

RAPPORT DE STAGE

Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Étudiant
Roussel Desmond NZOYEM

Superviseur
Stéphane LABBÉ

Enseignant référent
Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

15 mars 2021

Remerciements

Table des matières

Remerciements	ii
1 État de l'art	1
1.0.1 Un processus stochastique de maillages isotropes	1
1.0.2 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope	4
1.0.3 Discussion	7
Bibliographie	8

Chapitre 1

État de l'art

1.0.1 Un processus stochastique de maillages isotropes

Le résumé du chapitre écrit dans [Bal20, p.136] est le suivant. Ce chapitre fait appel à des outils fin de probabilité conditionnelle et de processus stochastiques, telles que *mesure et formules de Campbell, distribution de Palm, etc.*

Dans ce chapitre, BALASOIU a construit un processus stochastique de maillage, qui à chaque tirage associe un maillage de Delaunay. Il comence par donner plusieurs formules de calcul, les deux formules de Campbell ainsi que la formule de Slivnyak-Mecke, qui permettent de calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui s'écrit comme la somme d'une fonction en chaque point du maillage. Ces formules nous se montrerons très utiles pour le calcul de l'énergie élastique d'un réseau de ressorts basé sur ce processus de maillage.

La notions de processus ponctuel est un outil qui peut permettre de construire un ensemble de points dénombrable, sans point d'accumulation. BALASOIU définit un **processus stochastique simple de \mathbb{R}^d** comme : une variable aléatoire Φ d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans l'espace (Ω, \mathcal{N}) . Elle induit une loi de probabilité \mathbb{P}_Φ sur (Ω, \mathcal{N}) : l'espace $(\Omega, \mathcal{N}, \mathbb{P}_\Phi)$ est un espace de probabilités. Dans cette définition, nous avons :

- Ω est ensemble des parties localement finies de \mathbb{R}^d . Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des motifs de points de \mathbb{R}^d ;
- \mathcal{N} est la plus petite tribu (sur Ω) qui rende mesurable les applications qui comptent le nombre de points du processus.

Une fois le processus défini, on peut définir sa **mesure d'intensité Λ** :

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \\ B &\mapsto \mathbb{E}(\Phi(B)) = \mathbb{E}(\text{Card } \Phi \cap B), \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}(F)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

La première formule de Campbell permet de relier la moyenne d'une somme sur les points du processus avec l'intensité du processus. En effet, soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive, on a :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(x) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\Lambda(x).$$

Un processus stochastique ponctuel Φ est dit de Poisson (cf. figure 1.1) s'il vérifie les hypothèse suivantes :

1. Φ est à éparpillement indépendant, c'est à dire que si $(B_i)_{i \in 1, \dots, k}$ sont des boréliens deux à deux disjoints ; alors les variables aléatoires $\Phi(B_i)$ sont indépendantes ;

2. pour tout B borélien, la variable aléatoire $\Phi(B) = \text{Card } \Phi \cap B$ suit une loi de poisson de moyenne $\mu = \lambda \nu_d(B)$, c'est à dire que :

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m}{m!} \exp(-\mu).$$

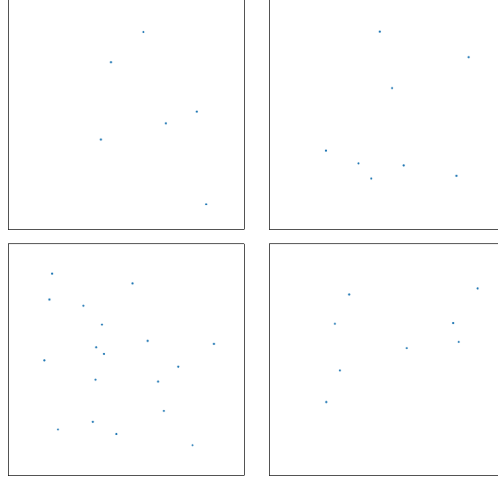


FIGURE 1.1 – Tirages d'un processus de Poisson d'intensité 10 sur le carré unité [Bal20, p.137]. En premier, le nombre de point est obtenu par une v.a. suivant une loi de Poisson d'espérance 10. Ensuite les coordonnées des points sont obtenus par simulation de deux v.a. suivant des lois uniformes [keeler2018simu].

BALASOIU ne s'arrête pas là. Il définit aussi les notions d'espace Polonais, mesure de comptage, et de convergence faible dièse. Ces notions sont importantes vu la nécessité d'associer un point du processus ponctuel à une marque, i.e. un simplexe de \mathbb{R}^d dans notre cas. BALASOIU introduit les notions de mesure de Campbell, qui permet d'obtenir la seconde formule de Campbell. Ensuite il définit la distribution de Palm, permettant ainsi d'obtenir la très importante formule de Campbell-Mecke :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(x, \Phi) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_x(\varphi) d\Lambda(x).$$

où $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, mesurable et positive. Lorsque le processus ponctuel Φ est stationnaire d'intensité λ , on a :

$$\int_{\Omega} \sum_{x \in \varphi} f(x, \varphi_{-x}) d\mathbb{P}_{\Phi}(\varphi) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} f(x, \varphi) d\mathbb{P}_0(\varphi) d\Lambda(x).$$

où \mathbb{P}_0 désigne la distribution de Palm. Le résultat de Slynvyak-Mecke suivant est une généralisation de cette dernière formule, lorsque le processus Φ est de Poisson, et la fonction mesurable positive $f : (\mathbb{R}^d)^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi} f(x_1, \dots, x_n, \Phi) \right) = \frac{\lambda^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}(f(x_1, \dots, x_n, \Phi \cup \{x_1, \dots, x_n\})) dx_1 \dots dx_n.$$

La prochaine étape consiste en la présentation d'un **theoreme ergodique** qui lie la forme globale d'un seul tirage avec la forme moyenne en un point de plusieurs tirages. Ici aussi, BALASOIU se base sur les travaux de D. J. Daley et D. Vere-Jones [DV08].

Theorem 1.0.1 Soit Φ un processus de Poisson, et f une fonction mesurable et positive qui vérifie :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{x \in \Phi} f(\Phi_{-x}) \right) < +\infty.$$

On note B_n la boule de \mathbb{R}^d , centrée en 0 et de rayon n . On a presque sûrement la formule suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(B_n)} \sum_{x_i \in B_n \cap \Phi} f(\Phi_{-x_i}) = \int_{\Omega} f(\varphi) d\mathbb{P}_0(x).$$

Ensuite, BALASOIU s'attaque aux notions de maillages et pavages, en particulier les **pavages de Voronoi** (cf. figure 1.2). Les maillages construits suivent une loi isotrope. En moyenne sur les tirages, toutes les directions des arrêtes sont donc équitablement représentées. Un théorème ergodique permettra de transférer cette isotropie moyenne en isotropie presque sûre si l'on dilate le maillage, autrement dit si on le regarde de suffisamment loin.

Soit donc $\varphi \in \Omega$ un ensemble localement fini de points. On appelle diagramme de Voronoi associé à φ le pavage régulier de \mathbb{R}^d par $(C(x))_{x \in \varphi}$ où la cellule $C(x)$ est définie par :

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(y, x) < \inf_{z \in \varphi \setminus \{x\}} \text{dist}(y, z) \right\}.$$

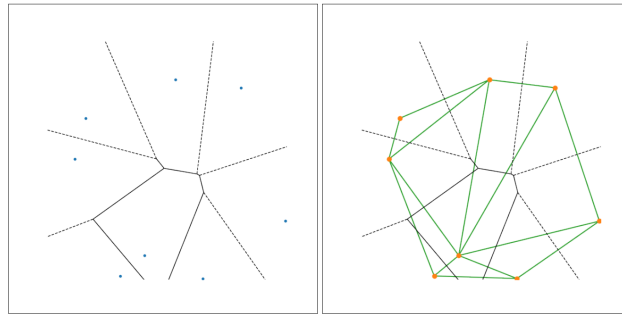


FIGURE 1.2 – Ensemble de points avec les diagramme de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) associés [Bal20, p.138].

En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (cf. théorème 1.0.1), BALASOIU montre que si Φ est un processus de Poisson, alors les points de φ sont presque sûrement en **position générale**¹. En corrolaire, si φ est un ensemble de points en position générale, alors φ est l'ensemble des sommets du **maillage de Delaunay**² D_φ construit sur le pavage de Voronoi V_φ .

Ce chapitre se termine par la notion de convergence d'une suite de maillages. BALASOIU montre que, si l'on dilate (cf. figure 1.3) le processus de Poisson-Delaunay initial et qu'on en restreint les réalisations à un domaine du plan, nous obtenons une suite de processus stochastiques dont les réalisations convergent presque sûrement vers le domaine fixé. Il a également donné un contrôle asymptotique de la taille minimale des mailles obtenues dans cette suite de processus de maillages. Ce contrôle sera utile dans le chapitre suivant, pour calibrer le redimensionnement utilisé pour traduire l'hypothèse des petits déplacements sur le réseau de ressorts.

Soit donc $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine, i.e. un ouvert connexe, de l'espace. Soit Φ un processus ponctuel de l'espace qui suit une loi de Poisson d'intensité 1. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ une suite positive, croissante et divergente. On définit,

1. Voir définition 4.4.5 de la thèse [Bal20, p.128].

2. Une triangularisation de Delaunay maximise le plus petit angle de l'ensemble des angles des triangles.

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le processus ponctuel Φ_n par :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}} \Phi.$$

On note τ_n (cf. figure 1.3) le maillage par simplexe définit presque sûrement comme la triangulation de Delaunay du nuage de points $\Phi_n \cap D$:

$$\tau_n = \Theta_{\Phi_n \cap D},$$

ce qui permet d'obtenir le théorème suivant :

Theorem 1.0.2 *Si la suite d'intensités $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \quad n^{1/k} = o(\lambda_n),$$

alors, presque sûrement, la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de maillages de D converge uniformément vers D .

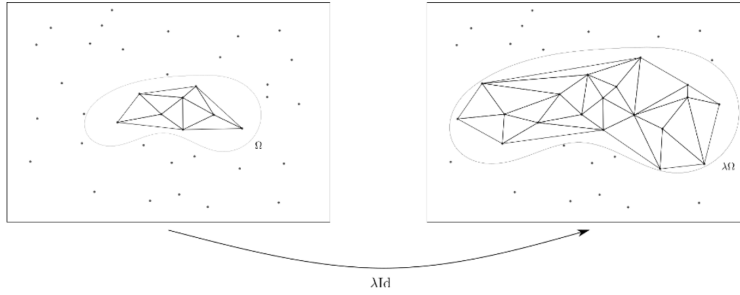


FIGURE 1.3 – Dilatation de l'ouvert D [Bal20, p.138].

1.0.2 Étude asymptotique d'un réseau de ressorts isotrope

Dans cette partie, BALASOIU propose un second résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau de ressorts. Dans la partie précédente, il avait proposé un résultat d'approximation d'un matériau élastique par un réseau régulier, à mailles carrées. Ici, les mailles seront triangulaires. Plus précisément Le réseau de ressorts que nous utiliserons dans ce chapitre est défini dans la section précédente, et repose sur la théorie des processus stochastiques ponctuels. Nous proposons dans ce chapitre un résultat de Γ -convergence de l'énergie élastique sur un réseau de ressorts, issu d'un processus stochastique de loi isotrope.

Dans cette section, on présente le réseau de ressorts utilisé pour approcher l'énergie élastique d'un matériel continu D . Il s'agit des mêmes définitions utilisées pour introduire le théorème 1.0.2 ci-haut, cette fois ci en dimension 2. On suppose que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine du plan, i.e. un ouvert du plan, qui est connexe et dont la frontière est lisse. On considère une triangulation quelconque τ du domaine D . On note $W(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'espace des éléments finis $P1$ défini sur le maillage τ . On note, comme précédemment, $W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des déplacements admissibles :

$$W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall w \in \tau, \forall q_1, q_2 \in \tau_0 \cap \overline{w}, q_1 \neq q_2, \quad q_1 + u(q_1) \neq q_2 + u(q_2) \right\}$$

On souhaite construire un réseau de ressorts sur τ tel que l'énergie totale E_τ soit équi-coercive. Mais puisque l'on utilisera des triangulations construites sur un processus de Poisson, la coercivité n'est pas assurée. Pour remédier à ce manque de coercivité, on va placer sur τ deux types de ressorts : des **ressorts de traction** et des **ressorts de torsion**. Les constantes de raideur des ressorts de traction et de torsion dépendent des angles du triangle de base des ressorts, et elles tendent vers l'infini si l'angle correspondant tend vers 0. Les constantes de rigidité des réseaux de ressorts sont supposées constantes. On note, comme au chapitres précédents, R_τ

l'énergie du réseau de ressorts de traction, et T_τ l'énergie du réseau de ressorts de torsion. On note de plus :

$$E_\tau = R_\tau + T_\tau,$$

l'énergie totale sur le réseau τ . On note également, pour tout triangle $t \in \tau_2$ du maillage, v_1 , v_2 et v_3 ses trois cotés, ainsi que θ_1 , θ_2 et θ_3 les trois angles opposés (voir figure 1.4a).

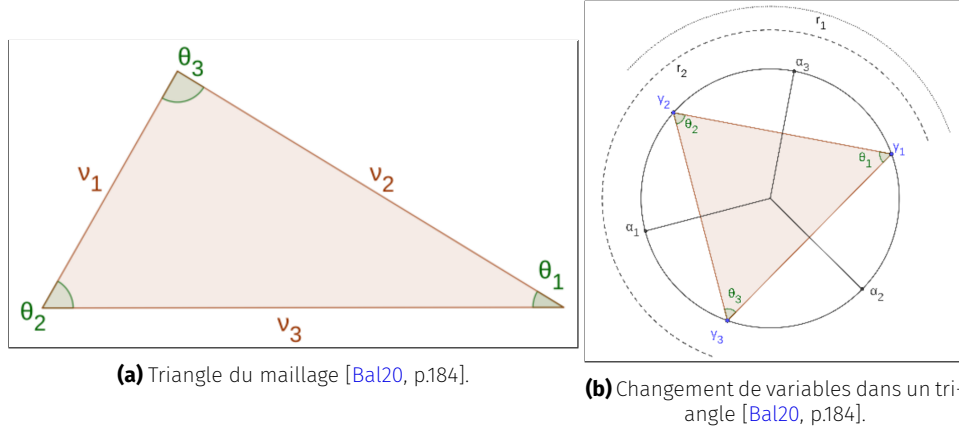


FIGURE 1.4 – Illustration des éléments du maillages, et des coordonnées.

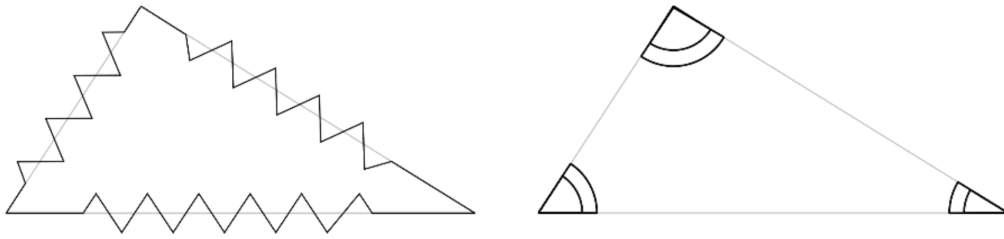


FIGURE 1.5 – Ressorts de traction (à gauche) et de torsion (à droite) [Bal20, p.184].

On commence par définir l'énergie élastique du réseau de ressorts de traction R_τ , et on renvoie à la figure 1.5. On note $k > 0$ la constante de rigidité du réseau. On place, sur chaque arête v_i de chaque triangle t du maillage, un ressort de traction de longueur à vide $l_i = |v_i|$ et de raideur k_i , avec :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad k_i = \frac{k}{\sin(\theta_i)}.$$

Si $\varphi \in W(\tau, \mathbb{R}^2)$ est une déformation du réseau de ressort, et $u = \varphi - \text{Id}$ est le déplacement associé, l'énergie élastique discrète de l'assemblage vaut :

$$R_\tau(u) = \sum_{t \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{k|v_i|^2}{2 \sin(\theta_i)} \left(\|\nabla \varphi e_{v_i}\| - 1 \right)^2.$$

On définit maintenant l'énergie T_τ , et on renvoie aux figures 1.4b et 1.5. On note $G > 0$ la constante de rigidité de torsion du réseau. On place, sur chaque angle i de chaque triangle t du maillage, un ressort de torsion de raideur G_i :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_i = \frac{G|v_{i+1}||v_{i+2}|}{\sin(\theta_i)}.$$

On définit l'énergie élastique discrète de l'assemblage :

$$T_\tau(u) = \sum_{i \in \tau_2} \sum_{i=1}^3 \frac{G|v_{i+1}||v_{i+2}|}{2 \sin(\theta_i)} \left(\angle(\varphi(v_{i+1}), v_{i+2}) - \angle(v_{i+1}, v_{i+2})^2 \right),$$

avec $\angle(\cdot, \cdot)$ l'angle entre deux vecteurs du plan. Ensuite, on étend les énergies élastiques définies sur les réseaux à $H^1(D, \mathbb{R}^2)$, en notant :

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) & \text{si } u \in W(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) & \text{si } u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

On définit maintenant la suite d'énergies élastiques définies sur la suite des réseaux $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On introduit un changement d'échelle des énergies $(E_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour prendre en compte l'hypothèse des petits déplacements. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive qui tend vers 0. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} R_{\tau_n}(\varepsilon_n u), & u &\mapsto \varepsilon_n^{-2} T_{\tau_n}(\varepsilon_n u), \end{aligned}$$

et on pose :

$$E_n = R_n + T_n$$

On donne enfin une version modifiée des suites fonctionnelles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui prenne en compte une condition de Dirichlet sur le bord de D . Soit donc $v \in \text{Lip}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la donnée du bord. On note :

$$W_n^v(\tau, \mathbb{R}^2) = \left\{ u \in W_{\text{adm}}(\tau, \mathbb{R}^2) \mid \forall p \in \tau_0, \text{dist}(p, \partial D) \leq \lambda_n, u(p) = v(p) \right\}.$$

On pose ensuite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} & T_\tau^v : H^1(D, \mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \begin{cases} R_\tau(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} & u &\mapsto \begin{cases} T_\tau(u) & \text{si } u \in W_n^v(\tau_n, \mathbb{R}^2), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi que

$$E_n^v = R_n^v + T_n^v.$$

On énonce maintenant les trois théorèmes principaux du chapitre.

Theorem 1.0.3 (Convergence simple) *On a presque sûrement la propriété suivante. Pour toute fonction $u \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, il existe une suite de déplacements discrets $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admissibles, i.e. :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in W_{\text{adm}}(\tau_n, \mathbb{R}^2),$$

et qui vérifie de plus :

$$\forall u \in C^1(D, \mathbb{R}^2), \quad E_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_s(u)$$

avec :

$$E_s(u) = \int_D K_{\lambda, \mu} e(u) : e(u) \, dx,$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le tenseur de Lamé du matériau, qui vérifie :

$$\forall e \in M_2(\mathbb{R}^2), \quad K_{\lambda, \mu} e : e \lambda \text{tr}(e)^2 + 2\mu \text{tr}(e)^2,$$

avec λ et μ les premières et deuxième constantes de Lamé, qui valent :

$$\lambda = \frac{32k|A|}{9\pi^2} + \frac{3G|A|}{4}, \quad \mu = \frac{32k|A|}{9\pi^2} - \frac{3G|A|}{4}$$

.

1.0.3 Discussion

Plusieurs hypothèses sont faites dans la thèse :

1. Le modèle suppose que les floes sont d'épaisseur négligeable devant leur extension horizontale; autrement dit, les déformations du floe de glace peuvent être étudiées en deux dimensions.
2. Le modèle restreint l'ensemble des fractures admissibles à celui des segments de droites.

Bibliographie

- [Bal20] Dimitri BALASOIU. « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Theses. Université Grenoble Alpes [2020-....], oct. 2020. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116132>.