



## RAPPORT DE STAGE

---

# Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

---

### *Étudiant*

Roussel Desmond NZOYEM

### *Superviseur*

Stéphane LABBÉ

### *Enseignant référent*

Christophe PRUD'HOMME



*Stage effectué au Laboratoire Jacques-Louis Lions;  
du 03 février 2021, au 31 juillet 2021;  
pour l'obtention du master 2 CSMI.*

Année académique 2020 - 2021

3 août 2021

## *Remerciements*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	1
1.3 Environnement . . . . .	1
1.4 Objectifs . . . . .	1
1.5 Résumé de l'introduction en Anglais . . . . .	1
<b>2 État de l'art</b>	<b>2</b>
2.1 Position du problème . . . . .	2
2.2 Résumé de thèse de M. Rabatel . . . . .	2
2.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu . . . . .	2
2.4 Résumé de l'Etat de l'art . . . . .	2
<b>3 Problème 1D et étude de la fracture</b>	<b>3</b>
3.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé . . . . .	3
3.2 Modélisation de la percussion . . . . .	7
3.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial . . . . .	7
3.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur . . . . .	9
3.2.3 Premier modèle pour la collision avec séparation des masses . . . . .	10
3.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses . . . . .	12
3.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses . . . . .	13
3.3 Modélisation de la fracture . . . . .	13
3.4 Algorithme de calcul 1D . . . . .	13
3.5 Visualisation et validation des résultats . . . . .	13
3.6 Résumé des résultats obtenus . . . . .	14
<b>4 Problème 2D et percussion des floes de glace</b>	<b>15</b>
4.1 Présentation des travaux antérieurs . . . . .	15
4.2 Développement d'un modèle de percussion . . . . .	15
4.3 Algorithme de calcul 1D . . . . .	15
4.4 Résumé des résultats obtenus . . . . .	15
<b>5 Déroulement et apports du stage</b>	<b>16</b>
5.1 Journal de bord . . . . .	16
5.2 Bilan et future travail . . . . .	16
5.3 Les apports du stage . . . . .	16
<b>6 Conclusion</b>	<b>17</b>

<b>A</b>	<b>Rappels sur les EDO</b>	<b>18</b>
<b>B</b>	<b>Le schéma Symplectique</b>	<b>19</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>20</b>

# **Chapitre 1**

## **Introduction**

**1.1 Contexte**

**1.2 Problématique**

**1.3 Environnement**

**1.4 Objectifs**

**1.5 Résumé de l'introduction en Anglais**

## **Chapitre 2**

# **État de l'art**

### **2.1 Position du problème**

### **2.2 Résumé de thèse de M. Rabatel**

### **2.3 Résumé de thèse de D. Balasoiu**

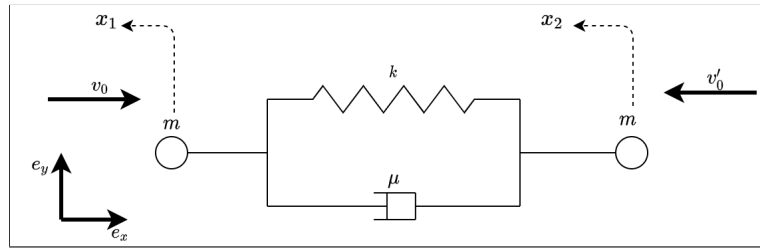
### **2.4 Résumé de l'Etat de l'art**

## Chapitre 3

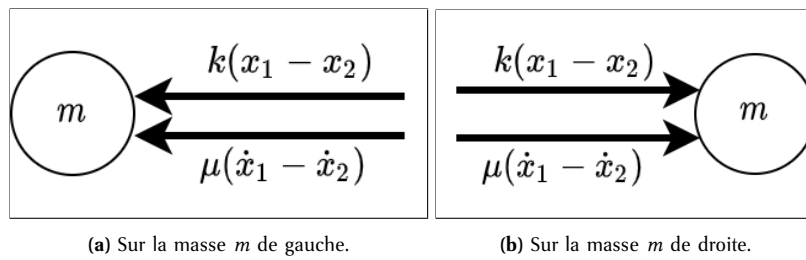
# Problème 1D et étude de la fracture

### 3.1 Modélisation du déplacement d'un floe isolé

Avant d'entamer la question de la percussion avec séparation des masses (voir section 3.2.3), étudions le comportement d'un floe de glace 1D isolé et modélisé par un réseau de ressorts (1 ressort, 1 dispositif visqueux, et 2 noeuds) (voir figure 3.1).



**Figure 3.1** – Floe de glace 1D modélisé par un réseau de ressorts. Le floe est isolé de toutes forces extérieures. Les variables  $x_1$  et  $x_2$  traduisent les déplacements des noeuds de gauche et de droite respectifs. À l'instant initial, les masses sont soumises aux vitesses  $v_0$  et  $v'_0$  indiquées.



**Figure 3.2** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces (par exemple juste après l'instant initial, on a  $x_1 > 0$ , et  $x_2 < 0$  d'où  $k(x_1 - x_2) > 0$ ).

Un bilan des forces effectué sur les deux noeuds du floe (voir figure 3.2) permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{cases} \quad (3.1)$$

En remarquant que  $m \neq 0$ , on passe à la forme matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{k}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\mu}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

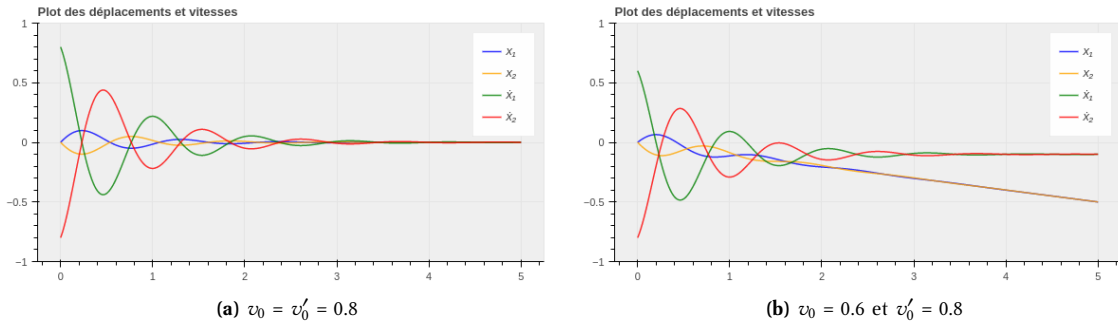
On pose ensuite la matrice par blocs :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \text{où } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On pose maintenant  $Y = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^4$ , et on reprend la condition initiale pour obtenir le système de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, v_0, -v'_0)^T. \end{cases} \quad (3.3)$$

La solution numérique est présentée dans la figure 3.3 (voir fichier code/simu1D/Deplacement1D-1.ipynb pour plus de détails). La plus grosse remarque à faire du point de vue numérique est que lorsque  $v_0 \neq v'_0$ , les vitesses convergent vers 0, mais les déplacements divergent.



**Figure 3.3** - Simulation du déplacement 1D d'un floe avec  $m = 1$ ,  $k = 18$ ,  $\mu = 1.3$ ,  $t_f = 5$ . En règle générale, on observe le ralentissement du système et une convergence des déplacements vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$  lorsque  $v_0 = v'_0$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution analytique de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par.

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0. \quad (3.4)$$

Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** (Convergence du modèle 1D isolé). *Les déplacements  $x_1$  et  $x_2$  des noeuds du floe 1D convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont des vecteurs opposés.*

*Démonstration.* Le calcul des solution analytique est plus délicat. Il faudrait calculer l'exponentielle de la matrice  $E$ . Pour cela, nous devons diagonaliser (ou du moins trogonaliser) la matrice  $E$ . Son polynome



caractéristique est donné par :

$$\begin{aligned} \det(E - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\lambda^2}{m} (m\lambda^2 + 2\mu\lambda + 2k). \end{aligned}$$

Posons  $\Delta = 4\mu^2 - 8km$ . On distingue deux cas :

- Si  $\Delta \geq 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 2km}}{m}$  ;
- Si  $\Delta < 0$  : on pose  $\lambda_1 = \frac{-\mu - i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-\mu + i\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ .

Nous avons donc exhiber les trois valeurs propres de notre matrice :  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1$ , et  $\lambda_2$ . Avec  $\lambda$  désignant l'une des valeurs propres, on recherche les vecteurs  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$  appartenant aux sous espaces propres  $E_\lambda$ . On a :

$$Ex = \lambda x \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ -(k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_1 + (k + \mu\lambda)x_2 = 0 \\ (k + \mu\lambda)x_1 - (k + \mu\lambda + m\lambda^2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

- Pour  $\lambda = 0$ , l'équation (3.5) revient à :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit  $E_0 = \text{vect}\{e_1\}$ , avec  $e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ .

- Pour  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ , on remarque que  $k + \mu\lambda + m\lambda^2 = -(k + \mu\lambda)$ . l'équation (3.5) revient donc à :

$$\begin{cases} x_3 = \lambda x_1 \\ x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc  $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{e_3\}$ , avec  $e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$ ; et  $E_{\lambda_2} = \text{vect}\{e_4\}$  avec  $e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$ .

La meutlisicté arithmetique de  $\lambda = 0$  est differente de sa multiplicité géométrique. La matrice  $E$  n'est donc pas diagonalisable. Son polynome caractéristique étant scindé, nous alons la trigonaliser. On pose donc une base  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  dans laquelle la matrice  $E$  s'exprime par :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & \lambda_1 & f \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  (notée  $\mathcal{B}$ ) à  $\mathcal{B}'$ . On a :

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_1$  s'écrit  $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_1 = 0$ .  $v_1$  est donc le vecteur propre associé à 0 et on prend  $v_1 = e_1 = (1, 1, 0, 0)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_2$  s'écrit  $v_2 = (0, 1, 0, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_2 = av_1$ . On retourne dans  $\mathcal{B}$  en posant  $v_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  pour obtenir le système :

$$Ev_2 = av_1 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = a \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Avec  $a = 1$ , on écrit  $v_2 = e_2 = (1, 1, 1, 1)^T$ .

- Dans  $\mathcal{B}'$ , le vecteur  $v_3$  s'écrit  $v_1 = (0, 0, 1, 0)^T$  et on a  $P^{-1}EPv_1 = \lambda_1 v_1 + bv_1 + dv_2$ . En posant  $b = d = 0$ ,  $v_1$  devient un vecteur propre associé à  $\lambda_1$  et on prend  $v_3 = e_3 = (1, -1, \lambda_1, -\lambda_1)^T$  dans  $\mathcal{B}$ ;
- De façon similaire, on obtient  $v_4 = e_4 = (1, -1, \lambda_2, -\lambda_2)^T$  en posant  $c = e = f = 0$ .

Nous avons donc trigonaliser la matrice  $E$ , et on écrit :

$$P^{-1}EP = A, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  se décompose en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente  $A = D + N$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant  $E = P(D + N)P^{-1}$ , nous pouvons facilement calculer  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tE) = P \exp(tD) \exp(tN) P^{-1}$ . Ce calcul délicat donne (à l'aide du logiciel de calcul symbolique Symbolab) :

$$\exp(tE) = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} \\ -\lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_1 e^{t\lambda_2} & \lambda_2 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) + e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2} & t(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{t\lambda_1} + e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}) & \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 e^{t\lambda_2} & -\lambda_1 e^{t\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons nous que la solution du problème de Cauchy équation (3.3) est donnée par  $Y(t) = \exp(tE)Y_0$ , avec  $Y_0 = (0, 0, v_0, -v'_0)$ . Le calcul du déplacement  $x_1$  donne :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} (v_0 + v'_0). \quad (3.6)$$

Le cas où  $\Delta < 0$  (à étudier dans  $\mathbb{C}$ ) peut se ramener au cas réel (dans  $\mathbb{R}$ ) en posant  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta = \bar{\lambda}_1$  (avec  $\alpha = -\frac{\mu}{m}$  et  $\beta = -\frac{\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$ ). En remarquant que  $\sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$ , on obtient :

$$x_1(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) + \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0). \quad (3.7)$$

Les équations (3.6) et (3.8) permettent d'observer que le déplacement  $x_1$  ne converge pas lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , à moins que  $v_0 = v'_0$ , ce qui est observé à la figure 3.3. Pour le déplacement du deuxième noeud, on a :

$$x_2(t) = \frac{t}{2} (v_0 - v'_0) - \frac{e^{\alpha t} \sin(\beta t)}{2\beta} (v_0 + v'_0); \quad (3.8)$$

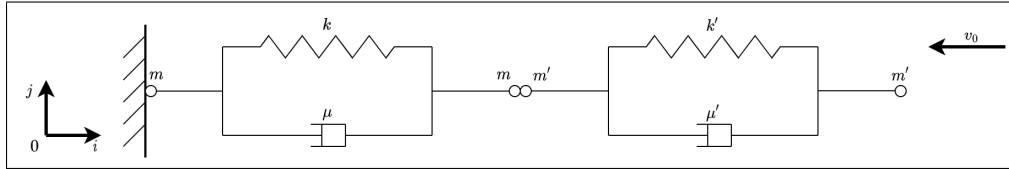
On tire les mêmes conclusions en effectuant un raisonnement similaire.

□

## 3.2 Modélisation de la percussion

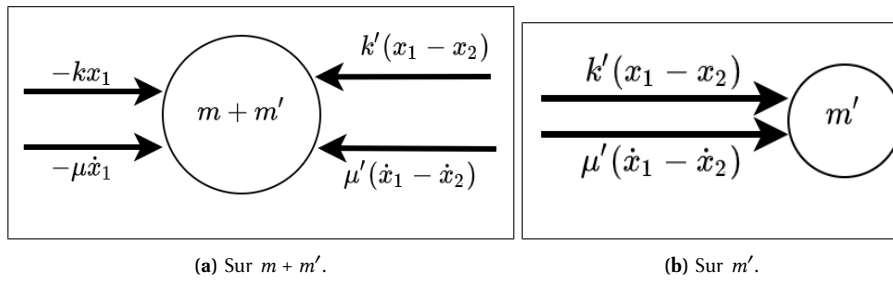
### 3.2.1 Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré à l'instant initial

Nous effectuons ici une modélisation 1D de notre problème. Un floe est modélisé par un système masse-ressort de deux nuds. Le floe 1 est immobilisé face au mur, et le floe 2 approche à la vitesse  $v_0$ . On identifie les nuds  $q_0$  et  $p_0$  de la section précédente à leur masses respectives  $m$  et  $m'$  (voir figure 3.4).



**Figure 3.4** - Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant immobile et coincé au mur avant le choc.

On suppose que durant la dynamique non régulière, les masses  $m$  et  $m'$  en contact forment une seule masse<sup>1</sup>  $m + m'$  dont le déplacement est donné par la variable  $x_1(t)$ . Le déplacement de la masse  $m'$  à l'autre bout du floe percuteur est nommé  $x_2(t)$ . La masse  $m$  qui est fixée au mur ne sera pas étudiée ici. Nous faisons à présent le bilan des forces qui s'exercent ces deux masses.



**Figure 3.5** - Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. Les valeurs indiquées sont les intensités (positives) des forces durant une phase imaginée de compression des ressorts ( $v_0 < 0$  et donc  $x_1 < 0$ ). Pour obtenir l'intensité de la force de rappel du ressort  $k'$ , on peut imaginer  $x_1$  immobile (on aura  $x_2 < 0$ , d'où  $x_1 - x_2 > 0$ ) (voir [Hol0]).

En orientant convenablement le système (voir figure 3.4), on applique la loi de Newton-Euler linéaire pour obtenir le système suivant et ses conditions initiales<sup>2</sup> :

$$\begin{cases} (m + m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \quad (3.9)$$

À l'instant initial  $t_0$ , on a le système suivant

$$\begin{cases} (x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0) \\ (\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) = (0, -v_0) \end{cases} \quad (3.10)$$

1. Cette simplification a pour principal avantage de supprimer le traitement de la force de contact entre les deux masses.  
2. J'ai des doutes sur cette condition initiale. La vitesse initiale de  $x_1$  est-elle vraiment nulle?

En posant  $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ , l'équation (3.10) devient

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m + m' & 0 \\ 0 & m' \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu - \mu' & \mu' \\ \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -k - k' & k' \\ k' & -k' \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible et on obtient au final le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = B' \dot{X}(t) + C' X(t), \\ (X(t_0), \dot{X}(t_0)) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0 \end{pmatrix} \right), \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ .

Il s'agit là d'un système d'EDO du deuxième ordre à coefficients constants. Transformons le en un système du premier ordre pour une résolution plus aisée. On pose donc  $Y = (X, \dot{X})^T = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T \in \mathbb{R}^4$  et le système 3.12 devient

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t) \\ Y_0 = Y(t_0) = (0, 0, 0, -v_0)^T \end{cases} \quad (3.13)$$

avec la matrice par blocs

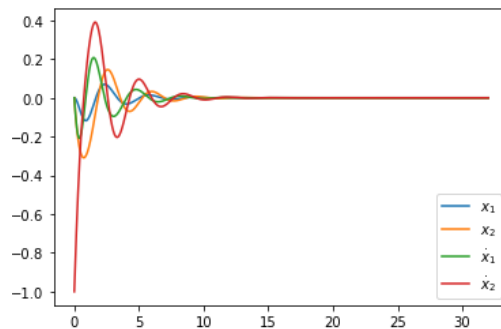
$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ C' & B' \end{pmatrix},$$

où  $I_2$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Avec  $t_0 = 0$ , la solution de ce système d'EDO du premier ordre à coefficients constants est unique et est donnée par

$$Y(t) = \exp(tE)Y_0 \quad (3.14)$$

La résolution analytique du système passe par le calcul de l'exponentielle de la matrice  $E \in \mathbb{R}^4$ , ce qui s'avère difficile du à la taille de ladite matrice. Nous optons donc pour une solution numérique (voir figure figure 3.6 issue du notebook `code/simu1D/Percussion1D-1.ipynb`) ...



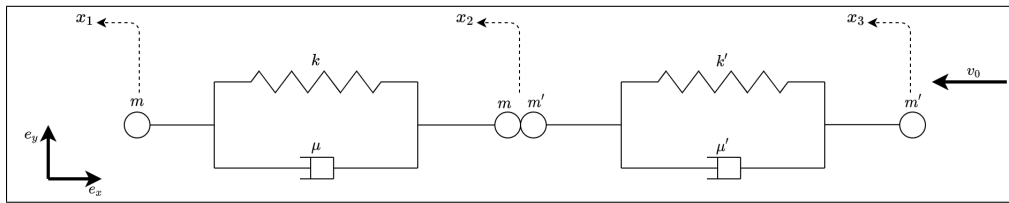
**Figure 3.6** – Simulation de la percussion 1D entre deux floes avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k = 16$ ,  $k' = 5$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.0$ ,  $t_f = 32$ . On observe effectivement le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ .

Pour certaines valeurs (specifiquement de  $\mu$  et  $\mu'$ ), on constate que le système converge vers son état d'équilibre attendu  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0)$ . Il nous reste dans cette section :

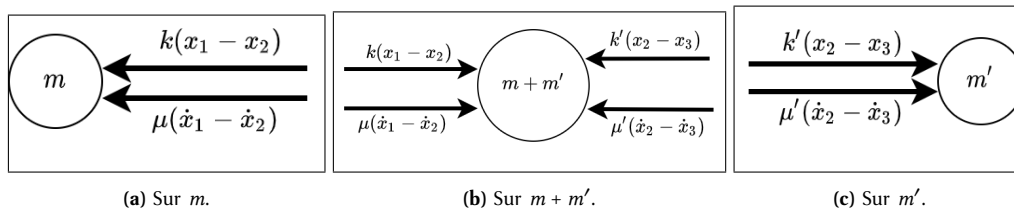
1. Calculer analytiquement et numériquement tous les état d'équilibres  $Y_{eq} \in \ker(E)$ ; distinguer les états stables des autres.
2. Calculer analytiquement l'exponentielle de la matrice  $E$ , et donner l'expression de la solution; déduire la condition sur les parametres pour que le système converge vers l'état d'équilibre voulu.

### 3.2.2 Collision parfaitement inélastique sans présence du mur

Contrairement au cas étudié dans la section précédente, le mur est supprimé dans cette section. On obtient donc une troisième variable  $x_3$  décrivant le comportement du noeud qui était rattaché au mur. La schéma régissant ce système est donnée à la figure 3.7. Le bilan des forces appliquées aux noeuds est présenté à la figure 3.8.



**Figure 3.7** – Contact 1D parfaitement inélastique entre deux floes. Le floe percuté étant non immobile (et non coincé au mur) avant le choc. On représente également les variables  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $x_3$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**Figure 3.8** – Bilan des forces appliquée sur les noeuds du système. On procède de façon similaire à figure 3.5 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3), \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3). \end{cases} \quad (3.15)$$

Sous forme matricielle, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m + m' & 0 \\ 0 & 0 & m' \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k & k & 0 \\ k & -k - k' & k \\ 0 & k' & -k' \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \mu & -\mu - \mu' & \mu' \\ 0 & \mu' & -\mu' \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}. \quad (3.16)$$

Puisque  $m, m' \neq 0$ , la matrice  $A$  est inversible. En posant  $X = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , le système d'EDO revient à l'équation (3.17) suivante :

$$\ddot{X}(t) = B'X(t) + C'\dot{X}(t), \quad (3.17)$$

où  $B' = A^{-1}B$  et  $C' = A^{-1}C$ . On pose ensuite  $Y = (X, \dot{X})^T \in \mathbb{R}^6$  et le système équation (3.17) devient

$$\dot{Y}(t) = EY(t) \quad (3.18)$$

avec

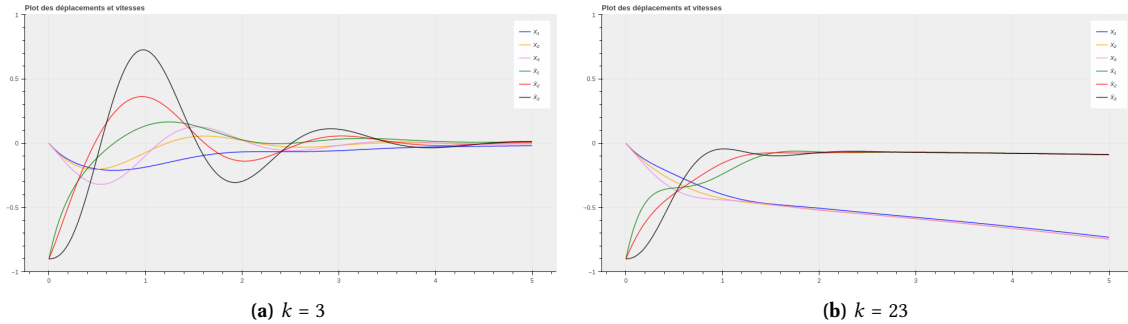
$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en enlevant le mur à gauche du domaine (voir figure 3.4), le système est devenu isolé. Nous pouvons donc appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour identifier la vitesse de l'ensemble  $m + m'$  après collision et fixation de la masse  $m'$  (à vitesse  $v_0$ ) sur la masse  $m$  (de vitesse  $v'_0$ )<sup>3</sup>. Pour simplifier les calculs, nous considérons les floes comme des solides rigides. La vitesse de l'ensemble juste après collision est notée  $v_f$ , et les quantités de mouvement avant et après choc sont notées  $P_{\text{avant}}$  et  $P_{\text{après}}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_{\text{avant}} &= P_{\text{après}} \\ \Rightarrow 2mv_0 + 2m'v'_0 &= (2m + 2m')v_f \\ \Rightarrow v_f &= \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} \end{aligned}$$

On introduit ces conditions initiales dans l'équation (3.18) pour obtenir le système de Cauchy ci-bas. Le résultat de la simulation est présenté à la figure 3.9 (issue du notebook code/simu1D/Percussion1D-2.ipynb).

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t), \\ Y(t_0) = Y_0 = -v_f(0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{cases} \quad (3.19)$$



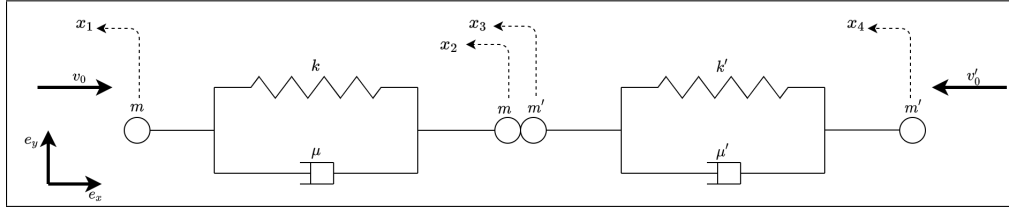
**Figure 3.9** - Simulation de la percussion 1D entre deux floes (sans présence du mur) avec  $m = 1$ ,  $m' = 1$ ,  $k' = 22$ ,  $\mu = 6$ ,  $\mu' = 2$ ,  $v_0 = -1.8$ ,  $t_f = 5$ . Sous certaines conditions (forte dissipation, raideur du floe percuté élevée, etc.), on observe le ralentissement du système et une convergence vers l'état d'équilibre  $Y_{eq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

La figure 3.9 permet d'observer la nuance avec le problème de contact parfaitement inélastique. Il est difficile de distinguer les cas qui aboutissent à une convergence des déplacements de ceux qui divergent. Observons donc à présent un problème de contact inélastique avec séparation des masses.

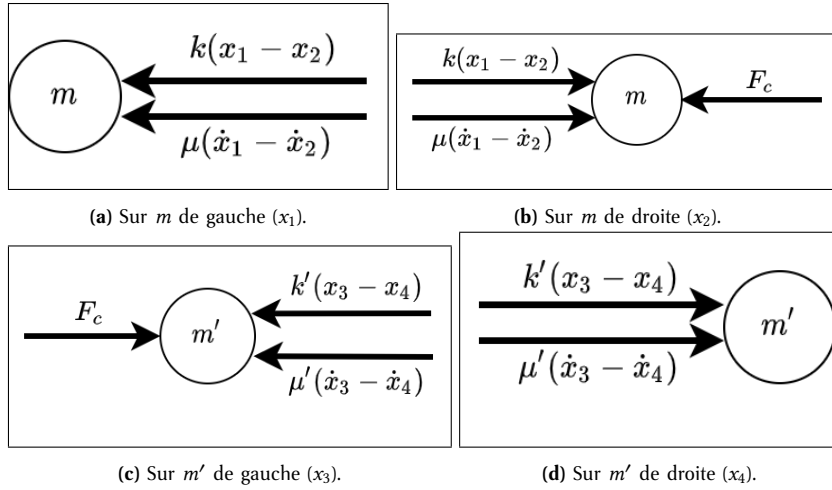
### 3.2.3 Premier modèle pour la collision avec séparation des masses

Reprenons le cas du contact 1D et étudions ce qui se passe durant l'intervalle de temps  $\delta t^* = [t^-, t^+]$  de la collision. Cette fois, pour étudier la dynamique non régulière, nous décidons de séparer les masses  $m$  et  $m'$  en contact (et ce même durant le contact). Le système résultant est très similaire aux deux cas traités précédemment (figures 3.4 et 3.7), et nous le présentons à la figure 3.10 ci-bas, et son bilan de forces à la figure 3.11.

3. Le vecteur  $v'_0$  n'est pas marqué à la figure 3.7 (i.e.  $v'_0 = 0$ ). L'introduction de ce vecteur permet de généraliser le problème.



**Figure 3.10** – Contact 1D inélastique entre deux flocs. Durant le choc, les nuds  $m$  et  $m'$  en contact sont étudiés séparément. On représente les variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , et  $x_4$  décrivant les mouvements de chaque noeud.



**Figure 3.11** – Bilan des forces appliquée sur les 4 noeuds du système. On procède de façon similaire aux figures 3.5 et 3.8 pour obtenir les sens et les intensités de ces forces.  $F_c$  représente la force de contact dont l'intensité est inconnue.

Comme précédemment, nous appliquons les lois de Newton pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). \end{cases} \quad (3.20)$$

On additionne membre à membre les équations régissant les mouvements de  $x_2$  et  $x_3$  pour éliminer la force de contact  $F_c$  et obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (3.21a) \\ m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4), & (3.21b) \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4). & (3.21c) \end{cases}$$

Remarquons que ce système revient au même système étudié dans la partie précédente en posant  $x_2(t) = x_3(t)$  p.p. En effet, durant la phase de contact, les masses  $m$  et  $m'$  peuvent être étudiées comme une unique masse  $m + m'$ . La grosse difficulté qui ressort de cette modélisation est la définition de la vitesse initiale de l'ensemble  $m + m'$ . Cela dit, nous cherchons à trouver les vitesses  $\dot{x}_1(t^+)$ ,  $\dot{x}_2(t^+)$ ,  $\dot{x}_3(t^+)$  et  $\dot{x}_4(t^+)$  immédiatement après la collision. De par la ressemblance de ce modèle avec celui de la section précédente (voir équation (3.18)), nous réutilisons les quantités  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_4$  données par ce système (l'équation (3.18) dans lequel  $x_2$  et  $x_3$  sont confondus). On peut se permettre une telle approximation car  $x_1$  et  $x_4$  n'interviennent pas directement dans la collision. De plus, la quantité  $k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)$  est aussi calculée suivant le modèle équation (3.18) (voir l'article [Tom+20] pour une modélisation similaire). Il ne nous

reste véritablement que 2 inconnue dans notre dynamique irrégulière.

Intégrons l'équation (3.21b) entre les instants  $t^-$  et  $t^+$ . On obtient :

$$\int_{t^-}^{t^+} m\ddot{x}_2 + m'\ddot{x}_3 dt = \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) dt}_I. \quad (3.22)$$

Afin d'éviter toute confusion, nous notons  $v_0 = \dot{x}_2(t^-)$  et  $v'_0 = \dot{x}_3(t^-)$  les vitesses des noeuds en contact avant collision, et  $V_0 = \dot{x}_2(t^+)$  et  $V'_0 = \dot{x}_3(t^+)$  les vitesses après contact. L'équation (3.22) devient donc :

$$mV_0 + m'V'_0 = I + mv_0 + m'v'_0. \quad (3.23)$$

À présent, nous pouvons étudier l'énergie cinétique du système à travers le coefficient de restitution  $\varepsilon$ <sup>4</sup>. On suppose (algébriquement) que les noeuds prennent des directions indiquées à la figure 3.12.

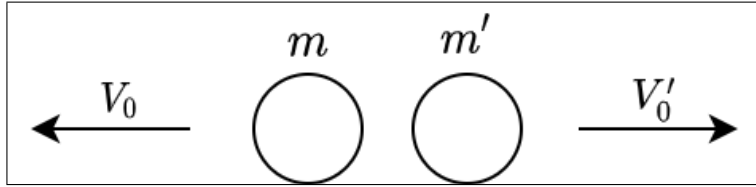


Figure 3.12 – Situation après contact 1D.

On obtient l'équation (3.24) :

$$-V_0 + V'_0 = \varepsilon(v_0 - v'_0). \quad (3.24)$$

Le système de Cramer qui découle des équations (3.23) et (3.24) permet d'obtenir les expressions :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1 + \varepsilon)m'v'_0}{m + m'}, \quad V'_0 = \frac{I + (1 + \varepsilon)mv_0 + (m' - \varepsilon m)v'_0}{m + m'}. \quad (3.25)$$

Une fois leur vitesses "initiales"<sup>5</sup> obtenues, on calcule donc les déplacements des différents noeuds des réseaux, et les fractures éventuelles qui s'en suivent. Plus précisément, on a par exemple pour le premier floe :

- son noeud de gauche  $x_1$  a pour vitesse  $v_0$  avant et le choc et conserve cette vitesse après le choc ;
- son noeud de droite  $x_2$  a pour vitesse  $v_0$  avant le choc, mais passe de façon discontinue à  $V_0$  après le choc.

Il en est de même pour le deuxième floe.

### 3.2.4 Deuxième modèle pour la collision avec séparation des masses

Dans cette section, nous généralisons le modèle 1D présenté dans les deux sections précédentes (voir sections 3.1 et 3.2.3). Les floes sont cette fois représentés par une multitude de noeuds, de ressorts et de dispositifs visqueux.

**Déplacement d'un floe.** Considérons la FIGURE CI-BAS où  $n$  le nombre de noeuds du floe,  $k$  la constante de raideur uniforme de tous ses ressorts, et  $\mu$  le coefficient de dissipation pour tous les dispositifs visqueux.

FIGURE MODÈLE 1D AVEC PLUSIEURS NOEUDS (NE PAS OUBLIÉ DE REPRÉSENTER LE REPÈRE ABSOLU).

4. Le coefficient de restitution est le même que celui utilisé dans la thèse [Rab15].

5. Ces vitesses sont les vitesses de départ pour le deuxième phase de la percussion.



Contrairement à l'approche par déplacement que nous avons adopté à la section 3.1, nous considérons ici une approche par position des noeuds dans le repère absolu (de la figure précédente).

RECOPIER LES PAGES 30 ET 31 DU BROUILLON EN RÉSUMANT TANT QUE POSSIBLE

**Etude de la percussion.** Observons que les équations (3.22) à (3.25) de la section 3.2.3 restent valides du moment que seuls 2 floes sont en contact. Soit  $n_1$  et  $n_2$  les nombres de floes respectifs pour les floes de gauche et de droite (voir FIGURE CI-DESSOUS)

FIGURE DE LA PERCUSSION 1D AVEC PLUSIEURS NOEUDS

La figure ci-dessus montre que la quantité  $I$  présentée à équation (3.22) s'écrit :

Et les vitesses après choc sont données par équation (3.25)<sup>6</sup>.

### 3.2.5 Troisième modèle pour la collision avec séparation des masses

## 3.3 Modélisation de la fracture

## 3.4 Algorithme de calcul 1D

DIAGRAMME UML ET README DU REPOSITORY

**Algorithme de percussion 1D.** Par définition, la percussion implique de nombreuses collisions entre les floes. Nous présentons donc l'algorithme ci-bas pour déterminer les vitesses et positions des noeuds des floes après la percussion.

1. Créer deux floes<sup>7</sup> tous deux animés de mouvement uniforme rectilignes<sup>8</sup>
2. Créer le problème de percussion et y ajouter les deux floes et les paramètres physiques
3. Tant que non collision : - calculer les trajectoires des floes - doubler le temps de simulation avant choc
4. Tant que (collision) ou (temps simu atteint) ou (max recursion profondeur) : - identifier le moment de collision - calculer les vitesses des noeuds en contact après choc - calculer les trajectoires après choc

**diagramme UML du code.** Le code de calcul est conservé dans le FICHIER-REPOSITORY... (INDIQUER COMMENT LACER LE CODE). Le diagramme UML définissant les différentes classes et fonctions de notre implémentation est le suivant :

DIAGRAMME UML DU CODE 1D

## 3.5 Visualisation et validation des résultats

**Visualisation des résultats.** PRÉSENTER 5 A 10 TIME STEPS D'UNE SIMULATION AVEC PLUSIEURS FLOES

**Validation du modèle.** Le moyen principal de validation de notre modèle 1D fut l'étude énergétique. AU MOINS LES QUANTITÉS DE MOUVEMENT ET LES ÉNERGIES TOTALES JUSTE AVANT ET APRÈS CHAQUE CHOCS SONT LES MÊMES.

PLOT DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT ET ENERGIE TOTALES

6. Notons que tous les noeuds qui ne sont pas en contact conservent leurs vitesses pendant le choc.

7. Le floe de gauche sera identifié par floe1 et le celui de droite floe2.

8. Tous les noeuds de chacun des floes ont la même vitesse.

### **3.6 Résumé des résultats obtenus**

## **Chapitre 4**

# **Problème 2D et percussion des floes de glace**

**4.1 Présentation des travaux antérieurs**

**4.2 Développement d'un modèle de percussion**

**4.3 Algorithme de calcul 1D**

**4.4 Résumé des résultats obtenus**

## Chapitre 5

# Déroulement et apports du stage

### 5.1 Journal de bord

### 5.2 Bilan et future travail

RÉSUMÉ DÉTAILLE DES TRAVAUX DE STAGE, ET TRAVAIL RESTANT

### 5.3 Les apports du stage

LES OUTILES ET LES RESSOURCES UTILISÉS ENTRENT ICI.

- L' utilisation de TIKZ
- La maîtrise de Flask
- Optimiser mes codes (1D et 2D) avec Cpython

## **Chapitre 6**

## **Conclusion**

## **Annexe A**

# **Rappels sur les EDO**

## **Annexe B**

# **Le schéma Symplectique**

EXPLICATION DU MODULE SCIPY INTEGRATE

# Bibliographie

- [Ho10] Nhut Ho. « Modeling Mechanical Systems ». In : (2010). URL : <https://pdfs.semanticscholar.org/df7b/aee3d1a72daadae4471986ffea6147a825c1.pdf>.
- [Rab15] Matthias RABATEL. « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Theses. Université Grenoble Alpes, nov. 2015. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01293341>.
- [Tom+20] Domenico TOMMASINO et al. « Effect of End-Effector Compliance on Collisions in Robotic Teleoperation ». In : *Applied Sciences* 10.24 (2020), p. 9077.