Controle preditivo em espaço de estados

Tito L. M. Santos

DAS 9010 - Controle Preditivo Baseado em Modelo

08 de novembro de 2012

Sumário

Sumário

- Inclusão da ação integral;
- Caso sem restrições;
- Caso com restrições;
- Referências

  - **J. M. Maciejowski.** *Predictive Control with Constraints.* Prentice Hall, 2002.
  - **L. Wang** *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB.* Springer, 2009.

- Modelo de predição sem ação integral

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$z(k) = Hx(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

  com $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$, $z(k) \in \mathbb{R}^m$ e $y(k) \in \mathbb{R}^q$.

- Saídas controladas - $y(k)$ (*par* (A, C) *detectável*).
- Saídas mensuráveis - $z(k)$:
  - Estados mensuráveis: $z(k) = x(k)$ $(H = I)$;
  - Saídas mensuráveis: $z(k)$ (*par* (A, H) *detectável*).
- O sistema pode ser estabilizado (*par* (A, B) *estabilizável*).

- Modelo de predição sem ação integral

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ e $y(k) \in \mathbb{R}^q$.

- O problema de otimização pode ser descrito em "k" por

$$\min_{\mathbf{u}(k)} \sum_{j=N_1}^{N_2} (y(k+j|k) - \overline{y_r})' Q (y(k+j|k) - \overline{y_r}) + \sum_{j=0}^{N_u-1} (u(k+j|k) - \overline{u_r})' R (u(k+j|k) - \overline{u_r})$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x(k|k) = x(k) \\ & x(k+1+j|k) = Ax(k+j|k) + Bu(k+j|k), \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_2 - 1 \\ & u(k+j) = u(k+j+N_u), \quad j = N_u,\ N_u+1,\ \ldots,\ N_2 - 1 \\ & y(k+j|k) = Cx(k+j|k), \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_2 - 1 \end{aligned}$$

- No caso mais geral, $\overline{y_r}$ pode ser substituído pela referência futura.

- Modelo de predição sem ação integral

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ e $y(k) \in \mathbb{R}^q$.

- O problema de otimização pode ser descrito em "k" por

$$\min_{\mathbf{u}(k)} \sum_{j=N_1}^{N_2} (y(k+j|k) - \overline{y_r})' Q (y(k+j|k) - \overline{y_r}) + \sum_{j=0}^{N_u-1} (u(k+j|k) - \overline{u_r})' R (u(k+j|k) - \overline{u_r})$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\quad & x(k|k) = x(k) \\ & x(k+1+j|k) = Ax(k+j|k) + Bu(k+j|k), \;\; j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_2 - 1 \\ & u(k+j) = u(k+j+N_u), \;\; j = N_u,\ N_u+1,\ \ldots,\ N_2 - 1 \\ & y(k+j|k) = Cx(k+j|k), \;\; j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_2 - 1 \end{aligned}$$

- No caso mais geral, $\overline{y_r}$ pode ser substituído pela referência futura.

- Seja um modelo dado por

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}
$$

- A saída predita pode ser obtida como segue

$$
\begin{aligned}
x(k+1|k) &= Ax(k) + Bu(k|k), \\
x(k+2|k) &= Ax(k+1|k) + Bu(k+1|k) \\
&= A^2x(k) + ABu(k|k) + Bu(k+1|k), \\
x(k+3|k) &= Ax(k+2|k) + Bu(k+2|k) \\
&= A^3x(k) + A^2Bu(k|k) + ABu(k+1|k) + Bu(k+2|k), \\
&\vdots \\
x(k+N|k) &= A^Nx(k) + A^{N-1}Bu(k|k) + A^{N-2}Bu(k+1|k) + \ldots \\
&\quad + ABu(k+N-2|k) + Bu(k+N-1|k),
\end{aligned}
$$

com

$$
y(k+i|k) = Cx(k+i|k).
$$

- Seja um modelo dado por

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}
$$

- Verifica-se

$$
\begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix}
$$

- Seja um modelo dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

- Verifica-se

$$\begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix}$$

- Alternativamente

$$\mathcal{X}(k) = \mathcal{A}x(k) + \mathcal{B}\mathbf{u}(k).$$

- Seja um modelo dado por

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}
$$

- Também verifica-se

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\mathcal{Y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}(k)}
$$

- Alternativamente

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}(k) &= \mathcal{A}x(k) + \mathcal{B}\mathbf{u}(k) \\
\mathcal{Y}(k) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(k)
\end{aligned}
$$

Introdução

Notação simplificada

- Por simplicidade $x_0 \triangleq x(k|k)$, $x_j \triangleq x(k+j|k)$ e $u_j \triangleq u(k+j|k)$.
- O problema de otimização pode ser descrito em "k" por

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{u}(k)} & \sum_{j=N_1}^{N_2} (y_j - \overline{y_r})' Q (y_j - \overline{y_r}) + \sum_{j=0}^{N_u-1} (u_j - \overline{u_r})' R (u_j - \overline{u_r}) \\
\text{s.a.} \quad & x_0 = x(k) \\
& x_{j+1} = A x_j + B u_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_2 \\
& y_j = C x_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_2 \\
& u_j = u_{N_u - 1}, \quad j = N_u,\ N_u + 1,\ \ldots,\ N_2
\end{aligned}
$$

- $\uparrow\ Q \geq 0 \rightarrow \downarrow (y(k+j|k) - \overline{y_r})$ e vice-versa.
- $\uparrow\ R > 0 \rightarrow \downarrow (u(k+j|k) - \overline{u_r})$ e vice-versa.
- Dado $\overline{y_r}$, $\overline{u_r}$ depende da ação de perturbações.

Sumário

- Seja o modelo em k dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

e em $k-1$ dado por

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1)$$
$$y(k-1) = Cx(k-1)$$

- Subtraindo a equação em k pela de $k-1$

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k)$$
$$\Delta y(k) = C\Delta x(k)$$

onde

$$\Delta y(k) = C\Delta x(k) \Rightarrow \Delta y(k+1) = C\Delta x(k+1)$$

$$y(k+1) = y(k) + C\underbrace{\left(A\Delta x(k) + B\Delta u(k)\right)}_{\Delta x(k+1)}$$

Inclusão da ação integral

Modelo incremental

- Seja o modelo em k dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

e em $k-1$ dado por

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1)$$
$$y(k-1) = Cx(k-1)$$

- Subtraindo a equação em k pela de $k-1$

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k)$$
$$\Delta y(k) = C\Delta x(k)$$

onde

$$\Delta y(k) = C\Delta x(k) \Rightarrow \Delta y(k+1) = C\Delta x(k+1)$$

$$y(k+1) = y(k) + C\underbrace{\left(A\Delta x(k) + B\Delta u(k)\right)}_{\Delta x(k+1)}$$

- Seja o modelo em k dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

e em $k-1$ dado por

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) \\ y(k-1) &= Cx(k-1) \end{aligned}$$

- Subtraindo a equação em k pela de $k-1$

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B\Delta u(k) \\ \Delta y(k) &= C\Delta x(k) \end{aligned}$$

onde

$$\Delta y(k) = C\Delta x(k) \Rightarrow \Delta y(k+1) = C\Delta x(k+1)$$

$$y(k+1) = y(k) + C\underbrace{(A\Delta x(k) + B\Delta u(k))}_{\Delta x(k+1)}$$

- Dada representação a seguir

$$\begin{aligned}\Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B\Delta u(k)\\ y(k+1) &= y(k) + CA\Delta x(k) + CB\Delta u(k)\end{aligned}$$

é possível formar o modelo incremental em espaço de estados na forma

$$\begin{bmatrix}\Delta x(k+1)\\ y(k+1)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A & 0\\ CA & I\end{bmatrix}}_{A_a}\begin{bmatrix}\Delta x(k)\\ y(k)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}B\\ CB\end{bmatrix}}_{B_a}\Delta u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{[0\ \ I]}_{C_a}\begin{bmatrix}\Delta x(k)\\ y(k)\end{bmatrix}$$

- Fazendo $\xi(k) = [\Delta x(k)'\ y(k)']$ chegamos a

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= A_a\xi(k) + B_a\Delta u(k)\\ y(k) &= C_a\xi(k)\end{aligned}$$

Inclusão da ação integral

Efeito de perturbações constante

- Seja o modelo em k dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + v(k)$$

e em $k-1$ dado por

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) + w(k-1)$$
$$y(k-1) = Cx(k-1) + v(k-1)$$

- Sendo $w(k) = w(k-1) = w$ e $v(k) = v(k-1) = v$

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k)$$
$$\Delta y(k) = C\Delta x(k)$$

onde

$$\Delta y(k) = C\Delta x(k) \Rightarrow \Delta y(k+1) = C\Delta x(k+1)$$
$$y(k+1) = y(k) + C\underbrace{\left(A\Delta x(k) + B\Delta u(k)\right)}_{\Delta x(k+1)}$$

Inclusão da ação integral

Efeito de perturbações constante

- Seja o modelo em k dado por

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + v(k)$$

e em $k-1$ dado por

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) + w(k-1)$$
$$y(k-1) = Cx(k-1) + v(k-1)$$

- Sendo $w(k) = w(k-1) = w$ e $v(k) = v(k-1) = v$

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k)$$
$$\Delta y(k) = C\Delta x(k)$$

onde

$$\Delta y(k) = C\Delta x(k) \Rightarrow \Delta y(k+1) = C\Delta x(k+1)$$
$$y(k+1) = y(k) + C\underbrace{\left(A\Delta x(k) + B\Delta u(k)\right)}_{\Delta x(k+1)}$$

- Seja o modelo incremental

$$\begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & I \end{bmatrix}}_{A_a} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix}}_{B_a} \Delta u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{[0 \;\; I]}_{C_a} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

- Podemos considerar

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}(k)} \; & \sum_{j=N_1}^{N_2} (y_j - \overline{y}_r)' Q_y (y_j - \overline{y}_r) + \sum_{j=0}^{N_u-1} \Delta u_j' R \Delta u_j \\ \text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k) - x(k-1))' \; y(k)']' \\ & \Delta u_j = 0, \;\; j = N_u, \; N_u + 1, \; \ldots N_2 \\ & \xi_{j+1} = A_a \xi_j + B_a \Delta u_j, \;\; j = 1, \; 2, \; \ldots \; N_2 \\ & y_j = C_a \xi(j), \;\; j = 1, \; 2, \; \ldots \; N_2 \end{aligned}$$

- Seja o problema de otimização abaixo

$$
\begin{aligned}
\min_{\Delta \mathbf{u}(k)} \sum_{j=N_1}^{N_2} & (y_j - \overline{y}_r)' Q_y (y_j - \overline{y}_r) + \sum_{j=0}^{N_u - 1} \Delta u_j' R \Delta u_j \\
\text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k) - x(k-1))' \ y(k)']' \\
& \Delta u_j = 0, \ \ j = N_u, \ N_u + 1, \ \ldots N_2 \\
& \xi_{j+1} = A_a \xi_j + B_a \Delta u_j, \ \ j = 1, \ 2, \ \ldots \ N_2 \\
& y_j = C_a \xi_j, \ \ j = 1, \ 2, \ \ldots \ N_2
\end{aligned}
$$

Note que

i) Em regime permanente: $\Delta \overline{u}_r = 0$.

iii) O mínimo é obtido com $y_j = \overline{y}_r$ e $\Delta u_j = 0$ para todo j.

- Seja um modelo dado por

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_a \xi(k) + B_a \Delta u(k) \\ y(k) &= C_a \xi(k) \end{aligned}$$

- Verifica-se

$$\begin{bmatrix} \xi(k+1|k) \\ \xi(k+2|k) \\ \vdots \\ \xi(k+N|k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_a \\ A_a^2 \\ \vdots \\ A_a^N \end{bmatrix} \xi(k)}_{\text{RESPOSTA LIVRE}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_a & 0 & \dots & 0 \\ A_a B_a & B_a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_a^{N-1} B_a & A_a^{N-2} B_a & \dots & B_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\text{RESPOSTA FORÇADA}}$$

Sumário

- No caso sem restrições, é possível encontrar analiticamente uma lei de controle linear que determina $u_0^*(y_r, x(k), x(k-1))$.
- Para tanto, considere os vetores aumentados

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{u}(k) &= [\Delta u(k|k)' \ \Delta u(k+1|k)' \ \ldots \ \Delta u(k+N_u-1|k)']', \\
\mathcal{X}(k) &= [\xi(k+1|k)' \ \xi(k+2|k)' \ \ldots \ \xi(k+N_2|k)']', \\
\mathcal{Y}(k) &= [y(k+1|k)' \ y(k+2|k)' \ \ldots \ y(k+N_2|k)']', \\
\mathcal{W}(k) &= [y_r(k+1|k)' \ y_r(k+2|k)' \ \ldots \ y_r(k+N_2|k)']',
\end{aligned}
$$

- As predições são descritas por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}(k) &= \mathcal{A}\xi(k) + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\
\mathcal{Y}(k) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(k)
\end{aligned}
$$

- No caso sem restrições, é possível encontrar analiticamente uma lei de controle linear que determina $u_0^*(y_r, x(k), x(k-1))$.
- Para tanto, considere os vetores aumentados

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathbf{u}(k) &= [\Delta u(k|k)' \ \Delta u(k+1|k)' \ \dots \ \Delta u(k+N_u-1|k)']', \\
\mathcal{X}(k) &= [\xi(k+1|k)' \ \xi(k+2|k)' \ \dots \ \xi(k+N_2|k)']', \\
\mathcal{Y}(k) &= [y(k+1|k)' \ y(k+2|k)' \ \dots \ y(k+N_2|k)']', \\
\mathcal{W}(k) &= [y_r(k+1|k)' \ y_r(k+2|k)' \ \dots \ y_r(k+N_2|k)']',
\end{aligned}
$$

- As predições são descritas por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}(k) &= \mathcal{A}\xi(k) + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\
\mathcal{Y}(k) &= \mathcal{C}\mathcal{X}(k)
\end{aligned}
$$

- Seja o problema de otimização abaixo

$$
\begin{aligned}
\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \sum_{j=N_1}^{N_2} (y_j - \overline{y}_r)' Q_y (y_j - \overline{y}_r) + \sum_{j=0}^{N_u-1} \Delta u_j' R \Delta u_j \\
\text{s.a.} \quad \xi_0 &= [(x(k) - x(k-1))' \; y(k)']' \\
\Delta u_j &= 0, \;\; j > N_u - 1 \\
\xi_{j+1} &= A_a \xi_j + B_a \Delta u_j, \;\; j > 0 \\
y_j &= C_a \xi(j), \;\; j > 0
\end{aligned}
$$

usando

$$
\mathcal{Q} = \text{diag}(Q, Q, ..., Q) \quad \text{e} \quad \mathcal{R} = \text{diag}(R, R, ..., R)
$$

podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad (\mathcal{Y} - \mathcal{W})' \mathcal{Q} (\mathcal{Y} - \mathcal{W}) + \Delta\mathbf{u}(k)' \mathcal{R} \Delta\mathbf{u}(k) \\
\text{s.a.} \quad \xi_0 &= [(x(k) - x(k-1))' \; y(k)']' \\
\mathcal{X} &= \mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\
\mathcal{Y} &= \mathcal{C}\mathcal{X}
\end{aligned}
$$

- Seja o problema na forma matricial dado por

$$\begin{aligned}\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad & (\mathcal{Y}-\mathcal{W})'\mathcal{Q}(\mathcal{Y}-\mathcal{W}) + \Delta\mathbf{u}(k)'\mathcal{R}\Delta\mathbf{u}(k) \\ \text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k)-x(k-1))' \; y(k)']' \\ & \mathcal{X} = \mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\ & \mathcal{Y} = \mathcal{C}\mathcal{X}\end{aligned}$$

- Uma vez que ξ_0 é constante com relação a $\Delta\mathbf{u}(k)$, consideraremos

$$\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad [\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)) - \mathcal{W}]'\mathcal{Q}[\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)) - \mathcal{W}] + \Delta\mathbf{u}(k)'\mathcal{R}\Delta\mathbf{u}(k)$$

- Alternativamente

$$\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad J = \Delta\mathbf{u}(k)'(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})\Delta\mathbf{u}(k) + 2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}' - \mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) + \mathcal{W}'\mathcal{W}$$

- Seja o problema na forma matricial dado por

$$\begin{aligned}\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad & (\mathcal{Y}-\mathcal{W})'\mathcal{Q}(\mathcal{Y}-\mathcal{W}) + \Delta\mathbf{u}(k)'\mathcal{R}\Delta\mathbf{u}(k) \\ \text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k)-x(k-1))'\ y(k)']' \\ & \mathcal{X} = \mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\ & \mathcal{Y} = \mathcal{C}\mathcal{X}\end{aligned}$$

- Uma vez que ξ_0 é constante com relação a $\Delta\mathbf{u}(k)$, consideraremos

$$\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad [\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0+\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k))-\mathcal{W}]'\mathcal{Q}[\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0+\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k))-\mathcal{W}] + \Delta\mathbf{u}(k)'\mathcal{R}\Delta\mathbf{u}(k)$$

- Alternativamente

$$\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad J = \Delta\mathbf{u}(k)'(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})\Delta\mathbf{u}(k)+2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}'-\mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)+\mathcal{W}'\mathcal{W}$$

- Considerando o problema quadrático

$$\min_{\Delta \mathbf{u}(k)} \; J = \Delta \mathbf{u}(k)'(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})\Delta \mathbf{u}(k)+2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}'-\mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B}\Delta \mathbf{u}(k)+\mathcal{W}'\mathcal{W}$$

- O candidato a mínimo é obtido com

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}(k)} = 2(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})\Delta \mathbf{u}^*(k) + [2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}' - \mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B}]' = 0$$

o que implica

$$\Delta \mathbf{u}^*(k) = (\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})^{-1}\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}'(\mathcal{W}-\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0)$$

- De maneira similar ao GPC, é necessário que $\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R} > 0$ para garantir convexidade.

Solução Analítica

Observações

- Seja a solução linear explícita

$$\Delta \mathbf{u}^*(k) = (\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{R})^{-1}\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}'(\mathcal{W} - \mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0)$$

- De maneira similar ao GPC
  - O termo $\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0$ é a resposta livre predita.
  - O vetor $\mathcal{W}$ é composto pelas referências.
- Se a referência futura não é conhecida, utiliza-se

$$\mathcal{W} = [y_r(k)' \; y_r(k)' \; \ldots \; y_r(k)']'$$

- Devido ao princípio do horizonte deslizante, utiliza-se apenas os p primeiros termos de $\Delta \mathbf{u}^*(k)$.

- Seja a solução linear explícita

$$\Delta \mathbf{u}^*(k) = (\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{R})^{-1}\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}'(\mathcal{W} - \mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0)$$

- De maneira similar ao GPC
  - O termo $\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0$ é a resposta livre predita.
  - O vetor $\mathcal{W}$ é composto pelas referências.
- Se a referência futura não é conhecida, utiliza-se

$$\mathcal{W} = [y_r(k)' \; y_r(k)' \; \ldots \; y_r(k)']'$$

- Devido ao princípio do horizonte deslizante, utiliza-se apenas os p primeiros termos de $\Delta \mathbf{u}^*(k)$.

Exemplo: Seja o modelo de um motor DC dado por

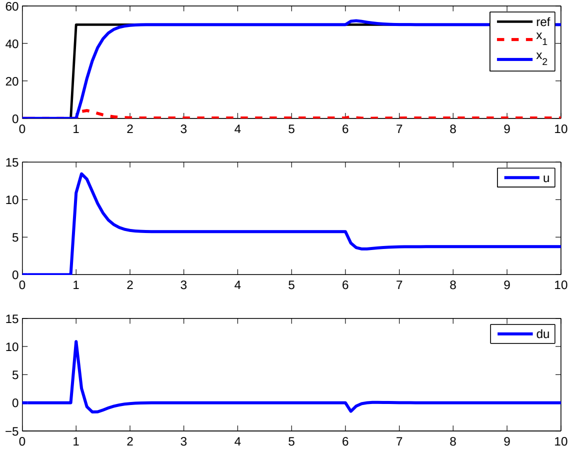
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -K/L \\ K/L & -b/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} V_a(t)$$

$$y(t) = \omega_r(t)$$

com $R = 2.7\ \Omega$, $L = 0.004\ H$, $K = 0.105\ Nm/A$, $J = 10^{-5} Kg \cdot m^2$ e $b = 9.3 \cdot 10^{-6}\ N \cdot ms/rad$.

- Obter o controlador preditivo com modelo incremental para $T_s = 0.1\, s$, $y_r = 50\, rpm$, $Q_y = 1$, $R = 10$, $N_1 = 1$, $N_2 = 20$ e $N_u = 5$.
- Aplicar uma perturbação constante de $2V$ após 6 s de simulação.

Resposta:



Sumário

Problema com restrições

Problema geral

- Seja o problema com restrições na forma

$$\begin{aligned}
\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad & (\mathcal{Y}-\mathcal{W})'\mathcal{Q}(\mathcal{Y}-\mathcal{W}) + \Delta\mathbf{u}(k)'\mathcal{R}\Delta\mathbf{u}(k) \\
\text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k) - x(k-1))' \; y(k)']' \\
& \mathcal{X} = \mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\
& \mathcal{Y} = \mathcal{C}\mathcal{X} \\
& F_y\mathcal{Y} \leq G_y \\
& F_{du}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_{du} \\
& F_u\mathbf{u}(k) \leq G_u
\end{aligned}$$

- E um problema equivalente dado como segue

$$\begin{aligned}
\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad & (\mathcal{Y}-\mathcal{W})'\mathcal{Q}(\mathcal{Y}-\mathcal{W}) + \Delta\mathbf{u}(k)'\mathcal{R}\Delta\mathbf{u}(k) \\
\text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k) - x(k-1))' \; y(k)']' \\
& \mathcal{X} = \mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \\
& \mathcal{Y} = \mathcal{C}\mathcal{X} \\
& F\Delta\mathbf{u}(k) \leq G
\end{aligned}$$

Problema com restrições

Problema geral

- Restrições no incremento de controle

$$F_{du}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_{du}.$$

- Restrições nas saídas (estados)

$$F_y\mathcal{Y} \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)) \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_y - F_y\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0$$

- Restrições no controle ($u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N_u) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{u}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{L} u(k-1)$$

$$F_u\mathbf{u}(k) \leq G_u \Rightarrow F_uM\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_u - F_uLu(k-1).$$

- Restrições no incremento de controle

$$F_{du}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_{du}.$$

- Restrições nas saídas (estados)

$$F_y\mathcal{Y} \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)) \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_y - F_y\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0$$

- Restrições no controle ($u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N_u) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{u}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{L} u(k-1)$$

$$F_u\mathbf{u}(k) \leq G_u \Rightarrow F_uM\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_u - F_uLu(k-1).$$

- Restrições no incremento de controle

$$F_{du}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_{du}.$$

- Restrições nas saídas (estados)

$$F_y\mathcal{Y} \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)) \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_y - F_y\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0$$

- Restrições no controle ($u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N_u) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{u}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{L} u(k-1)$$

$$F_u\mathbf{u}(k) \leq G_u \Rightarrow F_uM\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_u - F_uLu(k-1).$$

- Restrições no incremento de controle

$$F_{du}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_{du}.$$

- Restrições nas saídas (estados)

$$F_y\mathcal{Y} \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}(\mathcal{A}\xi_0 + \mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)) \leq G_y \Rightarrow F_y\mathcal{C}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_y - F_y\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0$$

- Restrições no controle ($u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+N_u) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1) \end{bmatrix}}_{\Delta\mathbf{u}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{L} u(k-1)$$

$$F_u\mathbf{u}(k) \leq G_u \Rightarrow F_uM\Delta\mathbf{u}(k) \leq G_u - F_uLu(k-1).$$

Problema com restrições

Problema geral

- Seja o problema com restrições na forma

$$
\begin{aligned}
\min_{\Delta \mathbf{u}(k)} \quad & (\mathcal{Y} - \mathcal{W})' \mathcal{Q} (\mathcal{Y} - \mathcal{W}) + \Delta \mathbf{u}(k)' \mathcal{R} \Delta \mathbf{u}(k) \\
\text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k) - x(k-1))' \; y(k)']' \\
& \mathcal{X} = \mathcal{A} \xi_0 + \mathcal{B} \Delta \mathbf{u}(k) \\
& \mathcal{Y} = \mathcal{C} \mathcal{X} \\
& F \Delta \mathbf{u}(k) \leq G
\end{aligned}
$$

- Ele pode ser reescrito na forma

$$
\begin{aligned}
\min_{\Delta \mathbf{u}(k)} \quad & \Delta \mathbf{u}(k)' (\mathcal{B}' \mathcal{C}' Q \mathcal{C} \mathcal{B} + \mathcal{R}) \Delta \mathbf{u}(k) + 2(\xi_0' \mathcal{A}' \mathcal{C}' - \mathcal{W}') \mathcal{Q} \mathcal{B} \Delta \mathbf{u}(k) + \mathcal{W}' \mathcal{W} \\
\text{s.a.} \quad & \xi_0 = [(x(k) - x(k-1))' \; y(k)']' \\
& F \Delta \mathbf{u}(k) \leq G
\end{aligned}
$$

Problema com restrições

Problema geral

- Para o problema

$$\min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad \Delta\mathbf{u}(k)'(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})\Delta\mathbf{u}(k)+2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}'-\mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)+\mathcal{W}'\mathcal{W}$$

$$\text{s.a.} \quad \xi_0=[(x(k)-x(k-1))'\ y(k)']'$$

$$F\Delta\mathbf{u}(k)\leq G$$

Se $F\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k)<G$ para $\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k)=(\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})^{-1}\mathcal{B}'\mathcal{Q}'(\mathcal{W}-\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0)$, então,

$$\Delta\mathbf{u}^*(k)=\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k).$$

- Caso contrário - no Matlab - $v^*=\text{quadprog}(H,f,F,G)$ para

$$\min_{v} \quad 0.5v'Hv+f'v$$

$$\text{s.a.}$$

$$Fv\leq G$$

o que resultaria em

$$\Delta\mathbf{u}(k)=\text{quadprog}(2(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R}),[2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}'-\mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{B}]',F,G)$$

Problema com restrições

Problema geral

- Para o problema

$$\begin{aligned} \min_{\Delta\mathbf{u}(k)} \quad & \Delta\mathbf{u}(k)'(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})\Delta\mathbf{u}(k)+2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}'-\mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{B}\Delta\mathbf{u}(k)+\mathcal{W}'\mathcal{W} \\ \text{s.a.} \quad & \xi_0=[(x(k)-x(k-1))'\ y(k)']' \\ & F\Delta\mathbf{u}(k)\leq G \end{aligned}$$

Se $F\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k)<G$ para $\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k)=(\mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{Q}\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R})^{-1}\mathcal{B}'\mathcal{Q}'(\mathcal{W}-\mathcal{C}\mathcal{A}\xi_0)$, então,

$$\Delta\mathbf{u}^*(k)=\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k).$$

- Caso contrário - no Matlab - $v^*=\text{quadprog}(H,f,F,G)$ para

$$\begin{aligned} \min_{v} \quad & 0.5v'Hv+f'v \\ \text{s.a.} \quad & \\ & Fv\leq G \end{aligned}$$

o que resultaria em

$$\Delta\mathbf{u}(k)=\text{quadprog}(2(\mathcal{B}'\mathcal{C}'Q\mathcal{C}\mathcal{B}+\mathcal{R}),[2(\xi_0'\mathcal{A}'\mathcal{C}'-\mathcal{W}')\mathcal{Q}\mathcal{B}]',F,G)$$

Exemplo: Seja o modelo de um motor DC dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -K/L \\ K/L & -b/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} V_a(t)$$

$$y(t) = \omega_r(t)$$

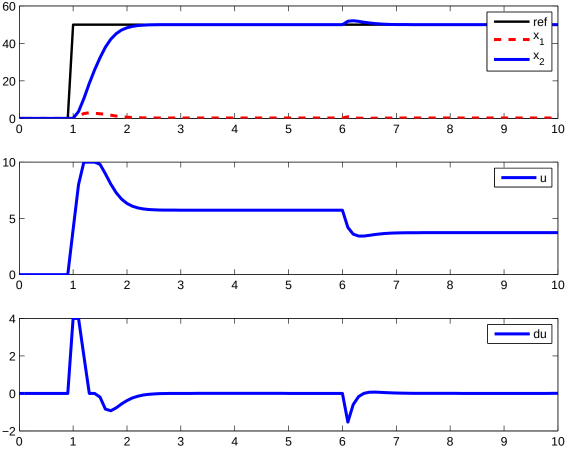
com $R = 2.7\ \Omega$, $L = 0.004\ H$, $K = 0.105\ Nm/A$, $J = 10^{-5} Kg \cdot m^2$ e $b = 9.3 \cdot 10^{-6}\ N \cdot ms/rad$.

- Obter o controlador preditivo com modelo incremental para $T_s = 0.1\,s$, $y_r = 50\,rpm$, $Q_y = 1$, $R = 10$, $N_1 = 1$, $N_2 = 20$ e $N_u = 5$.
- Restrições: $y(k) < 60$, $|u(k)| < 10$ e $|\Delta u(k)| < 4$.
- Aplicar uma perturbação constante de $2V$ após 6 s de simulação.

Solução Analítica

Motor DC

Resposta:



Sumário

Comentários Finais

- Apresentou-se uma estratégia MPC em espaço de estados
- Tratou-se da incorporação do efeito integrador no modelo
- Obteve-se a solução analítica para o caso sem restrições
- Discutiu-se a respeito do caso com restrições.