Optimisation - Séance de T.P. n° 1

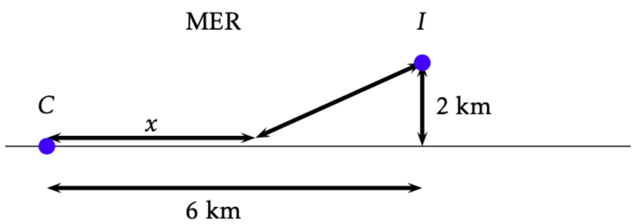
Optimisation sans contrainte en dimensions un et plus, optimisation quadratique

---

EXERCICE N° 1 *(optimisation 1D sans contrainte)*

On demande de mettre en œuvre et de comparer deux méthodes d'optimisation 1D : la méthode de dichotomie et la méthoe de Newton (qui sont rappelées en annexe).

Une île (désignée par le point I sur la figure ci-dessous) est située à 2 km des terres, au nord de son point le plus proche. Un visiteur est logé dans un chalet (désigné par le point C sur la figure ci-dessous) sur la rive qui est à 6 km à l'ouest de ce point. Le visiteur prévoit se rendre du chalet à l'île. Supposons que le visiteur court à un rythme de 8 km/h et qu'il nage à un rythme de 3 km/h. Quelle distance le visiteur devrait-il courir avant de nager pour minimiser le temps qu'il lui faudra pour atteindre l'île ?



Piste d'étude :

- on pourra comparer l'efficacité des deux méthodes numériques (robustesse à l'initialisation, nombre d'itérations).
- démontrer que la solution optimale est obtenue pour $x = 6 - 6/\sqrt{55} \simeq 5.19$.

EXERCICE N° 2 *(optimisation 2D avec contraintes par pénalisation)*

1. Soit $\varepsilon > 0$. On définit la fonction f_ε sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f_\varepsilon(x) = (x+1)^2 + (y-2)^2 + \frac{1}{\varepsilon}(y-x+1)^2.$$
En utilisant la méthode du gradient à pas fixe, minimiser f_ε sur $\mathbb{R}^2$ pour $\varepsilon \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$. Que remarque-t-on ?
2. Proposer, implémenter et tester une méthode permettant de déterminer la distance d'un point de $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$.

Piste d'étude :

- implémenter la méthode du gradient à pas optimal et comparer les vitesses de convergence

EXERCICE N° 3 *(méthode de gradient, du gradient conjugué)*

Dans tout l'exercice, on désignera par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ le produit scalaire associé à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. On considère la matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ définis par

$$A_n = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 4 & -2 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Écrire un programme permettant de minimiser la fonction

$$J_n : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \frac{1}{2}\langle A_n x, x \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle b_n, x \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

dans $\mathbb{R}^n$, à l'aide de la méthode du gradient conjugué, rappelée ci-dessous.

Algorithme du gradient conjugué

---

x^0 est donné, $r^0 = Ax^0 - b$ et $d^0 = -r^0$.

à l'iteration k : $x^{k+1} = x^k + \rho_k d^k$, $\rho_k = -\dfrac{(r^k, d^k)}{(Ad^k, d^k)}$

$r^{k+1} = Ax^{k+1} - b$

$d^{k+1} = -r^{k+1} + \beta_k d^k$, $\beta_k = \dfrac{\|r^{k+1}\|^2}{\|r^k\|^2}$.

On demande :

- **dans le cas $n = 2$:**
  - — d'afficher sur une même figure les courbes de niveau de J_n et son gradient (champ de vecteur).
  - — de tracer, sur la même courbe que précédemment, les lignes qui relient les x^k et de comparer les tracés avec ceux obtenus en utilisant d'autres méthodes de gradient.
- **lorsque n prend les valeurs 10, 20, 30, 50, 100 :**
  - — de tester chacune des méthodes
  - — de comparer à l'aide d'un graphique ou d'un tableau, la rapidité de convergence de chacune de ces méthodes.
  - — de commenter les résultats obtenus.

Quelques algorithmes d'optimisation

Méthode de la dichotomie pour l'optimisation 1D

On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ supposée strictement décroissante sur $]a, \rho^*[$ et strictement croissante sur $]\rho^*, b[$. On se donne une tolérance $\varepsilon > 0$.

```
tant que |b − a| > ε
      poser a′ = a + (1/3)(b − a) et b′ = a + (2/3)(b − a)
      si (f(a′) < f(b′)) alors
            poser b = b′
      sinon si (f(a′) > f(b′)) alors
            poser a = a′
      sinon si (f(a′) = f(b′)) alors
            poser a = a′
            poser b = b′
      fin si
fin tant que
```

Table 1 – Algorithme de la dichotomie.

Méthode de Newton pour la recherche de zéros

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$. Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^1$. On se donne $\varepsilon > 0$ et un nombre d'itérations maximal $k^{\max}$.

```
poser k = 0
choisir x^(0) et poser x^(1) = x^(0) − f(x^(0))/f′(x^(0))
tant que (|x^(k+1) − x^(k)| ≥ ε) et (k ≤ k^max) faire
      poser x^(k+1) = x^(k) − f(x^(k))/f′(x^(k))
      poser k = k + 1
fin tant que
```

Table 2 – Méthode de Newton unidimensionnelle.

Si l'on recherche les points critiques d'une fonction F, il suffit de choisir $f = F'$ dans l'algorithme ci-dessus.

Méthode de gradient à pas fixe

Soient $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On cherche à déterminer les minima locaux de f dans $\mathbb{R}^n$ (s'ils existent). On se donne $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ et un entier non nul $k^{\max}$.

```
poser k = 0
choisir x^(0)
tant que (‖x^(k+1) − x^(k)‖_{ℝ^n} ≥ ε) et (k ≤ k^max) faire
      calculer d^(k) = −∇J(x^(k))
      poser x^(k+1) = x^(k) + ρd^(k)
fin tant que
```

Table 3 – Algorithme du gradient à pas fixe.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$.