



## RAPPORT DE STAGE

---

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

---

### *Étudiant*

Roussel Desmond NZOYEM

### *Superviseur*

Stéphane LABBÉ

### *Enseignant référent*

Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;  
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;  
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

12 juin 2021

## *Remerciements*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>1 Travaux et apports</b>	<b>1</b>
1.1 Les missions du poste . . . . .	1
1.2 Présentation des résultats obtenus . . . . .	1
1.2.1 Modélisation et simulation 1D . . . . .	1
1.2.2 Modélisation et simulation 2D . . . . .	11
<b>Bibliographie</b>	<b>16</b>



# Chapitre 1

## Travaux et apports

### 1.1 Les missions du poste

- L'état de l'art de la partie précédente fait partie des missions.
- Modélisation
- Simulation

Nous souhaitons étudier le comportement mécanique d'un floe après collision avec un autre floe. Les étapes de travail envisagées sont les suivantes :

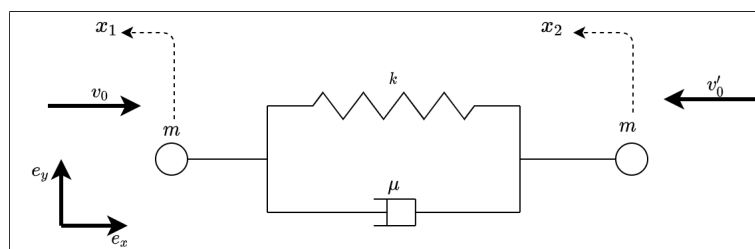
1. Ecrire les systèmes différentiels pour les deux floes juste après le choc : pour l'instant on peut considérer que l'un des floes est immobile (cela revient au même si l'on exprime les vitesses dans un repère lié à ce floe).
2. On exprime l'EDO vérifiée par les solutions, c'est à dire  $q$  pour le premier floe, et  $p$  pour le second.
3. On pourra ensuite simuler ces EDP limites et trouver les valeurs de  $p$  et  $q$ . Autrement dit, on connaît la position de chaque point du réseau au temps final.
4. Si on connaît  $p$  et/ou  $q$ , on connaît la condition de Dirichlet sur le floe concerné, et on peut ainsi exprimer le déplacement et la possible fracture du floe.

### 1.2 Présentation des résultats obtenus

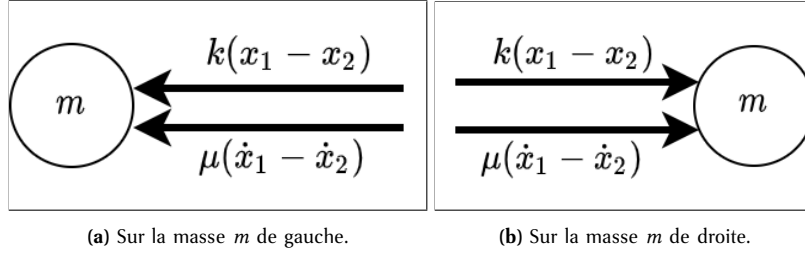
#### 1.2.1 Modélisation et simulation 1D

##### 1.2.1.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

Avant d'entamer la question de la percussion, étudions le comportement d'un floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif visqueux, et 2 noeuds) (voir figure 1.1).



**Figure 1.1** – Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Les variables  $x_1$  et  $x_2$  traduisent les déplacements des noeuds de gauche et de droite respectifs. À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses  $v_0$  et  $v'_0$  indiquées.



**Figure 1.2** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple juste après l'instant initial, on a  $x_1 > 0$ , et  $x_2 < 0$  d'où  $k(x_1 - x_2) > 0$ ).

Un bilan des forces effectué sur les deux noeuds du floe (voir figure 1.2) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (1.1)$$

En remarquant que  $m \neq 0$ , on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant  $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$ , et on reprend la condition initiale pour obtenir le système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (1.3)$$

La solution numérique est présentée dans à la figure 1.3 (voir fichier code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque  $v_0 \neq v'_0$ , les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements diverge.

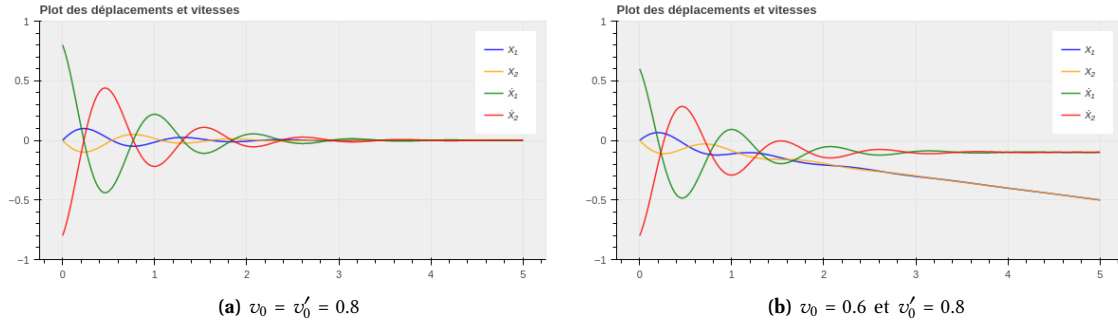
Avec  $t_0 = 0$ , la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par.

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (1.4)$$

Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1** (Convergence du modèle 1D isolé). *Les déplacements  $x_1$  et  $x_2$  des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.*

*Démonstration.* Le calcul des solution analytique est plus délicat. Il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice  $E$ . Pour celà, nous devons diagonaliser (ou du moins trogonaliser) la matrice  $E$ . Son polynome



**Figure 1.3** - Simulation du déplacement 1D d'un floe avec  $m = 1$ ,  $k = 18$ ,  $\mu = 1.3$ ,  $t_f = 5$ . En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$  lorsque  $v_0 = v'_0$ .

caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k). \end{aligned}$$

Posons  $\Delta = 4\mu^2 - 8km$ . On distingue deux cas :

- Si  $\Delta \geq 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  ;
- Si  $\Delta < 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ .

Nous avons donc exhiber les trois valeurs propres de notre matrice :  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$ . Avec  $\lambda$  désignant l'une des valeurs propres, on recherche les vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$  appartenant aux sous espaces propres  $E_\lambda$ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0 \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

- Pour  $\lambda = 0$ , l'équation (1.5) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit  $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$ , avec  $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ .

- Pour  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ , on remarque que  $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$ . l'équation (1.5) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc  $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$ , avec  $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$  ; et  $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$  avec  $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ .

La meutlisicté arithmetique de  $\lambda = 0$  est differente de sa multiplicité géométrique. La matrice  $E$  n'est donc pas diagonalisable. Son polynome caractéristique étant scindé, nous alons la trigonaliser. On pose donc une base  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  dans laquelle la matrice  $E$  s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  (notée  $\mathcal{B}$ ) à  $\mathcal{B}'$ . On a :

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_1$  s'écrit  $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_1 = 0$ .  $v_1$  est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend  $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_2$  s'écrit  $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_2 = av_1$ . On retourne dans  $\mathcal{B}$  en posant  $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = a \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Avec  $a = 1$ , on écrit  $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$ .

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_3$  s'écrit  $v_1 = (0, 0, 1, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_1 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$ . En posant  $b = d = 0$ ,  $v_1$  devient un vecteur propre associé à  $\lambda_1$  et on prend  $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- De façon similaire, on obtient  $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$  en posant  $c = e = f = 0$ .

Nous avons donc trigonaliser la matrice  $E$ , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente  $A = D + N$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant  $E = P(D + N)P^{-1}$ , nous pouvons facilement calculer  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN) P^{-1}$ . Ce calcul délicat donne (à l'aide du logiciel de calcul symbolique `Symbolab`) :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons nous que la solution du problème de Cauchy équation (1.3) est donnée par  $Y(t) = \exp(tE)Y_0$ , avec  $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$ . Le calcul du déplacement  $x_1$  donne :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} (v_0 + v'_0). \quad (1.6)$$



Le cas où  $\Delta < 0$  (à étudier dans  $\mathbb{C}$ ) peut se ramener au cas réel (dans  $\mathbb{R}$ ) en posant  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$  (avec  $\alpha = -\frac{\mu}{m}$  et  $\beta = -\frac{\sqrt{2km-\mu^2}}{m}$ ). En remarquant que  $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$ , on obtient :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) + \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0). \quad (1.7)$$

Les équations (1.6) et (1.8) permettent d'observer que le déplacement  $x_1$  ne converge pas lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , à moins que  $v_0 = v'_0$ , ce qui est observé à la figure 1.3. Pour le déplacement du deuxième noeud, on a :

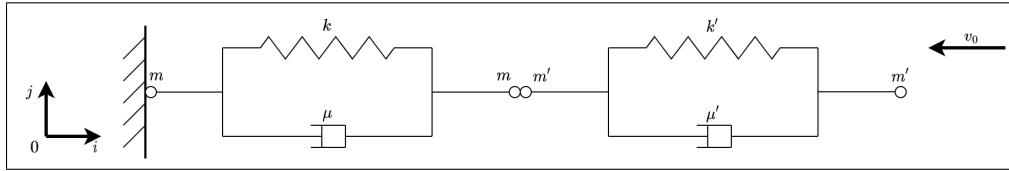
$$x_2(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0); \quad (1.8)$$

On tire les mêmes conclusions en effectuant un raisonnement similaire.

□

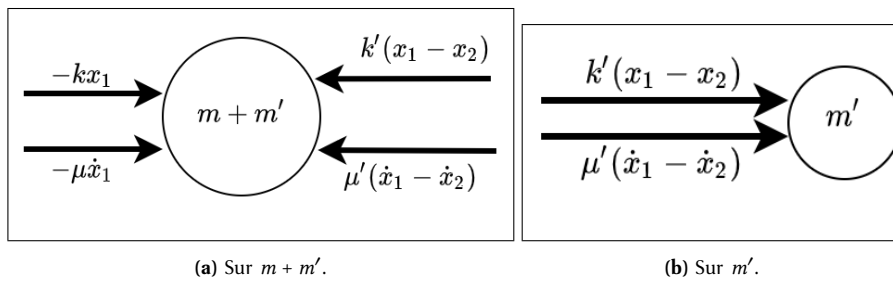
### 1.2.1.2 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse  $v_0$ . On identifie les nuds  $q_0$  et  $p_0$  de la section précédente à leur masses respectives  $m$  et  $m'$  (voir figure 1.4).



**Figure 1.4** - Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses  $m$  et  $m'$  en contact forment une seule masse<sup>1</sup>  $m + m'$  dont le déplacement est donné par la variable  $x_1(t)$ . Le déplacement de la masse  $m'$  à l'autre bout du floe percuteur est nommé  $x_2(t)$ . La masse  $m$  qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.



**Figure 1.5** - Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ( $v_0 < 0$  et donc  $x_1 < 0$ ). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort  $k'$ , on peut imaginer  $x_1$  immobile (on aura  $x_2 < 0$ , d'où  $x_1 - x_2 > 0$ ) (voir [Hol0]).

1. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.

En orientant convenablement le système (voir figure 1.4), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales<sup>2</sup> :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (1.9)$$

À l'instant initial  $t_0$ , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (1.10)$$

En posant  $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , l'équation (1.10) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B'\dot{X}(t) + C'X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (1.12)$$

avec  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ .

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc  $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$  et le système 1.12 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (1.13)$$

avec la matrice par blocs

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

où  $I_2$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0 \quad (1.14)$$

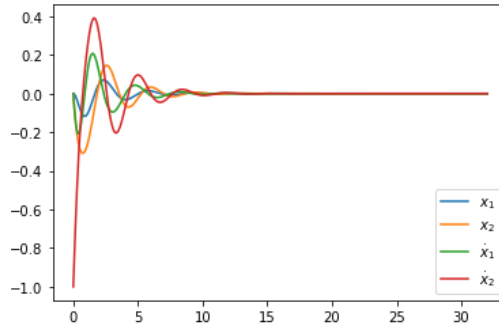
La résolution analytique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice  $E \in \mathbb{R}^4$ , ce qui s'avère difficile du à la taille de ladite matrice. Nous optons donc pour une solution numérique (voir figure figure 1.6 issue du notebook code/simulD/Percussion1D-1.ipynb) ...

Pour certaines valeurs (spécifiquement de  $\mu$  et  $\mu'$ ), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . Il nous reste dans cette section :

1. Calculer analytiquement et numériquement tous les état d'équilibres  $Y_{eq} \in \ker(E)$ ; distinguer les états stables des autres.

---

2. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de  $x_1$  est-elle vraiment nulle?

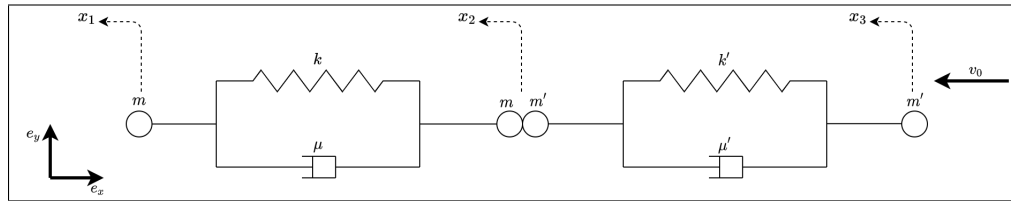


**Figure 1.6** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k = 16$ ,  $k' = 5$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.0$ ,  $t_f = 32$ . On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ .

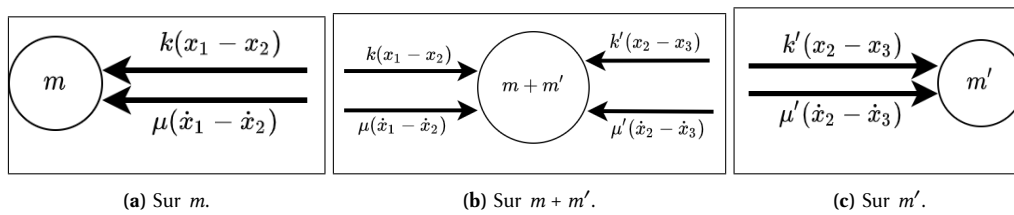
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice  $E$ , et donner l'expression de la solution ; déduire la condition sur les paramètres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

### 1.2.1.3 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé dans cette section. On obtient donc une troisième variable  $x_3$  décrivant le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 1.7. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 1.8.



**Figure 1.7** – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $x_3$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**Figure 1.8** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 1.5 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (1.15)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}_{\dot{X}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible. En posant  $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , le système d'EDO revient à l'équation (1.17) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (1.17)$$

où  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ . On pose ensuite  $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$  et le système équation (1.17) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (1.18)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 1.4), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble  $m + m'$  après collision et fixation de la masse  $m'$  (à vitesse  $v_0$ ) sur la masse  $m$  (de vitesse  $v'_0$ )<sup>3</sup>. Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée  $v_f$ , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées  $P_{\text{avant}}$  et  $P_{\text{après}}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2mv_0 + 2m'v'_0 &= (2m + 2m')v_f \\ \Rightarrow v_f &= \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (1.18) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure 1.9 (issue du notebook `code/simu1D/Percussion1D-2.ipynb`).

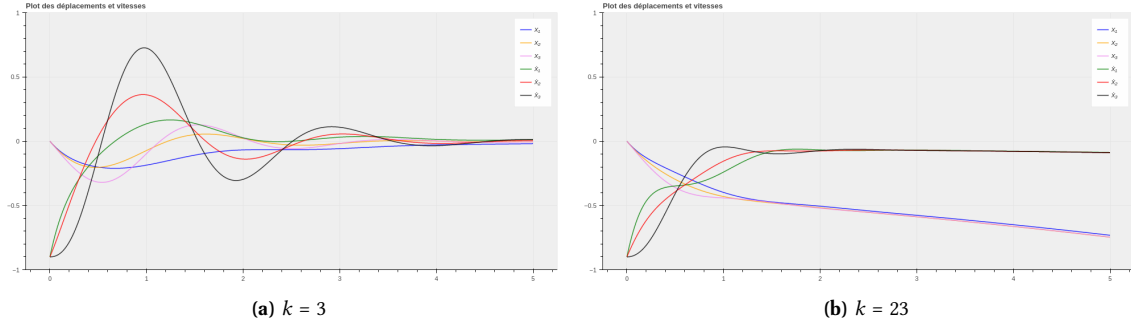
$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (1.19)$$

La figure 1.9 permet d'observer la nuance avec le problème de contact parfaitement inélastique. Il est difficile de distinguer les cas qui aboutissent à une convergence des déplacements de ceux qui divergent. Observons donc à présent un problème de contact inélastique avec séparation des masses.

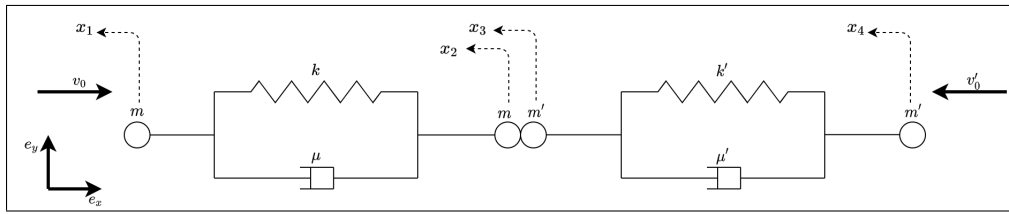
#### 1.2.1.4 Collision inélastique avec séparation des masses

Reprenons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps  $\delta t^* = [t^-, t^+]$  de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses  $m$  et  $m'$  en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 1.4 et 1.7), et nous le présentons à la figure 1.10 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 1.11.

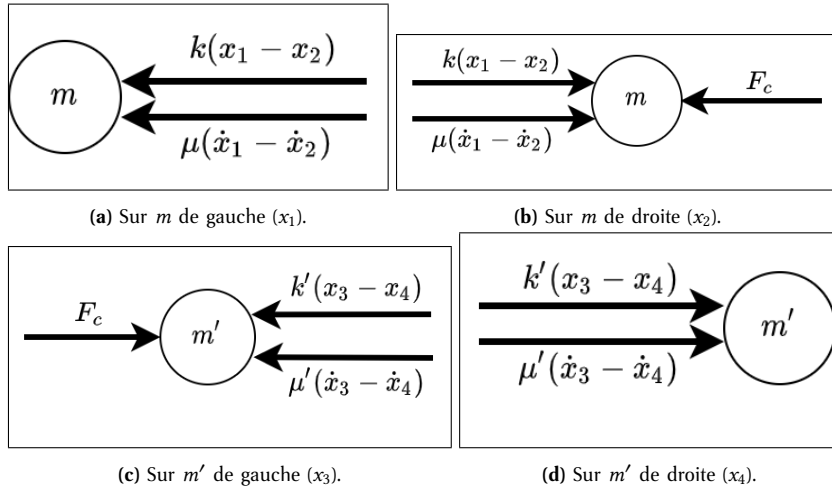
3. Le vecteur  $v'_0$  n'est pas marqué à la figure 1.7 (i.e.  $v'_0 = 0$ ). L'introduction de ce vecteur permet de généraliser le problème.



**Figure 1.9** - Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k' = 22$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.8$ ,  $t_f = 5$ . Sous certaines conditions (forte dissipation, raideur du floe percuté élevée, etc.), on observe le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .



**Figure 1.10** - Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les nuds  $m$  et  $m'$  en contact sont étudiés séparément. On représente les variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , et  $x_4$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**Figure 1.11** - Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 1.5 et 1.8 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.  $F_c$  représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.20)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de  $x_2$  et  $x_3$  pour éliminer la force de contact  $F_c$  et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (1.21a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), & (1.21b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). & (1.21c) \end{cases}$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant  $x_2(t) = x_3(t)$  p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses  $m$  et  $m'$  peuvent être étudiées comme une unique masse  $m + m'$ . La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble  $m + m'$ . Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses  $\dot{x}_1(t^+)$ ,  $\dot{x}_2(t^+)$ ,  $\dot{x}_3(t^+)$  et  $\dot{x}_4(t^+)$  immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (1.18)), nous réutilisons les quantités  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_4$  données par ce système (l'équation (1.18) dans lequel  $x_2$  et  $x_3$  sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car  $x_1$  et  $x_4$  n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité  $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$  est aussi calculée suivant le modèle équation (1.18) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnues dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons l'équation (1.21b) entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_I. \quad (1.22)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons  $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$  et  $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$  les vitesses des noeuds en contact avant collision, et  $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$  et  $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$  les vitesses après contact. L'équation (1.22) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (1.23)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution  $\varepsilon$ <sup>4</sup>. On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 1.12.

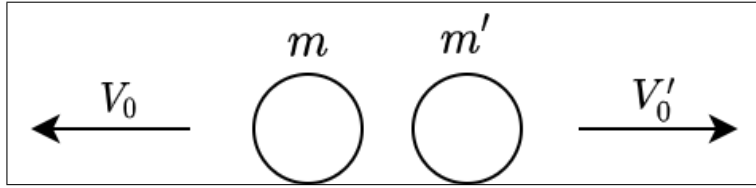


Figure 1.12 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (1.24) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (1.24)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (1.23) et (1.24) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1 + \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 + \varepsilon)mv_0 + (m' - \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (1.25)$$

4. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

Nous faisons donc ici la grosse hypothèse que le mouvement de  $x_2$  et  $x_3$  devient uniforme après la collision. Une fois leur vitesses "initiales"<sup>5</sup> obtenues, on calcule donc les déplacements des différents noeuds des réseaux, et les fractures éventuelles qui s'en suivent.

**Analyse du modèle.** Observons le premier floe de plus près :

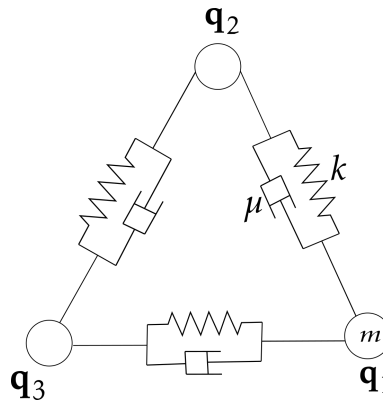
- Son noeud de gauche  $x_1$  a pour vitesse  $v_0$  avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc ;
- Son noeud de droite  $x_2$  a pour vitesse  $v_0$  avant le choc, mais passe de façon discontinue à  $V_0$  après le choc.

N'ayant aucune garantie que les vecteurs vitesses  $v_0$  et  $V_0$  seront opposés immédiatement après le choc, nous ne pouvons garantir la convergence de ce modèle (voir théorème 1.2.1). Ce modèle dégénère (probablement) après la première collision. Effectuons à présent une modélisation 2D et observons si le même problème se répète.

## 1.2.2 Modélisation et simulation 2D

### 1.2.2.1 Déplacement d'un floe isolé

Étudions le comportement d'un floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts (3 ressort, 3 dispositif visqueux, et 3 noeuds) (voir figure 1.13).



**Figure 1.13** – Floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Tous les noeuds du réseau ont la même masse  $m$ , tous les ressorts ont la même raideur  $k$ , et tous les dispositifs visqueux ont le même coefficient  $\mu$ .

Comme nous l'avons présenté aux équations (1.29) et (E), le système de la figure 1.13 est régi par l'équation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad (1.26)$$

où  $L_{ij}$  représente la longueur au repos du ressort entre les noeuds  $i$  et  $j$ , et  $C_{ij}$  indique si les noeuds  $i$  et  $j$  sont connectés ou non (pour ce modèle 2D simple,  $C_{ij} = 1 \forall 0 \leq i, j \leq 2$ ). Le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{ij}$  vaut :

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

**Simulation par un schéma d'Euler explicite.** On discrétise par un schéma de différence finies avec  $N + 1$  pas de temps, et pour une temps de simulations  $T$  :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n = n\Delta t = n\frac{T}{N}, \quad \mathbf{q}_i(t^n) \approx \mathbf{q}_i^n.$$

5. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour la deuxième phase de la percussio.

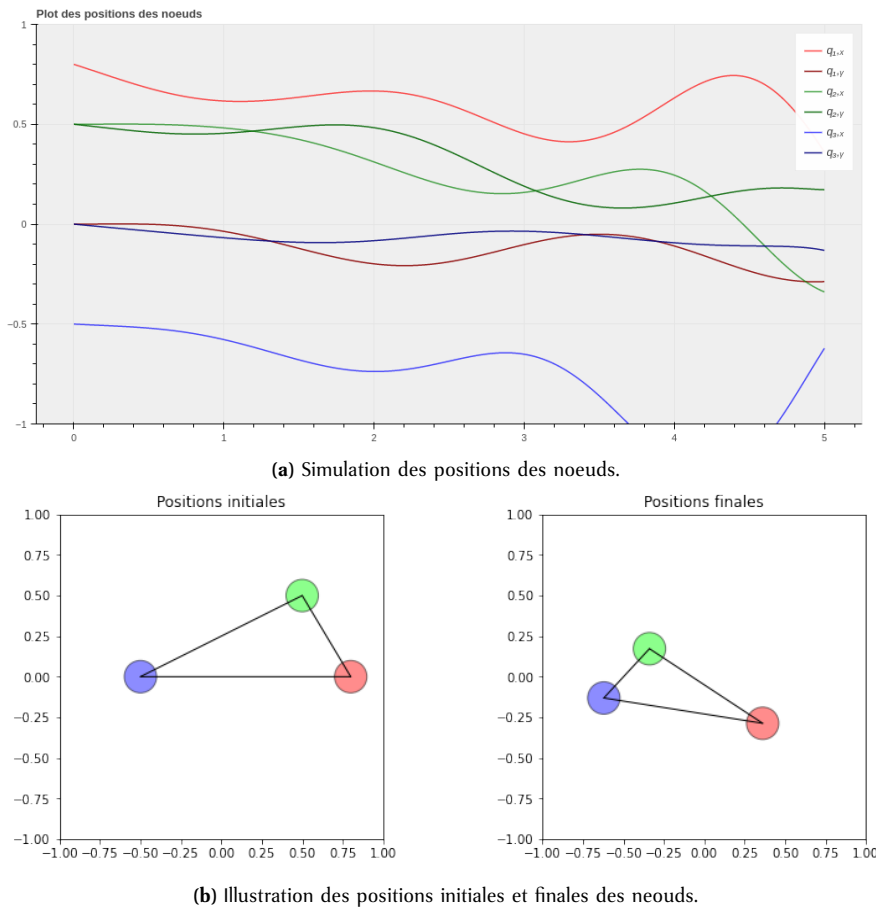
L'équation (1.26) devient :

$$m \frac{\mathbf{q}_i^{n+1} - 2\mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \frac{\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right],$$

soit encore :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]. \quad (1.27)$$

La simulation de ce modèle par un schéma d'Euler explicite à pas constant sur un intervalle de temps faible ( $T = 4$ ) est présentée à la figure 1.14, ainsi que les positions des 2 noeuds au début et à la fin de la simulation. La simulation à la figure 1.15 permet d'observer le problème avec ce schéma ( $T = 10$ ).

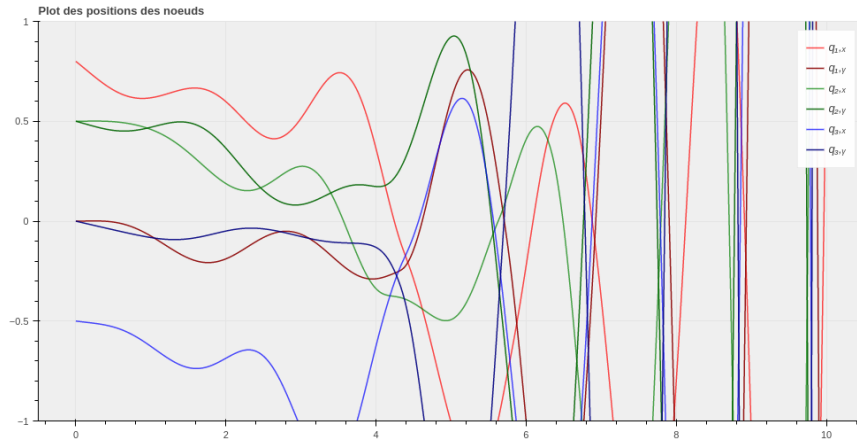


**Figure 1.14** – Simulation du système 1.27 par un schéma d'Euler explicite avec  $T = 4$ . La couleurs rouge repésente le noeud  $\mathbf{q}_1$ , le vert le noeud  $\mathbf{q}_2$ , le blue le  $\mathbf{q}_3$ . Les paramètres utilisés ici sont les suivants :  $m = 6.2$ ,  $k = 23.3$ ,  $\mu = 3$  ; à l'instant initiale, les trois noeuds perturbés avec des vitesses d'intensité respectives  $v_1 = 0.3$ ,  $v_2 = 0.1$ , et  $v_3 = 0.1$ . Par rapport à l'axe des abscisses, ces vitesses ont sont orintées respectivement de  $\theta_1 = 180^\circ$ ,  $\theta_2 = 270^\circ$ , et  $\theta_3 = 240^\circ$  (voir `code/simu2D/Deplacement2D-1.ipynb`).

Les figures 1.14 et 1.15 permettent de constater que le schéma d'Euler explicite (peu importe son pas de temps), n'est pas adapté à ce problème. Nous étudierons donc d'autres alternatives.

**Simulation à l'aide des fonction de la librairie Scipy.** À travers ses fonction telle que `odeint` et `solve_ivp`, Scipy offre une solution robuste et élégante pour simuler les systèmes d'ODE de la forme  $Y' = AY$ .

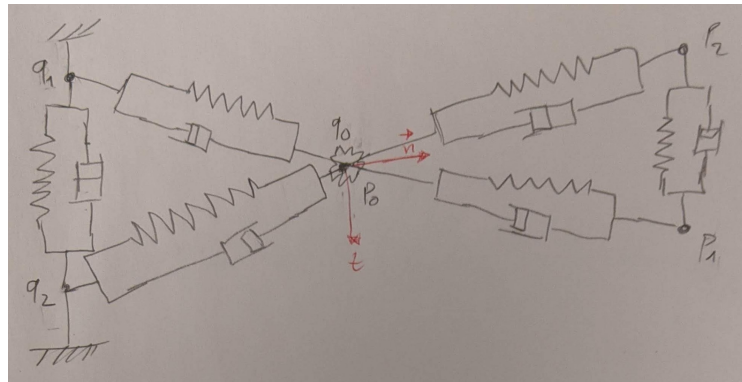




**Figure 1.15** – Simulation du système 1.27 par un schéma d'Euler explicite avec  $T = 10$ . Cette figure utilise les mêmes paramètres que la figure 1.14. On observe ici une divergence totale du système.

### 1.2.2.2 Modélisation du contact entre deux floes

Les floes de glace  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une modélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliés par des ressorts (de constante de raideur  $k$ ), et par des dispositifs visqueux de constante  $\mu$ . Nous désignerons par  $n + 1$  le nombre total de noeuds du floe  $\Omega_k$ , chaque noeud ayant pour masse  $m$ . De façon similaire, on définit les constantes  $k'$ ,  $\mu'$ ,  $n' + 1$ ,  $m' + 1$  pour le floe  $\Omega_l$ . Les positions des noeuds de  $\Omega_k$  seront notés  $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$ , tandis que ceux de  $\Omega_l$  seront notés  $(p_i)_{0 \leq i \leq n'}$  (voir figure 1.16).



**Figure 1.16** – Contact entre deux floes aux points  $p_0 = q_0$ .

On définit la matrice de contact  $C...$  (voir thèse Dimitri), et  $L_{0j..}$  et  $u_{0j} ..$

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisons le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe  $\Omega_k$ , nous écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire<sup>6</sup> au point de contact  $q_0$  :

$$m\ddot{q}_0 = F_0 + F_0^c, \quad (1.28)$$

6. La rotation du point matériel  $q_0$  n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \underbrace{k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (1.29)$$

représente la somme des forces de reaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud  $q_0$ ; et  $\mathbf{F}_0^c(t)$  la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact  $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  associé au floe  $\Omega_k$  (voir figure 1.16), on peut écrire, pour  $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (1.30)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations (1.28) à (1.30). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (E) \quad \text{(SI)}$$

En ce qui concerne le floe  $\Omega_l$ , nous procédons de facons similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \end{cases} \quad (E') \quad \text{(SI)}$$

où  $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$  sont définis de facon similaire à  $\mathbf{F}_0$  (voir équation (1.29)) :

$$\mathbf{F}'_i = \sum_{j=i}^{n'} C_{ij} \left[ k' (\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - L'_{ij}) \mathbf{u}'_{ij} - \mu' \langle \dot{\mathbf{p}}_j - \dot{\mathbf{p}}_i, \mathbf{u}'_{ij} \rangle \mathbf{u}'_{ij} \right]. \quad (1.31)$$

Ensuite, on additionne membre à membre les équations des systèmes extérieurs (SE) de équations (E) et (E') pour éliminer la force de contact. On obtient :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0. \quad (1.32)$$

Remarquons que les positions relatives des noeuds  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{p}_0$  restent inchangées durant la collision. A l'instant initial, on note donc  $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0)$ ; ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{q}_0(t) - \mathbf{p}_0(t) = \Delta_0. \quad (1.33)$$

Nous avons ainsi obtenu les  $n + n' + 2$  équations nécessaires pour que notre problème de percussion soit bien posé. Elles sont :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0, & \text{(SE)} \\ \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 = \Delta_0, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \quad \text{(SI)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

---

Ensuite, il nous faut introduire des conditions portant sur la conservation de l'énergie, et la condition de non-interpénétration de Signorini. . .

# Bibliographie

- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.