La Corriger la précision du float !!!

dans numpy (float64)

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Master 2 - CSMI

Contrôle optimal - T.P. nº 2

Modèle SIR, stratégie optimale de confinement

Le coronavirus a généré une épidémie d'une telle ampleur que des milliards de personnes dans plus de 50 pays ont été confinées depuis le début du mois d'avril 2020.

Dans ce T.P., nous cherchons à déterminer une stratégie optimale de mise en place de mesures de restrictions sur une population afin de lutter contre la propagation d'une épidémie. En particulier, la question du confinement/déconfinement est devenue un enjeu crucial.

La question que l'on souhaite résoudre s'énonce ainsi :

Comment optimiser l'action des pouvoirs publics pour limiter le nombre de personnes infectées ?

Nous allons considérer le modèle SIR (Susceptible-Infected-Removed) simplifié décrit dans [2] :

$$\mathcal{S} \to \mathcal{I} \to \mathcal{R} \qquad \begin{cases} S'(t) = -u(t)\frac{S(t)I(t)}{N(t)} \\ I'(t) = u(t)\frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \beta I \\ R'(t) = \beta I(t) \\ (S(0), I(0), R(0)) = (S_0, R_0, I_0). \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce modèle $S(t)$ représente les personnes saines au temps t, $I(t)$ les personnes infectées, et $R(t)$ les personnes retirées (guéries ou décédées). La fonction $u(\cdot)$ représente un contrôle modélisant une politique de restriction, typiquement un confinement. Il s'agit d'une fonction de L^∞ à valeurs dans $[0, \alpha]$. Le cas $u(\cdot) = 0$ modélise un confinement total tandis que $u(\cdot) = \alpha$ modélise l'absence de confinement. Le nombre réel positif α représente le taux d'infection de la maladie. Enfin, le nombre positif β est le taux d'élimination.

La quantité $N = S(t) + I(t) + R(t)$ représente alors la population constante totale au cours du temps. Il convient de bien différencier les personnes saines des personnes retirées : les personnes saines n'ont pas encore été touchées par le virus, alors que les personnes retirées sont guéries, et donc immunisées ou décédées. Autrement dit, les personnes retirées ne sont plus prises en compte. Par conséquent, le modèle SIR ne s'occupe pas directement de prédire la mortalité de l'épidémie.

Dans ce qui suit, nous allons nous baser sur la situation de l'épidémie en France en avril 2020. Les auteurs de [1] estiment les paramètres $\alpha \simeq 0,32$ et $\beta = 1/10$.

Rappelons que le taux de reproduction du virus est défini par $\mathcal{R}_0 = \alpha/\beta \simeq 3,2$.

Il est bien connu que pour ce modèle, puisque $\mathcal{R}_0 > 1$, I atteint un pic puis passe à zéro en raison de l'immunité de groupe. Considérons le cas de la France, où le nombre total d'individus est $N \simeq 6.7e7$. Nous allons considérer une fenêtre de temps $[0, T]$ avec $T = 90$ jours.

Nous utiliserons les valeurs numériques suivantes dans ce TP :

α	β	S_0	I_0	R_0	T
0.32	0.1	6.7e7 − 2e4	2e4	0	90

Nous choisissons de modéliser la recherche d'une stratégie de restriction optimale de la façon suivante :

$$\inf_{u\in\mathcal{U}_\alpha} L_\tau(u) \quad \text{avec } \mathcal{U}_\alpha = \{u \in L^\infty(]0,T[) \mid 0 \leq u(\cdot) \leq \alpha\} \qquad (\mathscr{P}_\tau)$$

où $\tau \in [0,1]$ est fixé et

$$L_\tau(u) = \tau \int_0^T g(u(t))\,dt + (1-\tau)\int_0^T f(I(t))\,dt.$$

La fonction g est supposée C^1, positive et décroissante sur $[0,\alpha]$ tandis que la fonction f est supposée C^1, positive et croissante. On pourra par exemple choisir

$$g(u) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - u^2), \qquad f(I) = \frac{I^2}{2} \text{ ou } f(I) = I.$$

1. *Modélisation.* Justifier le choix de la fonctionnelle L_τ.
2. Vérifier que La fonction $N(\cdot)$ est constante.
3. *Cas de contrôles constants.* Dans chacun des deux cas suivants, représenter les solutions S, I et R du système sur $[0,T]$:

   $$u(\cdot) = \alpha \quad \text{(pas de confinement)}, \qquad u(\cdot) = \varepsilon \quad \text{(avec } \varepsilon > 0 \text{ proche de 0, confinement fort)}.$$

   On utilisera une méthode de Runge-Kutta[1] d'ordre 4 pour résoudre le système SIR. Interpréter les résultats obtenus.
4. *Calcul du gradient.* Soit $u \in \mathcal{U}_\alpha$ et $h \in L^\infty(]0,T[)$, une perturbation admissible de u dans $\mathcal{U}_\alpha$, autrement dit telle que $u + \varepsilon h \in \mathcal{U}_\alpha$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Démontrer que la différentielle $DL_\tau(u)\cdot h$ du critère d'écrit

   $$DL_\tau(u)\cdot h = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{L_\tau(u+\varepsilon h) - L_\tau(u)}{\varepsilon} = \int_0^T h\left(-\tau u + (1-\tau)\frac{SI}{N}(P_2 - P_1)\right),$$

   où P désigne l'état adjoint associé à ce problème, solution du problème

   $$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\I\\0\end{pmatrix}, \\ P_i(0) = 0, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{uI}{N} & -\frac{uS}{N} & 0 \\ \frac{uI}{N} & \frac{uS}{N} - \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

   Posons $\nabla L_\tau(u) = -\tau u + (1-\tau)\frac{SI}{N}(P_2 - P_1)$.
5. *Mise en œuvre d'une méthode de gradient.* Mettre en œuvre une méthode de type gradient pour résoudre le problème $(\mathscr{P}_\tau)$.
   L'exposant k est utilisé pour désigner les différentes variables du problème à l'itération k et $\rho^k > 0$ désigne le pas de la méthode de contrôle. On suggère de suivre les étapes suivantes :
   - utiliser la formule de projection

     $$u^{k+1} = \min\{\alpha, \max\{u^k - \rho^k \nabla L_\tau(u^k), 0\}\}.$$

     pour mettre à jour le contrôle.
   - le pas ρ^k peut être choisi variable, suivant l'algorithme ci-après.

1. On rappelle que pour résoudre l'EDO $x' = f(t,x)$ la méthode de Runge-Kutta consiste à utiliser le schéma

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h_n}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + h_n/2, x_n + h_n k_1/2) \\ k_3 = f(t_n + h_n/2, x_n + h_n k_2/2) \\ k_4 = f(t_n + h_n, x_n + h_n k_3)). \end{cases}$$

```
cpt=0
ρ = ρ_0 (un nombre positif fixé)
Δ = L_τ(u^k − ρ∇L_τ(u^k)) − L_τ(u^k)
while (cpt<1e2) & (Δ ≥ 0)
ρ ← ρ/1.3
Δ ← L_τ(u^k − ρ∇L_τ(u^k)) − L_τ(u^k)
cpt=cpt+1
```

- on imposera un nombre maximal d'iterations. Si ce nombre est atteint, on considérera que l'algorithme n'a pas convergé.
- On utilisera un critère d'arrêt de la forme $\left|\frac{L_\tau(u^{k+1})-L_\tau(u^k)}{L_\tau(u^k)}\right| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$ où $\varepsilon_{\text{tol}} > 0$ est fixé.

6. Représenter pour différentes valeurs de τ la solution optimale u_τ^* obtenue, les trajectoires optimales $(S_\tau^*, I_\tau^*, R_\tau^*)$ associées, l'évolution du critère en fonction des itérations.
7. *Voici quelques pistes si vous souhaitez aller plus loin.*
   (a) Représenter sur une figure les points $\left(\int_0^T g(u_\tau^*(t))\,dt, \int_0^T f(I_\tau^*(t))\,dt\right)$ pour différentes valeurs de $\tau \in [0,1]$ (diagramme de Pareto). Comment interpréter ce diagramme ?
   (b) Implémenter le problème en utilisant le package `Gekko` et comparer les résultats obtenus.
   (c) Comment modifier ou enrichir la modélisation proposée ? N'hésitez pas à tester les modélisations proposées.

Références

[1] Santé Publique France (2020). COVID-19.

[2] Lionel Roques, Etienne Klein, Julien Papaïx, Antoine Sar, and Samuel Soubeyrand, Using early data to estimate the actual infection fatality ratiofrom COVID-19 in France, *preprint*.