Introdução à Análise de Algoritmos

Márcio Moretto Ribeiro

24 de agosto de 2021

Conteúdo

Apresentação

Esta apostila contém notas de aula do curso ministrado por mim no segundo semestre de 2021 para as duas turmas noturnas de Sistemas de Informação. Naquele ano o curso de Introdução à Análise de Algoritmos foi ministrado à distância por conta da pandemia de COVID19. Seu conteúdo está baseado nos livros que servem de bibliografia para o curso:

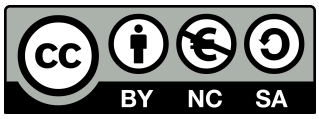
[1] T. H. Cormen. *Algoritmos: teoria e prática*. Campus, 2012. ISBN: 9788535236996.

[3] R. Sedgewick. *Algorithms in C*. Algorithms in C. Addison Wesley Professional, 2001. ISBN: 9780201756081.

[4] R. Sedgewick e K. Wayne. *Algorithms: Algorithms 4*. Pearson Education, 2011. ISBN: 9780132762564.

Além dos livros, serviu de material para elaboração destas notas outros materiais citados ao longo do texto bem como as gravações dos cursos do professor Robert Sedgeweick para o Coursera e do professor Ronald Rivest para o MIT.

A última versão desta apostila está disponível em um repositório no github (https://github.com/marciomr/apostila-iaa.git). Agradeço de antemão eventuais sugestões de correção que forem submetidas pela plataforma.



Capítulo 1

Introdução

1.1 Algoritmos

Um *problema computacional* é a especificação de uma relação desejada entre um certo *valor de entrada* escolhido em um conjunto de valores válidos e o *valor de saída* esperado.

Exemplo 1.1.1:

Problema da busca

Entrada: Uma sequência de n valores $a_1, \ldots, a_n$ em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq i \leq n$ e $b \in \mathbb{Z}$.

Saída: $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = b$ se existir ou $\perp$ caso contrário.

A sequência $3, 5, 16, 17, -1$ junto do valor 5 é uma entrada válida para este problema. Qualquer entrada válida é chamada de *instância do problema*. A saída esperada para essa instância é 2, pois o valor 5 ocorre na segunda posição da sequência.

Outra instância do problema é dada pela mesma sequência junto do valor 42. Neste caso a saída esperada é $\perp$, uma vez que o valor 42 não ocorre na sequência.

Exemplo 1.1.2:

Problema da 3-soma

Entrada: Três sequência de $n \in \mathbb{N}$ valores cada $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ e $c_1, \ldots, c_n$ em que $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq i \leq n$.

Saída: A quantidade de is, js e ks tais que $a_i + b_j + c_j = 0$.

Uma instância do problema é da pelas sequências:

$1, 2, 3$

$2, 4, 6$

$-4, -8, -10$

A saída esperada neste caso é 2 porque:

$2 + 2 - 4 = 0$

$2 + 6 - 8 = 0$

Exemplo 1.1.3:

Problema da ordenação

Entrada: Uma sequência de n valores $a_1, \ldots, a_n$ em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq i \leq n$.

Saída: Uma permutação da sequência de entrada $a'_1, \ldots, a'_n$ tal que $a_i \leq a_j$ para todo $i \leq j$.

Para a instância $3, 42, 17, 2, -1$ deste problema, a saída esperada é $-1, 2, 3, 17, 42$.

A disciplina de Introdução à Teoria da Computação (ITC) tem como objeto de estudo os problemas computacionais. Como eles se classificam entre os que tem solução ou não e entre os que tem solução eficiente ou não. A solução de um problema computacional é um algoritmo.

Os objetos de estudo desta disciplina são os algoritmos. Mas afinal, o que são algoritmos?

Um *algoritmo* parte de uma entrada escolhida em um conjunto potencialmente infinito de possibilidades (*princípio da massividade*) para produzir um valor de saída. O algoritmo processa a entrada por meio de uma sequência de passos (*princípio da discretude*) que produzem valores intermediários. Cada passo segue uma instrução simples (*princípio da elementaridade*) que só depende dos valores anteriores, não admitindo ambiguidades (*princípio da exatidão*) [2].

Um *prorgrama* é a realização de um algoritmo em certa *linguagem de programação*. Assim, um algoritmo é, de um lado, a solução de um problema de computação e, de outro, uma abstração de um conjunto de programas, ele é a idéia por trás desses programas.

Um algoritmo é *correto* se para toda instância do problema ele produz a saída esperada depois de uma sequência finita de passos. Nesse caso dizemos que o algoritmo *resolve* o problema.

Há uma controversa se devemos ou não considerar uma sequência infinita de instruções como um algoritmo. Essa questão, complicada, está no coração do nascimento da ciência da computação e será tratada em ITC. Neste curso focaremos nos algoritmos corretos e, assim, escaparemos dela.

Para enfatizar o fato de que algoritmos abstrações de programas, eles serão apresentados neste curso em uma linguagem informal conhecida como *pseudo-código*.

Exemplo 1.1.4:

Considere a seguinte solução para o problema da busca.

```
BuscaSimples(A, b)
1  ▷ Recebe a_1, ..., a_n com a_i ∈ ℤ e b ∈ ℤ
2  ▷ Devolve i tal que a_i = b se existir e ⊥ caso contrário
3  for i ← 1 até n
4        do if a_i = b
5              then return i
6  return ⊥
```

As duas primeiras linhas são apenas comentários que explicitam a especificação do problema que o algoritmo resolve. A linha 3 indica que um certo valor i deve variar de 1 até n. As duas linhas seguintes estabelecem que se a_i for igual a b então o valor de i

deve ser devolvido como resposta do problema. Por fim, a última linha indica que se o algoritmo chegou naquele ponto, então o valor $\perp$ deve ser devolvido como solução do problema.

Esta disciplina estuda algoritmos. Como podemos garantir que certo algoritmo resolve um problema, ou seja, que ele é correto? O algoritmo do exemplo acima está correto? Por que? Como podemos comparar duas soluções distintas para um mesmo problema? Ou seja, se conhecemos dois um mais algoritmos corretos para um mesmo problema, como avaliamos qual é melhor? O algoritmo do exemplo acima é o melhor algoritmo possível para o problema da busca? Como podemos garantir isso?

Avaliaremos os algoritmos corretos a partir da quantidade de recursos que eles consomem. Estudaremos particularmente dois recursos: espaço de memória e, principalmente, o tempo de execução.

Nos capítulos seguintes veremos uma série de algoritmos para resolver alguns problemas centrais da computação como o problema da busca e da ordenação. Em cada caso avaliaremos os algoritmos apresentados quanto sua corretude e sua eficiência em consumo de tempo e espaço de memória.

No Capítulo X apresentaremos o estudo dos algoritmos a partir do método empírico. Relembraremos o método e veremos um exemplo comparando o tempo de execução de duas soluções para o problema da busca em sequências ordenadas. Então exploraremos técnicas para arrsicar modelos matemáticos adequados para avaliar o consumo de tempo dos algoritmos. E finalmente veremos ferramentas matemáticas uteis para comparar funções quanto ao seu crescimento, a chamada notação assintótica. No Capitulo X estudaremos algoritmos de ordenação como estudo de caso da teoria apresentada anteriormente. Veremos uma série de algoritmos que resolvem o mesmo problema e utilizaremos as técnicas apresentadas para construir e testar modelos do consumo de tempo deles. Estudaremos também um limite teórico da eficiência do problema da ordenação e veremos dois algoritmos que superam esse limite utilizando mais informações do que as assumidas no enunciado do teorema. Concluiremos a apostila no Capítulo X apresentando algoritmos e técnicas um pouco mais avançãdos como programação dinâmica e análise amortizada.

Bibliografia

[1] T. H. Cormen. *Algoritmos: teoria e prática*. Campus, 2012. ISBN: 9788535236996.

[2] A.I. Mal'cev. *Algorithms and Recursive Functions*. Wolters-Noorhoff, 1970.

[3] R. Sedgewick. *Algorithms in C*. Algorithms in C. Addison Wesley Professional, 2001. ISBN: 9780201756081.

[4] R. Sedgewick e K. Wayne. *Algorithms: Algorithms 4*. Pearson Education, 2011. ISBN: 9780132762564.