Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Dulce María Mayorga Vásquez
Carnet: 202306444
Laboratorio de Reducción de Datos
Erick Díaz

Practica 1: Estimación de π con el método de Monte Carlo

11 de marzo de 2025

Resumen
Se estimó el valor de π mediante el método de Monte Carlo, analizando la influencia del tamaño de muestra en la precisión. Se calcularon la incertidumbre y el error absoluto en cada estimación. Los resultados obtenidos muestran que un mayor tamaño de muestra reduce el error, validando la convergencia del método.

1. Objetivos

Objetivo general

Estimar el valor de π mediante el método de Monte Carlo, utilizando simulaciones aleatorias para analizar su rigurasidad.

Objetivos específicos

- Desarrollar un algoritmo en Python que genere puntos aleatorios y determine la aproximación de π a partir de su distribución en un círculo inscrito.
- Evaluar el error de la estimación comparando los resultados obtenidos con el valor real de π, analizando la influencia del número de simulaciones.
- Representar gráficamente la convergencia de la estimación de π conforme aumenta la cantidad de puntos generados.

2. Marco teórico

Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es una técnica probabilística utilizada para resolver problemas matemáticos mediante simulaciones con números aleatorios. Se aplica en diversas áreas, como la estadística, la física y la ingeniería, debido a su capacidad para aproximar soluciones a problemas complejos. [1]

Uno de sus usos más comunes es la estimación del número π. La idea central es que si un círculo de radio $r = 1$ está inscrito en un cuadrado de lado $2r$, la proporción de puntos generados aleatoriamente dentro del círculo con respecto al total de puntos generados en el cuadrado se relaciona con el área de ambas figuras, permitiendo aproximar π con la ecuación:

$$\pi \approx 4\frac{N_c}{N_t} \tag{1}$$

Donde:

- N_c es el número de puntos dentro del círculo,
- N_t es el número total de puntos generados en el cuadrado.

Aleatoridad y precisión del método de Monte Carlo

El éxito del método depende de la calidad del generador de números aleatorios. Si los puntos no son distribuidos de manera uniforme dentro del cuadrado, la estimación de π será incorrecta. Para esto, los algoritmos computacionales usan generadores de números pseudoaleatorios (PRNGs, por sus siglas en inglés), los cuales simulan valores aleatorios mediante fórmulas matemáticas [2].

Además, la precisión mejora conforme aumenta el número de simulaciones, pero sigue la relación de error:

$$\text{Error} \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{N_t}}\right) \tag{2}$$

Esto significa que para obtener el doble de precisión, se necesita cuadruplicar el número de puntos generados, lo cual tiene implicaciones en el costo computacional. [3]

Visualización de resultados

En la simulación, los puntos generados se pueden representar gráficamente, diferenciando aquellos que caen dentro del círculo de los que quedan fuera. Esta visualización permite observar cómo se distribuyen los puntos y analizar la convergencia de π a medida que aumenta el número de simulaciones.

Ventajas y Limitaciones del Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo tiene varias ventajas, como su simplicidad conceptual y su aplicabilidad a una amplia gama de problemas, incluso cuando no existe una solución analítica exacta. Sin embargo, su precisión depende del número de simulaciones, lo que puede hacer que sea computacionalmente costoso. Además, la calidad del resultado puede verse afectada si el generador de números aleatorios no es adecuado [1].

3. Diseño experimental

Materiales

- Equipo de computación con un entrono de programación instalado.
- Python con las librerías instaladas:
  - **numpy** para generar números aleatorios.
  - **matplotlib** para la visualización gráfica de los resultados.
- Algoritmo de Monte Carlo implementado en código para generar y evaluar los puntos dentro del dominio de estudio.

Procedimiento experimental

- Establecer un cuadrado de lado 2 en un sistema de coordenadas $(-1, 1)$ en ambos ejes, con un círculo de radio 1 inscrito en su interior.
- Para generar los puntos aleatorios, formar pares de coordenadas (x, y) distribuidos uniformemente en el dominio del cuadrado.
- Determinar si un punto está dentro o fuera del círculo, utilizando la ecuación:

$$x^2 + y^2 \leq 1 \tag{3}$$

- Estimar el valor de π con la ecuación [1].
- Generar gráficos de dispersión donde los puntos dentro del círculo se representan en un color distinto a los que quedan fuera del mismo tal y como se muestra en la Figura (1).
- Simular diferentes tamaños de muestra y analizar cómo converge el valor estimado de π hacia el valor real, dependiendo del tamaño de la muestra utilizado.
- Calcular y graficar la incertidumbre y error de las muestras obtenidas.

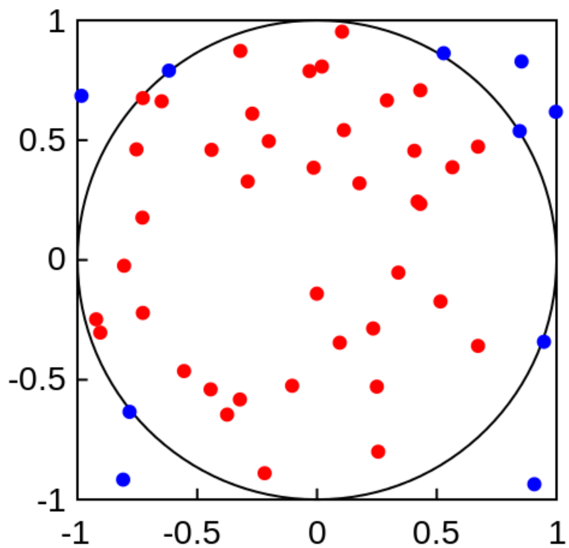

Figura 1: Simulación con el método de Monte Carlo (ejemplo).

4. Resultados

Muestra (N)	**Estimación de π**	**Incertidumbre ($\pm$)**	**Error absoluto**
100	3.2400	0.1199	0.0616
162	2.9877	0.1373	0.0930
263	2.9962	0.1012	0.0371
428	3.1962	0.0730	0.0388
695	3.1826	0.0665	0.0567
1128	3.1172	0.0510	0.0033
1832	3.1266	0.0344	0.0702
2976	3.1371	0.0314	0.0372
4849	3.1421	0.0231	0.0009
7847	3.1644	0.0175	0.0189
12742	3.1464	0.0146	0.0086
20691	3.1515	0.0123	0.0118
33598	3.1540	0.0096	0.0029
54555	3.1494	0.0071	0.0093
88586	3.1439	0.0054	0.0099
143144	3.1379	0.0045	0.0025
231377	3.1406	0.0033	0.0065
373091	3.1415	0.0026	0.0050
615848	3.1416	0.0021	0.0004
1000000	3.1415	0.0014	0.0043

Cuadro 1: Estimaciones de π para diferentes tamaños de muestra.

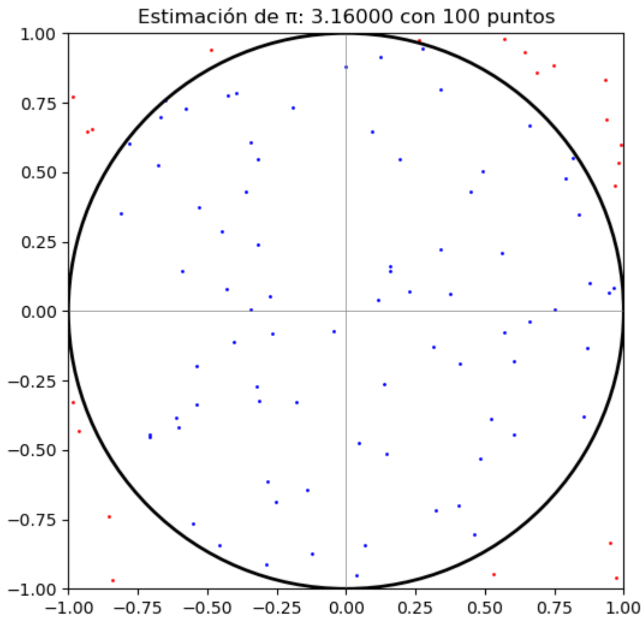

Figura 2: Gráfico de estimación de π con $N = 100$

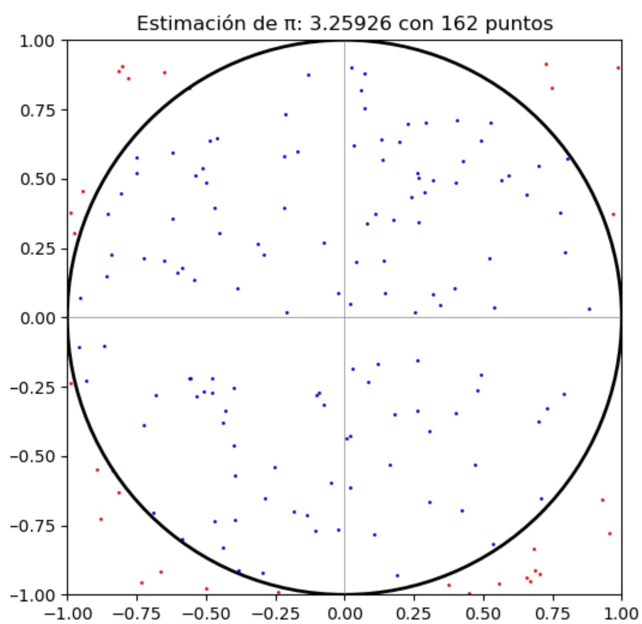

Figura 3: Gráfico de estimación de π con $N = 162$

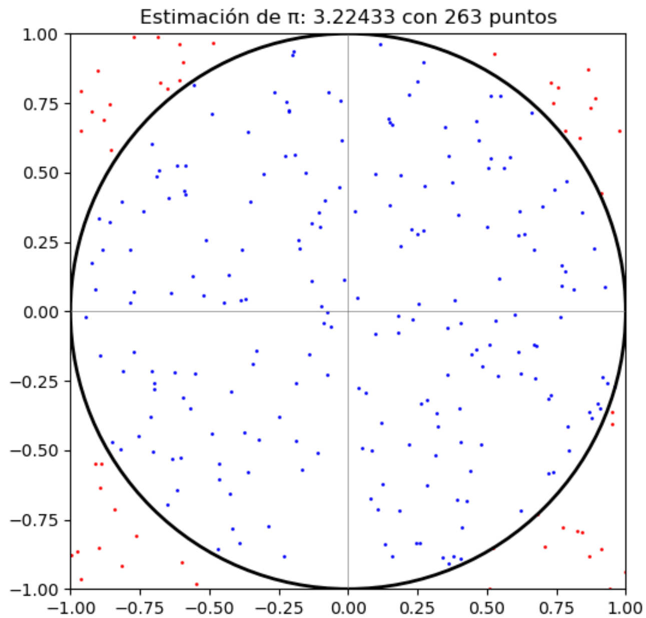

Figura 4: Gráfico de estimación de π con $N = 263$

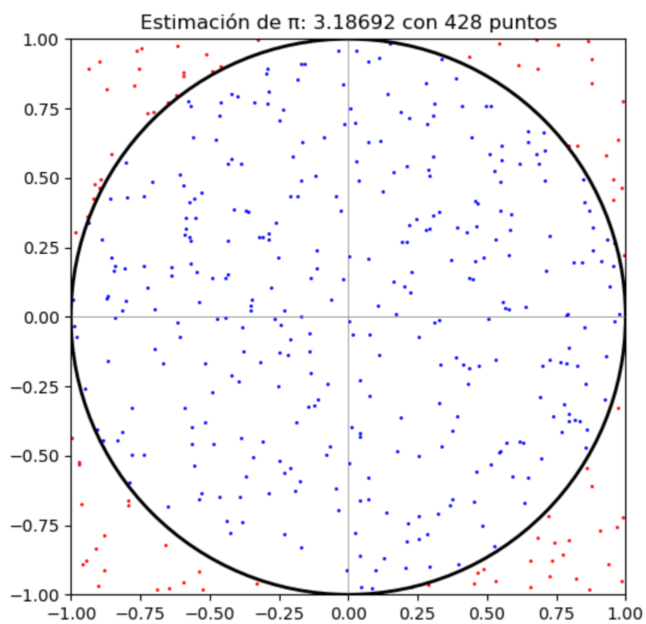

Figura 5: Gráfico de estimación de π con $N = 428$

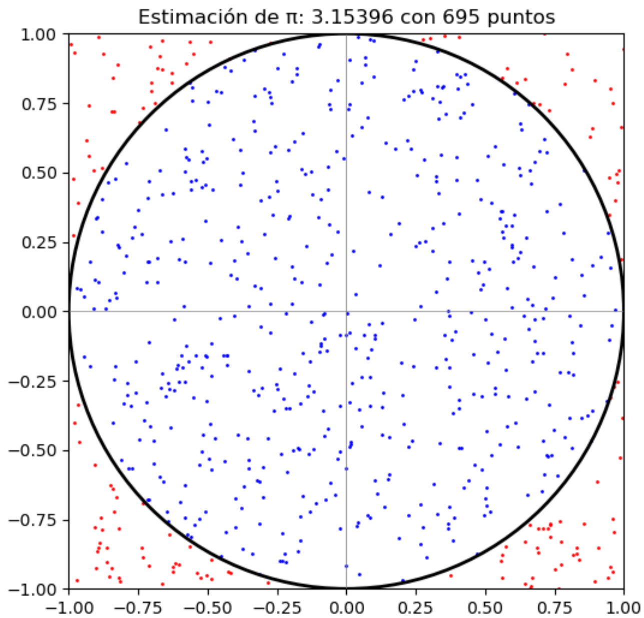

Figura 6: Gráfico de estimación de π con $N = 695$

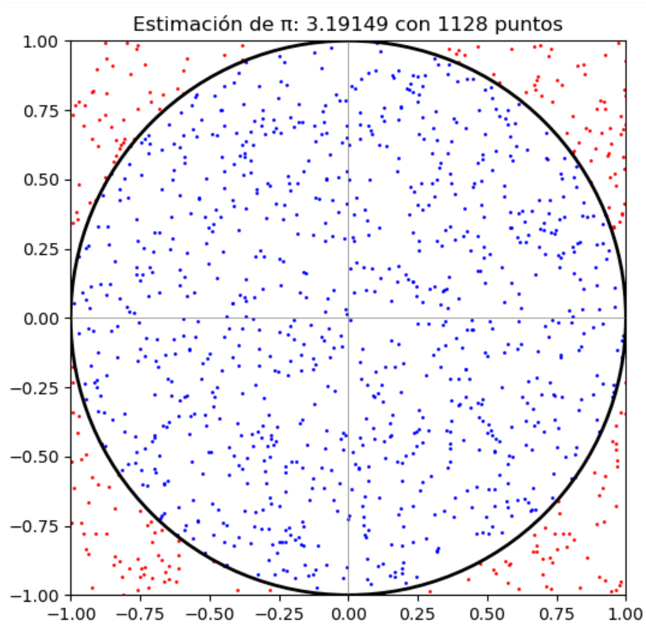

Figura 7: Gráfico de estimación de π con $N = 1128$

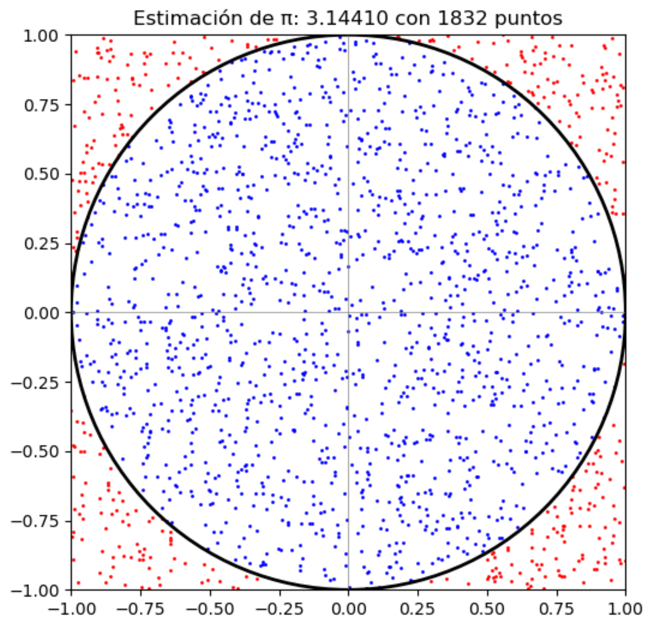

Figura 8: Gráfico de estimación de π con $N = 1832$

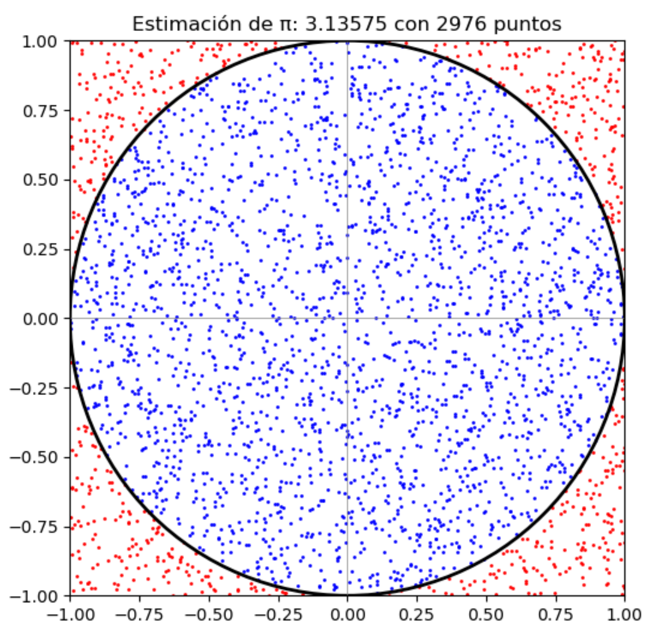

Figura 9: Gráfico de estimación de π con $N = 2976$

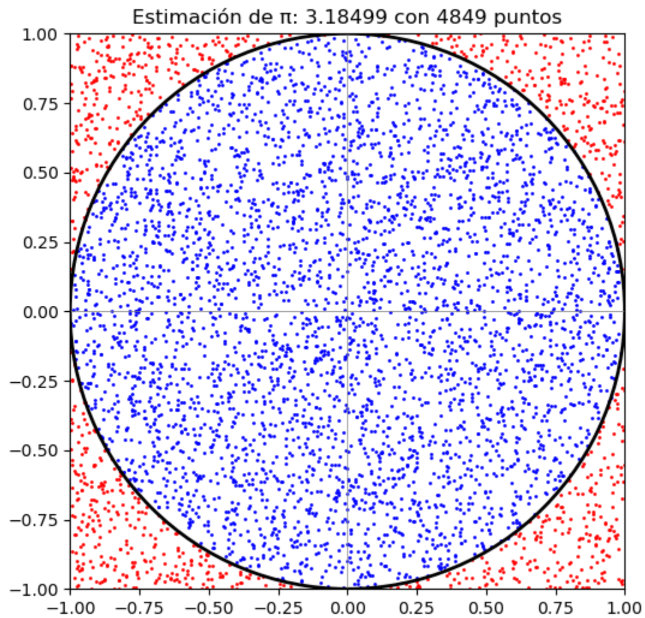

Figura 10: Gráfico de estimación de π con $N = 4849$

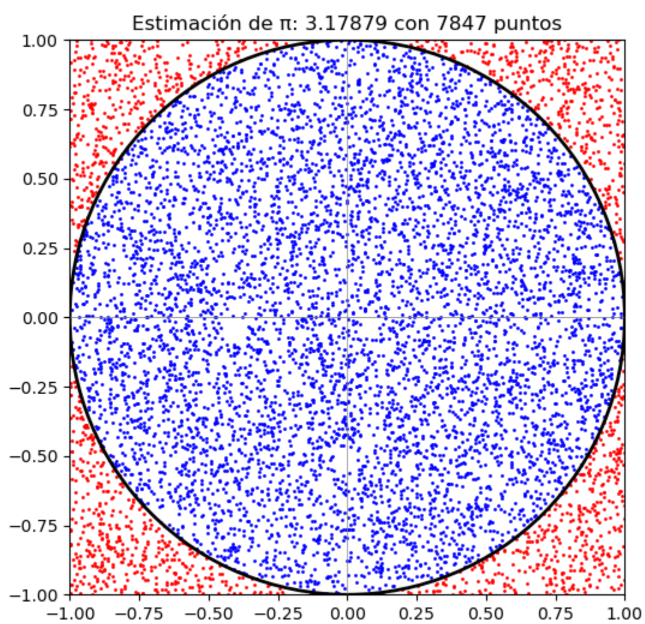

Figura 11: Gráfico de estimación de π con $N = 7847$

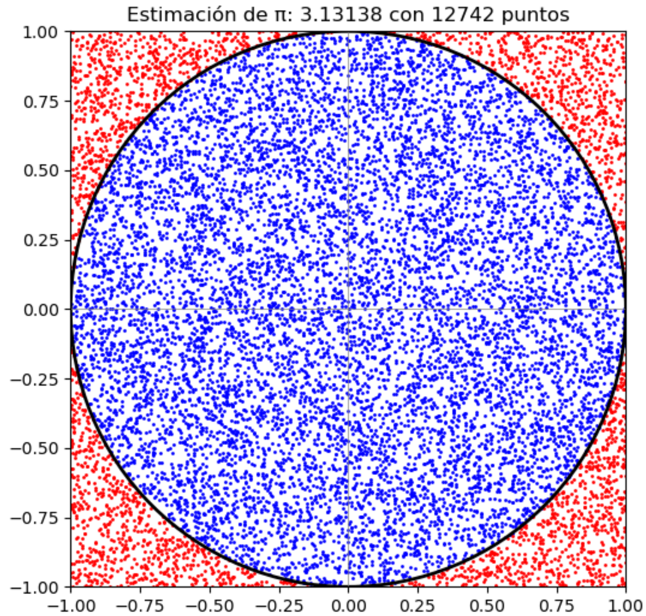

Figura 12: Gráfico de estimación de π con $N = 12742$

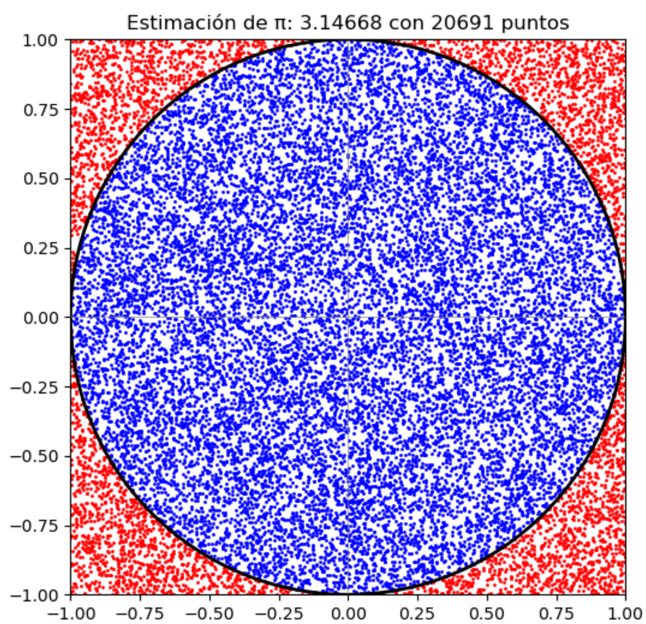

Figura 13: Gráfico de estimación de π con $N = 20691$

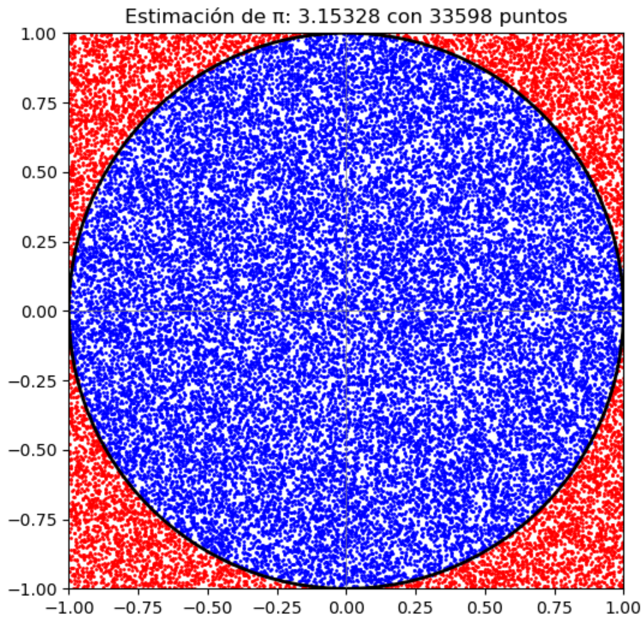

Figura 14: Gráfico de estimación de π con $N = 33598$

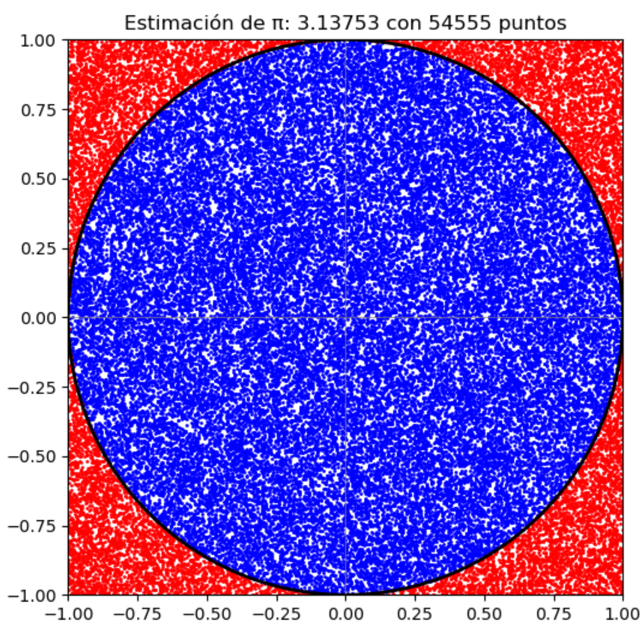

Figura 15: Gráfico de estimación de π con $N = 54555$

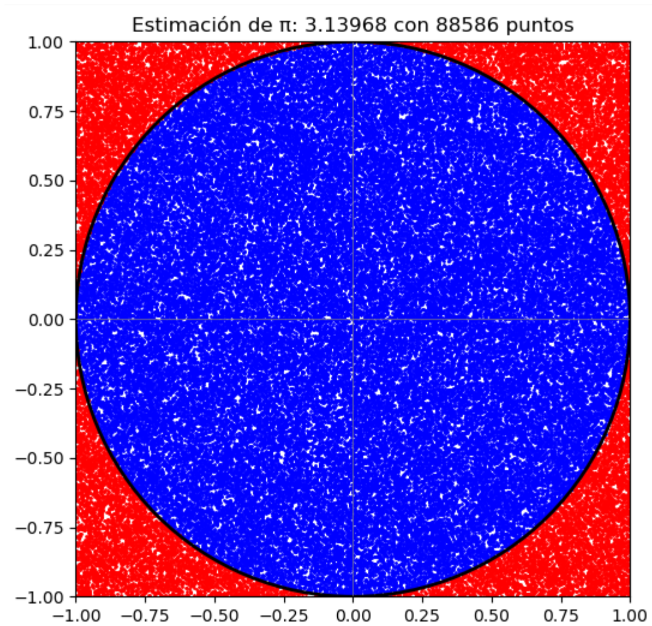

Figura 16: Gráfico de estimación de π con $N = 88586$

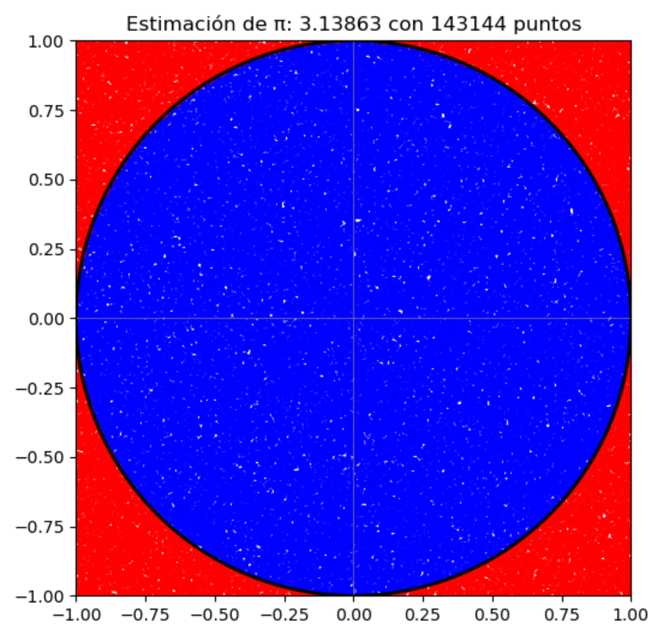

Figura 17: Gráfico de estimación de π con $N = 143144$

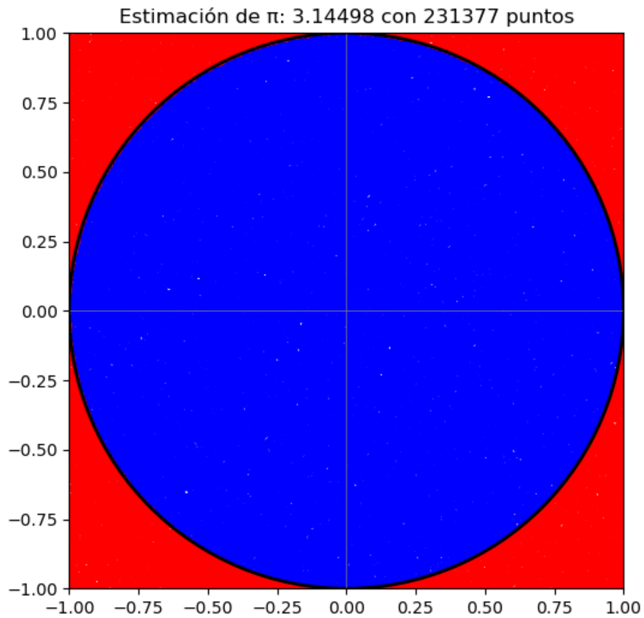

Figura 18: Gráfico de estimación de π con $N = 231377$

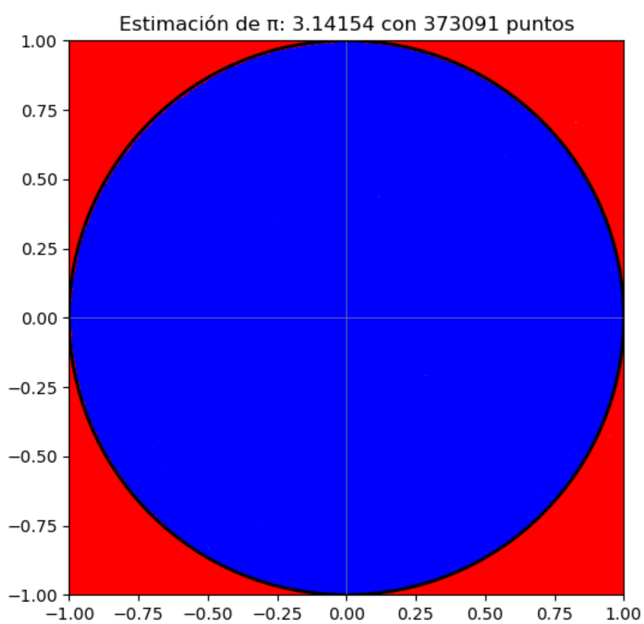

Figura 19: Gráfico de estimación de π con $N = 373091$

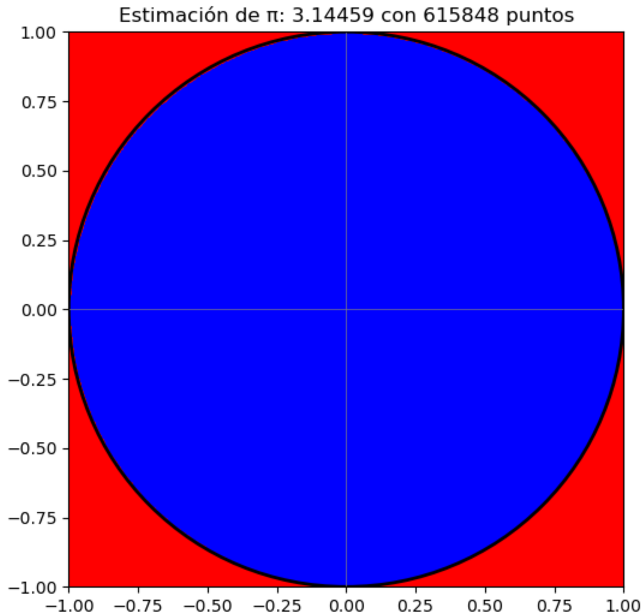

Figura 20: Gráfico de estimación de π con $N = 615848$

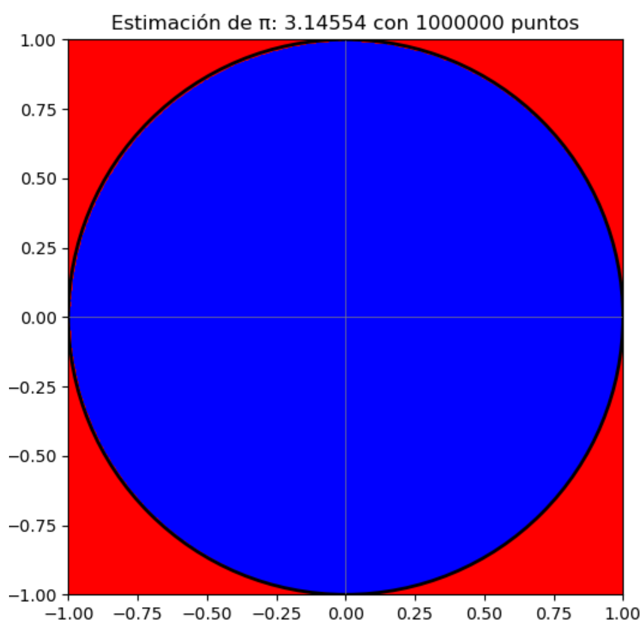

Figura 21: Gráfico de estimación de π con $N = 100000$

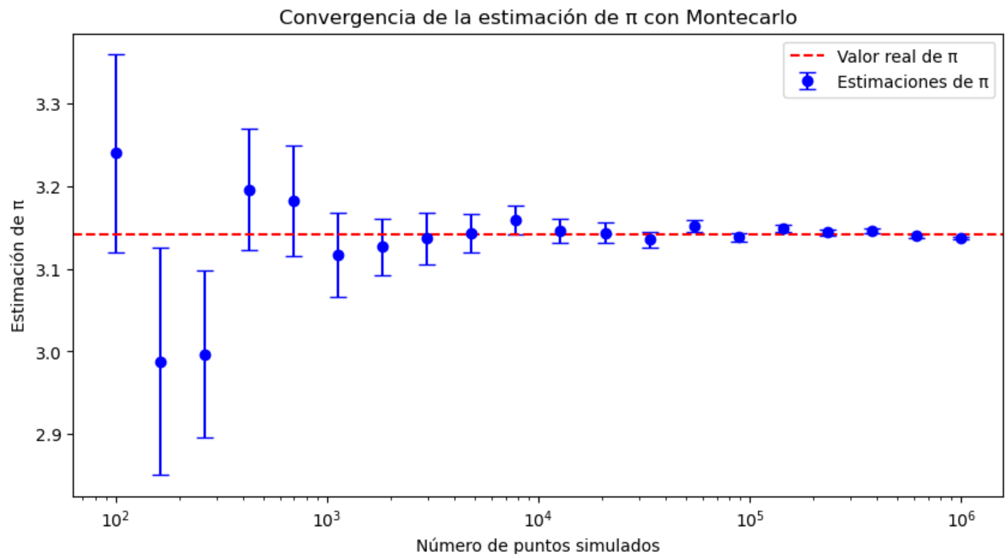

Figura 22: Gráfico de convergencia de las estimaciones de π con el método de Monte Carlo

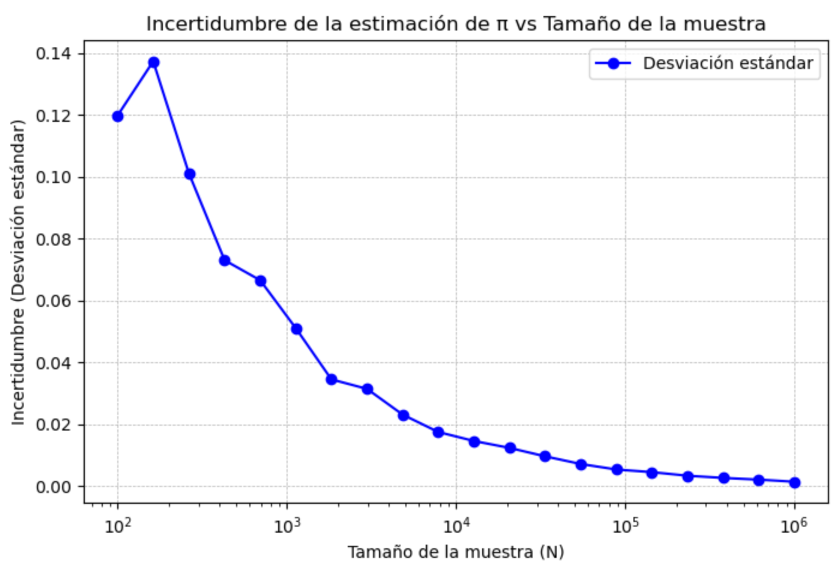

Figura 23: Gráfico de incertidumbre de las estimaciones obtenidas vs el tamaño de la muestra

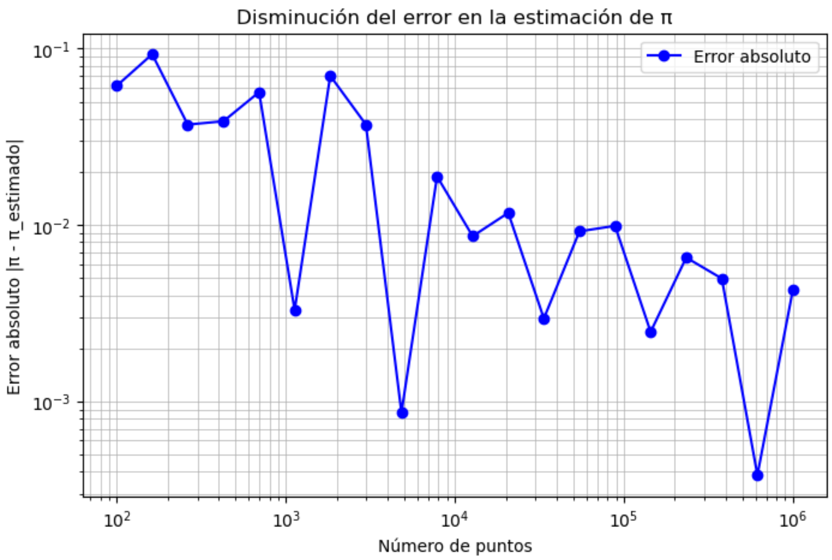

Figura 24: Gráfico del Error absoluto vs el número de puntos

5. Discusión de resultados

La estimación de π mediante el método de Monte Carlo mostró una clara dependencia del tamaño de muestra utilizado. Para valores pequeños de n, se observaron desviaciones significativas respecto al valor teórico de π, con errores absolutos de hasta 0.0930 y una incertidumbre elevada de 0.1373 para $n = 162$. Esto indica que con pocas muestras, la distribución de los puntos dentro y fuera del círculo no es representativa de la relación geométrica esperada.

A medida que el número de puntos aumentó, la estimación de π se estabilizó y se acercó al valor real, reduciendo tanto el error absoluto como la incertidumbre. Para $n = 1000000$, la estimación fue 3.1415 ± 0.0014, con un error absoluto de 0.0043, confirmando la convergencia del método.

Un patrón importante que se pudo observar es que la relación entre el error absoluto y el tamaño de muestra sigue aproximadamente la tendencia teórica de $O(1/\sqrt{N})$. Esto confirma que, aunque el método de Monte Carlo es sencillo de implementar, su precisión depende en gran medida del número de iteraciones realizadas. Cuantas más simulaciones se ejecutan, menor es la variabilidad de los resultados, permitiendo una mejor aproximación al valor real de π. Sin embargo, también se hace evidente que para obtener una mejora sustancial en la precisión, es necesario aumentar el número de muestras de manera exponencial.

En general, los resultados obtenidos validan el comportamiento esperado del método y demuestran su efectividad para aproximar valores matemáticos complejos. No obstante, también ponen en evidencia sus limitaciones, como la necesidad de un gran número de iteraciones para alcanzar una precisión alta y la influencia de la generación de números pseudoaleatorios en la variabilidad de los resultados.

6. Conclusiones

- El método de Monte Carlo permitió estimar el valor de π y analizar cómo su precisión mejora con el aumento del número de muestras. Se observó que, con pocos puntos, las estimaciones presentan mayor variabilidad y errores más significativos, mientras que, a medida que el número de muestras crece, la estimación de π se vuelve más estable y cercana a su valor real.

- Para evaluar la precisión del método, se calculó la desviación estándar como medida de incertidumbre. Esto se debe a que la desviación estándar refleja la dispersión de los valores obtenidos en múltiples simulaciones, permitiendo cuantificar qué tan confiable es la estimación. Dado que el método de Monte Carlo se basa en procesos aleatorios, este análisis es fundamental para determinar su efectividad.
  Además, se identificaron dos tipos principales de incertidumbre:
  - Incertidumbre aleatoria, causada por la variabilidad inherente al muestreo aleatorio y que disminuye al aumentar el tamaño de la muestra.
  - Incertidumbre sistemática, que puede originarse por errores en la implementación del algoritmo o por la calidad del generador de números aleatorios.

- Los resultados obtenidos validan la relación teórica entre la precisión y el tamaño de muestra, confirmando que el error absoluto disminuye aproximadamente con $O(1/\sqrt{N})$. Esto demuestra que el método de Monte Carlo es una herramienta efectiva para estimar π, aunque su precisión depende directamente del número de iteraciones utilizadas. En aplicaciones donde se requiera mayor exactitud, es esencial incrementar el número de simulaciones, considerando que la mejora en la precisión requiere un crecimiento significativo en la cantidad de puntos generados.

Referencias

[1] Fishman, G. S. (2013). *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer.

[2] Gentle, J. E. (2003). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Springer.

[3] Binder, K., & Heermann, D. W. (2010). *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics: An Introduction*. Springer.