



## RAPPORT DE STAGE

---

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

---

### *Étudiant*

Roussel Desmond NZOYEM

### *Superviseur*

Stéphane LABBÉ

### *Enseignant référent*

Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;  
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;  
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

27 mai 2021

## *Remerciements*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>1 Travaux et apports</b>	<b>1</b>
1.1 Les missions du poste . . . . .	1
1.2 Présentation des résultats obtenus . . . . .	1
1.2.1 Modélisation et simulation 1D . . . . .	1
1.2.2 Modélisation et simulation 2D . . . . .	11
<b>Bibliographie</b>	<b>15</b>



# Chapitre 1

## Travaux et apports

### 1.1 Les missions du poste

- L'état de l'art de la partie précédente fait partie des missions.
- Modélisation
- Simulation

Nous souhaitons étudier le comportement mécanique d'un floe après collision avec un autre floe. Les étapes de travail envisagées sont les suivantes :

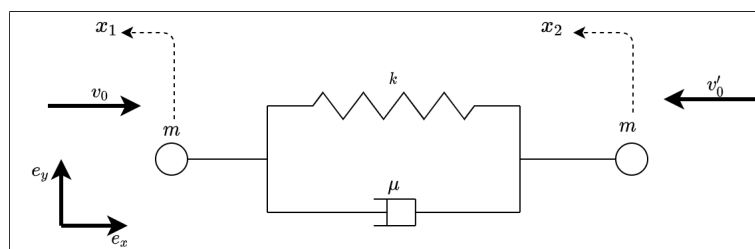
1. Ecrire les systèmes différentiels pour les deux floes juste après le choc : pour l'instant on peut considérer que l'un des floes est immobile (cela revient au même si l'on exprime les vitesses dans un repère lié à ce floe).
2. On exprime l'EDO vérifiée par les solutions, c'est à dire  $q$  pour le premier floe, et  $p$  pour le second.
3. On pourra ensuite simuler ces EDP limites et trouver les valeurs de  $p$  et  $q$ . Autrement dit, on connaît la position de chaque point du réseau au temps final.
4. Si on connaît  $p$  et/ou  $q$ , on connaît la condition de Dirichlet sur le floe concerné, et on peut ainsi exprimer le déplacement et la possible fracture du floe.

### 1.2 Présentation des résultats obtenus

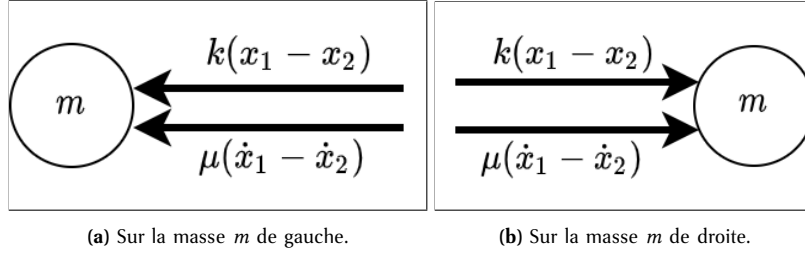
#### 1.2.1 Modélisation et simulation 1D

##### 1.2.1.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

Avant d'entamer la question de la percussion, étudions le comportement d'un floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif visqueux, et 2 noeuds) (voir figure 1.1).



**Figure 1.1** – Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Les variables  $x_1$  et  $x_2$  traduisent les déplacements des noeuds de gauche et de droite respectifs. À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses  $v_0$  et  $v'_0$  indiquées.



**Figure 1.2** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple juste après l'instant initial, on a  $x_1 > 0$ , et  $x_2 < 0$  d'où  $k(x_1 - x_2) > 0$ ).

Un bilan des forces effectué sur les deux noeuds du floe (voir figure 1.2) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (1.1)$$

En remarquant que  $m \neq 0$ , on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant  $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$ , et on reprend la condition initiale pour obtenir le système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (1.3)$$

La solution numérique est présentée dans à la figure 1.3 (voir fichier code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque  $v_0 \neq v'_0$ , les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements diverge.

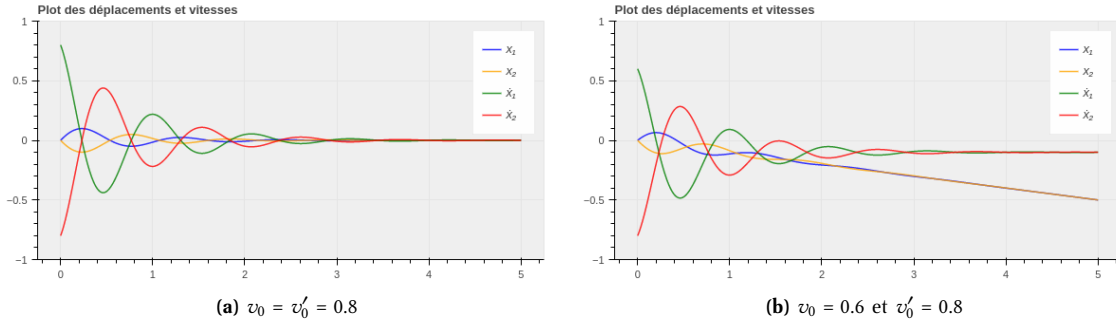
Avec  $t_0 = 0$ , la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par.

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (1.4)$$

Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1** (Convergence du modèle 1D isolé). *Les déplacements  $x_1$  et  $x_2$  des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.*

*Démonstration.* Le calcul des solution analytique est plus délicat. Il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice  $E$ . Pour celà, nous devons diagonaliser (ou du moins trogonaliser) la matrice  $E$ . Son polynome



**Figure 1.3** - Simulation du déplacement 1D d'un floe avec  $m = 1$ ,  $k = 18$ ,  $\mu = 1.3$ ,  $t_f = 5$ . En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$  lorsque  $v_0 = v'_0$ .

caractéristique est donné par :

$$\det(E - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix},$$

$$= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k).$$

Posons  $\Delta = 4\mu^2 - 8km$ . On distingue deux cas :

- Si  $\Delta \geq 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  ;
- Si  $\Delta < 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ .

Nous avons donc exhiber les trois valeurs propres de notre matrice :  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$ . Avec  $\lambda$  désignant l'une des valeurs propres, on recherche les vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$  appartenant aux sous espaces propres  $E_\lambda$ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0 \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

- Pour  $\lambda = 0$ , l'équation (1.5) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit  $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$ , avec  $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ .

- Pour  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ , on remarque que  $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$ . l'équation (1.5) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc  $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$ , avec  $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$  ; et  $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$  avec  $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ .

La meutlisicté arithmetique de  $\lambda = 0$  est differente de sa multiplicité géométrique. La matrice  $E$  n'est donc pas diagonalisable. Son polynome caractéristique étant scindé, nous alons la trigonaliser. On pose donc une base  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  dans laquelle la matrice  $E$  s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  (notée  $\mathcal{B}$ ) à  $\mathcal{B}'$ . On a :

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_1$  s'écrit  $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_1 = 0$ .  $v_1$  est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend  $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_2$  s'écrit  $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_2 = av_1$ . On retourne dans  $\mathcal{B}$  en posant  $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = a \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Avec  $a = 1$ , on écrit  $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$ .

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_3$  s'écrit  $v_1 = (0, 0, 1, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_1 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$ . En posant  $b = d = 0$ ,  $v_1$  devient un vecteur propre associé à  $\lambda_1$  et on prend  $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- De facon similaire, on obtient  $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$  en posant  $c = e = f = 0$ .

Nous avons donc trigonaliser la matrice  $E$ , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente  $A = D + N$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant  $E = P(D + N)P^{-1}$ , nous pouvons facilement calculer  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN) P^{-1}$ . Ce calcul délicat donne (à l'aide du logiciel de calcul symbolique `Symbolab`) :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons nous que la solution du problème de Cauchy équation (1.3) est donnée par  $Y(t) = \exp(tE)Y_0$ , avec  $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$ . Le calcul du déplacement  $x_1$  donne :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) + \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} (v_0 + v'_0). \quad (1.6)$$



Le cas où  $\Delta < 0$  (à étudier dans  $\mathbb{C}$ ) peut se ramener au cas réel (dans  $\mathbb{R}$ ) en posant  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$  (avec  $\alpha = -\frac{\mu}{m}$  et  $\beta = -\frac{\sqrt{2km-\mu^2}}{m}$ ). En remarquant que  $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$ , on obtient :

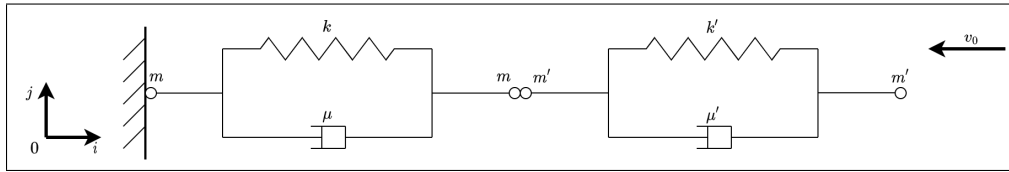
$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) + \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0). \quad (1.7)$$

Les équations (1.6) et (1.7) permettent d'observer que le déplacement  $x_1$  ne converge pas lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , à moins que  $v_0 = v'_0$ , ce qui est observé à la figure 1.3. On tire les mêmes conclusions pour  $x_2$  en effectuant un raisonnement similaire.

□

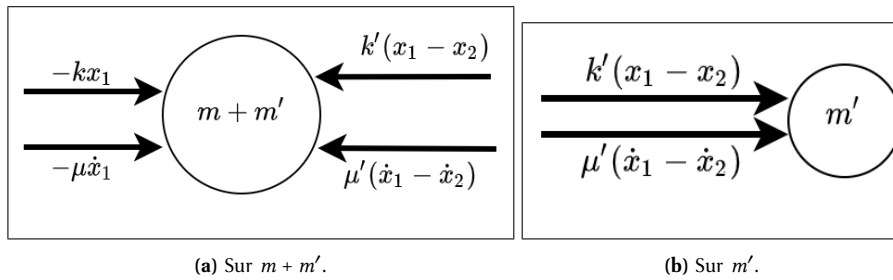
### 1.2.1.2 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse  $v_0$ . On identifie les nuds  $q_0$  et  $p_0$  de la section précédente à leur masses respectives  $m$  et  $m'$  (voir figure 1.4).



**Figure 1.4** - Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses  $m$  et  $m'$  en contact forment une seule masse<sup>1</sup>  $m + m'$  dont le déplacement est donné par la variable  $x_1(t)$ . Le déplacement de la masse  $m'$  à l'autre bout du floe percuteur est nommé  $x_2(t)$ . La masse  $m$  qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.



**Figure 1.5** - Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ( $v_0 < 0$  et donc  $x_1 < 0$ ). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort  $k'$ , on peut imaginer  $x_1$  immobile (on aura  $x_2 < 0$ , d'où  $x_1 - x_2 > 0$ ) (voir [Hol0]).

En orientant convenablement le système (voir figure 1.4), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales<sup>2</sup> :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (1.8)$$

1. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.  
2. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de  $x_1$  est-elle vraiment nulle?

À l'instant initial  $t_0$ , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (1.9)$$

En posant  $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , l'équation (1.9) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B' \dot{X}(t) + C' X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (1.11)$$

avec  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ .

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc  $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$  et le système 1.11 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (1.12)$$

avec la matrice par blocs

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

où  $I_2$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0 \quad (1.13)$$

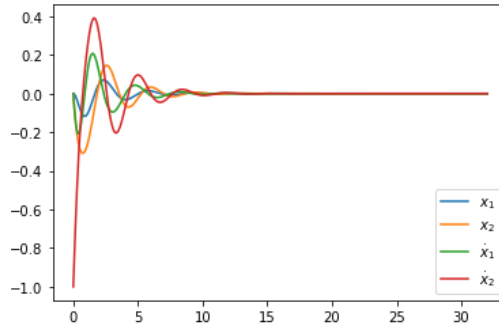
La résolution analytique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice  $E \in \mathbb{R}^4$ , ce qui s'avère difficile du à la taille de ladite matrice. Nous optons donc pour une solution numérique (voir figure 1.6 issue du notebook `code/simulD/Percussion1D-1.ipynb`) ...

Pour certaines valeurs (specifiquement de  $\mu$  et  $\mu'$ ), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . Il nous reste dans cette section :

1. Calculer analytiquement et numériquement tous les état d'équilibres  $Y_{eq} \in \ker(E)$ ; distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice  $E$ , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les parametres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

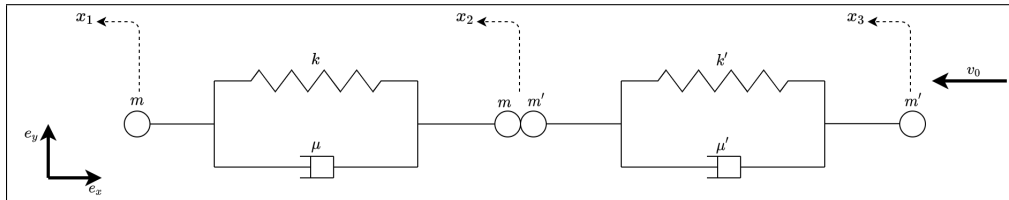
### 1.2.1.3 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé dans cette section. On obtient donc une troisième variable  $x_3$  décrivant le comportement du noeud qui était rattaché au mur.

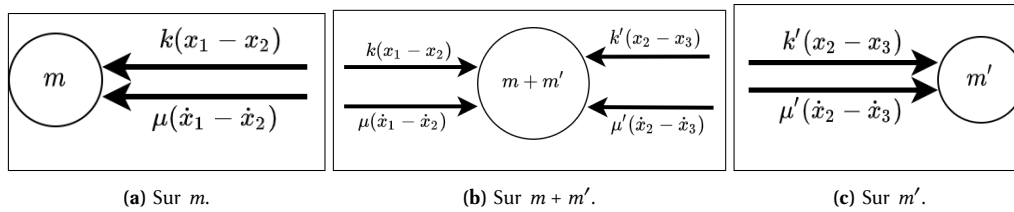


**Figure 1.6** - Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k = 16$ ,  $k' = 5$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.0$ ,  $t_f = 32$ . On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ .

La schéma régissant ce système est donnée à la figure 1.7. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 1.8.



**Figure 1.7** - Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $x_3$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**Figure 1.8** - Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 1.5 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (1.14)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}. \quad (1.15)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible. En posant  $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , le système d'EDO revient à l'équation (1.16) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (1.16)$$

où  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ . On pose ensuite  $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$  et le système équation (1.16) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (1.17)$$

avec

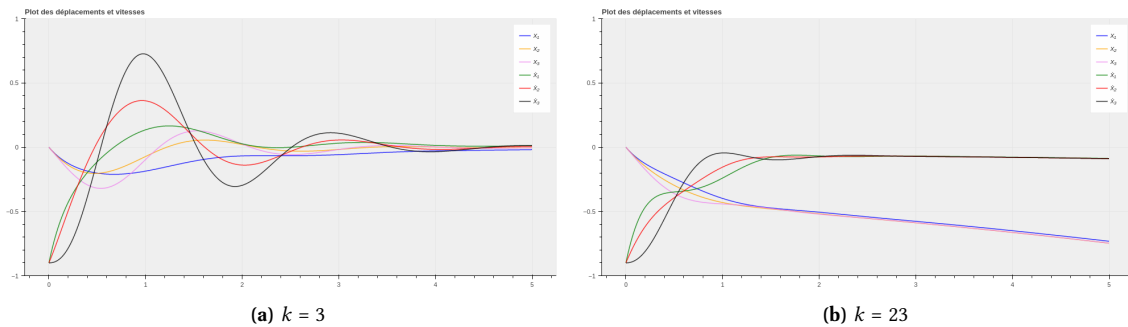
$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 1.4), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble  $m + m'$  après collision et fixation de la masse  $m'$  (à vitesse  $v_0$ ) sur la masse  $m$  (de vitesse  $v'_0$ )<sup>3</sup>. Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée  $v_f$ , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées  $P_{\text{avant}}$  et  $P_{\text{après}}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2mv_0 + 2m'v'_0 &= (2m + 2m')v_f \\ \Rightarrow v_f &= \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (1.17) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure 1.9 (issue du notebook code/simu1D/Percussion1D-2.ipynb).

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (1.18)$$



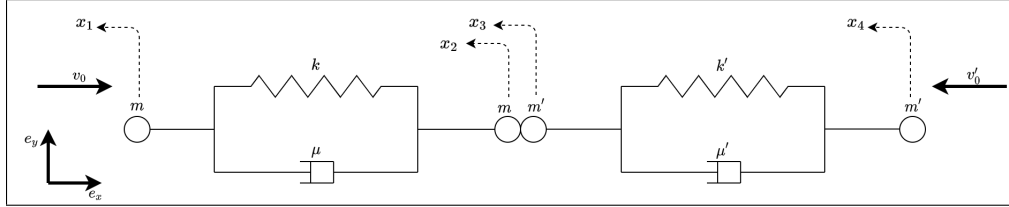
**Figure 1.9** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k' = 22$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.8$ ,  $t_f = 5$ . Sous certaines conditions (forte dissipation, raideur du floe percuté élevée, etc.), on observe le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

La figure 1.9 permet d'observer la nuance avec le problème de contact parfaitement inélastique. Il est difficile de distinguer les cas qui aboutissent à une convergence des déplacements de ceux qui divergent. Observons donc à présent un problème de contact inélastique avec séparation des masses.

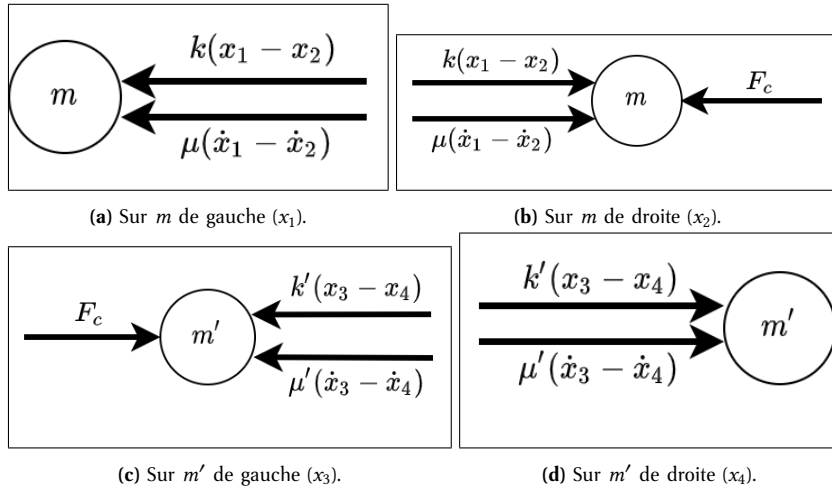
3. Le vecteur  $v'_0$  n'est pas marqué à la figure 1.7 (i.e.  $v'_0 = 0$ ). L'introduction de ce vecteur permet de généraliser le problème.

### 1.2.1.4 Collision inélastique avec séparation des masses

Reprenons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps  $\delta t^* = [t^-, t^+]$  de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses  $m$  et  $m'$  en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 1.4 et 1.7), et nous le présentons à la figure 1.10 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 1.11.



**Figure 1.10** – Contact 1D inélastique entre deux floes. Durant le choc, les nuds  $m$  et  $m'$  en contact sont étudiés séparément. On représente les variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , et  $x_4$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**Figure 1.11** – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 1.5 et 1.8 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.  $F_c$  représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (1.19)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de  $x_2$  et  $x_3$  pour éliminer la force de contact  $F_c$  et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (1.20a) \\ m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), & (1.20b) \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). & (1.20c) \end{cases}$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant  $x_2(t) = x_3(t)$  p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses  $m$  et  $m'$  peuvent être étudiées comme une

unique masse  $m + m'$ . La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définitions de la vitesse initiale de l'ensemble  $m + m'$ . Celà dit, nous cherchons à trouver les vitesses  $\dot{x}_1(t^+)$ ,  $\dot{x}_2(t^+)$ ,  $\dot{x}_3(t^+)$  et  $\dot{x}_4(t^+)$  immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (1.17)), nous réutilisons les quantités  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_4$  données par ce système (l'équation (1.17) dans lequel  $x_2$  et  $x_3$  sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car  $x_1$  et  $x_4$  n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité  $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$  est aussi calculé suivant le modèle équation (1.17) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous reste véritablement que 2 inconnue dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons l'équation (1.20b) entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_I. \quad (1.21)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons  $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$  et  $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$  les vitesses des noeuds en contact avant collision, et  $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$  et  $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$  les vitesses après contact. L'équation (1.21) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (1.22)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution  $\varepsilon$ <sup>4</sup>. On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 1.12.

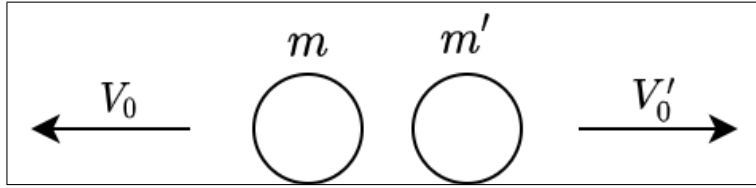


Figure 1.12 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (1.23) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (1.23)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (1.22) et (1.23) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m + \varepsilon m')v_0 + (1 - \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 - \varepsilon)m v_0 + (m' + \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (1.24)$$

Nous faisons donc ici la grosse hypothèse que le mouvement de  $x_2$  et  $x_3$  devient uniforme après la collision. Une fois leur vitesses "initiales"<sup>5</sup> obtenues, on calcule donc les déplacements des différents noeuds des réseaux, et les fractures éventuelles qui s'en suivent.

**Analyse du modèle.** Observons le premier floe de plus près :

- Son noeud de gauche  $x_1$  a pour vitesse  $v_0$  avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc ;
- Son noeud de droite  $x_2$  a pour vitesse  $v_0$  avant le choc, mais passe de façon discontinue à  $V_0$  après le choc.

N'ayant aucune garantie que les vecteurs vitesses  $v_0$  et  $V_0$  seront opposés immédiatement après le choc, nous ne pouvons garantir la convergence de ce modèle (voir théorème 1.2.1). Ce modèle dégénère (probablement)

4. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

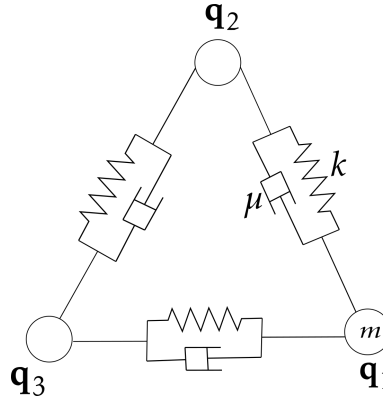
5. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour le deuxième phase de la percussion.

après la première collision. Effectuons à présent une modélisation 2D et observons si le même problème se repète.

## 1.2.2 Modélisation et simulation 2D

### 1.2.2.1 Déplacement d'un floe isolé

Étudions le comportement d'un floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts (3 ressort, 3 dispositif visieux, et 3 noeuds) (voir figure 1.13).



**Figure 1.13** – Floe de glace 2D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Tous les noeuds du réseau ont la même masse  $m$ , tous les ressorts ont la même raideur  $k$ , et tous les dispositifs visqueux ont le même coefficient  $\mu$ .

Comme nous l'avons présenté aux équations (1.28) et (E), le système de la figure 1.13 est régi par l'équation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right], \quad (1.25)$$

où  $L_{ij}$  représente la longueur au repos du ressort entre les noeuds  $i$  et  $j$ , et  $C_{ij}$  indique si les noeuds  $i$  et  $j$  sont connectés ou non (pour ce modèle 2D simple,  $C_{ij} = 1 \forall 0 \leq i, j \leq 2$ ). Le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{ij}$  vaut :

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

**Simulation par un schéma d'Euler explicite.** On discrétise par un schéma de différence finies avec  $N+1$  pas de temps, et pour une temps de simulations  $T$  :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad t^n = n\Delta t = n\frac{T}{N}, \quad \mathbf{q}_i(t^n) \approx \mathbf{q}_i^n.$$

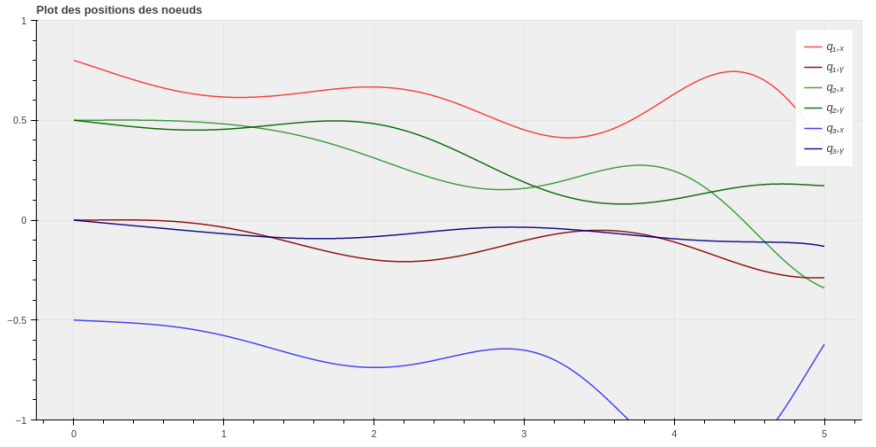
L'équation (1.25) devient :

$$m \frac{\mathbf{q}_i^{n+1} - 2\mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \frac{\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right],$$

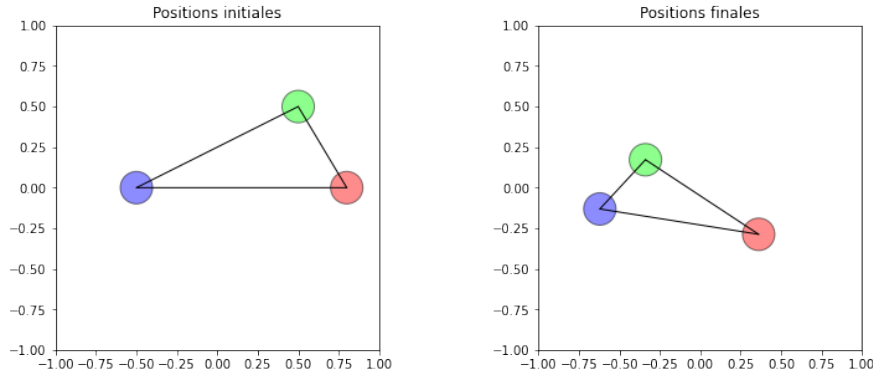
soit encore :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[ k (\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij}) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \mathbf{u}_{ij} \rangle \mathbf{u}_{ij} \right]. \quad (1.26)$$

La simulation de ce modèle par un schéma d'Euler explicite à pas constant sur un intervalle de temps faible ( $T = 4$ ) est présentée à la figure 1.14, ainsi que les positions des 2 noeuds au début et à la fin de la simulation. La simulation à la figure 1.15 permet d'observer le problème avec ce schéma ( $T = 10$ ).

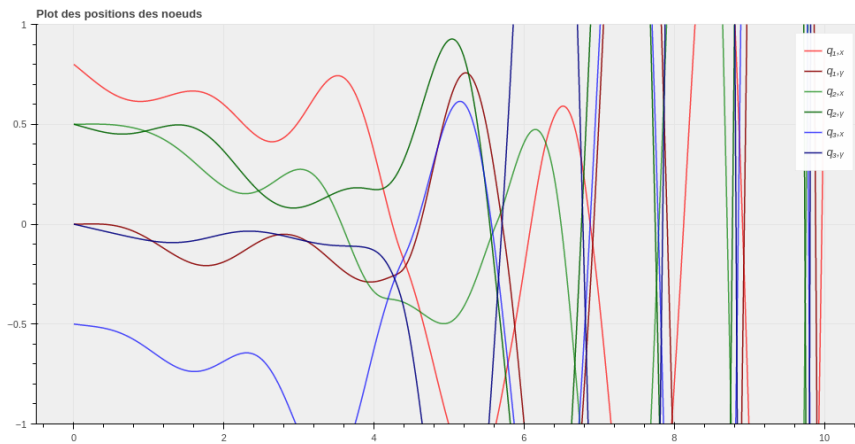


(a) Simulation des positions des noeuds.



(b) Illustration des positions initiales et finales des noeuds.

**Figure 1.14** – Simulation du système 1.26 par un schéma d'Euler explicite avec  $T = 4$ . La couleur rouge représente le noeud  $q_1$ , le vert le noeud  $q_2$ , le bleu le  $q_3$ . Les paramètres utilisés ici sont les suivants :  $m = 6.2$ ,  $k = 23.3$ ,  $\mu = 3$  ; à l'instant initial, les trois noeuds perturbés avec des vitesses d'intensité respectives  $v_1 = 0.3$ ,  $v_2 = 0.1$ , et  $v_3 = 0.1$ . Par rapport à l'axe des abscisses, ces vitesses ont des orientations respectives de  $\theta_1 = 180^\circ$ ,  $\theta_2 = 270^\circ$ , et  $\theta_3 = 240^\circ$  (voir `code/simu2D/Deplacement2D-1.ipynb`).



**Figure 1.15** – Simulation du système 1.26 par un schéma d'Euler explicite avec  $T = 10$ . Cette figure utilise les mêmes paramètres que la figure 1.14. On observe ici une divergence totale du système.

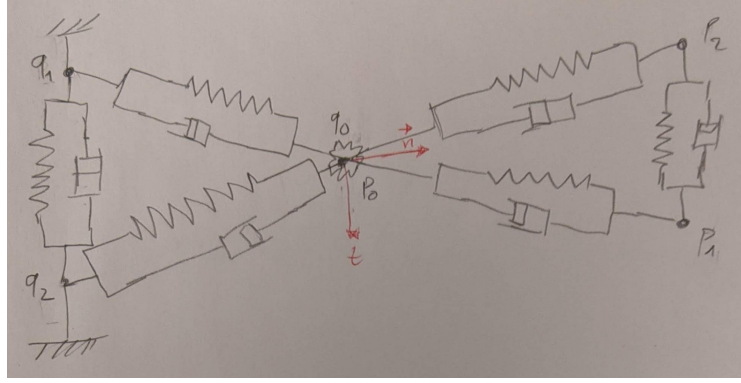


Les figures 1.14 et 1.15 permettent de constater que le schéma d'Euler explicite (peu importe son pas de temps), n'est pas adapté à ce problème. Nous étudierons donc d'autres alternatives.

**Simulation à l'aide des fonction de la librairie Scipy.** À travers ses fonction telle que `odeint` et `solve_ivp`, Scipy offre une solution robuste et élégante pour simuler les systèmes d'ODE de la forme  $Y' = AY$ .

### 1.2.2.2 Modélisation du contact entre deux floes

Les floes de glace  $\Omega_k$  et  $\Omega_l$  sont modélisés par des systèmes masse-ressort (à grande raideur). Pour l'instant, nous considérons une moélisation simplifiée qui assimile un floe à un système de (trois) masses reliés par des ressorts (de constante de raideur  $k$ ), et par des dispositifs visqueux de constante  $\mu$ . Nous désignerons par  $n + 1$  le nombre total de noeuds du floe  $\Omega_k$ , chaque noeud ayant pour masse  $m$ . De facon similaire, on définit les constantes  $k'$ ,  $\mu'$ ,  $n' + 1$ ,  $m' + 1$  pour le floe  $\Omega_l$ . Les positions des noeuds de  $\Omega_k$  seront noté  $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$ , tandis que ceux de  $\Omega_l$  seront notés  $(p_i)_{0 \leq i \leq n'}$  (voir figure 1.16).



**Figure 1.16** – Contact entre deux floes aux points  $p_0 = q_0$ .

On définit la matrice de contact  $C_{ij}$  (voir these Dimitri), et  $L_{0j}$  et  $u_{0j}$  ..

Comme présenté dans les travaux [Bal20, p.186], le système différentiel qui modélise la percussion s'écrit comme le couplage de deux sous-systèmes. Le premier, dit système intérieur (SI), est à évolution rapide et modélise la propagation des ondes élastiques dans le système masse-ressort. Ici, nous dérivons facilement et réutilisons le SI comme présenté par BALASOIU. Le second, dit système extérieur (SE), est à évolution lente et modélise la pénétration de l'objet solide dans le système masse-ressorts. Pour dériver le SE sur le floe  $\Omega_k$ , nous écrivons l'équation de Newton-Euler linéaire<sup>6</sup> au point de contact  $q_0$  :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, \quad (1.27)$$

où

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=0}^n C_{0j} \left[ \underbrace{k (\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_0\| - L_{0j}) \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de rappel}} - \underbrace{\mu \langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{u}_{0j} \rangle \mathbf{u}_{0j}}_{\text{Force de dissipation}} \right], \quad (1.28)$$

représente la somme des forces de réaction et de dissipation exercées par le ressort et le dispositif visqueux sur le noeud  $q_0$ ; et  $\mathbf{F}_0^c(t)$  la force de contact durant la collision entre les deux particules. En supposant qu'il existe un repère de contact  $\mathcal{R}^c = \{q_0, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  associé au floe  $\Omega_k$  (voir figure 1.16), on peut écrire, pour

6. La rotation du point matériel  $q_0$  n'est pas prise en compte ici, d'où l'absence de l'équation de Newton-Euler angulaire.

$(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbf{F}_0^c = \lambda \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}. \quad (1.29)$$

Le système intérieur (SE) s'obtient facilement en combinant les équations (1.27) à (1.29). Le système intérieur (SI) s'obtient lui (pour les autres noeuds du réseau) en y supprimant la force de contact. On obtient au final :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad \text{(E)} \quad \text{(SI)}$$

En ce qui concerne le floe  $\Omega_l$ , nous procédons de facons similaire et appliquons la 3ème loi de Newton (action-réaction) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}'_0 - \mathbf{F}_0^c, & \text{(SE)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \end{cases} \quad \text{(E')} \quad \text{(SI)}$$

où  $(\mathbf{F}'_i)_{0 \leq i \leq n'}$  sont définis de facon similaire à  $\mathbf{F}_0$  (voir équation (1.28)) :

$$\mathbf{F}'_i = \sum_{j=i}^{n'} C_{ij} \left[ k' (\|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i\| - L'_{ij}) \mathbf{u}'_{ij} - \mu' \langle \dot{\mathbf{p}}_j - \dot{\mathbf{p}}_i, \mathbf{u}'_{ij} \rangle \mathbf{u}'_{ij} \right]. \quad (1.30)$$

Ensuite, on additionne membre à membre les équations des systèmes extérieurs (SE) de équations (E) et (E') pour éliminer la force de contact. On obtient :

$$m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0. \quad (1.31)$$

Remarquons que les positions relatives des noeuds  $\mathbf{q}_0$  et  $\mathbf{p}_0$  restent inchangées durant la collision. A l'instant initial, on note donc  $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0)$ ; ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{q}_0(t) - \mathbf{p}_0(t) = \Delta_0. \quad (1.32)$$

Nous avons aisni obtenu les  $n + n' + 2$  équations nécessaire pour que notre problème de percussioin soit bien posé. Elles sont :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{q}}_0 + m'\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}'_0, & \text{(SE)} \\ \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0 = \Delta_0, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i, & \forall 1 \leq i \leq n. \quad \text{(SI)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}'_i, & \forall 1 \leq i \leq n', \quad \text{(SI)} \end{cases} \quad \text{(P)}$$

Ensuite, il nous faut introduire des conditions portant sur la conservation de l'énergie, et la condition de non-interpénétration de Signorini...

# Bibliographie

- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.
- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/ae3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.