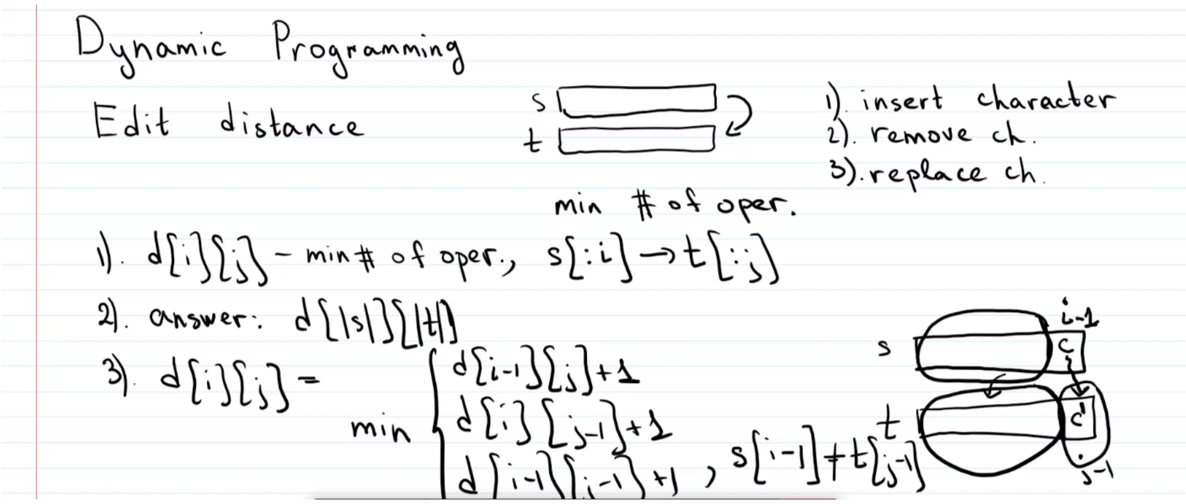
Daria Shutina, CS, 2^{nd} year

Algorithms and Data Structures

22-09-07 : Dynamic programming

Алгоритм Левенштейна

Как из строки `STUDENT` получить строку `POSUDA`



From a word S we want to get a word T. Possible operations:

- insert a letter
- remove a letter
- replace a letter

`d[i][j]` == min amount of operations to change `S[1..i]` into `T[1..j]`

Base:

`d[0][j] = j` (just insert letters into S and get T)

`d[i][0] = i`

Transition:

$$d[i][j] = min \begin{cases} d[i-1][j] + 1 \texttt{(insert a char.)} \\ d[i][j-1] + 1 \texttt{(remove a char.)} \\ d[i-1][j-1] + 1 \texttt{(replace a char.)} \end{cases}$$

Approaches to compute dynamically

1. Recursion + Memorization *aka* Lazy DP

```
int f(i, j) {
    if (dp[i][j] is computed) // <------- that is where memorization is used
        return dp[i][j];
    return f(i - 1, j) + 1;
    ...
}
```

2. Using a for-cycle

```
for i = 1..n {
    for j = 1..m // provided that dp[1..i-1][1..j-1] is computed correctly
    {
        dp[i][j] = min(dp[i][j], dp[i - 1][j] + 1);
        dp[i][j] = min(dp[i][j], dp[i][j - 1] + 1);
        ...
    }
}
```

DP on (sub)sets : TSP

TSP -- travelling Salesman Problem -- find a path visiting all vertexes only once.

Weight of the path should be minimal.

`d[S, v]` -- min weight of a path which ends in `v` and visits vertices that are in subset `S` once.

Answer is in `d[{1,...,n}, v]`

Base:

- \forall v :   S = {v}   d[S, v] = 0   d[S, u] = +inf for u \neq v
- d[S, v] = +inf for v \notin S

Transition:

$$d[S, v] = \min_{u \in S} \{ \, d[S/\{v\}, u] + w_{uv} \, \}$$

Time: $O(2^n n^2)$

Memory: $O(2^n n)$

```
// Base cases
for (v = 0..n-1) {
    S = 1 << v;             // S = {v}
    for (u = 0..n-1) {
        if (v == u)
            d[S][u] = 0;
        else
            d[S][u] = +inf;
    }
}

// переход
for ( S = 0 .. (1<<n)-1 ) {
    for (v = 0..n-1)
    {
        if (S >> v mod 2 == 0) {     // check if v \notin S
            d[S][v] = +inf;
            continue;
        }
        for (uv \in E) {      // looking at edges between v and other vertices
            d[S][v] = min(d[S][v], d[S - (1 << v)][u] + weight[u][v])   // S\{v}
        }
    }
}
```

Coloring a graph

The goal is to minimize amount of different colors. The graph is *undirected*.

V = {0,...,n-1} -- all vertices.   S \in V

`d[S]` == min # of colors used to color subgraph on vertices from S

Answer is in `d[V]`

Base:

- `d[\varnothing] = 0`
- `d[i] = 1 \forall i = 0..n-1`

Transition:

$$d[S] = \min_{T \subset S} \{ \; d[T] + 1 \; \} \quad \text{(T is an independent set. '+1' for coloing it)}$$

```
for (S = 0..2^n-1) {
    for (t = S..1)
}
```

Гамильтонов путь

Гамильтонов путь – путь, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу

`dp[A][v]` – можно ли составить путь, проходящий через вершины множества A и заканчивающийся в вершине v.

$O(2^n n^2)$

```
for v = [0..n-1] :
    dp[1 << v][v] = 1 // путь из вершины v в вершину v равен 1

for A = [1..(1<<n)-1] :
    for v = [0..n] :
        if (dp[A][v]) :
            for x = [0..n-1] :
                if ((A&(1<<x)) == 0) && C[x][v] :
                    dp[A|(1<<x)][x] = 1;
```

$O(2^n n)$

`g[x]` -- соседи вершинки x.

`ends[A]` -- вершинки, в которых может закончиться гамильтонов путь, проходящий через все вершинки из A.

```
for (x = 0 .. n):
    ends[1 << x] = (1 << x)
for (A = 1 .. (1 << n)):
    for (x = 0 .. n):
        if (A & (1 << x) == 0 && g[x] & ends[A]):
            ends[A | (1 << x)] |= (1 << x)
```

Гамильтонов цикл

Используем `ends` из второго решения про гамильтонов путь. Цикл есть, если `ends[0] & ends[(1 << n) - 1] != 0`.

Перебор подмножеств

За $O(3^n)$ ($B \subset A \Rightarrow r$-ые битики в (B, A) могут быть равны $(0,1),\ (1,1)$ или $(0,0)$)

```
for (A = 1; A < (1 << n); ++A)
    for (B = A; B >= 0; B = (B-1) & A) {
        ....
    }
```

Перебор надмножеств

A -- надмножество B, если $B \subset A$ и A/B -- независимое.

Сначала переподсчет независимых множеств за $O(2^n n)$, потом перебор за $O(3^n)$.

```
dp[0] = 0;

for (a = 1 .. (1 << n)):
    up = A & ~(A - 1)  // последний битик
        if (A & (1 << up)):
            is[A] = is[A ^ (1 << up)] & (g[up] && A == 0)

for (A = 1 .. (1 << n)):
    for (B = A; B < (1 << n); B = (B+1) | A):
        if (A & B == B && is[A ^ B]):
            ....
```

Вершинная покраска

Покрасить вершины графа в минимальное число цветов

$O(4^n)$

Сначала посчитаем для каждого подмножества, является ли оно незасивимым. Можно втупую за $O(2^n n^2)$, можно за $O(2^n)$ (см. в Переборе надмножеств).

Теперь дпшечка. Смотрим на подмножество B, которое полностью лежит в другом подсмножестве A. Если B независимое, то релаксим значения для A и A/B.

```
for (A = 1.. (1 << n)):
    for (B = 1 .. (1 << n):
        if (A & B == B && is[B]):
            dp[A] = min(dp[A], dp[A & ~B] + 1)
```

$O(3^n)$

Заметим, что в предыдущем параграфе мы перебирали надмножества. Перепишем код

```
// предподсчет

for (B = 1.. (1 << n)):
    if (is[B]):
        for (A = B; A < (1 << n); A = (A + 1) | B):
            dp[A] = min(dp[A], dp[A ^ B] + 1)
```

22-09-21

Трюки с масками

reverse

16-битные числа.

Рассмотрим число n.

- откусим у него последний бит (`n >> 1`). В начале числа появился ведущий ноль, так как кол-во битов фиксированное
- полученную штуку перевернем (`rev[n >> 1]`)
- уберем ведущий ноль, который теперь оказался в конце числа (`rev[n >> 1] >> 1`)
- в начало результата добавим чиселко, которое мы откусили в первом пункте (`| ((n & 1) << 15)`)

```
for n = 1..(1 << 16) - 1 :
    rev[n] = (rev[n >> 1] >> 1) | ((n & 1) << 15);
```

Младший бит

```
n & -(n - 1)
```

Старший бит

Предподсчитаем старший бит для чисел от 0 до (1 << 16)-1

```
msb = 0;
for (int m = 1; m < (1 << n); ++m) {
    if (m == (1 << (msb + 1)))  // случай, если старший бит устарел
        ++msb;                  // (например, к числу 11..1 прибавили 1)
    ....
}
```

bitset

`bitset<N> b`

- фиксированной длины
- занимает $\frac{N}{w}$ байт, где $w = 8$ -- машинное слово

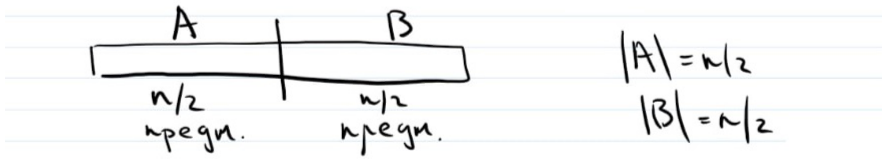
```cpp
#include <bitset>
#include <iostream>

int main() {
    std::bitset<10> bs1;
    std::bitset<10> bs2("11010");
    std::bitset<10> bs3(103);

    int x = bs2[3];


    bs1[4] = 1;     // 0000010000
    bs1.set(4, 0); // 0000000000
    bs1.set(3);     // 0000001000
    bs1.set();      // 1111111111

    bs1.reset(1);   // 1111111101
    bs1.reset();    // 0000000000

    bs1.flip(3);    // 0000001000
    bs1.flip();     // 1111110111
}
```

```cpp
#include <bitset>
#include <iostream>

int main() {
    std::bitset<10> bs;       // 0000000000

    std::cout << bs.any();    // 0

    bs.flip(0);               // 0000000001
    std::cout << bs.any();    // 1


    std::cout << bs.none();   // 0
    bs.reset();               // 0000000000
    std::cout << bs.none();   // 1


    bs.set(3);
    bs.set(5);                // 0000101000
    std::cout << bs.count(); // 2
}

```

Meet in the middle

Пример на рюкзаке

Решение за $O(2^{\frac{n}{2}}n)$



1. $O(2^{n/2})$: Выписываем всевозможные наборы из A. $a \in A$.
2. $O(2^{n/2}\frac{n}{2})$: Отсортируем пары { $weight_a, cost_a$ } по возрастанию весов
3. $O(2^{n/2})$: Посчитаем максимумы $cost_a$ на префиксах: `maxC[i+1] = std::max(maxC[i], cost[i+1])`
4. Перебираем всевозможные наборы из B

BST

```
struct Node {
    Node* left;
    Node* right;
    Node* parent;
    int x;
    auto it;       // указатель на место в списке
}

using pNode = Node*;
```

find, next

```
bool find(Node* v, int x) {    // O(n)
    if (v == nullptr)
        return nullptr;
    if (!v->left && !v->right)
        return false;
    if (v->x == x)
        return true;
    if (v->x < x)
        find(c->right, x);
    find(v->left, x);
}

Node* next(Node* v) {    // O(n)
```

```
    if (v->right) {
        v = v->right;
        while (v->left)
            v = v->left;
    }
    return v;
}
```

add

Доходим до момента когда у вершинки нет левого ребёнка

```
Node* add(Node* v, int x) {    // O(n)

    if (!v->left && !v->right)
        return new Node(x);
    else if (x < v->x)
        v->left = add(v->left, x);
    else if (x > v->x)
        v->right = add(v->right, x);
}
```

delete

Находим вершинку u, у которой $u \to x > v \to x$. У u нет левого ребенка.

Перевешиваем u на место v, меняем значение указателей, потом удаляем v.

```
void del(Node* v) {     // O(n)
    Node* u = next(v);

    u->x = v->x;
    // u->parent->left = v->right;  мб не надо, непонятно
    u->parent = v->parent;
    u->left = v->left;
    u->right = v->right;

    v = u;
}
```

print

```
void print(Node*v) {  // O(n)
    if (!v->right && !v.left)
        return;
    print(v->left);     // выведется в отсорт.порядке:
    std::cout << v->x;  // сначала все <x, потом x, потом >x
    print(v->right);
}
```

Если равные ключи:

1. x ---> pair(x, id);
2. Считать количество x в структурке
3. <x => идёт в v->left;   ≥x => идёт в v->right

AVL-дерево /todo про теорему

Сбалансированное BST. Придумано в 1962 году совестким математиками Адельсоном-Вельским (AV) и Ландисом (L).

Условие: $|h(v.l) - h(v.r)| \leqslant 1, \ \forall v$

Th.: глубина AVL-дерева $O(\log n)$

Док-во:

S_h -- min число вершин высоты h (здесь h = кол-во вершин для данной высоты)

$S_0 = 0, \ S_1 = 1, \ S_2 = 2, \ S_3 = 4$ и т.д.

Докажем, что $S_h = S_{h-1} + S_{h-2} + 1$

Вершина имеет высоту h, тогда когда максимальное из высот детей равно $h - 1$

Получается, высота растет экспоненциально.

Рассмотрим дерево на n вершинах. h -- высота.

$n \geqslant S_n \geqslant c \cdot \phi^h$

$\log_\phi n \geqslant \log_\phi c + h$

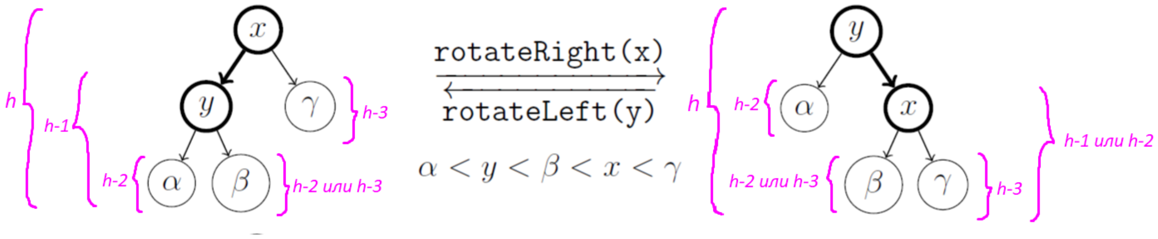
$h \leqslant \log_\phi n - \log_\phi c = O(\log n)$

rotate

1. Добавление в $v.l.l$ или в $v.r.r$

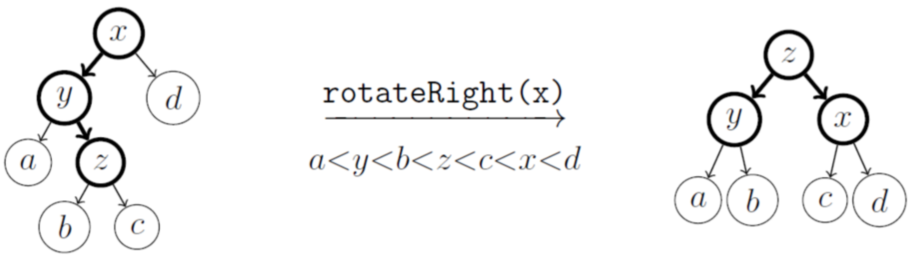
Пусть $h(v.l) = h(v.r) + 2$ -- добавили в левого внука; левое поддерево выше, чем правое

Точно знаем, что левое поддерево непустое.



2. Добавление в $v.l.r$ или в $v.r.l$

Нужно сделать два маленьких вращения: сначала поддерево с корнем $v.l$ влево, потом дерево с корнем v вправо.



Код

```
add (Node* v, int x) {    // O(logn)
    if (!v)
        return new Node(x)
    if (v.x <= x)
        v.r = add(v.r, x)
    else
        v.l = add(v.l, x)
    rebalance(v)  // O(1): просто перевешиваем указатели
    return v
}
```

Чтобы `rebalance()` работал за $O(1)$, в нодах будем хранить дополнительное поле `height`.

22-09-28

RBST

Randomized Binary Search Tree

`Def 1:` BST может быть $RBST$, если любой ключ может быть корнем с одинаковой вероятностью.

`Def 2:` $RBST$ -- это BST, полученное потем добавления всех ключей в изначально пустое дерево в случайной порядке.

Th. (эквивалентность определений)

Определения эквивалентны

Док-во: в случайной перестановке любой элемент будет корнем с вер-тью $\frac{1}{n} \Leftrightarrow$ любой элемент может быть корнем с одинаковой вер-тью. То же самое верно для поддеревьев.

Th. (матожидание для глубины) \todo

$RBST$ построено по ключам $\{x_1, .., x_n\}$. v_i -- узел ключа x_i. Тогда $\mathrm{E}[d(v_i)] = O(\log n)$

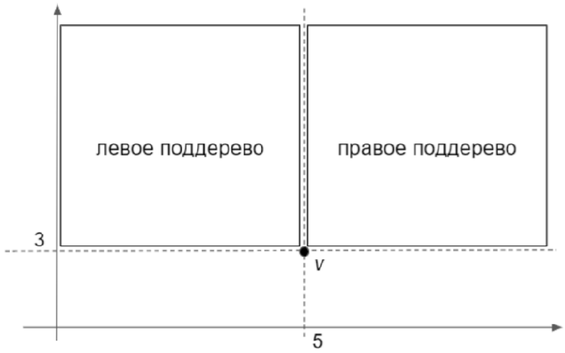
Док-во:

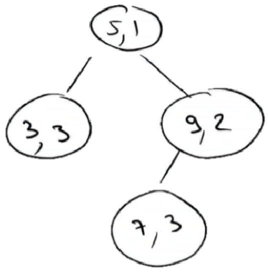
Выберем элемент из массива. x_i стал корнем с вероятностью $\frac{1}{n}$.

Декартово дерево

aka *Treap* aka *Cartesian tree* = $\{\ (x_1, y_1), .., (x_n, y_n)\ \}$.

- дерево поиска по координатам x
- бинарная куча по коорднатам y
- координаты y выбираются рандомно





Th. (связь между Treap и RBST)

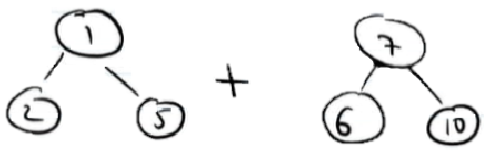
Treap является RBST по координатам x

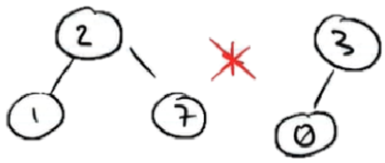
Док-во:

Корень = (x_i, y_i)б где $y_i = \min y$. Cooринаты y рандомные $\Rightarrow$ любая вершина может стать корнем с одинаковой вер-тью $\frac{1}{n}$. Аналогично в поддеревьях.

Merge

Мержим деревья a и b. Требование: $\forall x \in a \ \leqslant \ \forall y \in b$.





```
Node* merge(Node* a, Node* b) {
    if (!a)
        return b
    if (!b)
        return a
    if (a.y <= b.y) {
        a.r = merge(a.r, b)
            return a
    }
    b.l = merge(a, b.l)
    return b
}
```

Split

```
pair<Node*, Node*> split(Node* t, int x) {   // O(logn)
    if (!t)
        return (nullptr, nullptr)
    if (t.x <= x) {
        (a, b) = split(t.r, x)
        t.r = a
        return (t, b)
    }
    if (t.x >  x) {
        (a, b) = split(t.l, x)
        t.l = b
        return (a, t)
    }
}
```

22-10-05

Улучшения BST

1. Массовые операции

(a) getSum(x1, x2)

Дано множество пар $< x, y >$.

`getSum(x1, x2)` = $\sum\limits_{x \in [x1, x2]} y$

Решение 1:

Храним $RBST$. Ключ -- x, доп. информация -- сумма y в поддереве.

$\texttt{split}(t, x_1) \ \rightarrow \ t_{<x_1}; t_{\geqslant x_1}$

$\texttt{split}(t_{\geqslant x_1}, x_2) \ \rightarrow \ t_{[x_1, x_2)}; t_{\geqslant x_2}$

answer = $t_{[x_1, x_2)}.\texttt{sum}$

t_3 = $\texttt{merge}(t_{[x_1, x_2)}, t_{\geqslant x_2})$

t = $\texttt{merge}(t_{<x_1}, t_3)$

Решение 2:

```
getSum(t, qx1, qx2, cx1, cx2)
{
    if ([qx1, qx2) && [cx1, cx2) == 0) { // нет пересечения
         return 0;
    }

    if ([cx1, cx2) && [qx1, qx2) == [cx1, cx2)) { // [cx1, cx2) внутри [qx1, qx2)
        return t->sum;
    }

    return getSum(t->l, qx1, qx2, cx1, t->x) + getSum(t->r, qx1, qx2, t->x, cx2);
}

int main() {
    getSum(root, qx1, qx2, -inf, +inf);
}
```

Работает за $O(\log n)$: на каждом уровне будет посещено не больше 4 вершин, потому что разветвляемся максимум от двух вершин. Тогда время работы = $4 \cdot \texttt{height} = 4 \log n$.

(b) assignValue(x1, x2, y)

$\texttt{split}(t, x_1) \ \rightarrow \ t_{<x_1}; t_{\geqslant x_1}$

$\texttt{split}(t_{\geqslant x_1}, x_2) \ \rightarrow \ t_{[x_1, x_2)}; t_{\geqslant x_2}$

Лениво меняем значения в поддереве $t_{[x_1, x_2)}$ с помощью $\texttt{push}$:

```
Node::push()
{
    if (toAssign == -inf) {
        return;
    }
    if (l) {
        l->toAssign = toAssign
        l->y = toAssign
    }
    if (r) {
        r->toAssign = toAssign
        l->y = toAssign
    }
    toAssign = -inf;
}
```

Значения в поддереве с корнем $t_{[x_1, x_2)}$ меняются во время первого `merge`.

2. Дерево поиска по неявному ключу \todo

(a) get_kth_element(k)

(b)

22-10-19

Динамическое дерево отрезков

Способ 1: меняем `vector` на мапу

Возьмём обычное ДО, заменим `vector<int> ST`, в котором значения дерева, на `unordered_map<ll, int> ST`.

За q запросов создадим $\leqslant \min(q \log n, n)$.

Платим временем, потому что мапа никуда не спешит.

Способ 2: не массив, а указатели

Храним ДО не на массиве, а на указателях. Создаём вершины, только когда они нужны. Вершины можно создавать в запросах get.

Вершины нет $\Rightarrow$ значение = 0

Способ 3: сжатие координат

Требуем, чтобы задача была в оффлайне.

q запросов. Сортируем $2q$ чисел, присваиваем им координаты $0, 1, 2, ..$

Двумерные (многомерные) запросы

Задача 1:

Дан массив длины n. Запросы вида `get(l, r, d, u)` -- найти #чисел на $[l, r)$: их величины $\in [d, u)$

Задача 2:

Дано n точек на плоскости. Заросы `get(l, r, d, u)` -- #точек в множестве $\{\ i\ :\ x_i \in [l, r),\ y_i \in [d, u)\ \}$

Утверждение: задача 1 и задача 2 -- это одно и то же.

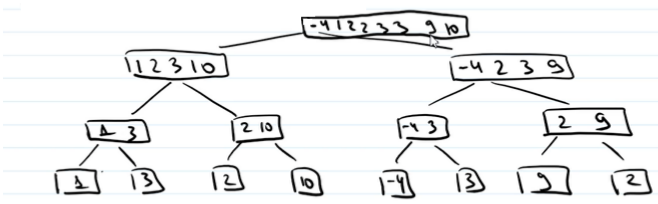
Док-во:

$1 \Rightarrow 2:\ \ a[i]\ \rightarrow\ (i, a[i])$

$2 \Rightarrow 1:$ сделаем сжатие точек по x_i. Получаем координаты $\{x_i\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ -- это индексы для массива

Дерево mergeSort

Дерево отрезков сортированным массивов



Построение за $O(n \log n)$ с помощью `mergeSort` (обычное ДО за $O(n)$).

Задача 1: Время = $\underbrace{\#кусков}_{O(\log n)} \cdot \underbrace{T(ответ\ в\ куске)}_{2\ бинпоиска} = O(\log^2 n)$

22-10-26

Sparse table

Разреженная таблица -- структура данных, позволяющая отвечать на запросы минимума на отрезке за $O(1)$ с препроцессингом за $O(n \log n)$ времени и памяти.

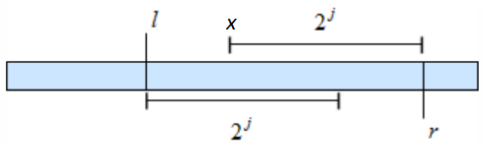
По сути, считаем минимумы на каждом отрезке длины 2^k.

$dp[i][k] = \min\{\ a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+2^k-1}\ \}$

```
for i = 0..n:
    dp[i][0] = parent[i]

for k = 1..logn:
    for v = 0..n:
        dp[v][k] = min(dp[v][k - 1], dp[v + 2^{k-1}][k-1])
```

Запрос `get(l, r)`:

Находим степень j такую, что $2^j \leqslant r - l$. Тогда минимум на $[l, r]$ = `min(dp[l][j], dp[x][j])` ($x = r - 2^j$).



Чтобы запрос работал за $O(1)$, преподсчитаем степени двойки. Типа `k = log[r - l]`.

LCA & Двоичные подъемы

isAncestor

Запускаем дфс от корня и запоминаем время входа/выхода. Тогда

```
isAncector(a, b) {
    if (tin[a] <= tin[b] && tout[a] >= tout[b])
    return true;
    return false;
}
```

Док-во корректности:

Рассмотрим вершинку . Вершинки, у которых $\texttt{tin} \geqslant \texttt{tin[a]}$, находятся в более правых ветках и у детей . Вершинки, у которых $\texttt{tout} \leqslant \texttt{tout[a]}$, находятся в более левых ветках и у детей . В пересечении только дети a.

LCA

```
lca(v, u) {
    if (isAncestor(v, u)) {
        return v
    }
    for (int k = logn; k >= 0; --k) {
        tmp = up[v][k]
        if (!isAncestor(tmp, u)) {      // если не прыгнули слишком высоко,
            v = tmp                    // то меняем v
        }
    }
    return up[v][0]
}
```

LA (level ancestor)

Online

Запрос `LA(v, k)` – подняться в дереве от вершины `v` на `k` шагов вверх.

Уже умеем решать за $< n\log n,\ \ \log n >$ двоичными подъёмами.

Offline

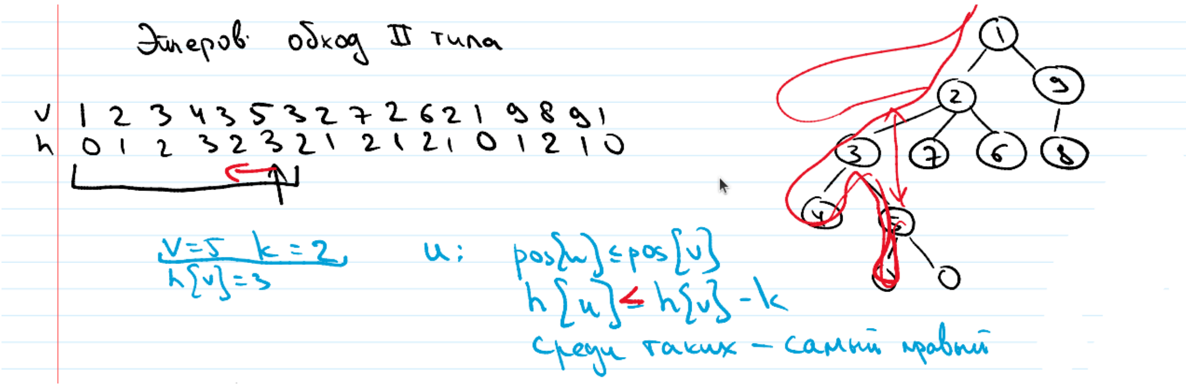
Пройдем дфсом и будем запоминать пройденный путь. Для вершины сохранен путь от корня, можно за $O(1)$ узнать предка на k-ом уровне.

Алгоритм Вишкина

Работает за $< n, \log n >$.

Выпишем высоты Эйлерова обхода второго типа. Получим массив `height`.

Для запроса `LA(v, k)` знаем индекс `j` : `height[j] = v`. Найдем индес `max i` : `i <= j && height[i] = height[j] - k`.



Чтобы быстро найти индекс, используем ДО за $< n, \ \log n >$. В вершинке храним максимум.

22-11-02

RMQ $\pm$ 1

$\forall i \ : \ |a_i - a_{i+1}| = 1$. Работает за `<n, 1>`.

Разобьём массив на блоки длины $B = \frac{\log n}{2}$.

В каждом блоке находим минимум (можно за $O(n)$), строим на них sparse table за $O(\frac{2n}{\log n} \log \log \frac{2n}{\log n}) = O(n)$.

Блок можно привести к каконическому виду, вычтя первый элемент: $7, 8, 7, 6, 5 \ \rightarrow \ 0, 1, 0, -1, -2$

Предподсчитаем минимум для каждого из таких типов.

```
for (type in types)
    for (l = 0 .. B)
        for (r = l .. B) {
            m = (r + l) / 2
            precalc[type][l][r] = min(precalc[type >> m][l][m], precalc[type & (1 << m - 1)][m][r]) // ну типа
        }
```

Работает за $O(2^B B^2) = O(\sqrt{n} \log^2 n)$.

Запрос разбивается на хвост в начале + один или несколько блоков + хвост в конце. Ответить на него можно за $O(1)$.

ФКБ

Хотим `RMQ` за `<n, 1>` на массиве

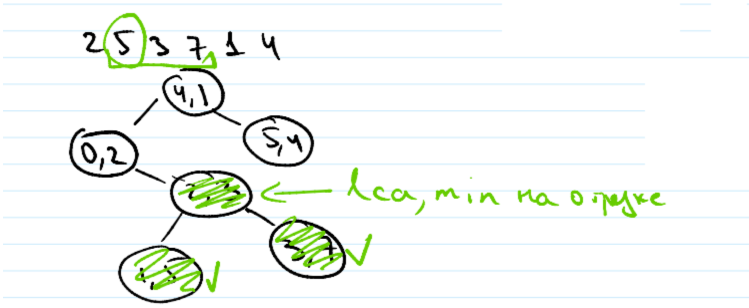
$\texttt{RMQ} \underset{1}{\to} \texttt{LCA} \underset{2}{\to} \texttt{RMQ} \pm 1$

1. $\texttt{RMQ} \to \texttt{LCA}$

   Строим декартач по массиву за $O(n)$. $\texttt{a[i]} \to \texttt{<i, a[i]>}$

   По индексам это BST (*aka* приоритет), по элементам -- бин куча.

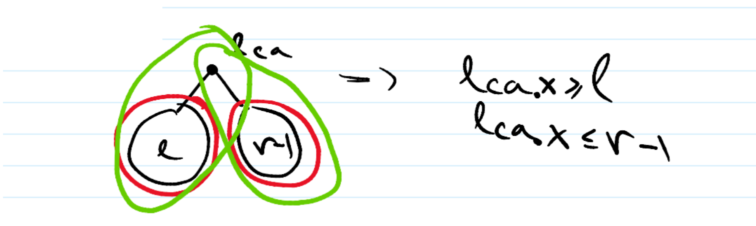
   Как построить за $O(n)$? Проходимся последовательно по массиву. В дереве будем всегда двигаться по самому правому пути (запоминать его конец). Если значение текущего элемента меньше, чем начало пути, то добавляем новую ветку справа от всех веток начала пути (теперь начало самого правого пути поменялось).



   LCA для вершинок v и u = $\min$ на отрезке $[v.key, u.key]$

   Док-во:

   - $LCA \in$ отрезку

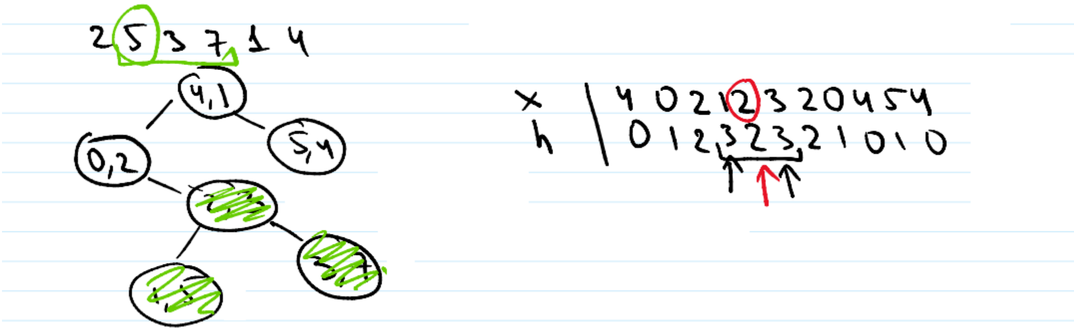


   - $\forall i,\ i \in [l, r)\ :\ (i, a[i]) \in subtree(lca)\ \Rightarrow\ lca.value \leqslant a[i]$

     $\Rightarrow lca$ = $\min$ на отрезке

2. $\texttt{LCA} \to \texttt{RMQ} \pm 1$

(1) Эйлеров обход второго типа (выписываем вершину и высоту)



Получаем массив $\mathtt{h}$, в котором разница между элементами $= \pm 1$.

Выбираем в нем любое из вхождений вершинок, мин число между ними $= lca$ этих вершинок.

(2) В $\mathtt{h}$ любой отрезок однозначно кодируется как $(x, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, где x -- число в начале отрезка.

Хотим для любого отрезка $[l, r)$ быстро узнавать тип и быстро находить минимум.

$k = \frac{\log n}{2}$. Строим sparse table.

Всего есть $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k \leqslant 2^{k+1} = O(\sqrt{n})$ различных отрезков.

Переберем все отрезки и найдем в них минимумы.

```
for (mask = 0..2^{k+1})
    for (l = 0..k)
        for (r = 0..k)
            precalc[type][l][r] = min elem in [l, r];
```

22-11-09

Центроидная декомпозиция

Центроид -- вершинка, при удалении которой граф распадается на компоненты размера $\leqslant \frac{n}{2}$. Явно хранить компоненты не нужно, их можно восстановить по уровню вершинок.

d_v -- уровень вершинки v, p_v -- родитель центроида v.

Для центроидной декомпозиции нужно $\Theta(n)$ памяти, потому что нужны только массивы p и d.

Глубина дерева $\leqslant \log n$.

`build` работает за $O(n \log n)$.

```
// считает размер компоненты связности
int calc_size(int v, int parent = -1) {
    int size = 1;
    for (int x: graph[v])
        if (x != parent && d[x] == -1)
            size += calc_size(x, v);
    return size;
}

// Зная размер дерева n, считаем размеры поддеревьев, параллельно ищем центроид
int get_centroid(int v, int parent, int n, int &centroid) {
    int size = 1;
    for (int x: graph[v])
        if (x != parent && d[x] == -1)
            size += get_centroid(x, v, n, centroid);
    if (size * 2 >= n && centroid == -1)
        centroid = v;
    return size;

}

void build(int v, int parent, int depth) {
    int centroid = -1;
    get_centroid(v, -1, calc_size(v), centroid);
    d[centroid] = depth;
    p[centroid] = parent;
    for (int x: g[centroid])
        if (d[x] == -1)
            build(x, centroid, depth + 1);
}

d = vector<int>(n, -1);
p = vector<int>(n, -1);
build (0 , -1 , 0);
```

v -- предок a и b, такой что $a, b \in C(v)$. Можем найти за $O(\log n)$

Минимум на пути между a и b равен $\min(f[v][a], f[v][b])$.

MST

Minimal Spanning Tree

Th. (лемма о разрезе)

V -- множество вершин, E -- множество ребер в исходном графе.

$V = A \ \sqcup \ B$ -- разрез графа

$T \subset E \ : \ T \text{ не пересекает разрез } (\nexists e \in T \ : \ e = (ab), a \in A, b \in B)$

Тогда $\exists MST \, T_0 \ : \ T \subset T_0$

Док-во:

e -- ребро минимального веса из разреза ($e = (ab), a \in A, b \in B \ \land \ \forall e' = (a'b'), a' \in A, b' \in B \ : \ weight(e') \geqslant weight(e)$)

Тогда e -- безопасное ребро для T, т. е. $\exists \ MST \, T_1 \ : \ T \cup \{e\} \subset T_1$

Рассмотрим T_0.

1. $e \in T_0 \ \Rightarrow \ T_1 := T_0$
2. $e \notin T_0$. Тогда в T_0 есть как минимум одно ребро $e' = (a'b')$, пересекающее разрез (иначе T_0 не связное, противоречие).

   $T_1 := T_0 / \{e'\} \cup \{e\}$

   $$\left.\begin{aligned} weight(T_1) = weight(T_0) - weight(e') + weight(e) \\ weight(e') \geqslant weight(e) \end{aligned}\right\} \ \Rightarrow \ weight(T_1) \leqslant weight(T_0)$$

   T_1 -- дерево ($|T_1| = |T_0| - 1 + 1 = n - 1$)

   Путь между a' и b' все ещё существует и равен $a' \rightsquigarrow a \underset{e}{\rightarrow} b \rightsquigarrow b'$. Если после замены нет пути из a' в a, то изначально T_0 не был связный, противоречие.
3. *Утв. 1*: $T_1 - MST$ ($|T_1| = n - 1$ и T_1 связное)

   Утв. 2: $T \cup \{e\} \subset T_1$

   Док-во:

   $e \in T_1$

   В T не было ребер из разреза по условию $\Rightarrow \ e' \notin T \ \Rightarrow \ T \subset T_0 / \{e'\} \ \Rightarrow \ T \subset T_1$

Смысл леммы:

Если есть какое-то множество ребер, которое можно дополнить до MST, то можно просто брать ребро минимального веса, соединяющее две компоненты.

Алгоритм Прима

Строим граф T с нуля. Изначально в T находится одна вершинка.

Для вершинки u перебираем рёбра. Выбираем такое (u, v), что:

- $w((u, v)) = \min$
- $v \notin T$

Делаем так до тех пор, пока в T не будут включены все вершинки

Работает за $O(V^2 + E)$ на массиве, $O(E \log V)$ на бин куче, $O(V \log V + E)$ на Фиб. куче.

```cpp
int Prim(std::vector<std::vector<int>> &g) {
    int res = 0;
    int cur = 0;
    for (int repeat = 1; repeat < n; ++repeat) {
        for (int j = 1; j < n; ++j) {
            if (!used[j] && g[cur][j] < dist[j]) {
                dist[j] = g[cur][j];
            }
        }
        int min = INT32_MAX;
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            if (!used[j] && dist[j] < min) {
                min = dist[j];
                cur = j;
            }
        used[cur] = true;
        res += min;
    }
    return res;
}
```

Алгоритм Краскала

Построение MST в связном графе

Строим мст с нуля. Сначала это пустой граф T. Сортируем рёбра по возрастанию, получаем массив `Edges`.

Добавляем ребро, если оно лежит между вершинкой $\in T$ и вершинкой $\notin T$.

```
std::vector<int> parent(n, -1);
std::vector<int> rank(n, 0);  // ну типа высота дерева

int find_set(int v) {
    if (parent[v] == v) {
        return v;
    }
    return parent[v] = find_set(parent[v]);
}

void union_set(int a, int b) {
    int v_a = find_set(a);
    int v_b = find_set(b);
    if (v_a == v_b) {
        return;
    }
    if (rank[v_a] < rank[v_b]) {
        std::swap(v_a, v_b);
    }
    parent[v_b] = v_a;
    if (rank[v_a] == rank[v_b]) {
        ++rank[v_a];
    }
}

int kraskal(std::set<std::pair<int, std::pair<int, int>>> &Edges) {
    int cost = 0;
    for (const auto &edge : Edges) {
        int w = edge.first, u = edge.second.first, v = edge.second.second;
        if (find_set(u) != find_set(v)) {
            union_set(u, v);
            cost += w;
        }
    }
    return cost;
}
```

`find_set()` за $O(\log n)$, потому что высота дерева (aka rank) не больше $\log n$.

`union_set()` можно заставить работать за $O(1)$.

Корректность алгоритма

Рассмотрим разрез графа: $A \subset V$ && $B = V / A$.

Изначально $T = \{\varnothing\}$. Будем набирать рёбра в T.

e -- ребро минимального веса, соединяющее $a \in A$ и $b \in B$. Рёбра меньшего веса находятся либо в A, либо в $B \Rightarrow$ их нет смысла брать. Остальные рёбра между A и B имеют больший вес. Значит e -- безопасное ребро, его можно добавить в T.

Если полученное T -- не дерево (т.е. не связно), то граф изначально был несвязный, противоречие.

$$\left.\begin{matrix} T - \text{дерево} \\ T \subseteq MST \end{matrix}\right\} \implies T = MST$$

22-11-16

DSU

DSU -- Система Непересекающихся Множеств

Умеет:

- `init(n)` -- создать n множеств из одного элемента
- `get(a)` -- узнать уникальный идентификатор множества, в котором лежит a
- `join(a, b)` -- объединить множества, в которых лежат a и b

DSU на списках

```
vector<set> sets;
vector<int> id;

void init(int n) {   // O(n)
    for (int i = 1..n) {
        id[i] = i;
        sets[i].insert(i);
    }
}

int get(int a) {  // O(1)
    return id[a];
}

void join(int a, int b) {
    if (sets[id[a]].size() < sets[id[b]].size())
        std::swap(a, b);
    for (int x : sets[id[b]]) {
        id[x] = id[a];
        // sets[id[b]].erase(x);
        sets[id[a]].insert(x);
    }
}
```

Th. (суммарное время работы join) \todo

Суммарное время работы всех `join` не больше $n \log n$.

Док-во:

Пусть x сейчас перекрашивается $\Rightarrow$ размер множества, в котором живёт x, увеличился минимум вдвое. Для каждого x произойдёт не более $\log n$ таких событий. wtf

DSU на деревьях

Базовая реализация:

```
vector<int> p;

void init(int n) {
    for (int i = 1..n) {
        p[i] = i;
    }
}

int get(int a) {
    return p[a] == a ? a : get(p[a]);
}

int join(int a, int b) {
    pa = get(a);
    pb = get(b);
    p[pb] = pa;
}
```

Оптимизации

1. Сжатие путей -- перевешивание вершинок корню

```
int get(int a) {
    if (p[a] == a)
        return a;
    return p[a] = get(p[a]);
}
```

2. Сохранение рангов для перевешивания меньшего дерева к большему.

   Ранг вершины – глубина поддерева, если бы не было сжатия путей.

```
vector<int> rank;
```

```

void init(int n) {
    for (int i = 1..n) {
        p[i] = i;
        rank[i] = 0;
    }
}

join(a, b) { // O(logn)
    pa = get(a);
    pb = get(b);
    if (rank[pa] < rank[pb])
        std::swap(pa, pb);
    p[pb] = pa;
    if (rank[pa] == rank[pb])
    rank[pa]++;
}
```

Th. (про размер поддерева)

Если у v ранг k, то её поддерево размера $\geqslant 2^k$

Док-во:

База: $k = 0$. Размер дерева $= 1$.

Переход:

Чтобы получить дерево ранга $k+1$, нужны для дерева ранга k. Подвешиваем дерево с корнем u к дереву с корнем v.

$$\text{Новый размер дерева с корнем } v = \underbrace{\text{старый размер дерева с корнем } v}_{\geqslant 2^k (\textit{по предн. инд.})} + \underbrace{\text{размер дерева с корнем } u}_{\geqslant 2^k (\textit{по предн.инд.})} \geqslant 2^{k+1}$$

Th. (время работы join и get)

`join` и `get` работают за $O(\log n)$.

Док-во:

Работа `join` зависит от `get`. `get` работает за `rank(root)` $\leqslant O(\log n)$.

22-11-23

Жадные алгоритмы

Алгоритм Хаффмана

Есть алфавит. Для каждой буквы известны

- cnt_i -- количество обращений (либо используется вероятность, с которой буква встретится в тексте)
- $a_i \in \{0, 1\}^*$ -- код буквы
- $l_i = |a_i|$ -- длина кода буквы

Хотим подобрать коды букв так, чтобы длина текста была минимальной.

$\sum l_i \cdot cnt_i \to \min$ = длина текста

$\sum l_i \cdot \underbrace{p_i}_{\in[0,1]} \to \min$ = E[длины одной буквы]

Алгоритм:

Отсортируем cnt_i по убыванию, l_i -- по возрастанию. Получим дерево, где путь от корня до листа -- код буквы.

Будем сворачивать последние две буквы a_{n-1} и a_n (у них $cnt = \min$) в одну новую букву a_p. $cnt_p = cnt_n + cnt_{n-1}$.

Используем приоритетную очередь.

```
new_letter = n;
vector<int> cnt(2 * n);
vector<pair<int, int>> children(2 * n);
set<pair<int, int>> q;
for (int i = 0; i < n; ++i)
    q.insert({cnt[i], i});
while (q.size() >= 2) {
    auto a = *q.begin();
    q.erase(q.begin());
    auto b = *q.begin();
    q.erase(q.begin());
    cnt[new_letter] = cnt[a.first] + cnt[b.first];
    q.insert({cnt[new_letter], new_letter});
    children[new_letter++] = {a.second, b.second};
}
```

Работает за $O(n \log n)$, так как n итераций + сортировка при добавлении в q.

Корректность алгоритма:

Рассмотрим a_n -- самый глубокий лист. $l_n = \max(l_i)$. У него есть брат (иначе уберём один символ в коде буквы). То есть $\exists k \ : \ l_k = l_n$.

Рассмотрим a_{n-1}.

$\left.\begin{array}{r} l_{n-1} \geqslant l_k \\ l_{n-1} \leqslant l_n \\ l_n = l_k \end{array}\right\} \Rightarrow \ l_{n-1} = l_n$. Поменяем местами a_k и a_{n-1} (OPT не изменился).

Заменим a_n и a_{n-1} на новую букву a_p. $cnt_p = cnt_n + cnt_{n-1}$.

Перестановочные методы

Предположим, задача решается сортировкой. Надо придумать такой компаратор, чтобы *любые два элемента были сравнимы между собой* и *выполнялась транзитивность*.

Простыми словами, нужно что-то сделать с элементами, чтобы узнать, как их сортировать.

Смотрим на минимальный элемент

Есть n задач. Задача a_i решается за время t_i. Хотим решить максимальное количество задач за общее время $T \Leftrightarrow \sum\limits_1^k a_i \leqslant T, \ k \to \max$.

Отсортируем t_i по возрастанию. $t_{j_1} \leqslant t_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant t_{j_n}$.

Рассмотрим задачу $a_{j_1}, \ t_{j_1} = \min t_i$.

1. $a_{j_1} \in OPT$. Если заменить a_{j_1} на какую-то другую задачу, общее время только возрастёт.
2. $a_{j_1} \notin OPT$. Тогда $\exists k \ : \ a_k \in OPT \ \land \ t_k \geqslant t_{j_1}$. Заменим a_k на a_{j_1}, общее время только уменьшится.

Значит, для оптимального решения нужно отсортировать t_i по возрастанию.

Убираем последний элемент из OPT

Есть n задач. Для каждой известно время решения t_i и дедлайн d_i. Можно ли решить все задачи?

Рассмотрим последнюю задачу. $\sum\limits_1^n t_i = \sum\limits_1^{n-1} t_i + t_i \leqslant d_n \Rightarrow d_n = \max d_i$.

Значит, для ответа на вопрос нужно отсортировать дедлайны по возрастанию и проверить, что $\forall k : \sum\limits_1^k t_k \leqslant d_k$.

Меняем местами два соседних элемента

Есть файлы на ленте.

$size_i$ -- размер i-ого файла.

pos_i -- начало i-ого файла на ленте.

cnt_i -- кол-во обращений к i-ому файлу.

$\sum\limits_1^n cnt_i \cdot pos_i \to \min$

OPT -- оптимальное решение. Свапнем i-ый и $(i+1)$-ый файлы и получим решение $OPT_1 \geqslant OPT$.

$$OPT = \sum_1^n cnt_k \cdot pos_k$$

$$OPT_1 = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq i+1}} cnt_k \cdot pos_k + pos_i \cdot cnt_{i+1} + (pos_i + size_{i+1}) \cdot cnt_i$$

$$OPT_1 \geqslant OPT \Rightarrow \frac{size_i}{cnt_i} \leqslant \frac{size_{i+1}}{cnt_{i+1}}$$

Значит, сортируем по возрастанию $\frac{size_i}{cnt_i}$.

22-11-30

Правило Вансдорфа

Шахматная доска 8×8. Хотим конём обойти все клетки.

$\deg v$ -- остаточная степень вершинки -- количество вершинок, в которые можно сделать ход.

Правило Вансдорфа говорит, в каком порядке обрабатывать вершины:

- выбирать вершину с минимальной остаточной степенью
- при равной остаточной степени выбирать вершину, которая ближе к краю доски

Обобщения для графов:

1. доска $n \times n$
2. дан произвольный граф
    - идем в min остаточную степень
    - при равенстве степеней выбираем случайную из вершинок. У вершинки v вероятность быть выбранной равна $\frac{1}{\deg v}$.

Решение:

Вариант 1 -- перебор. Вызываем функцию, потом откатываемся назад.

Вариант 2 -- случайное блуждание. Каждый раз выбираем случайную вершинку. В какой-то момент дойдем до финиша, тогда начнем сначала.