UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Master 1 - Math. Fondamentales, CSMI

# Optimisation - Séance de T.P. n° 2

Méthode du gradient projeté, d'Uzawa

---

Soit $g$, une fonction continue donnée sur le segment $[0,1]$. On considère un problème *d'obstacle* : trouver une fonction $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) \geq 1 & x \in (0,1) \\ u(x) \geq g(x) & x \in (0,1) \\ (-u''(x) - 1)\,(u(x) - g(x)) = 0 & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

La première équation traduit une concavité minimale de la fonction $u$, la deuxième équation représente l'obstacle : on veut être au-dessus de $g(x)$. La troisième équation traduit le fait que l'on a au moins égalité dans une des deux équations précédentes : soit on résout $-u''(x) = 1$, soit $u(x) = g(x)$, et on est sur l'obstacle.

## Problème de minimisation associé

On discrétise ce problème en introduisant un maillage uniforme : $x_j = jh$, où $h$ désigne le pas en espace du maillage, et $j \in \{0, ..., n+1\}$, avec $n \geq 1$ entier et $h = \frac{1}{n+1}$. Posons pour $j \in \{0, ..., n+1\}$, $g_j = g(x_j)$. On cherche des valeurs $u_j = u(x_j)$, avec $j \in \{0, ..., n+1\}$, telles que :

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} \geq 1 & j \in \{0, ..., n+1\} \\ u_j \geq g_j & j \in \{0, ..., n+1\} \\ \left(-\dfrac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}\right)(u_j - g_j) = 0 & j \in \{0, ..., n+1\} \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

On rappelle que $-\dfrac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}$ est l'approximation de $-u''(x_j)$ par la méthode des différences finies. Introduisons la matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On appelle également $b$ et $g$, les vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ définis par $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$.

Rappelons que si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, on a l'équivalence[1] :

$$u \text{ est solution de } (2) \Longleftrightarrow u \text{ est solution de } \left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{v \in K} \left\{ \dfrac{1}{2}(Av, v) - (b, v) \right\} \\ K = \{v \in \mathbb{R}^n : v \geq g\}. \end{array} \right.$$

On appelle alors $J$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v).$$

## Résolution du problème

On se place ici dans le cas particulier où $g(x) = \max\left(0, 1 - 100(x - 0.7)^2\right)$. On souhaite résoudre ce problème en utilisant l'algorithme du gradient projeté. On désigne par $\Pi_K$, la projection sur le convexe $K$. On pourra utiliser sans le démontrer que

$$\Pi_K(v) = \left(\max(v_i, g_i)\right)_{1 \leq i \leq n}.$$

1. Écrire une méthode de gradient à pas fixe pour déterminer le minimum de $J$ sur $\mathbb{R}^n$. Tester cette méthode et vérifier qu'elle converge bien vers le résultat souhaité.
2. Adapter le programme précédent pour programmer la méthode du gradient projeté à pas constant. On pourra choisir par exemple pour $\rho$ le pas optimal[2] de la méthode de gradient à pas fixe sans contrainte. On n'oubliera pas également d'imposer un nombre maximal d'iterations et de fixer un critère d'arrêt pertinent.
3. Tester le programme pour différentes valeurs de $n$. On représentera sur un même dessin le graphe de la solution et celui de l'obstacle. On vérifiera notamment que si $u(x) \neq g(x)$, alors $-u''(x) = 1$ (en utilisant l'approximation par différences finies).
4. Programmer l'algorithme d'Uzawa pour résoudre ce problème et comparer l'efficacité des méthodes implémentées. On testera notamment d'autres choix d'obstacles.

---

1. Rappelons que la notation $x \geq y$ pour des vecteur signifie : $\forall i \in \{0, ..., n+1\}$, $x_i \geq y_i$.
2. autrement dit, $\rho_{\text{opt}} = \dfrac{2}{\lambda_1(A) + \lambda_n(A)}$.