Rapport de stage

Fracturation de floes de glace par percution dans un modèle granulaire

Superviseur
Stéphane Labbé

Étudiant
Desmond Roussel Nzoyem

Enseignant référent
Christophe Prud'homme

Ce stage à été effectué dans le cadre du master 2 CSMI,
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021 ;
initié par le groupe SASIPau LJLL.

Année académique 2020 - 2021

9 février 2021

Remerciements

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Environnement économique du stage

2.1 Le secteur d'activité

2.2 Le Laboratoire Jacques-Louis Lions

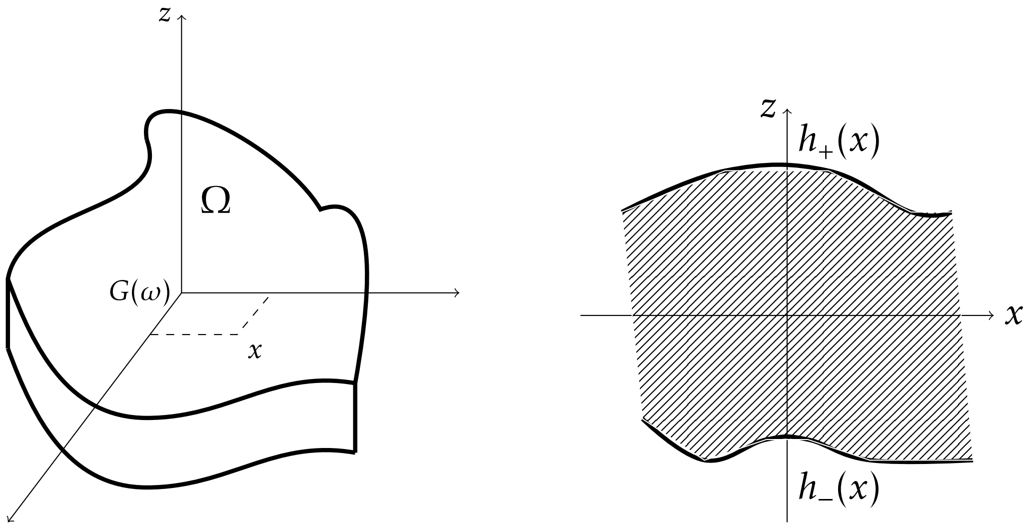
Chapitre 3

État de l'art

3.1 Position du problème

Nous commençons par présenter une modélisation mathématique d'une plaque de glace (appelé floe) sur la mer. Six variables (locales) sont nécessaires pour décrire le floe occupant la région fermée de l'espace Ω (voir figure 3.1) :

— Un ouvert connexe $\omega \in \mathbb{R}^2$ décrivant la section longitudinale du floe ;
— Deux fonctions $h_+, h_- \in \mathcal{F}(\omega, \mathbb{R})$ décrivant l'épaisseur du floe, telle que $\forall x \in \omega, h_-(x) \leq h_+(x)$;
— Le centre de masse du floe $G(w)$;
— Deux vecteurs $\mathbf{e}_1(\omega)$ et $\mathbf{e}_2(\omega)$ formant une base sur ω.



(a) Vue d'un floe

(b) Coupe transversale

FIGURE 3.1 – Illustration de la géométrie d'un floe de glace Ω.

On confond le floe au volume qu'il occupe dans l'espace Ω :

$$\Omega = \{(x,z) \,|\, x \in \omega \in \mathbb{R}^2,\, z \in]h_-(x), h_+(x)[\,\}.$$

Les fonctions h_- et h_+ permettent de définir trois quantités (voir figure 3.2) :

— L'épaisseur moyenne du floe : $\bar{h} = \sup_{x\in\omega} h_+(x) - \inf_{x\in\omega} h_-(x)$;
— La plus forte épaisseur : $\bar{h}^* = \sup_{x\in\omega} |h_+(x) - h_-(x)|$;
— La plus faible épaisseur : $\underline{h}^* = \inf_{x\in\omega} |h_+(x) - h_-(x)|$.

Les vecteurs $\mathbf{e}_1(\omega)$ et $\mathbf{e}_2(\omega)$ sont liés à ω, et pointent vers un point fixe du bord $\partial\omega$ du floe c-à-d :

$$\exists \sigma_i \in \partial\omega \,|\, e_i(\omega) = \frac{\sigma_i - G(\omega)}{||\sigma_i - G(\omega)||}, \text{ pour } i \in \{1,2\},$$

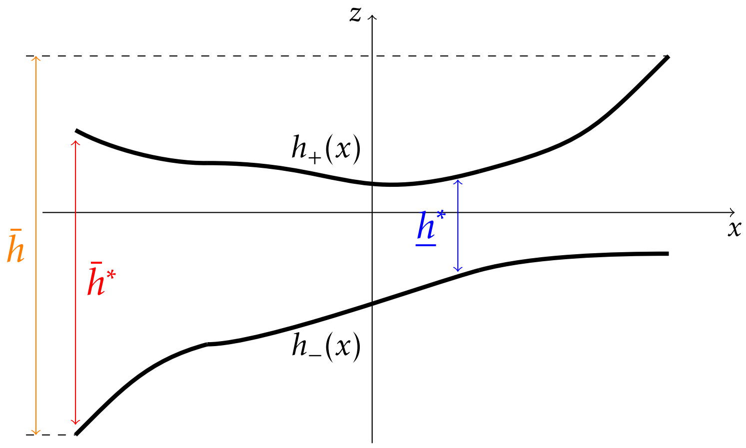


FIGURE 3.2 – Différentes épaisseurs décrivant un floe de glace. Pour l'instant, afin d'obtenir un floe relativement plat (i.e $\bar{h}$ faible), h_- sera pris identiquement nul, et h_+ constant.

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Notons que $\sigma_1 \neq \sigma_2$, et $\mathbf{e}_1(\omega)\cdot\mathbf{e}_2(\omega) = 0$ de façon à ce que la base orthonormée $(\mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega))$ soit directe.

Un floe $\Omega = (\omega, \mathbf{e}_1(\omega), \mathbf{e}_2(\omega), G(\omega), h_-, h_+)$ se déplace sur la mer [1] $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^2$. Au temps t après une translation de vecteur $u(t)$ (et de matrice $\mathsf{T}_{u(t)}$), et une rotation de vecteur $\theta(t)$ (et de matrice $\mathsf{R}_{\theta(t)}$), on obtient le floe $\Omega(t)$ défini par :

$$\Omega(t) = (\omega', \mathbf{e}^1(\omega'), \mathbf{e}^2(\omega'), G(\omega'), h_-, h_+),$$

avec

$$\begin{cases} \omega' = \mathsf{T}_{u(t)}\mathsf{R}_{\theta(t)}\omega, \\ \mathbf{e}_1(\omega') = \mathsf{T}_{u(t)}\mathsf{R}_{\theta(t)}\mathbf{e}_1(\omega), \\ \mathbf{e}_2(\omega') = \mathsf{T}_{u(t)}\mathsf{R}_{\theta(t)}\mathbf{e}_2(\omega), \\ G(\omega') = \mathsf{T}_{u(t)}\mathsf{R}_{\theta(t)}G(\omega). \end{cases}$$

C'est cette dernière notation mettant en exergue la dépendance avec le temps que nous utiliserons tout au long de ce rapport.

Lors de leur mouvements sur la surface de la mer, les floes se fracturent sous l'effet des vents et des courants océaniques, des phénomènes thermodynamiques, etc. Nous nous intéresserons donc au phénomène de percussion en vue de l'initialisation des fractures dans les floes de glace. Afin de décrire le mouvement des floes de glace sur la mer, nous devons nous munir d'un repère absolu, que nous notons $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le repère associé au floe Ω_i sera noté $\mathcal{R}_{\Omega_i} = (O, \boldsymbol{e_1(\omega)}, \boldsymbol{e_2(\omega)}, \mathbf{k})$. Dans ce repère absolu, le floe possède 3 degrés de libertés : l'abscisse et l'ordonné de son centre de gravité $G_i(\omega)$, et son orientation donnée par l'angle $\theta_i(t)$ (voir figure 3.3).

3.2 État de l'art

Une fois le modèle défini, il nous faut établir les équations décrivant la dynamique du floe, et celle de son environnement. Les travaux de RABATEL, 2015 et BALASOIU, 2020 ont extensivement traité le problème de modélisation dynamique et de simulation d'un assemblage de floe de glace. Nous résumons ici les principales idées de leurs raisonnements, tout en présentant l'état de l'art dans ce domaine.

1. Pour l'instant, la mer est considérée comme un ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Plus tard, nous prendrons en compte sont épaisseur lorsque nous la modéliserons par une sphère de $\mathbb{R}^3$.

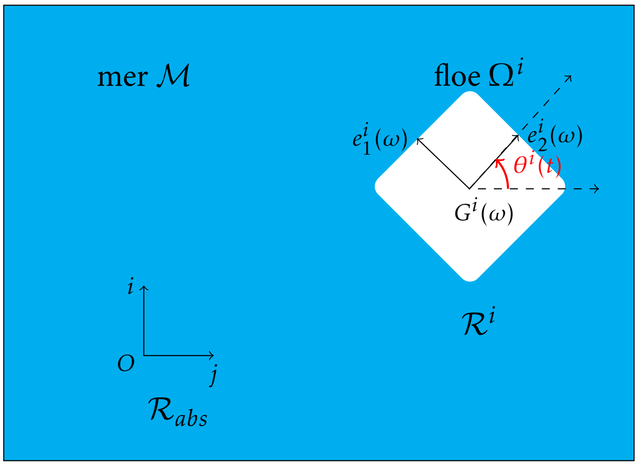


FIGURE 3.3 – Positionnement d'un floe de glace Ω_i dans le repère absolu $\mathcal{R}_{abs}$.

3.2.1 Le modèle du floe

3.2.1.1 La cinétique du floe

L'approche discrète décrite dans (RABATEL, 2015) utilise les mêmes notations que celles présentées à la section 3.1. Les obstacles [2] sont des floes aux mêmes propriétés que les floes de glace, à la seule différence qu'ils ont une masse (volumique) infinie. Dans (RABATEL, 2015), l'auteur travaille dans un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_{abs} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$; cependant, vu que la mer est considérée plane, le mouvement du floe peut être décrit dans le plan $\mathcal{P} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. Ensuite, RABATEL désigne la vitesse angulaire du floe Ω_i par

$$\boldsymbol{\theta}_i(t) = \theta_i(t)\mathbf{k} = (0, 0, \theta_i(t))^T .$$

Soit P (de coordonné x) un point quelconque de $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Sa vitesse dans le repère $\mathcal{R}_{abs}$ est donnée est donnée par la formule de Varignon :

$$\dot{P}(t) = \dot{G}_i(t) + \boldsymbol{\theta}_i(t) \wedge \mathbf{G_i P},$$

où le symbole $\wedge$ représente le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. La masse (constante) du floe rigide indéformable est donnée par

$$M_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} h_{i,+}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ensuite, l'auteur défini :

— la somme des forces par unité de volume qui s'applique au centre de masse du floe Ω_i :

$$\mathbf{F}_i = \rho_i \int_{\Omega_i(t)} \mathbf{F}(x)\,\mathrm{d}x,$$

— le moment cinétique [3] en G :

$$L_i = \rho_i \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \dot{\mathbf{P}}(t)\,\mathrm{d}x,$$

— le moment dynamique en G :

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\Omega^i(t)} \mathbf{GP} \wedge \mathbf{F}(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Nous faisons allusion aux obstacles au déplacement des floes. Il peut s'agir des iles, des stations offshore, etc.
3. Il s'agit d'un moment dû à l'accélération du floe ; alors que le moment dynamique est dû aux forces extérieures. Notons que ces deux vecteurs sont portés par $\mathbf{k}$, et peuvent donc être remplacé par des scalaires correspondants.

Sous le formalisme de Newton-Euler, Rabatel montre que chaque floe Ω_i vérifie :

$$\begin{cases} M_i \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{\mathrm{d}t} & = \mathbf{F}_i \\ \mathcal{I}_i \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}_i(t)}{\mathrm{d}t} & = \mathfrak{M}_i \end{cases},$$

où $\mathcal{I}_i$ représente le moment d'inertie du floe i. Ce système se réécrit facilement sous la forme

$$\mathcal{M}_i \frac{\mathrm{d}W_i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}_i(t), \tag{3.1}$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

Pour un système S composé de n floes, le problème précédent doit être satisfait pour tous les floes. (Rabatel, 2015, p.18) montre que cela revient à résoudre l'équation

$$\mathcal{M} \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}(t), \tag{3.2}$$

avec

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{1 \le i \le n}, \quad \mathcal{W}(t) = (\mathcal{W}_i(t))_{1 \le i \le n}, \text{ et } \quad \mathcal{M}(t) = (\mathcal{M}_i(t))_{1 \le i \le n}.$$

L'énergie cinétique du floe Ω_i quant à elle sera donné par :

$$E_i(t) = \frac{1}{2} M_i \dot{G}_i(t)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}_i \dot{\theta}_i(t)^2.$$

3.2.1.2 L'interaction entre les floes

Le domaine de la mécanique du contact s'est grandement développé ces derniers siècles, avec plusieurs scientifiques qui ont tenté de décrire le phénomène de contact entre des corps rigides. Le modèle décrit par (Rabatel et al., 2015, p.5892) utilise deux conditions de complémentarité pour déterminer les vitesses des floes après le contact. La première est une condition de Signorini (Signorini, 1933) pour s'assurer de la non-interpénétration [4] des floes. Pour décrire ces conditions, il faut au préalable écrire le problème de contact entre floes comme un problème implicite, où les inconnus sont les impulsions après le choc. Pour cette condition de complémentarité, Rabatel se base donc sur les travaux de Delassus (1917), Moreau (63), (Pfeiffer and Glocker, 1996). Rabatel se base ensuite sur les travaux de [Stewart and Trinkle, 1996] pour décrire une deuxième condition de complémentarité vérifiant la loi de fraction de Coulomb. Dans (Rabatel et al., 2015, p.5892)complémentarité. Le problème résultant a ensuite résolu en utilisant un algorithme de Lemke [Cottle et al., 1992, Alg. 6.3.1].

IMAGE D'UNE COLLISION EN Pj

Soit P_j, ($j \in \{1, \ldots, n\}$) un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l. Nous notons $\mathbf{F}_{kj}(t)$ la force de contact du floe Ω_k au floe Ω_l appliquée en P_j. Par convention, une matrice de contact $\mathsf{M_c}$ est définie telle que son coefficient $c_k j$ vaut :

- 0 si le point de contact P_j n'est pas un point de contact du floe Ω_k ;
- -1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k < l$;
- 1 si le point de contact P_j est un point de contact entre les floes Ω_k et Ω_l avec $k > l$.

4. Deux floes s'interpénètre si la "distance" entre ces deux floes est négative.

En notant E_k l'ensemble des points de contact du floe Ω_k au temps t, (RABATEL, 2015, p.26) définit la résultante des forces de contact $\mathbf{F}_k^c(t)$, au floe Ω_k comme :

$$\mathbf{F}_k^c(t) = \sum_{j\in E_k} c_{jk}\mathbf{F}_{kj}(t).$$

En rajoutent ces forces aux forces extérieures lors du bilan des forces à l' équation (3.3), pour un floe $\Omega_k(t)$, on obtient :

$$\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}(t) + \sum_{j\in E_k}\begin{pmatrix}\mathbf{F}_{kj}(t)\\ \mathbf{G^kP_j}\wedge\mathbf{F}_{kj}(t)\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.2.1.3 Formulation en problème linéaire de complémentarité

Il existe deux principales manières de formuler le problème du contact entre deux solides rigides. L'auteur de (RABATEL, 2015) opte pour le formalisme vitesse-impulsion, au détriment du formalisme accélération-force. En effet, L'approche en vitesse impulsion apporte l'avantage de pouvoir exprimer la force de friction de Coulomb directement par rapport à la vitesse. Il n'est pas nécessaire de connaître la nature du contact. Il nous faut donc définir les notions d'impulsion. Sur un intervalle de temps δt^*, s'il y a un contact entre les floes Ω_k et Ω_l au point P_j, nous dirons que le floe Ω_k a subi un choc provenant du floe Ω_l au point de contact P_j caractérisé par l'impulsion :

$$\mathcal{I}_{kj} = \int_{\delta t^*} c_{kj}\mathbf{F}_{kj}(t)\,\mathrm{d}t.$$

RABATEL fait donc apparaître les impulsions dans les équations des moments équation (3.3) pour le floe Ω_k sur l'intervalle temporel δt^* :

$$\mathcal{M}_k\int_{\delta t^*}\dot{W}_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\delta t^*}\mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j\in E_k}\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{kj}\\ \mathbf{G_kP_j}\wedge\mathcal{I}_{kj}\end{pmatrix}.$$

En écrivant $\delta t^* = [t^-, t^+]$, on peut donc introduire les inconnues β, $\lambda\in(\mathbb{R}^2)^m$ pour le problème de contact

$$\mathcal{M}(W(t^+) - W(t^-)) = \int_{\delta t^*}\mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t + \mathsf{B}\beta + \mathsf{J}\lambda, \tag{3.4}$$

où B et J sont deux matrices de $(\mathbb{R}^3)^{n\times m}$telle que

$$\mathsf{B} = (d_{kj})_{\substack{1\le k\le n,\\ 1\le j\le m}}\quad d_{kj} = \begin{cases}0\in\mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k\\ \begin{pmatrix}c_{kj}\mathbf{T}_j\\ c_{kj}\mathbf{P}_j\mathbf{G}_k\wedge\mathbf{T}_j\end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k\end{cases},$$

$$\mathsf{J} = (s_{kj})_{\substack{1\le k\le n,\\ 1\le j\le m}}\quad s_{kj} = \begin{cases}0\in\mathbb{R}^3 & \text{si } P_j \text{ n'est pas un point de contact de } \Omega_k\\ \begin{pmatrix}c_{kj}\mathbf{N}_j\\ c_{kj}\mathbf{P}_j\mathbf{G}_k\wedge\mathbf{N}_j\end{pmatrix} & \text{si } P_j \text{ est un point de contact de } \Omega_k\end{cases}.$$

Les matrices B et J sont obtenues par décomposition des forces de contact dans le repère de contact $\mathcal{R}_{\Omega_j} = (P_j, \mathbf{T}_j, \mathbf{N}_j)$ (*voir figure Plus Haut*).

Afin de modéliser la friction dans une collision qui respecte la loi de Coulomb, (RABATEL, 2015) se base sur les travaux de Stewart et Trinkle (96) qui définissent une condition de complémentarité reliant la composante tangentielle β_j de l'impulsion appliquée au point P_j, la composante normale λ_j, la vitesse relative tangentielle du point P_j et le coefficient de friction μ. On introduit le vecteur $\tilde{\beta}$ contenant les composantes de l'impulsion tangentielle dans chacune des directions possible de glissement $\mathbf{T}_j$ et $-\mathbf{T}_j$. Il devient alors possible de formuler le problème de contact (sur tout le système S) sans interpénétration par le problème linéaire de complémentarité :

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\mathsf{J} & -\mathsf{D} & 0 \\ \mathsf{J}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathsf{D}^T & 0 & 0 & \mathsf{H} \\ 0 & \mu & -\mathsf{H}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t^+) \\ \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\delta t^*} \mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t - \mathcal{M}W(t^-) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \gamma \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \tilde{\beta} \\ \alpha \end{pmatrix} = 0, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

avec

$$\mathbf{w} = \mathsf{J}^T W(t^+), \quad \mathsf{H}^T = (e_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq 2m}}, \quad \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_j)_{1\leq j\leq m}, \quad \lambda = (\lambda_j)_{1\leq j\leq m},$$

μ est la matrice diagonale de diagonale$(\mu_1, \ldots, \mu_m)$,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 2(i-1)+1 \text{ ou } j = 2(i-1)+2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases},$$

$D = (\mathbf{B}_1 | -\mathbf{B}_1 | \ldots | \mathbf{B}_m | -\mathbf{B}_m)$ avec $\mathbf{B}_j$ la colonne j de la matrice B.

Le problème consiste alors à trouver les vitesses après contact $W(t^+)$, à l'aide des composantes inconnues tangentielle et normale des impulsions dans les repères de contact $(\tilde{\beta}\,\gamma)$, elles-mêmes inconnues du système.

3.2.1.4 Consistance énergétique

D'après l'auteur de (Rabatel, 2015, p.42), traiter le problème de contact à partir de lois non régulières ne permet pas d'obtenir des solutions satisfaisant à la fois la non-interpénétration, la friction de Coulomb et une consistance énergétique. Le problème a donc été divisé en une phase de compression et une phase de décompression suivant la loi de Poisson, durant lesquelles un problème de complémentarité (équation (3.5)) a été résolu. Durant la phase de décompression, Rabatel a donc opté pour la consistance énergétique et la non-interpénétration avec la solution :

$$W^N = (1+\varepsilon)W^c - \varepsilon W(t^-),$$

où W^c représente les vitesses des floes après la phase de compression, et ε le coefficient de restitution pour les contacts considérés inélastiques.

3.2.1.5 Traitement des conditions aux bords

3.2.2 Le modèle de l'environnement

Chapitre 4

Travaux et apports

4.1 Les travaux effectués

4.2 Les apports du stage

— L' utilisation de TIKZ

Chapitre 5

Déroulement du stage

5.1 Journal de bord

Chapitre 6

Conclusion

Bibliographie

Balasoiu, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

Rabatel, Matthias (nov. 2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341.

Rabatel, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : ***Journal of Geophysical Research : Oceans*** 120.9, p. 5887-5909.

Signorini, Antonio (1933). « Sopra alcune questioni di elastostatica ». In : ***Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*** 27, p. 69.