

Master M1 - M2 : **SCIENCES DE LA MATIÈRE**, spécialité
DFPTE

Transferts de Chaleur et de Matière.

Année universitaire 2013-2014

Guy LAURIAT

Professeur
Laboratoire Modélisation
et Simulation Multi-Echelle
(MSME, UMR CNRS 8208)

Table des matières

1	Equations de Navier-Stokes	1
1.1	Introduction	1
1.1.1	Coefficients de transferts de chaleur et de matière	1
1.2	Variables de Lagrange et variables d'Euler	4
1.2.1	Description lagrangienne	5
1.2.2	Description eulérienne	6
1.2.3	Notion de débit	8
1.2.4	Dérivée temporelle totale et dérivée particulière	8
1.3	Equations de conservation	10
1.3.1	Equations de conservation de la masse ou équation de continuité : $G = \rho$	10
1.3.2	Equation de conservation de la quantité de mouvement	13
1.4	Similitude dynamique	28
1.4.1	Similitude de Reynolds	28
1.4.2	Similitude générale	29
1.5	Exemples d'écoulements simples : solutions exactes des équations de Navier-Stokes	31
1.5.1	Considérations générales	31
1.5.2	Exemples :	34
1.6	Annexes	50
1.6.1	Annexe 1 : Equations de Navier-Stokes	50
1.6.2	Annexe 2 : Fonction de dissipation visqueuse.	54
1.6.3	Annexe 3 : Bilan d'énergie cinétique (ou mécanique).	56
1.7	EXERCICES	58
2	Ecoulements de fluides non-newtoniens	70
2.1	Introduction	70
2.2	Fluides non-newtoniens en cisaillement simple	71
2.2.1	Fluides non-newtoniens visqueux	71
2.2.2	Fluides dont les propriétés dépendent de la durée du cisaillement.	76
2.2.3	Fluides viscoélastiques.	77
2.2.4	Ecoulements laminaires établis de fluides non-newtoniens visqueux en conduites	79
2.3	Equations rhéologiques généralisées de fluides non-newtoniens visqueux.	84
2.4	EXERCICES	86
3	Ecoulements externes en régime laminaire	89
3.1	Introduction	89
3.1.1	Equations de couche limite	91
3.1.2	Méthodes de résolution des équations de couche limite.	91
3.1.3	Décollement d'une couche limite : effets du gradient de pression	98
3.1.4	Ecoulement sur une paroi poreuse	101

3.2	EXERCICES	103
4	Ecoulements turbulents	106
4.1	Introduction	107
4.1.1	Préambule	107
4.1.2	Généralités	108
4.1.3	Traitement statistique de la turbulence	109
4.2	Moyennes des équations de Navier-Stokes d'un écoulement incompressible.	113
4.2.1	Modèles du premier ordre.	115
4.2.2	Profil universel de vitesse	119
4.2.3	Modèles à équations de transport	121
4.3	Couche limite turbulente sur une plaque plane.	127
4.3.1	Calcul du coefficient de frottement en régime turbulent par la méthode intégrale.	127
4.4	Écoulement turbulent dans une conduite en régime établi et permanent en moyenne.	130
4.4.1	Profil universel de vitesse.	130
4.4.2	Profil de vitesse en puissance.	132
4.4.3	Tubes rugueux.	134
4.5	EXERCICES	138
5	Equation de l'énergie	139
5.1	Introduction	139
5.1.1	Conservation de l'énergie sous forme intégrale.	140
5.1.2	Conservation de l'énergie sous forme différentielle.	141
5.1.3	Autres formes de l'équation de l'énergie.	142
5.2	Similitude	146
5.2.1	Transfert de chaleur entre un fluide et une paroi.	148
5.3	Annexes	150
5.3.1	Annexe 1	150
5.3.2	Annexe 2	151
6	Couches limites thermiques	152
6.1	Introduction	152
6.1.1	Nombre de Nusselt	155
6.2	Méthodes de calcul approchées du nombre de Nusselt	156
6.2.1	$Pr = 1$	156
6.2.2	$Pr \neq 1$	157
6.2.3	Calcul d'une solution numérique par la méthode affine	163
6.3	Plaque plane chauffée uniformément ($q_p = Cste$)	165
6.3.1	$Pr \gg 1$:	167
6.3.2	$Pr \ll 1$:	168
6.4	Convection forcée turbulente sur une plaque plane	170
6.4.1	Calcul du coefficient d'échange	171
6.5	Exercices	177
6.6	Annexe	181

7	Convection interne	183
7.1	Introduction	183
7.1.1	Définition du coefficient d'échange thermique	184
7.2	Bilan thermique	186
7.2.1	Elément différentiel	187
7.2.2	Bilan global sur le volume d'une conduite à section rectangulaire (largeur e , longueur L , profondeur W).	188
7.2.3	Flux de chaleur imposé sur la paroi de la conduite (diffusion axiale négligeable).	189
7.2.4	Température de paroi imposée (diffusion axiale négligeable).	190
7.3	Etablissement des régimes dynamique et thermique	193
7.3.1	Etablissement du régime dynamique	193
7.3.2	Etablissement du régime thermique	196
7.4	Convection dans des conduites planes ou dans des tubes en régime dynamique établi.	200
7.4.1	Régimes dynamiques établis dans des conduites planes.	200
7.4.2	Régimes dynamiques établis dans des tubes.	204
7.5	Transfert de chaleur en régimes dynamique et thermique établis	211
7.5.1	Régime laminaire établi dans une conduite plane	211
7.5.2	Régime laminaire dans une conduite circulaire	213
7.5.3	Régime turbulent établi dans une conduite circulaire	216
7.6	Exercices	223
8	Convection naturelle	234
8.1	Introduction	234
8.2	Convection thermique	234
8.3	Convection naturelle externe	238
8.3.1	Convection naturelle le long d'une paroi verticale	238
8.4	Convection naturelle dans une conduite verticale.	254
8.4.1	Espacement optimal d'un ensemble de plaques isothermes espacées d'une distance D	258
8.5	Convection mixte	259
8.6	Panaches thermiques	261
8.7	Modélisation "hors-Boussinesq"	264
8.8	Annexes	268
8.9	Exercices	279
9	Transfert de matière	283
9.1	Introduction	283
9.2	Grandeurs caractérisant un mélange (rappels)	283
9.2.1	Rappels : Propriétés globales d'un mélange et propriétés des constituants	283
9.2.2	Vitesses et flux de matière	285
9.2.3	Propriétés physiques des mélanges	289
9.3	Equation de conservation des espèces	293
9.3.1	Conditions aux limites	295
9.4	Equations de conservation du mélange	300
9.5	Forme adimensionnelle des équations de conservation d'un mélange binaire	303
9.5.1	Convection forcée d'un mélange binaire dilué sur une plaque plane.	304
9.5.2	Applications	307

9.5.3	Ecoulement turbulent	312
9.5.4	Transfert de matière en convection forcée interne.	312
9.6	Condensation/évaporation dans une conduite plane verticale : convection mixte thermosolutale.	313
9.6.1	Modélisation	313
9.6.2	Equations de conservation	314
9.7	Exercices	319
10	CONVECTION DANS LES MILIEUX POREUX	330
10.1	Généralités	330
10.2	Méthode de prise de moyennes des équations de conservation sur un VER	339
10.2.1	Introduction	339
10.2.2	Moyenne des équations de Navier-Stokes	345
10.2.3	Equation de l'énergie	347
10.3	Convection forcée interne	355
10.3.1	Modèle de Darcy	356
10.3.2	Modèle de Darcy-Brinkman ($F = 0$)	358
10.3.3	Convection forcée dans une conduite partiellement remplie par un milieu poreux	363
10.4	Convection forcée externe	368
10.4.1	Modèle de Darcy	368
10.4.2	Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer	370
10.5	Exercices	376
11	Transfert de chaleur par convection avec changement d'état	393
11.1	Condensation	393
11.1.1	Introduction	393
11.1.2	Théorie de Nusselt de la condensation en film	393
11.1.3	Nombre de Reynolds de film et nombre de condensation.	401
11.1.4	Condensation sur des surfaces horizontales	403
11.1.5	Condensation en convection forcée	410
11.2	Ebullition	411
11.2.1	Introduction	411
11.2.2	Ebullition en réservoir	412
11.2.3	Ebullition en convection forcée	423
11.3	Exercices	434
11.3.1	Condensation	434
11.3.2	Ebullition	440

Chapitre 5

Equation de l'énergie

5.1 Introduction

Le premier principe de la thermodynamique fournit une relation entre la variation de l'énergie interne d'un système, l'apport de chaleur et le travail des forces qui agissent sur ce système. L'équation de l'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique en étudiant le bilan d'énergie d'un fluide dans un volume arbitraire V fixe de surface extérieure S perméable. L'énergie totale massique, e_t en J/kg , d'un fluide en mouvement par unité de volume est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$e_t = e + \frac{1}{2}v^2 \quad (J/kg) \quad \implies \quad \rho e_t = \rho e + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (J/m^3) \quad (5.1)$$

L'énergie contenue dans un volume V à un instant t est

$$E_V(t) = \int_V (\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2) dV \quad (J) \quad (5.2)$$

Le taux de variation total (DE_V/Dt) (W) est dû

- 1)- à la puissance exercée par les forces de surface et les forces de volume dans V ,
- 2)- au transfert de chaleur par conduction à travers la surface S de V ,
- 3)- à la contribution énergétique des sources de chaleur à l'intérieur de V (rayonnement, effet Joule....).

– Puissance exercée par les forces de surfaces :

$$\int_S \vec{v} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{n}) dS \quad (W) \quad (5.3)$$

où $\bar{\bar{T}}$ est le tenseur des contraintes (N/m^2).

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} \cdot (\bar{\bar{T}} \cdot \vec{n}) = u[\sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n] + v[\tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n] + w[\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n] \quad (5.4)$$

avec

$$l = \frac{\vec{n} \cdot \vec{i}}{\|\vec{n}\|} , \quad m = \frac{\vec{n} \cdot \vec{j}}{\|\vec{n}\|} , \quad n = \frac{\vec{n} \cdot \vec{k}}{\|\vec{n}\|} \quad (5.5)$$

cosinus directeurs de la normale \vec{n} dirigée vers l'extérieur du volume V .

– Puissance exercée par les forces de volume dans V :

$$\int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV \quad (5.6)$$

– Apport de chaleur par conduction thermique à travers S :

$$- \int_S \vec{n} \cdot \vec{q} dS \quad (5.7)$$

avec \vec{q} densité de flux de chaleur (W/m^2) donnée par la loi de Fourier, $\vec{q} = -k \nabla T$ où k est la conductivité thermique ($W/m K$).

– Puissance volumique dissipée dans V avec un taux $\bar{\omega}$ (W/m^3) :

$$\int_V \bar{\omega} dV \quad (5.8)$$

Exemple : fluide conducteur placé dans un champ électrique E (Volts) et \vec{j} vecteur densité de courant (A/m^2) :

$$\bar{\omega} = -\nabla E \cdot \vec{j} \quad (5.9)$$

Si la loi d'Ohm est applicable :

$$\nabla E = -\sigma \vec{j} \quad \sigma \text{ étant la résistivité en } \Omega.m \quad (5.10)$$

et donc

$$\bar{\omega} = \sigma j^2 \quad (5.11)$$

5.1.1 Conservation de l'énergie sous forme intégrale.

Le principe de conservation d'énergie conduit à l'équation de l'énergie sous sa forme intégrale. Soit

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_S \vec{v} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_S \vec{n} \cdot \vec{q} dS + \int_V \bar{\omega} dV \quad (5.12)$$

En appliquant le théorème de Gauss, les intégrales de surface sont transformées en intégrales de volume :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_V \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{T}) dV + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_V \nabla \cdot \vec{q} dV + \int_V \bar{\omega} dV \quad (5.13)$$

5.1.2 Conservation de l'énergie sous forme différentielle.

Il faut d'abord transformer le membre de gauche. On pose $\rho K = \rho(e + \frac{1}{2}v^2)$ et on applique le théorème de transport de Reynolds modifié (chapitre 1, Eq. 1.35) qui conduit à

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho K dV = \int_V \rho \frac{DK}{Dt} dV \quad (5.14)$$

En regroupant tous les termes de l'équation de l'énergie dans le même membre, on obtient :

$$\int_V \left[\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{1}{2}v^2) - \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \bar{\bar{T}}) + \nabla \cdot \vec{q} - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \bar{\omega} \right] dV = 0 \quad (W) \quad (5.15)$$

Cette égalité étant vraie $\forall V$, on en déduit la forme différentielle

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + \frac{1}{2}v^2) = -\nabla \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \bar{\bar{T}}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \bar{\omega} \quad (W/m^3) \quad (5.16)$$

Le terme d'énergie cinétique peut être supprimé en combinant cette équation avec l'équation de l'énergie mécanique (chapitre 1, annexe 3). L'équation de l'énergie mécanique, produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement par le vecteur vitesse, s'écrit :

$$\rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \cdot (\bar{\bar{T}}) + \vec{v} \cdot \rho \vec{f} \quad (5.17)$$

On montre que

$$\vec{v} \cdot \nabla \cdot \bar{\bar{T}} = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \bar{\bar{T}}) - \nabla \vec{v} : \bar{\bar{T}} \quad (5.18)$$

où $\nabla \vec{v} : \bar{\bar{T}}$ représente la dissipation de chaleur due aux travaux des forces de surfaces (pression et viscosité) qui s'écrit en coordonnées cartésiennes sous la forme :

$$\nabla \vec{v} : \bar{\bar{T}} = \frac{\partial}{\partial x} [u(\sigma_{xx} + p) + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}] + \frac{\partial}{\partial y} [u\tau_{yx} + v(\sigma_{yy} + p) + w\tau_{yz}] + \frac{\partial}{\partial z} [u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w(\sigma_{zz} + p)] \quad (5.19)$$

On en déduit la forme suivante de l'équation de l'énergie mécanique

$$\rho \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2}v^2) = \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \bar{\bar{T}}) - \nabla \vec{v} : \bar{\bar{T}} + \rho \vec{v} \cdot \vec{f} \quad (5.20)$$

En la soustrayant à l'équation de l'énergie, on obtient immédiatement :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \nabla \vec{v} : \bar{\bar{T}} + \bar{\omega} \quad (5.21)$$

Le tenseur des contraintes se décompose en (chapitre 1)

$$\bar{\bar{T}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (5.22)$$

et donc

$$\nabla \vec{v} : \bar{\bar{T}} = \nabla \vec{v} : (-p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} [-p\delta_{ij} + \tau_{ij}] \quad (5.23)$$

où

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{v} \quad (5.24)$$

en définitive

$$\nabla \vec{v} : \bar{\bar{T}} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} \quad (5.25)$$

L'équation de conservation de l'énergie peut donc s'écrire sous la forme

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} - p \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} + \bar{\omega} \quad (W/m^3) \quad (5.26)$$

où :

- le terme du membre de gauche représente le taux de variation de l'énergie interne par unité de volume (au sens thermodynamique),
- les termes des membres de droite représentent successivement :
- l'apport de chaleur par le flux de conduction , $\vec{q} = -k \nabla T$,
- la puissance apportée par le travail des forces de pression (réversible),
- la puissance apportée par le travail des forces de viscosité : cette dissipation de chaleur, notée $\nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} = \mu \phi_v$ pour un fluide newtonien, est irréversible.
- la puissance volumique

5.1.3 Autres formes de l'équation de l'énergie.

En utilisant l'équation de continuité, on obtient

$$p \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (5.27)$$

et donc

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] \quad (5.28)$$

en définitive, l'équation de l'énergie s'écrit aussi

$$\rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} + \bar{\omega} \quad (5.29)$$

Les termes du membre de gauche représentent l'augmentation d'énergie interne et d'énergie mécanique par unités de temps et de masse d'une particule fluide. La somme de ces deux termes est égale à la chaleur apportée, exprimée par les trois termes du second membre de 5.29.

5.1.3.1 Equation de l'énergie en fonction de l'enthalpie par unité de masse : $h = e + p/\rho$.

h n'étant fonction que de p et de T , on peut écrire

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (5.30)$$

ou

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{D\mathfrak{h}}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (5.31)$$

On en déduit la forme de l'équation de l'énergie en fonction de \mathfrak{h} :

$$\rho \frac{D\mathfrak{h}}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{Dp}{Dt} + \nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} + \bar{\omega} \quad (5.32)$$

5.1.3.2 Simplifications

5.1.3.2.1 Ecoulement incompressible ($\rho = cste$) ou isovolume ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$).

L'équation 5.26 se réduit à

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} + \bar{\omega} \quad (5.33)$$

L'énergie interne ne dépend que de T et de ρ , soit $e = e(T, \rho)$. Donc

$$\frac{De}{Dt} = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_{\rho} \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_T \frac{D\rho}{Dt} \quad (5.34)$$

où $D\rho/Dt = 0$ pour un écoulement incompressible. Mais

$$C_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_{\rho} \quad (5.35)$$

et donc

$$\frac{De}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} \quad (5.36)$$

En substituant l'équation 5.36 dans l'équation 5.33, on obtient l'équation de l'énergie en fonction de la température

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} + \bar{\omega} \quad (5.37)$$

Note : C_p et C_v sont reliées par

$$C_p = C_v + \frac{T\beta^2}{\rho\chi_T} \quad (5.38)$$

où β est le coefficient de dilatation cubique à pression constante et χ_T le coefficient de compressibilité isotherme.

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \quad (5.39)$$

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \quad (5.40)$$

Pour les liquides, C_p et C_v peuvent différer fortement selon la nature du fluide (huiles en particulier).

Si, de plus, le fluide est supposé idéal ou parfait ($\mu = 0$ et $k \approx 0$)

$$\nabla \vec{v} : \bar{\bar{\tau}} = 0 \quad \vec{q} \approx 0 \quad (5.41)$$

l'équation de l'énergie se réduit à :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho C_v \frac{DT}{Dt} = \bar{\omega} \quad (5.42)$$

La particule fluide conserve donc sa température le long de sa trajectoire si $\bar{\omega} = 0$.

5.1.3.2 Ecoulement isobare ($p \approx cste$)

De nombreux écoulements s'effectuent avec des gradients de pression nuls (écoulement de Couette, couche limite sur une plaque plane...) ou très faibles (convection naturelle). En écrivant l'équation 5.29 sous la forme

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \vec{v} : \bar{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.43)$$

L'équation de l'énergie (Eq. 5.32) prend donc la forme

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \vec{v} : \bar{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.44)$$

h n'étant fonction que de p et de T , on peut écrire :

$$\frac{Dh}{Dt} = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p \frac{DT}{Dt} + \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T \frac{Dp}{Dt} \quad (5.45)$$

Pour un écoulement isobare, le second terme est nul et donc

$$\frac{Dh}{Dt} = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p \frac{DT}{Dt} = C_p \frac{DT}{Dt} \quad (5.46)$$

ce qui permet d'écrire l'équation de l'énergie en fonction de la température. Soit

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \vec{v} : \bar{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.47)$$

La seule différence entre les formulations isovolume et isobare est donc la capacité calorifique massique, C_v dans le premier cas et C_p dans le second.

5.1.3.3 Equation de l'énergie en fonction de la température pour un écoulement compressible.

h n'étant fonction que de p et de T , on peut aussi écrire dans l'équation 5.45 (voir le cours de Thermodynamique) :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p = C_p \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) \quad \text{avec} \quad \beta = - \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (5.48)$$

Soit

$$\frac{Dh}{Dt} = C_p \frac{DT}{Dt} + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) \frac{Dp}{Dt} \quad (5.49)$$

En reportant 5.49 dans 5.32, on en déduit la forme de l'équation de l'énergie en fonction de la température

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \nabla \vec{v} : \bar{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.50)$$

Cette forme de l'équation de l'énergie présente l'avantage de faire intervenir la chaleur massique à pression constante, C_p , quantité beaucoup plus facilement mesurable que C_v . Comme le montre l'équation 5.49, cette expression reste valable lorsque C_p dépend de la température.

Le terme $\beta T(Dp/Dt)$, qui représente le travail des forces de pression, peut être positif (compression) ou négatif (expansion) : un fluide s'échauffe s'il est comprimé et il se refroidit s'il se détend.

Le terme de dissipation visqueuse $\nabla \vec{v} : \bar{\tau}$ est toujours positif.

Simplifications

Dans beaucoup d'applications, les effets des travaux des forces de pression et de viscosité sont négligeables devant la diffusion thermique, y compris en régime turbulent. L'équation de l'énergie se simplifie alors en

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \bar{\omega} \quad (5.51)$$

et si la conductivité thermique est constante

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \bar{\omega} \quad (5.52)$$

- Gaz parfaits :

Pour les gaz parfaits, l'enthalpie et l'énergie interne ne sont fonction que **de la température** (résultat de la théorie cinétique des gaz) et les chaleurs spécifiques C_p et C_v sont aussi uniquement fonction de T . De plus, la différence $C_p - C_v = R$ ne dépend pas de T et

$$e = \int C_v(T) dT + \text{constante} \quad \text{et} \quad h = \int C_p(T) dT + \text{constante} \quad (5.53)$$

On déduit de la loi des gaz parfaits que $\beta = 1/T$ et donc que

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \phi_v + \frac{Dp}{Dt} + \bar{\omega} \quad (5.54)$$

car tous les gaz parfaits peuvent être considérés comme des fluides newtoniens, sauf dans des conditions très particulières (taux de cisaillement extrêmes par exemple).

- Liquides :

Les variations de masse volumique avec la pression et avec la température ($\beta T \approx 1/10$) étant généralement faibles, on suppose le plus souvent que $\beta T \frac{Dp}{Dt} \ll \nabla \vec{v} : \vec{\tau}$. D'où

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \vec{v} : \vec{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.55)$$

5.2 Similitude

Hypothèse : fluide newtonien monoconstituant

Pour un fluide newtonien, $\nabla \vec{v} : \vec{\tau} = \mu \phi_v = \frac{1}{2} \mu I_2$. L'équation de l'énergie (Eq. 5.32) s'écrit donc :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \phi_v + \frac{Dp}{Dt} + \bar{\omega} \quad (5.56)$$

L'équation de l'énergie peut s'écrire sous forme adimensionnelle en choisissant une longueur caractéristique L comme échelle des variables d'espace et des grandeurs de référence u_r , T_r et h_r comme échelles de la vitesse, de la température et de l'enthalpie.

On prendra donc L/u_r , ρu_r^2 et $\mu_r (u_r/L)^2$ comme échelles de temps, de pression et de la fonction de dissipation visqueuse. Les propriétés physiques du fluide sont rapportées à leurs valeurs de référence (ρ_r , k_r et μ_r) calculées à la température T_r et à la pression ρu_r^2 . On obtient alors en utilisant la forme enthalpique de l'équation de l'énergie :

$$\rho_r \left(\frac{u_r h_r}{L} \right) \rho^* \frac{Dh^*}{Dt^*} = \left(\frac{k_r T_r}{L^2} \right) \nabla \cdot (k^* \nabla \theta) + \mu_r \left(\frac{u_r}{L} \right)^2 \mu^* \phi_v^* + \left(\frac{\rho_r u_r^3}{L} \right) \frac{Dp^*}{Dt^*} + \bar{\omega} \quad (5.57)$$

ou encore

$$\rho^* \frac{Dh^*}{Dt^*} = \left(\frac{k_r T_r}{\rho_r u_r h_r L} \right) \nabla \cdot (k^* \nabla \theta) + \left(\frac{\mu_r u_r}{\rho_r h_r L} \right) \mu^* \phi_v^* + \left(\frac{u_r^2}{h_r} \right) \frac{Dp^*}{Dt^*} + \bar{\omega}^* \quad (5.58)$$

où $\bar{\omega}^* = \bar{\omega} L / (\rho_r u_r h_r)$ est une puissance volumique adimensionnelle. Les coefficients des différents opérateurs sont tous des nombres adimensionnels que l'on peut écrire sous la forme suivante :

- 1)

$$\frac{k_r T_r}{\rho_r u_r h_r L} = \left(\frac{k_r T_r}{\mu_r h_r} \right) \left(\frac{\mu_r}{\rho_r u_r L} \right) = \left(\frac{1}{Pr} \right) \left(\frac{1}{Re} \right) \quad (5.59)$$

où $Pr = (\mu_r h_r / k_r T_r)$ est le nombre de Prandtl qui caractérise, comme cela apparaîtra plus clairement dans la suite, le rapport entre les diffusions de quantité de mouvement et de chaleur. Pr est une propriété fondamentale d'un fluide en écoulement anisotherme. Le produit $Re Pr$ est le nombre de Péclet (noté Pe).

- 2)

$$\frac{\mu_r u_r}{\rho_r h_r L} = \left(\frac{u_r^2}{h_r} \right) \left(\frac{\mu_r}{\rho_r u_r L} \right) = \frac{Ec}{Re} \quad (5.60)$$

où $Ec = (u_r^2 / h_r)$ est le nombre d'Eckert qui donne l'ordre de grandeur des effets des forces de pression (quantité volumique de chaleur produite par compression ou évacuée par détente). Le

rapport Ec/Re définit l'apport de chaleur irréversible produite par dissipation visqueuse.

Les trois nombres adimensionnels intervenant dans l'équation adimensionnelle de l'énergie sont donc Ec , Pr (ou Pe) et Re . On écrit donc

$$\rho^* \frac{D\mathfrak{h}^*}{Dt^*} = \frac{1}{RePr} \nabla \cdot (k^* \nabla \theta) + \frac{Ec}{Re} \mu^* \phi_v^* + Ec \frac{Dp^*}{Dt^*} + \bar{\omega}^* \quad (5.61)$$

Nombre de Prandtl

Si le nombre d'Eckert n'intervient pas dans de nombreuses applications, en particulier lorsque l'écoulement s'effectue à faible nombre de Mach, les nombres de Reynolds et de Prandtl interviennent toujours dans les phénomènes de convection : le nombre de Reynolds caractérise le régime de l'écoulement (laminaire, chaotique ou turbulent), le nombre de Prandtl caractérise les importances relatives des termes de transport et de diffusion. En supposant que

$$\mathfrak{h}_r = C_p(T_r)T_r \quad (5.62)$$

le nombre de Prandtl s'écrit

$$Pr = \frac{\mu_r C_p}{k_r} = \frac{\nu_r}{a_r} \quad (5.63)$$

où $a_r = k_r/\rho_r C_p$ est la diffusivité thermique (unités : m^2/s).

Cas d'un gaz parfait

La variation d'enthalpie d'un gaz parfait autour de sa température de référence s'écrit toujours $\Delta\mathfrak{h} = C_p \Delta T_r$. En prenant cette variation comme échelle de l'enthalpie et ΔT_r comme échelle de température, les nombres d'Eckert et de Prandtl deviennent

$$Ec = \frac{u_r^2}{C_p \Delta T_r} \quad \text{et} \quad Pr = \frac{\mu_r C_p \Delta T_r}{k_r \Delta T_r} = \frac{\mu_r C_p}{k_r} \quad (5.64)$$

Pour un gaz parfait, on peut aussi écrire

$$\Delta\mathfrak{h}_r = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) R T_r = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \frac{p_r}{\rho_r} \quad (5.65)$$

où $\gamma = C_p/C_v$ et $p_r = \rho_r u_r^2$ est la pression de référence. Cette relation permet de relier le nombre d'Eckert au nombre de Mach par :

$$Ec = (\gamma - 1) \frac{u_r^2}{\gamma(p_r/\rho_r)} = (\gamma - 1) Ma^2 \quad (5.66)$$

Exemples de valeurs du nombre de Prandtl.

a) Gaz :

	<i>air</i>	<i>N₂</i>	<i>O₂</i>	<i>H₂</i>	<i>CO₂</i>	<i>CO</i>	<i>He</i>
$T_0 = 300\text{ K}$	0,707	0,716	0,711	0,701	0,766	0,720	0,680
$T_0 = 600\text{ K}$	0,685	0,701	0,729	0,678	0,717	0,707	0,668

TABLE 5.1 – Nombres de Prandtl à $T_0 = 300\text{ K}$ et à $T_0 = 600\text{ K}$.

Le nombre de Prandtl des gaz est, en général, proche de 0,7 et varie peu avec la température.

b) Liquides ordinaires :

	<i>eau</i>	<i>huile moteur</i>	<i>éthylène glycol</i>	<i>glycerine</i>
$T_0 = 300\text{ K}$	5,83	6400	151	6780
$T_0 = 350\text{ K}$	2,29	546	34,6	≈ 700

TABLE 5.2 – Nombres de Prandtl de liquides à $T_0 = 300\text{ K}$ et à $T_0 = 350\text{ K}$.

Le nombre de Prandtl des liquides est très variable et dépend beaucoup de la température.

c) Métaux liquides :

Pb à 600 K : $\text{Pr}=0,024$
 K à 422 K : $\text{Pr}=0,0066$
 Na à 644 K : $\text{Pr}=0,0051$
 Hg à 600 K : $\text{Pr}=0,0103$

Le nombre de Prandtl des métaux liquides est de l'ordre de 0,01.

5.2.1 Transfert de chaleur entre un fluide et une paroi.

Lorsqu'un fluide à température T_r s'écoule le long d'une paroi à température T_p , l'écart de température ($T_p - T_r$) est la source d'un échange de chaleur entre le fluide et la paroi. Cet échange a été modélisé par Newton qui a introduit empiriquement la loi :

$$q_p(M) = h(M) (T_p - T_r)|_M \quad (5.67)$$

où $q_p(M)$ est la densité de flux de chaleur (W/m^2) échangée entre le fluide et la paroi autour du point M et $h(M)$ le coefficient d'échange local **par convection thermique** ($\text{W}/\text{m}^2\text{K}$).

Comme un fluide visqueux adhère sur une surface solide ($\vec{V} = 0$ en M), ce flux de chaleur peut aussi s'exprimer à partir de la loi de Fourier écrite du côté fluide. Soit

$$q_p(M) = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_M \quad (5.68)$$

où k_f est la conductivité thermique du fluide (W/mK) et \vec{n} la normale à la paroi au point M dirigée vers l'extérieur (c-à-d de la paroi vers le fluide). On en déduit donc que

$$h(M) (T_p - T_r)|_M = -k_f \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_M \quad (5.69)$$

ou encore

$$h(M) = \frac{-k_f \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_M}{(T_p - T_r)|_M} \quad (5.70)$$

Cette relation montre que le calcul du coefficient d'échange nécessite le calcul du gradient de température dans le fluide au voisinage de la paroi : ce gradient est obtenu en résolvant l'équation de l'énergie.

Forme adimensionnelle du coefficient d'échange thermique

Pour simplifier, on suppose ici que la paroi est à température uniforme, soit $T(M) = T_p$, $\forall M \in \text{paroi}$. En introduisant l'écart de température adimensionnel $\Theta = (T - T_r)/(T_p - T_r)$, on obtient

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_M}{(T_p - T_r)} = \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{n}} \Big|_M \quad (5.71)$$

et si $\vec{n}^* = \vec{n}/L$

$$h(M) = -\frac{k_f}{L} \frac{\partial \Theta}{\partial \vec{n}^*} \Big|_M \quad (5.72)$$

ou

$$Nu(M) = \frac{h(M)L}{k_f} = -\frac{\partial \Theta}{\partial \vec{n}^*} \Big|_M \quad (5.73)$$

$Nu(M)$ est le nombre de Nusselt local (sans dimension). Ce nombre ne dépend que des variables indépendantes adimensionnelles et des paramètres adimensionnels apparaissant dans les équations de quantité de mouvement et de l'énergie (Ec , Pr et Re).

5.3 Annexes

5.3.1 Annexe 1

Forme entropique de l'équation de l'énergie.

La relation de Maxwell relative à l'énergie interne massique s'écrit

$$de = Tds - pdv = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (5.1)$$

où s est l'entropie massique (ou entropie par unité de masse) et $v = 1/\rho$ le volume massique. On en déduit les relations suivantes :

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_v \quad p = - \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_s = - \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v \quad (5.2)$$

L'équation de conservation de l'énergie écrite sous la forme 5.26 se transforme sous forme entropique en introduisant l'entropie dans la dérivée particulaire de l'énergie interne massique (terme de gauche) et dans le terme correspondant au travail des forces de pression ($-p\nabla \cdot \vec{v}$). Soit :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla e = \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla e \quad (5.3)$$

et en utilisant l'équation de continuité ($\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$)

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \nabla e \quad (5.4)$$

D'autre part :

$$p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (p \vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla p \quad (5.5)$$

et

$$d(e + \frac{p}{\rho}) = de + \frac{1}{\rho} dp + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} dp + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = Tds + \frac{1}{\rho} dp \quad (5.6)$$

et donc

$$dp = \rho d(e + \frac{p}{\rho}) - \rho T ds \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \nabla p = \rho \vec{v} \cdot \nabla (e + \frac{p}{\rho}) - \rho T \vec{v} \cdot \nabla s \quad (5.7)$$

d'où

$$p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (p \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla (e + \frac{p}{\rho}) + \rho T \vec{v} \cdot \nabla s \quad (5.8)$$

On en déduit immédiatement que

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s \right) \quad (5.9)$$

En définitive, la forme entropique de l'équation de l'énergie est

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \nabla \cdot \vec{v} : \bar{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.10)$$

où la puissance due au travail des forces de pression (transformation réversible) n'apparaît plus dans l'équation de l'énergie.

5.3.2 Annexe 2

Equation de l'énergie pour un mélange de gaz parfaits.

L'enthalpie massique du mélange, $\mathfrak{h}_m = e_m + p/\rho_m$, est une grandeur extensive qui n'est fonction que de p et de T . Pour un mélange binaire non dilué ($W_A \approx O(W_B)$), on a

$$\mathfrak{h}_m = W_A \mathfrak{h}_A + W_B \mathfrak{h}_B \quad (5.1)$$

et si W_A et W_B ne sont pas des fonctions de T (effet Soret négligé) et de p

$$\frac{D\mathfrak{h}_m}{Dt} = \left(W_A \frac{D\mathfrak{h}_A}{DT} \Big|_p + W_B \frac{D\mathfrak{h}_B}{DT} \Big|_p \right) \frac{DT}{Dt} + \left(W_A \frac{D\mathfrak{h}_A}{Dp} \Big|_T + W_B \frac{D\mathfrak{h}_B}{Dp} \Big|_T \right) \frac{Dp}{Dt} \quad (5.2)$$

mais

$$\frac{D\mathfrak{h}_A}{DT} \Big|_p = C_{p,A} \quad \text{et} \quad \frac{D\mathfrak{h}_B}{DT} \Big|_p = C_{p,B} \quad (5.3)$$

et

$$\frac{D\mathfrak{h}_A}{Dp} \Big|_T = \frac{1}{\rho_A} (1 - \beta_A T) \quad \text{et} \quad \frac{D\mathfrak{h}_B}{Dp} \Big|_T = \frac{1}{\rho_B} (1 - \beta_B T) \quad (5.4)$$

Pour un gaz parfait, $\beta = 1/T$ et donc $(1 - \beta_A T) = (1 - \beta_B T) = 0$.

En définitive :

$$\frac{D\mathfrak{h}_m}{Dt} = (W_A C_{p,A} + W_B C_{p,B}) \frac{DT}{Dt} = \overline{C}_p \frac{DT}{Dt} \quad (5.5)$$

avec $\overline{C}_p = W_A C_{p,A} + W_B C_{p,B}$.

La forme compressible de l'équation de l'énergie d'un mélange de n gaz parfaits écrite en fonction de la température s'écrit donc :

$$\rho_m \overline{C}_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + \frac{Dp}{Dt} + \nabla \vec{v} : \bar{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.6)$$

ou bien

$$\overline{C}_p \frac{D(\rho_m T)}{Dt} = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + \frac{Dp}{Dt} + \nabla \vec{v} : \bar{\tau} + \bar{\omega} \quad (5.7)$$

où $\overline{C}_p = \sum_{i=1}^n W_i C_{p,i}$.

Conclusion :

Il est inutile d'écrire l'équation de l'énergie sous forme enthalpique dans le cas d'un mélange de gaz parfaits.

Chapitre 6

Couches limites thermiques

6.1 Introduction

Hypothèse 1 : fluides newtoniens, régime stationnaire, écoulement incompressible.

Géométrie fondamentale : plaque plane parallèle à l'écoulement extérieur.

Extensions : plaque inclinée, dièdre, cylindre, sphère...

Hypothèse 2 : température et vitesse au loin constantes dans un écoulement unidirectionnel : $\lim_{y \rightarrow \infty} T = T_\infty$ et $\lim_{y \rightarrow \infty} \vec{V} = \vec{V}_\infty = (u_\infty, 0)$.

Hypothèse 3 : Propriétés du fluide indépendantes de la température, forces de volume négligées.

Lorsque la masse volumique et la viscosité du fluide ne dépendent pas de la température, le champ de vitesse est indépendant du champ de température mais l'inverse n'est pas vrai.

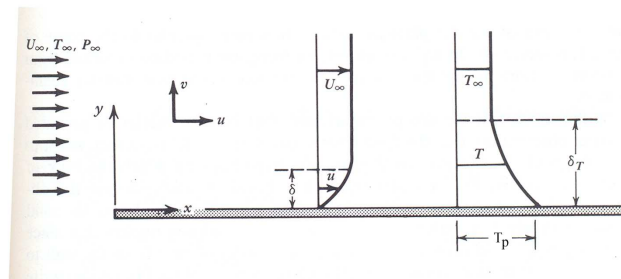


FIGURE 6.1 – Couches limites dynamique et thermique sur une plaque plane refroidie par un écoulement incompressible d'un fluide newtonien ($T_p > T_\infty$).

Compte-tenu de ces trois hypothèses, les équations du mouvement et de l'énergie décrivant un écoulement bidimensionnel, laminaire et stationnaire sur une plaque plane (Fig. 6.1) s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6.3)$$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (6.4)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 \quad T = T_p \quad \text{en } y = 0, \forall x \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u = u_\infty \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v = 0 \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T = T_\infty, \forall x \\ u = u_\infty \quad v = 0 \quad T = T_\infty \quad \text{en } x = 0, \forall y \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Ces conditions aux limites sont insuffisantes : on ne sait pas écrire exactement les conditions aux limites dans la section de l'écoulement située à l'extrémité aval de la paroi ($x = L$).

Observations expérimentales : La température du fluide au contact avec la paroi est égale à celle de la paroi du fait de l'adhérence, le gradient de température perpendiculaire à la paroi est très important et T tend asymptotiquement vers T_∞ .

La région de l'écoulement où se manifestent ces variations rapides de T est appelée "**couche limite thermique**".

La couche limite thermique existe que le fluide soit visqueux ou non (approximation de fluide parfait). Son existence résulte de la diffusion de la chaleur dans le fluide s'écoulant sur la paroi, de la paroi vers le fluide si la paroi est plus chaude et en sens inverse si le fluide est plus chaud.

L'épaisseur de la couche limite thermique, $\delta_t(x)$, est définie comme le lieu des points M où l'écart de température avec le fluide extérieur n'est que de 1 % de l'écart maximal de température :

$$|T(M) - T_\infty| = 0,01|T_p - T_\infty| \quad (6.6)$$

Ce critère s'applique en régime laminaire comme en régime turbulent. L'épaisseur δ_t dépend non seulement de la vitesse de l'écoulement externe mais aussi des propriétés thermiques du fluide qui sont caractérisées par le nombre de Prandtl, $Pr = \nu/a$.

Le nombre de Prandtl donne une indication immédiate sur le rapport des épaisseurs des couches limites dynamique et thermique. :

- si $Pr \ll 1$ (métaux liquides par exemple), $\delta_t \gg \delta$ en régime laminaire car la chaleur diffuse beaucoup plus rapidement que la quantité de mouvement.
- si $Pr \gg 1$ (huiles par exemple), $\delta_t \ll \delta$ parce que la diffusion de quantité de mouvement est très importante alors que la diffusivité thermique est généralement faible.

Les conditions thermiques qui s'appliquent sur une paroi sont très diverses mais elles sont comprises entre deux limites : température de paroi imposée ou flux de chaleur imposé (ce qui est beaucoup plus facile à réaliser expérimentalement). Historiquement, le problème dynamique a d'abord été traité, puis le problème thermique et enfin le problème massique (qui sera abordé dans la suite de ce cours).

Après avoir traité la couche limite dynamique (Chapitre 3), on va admettre que les mêmes hypothèses s'appliquent pour la couche limite thermique. Soient :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.7)$$

En régime stationnaire et si $u_\infty = Cste$, les équations du mouvement (chapitre 3) et de l'énergie se simplifient donc sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.8)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.9)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.10)$$

Lorsque la plaque est isotherme à température T_p et le fluide au loin à température T_∞ , les conditions aux limites thermiques s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} T &= T_p && \text{en } y = 0, \forall x \\ \lim_{y \rightarrow \infty} T &= T_\infty && \forall x \\ T &= T_\infty && \text{en } x = 0, \forall y \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Forme adimensionnelle :

On pose

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{L} && ; && Y = \frac{y}{L} \\ U &= \frac{u}{u_\infty} && ; && V = \frac{v}{u_\infty} \\ \theta &= \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} && \text{d'où } 0 \leq \theta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

où L est la longueur de la paroi. On en déduit

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} &= \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

avec les conditions aux limites

$$\left. \begin{aligned} U = V = \theta = 0 & \quad \text{en } Y = 0, \forall X \\ \lim_{Y \rightarrow \infty} U = \lim_{Y \rightarrow \infty} \theta = 1 \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} V = 0 & \quad , \forall X \\ U = \theta = 1 \quad V = 0 & \quad \text{en } X = 0, \forall Y \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

où $Re \, Pr = Pe = u_\infty L/a$ est le nombre de Péclet.

On en déduit donc que

$$\theta(X, Y) = f(X, Y, Re, Pr) \quad \text{car } U \text{ et } V \text{ sont fonction de } X, Y \text{ et de } Re \quad (6.15)$$

6.1.1 Nombre de Nusselt

La densité de flux de chaleur locale transférée entre un fluide s'écoulant sur une paroi isotherme est donnée par la loi de Newton :

$$q_p(x) = h(x)(T_p - T_\infty) \quad (6.16)$$

où $h(x)$ est le coefficient d'échange local par convection (W/m^2K). On peut aussi exprimer le flux de chaleur à partir de la loi de Fourier écrite sur la paroi. Soit

$$q_p(x) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \quad (6.17)$$

Ces deux relations conduisent à

$$h(x)(T_p - T_\infty) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \quad (6.18)$$

d'où

$$h(x) = -\frac{k}{(T_p - T_\infty)} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \quad (6.19)$$

Forme adimensionnelle : compte tenu de la définition de l'écart de température adimensionnel, θ , on peut aussi écrire

$$h(x) = \frac{k}{L} \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_0 \quad (6.20)$$

ou

$$\frac{h(x)x}{k} = X \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_0 = Nu(x) \quad \text{nombre de Nusselt local, fonction de } x \text{ (ou de } X), Re \text{ et de } Pr \quad (6.21)$$

Le coefficient d'échange moyen sur une surface d'aire S est défini par

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h dS \quad (6.22)$$

Sa forme adimensionnelle est le nombre de Nusselt moyen basé sur la longueur L de la paroi

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} \quad \text{fonction de } Re \text{ et de } Pr \quad (6.23)$$

Conclusion : pour calculer $h(x)$, \bar{h} ou $Nu(x)$ et \overline{Nu} , il faut déterminer le champ de température au voisinage de la paroi. La solution dépend du nombre de Prandtl parce que les épaisseurs relatives des couches limites dynamiques, δ , et thermique, δ_t , vérifient une relation du type $(\delta/\delta_t) \approx Pr^n$ avec $n > 0$.

6.2 Méthodes de calcul approchées du nombre de Nusselt

6.2.1 $Pr = 1$

Les équations adimensionnelles de quantité de mouvement et de l'énergie ont la même forme et les mêmes conditions aux limites. Donc $\theta(X, Y) = U(X, Y)$ et $\frac{\partial U}{\partial Y}|_0 = \frac{\partial \theta}{\partial Y}|_0$. La contrainte à la paroi s'écrit :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = \frac{\mu u_\infty}{L} \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_0 \quad (6.24)$$

et le coefficient de frottement local

$$C_{f,x} = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = \frac{2\nu}{u_\infty L} \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_0 \quad (6.25)$$

De la définition du nombre de Nusselt local, on tire

$$\frac{Nu(X)}{X} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_0 = \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_0 = \frac{u_\infty L}{2\nu} C_{f,x} \quad (6.26)$$

On obtient donc la relation suivante entre $Nu(x)$ et $C_{f,x}$

$$Nu(x) = \frac{C_{f,x} Re_x}{2} \quad \text{analogie de Reynolds} \quad (6.27)$$

que l'on peut aussi écrire, puisque $Pr = 1$, sous la forme

$$St_x = \frac{Nu(x)}{Re_x} = \frac{C_{f,x}}{2} \quad \text{où } St_x = Nu(x)/Re_x Pr \text{ est le nombre de Stanton local} \quad (6.28)$$

Note : définition "physique" du nombre de Stanton : rapport entre le flux de convection réellement transféré et le flux (maximal) d'enthalpie que peut transporter un fluide parfait à température T_∞ s'écoulant à la vitesse u_∞ sur une paroi à température T_p :

$$St_x = \frac{h(x)(T_p - T_\infty)}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} = \frac{h(x)x}{k (u_\infty x/a)} = \frac{Nu(x)}{Pe(x)} \quad (6.29)$$

6.2.2 $Pr \neq 1$

On va chercher une solution approchée de l'équation de l'énergie par la méthode intégrale. Si la température au loin est constante, on peut écrire l'équation de l'énergie sous la forme suivante :

$$\rho C_p \left[u \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x} + v \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial q}{\partial y} \quad (6.30)$$

avec $q = -k(\partial T / \partial y)$.

En intégrant entre 0 et l'épaisseur $\delta_t(x)$ de la couche limite thermique, on obtient

$$\rho C_p \left[\int_0^{\delta_t} u \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_t} v \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial y} dy \right] = - q|_0^{\delta_t} \quad (6.31)$$

On suppose que

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\delta_t} = 0 \quad \text{et que} \quad T(x, \delta_t) = T_\infty \quad (6.32)$$

d'où

$$\int_0^{\delta_t} v \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial y} dy = v (T - T_\infty)|_0^{\delta_t} - \int_0^{\delta_t} (T - T_\infty) \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (6.33)$$

Le premier terme du membre de droite étant nul (en supposant que $T(x, \delta_t) - T_\infty = 0$), on arrive, en appliquant l'équation de continuité, à

$$\int_0^{\delta_t} v \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial y} dy = \int_0^{\delta_t} (T - T_\infty) \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (6.34)$$

on a aussi

$$- q(y)|_0^{\delta_t} = k \left(\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\delta_t} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \right) \quad (6.35)$$

d'où la forme intégrale de l'équation de l'énergie

$$\rho C_p \int_0^{\delta_t} \left(u \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x} + (T - T_\infty) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \quad (6.36)$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_0^{\delta_t} \frac{\partial}{\partial x} [u(T - T_\infty)] dy = -a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \quad (6.37)$$

ou en utilisant la règle de Liebnitz

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} u(T - T_\infty) dy \right] - u(T - T_\infty)|_{\delta_t} \frac{d\delta_t}{dx} = -a \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \quad (6.38)$$

où le second terme du membre de gauche est nul. En divisant les deux membres par $u_\infty(T_\infty - T_p)$, on obtient

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} U(1 - \theta) dy \right] = \left(\frac{a}{u_\infty} \right) \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_0 \quad (6.39)$$

où $U(x, y)$ est le profil de la composante de la vitesse adimensionnelle calculée au Chapitre 3. Par exemple, $U(x, y) = \frac{Y}{2}(3 - Y^2)$ avec $Y = y/\delta(x)$.

L'équation 6.39 fait intervenir deux inconnues : $\theta(x, y)$ et $\delta_t(x)$. Il faut donc introduire une relation additionnelle, soit $\theta = g(y/\delta_t)$ qui permet de ramener l'équation intégrale à une équation différentielle pour δ_t . On pose

$$\frac{y}{\delta_t} = Z \quad \text{et} \quad \frac{y}{\delta} = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right) = Z\Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right) \quad (6.40)$$

Si le chauffage débute en $x = 0$, on montre que Δ n'est fonction que de Pr :

$$\left. \begin{array}{ll} Pr = 1 : & \Delta = 1 \quad \text{ou} \quad \delta_t = \delta \quad \text{analogie de Reynolds} \\ Pr \gg 1 : & \delta_t \ll \delta \quad \text{ou} \quad \Delta \ll 1 \\ Pr \ll 1 : & \delta_t \gg \delta \quad \text{ou} \quad \Delta \gg 1 \end{array} \right\} \quad (6.41)$$

On suppose que les profils de vitesse et de température adimensionnels sont similaires. Soit

$$\begin{cases} U = f(y/\delta) = f(Z\Delta) \\ \theta = g(y/\delta_t) = g(Z) \end{cases} \quad (6.42)$$

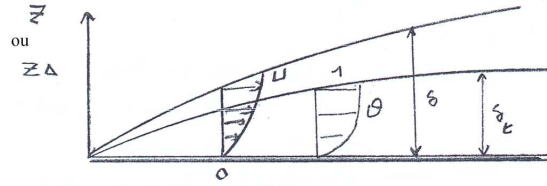


FIGURE 6.2 – Couches limites dynamique et thermique sur une plaque plane avec $Pr \neq 1$: les profils de U et de θ sont supposés similaires.

On en déduit

$$\begin{cases} \int_0^{\delta_t} U(1 - \theta)dy = \delta_t \int_0^1 f(Z\Delta)(1 - g(Z))dZ \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_0 = \frac{1}{\delta_t} \frac{dg}{dZ} \Big|_0 \end{cases} \quad (6.43)$$

d'où

$$\delta_t \frac{d\delta_t}{dx} \left[\int_0^1 f(Z\Delta)(1 - g(Z))dZ \right] = \left(\frac{a}{u_\infty} \right) \frac{dg}{dZ} \Big|_0 \quad (6.44)$$

en intégrant de 0 à x avec la condition $\delta_t(0) = 0$, on obtient

$$\delta_t^2 = \left(\frac{ax}{u_\infty} \right) \left[\frac{2 \frac{dg}{dZ} \Big|_0}{\int_0^1 f(Z\Delta)(1 - g(Z))dZ} \right] \quad (6.45)$$

ou

$$\left(\frac{\delta_t}{x}\right)^2 = C_1^2(\Delta) \frac{1}{Pe_x} \quad (6.46)$$

avec

$$C_1^2(\Delta) = 2 \left. \frac{dg}{dZ} \right|_0 / \left(\int_0^1 f(Z\Delta)(1 - g(Z))dZ \right) \quad \text{et} \quad Pe_x = \frac{u_\infty x}{a} \quad \text{nombre de Péclet local} \quad (6.47)$$

et donc

$$\left(\frac{\delta_t}{x}\right) = C_1(\Delta) Pe_x^{-1/2} = C_1(\Delta) Pr^{-1/2} Re_x^{-1/2} \quad (6.48)$$

En supposant le profil de température cubique parce que la forme générale et les conditions aux limites des équations adimensionnelles de l'énergie et de quantité de mouvement sont identiques, on obtient les profils de vitesse et de température suivants (cf équation 3.43) :

$$U = f(Z\Delta) = \frac{Z\Delta}{2}(3 - Z^2\Delta^2) \quad (6.49)$$

$$\theta = g(Z) = \frac{Z}{2}(3 - Z^2) \quad (6.50)$$

et donc

$$\left. \frac{dg}{dZ} \right|_0 = \frac{3}{2} \quad (6.51)$$

et

$$C_1^2(\Delta) = \frac{3}{\int_0^1 \frac{\Delta Z}{2}(3 - Z^2\Delta^2)(1 - \frac{Z}{2}(3 - Z^2))dZ} = \frac{20}{\Delta(1 - \frac{\Delta^2}{14})} \quad (6.52)$$

Exercice : Reprendre les calculs avec des profils de vitesse et de température de la forme $u(Z\Delta) = u_\infty \sin(\frac{\pi}{2}Z\Delta)$ et $(T - T_p)/(T_\infty - T_p) = \sin(\frac{\pi}{2}Z)$.

6.2.2.1 $Pr \gg 1$

Si $Pr \gg 1$, l'épaisseur de la couche limite thermique est beaucoup plus faible que l'épaisseur de la couche limite dynamique ($\Delta \ll 1$) et donc $C_1^2(\Delta) \approx 20/\Delta$. D'où

$$\left(\frac{\delta_t}{x}\right)^2 = \frac{20}{\Delta} Pr^{-1} Re_x^{-1} \quad (6.53)$$

Avec un profil de vitesse cubique, on a obtenu (cf équation 3.45) :

$$\left(\frac{\delta}{x}\right) = 4,64 Re_x^{-1/2} \quad (6.54)$$

et donc

$$\Delta = \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right) = \frac{\delta_t}{4,64x Re_x^{-1/2}} \quad (6.55)$$

$$\left(\frac{\delta_t}{x}\right)^2 = \frac{20 \times 4,64x Pr^{-1} Re_x^{-3/2}}{\delta_t} \quad (6.56)$$

ou

$$\left(\frac{\delta_t}{x}\right) = 4,53 Pr^{-1/3} Re_x^{-1/2} \quad (6.57)$$

Coefficient d'échange de chaleur : On a

$$h(x) = k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_0 = \frac{k}{\delta_t} \frac{dg}{dZ} \Big|_0 = \frac{3k}{2\delta_t} \quad (6.58)$$

ou encore

$$h(x) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{k}{4,53x}\right) Pr^{1/3} Re_x^{1/2} = 0,331 \left(\frac{k}{x}\right) Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (6.59)$$

Coefficient d'échange moyen pour une longueur L de la plaque :

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = 0,331k Pr^{1/3} \left(\frac{u_\infty}{\nu}\right)^{1/2} \frac{1}{L} \int_0^L x^{-1/2} dx = 0,662 \frac{k}{L} Pr^{1/3} Re_L^{1/2} \quad (6.60)$$

avec $Re_L = u_\infty L / \nu$.

Nombre de Nusselt local :

$$Nu(x) = \frac{h(x)x}{k} = 0,331 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (6.61)$$

Nombre de Nusselt moyen :

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = 0,662 Pr^{1/3} Re_L^{1/2} = 2Nu(L) \quad (6.62)$$

6.2.2.2 $Pr \ll 1$

Comme $\delta_t \gg \delta$, on peut supposer que $u = u_\infty$ dans toute l'épaisseur de la couche limite

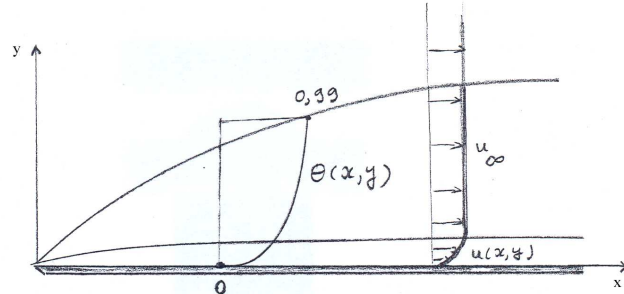


FIGURE 6.3 – Couches limites dynamique et thermique sur une plaque plane avec $Pr \ll 1$.

thermique et donc que $f(Z\Delta) = 1$. En supposant encore que le profil de température est cubique, on obtient $C_1^2(\Delta) = 8$ et on en déduit que

$$\left(\frac{\delta_t}{x}\right) = 2,83Pr^{-1/2}Re_x^{-1/2} = 2,83Pe_x^{-1/2} \quad (6.63)$$

et

$$h(x) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{k}{\delta_t}\right) = 0,530 \left(\frac{k}{x}\right) Pe_x^{1/2} \quad (6.64)$$

d'où $\bar{h} = 2h(L)$ et

$$Nu(x) = 0,530Pe_x^{1/2} \quad \text{et} \quad \overline{Nu} = 2Nu(L) = 1,06Pe_L^{1/2} \quad (6.65)$$

Le nombre de Péclet est alors le seul paramètre adimensionnel du problème parce que l'approximation $u = u_\infty$ entre $y = 0$ et $y = \delta_t$ revient à écrire l'équation de l'énergie sous la forme

$$u_\infty \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.66)$$

dont la forme adimensionnelle est

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pe_L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (6.67)$$

avec les conditions aux limites

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \quad \text{en } Y = 0, \forall X \\ \lim_{Y \rightarrow \infty} \theta = 1 \\ \theta = 1 \quad \text{en } X = 0, \forall Y \end{array} \right\} \quad (6.68)$$

Cette équation est similaire à celle rencontrée en conduction lorsque l'on applique le modèle du mur semi-infini : le temps (ou variable temporelle) est ici remplacé par X (coordonnée axiale) et la diffusivité thermique par $1/Pe_L$. Introduisons donc la variable

$$Z = \frac{Y}{2\sqrt{X/Pe_L}} \quad (6.69)$$

Cette variable, identique à celle introduite en conduction thermique, peut s'obtenir en utilisant la transformation de Laplace. On remarque aussi que

$$Z = \frac{y}{2} \left(\frac{u_\infty}{ax}\right)^{1/2} \quad (6.70)$$

et donc Z est une variable de similitude pour le problème thermique qui est similaire à la variable η introduite par Blasius pour le problème dynamique.

Les dérivées partielles intervenant dans l'équation adimensionnelle de l'énergie s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial Z} \times \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial Z} \left(-\frac{1}{4}Y\sqrt{Pe_L}X^{-3/2}\right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Z} \times \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Z} \left(\frac{1}{2\sqrt{X/Pe_L}}\right) \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y} \times \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \frac{1}{2\sqrt{X/Pe_L}}\right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \frac{1}{4X/Pe_L} \end{array} \right\} \quad (6.71)$$

d'où la nouvelle expression de l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} \left(-\frac{Y}{\sqrt{X/Pe_L}} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \quad (6.72)$$

Comme $Y/\sqrt{X/Pe_L} = 2Z$, on obtient l'équation différentielle ordinaire du second ordre pour θ

$$\frac{d^2 \theta}{dZ^2} + 2Z \frac{d\theta}{dZ} = 0 \quad (6.73)$$

Les conditions aux limites

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 0 \quad \text{en } Z = 0 \\ \lim_{Z \rightarrow \infty} \theta = 1 \end{array} \right\} \quad (6.74)$$

conduisent à la solution

$$\theta(Z) = C_1 \int_0^Z e^{-\eta^2} d\eta \quad (6.75)$$

avec

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (6.76)$$

On en déduit donc que la distribution de température dans la couche limite s'écrit :

$$\theta(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{-\eta^2} d\eta = erf(Z) \quad (6.77)$$

où $erf(Z)$ est la fonction d'erreur (voir l'annexe 6.6).

L'épaisseur $\delta_t(x)$ de la couche limite thermique étant définie comme le lieu des points où $\theta = 0,99$, une table des valeurs de la fonction d'erreur montre que $erf(Z) = 0,99$ en $Z = 1,82$. On en conclût donc que :

$$\delta_t(X) = 3,64 \sqrt{X/Pe_L} \quad (6.78)$$

ou encore

$$\left(\frac{\delta_t(x)}{x} \right) = 3,64 Pe_x^{-1/2} \quad (6.79)$$

Le coefficient 3,64 remplace donc le coefficient 2,83 obtenu par la méthode intégrale (écart de l'ordre de 25%). La raison est que le profil de température cubique n'est pas bien approprié pour calculer δ_t lorsque $Pr \ll 1$ (voir TD).

Le nombre de Nusselt local s'exprime par

$$Nu(X) = X \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_0 = \frac{X}{2\sqrt{X/Pe_L}} \left. \frac{d\theta}{dZ} \right|_0 = \frac{X}{2\sqrt{X/Pe_L}} \left. \frac{d(erf(Z))}{dZ} \right|_0 \quad (6.80)$$

Comme $d(erf(Z))/dZ = 2exp(-Z^2)/\sqrt{\pi}$, on en déduit que

$$Nu(X) = \sqrt{\frac{X Pe_L}{\pi}} = 0,564 Pe_x^{1/2} \quad (6.81)$$

Le coefficient ne diffère donc que de 6% de celui obtenu par la méthode intégrale qui permet donc d'obtenir une bonne approximation du coefficient d'échange thermique, bien que les épaisseurs de la couche limite thermique diffèrent d'environ 25%.

6.2.3 Calcul d'une solution numérique par la méthode affine

La méthode affine permet de transformer l'équation aux dérivées partielles de l'énergie en une équation différentielle linéaire du second ordre, valable quelle que soit la valeur du nombre de Prandtl. Cependant, cette forme différentielle n'a pas de solution analytique parce que les composantes de la vitesse ($u = u_\infty f'(\eta)$, $v = g(x, \eta)$) ne sont pas connues analytiquement (voir le Chapitre 3, § 3.1.2.2). Son calcul numérique est cependant très simple connaissant une suite de valeurs discrètes de f'' (Chapitre 3, tableau 1).

On va utiliser ici la variable de similitude de Blasius, $\eta = y \left(\frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}$, choisie pour calculer le profil de vitesse parce que cette méthode permet de résoudre l'équation de la couche limite thermique sans faire d'hypothèse sur la valeur du nombre de Prandtl. Comme pour le profil de vitesse axiale (composante u), on suppose que θ ne dépend que de η .

On pose donc $\theta = \theta(\eta)$ et il faut exprimer les dérivées partielles de l'équation de la couche limite thermique, écrite sous forme dimensionnelle, en fonction de η . Soit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{y}{x^{3/2}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \theta' = \left(-\frac{\eta}{2x}\right) \theta' \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \theta' = \left(\frac{\eta}{y}\right) \theta' \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{1}{x} \left(\frac{u_\infty}{\nu}\right) \theta'' = \left(\frac{\eta}{y}\right)^2 \theta'' \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

Comme (cf. chapitre 3 "Ecoulements externes en régime laminaire")

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\infty f' \\ v &= \frac{1}{2} \left(\frac{\nu u_\infty}{x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

on en déduit la forme suivante de l'équation de l'énergie :

$$u_\infty \left(-\frac{\eta}{2x}\right) f' \theta' + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu u_\infty}{x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \left(\frac{\eta}{y}\right) \theta' = a \left(\frac{\eta}{y}\right)^2 \theta'' \quad (6.84)$$

qui se simplifie en l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0 \quad (6.85)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \theta(\infty) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

Cette équation différentielle ordinaire à coefficients variables n'a pas de solution exacte car $f(\eta)$ n'est calculable que numériquement. On la ré-écrit sous la forme

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -\frac{Pr}{2} f = Pr \frac{f'''}{f''} \quad (6.87)$$

puisque l'équation de quantité de mouvement s'écrit $f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0$ (chapitre 3). En intégrant, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \ln(\theta') &= Pr \ln(f'') + C_1 = \ln(f'')^{Pr} + C_1 \\ \text{et donc} \\ \theta' &= C_1 (f'')^{Pr} \\ \text{puis} \\ \theta(\eta) &= C_1 \int_0^\eta (f'')^{Pr} d\eta + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

Comme $\theta(0) = 0$, $C_2 = 0$ et C_1 se déduit de la condition à l'infini :

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^\infty (f'')^{Pr} d\eta} \quad (6.89)$$

En définitive

$$\theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta (f'')^{Pr} d\eta}{\int_0^\infty (f'')^{Pr} d\eta} \quad (6.90)$$

Le nombre de Prandtl est donc un paramètre. Cette relation permet un calcul numérique très simple de $\theta(\eta)$ à partir d'un tableau de valeurs de f'' . La solution est représentée graphiquement sur la figure 6.4 pour diverses valeurs de Pr .

Pr	0.001	0.01	0.1	0.5	0.7	1.0	7.0	10.0	15.0	50	100	1000
$Nu_x Re_x^{-1/2}$	0.0173	0.0516	0.140	0.259	0.292	0.332	0.645	0.730	0.835	1.247	1.572	3.387

Tableau 1 : valeurs de $\theta'(0) = Nu_x Re_x^{-1/2}$ pour différentes valeurs de Pr .

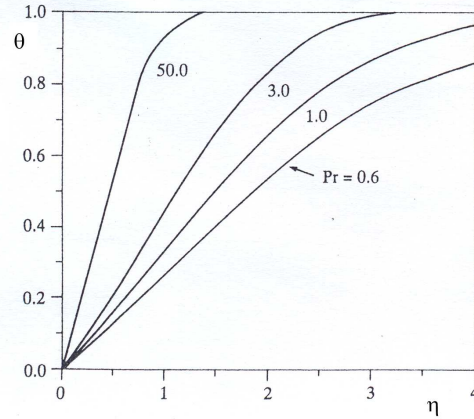


FIGURE 6.4 – Variation de la température réduite pour différentes valeurs de Pr .

Les résultats numériques reportés dans le tableau 1 peuvent être corrélés par les relations suivantes :

$$\frac{\delta_t}{\delta} \simeq Pr^{-1/3} \quad \text{pour } 0,6 \leq Pr \leq 100 \quad (6.91)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{d\eta}\Big|_0 &= 0,564Pr^{1/2} & \text{pour } Pr < 0,05 \\ &= 0,332Pr^{1/3} & \text{pour } 0,6 \leq Pr \leq 10 \\ &= 0,339Pr^{1/3} & \text{pour } Pr > 10 \end{aligned} \right\} \quad (6.92)$$

Le coefficient d'échange local se calcule par

$$h(x) = k \frac{\partial \theta}{\partial y}\Big|_0 = k \left(\frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \theta'(0) \quad (6.93)$$

et donc

$$Nu(x) = \frac{h(x)x}{k} = \theta'(0) Re_x^{1/2} \quad (6.94)$$

Ce qui conduit aux corrélations suivantes donnant le nombre de Stanton local ($St_x = Nu(x)/Pr Re_x$) selon le domaine de valeur de Pr (analogie de Reynolds modifiée) :

$$\left. \begin{aligned} St_x &= (1,7Pr^{-1/2}) \frac{C_{f,x}}{2} & \text{pour } Pr < 0,05 \\ St_x &= Pr^{-2/3} \frac{C_{f,x}}{2} & \text{pour } 0,6 \leq Pr \leq 10 \\ St_x &= (1,021Pr^{-2/3}) \frac{C_{f,x}}{2} & \text{pour } Pr > 10 \end{aligned} \right\} \quad (6.95)$$

où l'expression de $C_{f,x}$ est obtenue en résolvant le problème dynamique ($C_{f,x} = 0,664Re_x^{-1/2}$ voir le chapitre 3). Avec la méthode intégrale, on a trouvé

$$\left. \begin{aligned} Nu(x) = 0,530Pr^{1/2}Re_x^{1/2} &\implies St_x = (1,596Pr^{-1/2}) \frac{C_{f,x}}{2} & \text{pour } Pr \ll 1 \\ Nu(x) = 0,331Pr^{1/3}Re_x^{1/2} &\implies St_x = (1,012Pr^{-2/3}) \frac{C_{f,x}}{2} & \text{pour } Pr \gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.96)$$

Ce qui montre que les deux solutions sont en bon accord.

6.3 Plaque plane chauffée uniformément ($q_p = Cste$)

Le problème est ici de déterminer $T_p(x)$.

Notons d'abord que l'analogie de Reynolds ($Pr = 1$) n'est jamais applicable parce que les conditions aux limites des équations de quantité de mouvement et de l'énergie ne sont pas les mêmes. Dans ce paragraphe, on va utiliser la méthode intégrale puis, à nouveau lorsque $Pr \ll 1$, une analogie avec la conduction thermique dans un mur semi-infini.

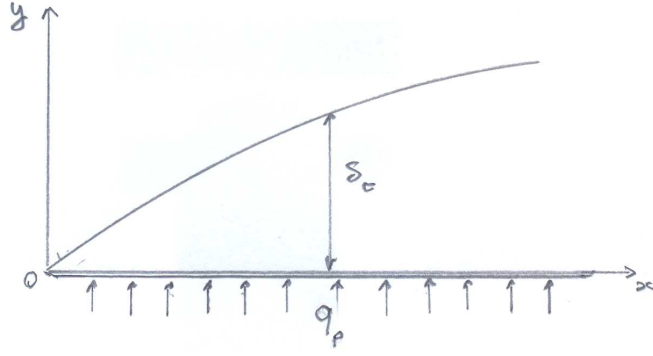


FIGURE 6.5 – Plaque plane chauffée uniformément ($q_p = Cste$).

Hypothèses : au bord de la couche limite thermique, on suppose toujours que $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\delta_t} = 0$ et que $T(x, \delta_t) = T_\infty$, d'où $q_y(x, \delta_t) = 0, \forall x$. On obtient donc en reprenant les calculs précédents :

$$\rho C_p \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} u(T - T_\infty) dy \right] = q_p \quad (6.97)$$

Pour résoudre cette équation, on conserve un profil de température cubique. Soit

$$T(x, y) = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta_t} \right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3 \quad (6.98)$$

Les coefficients $a_0 \dots a_3$ sont déterminés par les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 &= q_p & ; & & \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_0 &= 0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\delta_t} &= 0 & ; & & T(x, \delta_t) &= T_\infty \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

On obtient

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= T_\infty + \frac{2}{3} \frac{q_p \delta_t}{k} \\ a_1 &= -\frac{q_p \delta_t}{k} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{1}{3} \frac{q_p \delta_t}{k} \end{aligned} \right\} \quad (6.100)$$

et donc

$$T(x, y) = T_\infty + \frac{q_p \delta_t}{k} \left(\frac{2}{3} - Z + \frac{1}{3} Z^3 \right) \quad \text{avec} \quad 0 \leq Z = \frac{y}{\delta_t} \leq 1 \quad (6.101)$$

En remplaçant u par $u(Z\Delta) = \frac{u_\infty}{2}(3(Z\Delta) - (Z\Delta)^3)$ et en supposant que Δ ne dépend que de Pr , on arrive à

$$\rho C_p \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} u(T - T_\infty) dy \right] = \rho C_p \frac{d}{dx} \left[\int_0^1 \frac{u_\infty}{2} (3(Z\Delta) - (Z\Delta)^3) \frac{q_p \delta_t}{k} \left(\frac{2}{3} - Z + \frac{1}{3} Z^3 \right) \delta_t dZ \right] = q_p \quad (6.102)$$

ou encore

$$\frac{u_\infty}{a} \frac{d}{dx} (\delta_t^2) \left[\int_0^1 \frac{1}{2} (3(Z\Delta) - (Z\Delta)^3) \left(\frac{2}{3} - Z + \frac{1}{3} Z^3 \right) dZ \right] = 1 \quad (6.103)$$

où l'intégrale n'est fonction que de $\Delta = \delta_t/\delta$. On obtient :

$$\frac{d}{dx} (\delta_t^2) = \frac{a}{u_\infty} C_2^2(\Delta) \quad (6.104)$$

avec

$$C_2^2(\Delta) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{2} (3(Z\Delta) - (Z\Delta)^3) \left(\frac{2}{3} - Z + \frac{1}{3} Z^3 \right) dZ} = \frac{10}{\Delta(1 - \Delta^2/14)} \quad (6.105)$$

En supposant que $\delta_t(0) = 0$, l'intégration conduit à

$$\delta_t^2(x) = C_2^2(\Delta) \frac{ax}{u_\infty} \quad (6.106)$$

ou encore

$$\left(\frac{\delta_t}{x} \right)^2 = C_2^2(\Delta) P e_x^{-1} \quad (6.107)$$

Note : Si $Pr = 1$, $\Delta \neq 1$ car les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement et de l'énergie ne sont pas les mêmes.

6.3.1 $Pr \gg 1$:

Si $Pr \gg 1$ alors $\Delta \ll 1$ et $C_2^2(\Delta) \approx 10/\Delta$. On en déduit que

$$\left(\frac{\delta_t}{x} \right)^2 = \frac{10}{\Delta} P e_x^{-1} \quad (6.108)$$

avec $\Delta = \delta_t/\delta = \delta_t/4, 64x Re_x^{-1/2}$. On obtient donc

$$\left(\frac{\delta_t}{x} \right)^2 = \frac{46,4 \times (x Re_x^{-1/2})}{\delta_t} P e_x^{-1} \quad (6.109)$$

ou

$$\left(\frac{\delta_t}{x} \right)^3 = 46,4 Pr^{-1} Re_x^{-3/2} \Rightarrow \left(\frac{\delta_t}{x} \right) = 3,593 Pr^{-1/3} Re_x^{-1/2} \quad (6.110)$$

Transfert de chaleur :

La loi de Newton avec $q_p = cste$ et $T_p(x) = T(x, 0) = T_\infty + \frac{2}{3} \left(\frac{q_p \delta_t}{k} \right)$ (d'après l'équation 6.101) s'écrit

$$q_p = h(x)(T_p(x) - T_\infty) = h(x)(T(x, 0) - T_\infty) = h(x) \frac{2}{3} \left(\frac{q_p \delta_t}{k} \right) \quad (6.111)$$

donc

$$h(x) = \frac{3}{2} \frac{k}{\delta_t} \quad \text{et} \quad Nu(x) = \frac{h(x)x}{k} = \frac{3}{2} \frac{x}{\delta_t} = 0,417 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (6.112)$$

et

$$T_p(x) = T_\infty + \frac{q_p}{h(x)} = T_\infty + \frac{2}{3} \frac{q_p \delta_t}{k} = T_\infty + \frac{2q_p}{3k} \times 3,593 Pr^{-1/3} (x Re_x^{-1/2}) \quad (6.113)$$

Ce qui montre que la température de la paroi croît en $x^{1/2}$. Le nombre de Nusselt moyen a pour expression :

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = 2Nu(L) = 0,834 Pr^{1/3} Re_L^{1/2} \quad (6.114)$$

Note : On en déduit une valeur approximative de la température moyenne de la paroi par

$$q_p = \bar{h}(\bar{T}_p - T_\infty) \quad \implies \quad \bar{T}_p = T_\infty + \frac{q_p}{\bar{h}} \quad (6.115)$$

En réalité

$$q_p = \frac{1}{L} \int_0^L h(x)(T_p(x) - T_\infty)dx = \frac{1}{L} \int_0^L h(x)T_p(x)dx - \frac{1}{L} \int_0^L h(x)T_\infty dx \quad (6.116)$$

et donc

$$q_p = \frac{1}{L} \int_0^L h(x)T_p(x)dx - \bar{h}T_\infty = \overline{h(x)T_p(x)} - \bar{h}T_\infty \quad (6.117)$$

ce qui est différent de la relation 6.115.

6.3.2 $Pr \ll 1$:

Si $Pr \ll 1$ alors $\Delta \gg 1$ ou $\delta_t \gg \delta$. On suppose à nouveau que $u \approx u_\infty$ dans la couche limite thermique et on conserve le profil de température calculé précédemment. On arrive alors à

$$\frac{d}{dx} (\delta_t^2) = \frac{a}{u_\infty} C_2^2(\Delta) \quad (6.118)$$

avec

$$C_2^2(\Delta) = \frac{1}{\int_0^1 (\frac{2}{3} - Z + \frac{1}{3} Z^3) dZ} = 4 \quad (6.119)$$

ce qui conduit immédiatement à

$$\left(\frac{\delta_t}{x} \right)^2 = 4Pe_x^{-1} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\delta_t}{x} \right) = 2Pe_x^{-1/2} \quad (6.120)$$

Le coefficient d'échange local est toujours donné par $h(x) = 3k/2\delta_t$ et donc

$$h(x) = \left(\frac{3}{2} \right) \frac{k Pe_x^{1/2}}{2x} = 0,75 \frac{k}{x} Pe_x^{1/2} \quad \text{et} \quad Nu(x) = 0,75 Pe_x^{1/2} \quad (6.121)$$

d'où

$$T_p(x) = T_\infty + \frac{4}{3} \frac{q_p}{k} \frac{x}{Pe_x^{1/2}} \quad (6.122)$$

La température de la paroi croît donc toujours en $x^{1/2}$. Le coefficient d'échange moyen et le nombre de Nusselt moyen sont donnés par

$$\bar{h} = 2h(L) = 1,5 \frac{k}{L} Pe_L^{1/2} \quad \text{et} \quad \overline{Nu} = 1,5 Pe_L^{1/2} \quad (6.123)$$

6.3.2.1 Solution analytique :

Comme dans le cas d'une paroi isotherme, on peut aussi utiliser l'analogie avec le problème de conduction en régime transitoire dans un mur semi-infini.

En posant $\theta = T(x, y) - T_\infty$ et en supposant que $u = u_\infty$ et $v = 0$, l'équation de l'énergie et ses conditions aux limites s'écrivent sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial X} &= \frac{1}{Pe_L} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial Y} &= \phi_p \quad \text{en } Y = 0, \forall X \\ \lim_{Y \rightarrow \infty} \theta &= 0 \\ \theta &= 0 \quad \text{en } X = 0, \forall Y \end{aligned} \right\} \quad (6.124)$$

où $\phi_p = q_p L/k$.

En dérivant l'équation de l'énergie par rapport à Y , on obtient, après inversion des ordres de dérivation, l'équation de conservation du flux $\phi = -\partial\theta/\partial Y$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial X} &= \frac{1}{Pe_L} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \\ \phi &= 0 \quad \text{en } X = 0, \forall Y \\ \lim_{Y \rightarrow \infty} \phi &= 0, \forall X \\ \phi &= \phi_p \quad \text{en } Y = 0, \forall X \end{aligned} \right\} \quad (6.125)$$

dont la solution est

$$\phi(X, Y) = \phi_p \operatorname{erfc} \left(\frac{Y}{2\sqrt{X/Pe_L}} \right) \quad (6.126)$$

La distribution de température s'obtient en intégrant $\phi(X, Y)$. Soit :

$$\theta(X, Y) = \int_Y^\infty \phi(X, Y) dY \quad (6.127)$$

On obtient

$$\theta(X, Y) = 2\phi_p \sqrt{\frac{X}{\pi Pe_L}} e^{-Pe_L Y^2/4X} - \phi_p Y \operatorname{erfc} \left(\frac{Y}{2\sqrt{X/Pe_L}} \right) \quad (6.128)$$

où $\text{erfc}(u) = 1 - \text{erf}(u)$ est la fonction d'erreur complémentaire (voir l'*annexe 6.6*). Comme $\text{erfc}(0) = 1$, la température de la paroi $\theta(X, 0)$ évolue selon la loi

$$\theta(X, 0) = 2\phi_p \sqrt{\frac{X}{\pi Pe_L}} \quad (6.129)$$

ou encore

$$T_p(x) = T_\infty + 2\frac{q_p L}{k} \sqrt{\frac{X}{\pi Pe_L}} = T_\infty + 2\frac{q_p}{\sqrt{\pi k}} \frac{x}{Pe_x^{1/2}} \quad (6.130)$$

comme $2/\sqrt{\pi} \approx 1,13$, on en conclut que la méthode intégrale avec un profil de température cubique conduit à une erreur inférieure à 5% sur la variation de l'écart de température ($T_p(x) - T_\infty$).

6.4 Convection forcée turbulente sur une plaque plane

Les équations de couche limite turbulente sur une plaque plane sur laquelle s'écoule un fluide à vitesse constante se réduisent, pour l'écoulement moyen supposé incompressible avec μ et C_p constants, à :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (6.131)$$

$$\rho(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho(\overline{u'v'}) \right] \quad (6.132)$$

$$\rho C_p(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho C_p(\overline{v'T'}) \right] \quad (6.133)$$

En introduisant la viscosité mécanique turbulente $\epsilon_M = \mu_t/\rho$ et la diffusivité thermique turbulente ϵ_T (ou a_t) définies par

$$\epsilon_M = -\frac{\overline{u'v'}}{\partial \bar{u}/\partial y} \quad (6.134)$$

et

$$\epsilon_T = -\frac{\overline{v'T'}}{\partial \bar{T}/\partial y} \quad (6.135)$$

les équations de couche limite turbulente s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (6.136)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (6.137)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + \epsilon_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] \quad (6.138)$$

Ce système de trois équations de conservation fait intervenir cinq inconnues : \bar{u} , \bar{v} , \bar{T} , ϵ_M et ϵ_T .

Les conditions aux limites sont :

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_p \text{ en } y = 0, \forall x \quad (6.139)$$

$$\bar{u} = u_\infty, \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ au loin } y \rightarrow \infty, \forall x \quad (6.140)$$

$$\bar{u} = u_\infty, \bar{T} = T_\infty \text{ en } x = 0, \forall y \quad (6.141)$$

Comme pour l'aspect dynamique, la convection turbulente sur une plaque plane peut être abordée par la méthode intégrale ou en introduisant un profil "universel" de température.

Forme adimensionnelle :

En introduisant les grandeurs adimensionnelles définies par les relations 6.12, on obtient le système :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0 \quad (6.142)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(1 + \frac{\epsilon_M}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} \right] \quad (6.143)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y} = \frac{1}{Pe_L} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(1 + \frac{\epsilon_T}{a} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y} \right] \quad (6.144)$$

Le second membre de l'équation de l'énergie peut s'écrire

$$\frac{1}{Pe_L} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(1 + \frac{\epsilon_T}{a} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y} \right] = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_T}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y} \right] = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\left(\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \frac{\epsilon_M}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Y} \right] \quad (6.145)$$

où $Pr_t = \epsilon_M / \epsilon_T$ s'appelle le nombre de Prandtl turbulent, qui n'est pas une propriété du fluide mais de l'écoulement. On admet souvent que Pr_t est constant avec une valeur comprise entre $Pr_t = 0,8$ et $Pr_t = 1$. Dans ce cas, la diffusivité thermique turbulente est connue et la diffusivité mécanique turbulente peut être calculée comme expliqué dans le chapitre 4. Si de plus $Pr = 1$ et $Pr_t = 1$, les équations de la quantité de mouvement et de l'énergie sont analogues. Si la température de la paroi est imposée, les conditions aux limites sont les mêmes et $\bar{T} = \bar{U}$: l'analogie de Reynolds (sous-section 6.2.1) s'applique donc aussi.

6.4.1 Calcul du coefficient d'échange

6.4.1.1 Méthode intégrale

Pour $5 \cdot 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$, l'expérience montre que les profils de vitesse et de température peuvent être approchés par les lois polynomiales

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \\ \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_p - T_\infty} = 1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^{1/7} \end{cases} \quad (6.146)$$

Il est à noter que les dérivées par rapport à y de ces profils tendent vers l'infini lorsque $y \rightarrow 0$: ils ne permettent donc pas les calculs de la contrainte et du flux de chaleur à la paroi.

L'équation intégrale de l'énergie s'écrit toujours

$$\rho C_p \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} \bar{u}(\bar{T} - T_\infty) dy \right] = q_p = h(x)(T_p - T_\infty) \quad (6.147)$$

soit encore

$$u_\infty \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_t} \left(\frac{\bar{u}}{u_\infty} \right) \left(\frac{\bar{T} - T_\infty}{T_p - T_\infty} \right) dy \right] = \frac{h(x)}{\rho C_p} \quad (6.148)$$

et en remplaçant les profils de vitesse et de température par leurs expressions approchées

$$u_\infty \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^{\delta_t} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^{1/7} \right] dy \right\} = \frac{h(x)}{\rho C_p} \quad (6.149)$$

$$u_\infty \frac{d}{dx} \left[\frac{7}{8}(\delta \Delta^{8/7}) - \frac{7}{9}(\delta \Delta^{8/7}) \right] = u_\infty \frac{d}{dx} \left[\frac{7}{72}(\delta \Delta^{8/7}) \right] = \frac{h(x)}{\rho C_p}$$

Pour $Pr \approx 1$ on a $\Delta \approx 1$ et $\delta/x = 0,376 Re_x^{-1/5}$ (Chapitre 4, § 4.3) et donc

$$\delta \Delta^{8/7} \approx \delta \approx 0,376 \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{-1/5} x^{4/5} \quad (6.150)$$

On en déduit la relation suivante qui permet, après dérivation, de calculer le coefficient d'échange

$$\frac{7}{72} u_\infty \times 0,376 \left(\frac{u_\infty}{\nu} \right)^{-1/5} \frac{d}{dx} (x^{4/5}) = \frac{h(x)}{\rho C_p} \quad (6.151)$$

d'où

$$\begin{cases} h(x) = 0,0292 \rho C_p u_\infty Re_x^{-1/5} & \text{et} & Nu(x) = 0,0292 Pr Re_x^{4/5} \\ \bar{h} = \frac{5}{4} h(L) = 0,037 \rho C_p u_\infty Re_L^{-1/5} & \text{et} & \bar{Nu} = 0,037 Pr Re_L^{4/5} \end{cases} \quad (6.152)$$

6.4.1.2 Profil universel de température

Rappels

La contrainte turbulente a pour expression

$$\tau = \rho(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho(\nu + \epsilon_M) \left(\frac{u_f^2}{\nu} \right) \frac{du^+}{dy^+} = \left(1 + \frac{\epsilon_M}{\nu} \right) \tau_p \frac{du^+}{dy^+} \quad (6.153)$$

donc

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \left(1 + \frac{\epsilon_M}{\nu} \right) \frac{du^+}{dy^+} = \epsilon^+ \frac{du^+}{dy^+} \quad \text{avec} \quad \epsilon^+ = 1 + \frac{\epsilon_M}{\nu} \quad (6.154)$$

Si $\tau \approx \tau_p$ ($y^+ \leq 600$) on en déduit que :

$$\epsilon^+ = \frac{1}{(du^+/dy^+)} \quad (6.155)$$

on a aussi

$$u_\infty^+ = \frac{u_\infty}{u_f} = \frac{u_\infty}{\sqrt{\tau/\rho}} = \left(\frac{\rho u_\infty^2}{\tau_p} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{C_{f,x}}} \quad (6.156)$$

L'expérience montre que le flux de chaleur sur une paroi isotherme est, comme la contrainte tangentielle sur une paroi imperméable, quasiment constant dans la région interne des couches limites. Le rapport q/τ est aussi presque constant sur toute l'épaisseur de la couche limite. On suppose donc que $q/\tau \approx q_p/\tau_p$. Soit

$$\frac{q}{\tau} = \frac{-\rho C_p (a + \epsilon_T) (\frac{\partial \bar{T}}{\partial y})}{\rho(\nu + \epsilon_M) (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})} \approx \frac{q_p}{\tau_p} \quad (6.157)$$

donc

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = - \left(\frac{q_p}{\tau_p} \right) \frac{\nu + \epsilon_M}{C_p (a + \epsilon_T)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \left(\frac{q_p}{C_p \tau_p} \right) \frac{\nu + \epsilon_M}{(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\epsilon_M}{Pr_t})} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (6.158)$$

On suppose que Pr_t est constant dans la couche turbulente.

En intégrant l'équation 6.158 entre $y = 0$ (où $\bar{u} = 0, \bar{T} = T_p$) et y , on obtient

$$\int_0^y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} dy = \bar{T} - T_p = - \left(\frac{q_p}{C_p \tau_p} \right) \int_0^{\bar{u}} \frac{\nu + \epsilon_M}{(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\epsilon_M}{Pr_t})} d\bar{u} \quad (6.159)$$

On pose

$$\Delta T^+ = \frac{\rho C_p u_f (T_p - \bar{T})}{q_p} \quad (6.160)$$

et donc

$$\bar{T} - T_p = - \frac{q_p \Delta T^+}{\rho C_p u_f} = - \left(\frac{q_p}{C_p \tau_p} \right) \int_0^{\bar{u}} \frac{\nu + \epsilon_M}{(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\epsilon_M}{Pr_t})} d\bar{u} \quad (6.161)$$

comme $\tau_p = \rho u_f^2$ on en déduit que

$$\Delta T^+ = \frac{1}{u_f} \int_0^{\bar{u}} \frac{\nu + \epsilon_M}{\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\epsilon_M}{Pr_t}\right)} d\bar{u} = \int_0^{u^+} \frac{\nu + \epsilon_M}{\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\epsilon_M}{Pr_t}\right)} du^+ \quad (6.162)$$

mais $1 + \epsilon_M/\nu = \epsilon^+$ et donc

$$\frac{\nu + \epsilon_M}{\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\epsilon_M}{Pr_t}\right)} = \frac{1 + \epsilon_M/\nu}{\frac{1}{Pr} + \left(\frac{1}{Pr_t}\right)\left(\frac{\epsilon_M}{\nu}\right)} = \frac{\epsilon^+}{\frac{1}{Pr} + \left(\frac{1}{Pr_t}\right)(\epsilon^+ - 1)} \quad (6.163)$$

Soit encore

$$\Delta T^+ = \int_0^{u^+} \left(\frac{\epsilon^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t}(\epsilon^+ - 1)} \right) du^+ \quad (6.164)$$

Remarque : le nombre Stanton local, $St_x = Nu(x)/Re_x Pr$, peut aussi s'écrire :

$$St_x = \frac{q_p}{\rho C_p u_f (T_p - T_\infty)} \left(\frac{u_f}{u_\infty} \right) = \frac{1}{\Delta T_\infty^+} \times \frac{1}{u_\infty^+} = \frac{\sqrt{\frac{C_{f,x}}{2}}}{\Delta T_\infty^+} \quad (6.165)$$

Le problème du calcul du nombre de Stanton revient donc au calcul de ΔT_∞^+ . La relation 6.165 montre que St_x , et donc le nombre de Nusselt, dépend du coefficient de frottement, résultat qui n'apparaît pas aussi explicitement avec la méthode intégrale.

Si $Pr_t \approx 1$, la couche turbulente débute toujours en $y^+ \approx 30$, $\forall Pr$.

Pour calculer T^+ , il suffit de connaître les lois de variations de ϵ^+ et de u^+ avec y^+ . On va donc utiliser le profil universel de vitesse. On a aussi

$$\Delta T_\infty^+ = \int_0^{u_\infty^+} \left(\frac{\epsilon^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t}(\epsilon^+ - 1)} \right) du^+ \quad (6.166)$$

Le calcul de ΔT_∞^+ nécessite de séparer l'intégration en trois parties qui correspondent aux couches visqueuse, tampon et turbulente. Soit

$$\Delta T_\infty^+ = \Delta T_{visq}^+ + \Delta T_{tamp}^+ + \Delta T_{turb}^+ \quad (6.167)$$

Pour les fluides dont le nombre de Prandtl est compris entre $Pr = 0,5$ et $Pr = 30$, l'expérience montre que ϵ^+ peut être calculée par les expressions suivantes :

– Sous-couche visqueuse ($y^+ \leq 5$, $Pr \gg Pr_t$)

$$u^+ = y^+ \quad du^+ = dy^+ \quad \Rightarrow \epsilon^+ = 1 \quad , \quad \Rightarrow \epsilon^+ du^+ = dy^+ \quad (6.168)$$

– Couche tampon ($5 \leq y^+ \leq 30$, $Pr_t \approx 1$)

$$u^+ = 5 \ln(y^+) - 3,05 \quad du^+ = \frac{5}{y^+} dy^+ \quad , \quad \Rightarrow \epsilon^+ = 0,2y^+ \quad \Rightarrow \epsilon^+ du^+ = dy^+ \quad (6.169)$$

– Couche turbulente ($y^+ \geq 30$, $Pr_t \gg Pr$)

$$u^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,5 \quad du^+ = \frac{2,5}{y^+} dy^+ \quad , \quad \Rightarrow \epsilon^+ = 0,4 y^+ \quad \epsilon^+ du^+ = dy^+ \quad (6.170)$$

et

$$\frac{1}{Pr} - \frac{1}{Pr_t} \ll \frac{\epsilon^+}{Pr_t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon^+ du^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t}(\epsilon^+ - 1)} \approx Pr_t du^+ \quad (6.171)$$

Les variations de ϵ^+ au voisinage de la paroi ($y^+ < 600$) sont représentées sur la figure 6.6. On note la discontinuité de ϵ^+ en $y^+ = 30$.

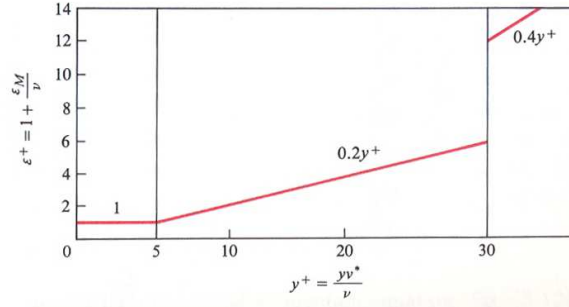


FIGURE 6.6 – Variation de ϵ^+ dans la couche limite au voisinage de la paroi.

D'où

$$\Delta T_\infty^+ = \int_0^5 \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr}} + \int_5^{30} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t}(0,2y^+ - 1)} + \int_{u_{30}^+}^{u_\infty^+} Pr_t du^+ \quad (6.172)$$

où $u_{30}^+ = 2,5 \ln(30) + 5,5 \cong 14$.

Le calcul des trois intégrales du membre de droite conduit à

a)

$$\int_0^5 \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr}} = Pr \, y^+ \Big|_0^5 = 5Pr$$

b) On pose

$$z^+ = \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t}(0,2y^+ - 1) \quad , \quad dz^+ = \frac{1}{5Pr_t} dy^+ \quad , \quad dy^+ = 5Pr_t dz^+$$

$$\int_5^{30} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t}(0,2y^+ - 1)} = \int_{\frac{1}{Pr}}^{\frac{1}{Pr} + \frac{5}{Pr_t}} \frac{dz^+}{z^+} = 5Pr_t \left(\ln\left[\frac{1}{Pr} + \frac{5}{Pr_t}\right] - \ln\left[\frac{1}{Pr}\right] \right) = 5Pr_t \ln\left(5 \frac{Pr}{Pr_t} + 1\right)$$

c)

$$\int_{u_{30}^+}^{u_{\infty}^+} Pr_t du^+ = Pr_t(u_{\infty}^+ - u_{30}^+) = Pr_t(u_{\infty}^+ - 14) = Pr_t \left[\left(\frac{2}{C_{f,x}} \right)^{1/2} - 14 \right]$$

et donc

$$\Delta T_{\infty}^+ = 5 Pr + 5 Pr_t \ln \left(5 \frac{Pr}{Pr_t} + 1 \right) + Pr_t \left[\left(\frac{2}{C_{f,x}} \right)^{1/2} - 14 \right] \quad (6.173)$$

et

$$St_x = \frac{\left(\frac{C_{f,x}}{2} \right)^{1/2}}{5 Pr + 5 Pr_t \ln \left(5 \frac{Pr}{Pr_t} + 1 \right) + Pr_t \left[\left(\frac{2}{C_{f,x}} \right)^{1/2} - 14 \right]} \quad (6.174)$$

Les trois termes du dénominateur représentent les trois résistances thermiques en série correspondant aux trois régions composant la couche limite thermique.

Cette relation montre que le nombre de Stanton (et donc le transfert de chaleur) augmente avec le coefficient de frottement. Elle montre aussi que $St_x = C_{f,x}/2$ si $Pr = Pr_t = 1$, résultat qui pourrait être obtenu directement à partir de l'analogie de Reynolds.

Relations empiriques

Analogie de Chilton-Colburn :

$$St_x = \frac{C_{f,x}}{2} Pr^{-2/3} \quad \text{pour} \quad Pr \geq 0,5 \quad (6.175)$$

et donc

$$Nu(x) = 0,0291 Pr^{1/3} Re_x^{0,8} \quad (6.176)$$

Si l'écoulement est laminaire jusqu'à l'abscisse x telle que $Re_x = 5.10^5$, le nombre de Nusselt moyen a pour expression

$$\overline{Nu} = 0,037 Pr^{1/3} [Re_L^{0,8} - 15500] \quad (6.177)$$

où L est la longueur totale de la paroi.

6.5 Exercices

EXERCICE 1 : *Convection forcée sur une plaque plane*

Du gaz carbonique à la température $T_\infty = 400K$ est réchauffé en s'écoulant avec une vitesse $V_\infty = 60m/s$ sur une paroi plane maintenue dès le bord d'attaque à une température $T_w = 600K$ par une succession de six éléments chauffants de $4cm$ de large (Fig. 6.7) et de longueur $l = 16cm$ dans la direction transverse à l'écoulement. La face inférieure de la paroi est isolée et elle n'est chauffée que sur une partie de sa longueur (Fig. 6.7).

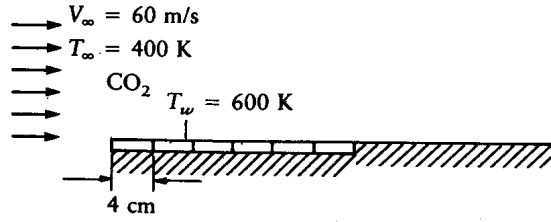


FIGURE 6.7 – Plaque plane chauffée près du bord d'attaque.

La plaque étant lisse, la transition au régime turbulent s'effectue lorsque que le nombre de Reynolds local atteint la valeur $Re_{cr} = 5.10^5$. En régime laminaire, le nombre de Nusselt **moyen** entre $x = 0$ (bord d'attaque) et une distance x_1 quelconque est donné par la corrélation :

$$\overline{Nu}_{x_1} = 0,664Re_{x_1}^{1/2}Pr^{1/3} \quad (6.1)$$

Si le régime est laminaire lorsque $0 \leq x \leq x_{cr}$ et turbulent en $x_1 > x_{cr}$, le nombre de Nusselt **moyen** est donné par

$$\overline{Nu}_{x_1} = [0,0359Re_{x_1}^{4/5} - 830]Pr^{1/3} \quad (6.2)$$

- 1)- Calculer la distance x_{cr} correspondant à la transition laminaire-turbulent.
- 2)- Montrer que le flux de chaleur transféré entre $x = 0$ et $x = x_1 \leq x_{cr}$ sur la largeur l de la paroi peut s'écrire :

$$Q_{x_1} = C_l x_1^{1/2} \quad (6.3)$$

où C_l est une constante à déterminer. En déduire que le flux transféré en régime laminaire entre x_1 et x_2 a pour expression :

$$Q_{x_1-x_2} = Q_{x_2} - Q_{x_1} = C_l(x_2^{1/2} - x_1^{1/2}) \quad (6.4)$$

- 3)- Montrer que le flux de chaleur transféré entre $x = 0$ et $x = x_1 > x_{cr}$ sur la largeur l de la paroi peut s'écrire :

$$Q_{x_1} = C_{t_1}[C_{t_2}x_1^{4/5} - 830] \quad (6.5)$$

où C_{t_1} et C_{t_2} sont deux constantes à déterminer. En déduire que le flux transféré entre $x_1 > x_{cr}$ et $x_2 > x_{cr}$ a pour expression :

$$Q_{x_1-x_2} = Q_{x_2} - Q_{x_1} = C_{t_1}C_{t_2}[x_2^{4/5} - x_1^{4/5}] \quad (6.6)$$

4) Application numérique : Calculer les flux transférés sur chacun des six éléments chauffants (ce sont aussi les puissances électriques qu'il faut leur apporter pour les maintenir à $T_p = 600K$) et représenter graphiquement les variations de $Q_{x-x+\Delta x}$ en fonction de x (ici $\Delta x = 4cm$).

Propriétés du gaz carbonique à la température de film $T_f = 500K$:

$$\rho = 1,0732kg/m^3, C_p = 1013J/kg.K, \nu = 21,67.10^{-6}m^2/s, k = 0,0335W/m.K, Pr = 0,702$$

EXERCICE 2 : *Convection forcée sur une plaque plane chauffée après le bord d'attaque.*

Une plaque plane chauffée à une température uniforme T_p à partir d'une distance x_0 du bord d'attaque est refroidie par l'écoulement d'un fluide dont la température au loin est T_∞ (Figure 1). La théorie d'veloppée en cours doit être modifiée car la couche limite thermique débute en $x = x_0$ alors que la couche limite dynamique débute en $x = 0$.

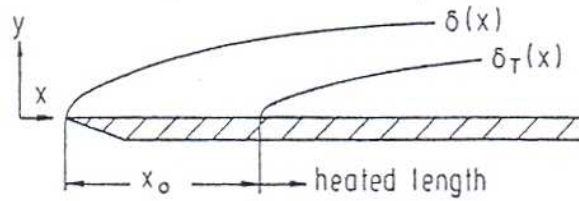


FIGURE 6.8 – Convection forcée sur une plaque plane chauffée après le bord d'attaque.

L'équation intégrale de l'énergie s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} u(T - T_\infty) dy = -a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 \quad (6.1)$$

Les profils de vitesses et de température sont approximés par les profils cubiques :

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^3 \quad \text{si } x > 0 \quad (6.2)$$

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right)^3 \quad \text{si } x > x_0 \quad (6.3)$$

où $\delta(0) = 0$, $\theta = (T - T_p)/(T_\infty - T_p)$ et $\delta_T(x_0) = 0$.

a)- Si $\delta_T < \delta$, montrer que $\delta_T(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left[\delta \left(\frac{1}{10} \frac{\delta_T^2}{\delta^2} - \frac{1}{140} \frac{\delta_T^4}{\delta^4} \right) \right] = \frac{a}{u_\infty} \frac{1}{\delta_T} \quad (6.4)$$

b)- On pose $\Delta = \frac{\delta_T}{\delta}$ où $\delta = c_0 x^{1/2}$ avec $c_0 = (280/13)^{1/2} (\nu/u_\infty)^{1/2}$ (cf. cours sur la couche limite dynamique).

Montrer que si $(\delta_T/\delta)^4$ est négligeable devant $(\delta_T/\delta)^2$ l'équation (4) se ramène à la forme :

$$\Delta x^{1/2} \frac{d}{dx} (\Delta^2 x^{1/2}) = \frac{13}{28Pr} \quad (6.5)$$

En introduisant la variable $Z = \Delta^3$, l'équation (5) devient (ne pas démontrer l'équation (6)) :

$$\frac{4}{3}x \frac{dZ}{dx} + Z = \frac{13}{14Pr} \quad (6.6)$$

dont la solution générale est :

$$Z = C_1 x^{-3/4} + \frac{13}{14Pr} \quad (6.7)$$

En déduire que :

$$C_1 = -\frac{13}{14} \frac{1}{Pr} x_0^{3/4} \text{ puis que } \Delta = \left(\frac{13}{14Pr}\right)^{1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3} \quad (6.8)$$

c)- Donner l'expression du nombre de Nusselt local.

Rappels

$$\frac{\delta}{x} = 4,64 Re_x^{-1/2} \quad , \quad Nu(x) = \frac{3}{2} \frac{x}{\delta_T} \quad (6.9)$$

si les profils de vitesse et de température sont approximés par des polynômes du 3^{ème} degré.

EXERCICE 3 : *Convection forcée en régime turbulent*

On considère un écoulement de couche limite turbulente sur une plaque plane isotherme à température T_p . L'écoulement est turbulent dès le bord d'attaque. On suppose que les propriétés physiques du fluide sont constantes et que les profils de vitesse et de température peuvent être représentés par

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{et} \quad \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = 1 - \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{1/7} \quad (6.1)$$

où δ et δ_t sont les épaisseurs des couches limites dynamique et thermique. En régime turbulent, la forme intégrale de l'équation de l'énergie peut s'écrire

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(T - T_\infty) dy = \frac{h}{\rho c_p} (T_p - T_\infty) \quad (6.2)$$

a)- On pose $\Lambda = \delta_t/\delta$. Montrer que l'équation intégrale de l'énergie se ramène à l'équation différentielle suivante

$$u_\infty \frac{d}{dx} \left(\frac{7}{72} \delta \Lambda^{8/7} \right) = \frac{h}{\rho c_p} \quad (6.3)$$

b)- On suppose que $\Lambda = 1$ (ou $Pr = 1$) et l'expérience montre que $\delta/x = 0,376 Re_x^{-1/5}$. En déduire que

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = 0,0292 Re_x^{4/5} Pr \quad (6.4)$$

c)- Calculer le nombre de Nusselt moyen sur la longueur L de la paroi.

d)- **Application numérique :**

De l'air sec à $T_\infty = 290 K$ et à pression atmosphérique s'écoule à la vitesse $u_\infty = 5 m/s$ sur une surface isotherme à $T_p = 300 K$ dont la longueur est $L = 10 m$ et la largeur $l = 2 m$.

Calculer le flux de chaleur transféré par convection.

Propriétés de l'air à $T_\infty = 290 K$: $Pr = 0,7$ $\nu = 16 \cdot 10^{-6} m^2/s$ $k = 0,026 W/m.K$

EXERCICE 4 : Convection forcée autour d'une sphère.

Une balle de diamètre $D = 7 \text{ cm}$ à la température $T_s = 30^\circ\text{C}$ est lancée à une vitesse $U = 20 \text{ m/s}$ dans de l'air à la température $T_a = 20^\circ\text{C}$.

1a)- Dans cette question, la température de la balle est supposée constante au cours de son déplacement. Calculer le flux de chaleur échangé entre la surface de la balle et l'air ambiant.

Utiliser la corrélation

$$Nu_D = 2 + (0,4Re_D^{1/2} + 0,06Re_D^{2/3})Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_a}{\mu_s} \right)^{1/4} \quad (6.1)$$

Données : $\mu_a = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$, $\mu_s = 1,86 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$, $\rho_a = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $k_a = 0,025 \text{ W/m.K}$, $Pr = 0,71$

1b)- La balle parcourt une distance $L = 20 \text{ m}$ au cours de laquelle sa température de surface décroît sur une profondeur estimée à $\delta = \sqrt{at}$, où a est la diffusivité thermique du matériau constituant la balle. Le flux de chaleur échangé avec l'air produit un refroidissement de l'ordre de ΔT_s sur une épaisseur δ au voisinage de la surface de la balle. Calculer ΔT_s et conclure sur l'hypothèse introduite dans la question 1a (température de surface constante)

Données : masse volumique, chaleur massique et diffusivité thermique du matériau constituant la balle : $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$, $C = 1500 \text{ J/kg.K}$, $a = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

EXERCICE 5 : Convection forcée sur une plaque plane chauffée à une distance x_0 du bord d'attaque.

De l'air à T_∞ et à pression atmosphérique s'écoule sur une plaque plane de longueur L à une vitesse u_∞ . La plaque est à la température de l'air ambiant du bord d'attaque jusqu'à une distance x_0 (c-à-d $T_p = T_\infty$ pour $0 \leq x_0$). A partir de x_0 , sa température est maintenue à $T_p > T_\infty$.

Une façon simple de calculer le flux transféré sur la section chauffée consiste à modifier l'expression du nombre de Nusselt obtenu pour une plaque isotherme. Une théorie approchée conduit à l'expression suivante du nombre de Nusselt local :

$$Nu_x = \frac{0.331 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 - (x_0/x)^{3/4}]^{1/3}} \quad (6.1)$$

a) Calculer le flux transféré par unité de largeur, soit :

$$Q = \int_0^L h(x)(T_p - T_\infty)dx \quad (\text{W/m}) \quad (6.2)$$

note : pour calculer l'intégrale, poser $u = x^{3/4} - x_0^{3/4}$

Vérifier que la relation obtenue pour Q est exactement celle obtenue pour une plaque plane chauffée dès le bord d'attaque ($x_0 = 0$).

b) Application numérique $L = 20 \text{ cm}$, $x_0 = 5 \text{ cm}$, $u_\infty = 2 \text{ m/s}$, $T_\infty = 300 \text{ K}$, $T_p = 330 \text{ K}$.

Propriétés de l'air à pression atmosphérique et à $T_f = 315 \text{ K}$: $k = 0,0278 \text{ W/m.K}$, $Pr = 0.69$, $\nu = 1,7 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

6.6 Annexe

FONCTION D'ERREUR

La fonction d'erreur est définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$$

Dérivée première :

$$\frac{d(\operatorname{erf})}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Développement en série :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

ce qui montre que

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$$

Pour de faibles valeurs de x , le développement en série de $\operatorname{erf}(x)$ s'écrit

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{3 \times 1!} + \frac{x^5}{5 \times 2!} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \dots \right]$$

et pour de grandes valeurs de x

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \times 3}{(2x^2)^3} + \dots (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{(2x^2)^3} \right]$$

La fonction d'erreur peut être calculée numériquement avec une erreur inférieure à $2,5 \cdot 10^{-5}$ en utilisant l'approximation suivante :

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) e^{-x^2} + \varepsilon(x)$$

avec $|\varepsilon(x)| \leq 2,5 \cdot 10^{-5}$

$$t = \frac{1}{1 + 0,47047x}$$

$$a_1 = 0,3480242$$

$$a_2 = -0,0958798$$

$$a_3 = 0,7478556$$

Fonction d'erreur complémentaire :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

Aux grandes valeurs de x , le développement en série de $\operatorname{erfc}(x)$ est

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \times 3}{(2x^2)^3} + \dots (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots (2n-1)}{(2x^2)^3} \right]$$

ce qui signifie que le produit $e^{x^2} \operatorname{erfc}(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$
0.00	0.00000	0.76	0.71754	1.52	0.96841
0.02	0.02256	0.78	0.73001	1.54	0.97059
0.04	0.04511	0.80	0.74210	1.56	0.97263
0.06	0.06762	0.82	0.75381	1.58	0.97455
0.08	0.09008	0.84	0.76514	1.60	0.97635
0.10	0.11246	0.86	0.77610	1.62	0.97804
0.12	0.13476	0.88	0.78669	1.64	0.97962
0.14	0.15695	0.90	0.79691	1.66	0.98110
0.16	0.17901	0.92	0.80677	1.68	0.98249
0.18	0.20094	0.94	0.81627	1.70	0.98379
0.20	0.22270	0.96	0.82542	1.72	0.98500
0.22	0.24430	0.98	0.83423	1.74	0.98613
0.24	0.26570	1.00	0.84270	1.76	0.98719
0.26	0.28690	1.02	0.85084	1.78	0.98817
0.28	0.30788	1.04	0.85865	1.80	0.98909
0.30	0.32863	1.06	0.86614	1.82	0.98994
0.32	0.34913	1.08	0.87333	1.84	0.99074
0.34	0.36936	1.10	0.88020	1.86	0.99147
0.36	0.38933	1.12	0.88679	1.88	0.99216
0.38	0.40901	1.14	0.89308	1.90	0.99279
0.40	0.42839	1.16	0.89910	1.92	0.99338
0.42	0.44749	1.18	0.90484	1.94	0.99392
0.44	0.46622	1.20	0.91031	1.96	0.99443
0.46	0.48466	1.22	0.91553	1.98	0.99489
0.48	0.50275	1.24	0.92050	2.00	0.99532
0.50	0.52050	1.26	0.92524	2.10	0.997020
0.52	0.53790	1.28	0.92973	2.20	0.998137
0.54	0.55494	1.30	0.93401	2.30	0.998857
0.56	0.57162	1.32	0.93806	2.40	0.999311
0.58	0.58792	1.34	0.94191	2.50	0.999593
0.60	0.60386	1.36	0.94556	2.60	0.999764
0.62	0.61941	1.38	0.94902	2.70	0.999866
0.64	0.63459	1.40	0.95228	2.80	0.999925
0.66	0.64938	1.42	0.95538	2.90	0.999959
0.68	0.66378	1.44	0.95830	3.00	0.999978
0.70	0.67780	1.46	0.96105	3.20	0.999994
0.72	0.69143	1.48	0.96365	3.40	0.999998
0.74	0.70468	1.50	0.96610	3.60	1.000000

Tableau de valeurs de la fonction d'erreur

Chapitre 7

Convection interne

7.1 Introduction

Les écoulements dans les conduites avec transfert de chaleur fluide/paroi interviennent dans toutes les machines thermiques et dans presque tous les équipements thermiques et, plus généralement, dès qu'un fluide circule dans une conduite car il est rare que le fluide, la conduite et son environnement soient à la même température.

L'étude de la dynamique des écoulements est un préalable à celle des transferts convectifs, du moins tant que les variations de la viscosité et de la masse volumique avec la température jouent un effet secondaire sur l'organisation de l'écoulement.

Rappels

Compte tenu de la diversité possible des géométries et des conditions d'échanges fluide/paroi, il n'est pas envisageable de présenter une analyse exhaustive du problème. On se limitera donc à des configurations qui, bien que très simples, ont le mérite de mettre en exergue quelques-unes des principales questions qui se posent au concepteur d'une installation thermique.

Imaginons une conduite rectiligne assurant une liaison entre un réservoir A à température T_A et pression p_A et un réservoir B à température T_B et pression p_B , avec p_A et p_B constantes (c'est ce qui se passe lorsqu'un robinet d'eau est ouvert : p_A pression de distribution, p_B pression atmosphérique). Les lois de la mécanique des fluides visqueux permettent de calculer le débit du fluide si la longueur et la section de la conduite sont connues. En préalable au calcul, il faut se poser les deux questions suivantes :

- l'écoulement est-il identique d'un bout à l'autre de la conduite ?
- est-ce que l'écoulement est laminaire ou turbulent ?

La réponse à la première question peut être apportée à travers la notion de "longueur d'établissement du régime dynamique". Le régime d'écoulement est établi lorsque le profil de vitesse axiale est invariant, c'est-à-dire indépendant de la position d'une section d'observation. La circulation du fluide s'effectue alors parallèlement aux parois et à vitesse uniforme. Il n'y a donc pas de variation de quantité de mouvement en régime dynamique établi et la somme des forces agissant sur une particule fluide est nulle. Si l'effet des forces de volume est négligeable, le mouvement résulte d'un équilibre entre forces de pression et de viscosité.

La réponse à la deuxième question est déduite de la valeur du nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique, $D_h = 4S/P_m$ où P_m est le périmètre mouillé, et la vitesse moyenne, u_m , du fluide dans la

section droite d'aire S (ou vitesse débitante) :

$$Re_{Dh} = \frac{\rho u_m D_h}{\mu} \quad \text{ou} \quad Re_{Dh} = \frac{4\dot{m}}{\mu P_m} \quad (7.1)$$

Pour une conduite à paroi lisse, on admet que l'écoulement reste laminaire tant que Re_{Dh} est inférieur à $Re_c \approx 2000$. L'écoulement peut être supposé pleinement turbulent si $Re_{Dh} > 5000$. Cependant, l'état de surface des parois (rugosités) et les conditions suivant lesquelles le fluide entre dans la conduite ("conditions d'entrée") influent fortement sur la valeur du nombre de Reynolds correspondant à la fin du régime laminaire.

Transfert de chaleur fluide/paroi.

Ayant caractérisé l'écoulement, on peut s'occuper du problème thermique. Il faut alors commencer par se poser les deux questions suivantes :

a) Quelles sont les conditions d'échanges entre le fluide et la paroi de la conduite ?

Si l'on veut utiliser les résultats de la littérature, le choix est presque invariablement entre flux d'échange uniforme et température de paroi uniforme. La réalité physique étant généralement entre ces deux extrêmes, il faut choisir le plus réaliste des deux.

b) Peut-on calculer un coefficient d'échange thermique qui soit représentatif des conditions d'échanges sur presque toute la longueur de la paroi ou, au moins, sur des morceaux de longueur significatifs ?

La réponse à cette seconde question doit être basée sur le calcul de la "longueur d'établissement du régime thermique". En régime thermique établi, le coefficient d'échange local est constant : il ne dépend pas de la position axiale.

note : le régime thermique ne peut pas être établi si le régime dynamique ne l'est pas.

7.1.1 Définition du coefficient d'échange thermique

Pour simplifier, on considère une conduite rectiligne plane ou une conduite à section circulaire d'axe Ox . La loi de Newton définit le coefficient d'échange entre le fluide et la paroi à température $T_p(x)$ par la relation :

$$q_p(x) = h(x)(T_p(x) - T_m(x)) \quad (W/m^2) \quad (7.2)$$

où $h(x)$ est strictement positif et $T_m(x)$ est la température moyenne débitante à travers la section S de la conduite. $T_m(x)$ est définie à partir du débit d'enthalpie axial

$$\begin{aligned} \dot{H}(x) &= \int_S \rho u C_p T dS \\ &= \dot{m} C_p T_m(x) \end{aligned} \quad (7.3)$$

d'où

$$T_m(x) = \frac{\int_S \rho u C_p T dS}{\dot{m} C_p} \quad (7.4)$$

Pour un écoulement incompressible, ρ et C_p sont des propriétés du fluide (supposées ici constantes) et donc

$$T_m(x) = \frac{\int_S u T dS}{\dot{m}/\rho} = \frac{1}{u_m S} \int_S u T dS \quad (7.5)$$

Exemple : pour un tube

$$T_m(x) = \frac{2}{u_m R^2} \int_0^R u T r dr \quad (7.6)$$

où $u = u(r)$ en régime dynamique établi.

Le flux de chaleur transféré entre le fluide et la paroi par conduction thermique est

$$q_p(x) = k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \quad (7.7)$$

et donc

$$h(x) = \frac{k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R}{(T_p(x) - T_m(x))} \quad (7.8)$$

Le calcul du coefficient d'échange nécessite donc les calculs

- a) de la distribution de température dans le fluide
- b) de la température moyenne débitante.

Définition : Le régime thermique est dit **établi** si la différence de température adimensionnelle définie par

$$\theta = \frac{T_p(x) - T(M)}{T_p(x) - T_m(x)} \quad (7.9)$$

est indépendante de x . Soit pour une conduite circulaire :

$$\theta = \frac{T_p(x) - T(x, r)}{T_p(x) - T_m(x)} = f(r) \quad (7.10)$$

En conséquence, en régime thermique établi

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial r}}{(T_p(x) - T_m(x))} = f'(r) \quad (7.11)$$

et donc

$$h = -k \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_R = -k f'(R) \quad (7.12)$$

ce qui montre que le coefficient d'échange défini par l'équation 7.8 est indépendant de x en régime établi.

Conditions thermiques sur la paroi

Pour calculer le coefficient d'échange, on va distinguer les deux cas limites :

- 1) La distribution de température sur la paroi, $T_p(x)$, est connue et fixée. On supposera dans la suite que $T_p(x) = T_p = Cste$. On a alors

$$q_p(x) = h(x)(T_p - T_m(x)) \quad (7.13)$$

et en régime établi

$$q_p(x) = h(T_p - T_m(x)) \quad (7.14)$$

- 2) Le flux de chaleur est imposé sur la paroi, soit $q_p = cste$. On a alors

$$q_p = h(x)(T_p(x) - T_m(x)) \quad (7.15)$$

et en régime établi

$$\frac{q_p}{h} = (T_p(x) - T_m(x)) = cste \quad (7.16)$$

La forme adimensionnelle du coefficient d'échange local est le nombre de Nusselt local basé sur le diamètre hydraulique. Soit

$$Nu(x) = \frac{h(x)D_h}{k} \quad (7.17)$$

On montrera dans la suite que $Nu(x) = f(Re_{D_h}, Pr, x/D_h)$.

La forme adimensionnelle du coefficient d'échange moyen entre les sections $x = 0$ et x est le nombre de Nusselt moyen

$$\overline{Nu}_x = \frac{\overline{h}_x D_h}{k} \quad (7.18)$$

avec

$$\overline{h}_x = \frac{1}{x} \int_0^x h(\xi) d\xi \quad \text{coefficient d'échange moyen entre 0 et } x \quad (7.19)$$

En régime établi $Nu(x) = Nu = cste$ puisque $h = cste$. En pratique, on considère que le régime thermique est établi à partir d'une abscisse x_T si $Nu(x_T) = 1,05 Nu(x \rightarrow \infty)$.

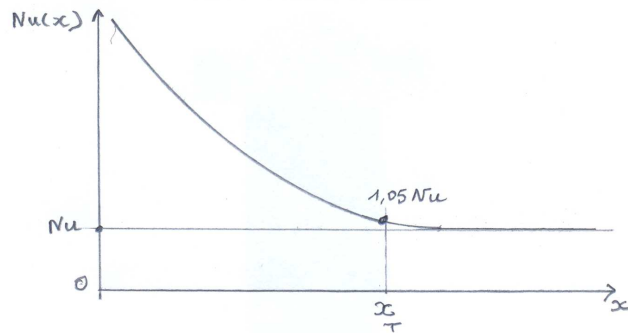


FIGURE 7.1 – Variation du nombre de Nusselt local dans la direction axiale.

Notes :

- 1- Ne pas confondre \overline{Nu}_x et $Nu = \lim_{x \rightarrow \infty} Nu(x)$.
- 2- Pour les écoulements internes, les nombres de Reynolds et de Nusselt sont basés sur le diamètre hydraulique. Pour les écoulements externes, ils sont basés sur une coordonnée tangentielle liée à la paroi (par exemple, x dans le cas d'une plaque plane, cf. chapitre 6) : on définit alors un nombre de Reynolds local parce que l'écoulement ne peut jamais être établi.
- 3- Il n'y a pas de nombre de Reynolds local pour les écoulements internes si le diamètre hydraulique est constant (en pratique, si la forme de la conduite est invariante). Par contre, si le débit massique est toujours constant dans une conduite à parois imperméables (que l'écoulement soit compressible ou incompressible), le nombre de Reynolds peut varier dans la direction axiale si le profil de la section est modifié (Eq.7.1).

7.2 Bilan thermique

Les variations de la température moyenne débitante le long de la conduite peuvent être exprimées à partir de la forme intégrale de l'équation de l'énergie. Les calculs qui suivent sont valables en régime laminaire et en régime turbulent (en remplaçant k par $k + k_t$), non établis ou établis. Afin de simplifier la démonstration, les calculs sont effectués dans le cas d'une conduite à section rectangulaire

dont la section de passage du fluide a pour aire $S_p = e \times W$ (e étant la distance entre les deux parois chauffées/refroidies et W la largeur de la conduite). On suppose que les parois latérales (en $z = 0$ et $z = W$) sont adiabatiques et que toutes les parois sont imperméables ($\vec{V} = 0$ sur les quatre parois de la conduite rectangulaire). Ces calculs sont généralisables à tout type de conduite.

7.2.1 Élément différentiel

On part de l'équation de l'énergie pour un écoulement incompressible et stationnaire de direction principale x (avec C_p et k indépendantes de la température) que l'on intègre sur un volume élémentaire $d\Omega$ de longueur dx ($d\Omega = S_p \times dx$). La surface de contact fluide-paroi est donc $dS = 2dx(W + e)$.

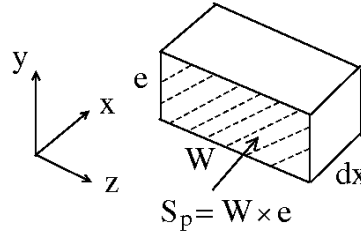


FIGURE 7.2 – Bilan thermique sur un volume élémentaire cartésien $d\Omega = e \times W \times dx$.

Si la production volumique de chaleur est nulle (dissipation de chaleur due aux frottements visqueux négligeable, pas de source interne de chaleur), l'intégration de l'équation de l'énergie dans $d\Omega$ s'écrit :

$$\int_{d\Omega} \rho C_p \nabla \cdot (\vec{V} T) d\Omega = - \int_{d\Omega} \nabla \cdot \vec{q} d\Omega \quad \Rightarrow \quad \rho C_p \int_{dS} T \vec{V} \cdot \vec{n} dS = - \int_{dS} \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (7.20)$$

où $dS = 2(eW + Wdx + e dx)$. Sur les parois imperméables ($y = 0$, e et $0 \leq z \leq W$, $z = 0$, W et $0 \leq y \leq e$), $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$. Dans les sections de passage situées en x et $x + dx$, $\vec{V} \cdot \vec{n} = u(\vec{i} \cdot \vec{n}_x)$ (\vec{i} désignant le vecteur unitaire porté par l'axe des x et \vec{n}_x la normale, dirigée vers l'extérieur, aux sections de passage et colinéaire à l'axe des x). D'où :

$$\begin{aligned} \int_{dS} T \vec{V} \cdot \vec{n} dS &= 2 \int_{S_p} T \vec{V} \cdot \vec{n} dS_p = - \int_{S_p} u T dS_p \Big|_x + \int_{S_p} u T dS_p \Big|_{x+dx} \\ &= \frac{d}{dx} \left[\int_{S_p} u T dS_p \right] dx \\ &= u_m S_p \frac{dT_m}{dx} dx \end{aligned} \quad (7.21)$$

où u_m est la vitesse débitante et $T_m(x)$ est la température moyenne débitante. Finalement :

$$\rho C_p \int_{S_p} T \vec{V} \cdot \vec{n}_x dS = \rho C_p u_m S_p \left[\frac{dT_m}{dx} \right] dx \quad (7.22)$$

Si les parois en $z = 0$ et $z = W$ sont adiabatiques, le bilan des flux de chaleur traversant les 4 autres

surfaces de $d\Omega$ s'écrit :

$$-\int_{dS} \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} q_{p,1} dx dz + \int_{S_2} q_{p,2} dx dz + \int_{S_p} k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x dy dz - \int_{S_p} k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} dy dz \quad (7.23)$$

où les indices 1 et 2 désignent les parois situées en $y = 0$ et en $y = e$. $q_{p,1}$ et $q_{p,2}$ sont les densités uniformes de flux de chaleur apportées/soustraites au fluide sur les deux surfaces élémentaires d'aire $S_1 = S_2 = W \times dx$. En égalisant les membres de gauche (Eq. 7.22) et de droite (Eq. 7.23) de l'équation de l'énergie, on en déduit que

$$\rho C_p u_m S_p \left[\frac{dT_m}{dx} \right] = (q_{p,1} + q_{p,2})W + \left(\int_{S_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \right) \right) \quad (7.24)$$

Ce bilan thermique indique que la variation du flux d'enthalpie entre x et $x + dx$ est égale à la somme du flux de chaleur apporté au fluide depuis les parois (quelles que soient les conditions thermiques appliquées sur les parois) et du flux de conduction au sein du fluide dans la direction axiale. Ce flux de conduction axial existe toujours, même s'il est généralement faible devant le flux apporté depuis les parois (voir la discussion dans la suite).

7.2.2 Bilan global sur le volume d'une conduite à section rectangulaire (largeur e , longueur L , profondeur W).

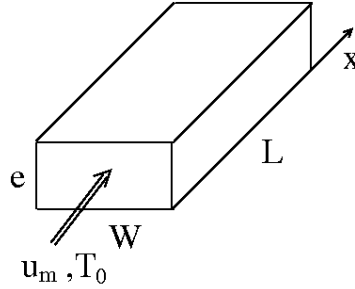


FIGURE 7.3 – Bilan thermique sur le volume $\Omega = e \times W \times L$ d'une conduite plane de section $S_p = e \times W$.

On suppose que le fluide entre dans la conduite à la température uniforme T_0 avec une vitesse débitante u_0 . Pour un écoulement incompressible $u_m = u_0$. Si de plus C_p est constante, on peut écrire

$$\rho C_p \int_{S_p} T \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \rho C_p S_p u_0 [T_m(L) - T_0] \quad (7.25)$$

Si les conditions thermiques sont les mêmes sur les parois S_1 et S_2 situées en $y = 0$ et $y = e$ et si les parois en $z = 0$ et $z = W$ sont adiabatiques, on a :

$$-\int_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS = -2k \int_{S_1} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx dz + k \int_{S_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy dz - k \int_{S_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} dy dz \quad (7.26)$$

Le bilan thermique global s'écrit donc :

$$\rho C_p S_p u_m [T_m(L) - T_0] = -2k \int_{S_1} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx dz + k \int_{S_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy dz - k \int_{S_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} dy dz \quad (7.27)$$

a) Flux uniforme q_p imposé sur les deux parois S_1 et S_2 :

Dans ce cas (aire de S_1 égale à l'aire de S_2)

$$-2k \int_{S_1} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx dz = 2q_p S_1 \quad (7.28)$$

b) Température uniforme T_p imposée sur les deux parois S_1 et S_2 :

Dans ce cas (aire de S_1 égale à l'aire de S_2)

$$-2k \int_{S_1} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx dz = 2 \int_{S_1} h(x, z) [T_p - T_m(x)] dx dz \quad (7.29)$$

Dans les deux paragraphes qui suivent, on suppose que la vitesse débitante est suffisamment grande pour que le flux de conduction axial soit négligeable. Dans la littérature courante, cette approximation est le plus souvent admise dans les calculs des flux de chaleur transférés par convection. En conséquence le bilan (Eq. 7.27) se réduit à :

$$\rho C_p S_p u_m [T_m(L) - T_0] = 2q_p S_1 \quad \text{flux imposé} \quad (7.30)$$

ou

$$\rho C_p S_p u_m [T_m(L) - T_0] = 2 \int_{S_1} h(x, z) [T_p - T_m(x)] dx dz \quad \text{température imposée} \quad (7.31)$$

7.2.3 Flux de chaleur imposé sur la paroi de la conduite (diffusion axiale négligeable).

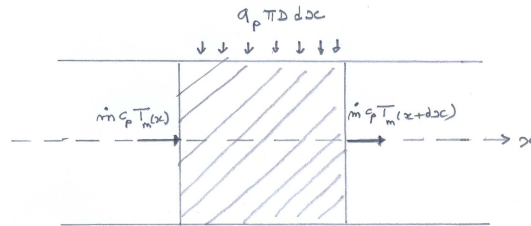


FIGURE 7.4 – Bilan thermique entre x et $x + dx$.

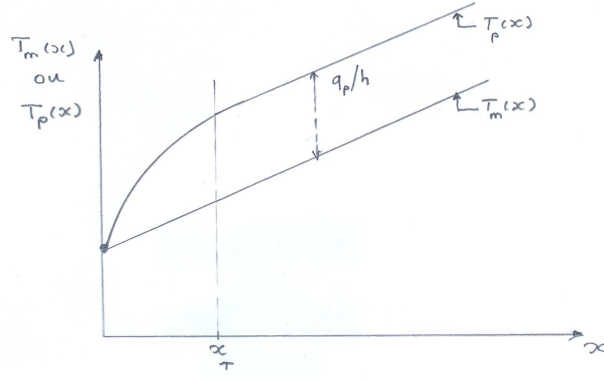


FIGURE 7.5 – Variations de la température moyenne débitante et de la température de la paroi.

On considère ici une conduite à section quelconque dont le périmètre mouillé est P_m et la longueur L (surface d'échange $S_e = P_m L$).

La variation du débit d'enthalpie entre x et $x + dx$ (Fig. 7.4) est due à l'apport de chaleur sur la surface $P_m dx$ soit

$$\dot{m}C_p T_m(x + dx) - \dot{m}C_p T_m(x) = q_p P_m dx \quad (7.32)$$

d'où

$$\dot{m}C_p \frac{dT_m}{dx} = q_p P_m \quad \text{avec} \quad T_m(0) = T_e \quad (7.33)$$

T_e étant la température moyenne d'entrée du fluide dans la conduite. On obtient immédiatement

$$T_m(x) = T_e + \frac{q_p P_m}{\dot{m}C_p} x \quad (7.34)$$

La température moyenne débitante varie donc linéairement dès l'entrée de la conduite. En **régime thermique établi** ($x > x_T$), l'écart de température $T_p(x) - T_m(x)$ est constant (cf. Eq. 7.16) et la température de la paroi varie linéairement (Fig. 7.5) :

$$T_p(x) = T_m(x) + \frac{q_p}{h} = T_e + \frac{q_p}{h} + \frac{q_p P_m}{\dot{m}C_p} x \quad (7.35)$$

7.2.4 Température de paroi imposée (diffusion axiale négligeable).

Le bilan thermique entre x et $x + dx$ s'écrit maintenant

$$\dot{m}C_p \frac{dT_m}{dx} = h(x)[T_p - T_m(x)]P_m \quad (7.36)$$

En posant $\Delta T(x) = T_p - T_m(x)$, ce bilan devient

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\frac{P_m}{\dot{m}C_p} h(x) dx \quad (7.37)$$

Soit en intégrant entre $x = 0$ et x

$$\ln[\Delta T(x)] - \ln[\Delta T_e] = -\frac{P_m}{\dot{m}C_p} \int_0^x h(\xi) d\xi \quad \text{avec} \quad \Delta T_e = T_p - T_e \quad (7.38)$$

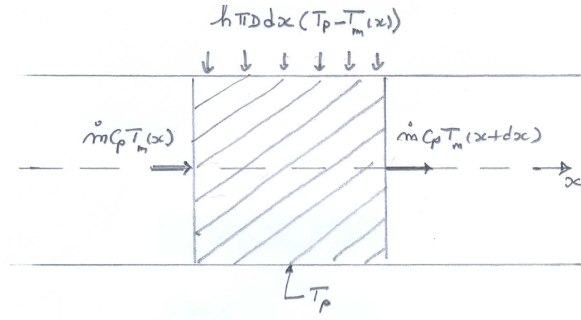


FIGURE 7.6 – Bilan thermique entre x et $x + dx$.

ou

$$\ln \left[\frac{\Delta T(x)}{\Delta T_e} \right] = -\frac{P_m \bar{h}_x x}{\dot{m} C_p} \quad \text{avec} \quad \bar{h}_x = \frac{1}{x} \int_0^x h(\xi) d\xi \quad (7.39)$$

et donc

$$\Delta T(x) = \Delta T_e e^{-\alpha_x x} \quad \text{avec} \quad \alpha_x = \frac{P_m \bar{h}_x}{\dot{m} C_p} \quad (7.40)$$

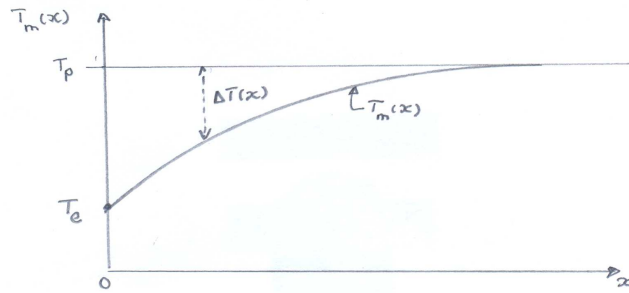


FIGURE 7.7 – Variation de la température moyenne débitante.

Le flux total échangé entre la section d'entrée et la section de sortie, située en $x = L$, est

$$\Phi = \dot{m} C_p (T_s - T_e) \quad (7.41)$$

avec, d'après (7.39)

$$\dot{m} C_p = -\frac{(P_m L) \bar{h}_L}{\ln(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e})} \quad (7.42)$$

On en déduit que

$$\Phi = -\bar{h}_L S_e \frac{T_s - T_e}{\ln(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e})} = \bar{h}_L S_e \frac{[(T_p - T_s) - (T_p - T_e)]}{\ln(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e})} = \bar{h}_L S_e \frac{[\Delta T_s - \Delta T_e]}{\ln(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e})} \quad (7.43)$$

On pose

$$\Delta T_{ml} = \frac{[\Delta T_s - \Delta T_e]}{\ln(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e})} = \frac{[\Delta T_e - \Delta T_s]}{\ln(\frac{\Delta T_e}{\Delta T_s})} \quad (7.44)$$

ΔT_{ml} est appelée moyenne logarithmique des écarts de température. En définitive

$$\Phi = \bar{h}_L S_e \Delta T_{ml} \quad (7.45)$$

relation de base utilisée dans les méthodes de calcul simplifiées des échangeurs thermiques.

Exercice : Une conduite est chauffée avec une densité de flux uniforme q_{p1} sur la partie P_{m1} du périmètre mouillé et avec une température uniforme T_{p2} sur la partie P_{m2} . Calculer la variation axiale de la température moyenne débitante et vérifier que les deux cas traités dans les deux paragraphes précédents sont des solutions limites de ce cas plus général.

Solution : Le bilan thermique entre x et $x + dx$ s'écrit maintenant

$$\dot{m}C_p \frac{dT_m}{dx} = q_{p1} P_{m1} + h(x)[T_{p2} - T_m(x)]P_{m2} \quad (7.46)$$

et donc

$$\dot{m}C_p \frac{dT_m}{dx} + h(x)T_m(x)P_{m2} = q_{p1}P_{m1} + h(x)T_{p2}P_{m2} \quad (7.47)$$

ou

$$\frac{dT_m}{dx} + \frac{h(x)P_{m2}}{\dot{m}C_p}T_m(x) = \frac{q_{p1}P_{m1} + h(x)T_{p2}P_{m2}}{\dot{m}C_p} \quad (7.48)$$

En posant $a(x) = h(x)P_{m2}/\dot{m}C_p$ et $b(x) = (q_{p1}P_{m1} + h(x)T_{p2}P_{m2})/\dot{m}C_p$, le problème revient à résoudre l'équation différentielle du premier ordre à coefficients variables

$$\frac{dT_m}{dx} + a(x)T_m(x) = b(x) \quad (7.49)$$

avec la condition initiale $T_m(0) = T_e$.

La solution générale s'écrit

$$T_m(x) = Ce^{-\int_0^x a(t)dt} = Ce^{-\bar{a}(x)x} \quad \text{avec} \quad \bar{a}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x a(t)dt \quad (7.50)$$

La solution particulière peut s'obtenir par la méthode de variation des constantes :

$$\frac{dT_m}{dx} = C'e^{-\bar{a}(x)x} - C a(x)e^{-\bar{a}(x)x} \quad (7.51)$$

et donc

$$C' = b(x)e^{\bar{a}(x)x} \implies C - C_0 = \int_0^x b(t)e^{\bar{a}(t)t} dt \quad (7.52)$$

et

$$T_m(x) = C_0 e^{-\bar{a}(x)x} + \int_0^x b(t)e^{-(\bar{a}(x)x - \bar{a}(t)t)} dt \quad (7.53)$$

La condition d'entrée en $x = 0$ implique que $C_0 = T_e$.

Cas particuliers :

1) En régime thermique établi, $h(x) = h = Cste$ et donc $a(x) = a = h P_{m2}/\dot{m}C_p$ et $b(x) = b = (q_{p1}P_{m1} + h T_{p2}P_{m2})/\dot{m}C_p$. Il s'ensuit que

$$T_m(x) = T_e e^{-ax} + \frac{b}{a}(1 - e^{-ax}) = (T_e - \frac{b}{a})e^{-ax} + \frac{b}{a} \quad (7.54)$$

Si le régime est établi à partir de la section x_0 où la température moyenne débitante est $T_m(x_0)$, la relation précédente doit être remplacée par

$$T_m(x) = (T_m(x_0) - \frac{b}{a})e^{-(ax - \bar{a}(x_0)x_0)} + \frac{b}{a} \quad (7.55)$$

2) Si $q_{p1} = 0$ et $P_{m2} = P_m$ (paroi de la conduite isotherme à T_p), on obtient

$$\bar{a} = \frac{\bar{h}_x P_m}{\dot{m} C_p} \quad , \quad b = \bar{a} T_p \quad \text{et donc} \quad T_m(x) - T_p = (T_e - T_p) e^{-\frac{P_m \bar{h}_x}{\dot{m} C_p} x} \quad (7.56)$$

On retrouve donc l'équation 7.40

3) Si $q_{p1} = q_p$ et $P_{m1} = P_m$ (paroi de la conduite chauffée à flux uniforme), on obtient

$$a = 0 \quad , \quad b = \frac{q_p P_m}{\dot{m} C_p} \quad \text{et donc} \quad T_m(x) = T_e + \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{b}{a} (1 - e^{-ax}) \right] = T_e + b x = T_e + \frac{q_p P_m}{\dot{m} C_p} x \quad (7.57)$$

On retrouve donc l'équation 7.35

7.3 Etablissement des régimes dynamique et thermique

7.3.1 Etablissement du régime dynamique

Par souci de simplification, on considère un fluide entrant dans une conduite limitée par deux plans parallèles distants de D (diamètre hydraulique $D_h = 2D$). La répartition des vitesses dans la section d'entrée est supposée uniforme (profil "plat").

A l'entrée de la conduite, on observe la formation de couches limites le long de chacune des parois qui, lorsque le nombre de Reynolds n'est pas trop grand, s'épaississent régulièrement jusqu'à occuper toute la largeur du canal. Le débit étant constant, le ralentissement du fluide à proximité des parois s'accompagne d'une accélération dans la zone centrale où le profil reste pratiquement plat tant que les deux couches limites ne se sont pas rejointes, comme le montre la figure 7.8.

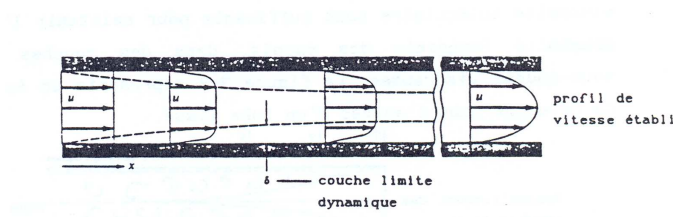


FIGURE 7.8 – Etablissement du profil de vitesse dans la zone d'entrée d'une conduite en régime laminaire.

Bien que les écoulements aux voisinages des parois présentent de fortes analogies avec l'écoulement sur une plaque plane décrit au chapitre précédent, le calcul des profils de vitesse dans les couches limites est beaucoup plus complexe parce que l'écoulement externe, ici l'écoulement dans la partie centrale de la conduite, ne s'effectue ni à vitesse constante ni à gradient de pression constant. Il n'y a cependant pas

de décollement des couches limites parce que, la vitesse axiale augmentant, la pression axiale diminue dans le sens de l'écoulement.

Lorsque les couches limites restent laminaires, leur développement se poursuit jusqu'à une distance de l'entrée que l'on peut, en première approximation, considérer comme proportionnelle au produit du diamètre hydraulique par le nombre de Reynolds. Soit

$$x_D = C_l D_h Re_{Dh} \quad (7.58)$$

La constante de proportionnalité dépend de la géométrie de la conduite. Par exemples, $C_l \approx 0,011$ pour un canal plan et $C_l \approx 0,056$ pour une conduite à section circulaire. La longueur d'établissement est aussi proportionnelle à Re_{Dh} et atteint donc des valeurs très supérieures au diamètre hydraulique (plus de 50 diamètres pour un écoulement à $Re = 1000$ dans un tube).

A grands nombres de Reynolds, l'accélération dans la partie centrale produit un cisaillement important au bord des couches limites qui sont déstabilisées. La majeure partie de l'écoulement devient donc turbulente alors que les effets de la viscosité moléculaire sont prédominants à proximité immédiate des parois (sous-couches visqueuses). La figure 7.9 représente un écoulement à fort nombre de Reynolds dès l'entrée d'un tube lisse.

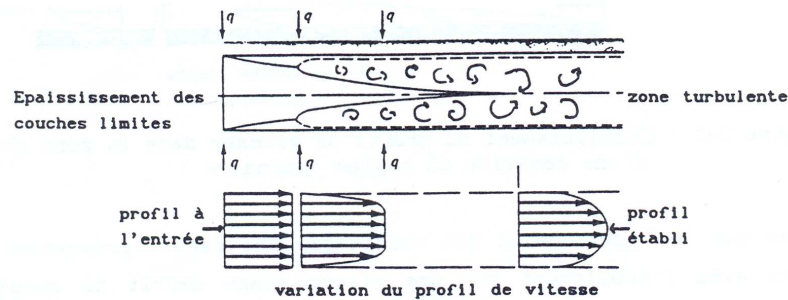


FIGURE 7.9 – Etablissement du régime dynamique d'un écoulement turbulent.

Pour un écoulement turbulent, la distance à laquelle le régime dynamique s'établit n'est pas proportionnelle au nombre de Reynolds et s'exprime sous la forme

$$x_D = C_t D_h Re_{Dh}^n \quad (7.59)$$

où l'exposant n est toujours inférieur à l'unité car la turbulence favorise l'établissement du régime dynamique. Pour un canal plan et pour une conduite circulaire, l'expérience montre que $n \approx 0,25$. Le coefficient C_t étant de l'ordre de 0,6 pour un tube, on obtient une distance d'établissement de l'ordre de 6 diamètres à $Re_{Dh} = 10^4$, c'est-à-dire dix fois plus courte qu'à $Re_{Dh} = 10^3$ dans un tube lisse.

Ces résultats ne sont valables que pour des parois lisses. Lorsqu'elles sont rugueuses, les micro-circulations se produisant autour des rugosités déstabilisent très rapidement les couches limites et l'écoulement peut alors devenir pleinement turbulent à des distances bien inférieures au diamètre hydraulique. Le régime d'écoulement est alors appelé "turbulent rugueux" et la longueur d'établissement du régime dynamique dépend alors principalement du rapport de la hauteur moyenne des rugosités au diamètre hydraulique (voir le chapitre 4).

Cette description de l'établissement du régime dynamique qui montre que, dans la région d'entrée, la structure dominante de l'écoulement à proximité des parois présente les mêmes propriétés que celles d'une couche limite conduit à simplifier les équations de quantité de mouvement en utilisant les mêmes hypothèses : diffusion de quantité de mouvement axiale négligeable ($\partial^2 u / \partial x^2 \ll \partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^2 v / \partial x^2 \ll \partial^2 v / \partial y^2$), pression constante dans une section ($\partial p / \partial y = 0$).

Si les propriétés physiques du fluide sont indépendantes de la température, les équations décrivant l'écoulement en régime laminaire dynamiquement **non établi** sont donc :

- a) Dans le cas d'une conduite plane (coordonnées (x, y)) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.60)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.61)$$

et en supposant la pression constante dans une section (soit $\partial p / \partial y = 0$)

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (7.62)$$

Il est ici nécessaire de résoudre l'équation du mouvement pour la composante v de la vitesse afin que le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues (u, v et p).

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} u = u_e, v = v_e & \quad \text{en } x = 0, \forall y \\ u = v = 0 & \quad \text{en } y = \pm D, \forall x \end{aligned} \quad (7.63)$$

$$\text{ou } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad \text{et } u = v = 0 \quad \text{en } y = D, \forall x$$

Ce système non linéaire n'a pas de solution analytique et les méthodes employées pour calculer le profil de vitesse dans une couche limite externe ne sont pas applicables parce que le gradient longitudinal de pression est inconnu. En régime dynamique établi, $u = u(y)$ et $v = 0$, l'équation du mouvement se réduit à :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (7.64)$$

où $dp/dx = \text{cste}$. Les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= 0 \quad \text{en } y = 0, \forall x \\ u &= 0 \quad \text{en } y = D, \forall x \end{aligned} \quad (7.65)$$

- b) Dans le cas d'une conduite cylindrique (coordonnées (r, x)) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} = 0 \quad (7.66)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (7.67)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (7.68)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
u &= u_e, \quad v = v_e && \text{en } x = 0, \quad \forall r \\
u &= v = 0 && \text{en } r = R, \quad \forall x \\
\text{ou } \quad \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 && \text{en } r = 0 \quad \text{et } u = v = 0 && \text{en } r = R, \quad \forall x
\end{aligned} \tag{7.69}$$

En régime dynamique établi, $u = u(r)$ et $v = 0$, l'équation du mouvement se réduit à :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \tag{7.70}$$

où $dp/dx = cste$. Les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dr} &= 0 && \text{en } r = 0, \quad \forall x \\
u &= 0 && \text{en } r = R, \quad \forall x
\end{aligned} \tag{7.71}$$

En régime turbulent, il suffit de remplacer le terme représentant la diffusion transverse de quantité de mouvement par

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right] \tag{7.72}$$

si le modèle de turbulence est basé sur le concept de viscosité turbulente.

7.3.2 Etablissement du régime thermique

On doit distinguer deux cas selon que le transfert de chaleur entre le fluide et la paroi s'effectue dès l'entrée de la conduite ou selon qu'il s'effectue après que le régime dynamique se soit établi. Dans le premier cas, l'établissement des régimes dynamique et thermique est dit "simultané" et l'étude est complexe car le transport d'enthalpie n'est pas uniquement axial (composante transverse de la vitesse non nulle).

7.3.2.1 Etablissement simultané des régimes dynamique et thermique

Comme les échanges de chaleur sont conditionnés par les propriétés thermophysiques du fluide, le nombre de Prandtl joue un rôle déterminant dans l'établissement du régime thermique. La figure 7.10 représente l'effet de Pr sur la longueur d'établissement x_T du régime thermique en écoulement laminaire.

Pour tous les fluides, on observe que x_T est de l'ordre de grandeur du produit $x_D Pr$. Par conséquent, le produit $D_h Re_{Dh} Pr$ caractérise la longueur d'établissement du régime thermique. On écrit donc en régime laminaire

$$\begin{aligned}
x_T &= C_{th}(Pr) D_h (Re_{Dh} Pr) \\
&= C_{th}(Pr) D_h Pe_{Dh}
\end{aligned} \tag{7.73}$$

où $Pe_{Dh} = Re_{Dh} Pr$ est le nombre de Péclet basé sur le diamètre hydraulique. La constante C_{th} dépend faiblement du nombre de Prandtl pour les fluides ordinaires. Par exemple, dans le cas d'un tube chauffé à flux constant $x_T \approx 0,033 D_h Pe_{Dh}$ pour de l'air ($Pr = 0,7$) et $x_T \approx 0,038 D_h Pe_{Dh}$ pour $Pr \gg 1$.

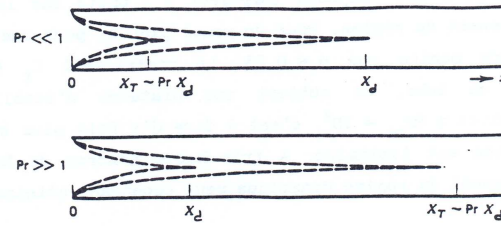


FIGURE 7.10 – Effet du nombre de Prandtl sur la longueur d'établissement du régime thermique.

Dans la zone d'entrée, le coefficient d'échange décroît rapidement. La variation du nombre de Nusselt local basé sur le diamètre hydraulique est généralement représentée en fonction de la distance adimensionnelle

$$x^* = \frac{(x/D_h)}{Pe_{D_h}} \quad (7.74)$$

c'est-à-dire que le produit $D_h Pe_{D_h}$ est choisi comme échelle des longueurs. L'inverse de x^* est appelé le nombre de Graetz, noté Gz . Soit avec la notation usuelle

$$Gz = \frac{Re_{D_h} Pr}{x/D_h} \quad (7.75)$$

La région d'entrée est caractérisée par de grandes valeurs du nombre de Graetz, typiquement $Gz > 10^2$.

En ce qui concerne le nombre de Nusselt, on observe, comme dans le cas des écoulements externes, que les conditions thermiques appliquées sur les parois de la conduite ont une influence importante. La figure 7.11 représente les variations du nombre de Nusselt moyen en fonction de $1/Gz$ pour un tube dont la paroi est à température uniforme. Les valeurs moyennes reportées sur cette figure sont calculées entre l'entrée et une section d'abscisse x ou, de façon équivalente, d'abscisse adimensionnelle $x^* = 1/Gz$. On remarque que le nombre de Nusselt dépend fortement du nombre de Prandtl en régime non établi.

Le nombre de Nusselt moyen en régime laminaire dans la région d'entrée peut être calculé par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_x &= 1,85 Gz^{1/3} && \text{température uniforme} \\ \overline{Nu}_x &= 1,64 Gz^{1/3} && \text{flux uniforme} \end{aligned} \quad (7.76)$$

Ces relations sont applicables pour $Gz > 200$ et $Pr > 5$.

Lorsque l'écoulement est turbulent, l'expérience montre que la longueur d'établissement du régime thermique est quasiment indépendante du nombre de Prandtl. Les longueurs d'établissement des régimes dynamique et thermique sont du même ordre de grandeur : on prendra donc $x_T \approx x_D$.

7.3.2.2 Etablissement du régime thermique en écoulement établi

Dans de nombreuses applications, l'écoulement est isotherme sur une grande partie de la longueur de la conduite de sorte que les échanges de chaleur fluide/paroi débutent dans une section où le profil de vitesse est déjà établi (Fig. 7.12).

Exemple : Ecoulement d'un fluide newtonien dans une conduite circulaire.

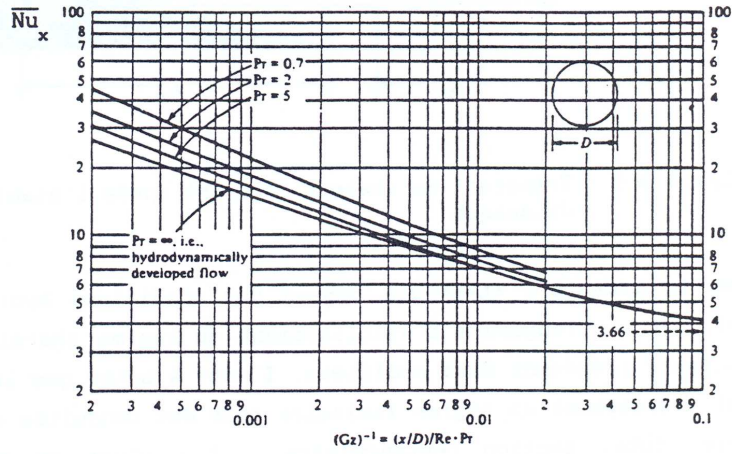


FIGURE 7.11 – Variation du nombre de Nusselt moyen dans la région d'entrée d'un tube en fonction de $x^* = 1/Gz$: régimes thermique et dynamique s'établissant simultanément.

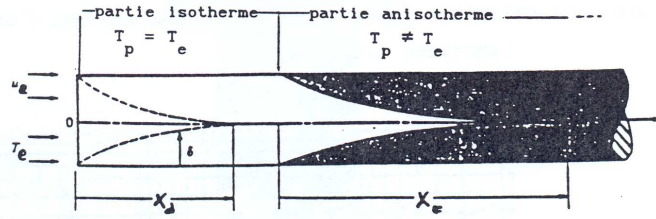


FIGURE 7.12 – Transfert de chaleur débutant après l'établissement du régime dynamique.

Hypothèses : écoulement laminaire établi, propriétés physiques constantes

Equation de l'énergie :

$$u(r) \frac{\partial T}{\partial x} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \quad (7.77)$$

où $u(r) = 2u_m(1 - (r/R)^2)$. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} T(0, r) = T_e \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \\ T(L, r) = ?? \\ T(x, R) = T_p \quad \text{ou} \quad k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R = q_p \end{cases} \quad (7.78)$$

où $T(L, r) = ??$ signifie que l'on ne sait pas, en général, quelle condition thermique imposer en sortie de la conduite.

Forme adimensionnelle : on introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes

$$x^* = ax/u_m D^2, \quad r^* = r/R, \quad \theta = (T - T_0)/\Delta T, \quad u^* = u/u_m \quad (7.79)$$

où T_0 est une température de référence et ΔT une différence de température de référence, par exemple $\Delta T = T_p - T_e$ ou $\Delta T = T_p - T_0$. On obtient la forme adimensionnelle

$$u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = 4 \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{4Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} \right] + 4EcPr \left(\frac{du^*}{dr^*} \right)^2 \quad (7.80)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(r^*, 0) = (T_e - T_0)/\Delta T \\ \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_0 = 0 \\ \theta(r^*, L^*) = ?? \\ \theta(1, x^*) = (T_p - T_0)/\Delta T \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_1 = \frac{q_p R}{k \Delta T} \end{array} \right. \quad (7.81)$$

où $Pe = RePr = u_m D/a$ et $Ec = u_m^2/C_p \Delta T$.

Remarque : on peut aussi écrire $x^* = ax/u_m D^2 = (x/D)/Pe = 1/Gz$.

La forme adimensionnelle de l'équation de l'énergie montre que :

- Si $Pe \rightarrow \infty$ (en pratique $Pe > 100$), la conduction axiale est négligeable. Le nombre de Péclet indique donc l'importance du rapport entre la convection axiale et la conduction axiale. La conduction axiale est surtout importante pour les métaux liquides car $Pr \ll 1$ (si $Pr \approx 0.01$, la valeur maximale de Pe est inférieure à $Pe = 30$ en régime laminaire).
- En régime laminaire et pour les fluides newtoniens, la dissipation visqueuse est généralement considérée comme négligeable pour les gaz et les liquides ordinaires car $u_m^2 \ll C_p \Delta T$. On admettra cette hypothèse dans la suite. On peut cependant noter que le terme de dissipation visqueuse est seulement un terme de source connu (ne dépendant que de la direction transverse en géométrie 1D). Des exemples sont donnés à titre d'exercices à la fin de ce chapitre.

Si $Pe \gg 1$ et $EcPr \ll 1$, le transfert de chaleur est gouverné par l'écart de température ($T_p(x) - T_m(x)$). Soit

$$q_p(x) = h(x)(T_p(x) - T_m(x)) = k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R \quad (7.82)$$

ou

$$\frac{h(x)R}{k}(\theta_p(x^*) - \theta_m(x^*)) = \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_1 \quad (7.83)$$

avec

$$\theta_m(x^*) = 2 \int_0^1 u^* \theta(x^*, r^*) r^* dr^* \quad (7.84)$$

et donc

$$Nu(x^*) = \frac{h(x)D}{k} = \frac{2}{\theta_p(x^*) - \theta_m(x^*)} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_1 \quad (7.85)$$

On traite dans la suite quelques exemples illustrant les méthodes de résolution du régime thermique non établi. On considérera principalement une conduite plane, ce qui facilite beaucoup les calculs analytiques (de façon générale, une solution analytique en géométrie cartésienne fait intervenir des fonctions trigonométriques alors qu'elle fait intervenir des fonctions de Bessel en géométrie cylindrique).

7.4 Convection dans des conduites planes ou dans des tubes en régime dynamique établi.

7.4.1 Régimes dynamiques établis dans des conduites planes.

Hypothèses : propriétés physiques constantes, conduction axiale et dissipation visqueuse négligées.

On considère une conduite plane dont les parois sont espacées de $2D$ (diamètre hydraulique $D_h = 4D$). L'origine des axes de coordonnées est placée sur l'axe de la conduite à l'entrée de la zone chauffée. L'équation de l'énergie est de la forme

$$\rho C_p u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.86)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0, y) = T_e \text{ pour } -D < y < D \\ \frac{\partial T}{\partial y} \big|_0 = 0 \\ T = T_p \quad \text{ou } q_p \text{ imposée en } y = \pm D \end{array} \right. \quad (7.87)$$

7.4.1.1 Profil de vitesse uniforme ($u = u_m$, écoulement piston) et température de paroi imposée.

On pose

$$\theta = (T - T_p)/(T_e - T_p) \quad , \quad y^* = y/D \quad , \quad x^* = \frac{a x}{D^2 u_m} \quad (7.88)$$

Note :

$$x^* = \frac{a x}{D^2 u_m} = 16 \frac{x}{4D} \times \frac{a}{4D u_m} = 16 \frac{x}{D_h} \times \frac{1}{Pe_{D_h}} = \frac{16}{Gz}$$

L'équation de l'énergie adimensionnelle est alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \\ \theta(0, y^*) = 1 \quad , \quad \theta(x^*, 1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \bigg|_0 = 0 \end{array} \right. \quad (7.89)$$

Cette équation est similaire à l'équation de la chaleur en régime variable (la coordonnée longitudinale remplaçant la variable temporelle). Pour la résoudre, on utilise donc les mêmes techniques : on va employer ici la méthode de séparation des variables¹. On pose :

$$\theta(x^*, y^*) = f(x^*)g(y^*) \Rightarrow f'g = fg'' \quad \text{ou} \quad \frac{f'}{f} = \frac{g''}{g} = -\alpha^2 \quad (7.90)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0)g(y^*) = 1 \\ f(x^*)g(1) = 0 \Rightarrow g(1) = 0 \\ f(x^*)g'(0) = 0 \Rightarrow g'(0) = 0 \end{array} \right. \quad (7.91)$$

1. La méthode de séparation des variables conduit à une solution sous la forme d'une série dont le taux de convergence diminue lorsque $x^* \ll 1$. Il vaut mieux utiliser une solution basée sur la transformation de Laplace si la zone de chauffage est très courte.

On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x^*) = e^{-\alpha^2 x^*} \quad \text{et} \quad g(y^*) = A \cos(\alpha y^*) + B \sin(\alpha y^*) \\ g'(0) = 0 \Rightarrow \alpha B = 0 \quad \text{d'où} \quad B = 0 \\ g(1) = 0 \Rightarrow A \cos(\alpha) = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ \theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y^*) e^{-\alpha_n^2 x^*} \end{array} \right. \quad (7.92)$$

La condition $\theta(0, y^*) = 1$ implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y^*) = 1 \quad (7.93)$$

L'orthogonalité des fonctions de base, $\cos(\alpha_n y^*)$, permet de calculer les coefficients A_n . En multipliant les deux membres de l'équation 7.93 par $\cos(\alpha_m y^*)$ puis en intégrant, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 A_n \cos(\alpha_n y^*) \cos(\alpha_m y^*) dy^* = \int_0^1 \cos(\alpha_m y^*) dy^* \quad (7.94)$$

mais

$$\int_0^1 \cos(\alpha_n y^*) \cos(\alpha_m y^*) dy^* = \frac{1}{2} \delta_{n,m} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \cos(\alpha_m y^*) dy^* = \frac{(-1)^m}{\alpha_m} \quad (7.95)$$

avec $\delta_{n,m} = 0$ si $n \neq m$ et $\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$. On en déduit donc que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 A_n \cos(\alpha_n y^*) \cos(\alpha_m y^*) dy^* = \frac{A_n}{2} = \frac{(-1)^n}{\alpha_n} \quad (7.96)$$

d'où la solution

$$\theta(x^*, y^*) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha_n} \cos(\alpha_n y^*) e^{-\alpha_n^2 x^*} \quad \text{avec} \quad \alpha_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (7.97)$$

Cette solution satisfait la condition $\lim_{x^* \rightarrow \infty} \theta(x^*, y^*) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, y) = T_p$. On peut maintenant calculer le nombre de Nusselt local. Soit

$$Nu(x) = \frac{D_h}{T_p - T_m(x)} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_D \quad (7.98)$$

avec

$$T_m(x) = \frac{1}{u_m D} \int_0^D u T dy \quad \text{et si} \quad u = u_m \Rightarrow T_m(x) = \frac{1}{D} \int_0^D T dy \quad (7.99)$$

En exprimant T en fonction de θ , on obtient

$$T_m(x) = \int_0^1 [\theta(T_e - T_p) + T_p] dy^* = (T_e - T_p) \int_0^1 \theta dy^* + T_p \quad (7.100)$$

et donc

$$Nu(x) = \frac{-4 \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \big|_1}{\int_0^1 \theta dy^*} = \frac{-4}{\theta_m} \left. \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right|_1 \quad (7.101)$$

mais

$$\frac{\partial \theta}{\partial y^*} = - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \sin(\alpha_n y^*) e^{-\alpha_n^2 x^*} \quad (7.102)$$

et donc

$$Nu(x) = \frac{4 \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \sin(\alpha_n y^*) \big|_{y^*=1} e^{-\alpha_n^2 x^*}}{\sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n}{\alpha_n^2} \sin(\alpha_n y^*) \big|_{y^*=0}^1 e^{-\alpha_n^2 x^*}} \quad (7.103)$$

comme $\sin(\alpha_n) = (-1)^n$, on en déduit

$$Nu(x) = \frac{4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} e^{-\alpha_n^2 x^*}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 x^*}} = 4 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 x^*}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 x^*}} \quad (7.104)$$

ou en développant

$$Nu(x) = 4 \frac{e^{-\alpha_0^2 x^*} (1 + e^{-(\alpha_1^2 - \alpha_0^2) x^*} + \dots)}{e^{-\alpha_0^2 x^*} (\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\alpha_1^2} e^{-(\alpha_1^2 - \alpha_0^2) x^*} + \dots)} \quad (7.105)$$

Pour de grandes valeurs de x^* , le nombre de Nusselt local tend vers $4\alpha_0^2 = \pi^2$ qui est donc la valeur du nombre de Nusselt en régime thermique établi pour un écoulement "piston".

Conclusions :

- En régime laminaire dynamiquement établi mais non thermiquement établi, le seul paramètre du problème est le nombre de Graetz puisque $x^* = 16/Gz$.
- En régime laminaire dynamiquement et thermiquement établi ($\alpha_0^2 x^* \gg 1$), le nombre de Nusselt est une constante qui ne dépend que de la géométrie de la conduite.

7.4.1.2 Profil de vitesse uniforme (écoulement piston) et flux imposé sur la paroi.

On pose alors

$$\theta = (T - T_e)/(q_p D/k) , \quad y^* = y/D , \quad x^* = \frac{4x/D}{Pe} \quad (7.106)$$

Il faut reprendre les calculs précédents en remplaçant la condition thermique sur la paroi par

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_D = q_p \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \bigg|_1 = 1 \quad (7.107)$$

Le coefficient d'échange local a pour expression

$$h(x) = \frac{q_p}{T_p(x) - T_m(x)} = \frac{q_p}{(\frac{q_p D}{k} \theta_p + T_e) - \int_0^1 (\frac{q_p D}{k} \theta + T_e) dy^*} = \frac{k}{D(\theta_p - \int_0^1 \theta dy^*)} \quad (7.108)$$

Le nombre de Nusselt est donc défini par

$$Nu(x) = \frac{h(x) D_h}{k} = \frac{4}{(\theta_p - \int_0^1 \theta dy^*)} \quad (7.109)$$

En procédant comme précédemment, les calculs conduisent (Carslaw et Jaeger page 12?/ exercice) aux valeurs propres $\alpha_n = n\pi$ et aux fonctions propres $g_n(y^*) = \cos(n\pi y^*)$ pour $n = 1, \infty$:

$$\theta(x^*, y^*) = x^* + \frac{3y^{*2} - 1}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi y^*) e^{-n^2 \pi^2 x^*} \quad (7.110)$$

La température moyenne débitante et la température de paroi ont pour expressions :

$$\begin{cases} \theta_m(x^*) = \int_0^1 \theta dy^* = x^* \\ \theta_p(x^*) = x^* + \frac{1}{3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} e^{-n^2 \pi^2 x^*} \end{cases} \quad (7.111)$$

On en déduit la variation axiale du nombre de Nusselt local

$$Nu(x) = \frac{12}{1 - 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} e^{-n^2 \pi^2 x^*}} \quad (7.112)$$

et donc $\lim_{x^* \rightarrow \infty} Nu(x) = 12$

7.4.1.3 Profil de vitesse parabolique (écoulement de Poiseuille plan) et température imposée sur la paroi

:

En remplaçant u par le profil parabolique de Poiseuille plan, l'équation de l'énergie s'écrit

$$\frac{3}{2} u_m \left(1 - \left(\frac{y}{D}\right)^2\right) \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.113)$$

En posant à nouveau

$$\theta = (T - T_p)/(T_e - T_p) \quad , \quad y^* = y/D \quad , \quad x^* = \frac{ax}{u_m D^2} = 16 \frac{x/D_h}{Pe_{D_h}} = \frac{16}{Gz} \quad (7.114)$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{3}{2} (1 - y^{*2}) \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \\ \theta(0, y^*) = 1 \quad , \quad \theta(x^*, 1) = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right|_0 = 0 \end{cases} \quad (7.115)$$

La méthode de séparation des variables, $\theta(x^*, y^*) = f(x^*)g(y^*)$, conduit à

$$\frac{3}{2} \frac{f'}{f} = \frac{1}{(1 - y^{*2})} \frac{g''}{g} = a = cste \quad (7.116)$$

Les conditions aux limites $f(0) = 1$ et $\lim_{x^* \rightarrow \infty} f(x^*) = 0$ impliquent que a soit une constante négative. On pose $a = -\lambda^2$ et donc

$$f(x^*) = C e^{-\frac{2}{3} \lambda^2 x^*} \quad (7.117)$$

La solution générale est de la forme

$$\theta(x^*, y^*) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(y^*) e^{-\frac{2}{3} \lambda_n^2 x^*} \quad (7.118)$$

où λ_n et g_n sont les valeurs propres et les fonctions propres du système de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{d^2 g}{dy^{*2}} + \lambda^2 (1 - y^{*2}) g = 0 \\ g(1) = 0 \quad , \quad \left. \frac{dg}{dy^*} \right|_0 = 0 \end{cases} \quad (7.119)$$

Les valeurs propres λ_n de ce système doivent être calculées numériquement. On en déduit le nombre de Nusselt local par

$$Nu(x) = \frac{4h(x)D}{k} = \left(\frac{8}{3}\right) \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{2}{3}\lambda_n^2 x^*}}{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-\frac{2}{3}\lambda_n^2 x^*}} \quad (7.120)$$

où $A_n = C_n(dg_n/dy^*)|_1$. Les dix premières valeurs de λ_n^2 , C_n et A_n sont données dans le tableau 7.1.

n	λ_n^2	C_n	A_n
0	2,779	+0,503	-0,683
1	32,11	-0,121	-0,454
2	93,45	+0,0648	-0,380
3	186,9	-0,0431	-0,338
4	312,2	+0,0319	-0,311
5	469,6	-0,0253	-0,291
6	658,9	+0,0207	-0,274
7	880,3	-0,0174	-0,262
8	1134	+0,0150	-0,251
9	1419	-0,0131	-0,242

TABLE 7.1 – Dix premières valeurs propres et coefficients du développement en série pour le problème de Graetz plan avec T_p imposée.

Relation approchée :

$$\begin{cases} Nu(x) = 1,85 \left(\frac{x/D_h}{Pe}\right)^{-1/3} & si \quad \frac{x/D_h}{Pe} < 0,014 \\ Nu(x) = 7,54 & si \quad \frac{x/D_h}{Pe} > 0,014 \end{cases} \quad (7.121)$$

7.4.2 Régimes dynamiques établis dans des tubes.

Hypothèses : propriétés physiques constantes, conduction axiale et dissipation visqueuse négligées. Quelle que soit la forme du profil de vitesse, l'équation de l'énergie s'écrit

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (7.122)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} T(0, r) = T_e \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_0 = 0 \\ T(x, R) = T_p \quad \text{ou } q_p \text{ imposée} \end{cases} \quad (7.123)$$

7.4.2.1 Profil de vitesse uniforme (écoulement piston) et température de paroi imposée.

En introduisant les variables adimensionnelles

$$x^* = \frac{ax}{u_m R^2} \quad , \quad r^* = r/R \quad , \quad \theta = (T - T_p)/(T_e - T_p) \quad , \quad u^* = u/u_m = 1 \quad (7.124)$$

L'équation de l'énergie devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) \\ \theta(0, r^*) = 1 \quad , \quad \theta(x^*, 1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_0 = 0 \end{cases} \quad (7.125)$$

On cherche une solution par la méthode de séparation des variables, soit

$$\theta(x^*, r^*) = f(x^*)g(r^*) \quad (7.126)$$

En reportant dans l'équation de l'énergie, on obtient

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx^*} = \frac{1}{g} \left[\frac{d^2 g}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{dg}{dr^*} \right] = -\alpha^2 \quad (7.127)$$

d'où le système

$$\begin{cases} \frac{df}{dx^*} + \alpha^2 f = 0 & \Rightarrow f = C e^{-\alpha^2 x^*} \\ \frac{d^2 g}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{dg}{dr^*} + \alpha^2 g = 0 & \text{équation de Bessel} \end{cases} \quad (7.128)$$

La solution de l'équation 7.128b s'écrit : $g(r^*) = A J_0(\alpha r^*) + B Y_0(\alpha r^*)$ où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et seconde espèce. Comme $Y_0(0) = -\infty \Rightarrow B = 0$.

La solution générale est donc de la forme

$$\theta(x^*, r^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r^*) e^{-\alpha_n^2 x^*} \quad (7.129)$$

avec α_n racine- n^{ieme} de $J_0(\alpha) = 0$. La condition d'entrée conduit à

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r^*) = 1 \quad (7.130)$$

La propriété d'orthogonalité des fonctions de base permet de calculer les coefficients du développement. Soit

$$\int_0^1 x J_0(\alpha_m x) J_0(\alpha_n x) dx = \frac{1}{2} (J_1^2(\alpha_n) + J_0^2(\alpha_n)) \quad \text{si } n = m \quad \text{et } = 0 \quad \text{si } n \neq m \quad (7.131)$$

Après quelques calculs, on en déduit que

$$A_n = \frac{\int_0^1 r^* J_0(\alpha_n r^*) dr^*}{\int_0^1 r^* J_0^2(\alpha_n r^*) dr^*} = \frac{2}{\alpha_n} \frac{1}{J_1(\alpha_n)} \quad (7.132)$$

puis

$$\theta(x^*, r^*) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r^*)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 x^*} \quad (7.133)$$

et

$$\theta_m = 2 \int_0^1 \theta r^* dr^* = 4 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r^*)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 x^*} r^* dr^* = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 x^*} \int_0^1 J_0(\alpha_n r^*) r^* dr^* \quad (7.134)$$

mais

$$\int_0^1 J_0(\alpha_n r^*) r^* dr^* = \frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n} \quad (7.135)$$

d'où

$$\theta_m = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 x^*}}{\alpha_n^2} \quad (7.136)$$

En outre

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_1 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 x^*}}{\alpha_n^2} \quad (7.137)$$

Le nombre de Nusselt local a donc pour expression

$$Nu(x) = \frac{hD}{k} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 x^*}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} e^{-\alpha_n^2 x^*}} \quad (7.138)$$

Lorsque $x^* \rightarrow \infty$, le terme dominant est $\alpha_1^2 = 5,783$ (la première racine de $J_0(\alpha)$ a pour valeur $\alpha_1 = 2,4048$) et donc

$$Nu = 5,783 \quad (7.139)$$

Les variations du nombre de Nusselt local, $Nu(x)$, et du nombre de Nusselt moyen entre $x = 0$ et x , $\overline{Nu}(x)$, et de la température moyenne débitante adimensionnelle, $\theta_m(x)$, sont reportées dans le tableau 7.2 en fonction de $x^* = 1/Gz$.

$1/Gz$	$Nu(x)$	$\overline{Nu}(x)$	$\theta_m(x)$
0	∞	∞	1
0,001	19,5	37,32	0,861
0,0025	13,1	24,3	0,784
0,005	9,88	17,7	0,701
0,01	7,74	13,2	0,59
0,025	6,18	9,31	0,394
0,05	5,82	7,62	0,218
0,1	5,79	6,71	0,0684
0,25	5,783	6,15	0,0021
0,5	5,783	5,97	$6,5 \cdot 10^{-6}$
1,0	5,783	5,88	$6,1 \cdot 10^{-11}$
∞	5,783	5,783	0

TABLE 7.2 – Valeurs de $Nu(x)$, $\overline{Nu}(x)$ et de θ_m pour un écoulement piston dans un tube avec T_p imposée.

Rappel :

$$\overline{Nu}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x Nu(x) dx \quad \text{dans une conduite}$$

alors que

(7.140)

$$\overline{Nu}(x) = \int_0^x \frac{Nu(x)}{x} dx \quad \text{sur une plaque plane.}$$

7.4.2.2 Profil de vitesse uniforme (écoulement piston) et flux imposé.

Il faut chercher la solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) \\ \theta(0, r^*) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_0 = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_1 = 1 \end{cases} \quad (7.141)$$

avec $\theta = (T - T_e) / (\frac{q_p R}{k})$.

La solution est :

$$\theta(x^*, r^*) = 2x^* + \frac{r^{*2}}{2} - \frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r^*)}{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 x^*} \quad (7.142)$$

où α_n est la n^{ieme} racine de $J_1(\alpha)$. On en déduit

$$\begin{cases} \theta_m = 2x^* \\ \theta_p = 2x^* + \frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 x^*}}{\alpha_n^2} \end{cases} \quad (7.143)$$

et

$$Nu(x) = \frac{2}{\theta_p - \theta_m} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_1 = \frac{8}{1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 x^*} / \alpha_n^2} \quad (7.144)$$

La valeur asymptotique du nombre de Nusselt local est $Nu = 8$ (tableau 7.3).

$1/Gz$	$Nu(x)$	$\overline{Nu}(x)$	$\theta_p - \theta_m$
0	∞	∞	0
0,001	30,6	41,5	0,0655
0,0025	20,4	28,6	0,0981
0,005	15,3	21,5	0,131
0,01	11,9	16,3	0,168
0,025	9,16	11,9	0,218
0,05	8,24	9,95	0,243
0,1	8,01	8,92	0,2496
0,25	8,0	8,34	0,25
0,5	8,0	8,17	0,25
1,0	8,0	8,08	0,25
∞	8,0	8,0	0,25

TABLE 7.3 – Valeurs de $Nu(x)$, $\overline{Nu}(x)$ et de l'écart $\theta_p - \theta_m$ pour un écoulement piston dans un tube chauffée uniformément ($q_p = cste$).

7.4.2.3 Profil de vitesse parabolique (écoulement de Poiseuille tube) et température imposée sur la paroi.

En introduisant les variables adimensionnelles

$$x^* = \frac{ax}{u_m R^2} \quad , \quad r^* = r/R \quad , \quad \theta = (T - T_p)/(T_e - T_p) \quad , \quad u^* = u/u_m = 2(1 - r^{*2}) \quad (7.145)$$

L'équation de l'énergie s'écrit sous forme adimensionnelle

$$\begin{cases} 2(1 - r^{*2}) \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*}) \\ \theta(0, r^*) = 1 \quad , \quad \theta(x^*, 1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_0 = 0 \end{cases} \quad (7.146)$$

On cherche une solution par la méthode de séparation des variables, soit

$$\theta(x^*, r^*) = f(x^*)g(r^*) \quad (7.147)$$

En reportant dans l'équation de l'énergie, on obtient

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx^*} = \frac{1}{2(1 - r^{*2})g} \left[\frac{d^2 g}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{dg}{dr^*} \right] = -\lambda^2 \quad (7.148)$$

et donc

$$f = C e^{-\lambda^2 x^*} \quad (7.149)$$

La solution générale est de la forme

$$\theta(x^*, r^*) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(r^*) e^{-\lambda_n^2 x^*} \quad (7.150)$$

où λ_n et g_n sont les valeurs propres et les fonctions propres du système de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{d^2 g}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{dg}{dr^*} + 2\lambda^2(1 - r^{*2})g = 0 \\ g(1) = 0 \quad , \quad \frac{dg}{dr^*} \Big|_0 = 0 \end{cases} \quad (7.151)$$

Les valeurs propres λ_n de ce système doivent être calculées numériquement. On en déduit le nombre de Nusselt local par

$$Nu(x) = \frac{h(x)D}{k} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 x^*}}{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 x^*}} \quad (7.152)$$

où $A_n = -0,5 C_n (dg_n/dr^*)|_1$. Les cinq premières valeurs de λ_n^2 et de A_n sont données dans le tableau 7.4 et les nombres .

Lorsque $x^* \rightarrow \infty$, le terme dominant est $\lambda_0^2 = 3,657$ et donc

$$Nu = 3,657 \quad (7.153)$$

Les variations du nombre de Nusselt local, $Nu(x)$, et du nombre de Nusselt moyen entre $x = 0$ et x , $\overline{Nu}(x)$, et de la température moyenne débitante adimensionnelle, $\theta_m(x)$, sont reportées dans le tableau 7.5 en fonction de $x^* = 1/Gz$.

La figure 7.13 représente les variations des nombres de Nusselt locaux et moyens depuis l'entrée d'un tube et jusqu'à l'établissement du régime thermique lorsque l'écoulement laminaire est établi dès l'entrée

n	λ_n^2	A_n
0	3,657	0,749
1	22,31	0,544
2	56,9	0,463
3	107,6	0,414
4	174,25	0,382

TABLE 7.4 – Cinq premières valeurs propres et coefficients du développement en série pour le problème de Graetz tube avec T_p imposée.

$1/Gz$	$Nu(x)$	$\overline{Nu}(x)$	$\theta_m(x)$
0	∞	∞	1
0,0005	10,1	15,4	0,940
0,002	8,06	12,2	0,907
0,005	6,00	8,94	0,836
0,02	4,17	5,82	0,628
0,04	3,79	4,89	0,457
0,05	3,71	4,64	0,395
0,1	3,658	4,16	0,190
∞	3,657	3,657	0

TABLE 7.5 – Valeurs de $Nu(x)$, $\overline{Nu}(x)$ et de θ_m pour un écoulement de Poiseuille dans un tube avec T_p imposée.

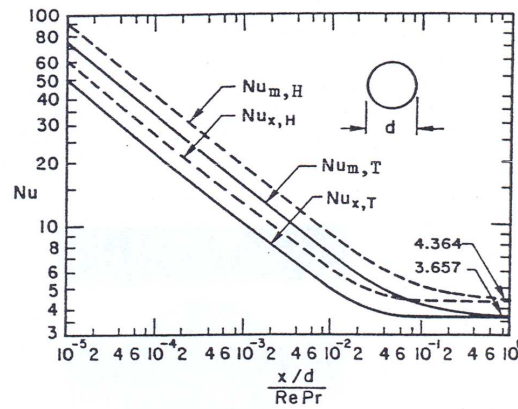


FIGURE 7.13 – Nombres de Nusselt locaux, $Nu_{x,p}$, et moyens $Nu_{m,p}$ depuis l'entrée d'un tube (indice $p = H$: flux imposé, indice $p = T$: température imposée).

du tube (profil de vitesse parabolique). Deux cas sont considérés : température de paroi imposée (indice "T") et flux imposé (indice "H") en fonction de $1/Gz$.

Longueurs d'établissement.

La longueur d'établissement du régime dynamique et la longueur d'établissement du régime thermique

en écoulement laminaire établi sont reportées dans le tableau 7.6 pour quelques géométries usuelles.


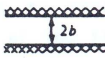
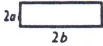
Géométrie de la section	$\frac{X_d/D_h}{Re_{Dh}}$	$\frac{X_t/D_h}{Pe_{Dh}}$	
		T_p	q_p
	0.056	0.033	0.043
	0.011	0.008	0.012
			
$\frac{a}{b} = 0.25$	0.075	0.054	0.042
0.50	0.085	0.049	0.057
1.0	0.09	0.041	0.066

TABLE 7.6 – Longueur d'établissement du régime dynamique et longueur d'établissement du régime thermique en écoulement laminaire établi.

7.5 Transfert de chaleur en régimes dynamique et thermique établis

Définition : En régime thermique établi $\partial\theta/\partial x^* = 0$ si $T_0 = T_p(x)$ et $\Delta T = T_m(x) - T_p(x)$. On a alors $\theta = \theta(r)$. En définitive, le régime thermique établi est caractérisé par

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T(x, r) \\ T_m = T_m(x) \\ \theta = \theta(r^*) \\ h(x) = h = cste \end{array} \right. \quad (7.154)$$

Si $\theta = (T - T_p)/(T_m - T_p)$ on en déduit que $\theta_p(x^*) = 0$, $\theta_m(x^*) = 1$ et donc que $\theta_p(x^*) - \theta_m(x^*) = -1$ et

$$Nu = -2 \left. \frac{\partial\theta}{\partial r^*} \right|_1 = cste \quad \text{indépendante des nombres de Prandtl et de Reynolds} \quad (7.155)$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_m - T_p) \frac{\partial\theta}{\partial x} + \theta \left(\frac{dT_m}{dx} - \frac{dT_p}{dx} \right) + \frac{dT_p}{dx} = \theta \frac{dT_m}{dx} + (1 - \theta) \frac{dT_p}{dx} \quad (7.156)$$

– Si le flux est imposé sur la paroi alors

$$\frac{dT_p}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = cste \quad (7.157)$$

et donc

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_p}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = cste \quad \Rightarrow \quad T(x, r) = (ax + b) + f(r) \quad (7.158)$$

– Si T_p est imposée

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \theta \frac{dT_m}{dx} = \theta(r) \times f(x) \quad (7.159)$$

7.5.1 Régime laminaire établi dans une conduite plane

Exemple 1 : fluide newtonien s'écoulant dans une conduite chauffée uniformément (q_p imposée).

Dans le cas d'un écoulement incompressible, dynamiquement établi et en **négligeant la diffusion axiale**, l'équation de l'énergie dans une conduite plane, uniformément chauffée avec une densité de flux q_p sur chacune des parois situées en $y = \pm D$, se réduit à

$$\rho C_p u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.160)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad (7.161)$$

$$k \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=D} = q_p \quad (7.162)$$

La conduite étant chauffée à flux constant, on a en régime thermique établi

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{2q_p}{\dot{m}C_p} = \frac{q_p}{\rho C_p u_m D} \quad (7.163)$$

L'équation de l'énergie s'écrit donc

$$\rho C_p u(y) \frac{dT_m}{dx} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.164)$$

Adimensionalisation : On pose

$$y^* = y/D \quad \theta(y^*) = \frac{T(x, y) - T_p(x)}{q_p D/k} \quad u^* = u/u_m = \frac{3}{2}(1 - y^{*2}) \quad (7.165)$$

D'où :

$$\rho C_p u(y) \frac{dT_m}{dx} = \rho C_p u_m u^*(y^*) \frac{q_p}{\rho C_p u_m D} = u^*(y^*) \frac{q_p}{D} \quad (7.166)$$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{k}{D^2} \frac{q_p D}{k} \frac{d^2 \theta}{dy^{*2}} = \frac{q_p}{D} \frac{d^2 \theta}{dy^{*2}} \quad (7.167)$$

on arrive donc à

$$\begin{cases} u^*(y^*) = \frac{d^2 \theta}{dy^{*2}} \\ \frac{d\theta}{dy^*} \Big|_0 = 0 \\ \theta(1) = 0 \end{cases} \quad (7.168)$$

La forme générale du profil de température adimensionnel s'écrit :

$$\theta(y^*) = C_0 + C_1 y^* + \frac{3}{4} y^{*2} - \frac{1}{8} y^{*4} \quad (7.169)$$

Les conditions aux limites conduisent à $C_0 = -5/8$ et $C_1 = 0$.

D'où

$$\theta(y^*) = \left(-\frac{1}{8} y^{*4} + \frac{3}{4} y^{*2} - \frac{5}{8} \right) \quad (7.170)$$

Calcul de θ_m :

$$\theta_m = \int_0^1 u^*(y^*) \theta(y^*) dy^* = \frac{3}{2} \int_0^1 (1 - y^{*2}) \left(-\frac{1}{8} y^{*4} + \frac{3}{4} y^{*2} - \frac{5}{8} \right) dy^* = -\frac{17}{35} \quad (7.171)$$

On en déduit le nombre de Nusselt en régime établi

$$Nu = \frac{hD_h}{k} = \frac{-4}{\theta_m} = \frac{140}{17} = 8,235 \quad (7.172)$$

Exemple 2 : fluide newtonien s'écoulant dans une conduite à température de paroi uniforme.

Adimensionalisation : On pose maintenant $x^* = ax/D^2 u_m$, $y^* = y/D$, $\theta(x^*, y^*) = (T(x, y) - T_p)/(T_e - T_p)$.

L'équation de l'énergie et les conditions aux limites thermiques s'écrivent maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2}(1-y^{*2}) \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \\ \theta(0, y^*) = 1 \\ \theta(x^*, 1) = 0 \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right|_0 = 0 \end{array} \right. \quad (7.173)$$

La solution est recherchée par la méthode de séparation des variables. Soit

$$\theta(x^*, y^*) = f(x^*)g(y^*) \quad (7.174)$$

on arrive à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dx^*} = -\frac{2}{3}\lambda^2 f \\ \frac{d^2 g}{dy^{*2}} + \lambda^2(1-y^{*2})g = 0 \end{array} \right. \quad (7.175)$$

On obtient immédiatement

$$f(x^*) = Ce^{-\frac{2}{3}\lambda^2 x^*} \quad (7.176)$$

où une infinité de valeurs de C et de λ satisfait cette solution. Il s'agit donc à nouveau d'un problème de Sturm-Liouville qui doit être résolu numériquement.

Les calculs conduisent à $Nu = 7,41$: il suffit de limiter le développement de la solution du régime thermique non établi à son premier terme, soit $Nu = \frac{8}{3}\lambda_0^2$ avec $\lambda_0^2 = 2,779$ (tableau 7.1).

7.5.2 Régime laminaire dans une conduite circulaire

7.5.2.1 Fluide newtonien

Exemple 1 : fluide newtonien s'écoulant dans une conduite chauffée uniformément (q_p imposée).

La répartition de vitesse en régime dynamique établi a pour expression :

$$u(r) = 2u_m \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \quad (7.177)$$

Avec les variables adimensionnelles suivantes :

$$x^* = \frac{ax}{u_m R^2} \quad r^* = \frac{r}{R} \quad \theta = \frac{(T - T_e)}{(q_p R/k)} \quad (7.178)$$

la forme adimensionnelle de l'équation de l'énergie s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} 2[1 - r^{*2}] \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_0 = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_1 = 1 \end{array} \right. \quad (7.179)$$

où $(\partial \theta / \partial x^*) = cste$ en régime thermique établi. On a aussi $\theta_m(0) = 0$ car $T_m = T_e$ dans la section d'entrée.

On cherche une solution de la forme

$$\theta(x^*, r^*) = f(x^*) + g(r^*) \quad (7.180)$$

valable uniquement en régime établi. En reportant dans l'équation de l'énergie, on obtient

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{df}{dx^*} = \frac{1}{2r^*(1-r^{*2})} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dg}{dr^*} \right) = C \quad (7.181)$$

Par conséquent

$$\begin{cases} f(x^*) = C x^* + D \\ g(r^*) = 2C \left(\frac{r^{*2}}{4} - \frac{r^{*4}}{16} \right) + C_1 \ln(r^*) + C_2 \end{cases} \quad (7.182)$$

La condition de symétrie en $r^* = 0$ implique que $C_1 = 0$ et la condition de flux imposé que $C = 2$.
Donc

$$\theta(x^*, r^*) = C_3 + 2x^* + \left(r^{*2} - \frac{r^{*4}}{4} \right) \quad (7.183)$$

avec $C_3 = C_2 + D$. On en déduit la température moyenne débitante adimensionnelle

$$\theta_m(x^*) = 2 \int_0^1 u^* \theta r^* dr^* = C_3 + 2x^* + 2 \int_0^1 2(1-r^{*2}) \left(r^{*2} - \frac{r^{*4}}{4} \right) r^* dr^* = C_3 + 2x^* + \frac{7}{24} \quad (7.184)$$

La condition $\theta_m(0) = 0$ implique

$$C_3 = -\frac{7}{24} \Rightarrow \theta_m(x^*) = 2x^* \quad \text{et} \quad \theta_p(x^*) = C_3 + 2x^* + \frac{3}{4} = 2x^* + \frac{11}{24} \quad (7.185)$$

et donc

$$\theta_p - \theta_m(x^*) = \theta(x^*, 1) - \theta_m(x^*) = \frac{11}{24} \quad (7.186)$$

d'où l'expression du nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{2}{\theta_p - \theta_m} \left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_1 = \frac{48}{11} = 4,36 \quad (7.187)$$

Exemple 2 : fluide newtonien s'écoulant dans une conduite à température de paroi uniforme.

Le profil de vitesse en régime dynamique établi et l'équation de l'énergie conservent les mêmes formes que dans l'exemple 1 mais les conditions aux limites thermiques s'écrivent maintenant :

$$\begin{cases} \theta(0, r^*) = 1 \\ \theta(x^*, 1) = 0 \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_0 = 0 \end{cases} \quad (7.188)$$

où $\theta = (T - T_p)/(T_e - T_p)$. La solution est recherchée par la méthode de séparation des variables. Soit

$$\theta(x^*, r^*) = f(x^*)g(r^*) \quad (7.189)$$

on arrive à

$$\begin{cases} \frac{df}{dx^*} = -\lambda^2 f \\ \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dg}{dr^*} \right) + 2\lambda^2 (r^* - r^{*2})g = 0 \end{cases} \quad (7.190)$$

On obtient immédiatement

$$f(x^*) = Ce^{-\lambda^2 x^*} \quad (7.191)$$

où une infinité de valeurs de C et de λ satisfait cette solution. Il s'agit donc à nouveau d'un problème de Sturm-Liouville qui doit être résolu numériquement.

Les calculs conduisent à $Nu = 3,66$.

7.5.2.2 Fluide non-newtonien de type Ostwald-de-Waele

Exemple 1 : fluide non-newtonien de type Ostwald-de-Waele s'écoulant dans une conduite chauffée uniformément (q_p imposée).

La répartition de vitesse en régime dynamique établi a pour expression (chapitre 2, Eq. 2-41) :

$$u(r^*) = u_m \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) (1 - r^{*(n+1)/n}) \quad (7.192)$$

où n est l'indice de comportement. La forme adimensionnelle de l'équation de l'énergie s'écrit

$$\begin{cases} \frac{3n+1}{n+1} [1 - r^{*(n+1)/n}] \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*}) \\ \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_0 = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \Big|_1 = 1 \end{cases} \quad (7.193)$$

avec $\theta = (T - T_e)/(q_p R/k)$ et $(\partial \theta / \partial x^*) = cste$ (régime thermique établi). On a aussi $\theta_m(0) = 0$ car $T_m = T_e$ dans la section d'entrée.

On cherche une solution de la forme

$$\theta(x^*, r^*) = f(x^*) + g(r^*) \quad (7.194)$$

valable uniquement en régime établi. En reportant dans l'équation de l'énergie, on obtient

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \frac{df}{dx^*} = \frac{n+1}{3n+1} \frac{1}{r^* [1 - r^{*(n+1)/n}]} \frac{d}{dr^*} (r^* \frac{dg}{dr^*}) = C \quad (7.195)$$

Par conséquent

$$\begin{cases} f(x^*) = C x^* + D \\ g(r^*) = \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) C \left[\frac{r^{*2}}{4} - \left(\frac{n}{3n+1} \right)^2 r^{*(3n+1)/n} \right] + C_1 \ln(r^*) + C_2 \end{cases} \quad (7.196)$$

La condition de symétrie en $r^* = 0$ implique que $C_1 = 0$ et la condition de flux imposé que $C = 2$. Donc

$$\theta(x^*, r^*) = C_3 + 2x^* + 2 \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left[\frac{r^{*2}}{4} - \left(\frac{n}{3n+1} \right)^2 r^{*(3n+1)/n} \right] \quad (7.197)$$

avec $C_3 = C_2 + D$. On en déduit la température moyenne débitante adimensionnelle

$$\theta_m(x^*) = C_3 + 2x^* + \frac{(3n+1)^3 - 8n^3}{4(n+1)(3n+1)(5n+1)} \quad (7.198)$$

La condition $\theta_m(0) = 0$ implique

$$C_3 = -\frac{(3n+1)^3 - 8n^3}{4(n+1)(3n+1)(5n+1)} \quad \text{et} \quad \theta_m(x^*) = 2x^* \quad (7.199)$$

et donc

$$\theta_p - \theta_m(x^*) = \theta(x^*, 1) - \theta_m(x^*) = \frac{1 + 12n + 31n^2}{4(3n + 1)(5n + 1)} \quad (7.200)$$

d'où l'expression du nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{2}{\theta_p - \theta_m} \left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_1 = \frac{8(3n + 1)(5n + 1)}{1 + 12n + 31n^2} \quad (7.201)$$

Si $n = 0$ (fluide parfait ou écoulement piston) on obtient $Nu = 8$; si $n = 1$ (fluide newtonien) $Nu = 48/11 = 4,36$ et si $n \rightarrow \infty$ (profil linéaire) $Nu = 3,87$.

Exemple 2 : fluide non-newtonien de type Ostwald-de-Waele s'écoulant dans une conduite à température de paroi uniforme.

Le profil de vitesse en régime dynamique établi et l'équation de l'énergie conservent les mêmes formes que dans l'exemple 1 mais les conditions aux limites thermiques s'écrivent maintenant :

$$\begin{cases} \theta(0, r^*) = 1 \\ \theta(x^*, 1) = 0 \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_0 = 0 \end{cases} \quad (7.202)$$

où $\theta = (T - T_p)/(T_e - T_p)$. La solution est recherchée par la méthode de séparation des variables. Soit

$$\theta(x^*, r^*) = f(x^*)g(r^*) \quad (7.203)$$

on arrive à

$$\begin{cases} \frac{df}{dx^*} = -\lambda^2 f \\ \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dg}{dr^*} \right) + \frac{3n+1}{n+1} \lambda^2 (r^* - r^{*(2n+1)/n}) g = 0 \end{cases} \quad (7.204)$$

On obtient immédiatement

$$f(x^*) = C e^{-\lambda^2 x^*} \quad (7.205)$$

où une infinité de valeurs de C et de λ satisfait cette solution. Il s'agit donc à nouveau d'un problème de Sturm-Liouville qui doit être résolu numériquement. Les calculs conduisent à des nombres de Nusselt compris entre $Nu = 5,78$ pour $n = 0$ (écoulement "piston") et $Nu = 3,26$ pour $n = \infty$ (limite d'un fluide dilatant ayant un profil de vitesse bi-linéaire). Pour un fluide newtonien ($n = 1$), on obtient $Nu = 3,66$.

7.5.3 Régime turbulent établi dans une conduite circulaire

Les développements qui suivent supposent que :

- le nombre de Prandtl turbulent, $Pr_t = \epsilon_M/\epsilon_T$, est constant,
- la paroi est chauffée uniformément ($q_p = cste$) ce qui implique (Eq.7.32)

$$q_p = \rho C_p \bar{u}_m \frac{R}{2} \left(\frac{d\bar{T}_m}{dx} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{d\bar{T}_m}{dx} = cste \quad (7.206)$$

- le profil de vitesse est suffisamment "plat" pour que $\bar{u} \approx \bar{u}_m$ dans toute la section de la conduite.

Cette troisième hypothèse est acceptable si $Pr \geq 1$ parce que les expériences montrent que les variations de température ne sont importantes que dans la sous-couche laminaire et dans la couche tampon (soit $y^+ \leq 30$). En effet, si $Pr > 1$ l'épaisseur de la couche limite thermique est inférieure à celle de la couche limite dynamique lorsque les effets moléculaires dominent (en régime laminaire ou en régime turbulent si $y^+ < 5$) ou sont du même ordre que les effets tourbillonnaires ($5 < y^+ < 30$).

L'équation de l'énergie s'écrit sous forme dimensionnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C_p \bar{u}_m \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{q}) \\ \text{avec les conditions aux limites} \\ k \frac{\partial \bar{T}(x, r)}{\partial r} \Big|_R = q_p \quad , \quad \frac{\partial \bar{T}(x, r)}{\partial r} \Big|_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{q}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (7.207)$$

Le flux de chaleur turbulent a pour expression

$$\bar{q}(r) = (k + k_T) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) = \rho C_p (a + \epsilon_T) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) = -\rho C_p (a + \epsilon_T) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \quad (7.208)$$

où k_T est la conductivité thermique turbulente et $y = (R - r)$ la coordonnée radiale ayant son origine sur la paroi (Fig. 7.14).

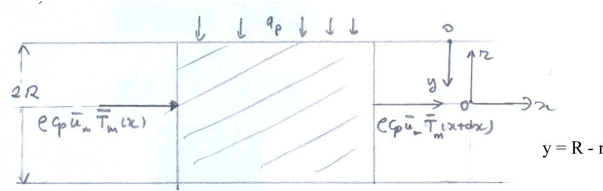


FIGURE 7.14 – Bilan thermique entre x et $x + dx$ et système de coordonnées.

En remplaçant $\partial \bar{T} / \partial x$ par $d \bar{T}_m / dx$ dans l'équation de l'énergie et en l'intégrant entre $r = 0$ et r on obtient

$$\bar{q}(r) = \rho C_p \bar{u}_m \frac{r}{2} \frac{d \bar{T}_m}{dx} \quad (7.209)$$

Le rapport $\bar{q}(r)/q_p$ montre que \bar{q} varie linéairement entre $r = 0$ et $r = R$. Soit

$$\frac{\bar{q}(r)}{q_p} = \frac{r}{R} = 1 - \frac{y}{R} \quad (7.210)$$

et donc

$$\bar{q}(r) = q_p \left(1 - \frac{y}{R} \right) = -\rho C_p (a + \epsilon_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (7.211)$$

Cette expression est analogue à

$$\bar{\tau}(r) = \tau_p \left(1 - \frac{y}{R} \right) = \rho (\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (7.212)$$

On tire de ces deux relations

$$-\frac{C_p (a + \epsilon_T)}{q_p} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \frac{(\nu + \epsilon_M)}{\tau_p} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (7.213)$$

Cette égalité permet de relier le nombre de Stanton, $St = Nu/(Re Pr) = h/(\rho C_p \bar{u}_m)$, à C_f , Pr et Pr_t . Pour cela, il suffit de calculer l'écart de température ($T_p - \bar{T}_m$) puisque $h = q_p/(T_p - \bar{T}_m)$.

Dans la suite, on va déterminer la distribution de température en se basant sur le profil "universel" de température.

- a) Sous-couche diffusive (quantité de mouvement et thermique) : $y/R \ll 1$ et donc $\bar{q} \approx q_p$ et $\epsilon_T \ll a$. D'où

$$\bar{q}(y) \approx q_p = -\rho C_p a \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = -\frac{\rho C_p u_f}{Pr} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y^+} \right) \quad (7.214)$$

En intégrant entre $y^+ = 0$ et y^+ , on obtient

$$\bar{T} = T_p - \frac{q_p}{\rho C_p u_f} Pr y^+ \quad (7.215)$$

et donc

$$\bar{T}_5 = T_p - 5Pr \left(\frac{q_p}{\rho C_p u_f} \right) \quad (7.216)$$

où T_p est inconnue.

- b) Couche tampon : on a toujours $y/R \ll 1$ et donc $\bar{q} \approx q_p$ mais $\epsilon_T \approx a$ et $u^+ = 5[1 + \ln(\frac{y^+}{5})]$.

Par conséquent

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{5}{y^+} \quad , \quad \epsilon_M = \nu \left[\frac{y^+}{5} - 1 \right] \quad (\text{cf plaque plane}) \quad (7.217)$$

En reportant dans l'expression de q , on obtient

$$\bar{q}(y) \approx q_p = -\rho C_p \left[a + \frac{\nu}{Pr_t} \left(\frac{y^+}{5} - 1 \right) \right] \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \quad (7.218)$$

ou en fonction de $y^+ = Ru_f/\nu$

$$q_p = -\rho C_p u_f \left[\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \left(\frac{y^+}{5} - 1 \right) \right] \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y^+} \right) \quad (7.219)$$

En intégrant cette équation entre $y^+ = 5$ et y^+ , on arrive à

$$\bar{T} = \bar{T}_5 - \frac{5q_p Pr_t}{\rho C_p u_f} \left[\ln \left[\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \left(\frac{y^+}{5} - 1 \right) \right] \right]_{5}^{y^+} \quad (7.220)$$

Soit

$$\bar{T} = \bar{T}_5 - \frac{5q_p Pr_t}{\rho C_p u_f} \left[\ln \left[1 + \frac{Pr}{Pr_t} \left(\frac{y^+}{5} - 1 \right) \right] \right] \quad (7.221)$$

et en remplaçant \bar{T}_5 par son expression

$$\bar{T} = T_p - \frac{5q_p}{\rho C_p u_f} \left\{ Pr + Pr_t \ln \left[1 + \frac{Pr}{Pr_t} \left(\frac{y^+}{5} - 1 \right) \right] \right\} \quad (7.222)$$

Au bord de la couche tampon

$$\bar{T}_{30} = T_p - \frac{5q_p}{\rho C_p u_f} \left\{ Pr + Pr_t \ln \left(1 + 5 \frac{Pr}{Pr_t} \right) \right\} \quad (7.223)$$

- c) Noyau turbulent : $y^+ > 30$, $\nu \ll \epsilon_M$, $a \ll \epsilon_T$ et $u^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,5$.

La contrainte a pour expression

$$\bar{\tau} = \tau_p(1 - \frac{y}{R}) = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = (\frac{\rho \epsilon_M}{\nu}) u_f^2 \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = (\frac{\rho \epsilon_M}{\nu}) u_f^2 \frac{2,5}{y^+} \quad (7.224)$$

mais, puisque $\tau_p/\rho = u_f^2$ et $\epsilon_T = \epsilon_M/Pr_t$, on en déduit que

$$(1 - \frac{y}{R}) = \frac{\epsilon_M}{\nu} \frac{2,5}{y^+} \quad \text{et donc} \quad \epsilon_T = \frac{\nu}{Pr_t} (1 - \frac{y}{R}) (\frac{y^+}{2,5}) \quad (7.225)$$

De plus

$$\bar{q}(y) = (1 - \frac{y}{R}) q_p = -\rho C_p \epsilon_T (\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}) = -\rho C_p \epsilon_T \frac{u_f}{\nu} (\frac{\partial \bar{T}}{\partial y^+}) \quad (7.226)$$

On arrive donc à la relation

$$(1 - \frac{y}{R}) q_p = -\frac{\rho C_p u_f}{Pr_t} (1 - \frac{y}{R}) (\frac{y^+}{2,5}) (\frac{\partial \bar{T}}{\partial y^+}) \quad (7.227)$$

soit

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial y^+} = -\frac{2,5 Pr_t q_p}{\rho C_p u_f} (\frac{1}{y^+}) \quad (7.228)$$

En intégrant entre $y^+ = 30$ et y^+ on obtient la distribution de température dans le noyau turbulent

$$\bar{T} = \bar{T}_{30} - \frac{2,5 q_p Pr_t}{\rho C_p u_f} \ln(\frac{y^+}{30}) \quad (7.229)$$

Finalement, en remplaçant \bar{T}_{30} par son expression, on en déduit la différence de température entre la paroi et y^+ :

$$\bar{T}(y^+) - T_p = -\frac{5 q_p}{\rho C_p u_f} \left[Pr + Pr_t \ln(1 + 5 \frac{Pr}{Pr_t}) + \frac{Pr_t}{2} \ln(\frac{y^+}{30}) \right] \quad (7.230)$$

Dans cette relation, T_p reste inconnue. Cependant, pour calculer le coefficient d'échange (ou le nombre de Nusselt) il suffit seulement de déterminer la valeur de l'écart $(\bar{T}_m - T_p)$. Soit

$$\bar{T}_m - T_p = \left(\frac{2}{\bar{u}_m R^2} \int_0^R \bar{u} \bar{T} r dr \right) - T_p \quad (7.231)$$

Pour obtenir une expression analytique, la difficulté réside dans le calcul de l'intégrale du produit $(\bar{u} \bar{T} r)$. Le moyen de contourner cette difficulté est d'utiliser les profils de vitesse et de température en puissance de (y/R) pour calculer \bar{u}_m et $(T_p - \bar{T}_m)/(T_p - \bar{T}_c)$. Soit

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{max}} = (\frac{y}{R})^{1/7} \quad \text{et} \quad \frac{T_p - \bar{T}}{T_p - \bar{T}_c} = (\frac{y}{R})^{1/7} \quad \text{valable pour} \quad Re < 2.10^5 \quad (7.232)$$

ce qui conduit à

$$T_p - \bar{T}_m = \frac{\int_0^R \bar{u} (T_p - \bar{T}) r dr}{\int_0^R \bar{u} r dr} = \frac{\int_0^R \bar{u}_{max} (\frac{y}{R})^{1/7} (T_p - \bar{T}_c) (\frac{y}{R})^{1/7} r dr}{\int_0^R \bar{u}_{max} (\frac{y}{R})^{1/7} r dr} \quad (7.233)$$

comme $(T_p - \bar{T}_c)$ et \bar{u}_{max} sont indépendants de r , on arrive à

$$\frac{T_p - \bar{T}_m}{T_p - \bar{T}_c} = \frac{\int_0^R (\frac{y}{R})^{2/7} r dr}{\int_0^R (\frac{y}{R})^{1/7} r dr} = 0,833 \quad (7.234)$$

On peut alors exprimer le nombre de Stanton sous la forme suivante

$$St = \frac{h}{\rho C_p \bar{u}_m} = \frac{q_p}{\rho C_p \bar{u}_m (T_p - \bar{T}_m)} = \frac{q_p}{\rho C_p \bar{u}_m (T_p - \bar{T}_c)} \times \left(\frac{T_p - \bar{T}_c}{T_p - \bar{T}_m} \right) = \frac{q_p}{0,833 \rho C_p \bar{u}_m (T_p - \bar{T}_c)} \quad (7.235)$$

Il suffit maintenant de calculer $(T_p - \bar{T}_c)$ à partir du profil "universel". Soit

$$T_p - \bar{T}_c = \frac{5q_p}{\rho C_p u_f} \left[Pr + Pr_t \ln(1 + 5 \frac{Pr}{Pr_t}) + \frac{Pr_t}{2} \ln(\frac{R^+}{30}) \right] \quad (7.236)$$

mais

$$R^+ = \frac{Re}{2} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \quad \text{et} \quad u_f = \bar{u}_m \sqrt{\frac{C_f}{2}} \quad (7.237)$$

d'où

$$T_p - \bar{T}_c = \frac{5q_p}{\rho C_p \bar{u}_m} \sqrt{\frac{2}{C_f}} \left[Pr + Pr_t \ln(1 + 5 \frac{Pr}{Pr_t}) + \frac{Pr_t}{2} \ln(\frac{Re}{60} \sqrt{\frac{C_f}{2}}) \right] \quad (7.238)$$

et

$$St = \frac{\sqrt{C_f}}{0,833 \times 5\sqrt{2} \left[Pr + Pr_t \ln(1 + 5 \frac{Pr}{Pr_t}) + \frac{Pr_t}{2} \ln(\frac{Re}{60} \sqrt{\frac{C_f}{2}}) \right]} \quad (7.239)$$

Finalement, on arrive à la relation de Karman-Boelter-Martinelli :

$$Nu = \frac{0,17 \sqrt{C_f} Re Pr}{Pr + Pr_t \left[\ln(1 + 5 \frac{Pr}{Pr_t}) + 0,5 \ln(Re \sqrt{C_f}) - 2,22 \right]} \quad (7.240)$$

Cette relation montre que

- le transfert de chaleur ne peut pas augmenter, pour un fluide newtonien, sans augmenter le frottement sur la paroi et donc la consommation d'énergie mécanique,
- contrairement au régime laminaire thermiquement établi, le nombre de Nusselt n'est pas une constante indépendante des nombres de Reynolds et de Prandtl.

Partant de cette relation fondamentale, un grand nombre de corrélations, plus ou moins empiriques, ont été dérivées sous la forme générique suivante, supposée être applicable quelle que soit la forme de la section de la conduite et pour $Pr_t \approx 1$:

$$St = \frac{Nu}{Re_{Dh} Pr} = \frac{C_f/2}{C_1 + C_2 g(Pr) \sqrt{C_f/2}} \quad (7.241)$$

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées à partir de résultats expérimentaux ou de solutions numériques mais il faut postuler la relation $g(Pr)$ qui doit toujours vérifier la condition

$$C_1 + C_2 g(Pr = 1) \sqrt{C_f/2} = 1 \quad (\text{analogie de Reynolds})$$

Relations empiriques

Les relations empiriques permettant de calculer le transfert de chaleur en régime turbulent sont souvent basées sur l'analogie de Chilton-Colburn qui s'écrit

$$St = \frac{C_f}{2} Pr^{-2/3} \quad (7.242)$$

ou encore puisque $St = Nu_D / Re_D Pr$

$$Nu_D = \frac{C_f}{2} Re_D Pr^{1/3} = \frac{f}{8} Re_D Pr^{1/3} \quad (7.243)$$

En remplaçant f par la relation de Blasius, on obtient

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^{1/3} \quad (7.244)$$

appelée équation de Colburn valable pour

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 \leq Pr \leq 160 \\ Re_D \geq 10^4 \\ L/D \geq 60 \end{array} \right.$$

Les propriétés physiques du fluide doivent être évaluées à une température moyenne que l'on approxime souvent par la moyenne des températures débitantes d'entrée et de sortie, soit $T_m = (T_{m,e} + T_{m,s})/2$. Il faut noter que la conduite doit être suffisamment longue ($L \geq 60$ diamètres) pour que cette formule soit applicable.

La relation de Colburn présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte les variations de viscosité avec la température. Lorsque l'écoulement n'est pas isotherme, le profil de vitesse est modifié après la longueur d'établissement du régime dynamique car la viscosité varie dans la direction axiale. Par conséquent, le coefficient de perte de charge est augmenté ou diminué, selon le sens de variation de la viscosité avec la température et selon que le fluide est chauffé ou refroidi dans la conduite.

La corrélation de Dittus-Boelter tient compte de l'effet du refroidissement ou du chauffage, par l'intermédiaire d'une modification de l'exposant du nombre de Prandtl dans la corrélation de Colburn. La corrélation de Dittus-Boelter s'écrit

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n \quad (7.245)$$

avec $n = 0,4$ lorsque le fluide est chauffé et $n = 0,3$ lorsqu'il est refroidi. Le domaine de validité de cette corrélation est le même que pour la corrélation de Colburn.

Lorsque les variations de viscosité avec la température sont importantes, il est recommandé d'utiliser la corrélation de Sieder et Tate

$$Nu_D = 0,027 Re_D^{4/5} Pr^{1/3} \left[\frac{\mu_m}{\mu_p} \right]^{0,14} \quad (7.246)$$

où μ_m est la viscosité à la température moyenne du fluide et μ_p la viscosité à la température de la paroi. Toutes les autres propriétés physiques doivent être prises à la température moyenne du fluide. Son domaine d'application est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 \leq Pr \leq 10^4 \\ Re_D \geq 10^4 \\ L/D \geq 60 \end{array} \right.$$

Pour des tubes plus courts, il faut tenir compte des effets d'entrée. Le nombre de Nusselt est alors donné par

$$Nu_D = 0,036 Re_D^{4/5} Pr^{1/3} \left[\frac{D}{L} \right]^{0,055} \quad (7.247)$$

valable pour $10 \leq L/D \leq 400$, $0,7 < Pr \leq 10^4$ et $Re_D \geq 10^4$.

7.6 Exercices

EXERCICE 1 : Etablissement des régimes dynamique et thermique dans une conduite plane.

De l'eau s'écoule en régime laminaire dans une conduite plane de diamètre hydraulique très grand devant l'épaisseur des couches limites sur les parois de sorte que le problème se ramène à celui de deux écoulements sur deux plaques planes indépendantes.

Dans cet exercice, on vous demande de calculer les propriétés de l'écoulement, caractérisé par les épaisseurs des deux couches limites dynamiques sur chacune des parois et par la différence de pression requise pour faire circuler le fluide dans la conduite, et de calculer la variation axiale de température des parois chauffées uniformément par des résistances électriques.

a)- Problème dynamique :

a1)- Donner les expressions littérales des variations de l'épaisseur des couches limites dynamiques le long des parois ($\delta(x)$), des coefficients de frottement et de la force de traînée exercée sur une longueur L des deux parois (F_D). En déduire l'expression de la différence de pression Δp entre l'entrée et la sortie de la conduite de longueur L nécessaire pour faire circuler le fluide.

a2)- Application numérique : $L = 0,5 \text{ m}$, $d = 0,1 \text{ m}$, $u_\infty = 0,1 \text{ m/s}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Calculer $\delta(x)$, $\delta(L)$, F_D et Δp .

b)- Problème thermique :

b1)- Donner les expressions littérales des variations de l'épaisseur des couches limites thermiques le long des parois ($\delta_T(x)$) et de la température $T_p(x)$. En déduire l'expression de la température moyenne $\overline{T_p}$.

b2)- Application numérique : $Pr = 7$, $k = 0,6 \text{ W/mK}$, $q_p = 10^3 \text{ W/m}^2$. Calculer $T_p(L)$ et $\overline{T_p}$.

EXERCICE 2 : Convection forcée interne : régime thermique non établi

De l'eau entre à $T_e = 20^\circ\text{C}$ dans une conduite de section carrée, de côté $b=2,5\text{cm}$, avec un débit $\dot{m}_c = 0,02 \text{ kg/s}$. Les parois de la conduite sont maintenues à la température uniforme $T_p = 90^\circ\text{C}$.

a)- Déterminer la longueur X_t d'établissement du régime thermique.

b)- Déterminer la longueur L de la conduite nécessaire pour que l'eau atteigne $T_s = 70^\circ\text{C}$ en sortie. Utiliser la corrélation suivante :

$$\bar{Nu} = 1,86 \left(\frac{Re Pr}{L/D_h} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (7.1)$$

où les propriétés physiques du fluide sont prises à la température moyenne $T_m = (T_e + T_s)/2$ sauf μ_p qui est la viscosité du fluide à la température de la paroi.

Propriétés de l'eau à $T_m = 45^\circ\text{C}$: $\rho = 992,3 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 4180 \text{ J/kg.K}$, $\mu = 577 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $k = 0,634 \text{ W/m.K}$, $Pr = 4,01$.

Viscosité de l'eau à T_p : $\mu_p = 306 \cdot 10^{-6} \text{ N.s/m}^2$

EXERCICE 3 : Calcul du nombre de Nusselt en régime laminaire thermique établi.

Un tube de grande longueur est chauffée uniformément avec une densité de flux q_p . On admet que les régimes dynamique et thermiques sont établis et que l'écoulement est laminaire.

a) Ecrire l'équation de l'énergie et montrer que la distribution de température est de la forme

$$T(r, x) = \alpha x + f(r) \quad (7.1)$$

où α est une constante à déterminer.

b) Donner l'expression de $f(r)$ puis celle de $T(r, x) - T_p(x)$.

c) Calculer la température moyenne débitante et en déduire l'expression du nombre de Nusselt.

EXERCICE 4 : Convection forcée dans un tube en régime laminaire.

Les distributions de vitesse axiale et de température d'un écoulement laminaire établi dans un tube de rayon $R = 5 \text{ cm}$ sont données par les relations :

$$u(r) = 2(1 - 0,04r^2) \text{ en cm/s} \quad \text{et} \quad T(r) = 30(1 + 2r) \text{ en } ^\circ\text{C} \quad (7.1)$$

où r est la distance en centimètre depuis l'axe du tube.

a)- Calculer la vitesse moyenne, u_m , et la température moyenne débitante, T_m , du fluide.

b)- Le fluide en écoulement est de l'air ($k = 0,025 \text{ W/m K}$). Calculer la densité de flux de chaleur échangée avec la paroi supposée isotherme.

EXERCICE 5 : Convection forcée dans un tube en régime dynamique établi

Un fluide entre avec un débit massique \dot{m} dans un tube de diamètre D et de longueur L à la température moyenne débitante $T_{m,e}$. La densité de flux appliquée à la surface du tube varie sinusoïdalement suivant la loi :

$$q_p(x) = q_{p,m} \sin(\pi x/L) \quad (7.1)$$

où $q_{p,m}$ est connue et x est la distance depuis l'entrée du tube.

Déterminer les variations de la température moyenne débitante du fluide, $T_m(x)$, et de la température de la paroi du tube, $T_p(x)$, en régime thermique établi. Donner les abscisses des points de la paroi du tube où la température est maximale.

EXERCICE 6 : Convection forcée dans un faisceau de tubes

On veut chauffer un fluide de la température d'entrée T_e à la température moyenne débitante T_s en le faisant circuler dans un faisceau de N tubes de diamètre D et de longueur L dont les parois sont maintenues à température uniforme par condensation d'une vapeur (condenseur).

1)- Montrer que le nombre de Stanton moyen, $St = \bar{h}/(\rho c_p u_m)$, a pour expression :

$$St = \left(\frac{T_s - T_e}{\Delta T_{m,l}} \right) \left(\frac{D}{4L} \right) \quad (7.1)$$

où $\Delta T_{m,l}$ est la moyenne logarithmique des écarts de température.

En déduire que St peut aussi s'écrire

$$St = \left(\frac{T_s - T_e}{\Delta T_{m,l}} \right) \left(\frac{\rho f u_m^2}{8 \Delta P} \right) \quad (7.2)$$

où f est le coefficient de perte de charge et ΔP la chute de pression entre l'entrée et la sortie d'un tube. Montrer que cette relation permet de calculer le coefficient d'échange moyen à partir des mesures du débit et de la chute de pression.

2)- Application numérique : On veut chauffer un débit massique d'air $\dot{m} = 1,8 \text{ kg/s}$ de $T_e = 288 \text{ K}$ à

$T_s = 348\text{ K}$ en le faisant circuler dans un faisceau de tubes dont les parois sont maintenues à $T_p = 373\text{ K}$ par condensation de vapeur d'eau à pression atmosphérique. La chute de pression entre l'entrée et la sortie des tubes de diamètre $D = 25\text{ mm}$ ne devant pas excéder $\Delta P = 7,5 \cdot 10^2\text{ N/m}^2$, calculer le nombre de tubes nécessaire et leur longueur.

Masse volumique et viscosité de l'air à 318 K : $\rho = 1,11\text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,192 \cdot 10^{-4}\text{ N.s/m}^2$

On suppose le régime turbulent (le vérifier *a posteriori*) : $f = 0,316\text{ Re}^{-1/4}$ (Blasius) et $St = 0,046\text{ Re}^{-1/4}$.

EXERCICE 7 : *Convection forcée en régime laminaire établi dans un espace annulaire.*

De l'eau s'écoule avec un débit $\dot{m} = 0,02\text{ kg/s}$ dans un espace annulaire formé par un tube intérieur de diamètre $D_1 = 25\text{ mm}$ et un tube extérieur de diamètre $D_2 = 100\text{ mm}$. La température du tube intérieur est maintenue constante par condensation de vapeur et égale à $T_1 = 100^\circ\text{C}$. Le tube extérieur est isolé ($q_2 = 0$).

a) En régime laminaire thermiquement établi, le nombre de Nusselt sur la surface du tube interne est $Nu_1 = h_1 D_h / k = 7,37$.

Quelle doit être la longueur L de l'espace annulaire pour que l'eau entrant à $T_{m,e} = 20^\circ\text{C}$ sorte à $T_{m,s} = 75^\circ\text{C}$?

Propriétés de l'eau à $\bar{T}_m = 47,5^\circ\text{C}$: $C_p = 4187\text{ J/kg.K}$, $k = 0,668\text{ W/m.K}$, $\mu = 389 \cdot 10^{-6}\text{ N.s/m}^2$.

Vérifier que le régime est bien laminaire.

b) Le régime peut être supposé établi à partir d'une longueur d'entrée adimensionnelle $X_T = (x/D_h) = 0,02(\text{RePr})$. Comparer X_T et L si $\text{Pr} = 7$. Conclure.

EXERCICE 8 : *Fluide newtonien en écoulement laminaire dans un tube.*

On recherche le profil de température, en régime quasi établi, dans un fluide en écoulement laminaire, qui échange à travers la paroi d'un tube, chauffée à densité de flux constante q_p . On suppose que la masse volumique et la viscosité du fluide qui circule dans le tube restent constantes. On se place dans le système d'axes de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . L'axe (Oz) est confondu avec celui du tube et orienté dans le sens de l'écoulement. Le profil de vitesse est parabolique et suit la loi :

$$v_z(r) = v_{z,max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad v_{z,max} = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} R^2 \quad (7.1)$$

où L est la longueur du tube, R son rayon, r la distance du centre à la paroi du tube, \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_L sont les pressions motrices respectives en $z=0$ et $z=L$.

La dissipation visqueuse est négligeable. La conductivité thermique du fluide est considérée comme constante. On négligera la conduction axiale devant la composante radiale et la convection axiale.

1. Compte tenu des hypothèses du problème, montrer que l'équation de l'énergie simplifiée peut s'écrire :

$$\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (7.2)$$

avec les trois conditions aux limites :

$$\text{en } r = 0 : \frac{\partial T}{\partial r} = 0 ; \quad \text{en } r = R : -k \frac{\partial T}{\partial r} = q_p ; \quad \text{en } z = 0 : T = T_0 \quad (7.3)$$

où T_0 désigne la température d'entrée du fluide dans le tube.

2. On introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$T^* = \frac{k(T - T_0)}{q_p R} ; \quad r^* = \frac{r}{R} ; \quad z^* = \frac{kz}{\rho C_p v_{z,max} R^2} \quad (7.4)$$

Montrer que, après ce changement de variables, l'équation de l'énergie devient :

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \quad (7.5)$$

avec les nouvelles conditions aux limites :

$$\text{en } r^* = 0 : \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 ; \quad \text{en } r^* = 1 : \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = -1 ; \quad \text{en } z^* = 0 : T^* = 0 \quad (7.6)$$

3. Un traitement complet de l'équation (5) ne peut être envisagé que par voie numérique. Néanmoins, on peut établir une solution analytique partielle, s'il l'on ne prend en compte que la portion de tube suffisamment éloignée de l'entrée pour que l'on puisse supposer que le profil de température est quasi établi. Dans ces conditions, on envisage de séparer les influences des deux variables et la solution recherchée est de la forme :

$$T^* = \varphi(r^*) + C_0 z^* \quad (7.7)$$

où la fonction $\varphi(r^*)$ fixe la forme du profil de température et C_0 est une constante. Les deux premières conditions aux limites (eq.(6)) continuent à convenir, mais la troisième ne peut plus être utilisée puisque nous avons exclu l'entrée du tube ($z^* = 0$) du domaine étudié. Elle est remplacée par la condition suivante :

$$z^* = - \int_0^1 T^* (1 - r^{*2}) r^* dr^* \quad (7.8)$$

Compte tenu de la séparation des variables et des nouvelles conditions aux limites, montrer que le résultat final prend la forme :

$$T^* = -4z^* - r^{*2} + \frac{1}{4}r^{*4} + \frac{7}{24} \quad (7.9)$$

4. *Application numérique :*

On étudie le chauffage électrique, avec une densité de flux constante q_p , d'une huile légère, initialement à 20°C, en écoulement dans un tube.

- Calculer le nombre de Reynolds. Quel est le régime d'écoulement ?
- Calculer la vitesse débitante v_m et donner son expression en fonction de la vitesse maximale $v_{z,max}$.
- Donner les équations du profil de température à 30 m de l'entrée dans le tube, puis à 60 m. Calculer les valeurs des températures T et T^* entre la paroi ($r=R$) et le centre du tube ($r=0$), à 30 m et à 60 m de l'entrée du tube. On pourra récapituler les résultats dans un tableau. Commenter les résultats obtenus.

Données : $q_p = -10000 \text{ W.m}^{-2}$; diamètres du tube : $D_{int} = 26 \text{ mm}$, $D_{ext} = 34 \text{ mm}$; vitesse moyenne d'écoulement de l'huile : $v_m = 0,372 \text{ m.s}^{-1}$; $C_p = 1200 \text{ J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$; $k = 0,42 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$; $\rho = 950 \text{ kg.m}^{-3}$, $\mu = 9.10^{-3} \text{ Pa.s}$.

EXERCICE 9 : Écoulement d'un fluide dans une conduite plane à parois poreuses.

Un gaz s'écoule dans une conduite plane horizontale à parois poreuses. Du gaz injecté à travers la paroi inférieure est aspiré à travers la paroi supérieure (Fig. 7.15) avec le même débit.

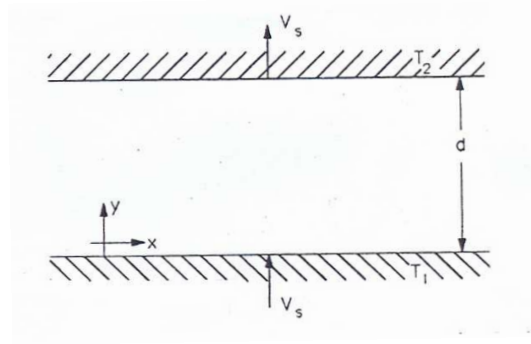


FIGURE 7.15 – Convection dans une conduite à paroi poreuse.

On admet que la composante verticale de la vitesse est uniforme et égale à v_s à travers la conduite.

a) Montrer que l'équation de quantité de mouvement s'écrit en régime dynamique établi :

$$\rho v_s \frac{du}{dy} = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dy^2} \quad (7.1)$$

b) Calculer le profil de vitesse $u(y)$ en tenant compte des conditions d'adhérence $u(0) = u(d) = 0$.

c) La vitesse de l'écoulement étant faible, on néglige le terme de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie. **En supposant que $T(x, y) = T(y)$ en régime thermique établi**, montrer que l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p v_s \frac{dT}{dy} = k \frac{d^2T}{dy^2} \quad (7.2)$$

En déduire que le profil de température a pour expression

$$T(y) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{(e^{v_s y/a} - 1)}{(e^{v_s d/a} - 1)} \quad (7.3)$$

où a est la diffusivité thermique.

d) Calculer les densités de flux de chaleur transférées aux parois et les comparer au cas où $v_s = 0$.

EXERCICE 10 : *Dissipation visqueuse dans un palier de lubrification*

On considère un écoulement entre deux plans parallèles horizontaux distants de $2d$ et se déplaçant, selon la direction x , aux vitesses opposées $u(x, -d) = -u_p$ et $u(x, d) = u_p$ (Fig. 7.17).

a)- Le gradient de pression axial étant nul et le problème unidimensionnel, montrer que, dans le système de coordonnées représenté sur la figure 1, le profil de vitesse a pour expression

$$u(y) = \left(\frac{u_p}{d}\right) y \quad (7.1)$$

b)- La température de la paroi située en $y = -d$ est fixée à $T(-d) = T_0$ et la paroi en $y = d$ est adiabatique ($dT/dy|_d = 0$). La dissipation par frottement visqueux produit une augmentation de température du fluide que l'on cherche à déterminer.

Montrer que l'équation de l'énergie se réduit à

$$0 = k \frac{d^2T}{dy^2} + \mu \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \quad (7.2)$$

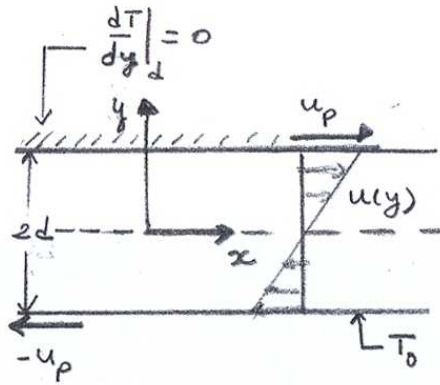


FIGURE 7.16 –

Donner sa solution en tenant compte du profil de vitesse et des conditions thermiques sur les parois.

c)- Donner l'expression de la densité de flux de chaleur transférée à la paroi isotherme ($y = -d$) et celle de la température de la paroi adiabatique (en $y = d$).

d)- **Application numérique :** le fluide est de l'huile de lubrification de conductivité thermique $k = 0,15 \text{ W/mK}$ et de viscosité dynamique $\mu = 0,03 \text{ Pa.s}$. Les deux parois sont distantes de $2d = 0,2 \text{ mm}$ et se déplacent à la vitesse $u_p = 10 \text{ m/s}$. Calculer l'écart de température entre les parois et la densité de flux transférée à la paroi isotherme.

e)- Ecrire la solution de l'équation de l'énergie sous forme adimensionnelle en posant :

$$Y = y/d \quad \theta = T/T_0 \quad (7.3)$$

Quels sont les nombres adimensionnels qui apparaissent dans la solution ?

On définit le nombre de Stanton par $St = q_p(-d)/\rho c_p u_p T_0$. Donner l'expression de St en fonction des nombres d'Eckert et de Reynolds.

EXERCICE 11 : Convection forcée en régime turbulent établi dans un tube.

De l'air entrant à pression atmosphérique et à la température $T_{m,e} = 20^\circ\text{C}$ s'écoule dans un tube de longueur $L = 2 \text{ m}$ et de diamètre $D = 25 \text{ mm}$ avec une vitesse débitante $u_m = 20 \text{ m/s}$.

a) Calculer le coefficient d'échange en utilisant la corrélation $Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$.

Données $\rho = 0,737 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2,56 \cdot 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$, $C_p = 1025 \text{ J/kg.K}$, $k = 0,039 \text{ W/m.K}$.

b) La paroi du tube est chauffée à flux constant et l'écart de température entre la paroi et la température moyenne débitante de l'air est de 20°C . Calculer le flux de chauffage et la température moyenne de sortie de l'air.

EXERCICE 12 : Écoulement laminaire d'un film liquide sur les parois intérieures d'un tube vertical.

On s'intéresse au cas d'un liquide qui ruisselle en régime laminaire et avec une interface sans ride, sur la paroi interne d'un cylindre. Ce liquide est en contact avec un gaz, peu soluble dans le liquide. On cherche à établir le profil de vitesse d'écoulement dans le film.

Le système d'axes de coordonnées est cylindrique (cf. Fig.1). Loin des extrémités, en régime établi, le mouvement est unidirectionnel, soit $v_z = v_z(r)$. La pression dans le film est constante et égale à la pression qui règne dans l'appareil (soit $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$). La valeur maximale de la vitesse $v_{z,max}$ est atteinte

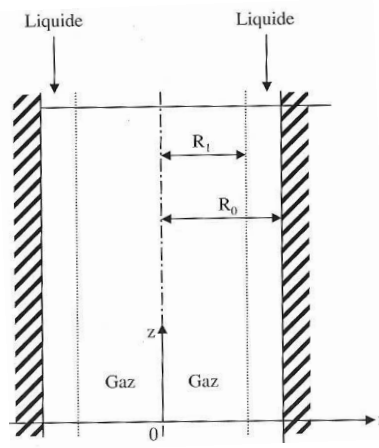


FIGURE 7.17 – Film ruisselant sur la paroi interne d’une conduite cylindrique verticale.

à l’interface gaz-liquide, soit pour $r = R_1$, et la vitesse s’annule en $r = R_0$. Le liquide est newtonien. L’écoulement est stationnaire et incompressible.

1. Montrer que la seule contrainte non nulle est la contrainte τ_{rz} .
2. Ecrire l’équation de quantité de mouvement et donner l’expression de la contrainte $\tau_{rz}(r)$.
3. Montrer que le profil de vitesse suit la loi suivante :

$$v_z(r) = -\frac{\rho g R_0^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] - \frac{\rho g R_1^2}{2\mu} \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) \quad (7.1)$$

4. Montrer que le débit volumique Q_v , à travers toute section droite horizontale, vaut :

$$Q_v = 2\pi \left\{ \frac{\rho g R_0^4}{16\mu} \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^4 \right] - \frac{\rho g R_0^2 R_1^2}{8\mu} \left[2 \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 \ln \left(\frac{R_1}{R_0} \right) - \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 + 2 \right] \right\} \quad (7.2)$$

EXERCICE 13 : *Convection forcée dans une micro-conduite : effets des phénomènes de "glissement" sur le transfert de chaleur en régime dynamiquement et thermiquement établi.*

Lorsqu’un fluide s’écoule dans une micro-conduite, les conditions aux limites des équations du mouvement et de l’énergie doivent être modifiées lorsque le nombre de Knudsen est inférieur à $Kn = 0,1$ ($Kn = \lambda/D_h$ où λ est le libre parcours moyen des molécules - au sens de la théorie cinétique des gaz - et D_h est le diamètre hydraulique de la conduite).

En bref, les conditions aux limites pour la composante tangentielle de la vitesse et pour la température, dans le cas d’un écoulement de Poiseuille plan en régime établi (Fig.1), peuvent être écrites en $Y = H$ sous la forme simplifiée :

$$u(H) = -\beta_v \left. \frac{du}{dY} \right|_{Y=H} \quad T(x, H) - T_p(x) = -\beta_T \left. \frac{\partial T(x, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=H} \quad (7.1)$$

Ces deux expressions traduisent des discontinuités de vitesse et de température au voisinage des parois : le fluide n’adhère pas aux parois et sa température n’est pas celle des parois.

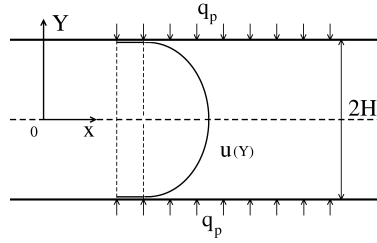


FIGURE 7.18 – Ecoulement de Poiseuille plan dans une micro-conduite (système de coordonnées (x, Y)).

Si le fluide est un gaz parfait, les coefficients β_v et β_T s'expriment en fonction des coefficients d'accommodation dynamique, α_v , et thermique, α_T , sous la forme [1]

$$\beta_v = \left(\frac{2 - \alpha_v}{\alpha_v} \right) \lambda \quad \beta_T = \left(\frac{2 - \alpha_T}{\alpha_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{\lambda}{Pr} \quad \text{où } \gamma = c_p/c_v \quad \text{et } 0 \leq \alpha_v, \alpha_T \leq 1 \quad (7.2)$$

En régime dynamiquement établi ($dp/dx = \text{constante}$) et thermiquement établi ($\partial T/\partial x = dT_m/dx = \text{constante}$ si une densité de flux de chaleur uniforme est appliquée sur les parois), les équations du mouvement se réduisent à [cf cours polycopié : chapitre 1 (§ 1.5.2.1) et chapitre 7 (§ 7.4.2.2)] :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dY^2} \quad \rho c_p u(Y) \frac{dT_m}{dx} = k \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \quad (7.3)$$

Les conditions aux limites sont données par les **équations 7.1** et par des conditions de symétrie sur l'axe de la conduite (soit $du/dY = 0$ et $dT/dY = 0$).

On pose $y = Y/H$ et $\theta(y) = k(T(x, Y) - T_p(x))/(H q_p)$ où q_p est la densité de flux de chaleur imposée sur les parois de la conduite.

-1) Montrer que les équations du mouvement et de l'énergie s'écrivent :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{H^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \theta}{dy^2} = \frac{u(y)}{u_m} \quad (7.4)$$

où u_m est la vitesse moyenne (ou vitesse débitante).

Vous pourriez, peut-être, vous reporter au paragraphe 7.3 du polycopié pour établir cette forme simplifiée de l'équation de l'énergie.

Montrer que les conditions aux limites (éq. 7.1) deviennent :

$$u(1) = -2\beta_v^* \frac{du}{dy} \Big|_{y=1} \quad \theta(1) = -2\beta_T^* \frac{d\theta}{dy} \Big|_{y=1} \quad (7.5)$$

où

$$\beta_v^* = \left(\frac{2 - \alpha_v}{\alpha_v} \right) 2 Kn \quad \beta_T^* = \left(\frac{2 - \alpha_T}{\alpha_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) 2 \frac{Kn}{Pr} \quad (7.6)$$

-2) Montrer que le profil de vitesse a pour expression :

$$\frac{u(y)}{u_m} = \left(\frac{3}{2} \right) \frac{1 + 4\beta_v^* - y^2}{1 + 6\beta_v^*} \quad (7.7)$$

où la vitesse moyenne s'écrit :

$$u_m = \int_0^1 u(y) dy = (1 + 6\beta_v^*) \frac{H^2}{3\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (7.8)$$

-3) Le glissement sur les parois est caractérisé par le rapport $\eta = u(1)/u_m$. En déduire que la vitesse adimensionnelle $u^*(y) = u(y)/u_m$ s'écrit aussi

$$u^*(y) = \frac{3-\eta}{2} - \frac{3(1-\eta)}{2} y^2 \quad (7.9)$$

-4) Montrer que la forme générale du profil de température adimensionnel est :

$$\theta(y) = C_0 + C_1 y + \frac{3-\eta}{4} y^2 - \frac{1-\eta}{8} y^4 \quad (7.10)$$

Montrer que les conditions aux limites conduisent à $C_0 = (\eta - 5)/8 - 2\beta_T^*$ et $C_1 = 0$.

-5) Calculer la discontinuité de température à la paroi ($T_p(x) - T(x, H)$).

-6) On écrit la densité de flux de chaleur appliquée sur la paroi en $Y = H$ sous la forme

$$q_p = k \left. \frac{\partial T}{\partial Y} \right|_{Y=H} = k \frac{(T_p(x) - T(x, H))}{\Delta_T} \quad (7.11)$$

où $\Delta_T = 2\beta_T^* H$ caractérise la distance sur laquelle s'effectue le saut de température.

Calculer numériquement Δ_T si le fluide est de l'air à température ambiante (supposé être un mélange de gaz diatomique) et si $H = 1\mu m$ dans les cas limites $\alpha_T = 0,01$ (surface réfléchissant les molécules de façon spéculaire) et $\alpha_T = 1$ (surface réfléchissant les molécules de façon diffuse). A pression atmosphérique, le libre parcours moyen des molécules d'air est de l'ordre de $\lambda = 0,1\mu m$ et $Pr \approx 0.7$.

A partir des équations 7.9 et 7.10, déterminer la température adimensionnelle moyenne débitante

$$\theta_m = \frac{1}{u_m} \int_0^1 u(y) \theta(y) dy \quad (7.12)$$

-7) En déduire que le nombre de Nusselt $Nu = hD_h/k$ a pour expression

$$Nu = \frac{140}{17 - 6\eta + (2/3)\eta^2 + 70\beta_T^*} \quad (7.13)$$

-8) **Application numérique :** Calculer la vitesse de glissement, le saut de température et le nombre de Nusselt dans les trois cas suivants

a) $\alpha_v = \alpha_T = 0,01$ (surface spéculaire) b) $\alpha_v = \alpha_T = 1$ (surface diffuse) c) $\alpha_v = \alpha_T = 2$ (condition d'adhérence supposée être applicable)

Données : $H = 1\mu m$, $u_m = 10^{-2} m/s$, $q_p = 10^3 W/m^2$

Propriétés du fluide : $\lambda = 0,1\mu m$, $\rho = 1,16 kg/m^3$, $\mu = 1,8 \times 10^{-5} Pa.s$, $C_p = 10^3 J/kg K$, $k = 0,025 W/m K$, $\gamma = 3/2$, $Pr = 0,7$

EXERCICE 14 : Convection forcée dans une conduite.

La température d'un écoulement d'air dans un tube passe de $T_e = 500\text{ K}$ à $T_s = 600\text{ K}$ (à une pression moyenne de 3 atm : $\rho = 1,90\text{ kg/m}^3$, $\mu = 2,88 \times 10^{-5}\text{ kg/m.s}$, $C_p = 1040\text{ J/kg.K}$, $k = 0,044\text{ W/m.K}$). La température de la paroi du tube est $T_p = 650\text{ K}$ (longueur $L = 1\text{ m}$, diamètre $D = 3\text{ cm}$). Quelle est la vitesse de l'air ?

Utiliser la corrélation $Nu = 0,036Re^{0,8}Pr^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{0,055}$

EXERCICE 15 : Convection forcée en régime établi dans une conduite plane dont l'une des parois est à température uniforme et l'autre uniformément chauffée : calcul de la température moyenne débitante.

La paroi en $y = 0$ d'une conduite plane est isotherme à température T_1 et la paroi en $y = H$ est uniformément chauffée avec une densité de flux q_p . Du fluide entre dans la conduite avec une température moyenne débitante $T_m(0) = T_e$ et avec un débit \dot{m} . Le coefficient d'échange sur la paroi isotherme est $h_1(x)$.

a) Ecrire le bilan thermique global entre x et $x + dx$ et en déduire l'équation différentielle donnant la variation de la température moyenne débitante que l'on écrira sous la forme :

$$\frac{df}{dx} + \alpha(x)f = \beta \quad (7.1)$$

Donner les expressions de f , $\alpha(x)$ et β .

b) On suppose que la longueur d'établissement du régime thermique est très courte de sorte que le coefficient d'échange $h_1(x) = h_1$. Donner la solution de l'équation 7.1.

EXERCICE 16 : Convection forcée à faibles nombres de Péclet : importance de la diffusion de chaleur axiale

On considère un écoulement forcé en régime dynamique établi dans une conduite plane de longueur L . Le fluide est chauffé avec une densité volumique de chaleur ω (W/m^3). On suppose la vitesse débitante u_m très faible et les profils de vitesse et de température uniformes dans une section de la conduite, $u(y) = u_m$ et $T(x, y) = T_m(x)$.

a) Montrer que l'équation de l'énergie se réduit à :

$$\rho C_p u_m \frac{dT_m}{dx} = k \frac{d^2 T_m}{dx^2} + \omega \quad 0 \leq x \leq L \quad (7.1)$$

b) Si les conditions aux limites de l'équation 7.1 sont :

$$T_m(x, y) = T_e \quad \text{en } x = 0 \quad ; \quad \frac{dT_m}{dx} = 0 \quad \text{en } x = L \quad (7.2)$$

en déduire la variation suivante de température

$$T_m(x) = T_e + \frac{b}{a} \left[x + \frac{1}{a} e^{-aL} (1 - e^{ax}) \right] \quad (7.3)$$

et donner les expressions de a et de b .

c) Calculer :

- la température de sortie du fluide, $T_m(L)$,
- le flux de chaleur diffusé par conduction vers la section d'entrée en $x = 0$, $Q_{cond}(0)$
- la variation du flux d'enthalpie entre l'entrée et la sortie de la conduite.

d) Application numérique : $H = 1,5 \mu m$, $L = 30 \mu m$, $u_m = 2,65 m/s$, $\rho = 1,16 kg/m^3$, $C_p = 1007 J/kg$, $k = 0.081 W/mK$, $\omega = 3,3 \cdot 10^9 W/m^3$.

Calculer $T_m(L)$, $Q_{cond}(0)$ et $\dot{m}C_p[T_m(L) - T_e]$. Vérifier le bilan thermique.
