

INTRODUCTION À L'ÉVALUATION DES ERREURS ET INCERTITUDES

1 Généralités

Postulat : Les instruments de mesure ne sont pas de précision infinie (matériel, œil humain, ...). Les mesures faites pendant une expérience ne sont donc pas exactes !

TOUT RÉSULTAT DOIT ÊTRE MUNI D'UNE ERREUR/INCERTITUDE

Question à se poser : “La relation n’est pas vérifiée exactement parce qu’elle est fausse ou parce que les mesures sont incertaines ?”

2 Erreurs et incertitudes

2.1 Origine des erreurs/incertitudes

Précision de la mesure Δ_1

- graduations,
- nombre de décimales affichées,
- ...

Dispersion statistique Δ_2 (où erreur aléatoire)

- environnement,
- utilisateur,
- physique du phénomène étudié,
- ...

Erreur systématique Δ_3

- biais de l'appareil de mesure,
- mauvais étalonnage,
- ...

On définit l'erreur totale Δ_{Tot}

$$\Delta_{Tot} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

Exemple : flèches tirées sur une cible (Fig. ??).

- La précision est la taille de la pointe de la flèche.
- La dispersion statistique désigne le fait que les flèches sont proches les unes des autres, ou bien éparpillées sur la cible.
- L'erreur systématique indique si les flèches visent bien le centre, ou bien un autre point de la cible.

Attention : les incertitudes ne sont pas à confondre avec les erreurs (biais) :

- les incertitudes quantifient les grandeurs incertaines,
- alors que le biais est une valeur certaine !

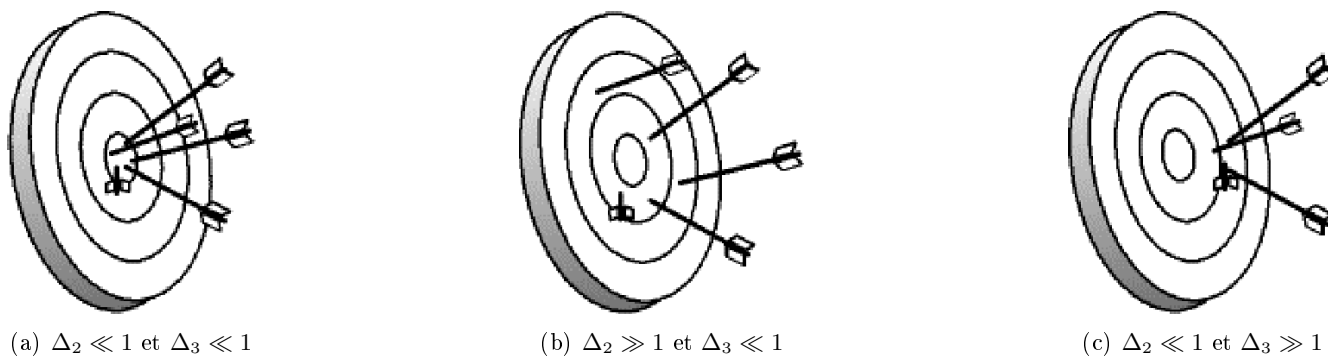


FIGURE 1 – Exemple d’erreurs et d’incertitudes

On définit l’incertitude Δ par la somme de la **précision** et de la **dispersion statistique**.

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

Pour une grandeur x , on écrit généralement

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{ou bien} \quad x \in [\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x]$$

avec \bar{x} la valeur moyenne de la grandeur x .

Une série de n valeurs peut être moyennée

- sur un intervalle de temps,
- sur un intervalle d’espace,
- sur différents échantillons,
- tout à la fois !

3 Moyenne discrète

Il y a plusieurs méthodes pour calculer une moyenne d’un ensemble de n valeurs $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ représentatives de la quantité moyenne \bar{x} . La moyenne \bar{x}_n des échantillons x_i s’écrit de manière générale :

$$\bar{x}_n = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^m}$$

avec, par exemple,

- $m = 1$: moyenne arithmétique
- $m = 2$: moyenne quadratique
- $m = -1$: moyenne harmonique

Le choix d’un type de moyenne dépend du phénomène observé. La moyenne \bar{x}_n diffère généralement de la vraie moyenne \bar{x} qui est une valeur inconnue (valeur exacte).

On utilise généralement la moyenne arithmétique ($m = 1$)

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4 Incertitudes : Calcul et estimation

Une fois la moyenne \bar{x}_n calculée, reste à évaluer l'incertitude globale pour obtenir un encadrement de la VRAIE moyenne \bar{x} :

$$\bar{x} = \bar{x}_n \pm \Delta x$$

avec $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x$

— $\Delta_1 x$ est une imprécision due à la mesure (peut ne pas être constante)

$$\Delta_1 x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_1 x_i$$

L'incertitude liée à la précision des mesures est donc égale à la moyenne des incertitudes.

— $\Delta_2 x$ est la dispersion statistique qui est développée ci-dessous.

4.1 Dispersion statistique ($\Delta_2 x$) : Cas Gaussien

Sur un grand nombre de mesures, $n \rightarrow \infty$ (typiquement $n > 100$), on peut considérer que la probabilité d'obtenir une valeur donnée suit la distribution normale (de Gauss) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x - \bar{x})^2 / (2\sigma^2))$$

avec \bar{x} la moyenne (espérance) et σ l'écart type (σ^2 la variance).

Les échantillons vérifient-ils une distribution normale ? Vérification possible :

1. dénombrer les événements (discrétisation de l'intervalle $[x_{i,\min}, x_{i,\max}]$),
2. tracer l'histogramme,
3. comparer avec la loi normale.

Pour un tirage aléatoire issu d'une loi normale, la valeur à une probabilité de $2 \times 34,13\% = 68,26\%$ d'appartenir à l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$ (Fig. ??). Cette probabilité monte à 99,74% si on considère l'intervalle

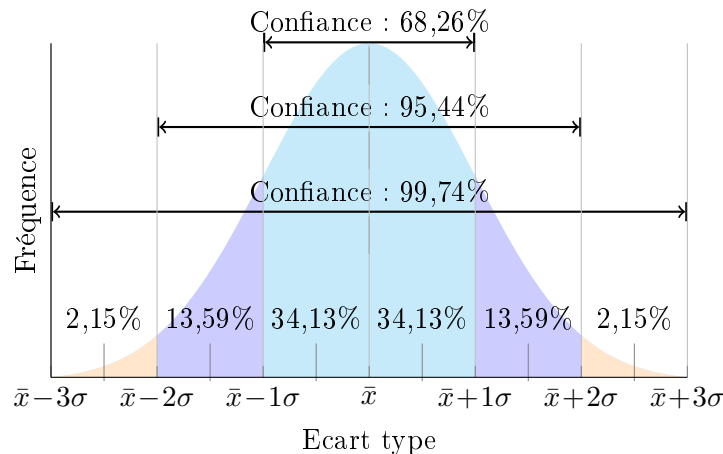


FIGURE 2 – Loi normale et intervalles de confiance

$[\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma]$.

Lorsque la variance d'une variable issue de la loi normale est inconnue, il faut estimer l'espérance \bar{x} (moyenne VRAIE) pour un intervalle de confiance de l'estimateur \bar{x}_n constitué d'un faible nombre n

d'échantillons. L'utilisation de la loi de Student permet de résoudre ce problème : la moyenne VRAIE \bar{x} est alors dans l'intervalle

$$\bar{x}_n - A \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_n + A \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

où

— S_n^2 est l'estimé non biaisé de la variance des n échantillons :

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

— A est donné par la loi de Student (Tab. ??) et dépendant de l'intervalle de confiance désiré et du nombre de degrés de liberté ($k = n - 1$).

$k \setminus$ Niveau de confiance	50%	70%	90%	99%	99.9%
1	1,000	1,963	6,314	63,66	636,6
5	0,727	1,156	2,015	4,032	6,869
10	0,700	1,093	1,812	3,169	4,587
20	0,687	1,064	1,725	2,845	3,850
100	0,677	1,042	1,660	2,626	3,390

TABLE 1 – Valeur du coefficient A en fonction du nombre de degrés de liberté k et de l'intervalle de confiance.

On en déduit donc que

$$\Delta_2 x = A \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

4.2 Dispersion statistique : cas n petit

Si n est petit ($n < 5$), on utilise généralement :

$$\Delta_2 x = \frac{\max(x_i) - \min(x_i)}{2}$$

5 Propagation des incertitudes

Les grandeurs auxquelles on s'intéresse ne sont pas forcément relevables ou relevées. Comment se propage une incertitude ?

Lorsque la valeur $f(x, y, z)$ dont on veut estimer l'incertitude, Δf , est le résultat d'une opération, il est nécessaire de passer par le calcul différentiel :

$$df(x, y, z) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{y,z} dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x,z} dy + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{x,y} dz$$

L'accroissement Δf est assimilé à la différentielle totale exacte df dans laquelle les incréments infinitésimaux (dx, dy, dz) ont été remplacés par des variations finies positives ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) et les dérivées partielles sont prises en valeurs absolues :

$$\Delta f(x, y, z) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{y,z} \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x,z} \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{x,y} \Delta z$$

Généralement, ce n'est pas l'erreur Δf qui nous intéresse mais l'erreur relative $\Delta f/f$. Lorsque la relation

est composée de produits de termes, l'utilisation de la dérivée logarithmique est particulièrement bien adaptée. On remplace alors la différentielle de f par celle de $\ln(f)$:

$$d\ln(f) = \frac{df}{f}$$

Exemple : $p = \rho \mathcal{R} T$ donne :

$$\begin{aligned}\ln(p) &= \ln(\rho) + \ln(\mathcal{R}) + \ln(T) \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} + \frac{dT}{T} \\ \Rightarrow \frac{\Delta p}{p} &= \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\mathcal{R}}{\mathcal{R}} + \frac{\Delta T}{T}\end{aligned}$$

où p , ρ , \mathcal{R} et T sont des valeurs moyennes positives.

6 Exploitation des mesures graphiques

6.1 Principe

L'exploitation des mesures passe souvent par le tracé et l'analyse d'un graphique.

En plus d'échelles correctement choisies, le graphique doit comporter les noms des axes avec leurs unités, les noms des courbes et des domaines d'incertitudes pour tous les points du graphique.

Les points munis de leurs incertitudes traduisent un phénomène physique particulier dont on souhaite faire l'étude. En s'appuyant sur la théorie, il est souvent possible d'approcher la série de points par une fonction régulière qui peut par exemple être linéaire dans des échelles adéquates (lin-lin, lin-log, log-lin ou log-log).

La figure ?? de gauche donne un exemple d'évolution d'une grandeur pour laquelle la théorie prédit un

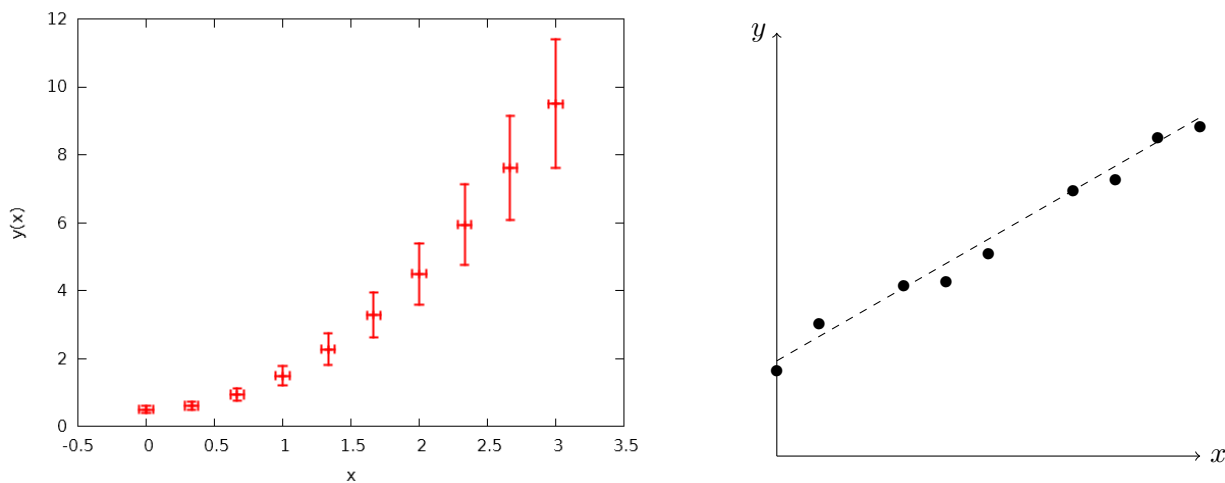


FIGURE 3 – Tracé de la *meilleure droite*

comportement exponentiel. La figure ?? de droite présente les mêmes points tracés dans des échelles lin-log (linéaire-logarithmique) ainsi que la *meilleure droite* passant au plus proche des points expérimentaux. Une fois connues les coefficients de cette droite d'approximation, il est possible de reconstruire une loi expérimentale et la comparer aux prédictions théoriques.

La meilleure droite est celle qui minimise sa distance aux points de mesure. Cette minimisation doit tenir

compte des incertitudes (méthode des moindres carrés pondérée). Les coefficients de la droite (pente et valeur à l'origine) doivent également être donnés avec des barres d'incertitudes.

6.2 Méthode des moindres carrés pondérée

Soit une relation du type $y = a + bx$, permettant de représenter les n points expérimentaux (x_i, y_i) avec une pondération ω_i qui définit la qualité du point i :

- si $\omega_i \rightarrow 0$, le point (x_i, y_i) est très peu significatif (très grande incertitude),
- si $\omega_i \rightarrow \infty$, le point (x_i, y_i) est une donnée quasiment exacte, sans erreur.

Une façon simple de choisir la pondération ω_i est de l'associer à l'inverse de la variance σ_i^2 (seule la variance en y est exploitée ici) : $\omega_i = 1/\sigma_i^2$.

La méthode des moindres carrés pondérée consiste à minimiser la somme des carrés des distances verticales entre les points et la droite $a + bx$:

$$R = \sum_{i=1}^n \omega_i (y_i - a - bx_i)^2$$

c'est-à-dire résoudre le système linéaire 2×2 :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \end{cases}$$

En notant

$$S = \sum_i w_i, \quad S_x = \sum_i w_i x_i, \quad S_y = \sum_i w_i y_i, \quad S_{xx} = \sum_i w_i x_i^2, \quad S_{yy} = \sum_i w_i y_i^2, \quad S_{xy} = \sum_i w_i x_i y_i$$

Les coefficients s'écrivent :

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{\Delta}, \quad b = \frac{SS_{xy} - S_xS_y}{\Delta}$$

avec $\Delta = S_{xx}S - (S_x)^2$.

6.3 Incertitudes sur les valeurs d'approximation

Les incertitudes sur les valeurs d'approximation a et b peuvent être évaluées par les variances (écarts types au carré) :

$$\sigma_a^2 = \frac{S_{xx}}{\Delta}, \quad \sigma_b^2 = \frac{S}{\Delta}$$

et la covariance

$$\text{Cov}(a, b) = -\frac{S_x}{\Delta}$$

qui est généralement rapportée à la variance de a et de b pour définir le coefficient de corrélation entre a et b :

$$R_{ab} = \frac{\text{Cov}(a, b)}{\sigma_a \sigma_b} = -\frac{S_x}{\sqrt{SS_{xx}}}$$

Le coefficient de corrélation R_{ab} est compris entre $[-1; 1]$ et doit être aussi petit que possible pour garantir l'indépendance des variables a et b .

- Si $R_{ab} > 0$, alors les coefficients a et b varient dans le même sens.
- Si $R_{ab} < 0$, alors les coefficients a et b varient dans des sens opposés.

La qualité de la régression est souvent évaluée en utilisant le modèle $x = a' + b'y$ pour lequel on obtient

$$b' = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{S_{yy}S - S_y^2}$$

Les deux droites sont confondues si $bb' = 1$, ou encore si le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

est égal à ± 1 . Dans ce cas, les variables x et y sont parfaitement corrélées!