Chapter 1

Introduction

Qu'entend-on par espaces vectoriels?

Chapter 2

Compacité

Tel que vu dans les espaces métriques, un sous-ensemble est compact implique qu'il est borné et fermé. L'inverse n'est toutefois pas vrai. Oh la la C'est beau

Néanmoins, dans un espace vectoriel, nous obtenons la double-implication suivante:

Theorême 2.0.1 (Heine-Borel)**.** Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est borné et fermé.

.

Il est donc entierement valable de définir la compacité comme une équivalence complète avec le fait d'être borné et fermé tant qu'on est dans un espace vectoriel.

Theorême 2.0.2. Soit f de domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$, Si D est compact et f continue, alors $f(D)$ est compact.

Proof. □

Chapter 3

Continuité

Définition 3.0.1. Soit f, une fonction de domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$. f est continue en a si

$$\forall \epsilon > 0, \forall x, \exists \delta > 0, \forall a \text{ tq } x \in D \wedge 0 < ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \epsilon$$

Il existe aussi la notion de continuité uniforme. Celle-ci implique que l'on peut trouver un ration $\delta - \epsilon$ minimal qui couvre l'entiereté des points.

Définition 3.0.2. Soit f, une fonction de domaine $\mathbb{R}^n$. f est **uniformément continue** sur D si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, a \in D \wedge 0 < ||x - a|| < \delta \implies ||f(x) - f(a)|| < \epsilon$$

Theorême 3.0.1. Soit f, une fonction continue de domaine K et $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Si K est compact, alors f est uniformément continue.

Proof. Supposons f n'est pas uniformément continue lorsque K compact et f continue.
Ainsi il existerait un ϵ_0 qui pour un certain x, a implique que la norme $||f(x) - f(a)|| \geq \epsilon_0$ et ce pour tout δ
Posons $\delta = \frac{1}{n}$, ainsi il existe un x_n, a_n tq $||x_n - a_n|| < \frac{1}{n} \implies ||f(x_n) - f(a_n)|| \geq \epsilon_0$
Puisque c'est vrai pour chaque δ, c'est vrai pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous avons donc une suite x_n
De plus $||x_n - a_n|| \to 0$, puisque la suite $\frac{1}{n} \to 0$
Toutefois, puisque K est compact, il existe une sous-suite de x_{n_l} qui converge vers un point x_0
$\forall \epsilon, \exists M$ tq $n_l \geq M \implies ||x_{n_l} - x_0|| < \epsilon$
Puisque $||a_{n_l} - x_0|| \leq ||a_{n_l} - x_{n_l}|| + ||x_{n_l} - x_0||$, il en suit que $a_{n_l} \to 0$ aussi
Vu que f est continue, $\{f(a_{n_l})\} \to f(x_0)$ et $\{f(x_{n_l})\} \to f(x_0)$
Alors $||f(x_{n_l}) - f(x_0)|| < \frac{\epsilon}{2} \forall \epsilon$ et $||f(x_0) - f(a_{n_l})|| < \frac{\epsilon}{2} \forall \epsilon$
Ainsi $||f(x_{n_l}) - f(a_{n_l})|| \leq |f(x_{n_l}) - f(x_0)|| + ||f(x_0) - f(a_{n_l})|| < \epsilon \forall \epsilon$
Une contradiction avec notre affirmation que $||f(x) - f(a)|| \geq \epsilon_0$ $\square$

Chapter 4

Notions de limite

Définition 4.0.1. Soit f, une fonction de domaine $\mathbb{R}^n$. Le point b est considéré la **limite** de f à un point d'accumulation c du domaine si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } x \in D \wedge 0 < ||x - c|| < \delta \implies ||f(x) - b|| < \epsilon$$

Theorême 4.0.1 (Unicité de la limite)**.** La limite, si elle existe est unique.

Theorême 4.0.2. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue et $K \subseteq \mathbb{R}^m$, K compact. Alors $\exists f(a) = inf\{f(x) : x \in K\}, f(b) = inf\{f(x) : x \in K\}$.

Proof. Puisque K est compact et f, continue, alors $f(K)$ est compact.
$f(K)$ a donc une borne tq $-M \leq f(K) \leq M$.
Par conséquent, il existe un $m = sup\{f(x) : x \in K\}$ et $m' = inf\{f(x) : x \in K\}$
Par définition du sup et inf, m et m' sont des points d'accumulations de $f(K)$.
Puisque $f(K)$ est fermé, m et $m' \in f(K)$. Donc il existe un point $a = f(a) = m$. $\square$

Chapter 5

Connexité

Chapter 6

Fonctions linéaires

Afin de procéder avec le concept de dérivation de fonction dans $\mathbb{R}^n$, il est tout d'abord nécessaire d'établir un peu de théories sur les fonctions linéaires.

Définition 6.0.1 (Fonction linéaire)**.** Une fonction $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est dite **linéaire** si

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(Y)$$

pour $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$

Cette linéarité représente le concept de proportion. D'ailleurs il peut être intéressant de séparer cette définition en deux propriétés distinctes, commençons par la multiplication par un scalaire:

$$L(ax) = aL(X)$$

En effet on comprend que si on multiplie

Chapter 7

Dérivation

Chapter 8

Dérivation partielle

Chapter 9

Convexité

[MOTIVATION] [DEFINITIONS]

Appendix A

Notions préalables

Voici une série de définition importantes à considérer lors de la lecture de cet ouvrage. Celles-ci servent de références pour les exemples et les preuves qui seront amenés dans les chapitres suivants. Pour une explication plus complète et rigoureuse, il sera nécessaire de se réferrer aux livre précédent: Analyse des Réels.

Définition A.0.1 (Voisinage dans les Réels)**.** Ensemble de point satisfaisant l'expression suivante:

$$V(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$$

Définition A.0.2 (Voisinage troué dans les Réels)**.** Ensemble de point satisfaisant l'expression suivante:

$$V'(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \wedge x \neq a\}$$

Définition A.0.3 (Points intérieurs de E)**.** Ensemble de points satisfaisant l'expression suivante:

$$int(E) = \{x \in E : \exists \delta > 0, V(x, \delta) \subseteq E\}$$

Définition A.0.4 (Ensemble ouvert)**.** Un ensemble est dit ouvert si tous ces éléments sont des points intérieurs.

Définition A.0.5 (Groupe abélien)**.** Un **groupe abélien** ou **groupe non-commutatif** est un groupe (une structure algébrique associative avec un élément neutre et un élément inverse $(\forall a \in G, \exists a^{-1})$), dont l'opération binaire est commutative.

Définition A.0.6 (Famille d'ensemble)**.** Une **famille** ou **collection** est simplement un ensemble d'ensemble.

Définition A.0.7 (Compacité)**.** Soit S, un sous-ensemble d'une topologie. On dit que S est **compact** si de tout recouvrement de S par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini d'ouverts.