.2), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble $m + m'$ après collision et fixation de la masse m' (à vitesse \mathbf{v}_0) sur la masse m (de vitesse nulle). Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée v_f , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées P_{avant} et $P_{\text{après}}$. On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2m\mathbf{v}_0 + 2m'\mathbf{v}'_0 &= (2m + 2m')\mathbf{v}_f \\ \Rightarrow \mathbf{v}_f &= \frac{m\mathbf{v}_0 + m'\mathbf{v}'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (1.13) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure 1.7.

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (1.14)$$

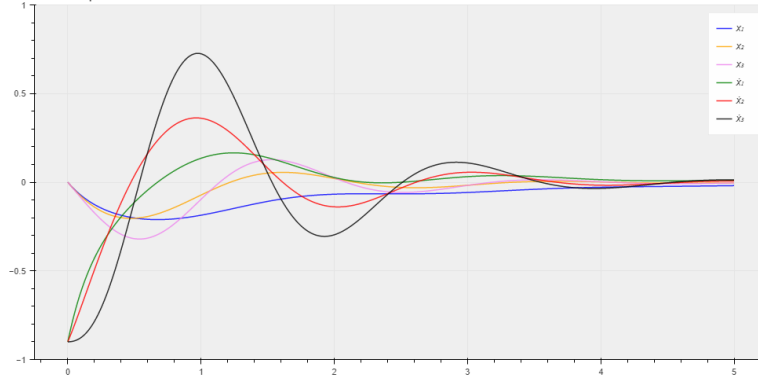


FIGURE 1.7 – Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec $m = 1$, $m' = 1$, $k = 3$, $k' = 22$, $\mu = 6$, $\mu' = 2$, $v_0 = -1.8$, $t_f = 5$. On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

1.2.2.3 Collision inélastique avec séparation des masses

Reprenons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps $\delta t^* = [t_{\text{moins}}, t_{\text{plus}}]$ de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses m et m' en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 1.2 et 1.5), et nous le présentons à la figure 1.8 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 1.9.

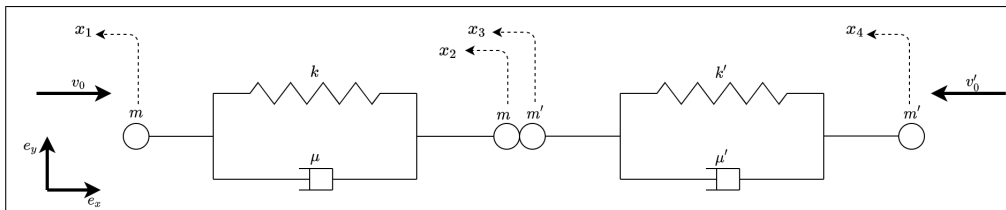


FIGURE 1.8 – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les noeuds m et m' en contact sont étudiés séparément. On représente les variables x_1 , x_2 , x_3 , et x_4 décrivant les mouvements de chaque noeud.

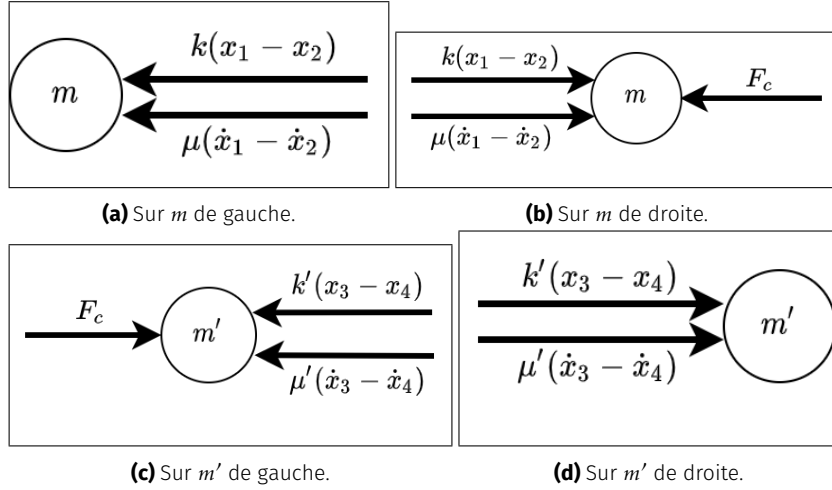


FIGURE 1.9 – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 1.3 et 1.6 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces. F_c représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.15)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de x_2 et x_3 pour éliminer la force de contact F_c et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.16)$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant $x_2(t) = x_3(t)$ p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses m et m' peuvent être étudiées comme une unique masse $m + m'$. La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble $m + m'$. Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses $\dot{x}_1(t^+)$, $\dot{x}_2(t^+)$, $\dot{x}_3(t^+)$ et $\dot{x}_4(t^+)$ immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (1.13)), nous réutilisons les quantités \dot{x}_1 et \dot{x}_4 données par ce système (l'équation (1.13) dans lequel x_2 et x_3 sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car x_1 et x_4 n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$ est aussi calculée suivant le modèle équation (1.13) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnues dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons la deuxième équation de 1.16 entre les instants t^- et t^+ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_I. \quad (1.17)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$ et $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$ les vitesses des noeuds en contact avant collision, et $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$ et $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$ les vitesses après contact. L'équation (1.17) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (1.18)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution ε ⁴. On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 1.10.

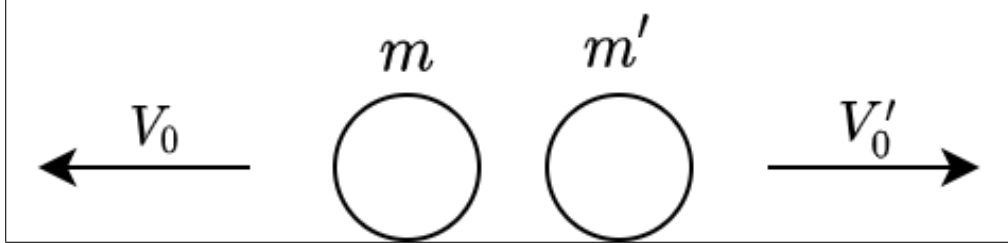


FIGURE 1.10 – Situation après contact.

On obtient l'équation (1.19)

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (1.19)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (1.18) et (1.19) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m + \varepsilon m')v_0 + (1 - \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 - \varepsilon)mv_0 + (m' + \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (1.20)$$

4. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

Bibliographie

- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-.....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.