UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

T.P #1

Etudiant : *Roussel Desmond Nzoyem*

UE : *contrôle optimal* – Enseignant : *Pr. Yannick Privat*
Date : *19 décembre 2020*

Dans toute la suite, les dépendances en t et x sont négligées au profit de la dépendance en u. Ainsi, l'état $y_u(t,x)$ sera noté $y(u)$, ou bien $y(u)(t,x)$ en cas de nécessité. Toujours afin de simplifier les notations, l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}_{ad} = L^2(]0,T[)$ sera simplement noté L^2.

Si J est différentiable en u, alors on peut écrire, pour $h \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
DJ(u)\cdot h &= \lim_{\eta\to 0} \frac{J(u+\eta h) - J(u)}{\eta} \\
&= \left.\frac{dJ(u+\eta h)}{d\eta}\right|_{\eta=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{d\eta}(y(u+\eta h)(\cdot,L) - z_d)^2\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T \frac{d}{d\eta}(u+\eta h)^2\,dt\Big|_{\eta=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T y'(h)(\cdot,L)(y(u+\eta h)(\cdot,L) - z_d)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T h(u+\eta h)\,dt\Big|_{\eta=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T y'(h)(\cdot,L)\,[y(u)(\cdot,L) - z_d]\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T hu\,dt
\end{aligned}$$

où la dérivée directionnelle de y dans la direction h est donnée par (expression indépendante de η)

$$y'(h) = \lim_{\eta\to 0} \frac{y(u+\eta h) - y(u)}{\eta}$$

Remarquons que $y'(h)$ vérifie entre autres les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}y'(h) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y'(h) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{y(u+\eta h) - y(u)}{\eta} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{y(u+\eta h) - y(u)}{\eta} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}y'(h)(\cdot,L) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y(u+\eta h)(\cdot,L) - y(u)(\cdot,L)}{\eta} = \frac{u+\eta h - u}{\eta} = h
\end{aligned}$$

et donc $y'(h)$ est solution du système $(\mathcal{P}')$ ci-bas :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}y'(h)(\cdot,\cdot) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y'(h)(\cdot,\cdot) &= 0 \\
y'(h)(0,\cdot) &= 0 \\
y'(h)(\cdot,0) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}y'(h)(\cdot,L) &= h
\end{aligned}$$

En posant $v = h + u$, on remarque que le vecteur $y(v) - y(u)$ résout le même système $(\mathcal{P}')$. Et on peut montre l'unicité de la solution faible pour ce système en introduisant une forme linéaire continue l et une forme bilinéaire continue et coercive a, et en concluant à l'aide du théorème vu en cours. Le même théorème nous donne la continuité de la solution du système à travers les propriétés de l'application trace $\gamma : \{v \in H^1(]0,L[\times]0,T[) \text{ t.q. } v(\cdot,0) = 0\} \to L^2(\{0,L\}\times]0,T[)$. On en déduit donc que $y'(h) = y(v) - y(u)$, et que $y'(h)$ est continue en h.

La linéarité de $y'(u)$ s'obtient en remarquant comme précédement que pour $h_1, h_2 \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $y'(h_1 + \beta h_2)$ et $y'(h_1) + \beta y'(h_2)$ sont solutions du même système d'EDP.

En remarquant que le système $(\mathcal{P}')$ résolu par $y'(h)$ est très similaire au système $(\mathcal{P})$ résolu par $y(u)$, on peut montrer que $y(u)$ est continue et linéaire en u en employant la même démarche.

$DJ(u) \cdot h$ est donc linéaire par rapport à h comme somme de fonctions linéaires. On montre aussi que $DJ(u) \cdot h$ est continue en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Autrement dit, $\exists\, C_1 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
|DJ(u) \cdot h| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^T y'(h)(\cdot,L)\, [y(u)(\cdot,L) - z_d]\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T hu\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \|y'(h)(\cdot,L)\|_{L^2} \|y(u)(\cdot,L) - z_d\|_{L^2} + \frac{\varepsilon}{2} \|h\|_{L^2} \|u\|_{L^2} && \text{par C-S} \\
&\leq C_1 \|h\|_{L^2} && \text{par continuité de } y'(\cdot)
\end{aligned}$$

En se rappelant que $y'(h) = y(v) - y(u)$, $\exists\, C_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\frac{|J(u+h) - J(u) - DJ(u) \cdot h|}{\|h\|_{L^2}} &= \frac{|J(v) - J(u) - DJ(u) \cdot h|}{\|h\|_{L^2}} \\
&= \frac{|\, \|y(v)(\cdot,L) - z_d\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} - \|y(u)(\cdot,L) - z_d\|_{L^2} - \|u\|_{L^2} - \langle y(v)(\cdot,L) - z_d, y}{\|h\|_{L^2}} \\
&= \frac{|\, \langle y(v)(\cdot,L) - y(u)(\cdot,L), y(v)(\cdot,L) - z_d \rangle_{L^2} - \langle v - u, v \rangle_{L^2} \,|}{\|h\|_{L^2}} \\
&\leq \frac{C_2 \|h\|_{L^2}^2}{\|h\|_{L^2}} \qquad \text{par linéarité et continuité de } v \mapsto y(v) = y(h+u)
\end{aligned}$$

La différentiabilité de J en u en découle, car

$$\lim_{\|h\|_{L^2} \to 0} \frac{|J(u+h) - J(u) - DJ(u) \cdot h|}{\|h\|_{L^2}} = 0$$

Exprimons explicitement chacun des termes de la différentielle $DJ(u) \cdot h$ en fonction de h. Pour cela, introduisons l'adjoint $p : (t,x) \mapsto p_u(t,x)$. Multiplions l'équation de la chaleur $(\mathcal{P}')$ résolue par $y'(h)$ par p et intégrons par parties. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y'(h)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y'(h)}{\partial x^2} &= 0 \\
\implies \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\partial y'(h)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y'(h)}{\partial x^2} \right) p &= 0 \\
\implies \int_0^T \left(\int_0^L \frac{\partial y'(h)}{\partial t} p \right) - \int_0^T \left(\int_0^L \frac{\partial^2 y'(h)}{\partial x^2} p \right) &= 0 \\
\implies -\int_0^L \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t} y'(h) + \int_0^L \left[y'(h) p \right]_0^T - \int_0^T \int_0^L \frac{\partial y'(h)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \int_0^T \left[\frac{\partial y'(h)}{\partial x} p \right]_0^L &= 0
\end{aligned}$$

- Vu que $y'(h)(0,\cdot) = y(v)(0,\cdot) - y(u)(0,\cdot) = 0$, le deuxième terme de la somme ci-haut $\int_0^L [y'(h)p]_0^T$ s'annule en prenant $p(T,\cdot) = 0$.

- En prenant $p(\cdot,0)=0$, le quatrième terme donne $\int_0^T \left[\frac{\partial y'(h)}{\partial x} p\right]_0^L = \int_0^T \frac{\partial y'(h)}{\partial x} p\big|_{x=L} = \int_0^T h(\cdot)p(\cdot,L)$, de part le fait que $\frac{\partial y'(h)}{\partial x}(\cdot,L)=h$.

- Effectuons ensuite une seconde intégration par parties sur le troisième terme de la somme ci-haut (terme du milieu ci-bas), on obtient alors

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^L\int_0^T \frac{\partial p}{\partial t} y'(h) - \int_0^T\int_0^L \frac{\partial y'(h)}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} - \int_0^T h(\cdot)p(\cdot,L) = 0 \\
\Longrightarrow & -\int_0^L\int_0^T \frac{\partial p}{\partial t} y'(h) - \int_0^T\int_0^L y'(h)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \int_0^T \left[\frac{\partial p}{\partial x} y'(h)\right]_0^L - \int_0^T h(\cdot)p(\cdot,L) = 0 \\
\Longrightarrow & \int_0^L\int_0^T \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) y'(h) + \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x}(\cdot,L) y'(h)(\cdot,L) - \int_0^T h(\cdot)p(\cdot,L) = 0
\end{aligned}
$$

En posant

$$
-\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(\cdot,L) = y(u)(\cdot,L) - z_d(\cdot)
$$

on obtient

$$
\int_0^T y'(h)(\cdot,L)\,(y(u)(\cdot,L) - z_d(\cdot)) = \int_0^T h(\cdot)p(\cdot,L)
$$

Qu'on remplace immédiatement dans l'expression de $DJ(u)\cdot h$ pour obtenir

$$
\begin{aligned}
DJ(u)\cdot h &= \frac{1}{2}\int_0^T y'(h)(\cdot,L)(y(u)(\cdot,L) - z_d(\cdot))\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T hu\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T h(\cdot)p(\cdot,L)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T h(\cdot)u(\cdot)\,dt \\
&= \left\langle \frac{1}{2}p(\cdot,L) + \frac{\varepsilon}{2}u(\cdot),\, h(\cdot)\right\rangle_{L^2(]0,T[)}
\end{aligned}
$$

Nous avons donc montré que le gradient de J en u vaut

$$
\nabla J(u) = \frac{1}{2}p(\cdot,L) + \frac{\varepsilon}{2}u(\cdot)
$$

en considérant l'état adjoint défini pour $(t,x)\in[0,T]\times[0,L]$ par le système

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x) &= 0 \\
p(T,x) &= 0 \\
p(t,0) &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial x}(t,L) &= y(u)(t,L) - z_d(t)
\end{aligned}
$$