

Équations Différentielles Ordinaires.

Université Aix-Marseille

Préparation à l'agrégation (Option B)

2019/2020

THOMAS OURMIÈRES-BONAFOS

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Extrait du programme de l'agrégation externe 2020	2
2	Généralités sur les EDO	2
2.1	Notion de solutions d'une EDO	2
2.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	3
2.3	Conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz	6
2.4	Explosions en temps fini	7
3	Solutions explicites des EDO	9
3.1	EDL d'ordre n à coefficients constants	9
3.2	Petit bestiaire des EDO	12
4	Systèmes autonomes 2×2	13
4.1	Généralités sur les portraits de phase	13
4.2	Portraits de phase : cas des systèmes linéaires	15
4.3	Points d'équilibres & linéarisation	17
5	Modèles mathématiques mettant en jeu des EDO	19
5.1	Mécanique du point	19
5.2	Dynamique de population(s)	22
5.2.1	Modèle de Malthus	22
5.3	Modèle de Verhulst	22
5.4	Modèle de Lotka-Volterra	23
6	Analyse numérique & EDO	26
6.1	Exemple de schémas à un pas	26
6.2	Méthodes à un pas	26
6.3	Explicite versus Implicite	30

1 Introduction

1.1 Extrait du programme de l'agrégation externe 2020

Avant de commencer, on prendra connaissance du programme de l'agrégation externe, qui détaille les notions à maîtriser concernant les EDO (voir Figure 1.1).

9.2 Équations différentielles

- (a) Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $\mathcal{I} \times \Omega$ avec \mathcal{I} intervalle ouvert de \mathbf{R} et Ω ouvert de \mathbf{R}^n . Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Solutions maximales. Lemme de GRÖNWALL. Théorème de sortie de tout compact (théorème « des bouts »).
- (b) Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).
- (c) Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (formule de DUHAMEL). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

13.5 Équations différentielles ordinaires

Aspects numériques du problème de CAUCHY : méthode d'EULER explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

- (d) Équations différentielles ordinaires. Mise en évidence numérique de propriétés qualitatives des solutions. Aspects numériques du problème de CAUCHY : mise en œuvre des méthodes d'EULER explicite et implicite, précision, consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de méthodes d'ordre élevé *via* les routines proposées par les logiciels.

FIGURE 1 – Extrait du programme de l'agrégation 2020 concernant les EDO. Disponible à l'url suivante : http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externes/59/7/p2020_agreg_ext_maths_1107597.pdf

2 Généralités sur les EDO

On commence par définir la notion de solution d'une Équation Différentielle Ordinaire (= EDO).

2.1 Notion de solutions d'une EDO

Définition 1 Soit $I \subset \mathbf{R}$ et $\Omega \subset \mathbf{R}^d$. On se donne $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ une application. On appelle solution de l'Équation Différentielle

$$y' = f(t, y)$$

tout couple (J, φ) où $J \subset I$ et φ est une fonction définie et dérivable sur J telle que

$$\text{pour tout } t \in J, \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Le but de l'exercice suivant est de savoir si vous êtes capable de remettre une équation différentielle donnée sous la forme présentée dans l'énoncé.

Exercice 1 (🕒 5 min) Mettre les Équations différentielles suivantes sous la forme

$$y' = f(t, y)$$

en donnant les intervalles de définition de la fonction f .

1. $y' = g(t, y) + y$
2. $y' = ty$
3. $y' = \ln(t) \frac{y}{\|y\|_2}$
4. $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0$.
5. Pour $n \geq 1$, $y^{(n)} + g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$

On rappelle maintenant la notion de solution maximale d'une EDO.

Définition 2 Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On se donne $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application. Soit (J, φ) une solution de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y). \quad (1)$$

(J, φ) est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement. C'est-à-dire que pour toute autre solution $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ de (1), si $J \subset \tilde{J}$ et $\varphi = \tilde{\varphi}|_J$ alors $(J, \varphi) = (\tilde{J}, \tilde{\varphi})$.

Lorsque $J = I$, on dit que la solution (J, φ) est globale.

2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

La notion de solution maximale permet d'énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 1 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Soit $f \in C^1(I \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ alors pour tout $(t_i, y_i) \in I \times \Omega$ il existe une unique solution maximale (J, φ) de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

vérifiant $t_i \in J$ et $\varphi(t_i) = y_i$.

Pour démontrer l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous aurons besoin du lemme de Grönwall.

Exercice 2 (🕒 45 min.)

1. Soit $[a, b[\subset \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in C^0([a, b[, \mathbb{R})$ telles que $\psi \geq 0$. On suppose que pour tout $t \in [a, b[$ on a

$$\varphi(t) \leq C + \int_a^t \psi(s)\varphi(s)ds.$$

- (a) Pour $t \in [a, b[$, on pose $h(t) := C + \int_a^t \psi(s)\varphi(s)ds$. Montrer que h vérifie l'inéquation différentielle

$$h' \leq \psi h.$$

(b) En déduire que

$$\varphi(t) \leq C \exp \left(\int_a^t \psi(s) ds \right).$$

2. On se propose maintenant de montrer que deux solutions (J_1, φ_1) et (J_2, φ_2) du problème de Cauchy coïncident sur $J_0 := J_1 \cap J_2$. Prenons alors deux solutions (J_1, φ_1) et (J_2, φ_2) du problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_i) = y_i.$$

Nous allons démontrer qu'elles coïncident sur $J_0 = J_1 \cap J_2$. Pour cela, on considère l'ensemble $S = \{s \in J_0 : \varphi_1(s) = \varphi_2(s)\}$ et on note $S_+ := S \cap [t_i, +\infty[$. Notre objectif est de démontrer que $S = J_0$. On va raisonner par l'absurde et supposer que $S_+ \neq J_0 \cap [t_i, +\infty[$ (on pourrait faire de même pour montrer que $S_- \neq J_0 \cap]-\infty, t_i]$).

(a) Pourquoi $J_0 \neq \emptyset$?

(b) Pourquoi $t_\star := \sup S_+$ vérifie $t_\star \geq t_0$.

(c) Montrer par l'absurde que $t_\star \in J_0$.

(d) Montrer que $\varphi_1(t_\star) = \varphi_2(t_\star) := \varphi_\star$.

(e) En déduire qu'il existe $\tau > 0$ et $\delta > 0$ tels que $[t_\star, t_\star + \tau] \subset J_0$, vérifiant pour tout $t \in [t_\star, t_\star + \tau]$

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \overline{B(\varphi_\star, \delta)} \subset \Omega.$$

(f) Pourquoi, pour tout $t \in [t_\star, t_\star + \tau]$, a-t-on

$$\varphi_j(t) = \varphi_\star + \int_{t_\star}^t f(s, \varphi_j(s)) ds \quad ?$$

(g) Montrer alors que pour tout $t \in [t_\star, t_\star + \tau]$ on a

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| \leq \int_{t_\star}^t \|f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s))\| ds$$

et en déduire qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| \leq C \int_{t_\star}^t \|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)\| ds$$

(h) Conclure.

Afin de démontrer l'existence théorème de Cauchy-Lipschitz nous allons utiliser le théorème du point fixe de Picard. Le but de l'exercice suivant est de démontrer ce théorème du point fixe.

Exercice 3 (🕒 20min) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur lequel on se donne

$$\Psi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$$

une application k -contractante, c'est-à-dire qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in E$ on ait

$$\|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

1. Montrer que si $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.
2. On va montrer l'existence du point fixe en construisant la suite des itérés

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Psi(x_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ x_0 \in E. \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} \|x_1 - x_0\|.$$

(c) Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers un élément noté $x_\infty \in E$.

(d) En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que $\Psi(x) = x$.

Exercice 4 (🕒 25min.) Soit $(t_i, y_i) \in I \times \Omega$. Comme I est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $J := [t_i - \alpha, t_i + \alpha] \subset I$.

1. Montrer que si (J, φ) est une solution du problème de Cauchy

$$y' = f(t, y(t)), \quad y(t_i) = y_i$$

alors

$$\varphi(t) = y_i + \int_{t_i}^t f(s, \varphi(s)) ds. \quad (2)$$

2. Pourquoi peut-on voir (2) comme un problème de point fixe ? Préciser l'espace de Banach utilisé et l'application Ψ considérée. A priori, est-elle contractante ?
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $R_0 > 0$ tels que le compact $K_\alpha := [t_i - \alpha, t_i + \alpha] \times \overline{B(y_i, R_0)}$ est laissé stable par Ψ .
4. En déduire qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy sur $[t_i - \alpha, t_i + \alpha]$ à valeurs dans $\overline{B(y_i, R)}$.
5. Conclure.

2.3 Conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz

À partir de maintenant, on considère toujours $f \in C^1(I \times \Omega)$.

Une première conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz est que l'intervalle de définition de la solution maximale associée à un problème de Cauchy donné est ouvert.

Exercice 5 (🕒 8 min.) Soit (J, φ) la solution maximale du problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_i) = y_i.$$

Montrer par l'absurde que J est un intervalle ouvert de I .

Une deuxième conséquence du théorème de Cauchy Lipschitz est que deux trajectoires (\equiv solutions) de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ ne peuvent se croiser (\equiv être égales en un point).

Exercice 6 (🕒 2min.) Soient (J, φ_1) et (J, φ_2) deux solutions de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.

1. On suppose que pour un certain $t_0 \in J$ on a $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. Pourquoi a-t-on $\varphi_1 = \varphi_2$?
2. On suppose de plus que $\Omega \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in J$ on a

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t).$$

Ces résultats permettent notamment de résoudre certaines EDO ou bien d'obtenir des informations qualitatives sur leurs solutions. C'est le but des exercices suivants.

Exercice 7 (🕒 10 min.) On considère l'EDO

$$y' = y^2. \tag{3}$$

1. Mettre l'EDO (3) sous la forme

$$y' = f(t, y).$$

Donner explicitement I et Ω .

2. Pour $t_0 \in I$, peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz ?
3. Montrer que si une solution (J, φ) de (3) s'annule alors $\varphi = 0$.
4. En déduire les solutions (3). Sur quel intervalle sont-elles définies ?

Exercice 8 (🕒 5 min.) On suppose que si $I = \mathbb{R}$ et que f est une fonction T -périodique en sa première variable. Montrer qu'une solution (\mathbb{R}, φ) de l'EDO $y' = f(t, y)$ est T -périodique si et seulement si il existe $t_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(t_i + T) = \varphi(t_i).$$

2.4 Explosions en temps fini

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est un outil puissant de répondre par l'affirmative à l'existence et unicité d'une solution maximale. Toutefois, il se peut que l'intervalle de définition J d'une solution (J, φ) d'une EDO soit strictement inclus dans l'intervalle I . C'est ce que permet de caractériser le théorème suivant.

Cadre : On considère le problème de Cauchy suivant

$$y' = f(t, y), \quad y(t_i) = y_i, \quad (4)$$

où $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . On suppose de plus que f est de classe $C^1(I \times \Omega)$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution maximale (J, φ) de (4). De plus on sait que J est un ouvert et on note $J =]T_-, T_+[$.

Théorème 2 Soit $(]T_-, T_+[, \varphi)$ la solution maximale (4). Si $T_+ < \sup I$ alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $T_K \in]T_-, T_+[$ tel que la trajectoire

$$\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^d : t \in]T_K, T_+[\} \in \Omega \setminus K.$$

Exercice 9 (🕒 2 min.) Donner l'analogie du théorème 2 lorsque $T_- > \inf I$.

On illustre maintenant ce théorème sur un exemple pratique.

Exercice 10 (🕒 20 min.) On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy

$$-y'y = 1, \quad y(0) = y_0 > 0.$$

1. Pourquoi est-ce qu'une solution (J, φ) du problème de Cauchy vérifie nécessairement $\varphi > 0$?
2. Écrire le système sous la forme $y' = f(t, y)$. Comment choisir I et Ω pour s'intéresser à ce problème de Cauchy ?
3. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale (J, φ) .
4. Résoudre le problème de Cauchy et donner explicitement J et φ . La solution (J, φ) est-elle globale ?
5. Pourquoi est-ce qu'elle sort de tout compact lorsque t est proche de $\sup J$?

Ce théorème a plusieurs conséquences, que l'on se propose d'étudier dans les exercices suivants. Le premier, permet de donner un résultat d'existence globale de solutions.

Exercice 11 (🕒 10 min.) Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. On suppose que f est bornée et pour $t_i \in I$ et $y_i \in \mathbb{R}^d$, on considère le problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_i) = y_i.$$

Montrer que la solution maximale (J, φ) de ce problème de Cauchy est globale, c'est-à-dire définie sur I tout entier (ou encore que $J = I$).

On peut même démontrer le théorème dit de Cauchy-Lipschitz global.

Exercice 12 (🕒 15 min.) Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que f soit globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Pour $t_i \in I$ et $y_i \in \mathbb{R}^d$, on considère le problème de Cauchy

$$y' = f(t, y), \quad y(t_i) = y_i.$$

1. Donner la définition de « f est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable » ?
2. Montrer que la solution maximale (J, φ) de ce problème de Cauchy est globale, c'est-à-dire définie sur I tout entier (ou encore que $J = I$).

Remarque 1 En fait, le théorème de Cauchy-Lipschitz global est un peu plus général que ce que l'on a vu jusqu'à présent. En particulier, on peut démontrer qu'il est vrai sous l'hypothèse $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^d)$ et f globalement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

On peut même donner un résultat général sur les équations différentielles linéaires.

Exercice 13 (🕒 10 min.) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche des solutions à valeurs dans \mathbb{K} du problème de Cauchy suivant

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 = b,$$

$$\text{pour tout } p \in \{0, \dots, n-1\} \quad y^{(p)}(t_i) = y_{p,i}.$$

où $a_0, \dots, a_{n-1}, b \in C^0(I, \mathbb{K})$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

1. Montrer que l'on peut se ramener à l'étude du système

$$Y' = f(t, Y), Y(t_i) = Y_i.$$

Expliciter qui est Y , Y_i et f .

2. En déduire qu'il existe une unique solution globale au problème de Cauchy.

Récapitulatif 1 Lorsque l'on est confronté à un problème de Cauchy de la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(t_i) = y_i,$$

où $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

1. On repère dans un premier temps qui est f , I et Ω .
2. On vérifie que f satisfait les conditions d'applications du théorème de Cauchy-Lipschitz :
 - (a) si $f \in C^1(I \times \Omega, \mathbb{R}^d)$ alors il y a existence et unicité d'une solution maximale (J, φ) ,
 - (b) si de plus f est bornée ou globalement Lipschitzienne en la deuxième variable, on a existence globale, c'est-à-dire que $J = I$.

3 Solutions explicites des EDO

On va commencer par l'étude des Équations Différentielles Linéaires à coefficients constants.

3.1 EDL d'ordre n à coefficients constants

Pour étudier les solutions générales d'une EDL d'ordre n à coefficients constants, nous aurons besoin du lemme des noyaux.

Exercice 14 (🕒 15 min.) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes premiers entre eux.

(a) Montrer qu'il existe $U_1, U_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$(P_1 U_1)(A) + (P_2 U_2)(A) = Id.$$

(b) Pour $j \in \{1, 2\}$, on définit $\Pi_j : \ker((P_1 P_2)(A)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\Pi_j x = (P_j U_j)(A)x$. Montrer que $\text{Im}(\Pi_1) = \ker(P_2(A))$ et $\text{Im}(\Pi_2) = \ker(P_1(A))$.

(c) Montrer que pour tout $j \in \{1, 2\}$ $\Pi_j^2 = Id$ et conclure que

$$\ker((P_1 P_2)(A)) = \ker(P_1(A)) \oplus \ker(P_2(A)).$$

2. Montrer que si $P = \prod_{j=1}^d P_j$ où les P_j sont premiers entre eux alors

$$\ker(P(A)) = \bigoplus_{j=1}^d \ker(P_j(A)).$$

3. Que devient cette identité si P est un polynôme annulateur de A ?

On peut maintenant étudier la forme générale d'une EDL d'ordre n . On va voir que cela passe en premier lieu par l'étude des EDL de la forme

$$Y' = AY + B, \quad Y(t_i) = Y_i \in \mathbb{R}^n;$$

où ici, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 15 (🕒 45 min.)

On cherche des solutions à valeurs complexes du problème de Cauchy suivant

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = b(t),$$

$$\text{pour tout } p \in \{0, \dots, n-1\} \quad y^{(p)}(t_i) = y_{p,i}.$$

où $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On dit que l'équation différentielle est d'ordre n .

1. On commence par étudier les solutions au problème de Cauchy.

(a) Montrer que l'on peut écrire l'équation différentielle sous la forme

$$Y' = AY + B,$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ et $B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

(b) On s'intéresse dans un premier temps à l'équation homogène, c'est-à-dire telle que $B = 0$. Montrer qu'une solution du problème de Cauchy

$$Y' = AY, \quad Y(t_i) = Y_i$$

est donnée par

$$\varphi_h(t) = \exp((t - t_i)A)Y_i.$$

(c) Montrer qu'une solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par

$$\varphi_p(t) = \int_{t_i}^t e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

(d) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$Y' = AY + B$$

est un espace affine de dimension n que l'on précisera.

(e) Quelle est la nature de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = b(t).$$

2. On cherche maintenant à décrire plus en détails l'espace affine des solutions de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0 = b(t).$$

(a) Soit $P_A \in \mathbb{C}_n[X]$ le polynôme caractéristique de A . Montrer que

$$P_A(X) = (-1)^{n+1} (X^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j).$$

(b) On appelle équation caractéristique de l'EDL l'équation

$$P_A(X) = 0.$$

Commenter lorsque $n = 2$.

(c) Soit $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme minimal de A . Montrer qu'il existe $d \in \{1, \dots, n\}$, un vecteur $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{C}^d$ et un vecteur $(m_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in (\mathbb{N}^*)^d$ tels que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^d E_j, \quad E_j = \ker((A - \lambda_j)^{m_j})$$

et $A(E_j) \subset E_j$ avec $\dim(E_j) = m_j$

(d) On considère alors la restriction de A à E_j notée A_j . Montrer que

$$A_j = \lambda_j Id + N_j,$$

où N_j est une matrice nilpotente d'indice m_j .

(e) Soit $e_{1,j} \in E_j$ tel que $N_j^{m_j-1} e_{1,j} \neq 0$. Pour $p \in \{2, \dots, m_j\}$, on définit alors $e_{p,j} = N_j^{p-1} e_{1,j}$. Montrer que la famille $(e_{1,j}, \dots, e_{m_j,j})$ est une base de E_j .

(f) Soit $\Pi_j : \mathbb{C}^n \rightarrow E_j$ le projecteur sur E_j . On rappelle que par construction, c'est un polynôme en A . Montrer que si

$$Y' = AY$$

alors $Y_j := \Pi_j Y$ vérifie $Y'_j = (\lambda_j Id + N_j)Y_j$.

(g) On décompose Y_j sur la base $(e_{p,j})_{p \in \{1, \dots, m_j\}}$ de la façon suivante :

$$Y_j(t) = \sum_{p=1}^{m_j} y_{p,j}(t) e_{p,j}.$$

Montrer que la famille $(y_{p,j})$ vérifie le système linéaire d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} y'_{1,j} &= \lambda_j y_{1,j} \\ y'_{2,j} &= \lambda_j y_{2,j} + y_{1,j} \\ \vdots & \vdots \\ y'_{m_j,j} &= \lambda_j y_{m_j,j} + y_{m_j-1,j}. \end{cases}$$

(h) En déduire que $y_{j,p} = Q_p(t) e^{\lambda_j t}$ où $Q_p \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$. Quelle est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation $Y'_j = A_j Y_j$?

(i) Conclure.

3.2 Petit bestiaire des EDO

On récapitule une liste (très loin d'être exhaustive) des EDO que l'on sait résoudre explicitement.

EDO d'ordre 1 (cas de solutions à valeurs scalaires) Lorsque l'on s'intéresse à l'EDO linéaire d'ordre 1 de la forme

$$y' = a(t)y + b(t)$$

où $a, b \in C^0(\mathbb{R})$, on sait que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension un. Les techniques à utiliser sont

1. Résolution de l'équation homogène $y' = a(t)y$ en sachant qu'une solution est donnée par $\varphi(t) = \exp(\int_{t_i}^t a(s)ds)\varphi(t_i)$.
2. Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

EDO d'ordre 1 Si les solutions ne sont plus à valeurs scalaires, c'est-à-dire que l'on essaie de résoudre l'équation différentielle

$$Y' = AY + B(s),$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$. Les techniques à utiliser sont

1. savoir qu'une solution de l'équation homogène est donnée par

$$\varphi(t) = \exp\left((t - t_i)A\right)\varphi(t_i).$$

2. Rechercher une solution particulière avec la méthode de variation de la constante.

EDL d'ordre n à coefficients constants On calcule l'équation caractéristique associée au système et on cherche ses racines. L'idéal est d'obtenir le polynôme minimal associé à la matrice "compagnon" du système différentiel. On obtient alors grâce à sa décomposition en facteur premiers la structure des solutions du système homogène.

Variables séparés On dit qu'une EDO est à variable séparées si elle est de la forme

$$y'(t) = f(t)g(y).$$

La stratégie est alors de dire que

$$\int_{t_i}^t \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int_{t_i}^t f(t) dt.$$

En posant $u = y(t)$ dans la première intégrale, on obtient

$$\int_{y(t_i)}^{y(t)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{t_i}^t f(t) dt.$$

et on résout.

Exercice 16 (🕒 15 min.) *On s'intéresse au problème de Cauchy*

$$y' = \frac{1 - y^2}{1 - t^2}, \quad y(t_i) = y_i$$

où $t_i \in]-1, 1[$ et $y_i \in \mathbb{R}$.

1. Écrire l'équation différentielle sous la forme

$$y' = f(t, y), \quad y(t_i) = y_i \in]-1, 1[.$$

avec $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On donnera explicitement qui sont I et Ω .

2. Discuter l'existence d'une solution maximale (J, φ) pour ce problème.

3. Pourquoi a-t-on $-1 < \varphi(t) < 1$ pour tout $t \in J$?

4. Montrer que pour tout $t \in J$:

$$\varphi(t) = \tanh \left(\tanh^{-1}(t) - \tanh^{-1}(t_i) + \tanh^{-1}(y_i) \right).$$

5. En déduire que nécessairement $J = I$. Qui est φ dans le cas où $t_i = y_i$?

4 Systèmes autonomes 2×2

On s'intéresse dans cette section au cas particulier d'EDO de la forme

$$Y' = f(Y)$$

où on cherche une solution $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. On dit d'une telle équation différentielle qu'elle est autonome car la fonction f ne dépend pas de la variable t . On peut ré-écrire l'équation précédente, en posant $Y(t) = (x(t), y(t))$ de la forme

$$\begin{cases} x'(t) &= f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= f_2(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (5)$$

4.1 Généralités sur les portraits de phase

Un outil très pratique pour visualiser les trajectoires d'une équation différentielle autonome est ce que l'on appelle le portrait de phase.

Définition 3 *On appelle portrait de phase de l'EDO (5) l'ensemble*

$$\{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in J \text{ où } (J, \varphi) \text{ est solution de (5)}\}$$

Exercice 17 (🕒 5 min) Soit (J, φ) une solution maximale de (5).

1. Quelle est la nature géométrique de $t \in J \mapsto \varphi(t)$?
2. On suppose que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (5) et on considère $(\tilde{J}, \tilde{\varphi})$ une autre solution maximale de (5). Pourquoi est-ce que pour tout $t \in J \cap \tilde{J}$ a-t-on $\varphi(t) \neq \tilde{\varphi}(t)$? Comment est-ce que cela se traduit graphiquement ?

On se propose d'illustrer le concept de portrait de phase sur un exemple soluble explicitement.

Exercice 18 (🕒 15 min.) Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x. \end{cases}$$

1. Pourquoi peut-on dire que les solutions de ce système différentiel forment un espace vectoriel de dimension 2 ?
2. Résoudre explicitement ce système.
3. Tracer les trajectoires données par le problème de Cauchy $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, $(x(0), y(0)) = (2, 0)$.
4. Quel est le portrait de phase des solutions ?

En pratique, cela peut s'avérer complexe de tracer le portrait de phase d'un système différentiel.

Pour tracer le portrait de phase de (5) on suit généralement la stratégie suivante :

1. La trajectoire d'une solution φ de (5) passant par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est tangente au vecteur vitesse $(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0))$.
2. On trace ce que l'on nomme l'isocline horizontale :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) = 0\}$$

On trace alors des flèches vers la droite lorsque $f_1(x, y) > 0$ est positif et vers la gauche lorsque $f_1(x, y) < 0$.

3. On trace ce que l'on nomme l'isocline verticale :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_2(x, y) = 0\}$$

On trace alors des flèches vers le haut lorsque $f_2(x, y) > 0$ est positif et vers le bas lorsque $f_2(x, y) < 0$.

4. On a, normalement, délimité ainsi plusieurs régions du plan \mathbb{R}^2 . Le vecteur vitesse d'une trajectoire passant à un certain temps t par (x_0, y_0) est donnée par la "somme" des flèches tracées précédemment dans le domaine dans lequel appartient (x_0, y_0) .

5. Essayer de tracer quelques trajectoires compatibles avec ces renseignements.

Remarque 2 Pourquoi le terme isocline ? Iso = même, cline = inclinaison. On cherche donc les points qui ont les mêmes pentes verticales ou horizontales. On pourrait aussi regarder d'autres équations de droites en cherchant l'ensemble des (x, y) tels que $\frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} = \alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 (🕒 10 min.) Tracer le portrait de phase du système différentiel

$$\begin{cases} x' &= y - x - 2 \\ y' &= x^2 - y. \end{cases}$$

Exercice 20 (🕒 10 min.) Tracer le portrait de phase du système différentiel

$$y'' + y(y - a)(1 - y) = 0,$$

où $a \in]0, 1[$.

4.2 Portraits de phase : cas des systèmes linéaires

On va maintenant s'intéresser au cas particulier des systèmes linéaires 2×2 . Dans ce cas là, on peut classer tous les portraits de phase possibles. On considère alors un système différentiel linéaire qui s'écrit

$$Y' = AY.$$

Exercice 21 (🕒 1h15.)

1. On suppose que A a deux valeurs propres réelles $\lambda_1 \leq \lambda_2$ associées respectivement à deux vecteurs propres e_1 et e_2 .
 - (a) On suppose A admet une valeur propre nulle.
 - i. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$.
 - ii. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 < 0$.
 - iii. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
 - (b) On suppose que toutes les valeurs propres de A sont non nulles.
 - i. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
 - ii. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

- iii. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
 - iv. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$.
 - v. Tracer le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$.
2. On suppose maintenant que A admet deux valeurs propres complexes non réelles $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.
- (a) Pourquoi sont-elles nécessairement conjuguées ?
 - (b) Montrer que dans la base (v_1, v_2) , avec $e_1 = v_1 - iv_2$, $e_2 = v_1 + iv_2$, une solution φ de l'équation différentielle est de la forme
- $$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
- (c) En déduire les portraits de phases pour l'équations différentielles selon le signe de α .
 - (d) Pourquoi parle-t-on de foyer attractif lorsque $\alpha < 0$, de foyer répulsif lorsque $\alpha > 0$ et de centre lorsque $\alpha = 0$.
3. On suppose que A n'est pas diagonalisable et n'admet qu'une valeur propre réelle non-nulle notée λ .
- (a) Rappeler brièvement pourquoi on peut trouver une base (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de A devient

$$A_1 := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- (b) Montrer que

$$\exp(tA_1) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) En déduire le portrait de phase dans le plan (e_1, e_2) et discuter du fait que le point $(0, 0)$ soit attractif ou répulsif.

4.3 Points d'équilibres & linéarisation

Tout l'intérêt du chapitre précédent va être d'étudier ce que l'on nomme les points d'équilibres du système autonome et pouvoir discuter de leur stabilité en étudiant le linéarisé de l'EDO étudiée. On suppose ici que $f \in C^1(\mathbb{I} \times \Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 4 On dit que $(x_*, y_*) \in \Omega$ est un point d'équilibre du système différentiel (5) lorsque $f_1(x_*, y_*) = f_2(x_*, y_*) = 0$.

Exercice 22 (🕒 5 min.) Soit $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ un point d'équilibre pour (5).

1. Montrer que la solution constante $\varphi(t) = (x_*, y_*)$ est une solution de (5) définie sur \mathbb{R} .
2. Comment peut-on visualiser les points d'équilibres sur un portrait de phase ?

On aimerait savoir si un point d'équilibre est stable et on en donne alors une définition.

Définition 5 On suppose qu'étant donné une condition initiale $(x_0, y_0) \in \Omega$, il y a existence globale pour le système (5) et on note (\mathbb{R}, φ) la solution. Soit $(x_*, y_*) \in \Omega$ un point d'équilibre pour (5), on dit qu'il est stable si et seulement si

pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|(x_0, y_0) - (x_*, y_*)\| \leq \delta$
alors, pour tout $t \in J$, $\|\varphi(t)\| \leq \varepsilon$.

Exercice 23 (🕒 10 min.) On revient au cas de systèmes linéaires.

1. Quels sont les points d'équilibres d'un système linéaire ?
2. En reprenant les portraits de phase établis précédemment, quelle condition semble se dégager pour qu'un point d'équilibre soit asymptotiquement stable ?

Le théorème crucial dans cette partie est le suivant. Il permet dans certains cas, de conclure sur la stabilité d'un point d'équilibre en ne s'intéressant qu'à la Jacobienne de la fonction f en ce point.

Théorème 3 Soit $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ un point d'équilibre de f une fonction de classe $C^1(\Omega)$, on introduit J_* , la Jacobienne de f en (x_*, y_*) par

$$J_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_*, y_*) \end{pmatrix}.$$

Alors

1. si toutes les valeurs propres de J_* sont de partie réelles strictement négatives, (x_*, y_*) est asymptotiquement stable.

2. s'il existe une valeur propre de J_* de partie réelle strictement positive alors (x_*, y_*) est instable.

Exercice 24 (🕒 2 min.) Expliquer pourquoi, on peut dire que lorsque l'on rentre dans le cadre du Théorème 3 le système est entièrement décrit par le système linéaire obtenu en remplaçant f par $Df(x_*, y_*)$?

Attention, il peut se passer tout et n'importe quoi lorsque l'on n'est pas dans le cadre du théorème.

Exercice 25 (🕒 15 min.) 1. Soit le système

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -y^2 \end{cases}$$

- Quels sont les points d'équilibres de ce système différentiel.
 - Résoudre ce système différentiel pour n'importe quelle donnée de Cauchy au temps $t = 0$.
 - Écrire le système linéarisé aux points d'équilibres, donner ses valeurs propres et le résoudre.
 - Le point $(0, 0)$ est-il stable/instable pour le système différentiel ? Et pour son linéarisé ?
2. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= -x^3 \\ y' &= -y^3 \end{cases}$$

- Quels sont les points d'équilibres de ce système différentiel.
- Résoudre ce système différentiel pour n'importe quelle donnée de Cauchy au temps $t = 0$.
- Écrire le système linéarisé au(x) point(s) d'équilibre(s), donner ses valeurs propres et le résoudre.
- Le point $(0, 0)$ est-il stable/instable pour ce système ? Et pour son linéarisé ?

Exercice 26 (🕒 15 min.) On s'intéresse à l'équation du mouvement d'un pendule simple donnée par

$$y'' + \sin(y) = 0.$$

1. Mettre le problème sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 de la forme

$$Y' = f(Y).$$

- Étant donné une condition initiale (x_0, y_0) , discuter l'existence de solutions.
- Quels sont les points d'équilibre du système ?
- Dessiner le portrait de phase du système.
- Ces points d'équilibre sont-ils stables ou asymptotiquement stables ?
- Est-ce qu'on aurait pu appliquer le Théorème 3 ?

5 Modèles mathématiques mettant en jeu des EDO

5.1 Mécanique du point

On s'intéresse ici à l'étude du mouvement des points matériels.

D'un point de vue mathématique, on va se donner un repère $\mathcal{R}(t)$ (qui peut dépendre du temps) et étudier un système physique ponctuel de masse m . Ce repère n'est rien d'autre qu'un espace affine. En physique, on parle alors de référentiel et nous allons essayer d'en donner une définition mathématique acceptable.

Postulat 1 *Il existe un référentiel absolu, invariant au cours du temps.*

D'un point de vue mathématique, l'existence de ce référentiel absolu est la donnée d'un espace vectoriel que l'on prendra ici égal à \mathbb{R}^d .

Définition 6 (Référentiel) *Un référentiel est la donnée d'une application de classe C^∞*

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^d \\ t & \mapsto (\mathcal{O}(t), (e_1(t), \dots, e_d(t))) \end{cases}$$

telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(e_1(t), \dots, e_d(t))$ forme une base orthonormée de \mathbb{R}^d .

On s'intéresse à l'évolution de la position de ce système physique au cours du temps. Pour cela on note $x(t) \in \mathcal{R}(t)$ sa position au temps t dans le repère $\mathcal{R}(t)$.

On remarque que $t \mapsto x(t)$ est en fait une courbe paramétrée. Ainsi, le vecteur vitesse au temps t est donné par $\vec{v}(t) := \frac{dx}{dt}(t)$ et son accélération par $\vec{a}(t) := \frac{d^2x}{dt^2}(t)$.

Le principe fondamental de la dynamique, proposé par Isaac Newton (1642–1727), permet de relier l'accélération \vec{a} d'un système physique ponctuel de masse m aux forces extérieures auxquelles ce système physique est soumis (gravitation, électromagnétiques, forces de frottement...).

Principe 1 (Principe fondamental de la dynamique) *Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , un système ponctuel de masse m constante a une accélération proportionnelle à la somme des forces qu'il subit et inversement proportionnel à m . Plus précisément :*

$$m\vec{a} = \sum_{j=1}^d \vec{F}_j.$$

Remarque 3 *Ce principe fait référence à des référentiels dits galiléens. Ces référentiels sont ceux pour lesquels tout point matériel qui n'est soumis à aucune force est en mouvement rectiligne uniforme. On supposera toujours que les référentiels dans lesquels on travaille sont galiléens. Une définition mathématique que l'on pourrait proposer est que si $\mathcal{R}(t) = (\mathcal{O}(t), (e_1(t), e_2(t), \dots, e_d(t)))$ alors*

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt}(t) = v_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Exercice 27 Pourquoi dit-on que si un objet est inerte dans un référentiel galiléen alors il est en mouvement de translation rectiligne uniforme (par rapport au référentiel absolu) ?

Des exemples de force. Dans la physique classique, on distingue plusieurs types de forces, par exemple :

1. la force potentielle de pesanteur de la Terre exercée sur une masse ponctuelle m au voisinage de la terre :

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

où $\|\vec{g}\| \simeq 9,8 m.s^{-2}$ et \vec{g} est dirigé vers le centre de la terre.

2. la force gravitationnelle exercée par un corps A de masse m_A sur un corps B de masse m_B :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -G \frac{m_A m_B}{d^2} \vec{u}_{AB}.$$

Ici, d est la distance entre A et B , \vec{u}_{AB} le vecteur unitaire dirigé du corps A vers le corps B et G une constante dite constante gravitationnelle.

3. La force de rappel d'un ressort de longueur à vide ℓ est donnée par $\vec{F} = -k\ell\vec{e}$, où \vec{e} est la direction dans laquelle le ressort peut-être étiré.
4. Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles à la vitesse au carré.
5.

Exercice 28 (🕒 15min.) On s'intéresse à la chute d'un objet supposé ponctuel de masse m situé initialement à une hauteur H du sol avec une vitesse nulle.

1. Soit la fonction h qui donne l'altitude de notre objet. Justifier, en prenant en compte la force potentielle de pesanteur de la Terre et les forces de frottement de l'air que

$$h'' = -g + \alpha g h'^2, \quad h(0) = H, \quad h'(0) = 0. \quad (6)$$

où $\alpha \geq 0$.

2. On suppose dans un premier temps que les forces de frottement de l'air sont négligeables, c'est-à-dire que $\alpha = 0$.

(a) Montrer que si $h(t)$ représente l'altitude au temps t alors

$$h(t) = -gt^2 + H$$

où g est l'accélération de pesanteur.

(b) Au bout de combien de temps l'objet touche le sol ?

3. On ne suppose plus que $\alpha > 0$.

(a) Justifier l'existence d'une unique solution globale en temps au problème de Cauchy (6).

(b) Quel est l'unique point stationnaire de (6) ?

(c) Est-il stable ?

Un exemple de forces très importantes en physique sont les forces dites conservatives.

Définition 7 Une force est dite conservative lorsqu'elle dérive d'un potentiel $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et s'écrit

$$\vec{F} = -\nabla V.$$

Exercice 29 (🕒 5 min.) Le travail d'une force est l'énergie fournie par une force pour déplacer un objet d'un point A à un point B . D'un point de vue mathématique, on se donne un chemin de longueur ℓ , $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(\ell) = B$ et on définit le travail comme

$$W_{A \rightarrow B} = \int_0^\ell \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

On va montrer que lorsqu'une force est conservative, le travail d'une force ne dépend pas d'un chemin suivi.

1. Montrer que si $\vec{F} = -\nabla V$ alors

$$W_{A \rightarrow B} = V(A) - V(B).$$

2. En déduire que le travail le long d'un chemin fermé est nul.

3. On définit l'énergie totale d'un système sur lequel ne s'applique que des forces conservatives comme

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

où $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique et \mathcal{E}_p est la somme des potentiels associés à cette énergie. Montrer qu'alors \mathcal{E} est une quantité constante au cours du temps (On parle alors d'intégrale première).

Exercice 30 On considère une masse attachée à un ressort contrainte à ne se déplacer que sur une direction verticale. On se place dans le référentiel terrestre que l'on suppose fixe $\mathcal{R}(t) = (e_1, e_2, e_3)$ pour tout temps. Le ressort est fixé à une hauteur H et la masse est soumise à deux forces

(A) la force potentielle de pesanteur $\vec{F}_1 = -mge_3$

(B) la force de rappel du ressort $\vec{F}_2 = -k(\gamma(t) - He_3)$.

Où $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ est la position au temps $t \geq 0$ de la masse. On suppose de plus que $\frac{mg}{k} \in [0, H]$.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la hauteur $\gamma_3(t)$ de la masse au temps t satisfait l'équation différentielle

$$m\gamma_3''(t) = -mg - k(\gamma_3(t) - H)$$

2. Quels sont les points critiques pour cette équation différentielle ? Sont-ils stables ?
3. Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $\gamma_3(0) = h_0 \in [0, H]$, $\gamma_3'(0) = v_0$ et la calculer.
4. Montrer que ces deux forces sont conservatives et en déduire l'énergie totale du système.
5. En utilisant la conservation de l'énergie totale du système, retrouver l'équation différentielle satisfaite par γ_3 .
6. Tracer les trajectoires dans le plan de phase (γ_3, γ_3') .

5.2 Dynamique de population(s)

On s'intéresse à l'évolution d'une population (= groupe d'individus, de bactéries, d'espèces animales) dans différents contextes.

5.2.1 Modèle de Malthus

Le modèle de Malthus cherche à modéliser l'évolution d'une population en fonction du taux de naissance et de mortalité de cette dernière.

On note $b \in [0, 1]$ le taux de naissance et $d \in [0, 1]$ le taux de mortalité et on suppose qu'ils sont fixes au cours du temps. Soit $n(t)$ la nombre d'individus dans la population que l'on veut étudier au temps $t > 0$.

Exercice 31 (🕒 10 min.)

1. Pourquoi est-ce que l'évolution de la population peut se modéliser par le problème de Cauchy suivant

$$n'(t) = rn(t), \quad n(0) = n_0 > 0$$

où $r = b - d$?

2. Résoudre l'équation différentielle. Discuter du comportement des solutions en fonction du signe de r .
3. Quelles sont les limites du modèles, en particulier, qu'est-ce quels phénomènes pourrait-on devoir prendre en compte pour qu'ils soit plus proche de la réalité ?

5.3 Modèle de Verhulst

On cherche maintenant à modéliser l'évolution du nombre d'individus d'une population dans un environnement à ressources limités. On suppose dès lors que les taux de reproductions et de mortalité sont modélisés par une fonction $r : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^1([0, +\infty[)$, strictement décroissante et qui s'annule en un unique point $n_\star \in]0, +\infty[$.

Exercice 32 (🕒 30 min.)

1. Expliquer pourquoi on peut considérer que le problème de Cauchy

$$n' = r(n)n, \quad n(0) = n_0$$

prends en compte le fait d'avoir des ressources limitées.

2. Montrer que toute solution (J, φ) du problème de Cauchy est définie sur $[0, +\infty)$.
3. Montrer qu'une solution $([0, +\infty), \varphi)$ est monotone et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = n_*$.
4. Quels sont les points d'équilibres d'une telle équation différentielle. Discuter leur stabilité.
5. Un cas particulier de ce modèle est l'équation logistique où on choisit

$$r(n) = \lambda \left(1 - \frac{n}{K}\right)$$

avec $\lambda > 0$ et $K > 0$.

- (a) Que représentent λ et K dans ce modèle ?
- (b) Quel est le point d'équilibre ?
- (c) Résoudre explicitement cette équation différentielle.

5.4 Modèle de Lotka-Volterra

On va maintenant s'intéresser à un modèle mettant en jeu deux espèces qui interagissent entre elles. La première espèce sera composée de proies (par exemple des lapins) qui se font chasser par une autre espèce, dite de prédateurs (par exemple des renards).

On note $x(t)$ le nombre de lapins et $y(t)$ le nombre de renards au temps $t \geq 0$. Le système de Lotka-Volterra est donné par

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy, \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

où $a, b, c, d > 0$.

Exercice 33 (🕒 1 h.)

1. Discutons tout d'abord un petit peu du modèle. Le taux de variation de proies et de prédateurs est définie par

$$\frac{x'}{x} \quad \text{et} \quad \frac{y'}{y}$$

respectivement.

- (a) Pourquoi est-ce que l'on peut dire qu'en l'absence de prédateur les proies ont un taux de croissance constant ? Commenter la modélisation par rapport au signe de ce taux de croissance.
 - (b) Pourquoi est-ce que l'on peut dire qu'en l'absence de proies les prédateurs ont un taux de croissance constant ? Commenter la modélisation par rapport au signe de ce taux de croissance.
 - (c) En présence de prédateurs, pourquoi peut-on dire que le taux de variation du nombre de proies est linéaire en le nombre de prédateurs ? Est-ce que la présence de prédateurs fait augmenter ou bien diminuer le nombre de proies ?
 - (d) En présence de proies, pourquoi peut-on dire que le taux de variation du nombre de prédateurs est linéaire en le nombre de proies ? Est-ce que la présence de proies fait augmenter ou bien diminuer le nombre de prédateurs ?
2. Montrer qu'étant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ il existe une unique solution maximale (J, φ) au problème de Cauchy.
3. (a) Montrer que si $x_0 = 0$ alors pour tout $t \in J$ on a $\varphi_1(t) = 0$ (où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$). En déduire que si $x_0 > 0$ alors pour tout $t > 0$ on a $\varphi_1(t) > 0$.
- (b) Qu'en est-il pour φ_2 si $y_0 = 0$ ou si $y_0 > 0$?
- (c) Qu'est-ce que cela signifie pour le modèle ?
4. On va montrer que si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ la solution (J, φ) est globale en temps, c'est-à-dire que $J = [0, +\infty)$. Pour cela, on considère la fonction $H : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$H(x, y) = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y).$$

- (a) Montrer que H est constante le long des trajectoires (on dit alors que H est une intégrale première pour le système de Lotka-Volterra).
- (b) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$ on ait $c \ln(x) < \frac{dx}{2}$. De même, montrer qu'il existe une constante B telle que pour tout $y > B$ on ait $a \ln(y) < \frac{by}{2}$.
- (c) Montrer d'autre part qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on ait

$$dx - c \ln(x) > \alpha, \quad by - a \ln(y) > \alpha.$$

- (d) En déduire que

$$0 < \varphi_1(t) < \max(A, \frac{2}{d}(H(x_0, y_0) - \alpha)), \quad 0 < \varphi_1(t) < \max(B, \frac{2}{b}(H(x_0, y_0) - \alpha)).$$

- (e) Pourquoi a-t-on nécessairement $J = [0, +\infty[$?

5. On va maintenant s'intéresser aux points d'équilibres du système.
- (a) Quels sont les points d'équilibres du système ?

- (b) Si le système est à l'équilibre, qu'est-ce que cela signifie pour les populations de lapins et de renards ?
- (c) En calculant le linéarisé du système, pouvez-vous dire si ces points d'équilibres sont stables ou instables ?
- (d) Voilà le portrait de phase du système de Lotka-Volterra (voir Figure 2). Pouvez-vous conclure sur la stabilité de tous les points d'équilibres ?

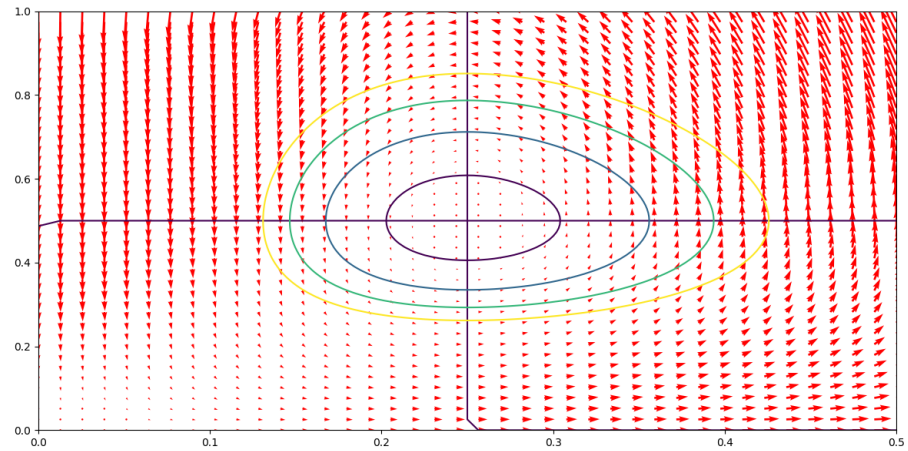


FIGURE 2 – Portrait de phase du système Lotka-Volterra pour $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ et $d = 4$. Isoclines horizontales et verticales ainsi que différentes lignes de niveau de l'intégrale première H .

6 Analyse numérique & EDO

On s'intéresse dans ce chapitre à l'analyse des schémas numériques utilisés pour discrétiser des EDO en se concentrant sur les méthodes d'Euler dites explicite et implicite.

6.1 Exemple de schémas à un pas

Soit $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction globalement Lipschitzienne sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ de constante de Lipschitz $k > 0$. On s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy suivant

$$(\star) : \begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Exercice 34 (🕒 5 min.)

1. Quelle équation intégrale vérifie une solution $([0, T], \varphi)$ de (\star) ?
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On se donne un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$ et pour $j \in \{0, \dots, N\}$ on considère les $N + 1$ points $t_j = j\Delta t \in [0, T]$.
 - (a) En approchant par la méthode des rectangles à gauche l'équation intégrale donnée en (1), proposer une méthode numérique pour résoudre (\star) . Il s'agit de la méthode d'Euler explicite.
 - (b) En approchant par la méthode des rectangles à droite l'équation intégrale donnée en (1), proposer une méthode numérique pour résoudre (\star) . Il s'agit de la méthode d'Euler implicite.
3. Pourquoi parle-t-on de méthode à un pas ?

6.2 Méthodes à un pas

On s'intéresse à des méthodes à pas constant $\Delta t = \frac{T}{N}$ ($N \in \mathbb{N}^*$). Une méthode à un pas est une méthode de résolution numérique de (\star) qui peut se mettre sous la forme

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + (\Delta t)\Phi(t_n, \varphi_n, \Delta t),$$

où Φ est continue de $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times [0, h_0]$ pour un certain $h_0 > 0$. On souhaite s'assurer que les méthodes d'Euler explicites et implicites sont bien des méthodes à un pas.

Exercice 35 (🕒 20 min)

1. Montrer que la méthode d'Euler explicite est bien une méthode à un pas.
2. On cherche à démontrer que la méthode d'Euler implicite est bien une méthode à un pas.

(a) Écrire la méthode d'Euler implicite sous la forme

$$\varphi_{n+1} - \Psi_{t_n, \Delta t}(\varphi_{n+1}) = \varphi_n,$$

pour une fonction $\Psi_{t,h}$ Lipschitzienne que l'on explicitera. Quelle est sa constante de Lipschitz ?

(b) Sous quelle condition sur h , $\Psi_{t,h}$ est-elle contractante ?

(c) Montrer qu'alors $Id - \Psi_{t,h}$ est inversible et Lipschitzienne de rapport $(1 - kh)^{-1}$ (où k est la constante de Lipschitz de f).

(d) En déduire que la méthode d'Euler implicite est bien une méthode à un pas.

Pour une méthode à un pas, on peut définir l'erreur de consistance.

Définition 8 (Erreur locale de consistance) L'erreur locale de consistance e_n relative à une solution exacte $([0, T], \varphi)$ est l'erreur

$$e_n(\varphi) = \varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n) - (\Delta t)\Phi(t_n, \varphi(t_n), \Delta t) \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Exercice 36 (🕒 5 min.)

1. Pourquoi peut-on dire que l'erreur locale de consistance mesure l'écart entre la valeur exacte $\varphi(t_{n+1})$ et la valeur approchée donnée par la méthode en partant de $\varphi(t_n)$ au temps t_n ?
2. Est-ce que cela signifie que l'on ne mesure l'erreur que sur une seule étape de l'algorithme ?
3. Justifier le terme "local" dans la notion d'erreur locale de consistance.

Définition 9 (Erreur (globale) de consistance) On définit l'erreur globale de consistance $\mathcal{E}_N(\varphi)$ relative à une solution $([0, T], \varphi)$ comme la somme des erreurs locales de consistance

$$\mathcal{E}_N(\varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \|e_n(\varphi)\|_{\mathbb{R}^d}.$$

Un schéma est dit consistant si pour toute solution exacte $([0, T], \varphi)$ de (\star) , la somme des erreurs de consistances relatives à φ vérifie.

$$\mathcal{E}_N(\varphi) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

On dit qu'il est consistant d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si pour toute solution $([0, T], \varphi)$ de (\star) il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$\mathcal{E}_N(\varphi) \leq C(\Delta t)^p.$$

Exercice 37 (🕒 1 min.) Pourquoi est-ce que si un schéma est consistant d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ il est en particulier consistant ?

Exercice 38 (🕒 15min.) On va démontrer que le schéma d'Euler implicite est consistant d'ordre 1.

1. Soit $t \in [0, T]$ et $\delta t > 0$ tel que $t - \delta t \in [0, T]$. Montrer que si $([0, T], \varphi)$ est une solution de classe $C^2([0, T])$ alors il existe $\theta \in]t - \delta t, t[$ tel que

$$\varphi(t - \delta t) = \varphi(t) - (\delta t)f(t, \varphi(t)) + (\delta t)^2 \frac{\varphi''(\theta)}{2}.$$

2. On rappelle que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ l'erreur locale de consistance de la méthode d'Euler est donnée par

$$e_n(\varphi) = \varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n) - (\Delta t)f(t_{n+1}, \varphi(t_{n+1})).$$

Montrer alors qu'il existe $C > 0$, indépendant de Δt tel que

$$\|e_n(\varphi)\|_{\mathbb{R}^d} \leq C(\Delta t)^2.$$

3. En déduire que le schéma d'Euler implicite est consistant d'ordre 1.

On définit maintenant la notion de stabilité pour un schéma numérique à un pas. On note ε_n l'erreur d'arrondie commise à l'étape $n \in \{0, \dots, N\}$.

Définition 10 (Stabilité d'un schéma à un pas) Une méthode à un pas est dite stable s'il existe une constante $S \geq 0$, dite constante de stabilité, telle que pour toute suite $(\varphi_n)_{0 \leq n \leq N}$ et $(\tilde{\varphi}_n)_{0 \leq n \leq N}$ définies par

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + (\Delta t)\Phi(t_n, \varphi_n, \Delta t), & 0 \leq n \leq N, \\ \tilde{\varphi}_{n+1} &= \tilde{\varphi}_n + (\Delta t)\Phi(t_n, \tilde{\varphi}_n, \Delta t) + \varepsilon_n, & 0 \leq n \leq N, \end{cases}$$

on ait

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\mathbb{R}^d} \leq S \left(\|\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0\|_{\mathbb{R}^d} + \sum_{n=0}^N \|\varepsilon_n\|_{\mathbb{R}^d} \right)$$

Exercice 39 (🕒 2 min.) Expliquer pourquoi la stabilité est une notion qui assure que l'erreur d'arrondie numérique ε_n faite à l'itération n ne s'amplifie pas à cause des itérations suivantes.

Nous allons étudier la stabilité de la méthode d'Euler implicite. Pour cela nous aurons besoin du Lemme de Grönwall discret, que nous avons déjà démontré dans le cours sur l'équation de la chaleur (il se démontre par récurrence).

Lemme 1 (Lemme de Grönwall discret) Soit une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\theta_{n+1} \leq (1 + \Lambda(\Delta t))\theta_n + \varepsilon_n$, où $(1 + \Lambda(\Delta t)) > 0$. Alors, on a

$$\theta_n \leq e^{n\Lambda\Delta t} \theta_0 + \sum_{j=0}^{n-1} e^{\Lambda(\Delta t)(n-j)} \varepsilon_j.$$

Exercice 40 On va montrer que la méthode d'Euler implicite est stable.

1. Montrer que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ on a

$$\|\varphi_{n+1} - \tilde{\varphi}_{n+1}\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{1 - k(\Delta t)} \left(\|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\mathbb{R}^d} + \|\varepsilon_n\|_{\mathbb{R}^d} \right).$$

2. Montrer qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\mathbb{R}^d} \leq (1 + \Lambda(\Delta t)) \left(\|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\mathbb{R}^d} + \|\varepsilon_n\|_{\mathbb{R}^d} \right).$$

3. En utilisant le lemme de Grönwall, en déduire que

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\mathbb{R}^d} \leq e^{\Lambda n(\Delta t)} \|\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0\|_{\mathbb{R}^d} + (1 + \Lambda(\Delta t)) \sum_{j=0}^{n-1} e^{\Lambda(\Delta t)(n-j)} \|\varepsilon_j\|_{\mathbb{R}^d}.$$

4. Conclure sur la stabilité de la méthode d'Euler implicite.

Enfin, nous pouvons définir la convergence d'un schéma numérique à un pas.

Définition 11 On dit que le schéma numérique à un pas est convergent si pour toute solution $([0, T], \varphi)$ de (\star) , on a

$$\mathcal{E}_{glob}(\varphi, \varphi_0) := \max_{0 \leq n \leq N} \|\varphi(t_n) - \varphi_n\|_{\mathbb{R}^d} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty.$$

\mathcal{E}_{glob} est l'erreur globale. La méthode est dite convergente d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ lorsque pour toute solution $([0, T], \varphi)$ de (\star) , il existe $C > 0$ tel que

$$\mathcal{E}_{glob}(\varphi, \varphi_0) \leq C(\Delta t)^p.$$

Le théorème très important en analyse numérique des EDO est le suivant.

Théorème 4 Consistance et stabilité impliquent convergence.

Exercice 41 (🕒 1 min.) Est-ce que la méthode d'Euler implicite converge ?

Nous allons démontrer le Théorème 4.

Exercice 42 (🕒 15 min.) Soit $([0, T], \varphi)$ une solution de (\star) . Pour $n \in \{0, \dots, N\}$, on pose $\tilde{\varphi}_n = \varphi(t_n)$.

1. Montrer que

$$\tilde{\varphi}_{n+1} = \tilde{\varphi}_n + (\Delta t)\Phi(t_n, \tilde{\varphi}_n, \Delta t) + e_n(\varphi),$$

où $e_n(\varphi)$ est l'erreur locale de consistance.

2. Montrer que si la méthode est stable de constante de stabilité S , on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\mathbb{R}^d} \leq S \left(\|\varphi_0 - \varphi(0)\|_{\mathbb{R}^d} + \mathcal{E}_N(\varphi) \right).$$

3. On suppose de plus que la méthode soit consistante. En déduire que si on choisit $\varphi_0 = \varphi(0)$ alors la méthode converge.

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{\mathbb{R}^d} \leq S \left(\|\varphi_0 - \varphi(0)\|_{\mathbb{R}^d} + \right).$$

4. Si la méthode est consistante d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de la convergence de la méthode ?

6.3 Explicite versus Implicite

On est en droit de se demander si, d'un point de vue pratique, on a une raison de préférer le schéma d'Euler implicite au schéma d'Euler explicite car il faut programmer une recherche de zéro. Nous allons voir sur un exemple élémentaire que cela peut être nécessaire. On parle alors de **problèmes raides**.

Exercice 43 (🕒 15 min.) Soit $\lambda < 0$, on considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1.$$

1. Quelle est l'unique solution (\mathbb{R}, φ) de ce problème de Cauchy ?
2. Est-ce que les méthodes d'Euler implicite et explicite convergent ?
3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$, on se donne le pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$ et on définit, pour $n \in \{0, \dots, N\}$, le temps $t_n = n(\Delta t)$.
 - (a) Pour $n \in \{0, \dots, N\}$, on note $\varphi_{n,e}$ la n -ième itération du schéma d'Euler explicite. Montrer que

$$\varphi_{n,e} = (1 + \lambda(\Delta t))^n.$$

Sous quelle condition sur (Δt) a-t-on $\varphi_{n,e} > 0$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$?

- (b) Pour $n \in \{0, \dots, N\}$, on note $\varphi_{n,i}$ la n -ième itération du schéma d'Euler implicite. Montrer que

$$\varphi_{n,i} = (1 - \lambda(\Delta t))^{-n}.$$

A-t-on $\varphi_{n,i} > 0$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$?

- (c) Quelle méthode vaudrait-il mieux privilégier ?
- (d) Et si on change le signe de λ ?

Pour illustrer l'exercice précédent, on peut considérer le problème de Cauchy suivant

$$(\star\star) : \begin{cases} y' &= -15y \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente les solutions de ce problème de Cauchy.

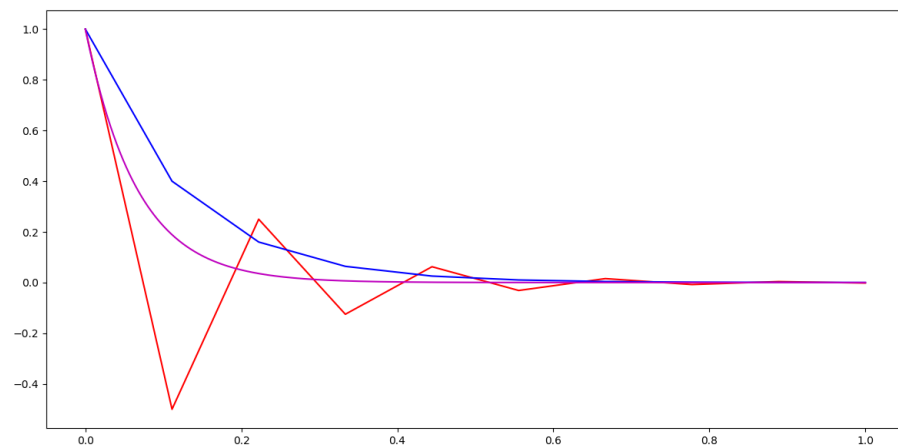


FIGURE 3 – En magenta, solution explicite du problème de Cauchy ($\star\star$). En rouge, solution numérique calculée par la méthode d'Euler explicite. En bleue, solution numérique calculée par la méthode d'Euler implicite. On a pris $N = 10$ et $T = 1$ donc $1 + \lambda(\Delta t) = 1 - \frac{15}{10} = -\frac{1}{2}$.