

Rapport intermédiaire du projet de comparaison de méthodes de résolution approchées du T.S.P.

Dorian Dumez

Jocelin Cailloux

December 18, 2016

1 Heuristiques de constructions

1.1 N.N.H.

Cet algorithme est une heuristique de construction gloutonne qui, partant d'une ville donnée, construit le cycle hamiltonien de proche en proche. A partir d'une ville d'origine, l'algorithme sélectionne comme prochaine ville celle qui est la plus proche de la ville courante.

On voit tout de suite l'impact du choix de la ville de départ sur la solution. Mais estimer la qualité de la solution en fonction de chaque ville est compliqué donc elle est choisie de manière arbitraire. En effet on prend toujours comme point de départ la première ville située dans le tableau de notre distancier.

Notre distancier représentant le graphe sous forme d'une matrice d'adjacence on dispose toujours de la distance entre deux villes en temps constant. Cet algorithme va, pour chaque ville (on les parcourt toutes une unique fois étant donné que l'on construit un cycle hamiltonien), parcourir toutes les villes non déjà parcourues pour trouver la plus proche. On en déduit que cet algorithme a une complexité temporelle en $O(nbVille^2)$. De plus sa complexité spatiale est en $O(nbVille)$, en effet on ne fait qu'allouer le parcours correspondant à la permutation identité avant de le modifier sur place.

1.2 R.G.S.C

Nous avons choisi d'implémenter une heuristique de construction de notre invention, en effet, nous voulions essayer quelque chose d'original. Nous avons donc imaginé un algorithme qui se base sur celui de Gale et Shapley qui résout le problème du mariage stable. Nous l'avons donc appelé ainsi, Recursive Gale-Shapley Circuit.

Nous avons pensé qu'il est pertinent de construire des couples de villes de telle manière qu'aucune puisse s'unir avec une autre ville sans augmenter la longueur totale des distances entre les couples. L'idée est donc de former de tels couples de manière récursive, une fois que les villes sont unies deux à deux, nous réitérons l'algorithme afin d'unir les couples précédemment formés deux à deux de la même manière.

Chaque ville (puis chaque sous-couple par la suite), possède une liste de préférences des autres couples triés par ordre décroissant des distances. Nous avons supposé que la

complexité de cet algorithme serait du même ordre que celui de Gale-Shapley multiplié par $\log(n)$, $\log(n)$ étant le nombre d'itérations effectuées. L'algorithme de Gale-Shapley s'effectue en $O(n^2)$, nous avons donc pour notre algorithme RGSC une complexité de $O(\log(nbVille^2))$.

2 Opérateurs de modification

2.1 2-opt

Cet opérateur consiste à sélectionner deux arc (i.e. deux paires de ville adjacentes dans le parcours) et à tester si leur croisement fournit une meilleure solution. Si on pose iD , iF les extrémités du premier arc et jD , jF celle du deuxième arc, on entend par croiser les arcs aller de iD à jD puis de iF à jF au lieu de iD à iF puis de jD à jF comme c'était le cas dans la solution. Graphiquement on observe que c'est en réalité l'inverse qui améliore la solution, en effet si les deux arcs s'intersectent dans le plan (d'une carte où les villes sont positionnées dans un repère par exemple) alors les inverser fait disparaître cette intersection et réduit la taille du chemin parcouru.

Il est alors évident que les 4 villes (iD , iF , jD , jF) doivent être différentes car sinon on ne fait que modifier l'ordre de parcours de ces villes (on ne fait qu'inverser une permutation) mais le T.S.P. sur lequel on travaille est symétrique donc cela ne change rien. Il est aussi évident que l'on considère des paires d'arc et non des couples car cela reviendrait à tester deux fois le même changement.

Nous avons implémenté cet opérateur sous deux formes : en descente et en plus profonde descente.

En plus profonde descente on teste toutes les paires d'arc et on applique seulement celle qui conduit à la meilleure solution, ici celle dont le parcours est le plus court.

En descente on teste aussi toutes les paires d'arc mais cette fois-ci on applique la modification dès qu'elle améliore la solution. On ne s'arrête pas à la première solution trouvée pour éviter de s'appesantir sur le début du cycle et pour éviter de le re-tester un trop grand nombre de fois à partir du moment où il se serait stabilisé.

Dans les deux cas on va tester $O(nbVille^2)$ changements mais appliquer l'opérateur 2-opt s'effectue en $O(nbVille)$ car on doit inverser le sens de parcours des villes situées entre iF et jD . Donc l'algorithme de descente est en $O(nbVille^3)$ tandis que celui de plus profonde descente est en $O(nbVille^2)$. Mais cette complexité n'est que celle de `amelioireSol2opt` et `amelioireSol2optPPD`, donc ne prend pas en compte la vitesse de convergence de la solution vers un minimum local.

Ces complexités sont permises par le fait que l'on peut connaître à l'avance et en temps constant la taille du cycle hamiltonien après la modification.

2.2 3-opt

Cet opérateur est une généralisation du 2-opt avec 3 arcs. Tous les mouvements permis par le 2-opt le sont donc aussi par le 3-opt. Donc contrairement au 2-opt qui n'offre qu'une seule possibilité de modification, le 3-opt en offre 7 donc certaines ne peuvent pas

être réalisé par une succession de 2-opt.

Cet opérateur a aussi été implémenté en descente et en plus profonde descente. Pour les même raison que pour le 2-opt, dans l'algorithme de descente on teste toutes les triplet possible à chaque fois au lieu de s'arrêter au premier mouvement améliorant trouvé.

Mais cette fois ci je n'ai pas réussi à trouver une méthode me permettant de connaître à l'avance la longueur du cycle hamiltonien après la modification. Donc pour tester une modification la solution est applique puis la modification appliqué avant de calculer la longueur du cycle obtenu. Donc chaque test se fait en $O(nbVille)$.

La complexité du 3-opt est donc de $O(nbVille^4)$ car il y a $O(nbVille^3)$ ensemble de 3 arc possible et le test et la modification se font de en $O(nbVille)$, la modification restant en $O(nbVille)$ car des inversions du sens de parcours sont nécessaire sur la plupart d'entre elles.

Et avec le 3-opt la plus profonde descente à la même complexité puisque on est obligé d'appliquer toutes les modifications pour les tester.

3 Algorithmes de recherche locale

Les deux opérateurs ayant une version normale et une en plus profonde descente tous les algorithmes suivants ont aussi deux versions. Ce sont toujours les mêmes, à la différence que l'une utilisera les opérateurs classiques et l'autre ceux en plus profonde descente.

3.1 Descente avec 2-opt

Cet algorithme part d'une solution que lui fournit une heuristique de construction puis l'améliore uniquement à l'aide de l'opérateur 2-opt. On utilise toujours le même opérateur sur la solution sur laquelle on travaille. On le fait jusqu'à tomber dans un minimum local, c'est à dire jusqu'à que 2-opt ne puisse plus améliorer la solution.

3.2 Descente avec 3-opt

Cet algorithme est identique au précédent mais avec l'opérateur 3-opt.

3.3 vnd

Cette fonction implémente un algorithme V.N.D utilisant les opérateurs 2 et 3 opt dans cet ordre. Elle part d'une solution fournie par une heuristique de construction. Elle utilise le critère d'arrêt standard du vnd qui est d'avoir trouvé un minimum local, c'est à dire que ni 2-opt ni 3-opt ne peuvent améliorer la solution.

3.4 vns

Cette fonction implémente un algorithme V.N.S utilisant les opérateur 2 et 3 opt dans cet ordre. Elle part d'une solution fournie par une heuristique de construction. Elle

va s'arrêter quand elle aura utilisé, successivement, une fois la recherche de voisin puis l'amélioration, avec 2-opt puis avec 3-opt sans amélioration. Il faudrait donc mener de plus ample expérimentation concernant ce critère d'arrêt. Notamment en leur permettant chacun d'échouer plusieurs fois avant de passer à l'opérateur suivant ou en répétant ces 2 recherches plusieurs fois avant d'abandonner.

4 Expérimentation

4.1 En partant de N.N.H.

PPD désigne la variante de l'algorithme utilisant la plus profonde descente.

Tout ce qui concerne le vns dans tableau 1 et 2 sont des moyennes effectuées sur 10 exécutions. Ces dernières sont données avec plus de détails dans le tableau 3.

nbVille	N.N.H.	2-opt	3-opt	2-opt PPD	3-opt PPD	vnd	vnd PPD	vns	vns PPD
48	281	225	218	223	223	218	223	219	222
52	19.0	6.80	5.96	3.96	3.40	2.56	3.41	4.23	3.41
130	23.9	10.3	4.01	5.98	1.77	4.57	4.62	3.59	4.61
150	25.5	3.88	3.39	1.45	1.31	1.85	0.80	3.38	0.801
280	23.3	10.7	6.86	7.63	3.04	6.39	6.64	5.70	6.62

Table 1: distance supplémentaire en pourcentage par rapport à la solution optimale

nbVille	N.N.H.	2-opt	3-opt	2-opt PPD	3-opt PPD	vnd	vnd PPD	vns	vns PPD
48	1e-05	0.0002	0.0151	0.0004	0.0380	0.0116	0.0042	0.0101	0.0821
52	1e-05	0.0002	0.0165	0.0010	0.0573	0.0102	0.0110	0.0143	0.0193
130	5e-05	0.0020	0.2013	0.0043	1.4373	0.1155	0.2935	0.3854	0.6382
150	0.0001	0.0032	0.2481	0.0055	1.4498	0.1817	0.1885	0.4651	0.5097
280	0.0004	0.0122	2.0138	0.0351	19.013	1.2042	3.0444	3.695	5.318

Table 2: temps d'exécutions en secondes

nbVille	variation temps vns	variation résultat vns	variation temps vns PPD	variation résultat vns PP
48	398	1.57	167	0.750
52	286	7.62	67.7	2e-14
130	247	4.17	83.1	0.0305
150	75.3	5.92	44.5	4e-14
280	334	5.91	25.2	0.183

Table 3: variation proportionnelle des algorithmes vns

4.2 En partant de R.G.S.C

Nous avons rencontré plus de difficultés que prévu lors de l'implémentation de cet algorithme. En dehors de l'aspect programmation et déboguage qui étaient particulièrement compliqué, nous avons remarqué que celui-ci ne converge pas pour l'itération de 280 villes que nous avons.

Nous n'avons pas encore déterminé s'il s'agit d'une erreur de programmation ou bien de l'algorithme qui ne converge pas. En effet, l'algorithme de Gale-Shapley permet de créer un mariage stable entre deux ensembles différents, ici, nous marions les éléments d'un ensemble avec des éléments de ce même ensemble. Cette différence fondamentale qui ne semble pas avoir d'impact intuitivement, pourrait en effet empêcher la convergence de l'algorithme.

Nous ne présentons donc pas de statistiques avec cet algorithme pour la dernière instance, mais nous présentons les autres instances, pour lesquelles l'algorithme converge.

nbVille	R.G.S.C.	2-opt	3-opt	2-opt PPD	3-opt PPD	vnd	vnd PPD	vns	vns PPD
48	357	220	221	225	222	220	218	221	216
52	24.1	1.55	3.91	2.56	2.56	1.55	2.56	2.37	1.80
130	38.5	5.14	2.98	2.83	0.845	1.60	1.43	2.92	1.49
150	38.8	6.68	4.43	3,95	1.26	4.89	3.48	2.62	3.48

Table 4: distance supplémentaire en pourcentage par rapport à la solution optimale

nbVille	R.G.S.C.	2opt	3opt	2opt PPD	3opt PPD	vnd	vnd PPD	vns	vns PPD
48	0.0132	0.0003	0.0132	0.0010	0.0650	0.0041	0.0119	0.0239	0.0844
52	0.0155	0.0003	0.0135	0.0006	0.0382	0.0048	0.0052	0.0091	0.0887
130	0.1389	0.0015	0.1169	0.0071	1.620	0.1194	0.2361	0.2992	0.5526
150	0.2207	0.0019	0.1716	0.0087	2.593	0.1735	0.1914	0.5171	0.5229

Table 5: temps d'exécution en secondes

nbVille	variation temps vns	variation résultat vns	variation temps vns PPD	variation résultat vns PP
48	219	2.81	106	0.548
52	302	3.69	105	2.53
130	109	2.42	36.8	0.641
150	177	5.43	63.3	7e-14

Table 6: variation proportionnelle des algorithmes vns

4.3 Modification du critère d'arrêt de VNS

Dans cette section je détaille les expérimentations faites sur VNS et VNS-PPD. En effet dans les tableaux précédent on s'arrête dès que 2-opt puis 3-opt n'ont pas amélioré

successivement. Mais leurs laisser plusieurs essais à impact. Donc on effectue la boucle 2-opt - 3-opt k fois, on relève la moyenne de la différence proportionnelle de valeur et la moyenne de temps d'exécution. Toutes ces exécutions sont effectués en partant de solution construite avec NNH.

nbVille	VNS -1	VNS PPD -1	VNS -2	VNS PPD -2	VNS -3	VNS PPD -3
48	219	223	219	223	217	223
52	4.48	3.41	2.98	3.66	2.48	3.40
130	3.26	4.62	2.03	4.62	1.85	4.53
150	3.28	0.80	2.43	0.80	1.86	0.99
280	4.64	6.44	3.53	6.53	3.10	6.59

Table 7: modification du critère d'arrêt de VNS : valeurs

nbVille	VNS -1	VNS PPD -1	VNS -2	VNS PPD -2	VNS -3	VNS PPD -3
48	0.0177	0.0114	0.0281	0.0123	0.0412	0.0162
52	0.0167	0.0194	0.0322	0.0271	0.0484	0.0368
130	0.4620	0.6899	0.7016	0.8776	1.200	1.029
150	0.4204	0.5822	0.9710	0.7370	1.445	1.007
280	4.587	5.923	10.63	8.204	12.34	9.188

Table 8: modification du critère d'arrêt de VNS : temps

Premièrement cette modification dessert complètement la version plus profonde descendante. La qualité de ses solution n'est même pas forcément augmenté (logiquement elle devrait toujours l'être mais l'aléatoire fait qu'elle ne l'est même pas forcément) tellement l'amélioration est faible. Par contre l'impact sur le temps d'exécution est très clairement visible.

Sur la version classique le bilan est plus mitigé. En effet cette modification viens grandement améliorer la qualité des solutions, surtout le passage de 1 à 2 tours. Mais l'opérateur part alors en rapidité : on a en moyenne un facteur 2 entre le temps d'exécution entre 1 et 2 tours.

5 GRASP

5.1 Implémentation

5.2 Construction des solutions

5.3 Expérimentations

On expérimente l'algorithme GRASP avec plusieurs algorithmes de recherche locale. Le critère d'arrêt choisis est un nogood réglé empiriquement, et de manière constante, sur le nombre de ville divisé par 5.

Les expérimentations sont, comme toujours, faites sur 10 expérimentations. Mais quand

ce temps était trop grand une seule expérimentation a été faite. Ces cas sont noté d'une étoile. Les exécutions vraiment trop longue ont été arrêtés et noté par un tiret. VNS à été testé avec 1 et 2 tours, tandis que sa version plus profonde descente n'a été utilisé qu'avec 1 tours.

nbVille	2opt	3opt	2optPPD	3optPPD	VND	VNDPPD	VNS-1	VNS-2	VNSPPD
48	217	217	218	216	216	216	215	215	216
52	2.56	1.44	2.01	0.77	1.83	1.64	0.67	0.10	0.94
130	4.10	1.63	2.99	0.66*	1.67	1.38	1.13	0.74	1.57
150	1.85	1.71	1.52	0.75*	1.84	1.03	0.91	0.86 ¹	1.02
280	6.32	3.10*	6.01	-	3.06*	-	1.99*	1.67*	3.51*

Table 9: différence de valeur de GRASP en fonction de la recherche locale

nbVille	2opt	3opt	2optPPD	3optPPD	VND	VNDPPD	VNS-1	VNS-2	VNSPPD
48	0.0146	0.0917	0.0169	0.9165	0.0886	0.1262	0.1924	0.3626	0.3424
52	0.0161	0.1231	0.0201	1.511	0.0779	0.1326	0.3465	0.5166	0.3408
130	0.1590	5.880	0.8385	249*	6.660	14.9	17.46	38.5	30.8
150	0.2312	8.868	1.364	309*	6.82	30.9	33.68	39.23 ¹	66.1
280	1.653	124*	17.02	-	95*	-	397*	509*	1103*

Table 10: temps de GRASP en fonction de la recherche locale

¹ la huitième exécution sur les 10 à été arrêté au bout de plusieurs minutes.

On remarque alors que des recherches locales comme le 3-opt PPD ou le VNS-2 permettent d'obtenir des solutions d'une grande qualité. Malheureusement ces versions passent mal à l'échelle à cause de leurs temps d'exécution. Donc si l'on souhaite traiter efficacement de grosse instance le 2-opt est obligatoire.

Mais dans tous les cas on remarque que l'utilisation en multistart de ces différentes heuristiques permet d'obtenir des solutions de bien meilleure qualité que lorsque elles ne sont appelé qu'une seule fois.

5.4 Arrêt probabiliste

C.C. Ribeiro, I. Rosseti et R.C. Souza ont montré dans leur papier "effective probabilistic stopping rules for randomized metaheuristics: GRASP implementations" que la qualité d'une solution généré et amélioré par GRASP suit une loi normale. Il est donc possible d'utiliser cela comme condition d'arrêt de GRASP. Au regard des solution déjà généré on peut estimer les paramètre de cette loi normale, et l'on décide de s'arrêter si la probabilité d'avoir une meilleure solution devient trop faible.

Une loi normale est totalement décrite par sa moyenne μ et son écart-type σ . Pour estimer μ nous avons choisis l'estimateur des moments d'ordre 1 (simple et efficace) :

$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Pour estimer σ nous avons utilisé la variance empirique corrigé (l'estimateur des moments d'ordre 2 avec un facteur correctif pour qu'il soit sans biais) : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$.

Mais pour éviter de refaire des calcul et d'avoir à mémoriser toutes les valeurs obtenues nous avons utilisé une forme développée de cette dernière : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k^2) - \frac{\bar{X}}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k)$ qui se calcule aisément avec des accumulateurs. En effet si note $sumX_k = \sum_{k=1}^n X_k$ et

$sumX2_k = \sum_{k=1}^n X_k^2$ alors $\hat{\sigma}^2 = \frac{sumX2_k}{n-1} - \frac{sumX_k^2}{n(n-1)}$. Mais pour que ces formules soient valides il faut que $n > 1$ donc on force toujours le premier tour de boucle.

Si l'on souhaite s'arrêter dès que la probabilité de trouver une meilleure solution est inférieur à α il faut calculer cette dernière. La probabilité d'avoir une solution d'une taille de moins de x une est égal à $F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$. Or on ne peut exprimer cela sans intégrale. Mais on certaine valeur approché de $F_{N(0,1)}$:

- $F_{N(0,1)}(-2.06) \leq 0.02$
- $F_{N(0,1)}(-1.65) \leq 0.05$
- $F_{N(0,1)}(-1.48) \leq 0.07$
- $F_{N(0,1)}(-1.29) \leq 0.1$

De plus on sait que si $X \sim N(0, 1)$ et que $Y = \mu + \sigma X$ alors $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ donc $F_{N(\mu, \sigma^2)}(y) = F_{N(\mu, \sigma^2)}(\frac{y-\mu}{\sigma})$. Donc on peut dire que si $y \leq \mu + \sigma F_{N(0,1)}^{-1}(\alpha)$ alors la probabilité d'avoir une meilleur solution est inférieure à α .

En pratique on ne connais bien évidemment ni μ ni σ donc on utilise $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ décrit précédemment. Et pour les valeurs de α , on les choisit à l'avance pour fixer la valeur de $F_{N(0,1)}^{-1}(\alpha)$ à utiliser, en effet α n'apparaît plus.

6 Conclusion

Bien que pertinente, nous remarquons que notre heuristique de construction R.G.S.C. donne globalement une solution moins bonne que celle du N.N.H. En effet, bien le R.G.S.C. effectuée plus de comparaisons celui-ci fournit des chemins plus long d'au moins 10%. De plus, celui-ci donne une solution de départ plus difficile à améliorer avec les algorithmes que nous avons implémentés. Pour certaines instances, l'amélioration n'a pas pu se terminer en un temps raisonnable et a été stopée.

Cet algorithme est donc moins bon qu'il n'en avait l'air. Cela dit, nous allons réfléchir à d'éventuelles améliorations basées sur le même principe.

La plupart des difficultés rencontrées se situe dans l'algorithmie. En effet, estimer en permanence la taille de la solution après modification par le 3-opt était une tâche plus difficile qu'il n'en paraissait. Ou encore, les conditions d'arrêt du VNS. Ces deux aspects

sont donc à travailler et nous espérons pouvoir les améliorer avant un prochain rendu de notre travail. Une étude des instances et peut être pertinente afin d'adapter nos algorithmes d'amélioration aux caractéristiques d'un chemin fournie par une heuristique de construction pour une instance donnée.

Ces aspects sont importants pour réduire l'écart de temps d'exécution entre les algorithmes VNS et VND. En effet, cet écart est élevé et peut encore être amélioré d'après nos tests de performance.