Problème 1
Bases réduites pour un problème elliptique affine
6 novembre 2020

Thomas Saigre

---

1 Approximation Élements Finis

1.1 Formulation variationnelle

On note $u^e(\mu)$ la solution de l'équation donnée dans l'énoncé du problème. On pose u^i la valeur de $u^e(\mu)$ sur Ω^i. On a en particulier :

$$-k^i\Delta u^i = 0 \text{ sur } \Omega^i$$

Soit $v \in X^e$, on a alors :

$$\sum_{i=0}^{4} -\int_{\Omega^i} k^i\Delta u^i = 0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^i \nabla v - k^i \int_{\partial\Omega^i} (\nabla u^i \cdot n^i)v = 0 \tag{2}$$

en appliquant la formule de Green.

Appliquons maintenant les conditions aux bords.

- Sur Ω^0 :

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega^0} \nabla u^0 \cdot n^0 &= -\int_{\Gamma_{\text{root}}} (\nabla u^0 \cdot n^0)v - \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma^i_{\text{int}}} (\nabla u^0 \cdot n^i)v - \int_{\Gamma^0_{\text{ext}}} \nabla u^0 \cdot n^0 v \\ &= -\int_{\Gamma_{\text{root}}} v + \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Gamma^i_{\text{int}}} (\nabla u^i \cdot n^i)v + \int_{\Gamma^0_{\text{ext}}} \mathrm{Bi}\, u^0 v \end{aligned}$$

- Sur Ω^i pour $i \in [\![1, 4]\!]$:

$$\begin{aligned} -k^i \int_{\partial\Omega^i} (\nabla u^i \cdot n^i)v &= k^i \int_{\Gamma^i_{\text{int}}} (\nabla u^i \cdot n^i)v - k^i \int_{\Gamma^i_{\text{ext}}} (\nabla u^i \cdot n^i)v \\ &= -k^i \int_{\Gamma^i_{\text{int}}} (\nabla u^i \cdot n^i)v + \int_{\Gamma^i_{\text{ext}}} \mathrm{Bi}\, u^i v \end{aligned}$$

Intégrons cela dans le calcul (2) effectué ci-dessus :

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^i \nabla v^i - \int_{\Gamma_{\text{root}}} v + \sum_{i=1}^{4} k^i \int_{\Gamma^i_{\text{int}}} (\nabla u^i \cdot n^i)v - \sum_{i=1}^{4} k^i \int_{\Gamma^i_{\text{int}}} (\nabla u^i \cdot n^i)v \\ + \sum_{i=1}^{4} k^i \sum_{\Gamma^i_{\text{ext}}} \mathrm{Bi} u^i v = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

D'une part, les deux sommes sur les chemins intérieurs se compensent, et d'autre part $\bigcup_{i=0}^{4} \Gamma^i_{\text{ext}} = \Gamma \setminus \Gamma_{\text{root}}$. Il vient alors que :

$$(3) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla u^i \nabla v + \mathrm{Bi} \int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}}} uv = \int_{\Gamma_{\text{root}}} v \tag{4}$$

Ainsi, $u^e(\mu)$ vérifie la formulation variationnelle :

$$a(u^e(\mu), v; \mu) = l(v) \quad \forall v \in X^e \tag{5}$$

avec

$$a(w, v; \mu) = \sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} \nabla w \cdot \nabla v + \mathrm{Bi} \int_{\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}}} wv \tag{6}$$

$$l(v) = \int_{\Gamma_{\mathrm{root}}} v \tag{7}$$

1.2 Problème de minimisation

Dans cette question, μ est fixé. Par abus de notation, on écrira $a(w, v)$ pour $a(w, v; \mu)$.
La forme a est trivialement bilinéaire et symétrique. Soient $w, v \in X^e$.

$$\begin{aligned}
|a(w, v)| &\leqslant \sum_i k^i \left| \int_{\Omega^i} \nabla w \nabla v \right| + \mathrm{Bi} \left| \int_{\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}}} wv \right| \\
&\leqslant \sum_i k^i \|\nabla w\|_{L^2(\Omega^i)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega^i)} + \mathrm{Bi} \|w\|_{L^2(\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}})} \|w\|_{L^2(\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}})}
\end{aligned}$$

par inégalité de Cauchy–Schwarz. Comme l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma \setminus \Gamma_{\mathrm{root}})$ est continue, il existe une constante $\tilde{C}$ telle que $\|u\|_{L^2(\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}})} \leqslant \tilde{C} \|u\|_{H^1(\Omega)}$, d'où

$$\leqslant \sum_i k^i \|\nabla w\|_{L^2(\Omega^i)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega^i)} + \mathrm{Bi}\, \tilde{C} \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

On pose $k^{\max} = \max_i k^i$

$$\begin{aligned}
&\leqslant k^{\max} \sum_i \|\nabla w\|_{L^2(\Omega^i)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega^i)} + \mathrm{Bi}\, \tilde{C} \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= k^{\max} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \mathrm{Bi}\, \tilde{C} \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leqslant k^{\max} \|\nabla w\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{LH^1(\Omega)} + \mathrm{Bi}\, \tilde{C} \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= \left(k^{\max} + \tilde{C}\, \mathrm{Bi}\right) \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc a est continue.

Coercivité de a : On va utiliser le lemme suivant :

Lemme : Il existe $C > 0$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega^i)} + \mathrm{Bi} \|v\|_{L^2(\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}})} \right) \tag{8}$$

En effet, d'après ce lemme, on a :

$$\begin{aligned}
a(v, v; \mu) &= \sum_i k^i \int_{\Omega^i} |\nabla v|^2 + \mathrm{Bi} \int_{\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}}} |v|^2 \\
&= \sum_i k^i \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathrm{Bi} \|v\|^2_{L^2(\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}})} \\
&\geqslant m \left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}})} \right)
\end{aligned}$$

où $m = \min \left\{k^0, k^1, j^2, k^3, k^4, \mathrm{Bi}\right\}$.

En prenant $X = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m}{2}} \\ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m}{2}} \\ \|v\|_{L^2(\Gamma \backslash \Gamma_{\mathrm{root}})} \end{bmatrix}$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz à ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, il vient que

$$\begin{aligned}
a(v,v) &\geqslant \frac{m}{2}\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}})}\right)^2 \\
&\geqslant \frac{m}{4}\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}})}\right)^2 + \frac{m}{4}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme,

$$\begin{aligned}
a(v,v) &\geqslant \frac{Cm}{4}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{4}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geqslant \tilde{m}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

en ayant posé $\tilde{m} = \min\left\{\frac{Cm}{4}, \frac{m}{4}\right\}$, d'où la coercivité de a.

Preuve du lemme : Par l'absurde, supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe u_n telle que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega^i)} + \text{Bi}\,\|u\|_{L^2(\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}})}\right) \tag{9}$$

Quitte à normaliser, on peut supposer que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout n. Par injection compacte de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers un élément $u \in L^2(\Omega)$. Dans la suite, on note à nouveau $(u_n)_n$ cette suite extraite. D'après (9), on a $\forall i, \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega^i)} \to 0$, d'où $\nabla u_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)$. La suite $(u_n)_n$ est donc une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, il en résulte que $u \in H^1$, et que $\nabla u = 0$. Ainsi, u est constante sur Ω.

Par continuité de la trace, on a $u|_{\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}}} = \lim_{n\to\infty} u_n|_{\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}}} = 0$ car d'après (9), $\|u\|_{L^2(\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}})} \to 0$. Donc $v = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_{\text{root}}$. Il en résulte que $u = 0$ sur Ω, ce qui contredit $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$. ■

La forme l est trivialement linéaire, et par un raisonnement analogue à ce qui a été fait précédemment, on montre que l est continue.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, la solution $u^e(\mu)$ satisfaisant le problème variationnel est unique et est solution du problème de minimisation

$$\inf_{w\in H^1(\Omega)} J(w) \tag{10}$$

où $J(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - l(v) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{4} k^i \int_{\Omega^i} |\nabla w|^2 + \frac{\text{Bi}}{2}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_{\text{root}}} w^2 - \int_{\Gamma_{\text{root}}} w$

2 Approximation par la méthode des Bases Réduites

Ici encore, lorsque cela est évident, on écrit u au lieu de $u(\mu)$ pour ne par trop surcharger la page.

2.1 Propriété de la norme de l'énergie

On note $\alpha = \alpha(\mu)$ la constante de coercivité de la forme biniléaire a, et $\gamma = \gamma(\mu)$ la constante de continuité. Soit $w_N \in W_N$ On a alors :

$$\begin{aligned}
|||u - u_N|||^2 &= a(u - u_N, u - u_N) \\
&= a(u,u) - 2a(u_N, u) + a(u_N, u_N) \\
&= a(u,u) - 2l(u_N) + a(u_N, u_N)
\end{aligned}$$

Or, par définition de J, on a $\forall w \in X^e, l(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - J(w)$, d'où :

$$\begin{aligned}
|||u - u_N|||^2 &= a(u,u) - a(u_N, u_N) + 2J(u_n) + a(u_N, u_N) \\
&\leqslant a(u,u) + 2J(w_N)
\end{aligned}$$

car $J(u_N) \leqslant J(w_N)\ \forall w_N \in W_n$

$$= a(u - w_N, u - w_N) = |||u - w_N|||^2$$

Ainsi :

$$|||u - u_N||| \leqslant |||u - w_N||| \qquad \forall w_N \in W_n \tag{11}$$

2.2 Propriété sur la sortie

On a d'une part $T_{\text{root}}(\mu) = l^0(u(\mu))$, et d'autre part $T_{\text{root}\,N} = l^0(u_N(\mu))$. D'où :

$$\begin{aligned} T_{\text{root}}(\mu) - T_{\text{root}\,N} &= f(u) - f(u_N) \\ &= a(u,u) - a(u_N, u_N) \\ &= a(u, u - u_N) + a(u, u_N) - a(u_N, u_N - u) - a(u_N, u) \\ &= a(u - u_N, u - u_N) \\ &= |||u - u_N|||_\mu^2 \end{aligned}$$

2.3 Équations linéaires définies par le système d'équation

On sait que $\forall v \in W_N, a(u_N(\mu), v; \mu) = l(v)$. La famille $(\xi^i)_i$ formant une base de W_N, on a pour la solution u_N ainsi que pour tout $v \in W_N$:

$$u_N = \sum_{i=1}^N u_N^i \xi^i \qquad v = \sum_{i=1}^N v^i \xi^i$$

En reportant cela dans l'égalité donnée ci-dessus, il vient que :

$$\sum_{i=1}^N u_N^i a(\xi^i, \xi^j) = f(\xi^j) \quad \forall j \in [\![1, N]\!]$$

Ainsi, comme $Z_N = \left[\xi^1, \ldots, \xi^N\right] \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times N}$, et que $u(\mu) = Z_N u_N$ par approximation des bases réduites ; on obtient que :

$$\begin{aligned} & \underline{A}^{\mathcal{N}}(\mu) = F \\ \Leftrightarrow \quad & Z_N^T \underline{A}^{\mathcal{N}} Z_N u_N(\mu) = Z_N^T F \end{aligned}$$

En posant :
- $\underline{A}_N = Z_N^T \underline{A}^{\mathcal{N}} Z_N$
- $\underline{F}_N = Z_N^T F$

il vient que $u_N(\mu)$ vérifie cet ensemble d'équations :

$$\underline{A}_N(\mu) u_N = \underline{F}_N \tag{12}$$

De même, comme $T_{\text{root}}^{\mathcal{N}}(\mu) = \underline{L}^{\mathcal{N},T} u^{\mathcal{N}}(\mu)$, en posant $\underline{L}_N^T = \underline{L}^{\mathcal{N},T} Z_N$ on obtient :

$$T_{\text{root},N}\mu = \underline{L}_N^T u_N \tag{13}$$

2.4 Décomposition des formes

On prend $Q = 5$. Pour $q \in \{0,1,2,3,4\}$, on pose pour $\mu \in D^\mu$ et $(u,v) \in X \times X$:

$$\theta^q(\mu) = k^q \qquad \text{et} \qquad a^q(w,v) = \int_{\Omega^q} \nabla w \cdot \nabla v \tag{14}$$

Et pour $q = 5$:

$$\theta^q(\mu) = \text{Bi} \qquad \text{et} \qquad a^q(w,v) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{\text{root}}} wv \tag{15}$$

En remarque que $\forall \mu, \theta^0(\mu) = 1$.
D'après (6), on a

$$a(w, v; \mu) = \sum_{q=0}^Q \theta^q(\mu) a^q(w,v) \tag{16}$$

Soit maintenant $\underline{A}^{\mathcal{N}q}$ la matrice définie par

$$\left(\underline{A}^{\mathcal{N}q}\right)_{ij} = a^q(\zeta^i, \zeta^j) \tag{17}$$

On a, pour tout j, en décomposant u dans la base de fonctions nodales (ζ^i).

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} u^i a(\zeta^i, \zeta^j; \mu) = l(\zeta^j)$$
$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} u^i \sum_{q=0}^{Q} \theta^q(\mu) a^q(\zeta^i, \zeta^j) = l(\zeta^j)$$

D'où

$$\underline{A}^{\mathcal{N}}(\mu) = \sum_{q=0}^{Q} \theta^q(\mu) \underline{A}^{\mathcal{N}q} \tag{18}$$

D'après ce qui précrède, $\underline{A}_N = Z_N^T \underline{A}^{\mathcal{N}} Z_N$. On montre que même que $\underline{A}_N^q = Z_N^T \underline{A}^{\mathcal{N}q} Z_N$.

2.5 Conditionnement de la matrice

Nous allons donner une inégalité sur le conditionnement de la matrice $\underline{A}_N(\mu)$. Commençons par calculer le quotient de Rayleigh de cette matrice. Soit $v_N = \sum_{i=1}^{N} v_n^i \xi^i$, où $(\xi^i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ forme une base orthornormée de W_N. On a alors :

$$\begin{aligned}
r_{\underline{A}}(v_N) &= \frac{v_N^T \underline{A}_N(\mu) v_N}{v_N^T v_N} \\
&= \frac{a(v_N, v_N)}{\left(\sum_i v_N^i \xi^{i,T}\right)\left(\sum_j v_N^j \xi^j\right)} \\
&= \frac{a(v_N, v_N)}{\sum_{i,j} v_N^i v_N^j \xi^{i,T} \xi^j} \\
&= \frac{a(v_N, v_N)}{\sum_i v_N^i} = \frac{a(v_N, v_N)}{\|v_N\|^2}
\end{aligned}$$

Comme la base (ξ^i) est orthonormée, il vient que $\|(v_N^i)_i\| = \|v_N\|_{H^1}$, d'où :

$$r_{\underline{A}}(v_N) = \frac{a(v_N, v_N)}{\|v_N\|_{H^1}}$$

Ainsi, en utilisant d'une part la continuité de a et d'autre par la coercivité, il vient que :

$$\frac{\alpha^e(\mu)\|v_N\|^2}{\|v_N\|^2} \leqslant r_{\underline{A}}(v_N) \leqslant \frac{\gamma^e(\mu)\|v_N\|^2}{\|v_N\|^2}$$
$$\alpha^e(\mu) \leqslant r_{\underline{A}}(v_N) \leqslant \gamma^e(\mu) \tag{19}$$

Cette propriété est vraie pour tout $v_N \in W_N$.

On prend $v_{\max} \in W_N$ un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $\underline{A}_N$, que l'on note $\lambda_{\max}$. On a alors :

$$r_{\underline{A}}(v_{\max}) = \frac{v_{\max}^T \underline{A}_N v_{\max}}{\|v_{\max}\|^2} = \frac{v_{\max}^T \lambda_{\max} v_{\max}}{\|v_{\max}\|^2} = \lambda_{\max}$$

Il vient alors d'après la formule (19) que :

$$\lambda_{\max} \leqslant \gamma^e(\mu) \tag{20}$$

De la même manière, en prenant $v_{\min}$ vecteur propre associé à la plus petite valeur propre $\lambda_{\min}$, on montre que :

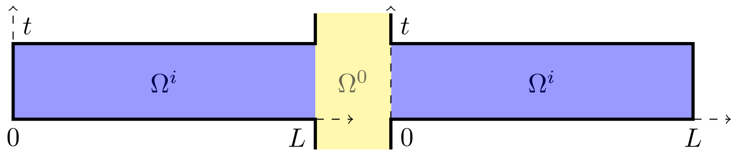
$$\alpha^e(\mu) \leqslant \lambda_{\min} \tag{21}$$

Toutes les quantités considérées dans ces deux dernières équations sont positives (les valeurs propres de $\underline{A}(\mu)$ sont strictement positives), ainsi en faisant $(20)\times\frac{1}{21}$, il vient que :

$$\kappa(\underline{A}_N(\mu)) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leqslant \frac{\gamma^e(\mu)}{\alpha^e(\mu)} \tag{22}$$

3 Transformation geometrique

Dans ce qui précède, on a prit $L = 2.5$ et $t = 0.25$ fixés (au vu du problème, ces grandeurs sont certainement exprimées en cm). On prend maintenant L et t quelconques. Posons $L_0 = 2.5$ et $t_0 = 0.25$. On définit $\Omega^i_{L,t}$, pour $i = 1, \cdots, 4$ comme étant le domaine correspondant à Ω^i dans le problème, avec les dimensions L et t. On note aussi Ω^i_0 le domaine associé à (L_0, t_0). Si u est une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on écrit en fonction de ces deux composantes : $u(l, \tau)$ pour $l \in [0, L]$ et $\tau \in [0, t]$.



On peut alors faire le calcul suivant, quitte à séparer $\Omega^i_{L,t}$ en deux sous domaines, et à translater l'origine du repère :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^i_{L,t}} u(l,\tau)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^L \int_0^t u(l,\tau)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{L_0}\int_0^{t_0} u\left(\frac{L}{L_0}\lambda, \frac{t}{t_0}T\right)\frac{t}{t_0}\frac{L}{L_0}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}T\end{aligned}$$

en effectuant les changements de variables $T = \dfrac{t_0}{t}\tau$ et $\lambda = \dfrac{L_0}{L}l$

$$= \frac{tL}{t_0 L_0}\int_{\Omega^i_0} u\circ\mathcal{T}_{L,t}(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}T$$

où $\mathcal{T}_{L,t}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par $\mathcal{T}_{L,T}(\lambda, T) = \left(\dfrac{L}{L_0}\lambda, \dfrac{t}{t_0}T\right)$.

Le chemin Γ_{root} reste le même pour des valeurs différentes de L et t, et de la même manière que précédemment, on montre que :

$$\int_{\Gamma\backslash\Gamma_{\text{root}}} u = \frac{tL}{t_0L_0}\sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma^i_{\text{ext}}} u\circ\mathcal{T}_{L,t} + \int_{\Gamma^0_{\text{ext}}} u$$

On arrive alors, en raisonnant de façon analogue à ce qui a été fait en première partie que

$$a(u^e(\mu), v; \mu) = l(v)\forall v \in X^e$$

avec

$$\begin{aligned}a(w,v;\mu) = \frac{tL}{t_0L_0}\sum_{i=0}^4 k^i \int_{\Omega^i_0} \nabla\mathcal{T}_{L,t}\times\nabla w\circ\mathcal{T}_{L,t}\cdot\nabla\mathcal{T}_{L,t}\times\nabla v\circ\mathcal{T}_{L,t} \\ + \mathrm{Bi}\frac{tL}{t_0L_0}\sum_{i=0}^4\int_{\Gamma^i_{\text{ext}}} u\circ\mathcal{T}_{L,t}\cdot v\circ\mathcal{T}_{L,t} + \int_{\Gamma^0_{\text{ext}}} uv \\ l(v) = \int_{\Gamma_{\text{root}}} v\end{aligned}$$