Отчёт по лабораторной работе №3 по дисциплине Компьютерный практикум по статистическому анализу данных

Линейная алгебра

Шаповалова Диана Дмитриевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Основной целью работы является изучение возможностей специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры

2 Выполнение работы

2.1 Поэлементные операции над многомерными массивами

Для матрицы 4×3 рассмотрим поэлементные операции сложения и произведения её элементов.

Для работы со средними значениями можно воспользоваться возможностями пакета Statistics

Шаповалова Диана Дмитриевна. 1032211220

Лаб №4. Линейная алгебра ¶

4.2.1. Поэлементные операции над многомерными массивами

```
[1]: a = rand(1:20,(4,3))

[1]: 4×3 Matrix{Int64}:
       2  12   5
       5   7  11
      20  12   7
       4  16  10

[2]: # Поэлементная сумма:
     sum(a)

[2]: 111

[4]: # Поэлементная сумма по столбцам:
     sum(a,dims=1)

[4]: 1×3 Matrix{Int64}:
      31  47  33

[5]: # Поэлементная сумма по строкам:
     sum(a,dims=2)

[5]: 4×1 Matrix{Int64}:
      19
      23
      39
      30

[6]: # Поэлементное произведение:
     prod(a)

[6]: 49674240000
```

Рис. 2.1: Выполняем примеры по поэлементные операции над многомерными массивами

2.2 Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

Для выполнения таких операций над матрицами, как транспонирование, диагонализация, определение следа, ранга, определителя матрицы и т.п. можно воспользоваться библиотекой (пакетом) LinearAlgebra

4.2.2. Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

```
[15]: import Pkg
      Pkg.add("LinearAlgebra")
      using LinearAlgebra

   Resolving package versions...
    Updating `C:\Users\dina7\.julia\environments\v1.10\Project.toml`
  [37e2e46d] + LinearAlgebra
  No Changes to `C:\Users\dina7\.julia\environments\v1.10\Manifest.toml`

[16]: b = rand(1:20,(4,4))

[16]: 4×4 Matrix{Int64}:
        9  19  17  1
        5  12   2  1
        3   6   6  1
       20   7  17  1

[17]: # Транспонирование:
      transpose(b)

[17]: 4×4 transpose(::Matrix{Int64}) with eltype Int64:
        9   5  3  20
       19  12  6   7
       17   2  6  17
        1   1  1   1

[18]: # След матрицы (сумма диагональных элементов):
      tr(b)

[18]: 28

[19]: # Извлечение диагональных элементов как массив:
      diag(b)

[19]: 4-element Vector{Int64}:
        9
       12
        6
        1
```

Рис. 2.2: Выполняем примеры по транспонированию, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

2.3 Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

Для вычисления нормы используется LinearAlgebra.norm(x).

4.2.3. Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

24]:
```
# Создание вектора X:
X = [2, 4, -5]
```

24]:
```
3-element Vector{Int64}:
  2
  4
 -5
```

25]:
```
# Вычисление евклидовой нормы:
norm(X)
```

25]:
```
6.708203932499369
```

26]:
```
# Вычисление p-нормы:
p = 1
norm(X,p)
```

26]:
```
11.0
```

27]:
```
# Расстояние между двумя векторами X и Y:
X = [2, 4, -5];
Y = [1,-1,3];
norm(X-Y)
```

27]:
```
9.486832980505138
```

29]:
```
# Проверка по базовому определению:
sqrt(sum((X-Y).^2))
```

29]:
```
9.486832980505138
```

30]:
```
# Угол между двумя векторами:
acos((transpose(X)*Y)/(norm(X)*norm(Y)))
```

30]:
```
2.4404307889469252
```

Рис. 2.3: Выполняем примеры по вычислению нормы векторов и матриц, повороты, вращения

2.4 Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение

4.2.4. Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение

[37]:
```
# Матрица 2х3 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
A = rand(1:10,(2,3))
```

[37]:
```
2×3 Matrix{Int64}:
 5   4  6
 5  10  7
```

[38]:
```
# Матрица 3х4 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
B = rand(1:10,(3,4))
```

[38]:
```
3×4 Matrix{Int64}:
 8   3  7  8
 1   9  1  1
 9  10  3  1
```

[39]:
```
# Произведение матриц A и B:
A*B
```

[39]:
```
2×4 Matrix{Int64}:
  98  111  57  50
 113  175  66  57
```

[40]:
```
# Единичная матрица 3х3:
Matrix{Int}(I, 3, 3)
```

[40]:
```
3×3 Matrix{Int64}:
 1  0  0
 0  1  0
 0  0  1
```

[41]:
```
# Скалярное произведение векторов X и Y:
X = [2, 4, -5]
Y = [1,-1,3]
dot(X,Y)
```

[41]:
```
-17
```

[42]:
```
# тоже скалярное произведение:
X'Y
```

Рис. 2.4: Выполняем примеры по матричному умножению, единичная матрица, скалярное произведение

2.5 Факторизация. Специальные матричные структуры

4.2.5. Факторизация. Специальные матричные структуры

```
[43]: # Задаём квадратную матрицу 3x3 со случайными значениями:
      A = rand(3, 3)

[43]: 3×3 Matrix{Float64}:
       0.0348329  0.375824   0.747843
       0.240031   0.385661   0.968305
       0.360039   0.0386811  0.778836

[44]: # Задаём единичный вектор:
      x = fill(1.0, 3)

[44]: 3-element Vector{Float64}:
       1.0
       1.0
       1.0

[45]: # Задаём вектор b:
      b = A*x

[45]: 3-element Vector{Float64}:
       1.1584997099418903
       1.5939970955428544
       1.177556154750584

[46]: # Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
      # (убеждаемся, что x - единичный вектор):
      A\b

[46]: 3-element Vector{Float64}:
       0.9999999999999992
       0.999999999999999
       1.0000000000000004

[47]: # LU-факторизация:
      Alu = lu(A)

[47]: LU{Float64, Matrix{Float64}, Vector{Int64}}
      L factor:
      3×3 Matrix{Float64}:
```

Рис. 2.5: Выполняем примеры по факторизации, специальные матричные структуры

2.6 Общая линейная алгебра

4.2.6. Общая линейная алгебра

9]:
```
# Матрица с рациональными элементами:
Arational = Matrix{Rational{BigInt}}(rand(1:10, 3, 3))/10
```

9]:
```
3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 3//10  3//5   1//10
  1     4//5   1//5
 2//5   3//10  9//10
```

0]:
```
# Единичный вектор:
x = fill(1, 3)
```

0]:
```
3-element Vector{Int64}:
 1
 1
 1
```

1]:
```
# Задаём вектор b:
b = Arational*x
```

1]:
```
3-element Vector{Rational{BigInt}}:
  1
  2
 8//5
```

2]:
```
# Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
# (убеждаемся, что x - единичный вектор):
Arational\b
```

2]:
```
3-element Vector{Rational{BigInt}}:
 1
 1
 1
```

3]:
```
# LU-разложение:
lu(Arational)
```

3]:
```
LU{Rational{BigInt}, Matrix{Rational{BigInt}}, Vector{Int64}}
```

Рис. 2.6: Выполняем примеры по общей линейной алгебре

2.7 Задания для самостоятельного выполнения

2.8 Произведение векторов

1. Задайте вектор v. Умножьте вектор v скалярно сам на себя и сохраните результат в dot_v.

2. Умножьте v матрично на себя (внешнее произведение), присвоив результат переменной outer_v.

4.4. Задания для самостоятельного выполнения

4.4.1. Произведение векторов

```
[84]: ### 1. Задайте вектор v. Умножьте вектор v скалярно сам на себя и сохраните результат в dot_v.

[85]: v = [1, 2, 3]

[85]: 3-element Vector{Int64}:
       1
       2
       3

[86]: dot_v= dot(v, v)

[86]: 14

[87]: ### 2. Умножьте v матрично на себя (внешнее произведение), присвоив результат переменной outer_v

[88]: outer_v = v * transpose(v)

[88]: 3×3 Matrix{Int64}:
       1  2  3
       2  4  6
       3  6  9
```

Рис. 2.7: Произведение векторов

2.9 Системы линейных уравнений

1. Решить СЛАУ с двумя неизвестными

1. Решить СЛАУ с двумя неизвестными. Пунтк а)

```
[90]: A = [1 1; 1 -1]

[90]: 2x2 Matrix{Int64}:
       1   1
       1  -1

[91]: B = [2; 3]

[91]: 2-element Vector{Int64}:
       2
       3

[92]: A\B

[92]: 2-element Vector{Float64}:
        2.5
       -0.5
```

Пункт b) (имеет бесконечно много решений, т.к. второе уравнение линейно зависимо от первого, поэтому выводит ошибку)

```
[105]: A = [1 1; 2 2]
       B = [2; 4]

[105]: 2-element Vector{Int64}:
        2
        4

[108]: rez = A\ B

       SingularException(2)

       Stacktrace:
        [1] checknonsingular
          @ c:\users\dina7\appdata\local\programs\julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\factorization.jl:68 [inlined]
        [2] checknonsingular
          @ c:\users\dina7\appdata\local\programs\julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\factorization.jl:71 [inlined]
        [3] #lu!#158
          @ c:\users\dina7\appdata\local\programs\julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:83 [inlined]
        [4] lu!
          @ c:\users\dina7\appdata\local\programs\julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:81 [inlined]
        [5] lu(A::Matrix{Int64}, pivot::RowMaximum; check::Bool)
          @ LinearAlgebra c:\users\dina7\appdata\local\programs\julia-1.10.5\share\julia\stdlib\v1.10\LinearAlgebra\src\lu.jl:300
```

Рис. 2.8: Системы линейных уравнений

Пункт d)

```
[111]: A = [1 1; 2 2; 3 3]
       B = [1; 2; 3]

[111]: 3-element Vector{Int64}:
        1
        2
        3

[112]: rez = A\ B

[112]: 2-element Vector{Float64}:
        0.4999999999999999
        0.5
```

Пункт e)

```
[113]: A = [1 1; 2 1; 1 -1]
       B = [2; 1; 3]

[113]: 3-element Vector{Int64}:
        2
        1
        3

[114]: rez = A\ B

[114]: 2-element Vector{Float64}:
         1.5000000000000004
        -0.9999999999999997
```

Рис. 2.9: Системы линейных уравнений

2. Решить СЛАУ с тремя неизвестными

2. Решить СЛАУ с тремя неизвестными. Пункт a)

```
[117]: A = [1 1 1; 1 -1 -2;]
       B = [2; 3]

[117]: 2-element Vector{Int64}:
        2
        3

[118]: rez = A\ B

[118]: 3-element Vector{Float64}:
         2.2142857142857144
         0.35714285714285704
        -0.5714285714285712
```

Пункт b)

```
[119]: A = [1 1 1; 2 2 -3; 3 1 1]
       B = [2; 4; 1]

[119]: 3-element Vector{Int64}:
        2
        4
        1

[120]: rez = A\ B

[120]: 3-element Vector{Float64}:
        -0.5
         2.5
         0.0
```

Пункт c) (система имеет бесконечно много решений)

```
[121]: A = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
       B = [1; 0; 1]

[121]: 3-element Vector{Int64}:
        1
```

Рис. 2.10: Системы линейных уравнений

2.10 Операции с матрицами

1. Приведите приведённые ниже матрицы к диагональному виду

4.4.3. Операции с матрицами

1. Приведите приведённые ниже матрицы к диагональному виду. Пункт а)

```
using LinearAlgebra

# Исходная матрица
A = [1 -2;
     -2 1]

# Собственные значения и собственные векторы
eigen_decomp = eigen(A)

# Собственные значения (диагональная матрица)
D = Diagonal(eigen_decomp.values)

# Матрица собственных векторов
P = eigen_decomp.vectors

println("Исходная матрица A:")
println(A)

println("\nДиагональная матрица D:")
println(D)

println("\nМатрица собственных векторов P:")
println(P)
```

```
Исходная матрица A:
[1 -2; -2 1]

Диагональная матрица D:
[-1.0 0.0; 0.0 3.0]

Матрица собственных векторов P:
[-0.7071067811865475 -0.7071067811865475; -0.7071067811865475 0.7071067811865475]
```

Рис. 2.11: Операции с матрицами

2. Вычислите

2. Вычислите. Пункт a)

```
[29]: using LinearAlgebra

# Исходная матрица
A = [1 -2;
     -2 1]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
P = eigen_decomp.vectors  # Матрица собственных векторов
D = Diagonal(eigen_decomp.values)  # Диагональная матрица собственных значений

# Возводим диагональную матрицу в 10-ю степень
D_10 = D.^10

# Вычисляем A^10
A_10 = P * D_10 * inv(P)

println("Матрица A^10:")
println(A_10)
```

```
Матрица A^10:
[29525.0 -29524.0; -29524.0 29525.0]
```

Пункт b)

```
[31]: using LinearAlgebra

# Исходная матрица
A = [5 -2;
     -2 5]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

# Проверяем, что собственные значения неотрицательные
if all(eigenvalues .>= 0)
```

Рис. 2.12: Операции с матрицами

3. Найдите собственные значения матрицы A. Создайте диагональную матрицу из собственных значений матрицы □. Создайте нижнедиагональную матрицу из матрица □. Оцените эффективность выполняемых операций.

Создайте диагональную матрицу из собственных значений матрицы A. Создайте нижнедиагональную матрицу из матрица A. Оцените эффективность выполняемых операций.

```
[140]: using LinearAlgebra
using BenchmarkTools  # Для оценки времени выполнения

# Исходная матрица A
A = [
    140  97  74 168 131;
     97 106  89 131  36;
     74  89 152 144  71;
    168 131 144  54 142;
    131  36  71 142  36
]

# 1. Нахождение собственных значений и векторов
@btime eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

println("Собственные значения матрицы A:")
println(eigenvalues)

# 2. Создание диагональной матрицы из собственных значений
# Прямое создание переменной и вывод без использования @btime
diag_matrix = Diagonal(eigenvalues)

println("\nДиагональная матрица из собственных значений:")
println(Matrix(diag_matrix))  # Преобразуем в стандартный массив для вывода

# 3. Создание нижнедиагональной матрицы из A
lower_triangular = LowerTriangular(A)

println("\nНижнедиагональная матрица из A:")
println(Matrix(lower_triangular))

# 4. Оценка эффективности
println("\nЭффективность выполнения операций:")
@btime eigen(A)
@btime Diagonal(eigenvalues)
@btime LowerTriangular(A)
```

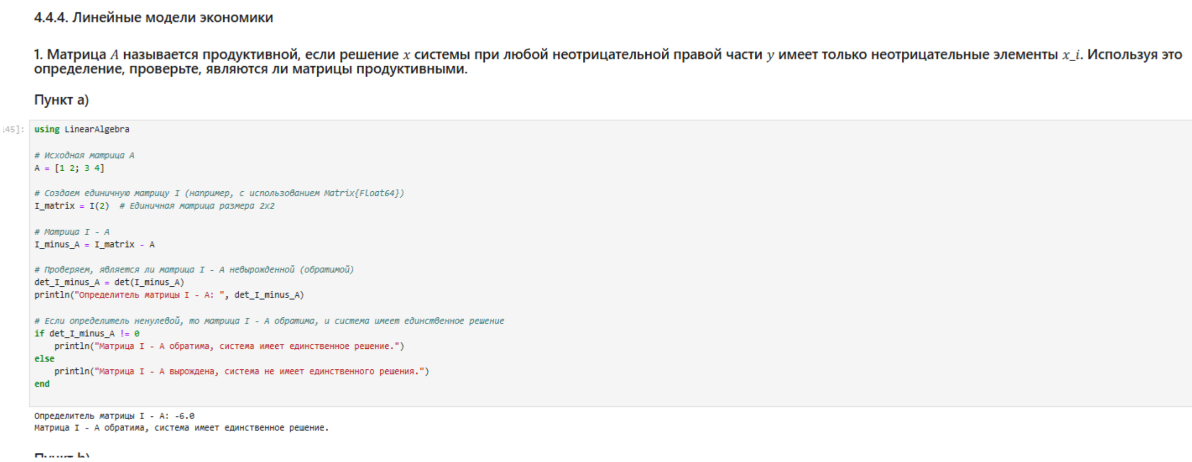
```
  8.367 μs (11 allocations: 3.00 KiB)
Собственные значения матрицы A:
[-0.2360679774997897, 4.23606797749979]

Диагональная матрица из собственных значений:
[-0.2360679774997897 0.0; 0.0 4.23606797749979]

Нижнедиагональная матрица из A:
[140 0 0 0 0; 97 106 0 0 0; 74 89 152 0 0; 168 131 144 54 0; 131 36 71 142 36]

Эффективность выполнения операций:
```

Рис. 2.13: Операции с матрицами

2.11 Линейные модели экономики

Линейная модель экономики может быть записана как СЛАУ $x - Ax = y$, где элементы матрицы A и столбца y — неотрицательные числа. По своему смыслу в экономике элементы матрицы A и столбцов x, y не могут быть отрицательными числами.

1. Матрица A называется продуктивной, если решение x системы при любой неотрицательной правой части y имеет только неотрицательные элементы x_i. Используя это определение, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.



4.4.4. Линейные модели экономики

1. Матрица A называется продуктивной, если решение x системы при любой неотрицательной правой части y имеет только неотрицательные элементы x_i. Используя это определение, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

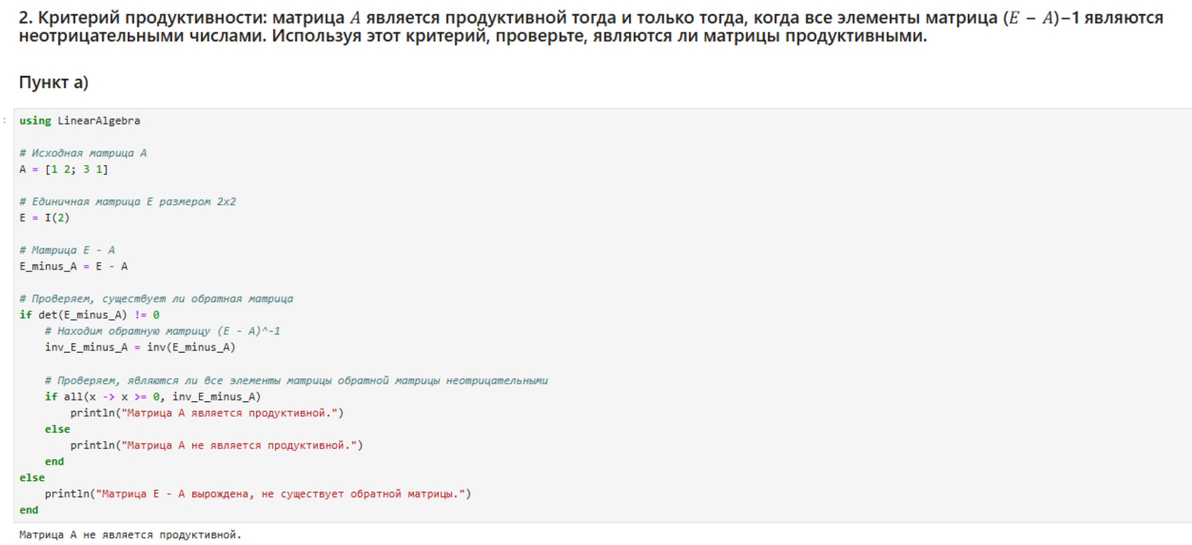
Пункт a)

```
using LinearAlgebra

# Исходная матрица A
A = [1 2; 3 4]

# Создаем единичную матрицу I (например, с использованием Matrix{Float64})
I_matrix = I(2)  # Единичная матрица размера 2x2

# Матрица I - A
I_minus_A = I_matrix - A

# Проверяем, является ли матрица I - A невырожденной (обратимой)
det_I_minus_A = det(I_minus_A)
println("Определитель матрицы I - A: ", det_I_minus_A)

# Если определитель ненулевой, то матрица I - A обратима, и система имеет единственное решение
if det_I_minus_A != 0
    println("Матрица I - A обратима, система имеет единственное решение.")
else
    println("Матрица I - A выроздена, система не имеет единственного решения.")
end
```

```
Определитель матрицы I - A: -6.0
Матрица I - A обратима, система имеет единственное решение.
```

Рис. 2.14: Линейные модели экономики

2. Критерий продуктивности: матрица является продуктивной тогда и только тогда, когда все элементы матрица (−)^−1 являются неотрицательными числами. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.



2. Критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все элементы матрица $(E - A)$−1 являются неотрицательными числами. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

Пункт a)

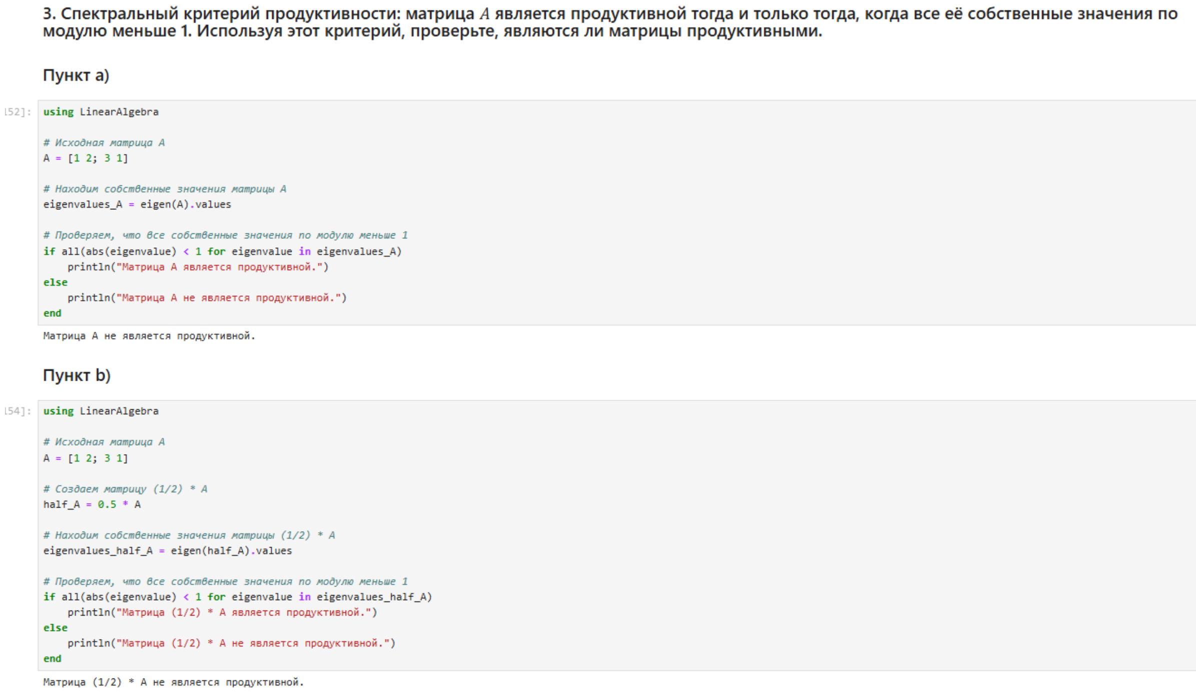
```
using LinearAlgebra

# Исходная матрица A
A = [1 2; 3 1]

# Единичная матрица E размером 2x2
E = I(2)

# Матрица E - A
E_minus_A = E - A

# Проверяем, существует ли обратная матрица
if det(E_minus_A) != 0
    # Находим обратную матрицу (E - A)^-1
    inv_E_minus_A = inv(E_minus_A)

    # Проверяем, являются ли все элементы матрицы обратной матрицы неотрицательными
    if all(x -> x >= 0, inv_E_minus_A)
        println("Матрица A является продуктивной.")
    else
        println("Матрица A не является продуктивной.")
    end
else
    println("Матрица E - A вырождена, не существует обратной матрицы.")
end
```

```
Матрица A не является продуктивной.
```

Рис. 2.15: Линейные модели экономики

3. Спектральный критерий продуктивности: матрица является продуктивной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю

меньше 1. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.



3. Спектральный критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю меньше 1. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

Пункт a)

[52]:
```
using LinearAlgebra

# Исходная матрица A
A = [1 2; 3 1]

# Находим собственные значения матрицы A
eigenvalues_A = eigen(A).values

# Проверяем, что все собственные значения по модулю меньше 1
if all(abs(eigenvalue) < 1 for eigenvalue in eigenvalues_A)
    println("Матрица A является продуктивной.")
else
    println("Матрица A не является продуктивной.")
end
```

```
Матрица A не является продуктивной.
```

Пункт b)

[54]:
```
using LinearAlgebra

# Исходная матрица A
A = [1 2; 3 1]

# Создаем матрицу (1/2) * A
half_A = 0.5 * A

# Находим собственные значения матрицы (1/2) * A
eigenvalues_half_A = eigen(half_A).values

# Проверяем, что все собственные значения по модулю меньше 1
if all(abs(eigenvalue) < 1 for eigenvalue in eigenvalues_half_A)
    println("Матрица (1/2) * A является продуктивной.")
else
    println("Матрица (1/2) * A не является продуктивной.")
end
```

```
Матрица (1/2) * A не является продуктивной.
```

Рис. 2.16: Линейные модели экономики

3 Выводы

Мы изучили возможности специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры