

## Travaux pratiques d'éléments finis Application à la mécanique des solides

D. CHIBOUTI

Chargés de TD :

dahia.chibouti@univ-eiffel.fr

### TD/TP 1 – TP1: Barre conique soumise à un effort de traction

L'objectif de l'exercice est de résoudre par la méthode des éléments finis le déplacement et la déformation d'une barre de forme conique et de section  $S(y)$ , de longueur  $L$ , soumise à un effort  $\vec{F} = F \vec{e}_y$  (Fig. 1). On note  $E$  le module d'Young et on suppose que la masse de la barre est

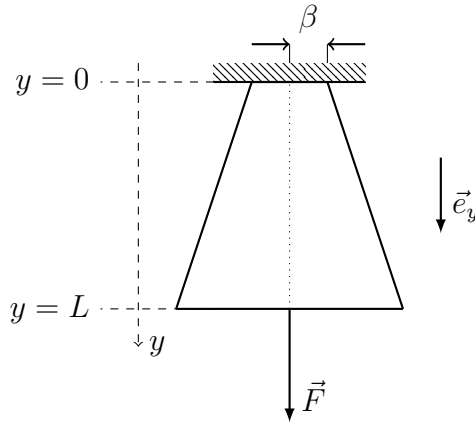


Figure 1: Barre conique soumise à un effort  $\vec{F}$ .

négligeable. Le déplacement axial  $u(y)$  est solution de l'équation

$$-\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du}{dy} \right) = 0, \quad 0 < y < L \quad (1)$$

avec  $a(y) = ES(y)$  et  $S(y) = \pi (\alpha y + \beta)^2$  ( $\beta > 0$ ). Les conditions aux limites s'écrivent :

$$u(y=0) = 0, \quad \left( a(y) \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=L} = F \quad (2)$$

#### 1. Résolution analytique.

- (a) Résoudre analytiquement l'équation différentielle (1) avec les conditions aux limites (2). Réécrivons tout d'abord le problème (1) (il suffit d'intégrer une première fois) :

$$\int -\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du}{dy} \right) dy = 0 \Leftrightarrow a(y) \frac{du}{dy} = \lambda \Leftrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\lambda}{a(y)} = \frac{\lambda}{E\pi (\alpha y + \beta)^2}$$

puis une seconde fois, ce qui nous donne  $u(y)$  avec  $\lambda, \mu$  des constantes à déterminer

avec les conditions aux limites :

$$u(y) = -\frac{\lambda}{E\pi\alpha(\alpha y + \beta)} + \mu$$

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{E\pi\alpha\beta} + \mu = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{\lambda}{E\pi\alpha\beta}}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \left( a(y) \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=L} = F &\Leftrightarrow \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=L} = \frac{F}{E\pi(\alpha L + \beta)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda}{E\pi(\alpha L + \beta)^2} = \frac{F}{E\pi(\alpha L + \beta)^2} &\Leftrightarrow \boxed{\lambda = F} \end{aligned}$$

on peut alors déterminer  $\mu$  :

$$\boxed{\mu = \frac{F}{E\pi\alpha\beta}}$$

d'où finalement une solution du problème (1) :

$$\boxed{u(y) = -\frac{F}{E\pi\alpha(\alpha y + \beta)} + \frac{F}{E\pi\alpha\beta} = \frac{F}{E\pi\alpha} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha y + \beta} \right)}$$

(b) En déduire l'expression de  $\frac{du}{dy}$ . Voir (a).

2. Mise en pratique de la méthode des éléments finis pour obtenir une approximation  $U(y)$  de la solution analytique  $u(y)$ .

(a) Écrire la formulation mathématique affaiblie sur un élément quelconque de longueur  $h^e$ , compris entre les coordonnées globales  $y_i$  et  $y_{i+1}$  ( $h^e = y_{i+1} - y_i$ ).

En déduire les expressions des variables primaires et secondaires.

On utilisera les notations locales à l'élément : 1 est le premier nœud local en  $y_i$  et 2 est le second nœud local en  $y_{i+1}$ . On note également  $Q_1^e$  et  $Q_2^e$  les variables secondaires aux nœuds locaux 1 et 2.

$$\begin{array}{ccccccc} - \left( a \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y_i} = Q_1^e & & \overset{1}{\bullet} & \xrightarrow{\text{élément } e} & \overset{2}{\bullet} & & \left( a \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y_{i+1}} = Q_2^e \\ \leftarrow \vec{n}_{y_i} & y_i, u_1^e & & & y_{i+1}, u_2^e & \rightarrow \vec{n}_{y_{i+1}} & \\ & & & & & \xrightarrow{\vec{e}_y} & \end{array}$$

Il faut déplacer tous les termes de (1) d'un côté de l'égalité (déjà fait) puis la multiplier par la fonction test  $w(y)$  :

$$-\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du}{dy} \right) w(y) = 0$$

puis l'intégrer sur toute la longueur de l'élément  $e$  :

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \left( -\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du}{dy} \right) w(y) \right) dy = 0$$

Il faut ensuite manipuler les intégrations par parties :  
on peut rappeler que

$$\int_a^b f' g \, dy = [fg]_a^b - \int_a^b f g' \, dy$$

On choisit donc  $f' = \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du}{dy} \right)$  et  $g = w(y)$ , ce qui donne, en appliquant l'intégration par partie :

$$- \left[ a(y) w(y) \frac{du}{dy} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dw}{dy} a(y) \frac{du}{dy} \, dy = 0$$

En développant les termes de bords, il faut penser aux vecteurs unitaire normales à l'élément  $e$ . En  $y_i$ , le vecteur normale est tel que  $\vec{n}_{y_i} = -\vec{e}_y$  et en  $y_{i+1}$ , il est tel que  $\vec{n}_{y_{i+1}} = +\vec{e}_y$  :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dw}{dy} a(y) \frac{du}{dy} \, dy - w(y_{i+1}) a(y_{i+1}) \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=y_{i+1}} \underbrace{\vec{n}_{y_{i+1}} \cdot \vec{e}_y}_{=1} \\ & + w(y_i) a(y_i) \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=y_i} \underbrace{\vec{n}_{y_i} \cdot \vec{e}_y}_{=-1} = 0 \\ \Leftrightarrow & \boxed{\int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dw}{dy} a(y) \frac{du}{dy} \, dy - w(y_{i+1}) Q_2^e - w(y_i) Q_1^e = 0} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_1^e &= a(y_i) \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=y_i} \\ Q_2^e &= a(y_{i+1}) \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=y_{i+1}} \end{aligned}$$

et cette forme constitue la formulation faible du problème sur un élément  $e$ .

*Les variables secondaires sont celles qui apparaissent à côté de la fonction test et/ou ses dérivées et les variables primaires s'expriment avec le même niveau de dérivation que la fonction test dans les termes de bords.* Il n'y a qu'un terme de bords  $\left[ a(y) w(y) \frac{du}{dy} \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$  dans lequel  $w$  n'est pas dérivé. Donc  $u$ , pris au même niveau de dérivation que la fonction test est la variable primaire. Les variables secondaires sont les termes accolés à la fonction test, c'est-à-dire  $a(y) \frac{du}{dy}$

- (b) En notant  $U^e(y) = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(y) u_j^e$  l'approximation discrète de la fonction  $u(y)$  sur l'élément  $e$ , avec

$$\psi_1^e(y) = \frac{y_{i+1} - y}{y_{i+1} - y_i}, \quad \psi_2^e(y) = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} \quad (\text{interpolation de Lagrange})$$

montrer que les nœuds locaux sont solution du système linéaire local à l'élément  $e$

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Exprimer les éléments de la matrice, et des seconds membres<sup>1</sup>. On pose  $U^e(y) = \sum_{j=1}^{N=2} \psi_j^e(y) u_j^e$  l'approximation discrète de  $u(y)$  et on l'injecte dans la formulation faible du problème :

$$\begin{aligned} & \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dw}{dy} a(y) \frac{dU^e(y)}{dy} dy - w(y_{i+1})Q_2^e - w(y_i)Q_1^e = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dw}{dy} a(y) \frac{d}{dy} \left( \sum_{j=1}^{N=2} \psi_j^e(y) u_j^e \right) dy - w(y_{i+1})Q_2^e - w(y_i)Q_1^e = 0 \end{aligned}$$

Les  $u_j^e$  sont les variables primaires aux nœuds  $j = 1, 2$  de l'élément  $e$  qui sont inconnues mais constantes  $\Rightarrow$  On peut les sortir de l'intégrale :

$$\sum_{j=1}^{N=2} \left[ u_j^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dw}{dy} a(y) \frac{d\psi_j^e}{dy} dy \right] - w(y_{i+1})Q_2^e - w(y_i)Q_1^e = 0$$

Prenant les fonctions tests  $w$  égales aux fonctions d'approximation  $\psi$ , on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N=2} \left[ u_j^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_k^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_j^e}{dy} dy \right] - \psi_k^e(y_{i+1})Q_2^e - \psi_k^e(y_i)Q_1^e = 0$$

Remarquant que  $\psi_k^e(y_j) = 1$  si  $k = j$  et  $\psi_k^e(y_j) = 0$  si  $k \neq j$ , alors  $\psi_k^e(y_j) = \delta_{k,j}$  alors les deux derniers termes peuvent se simplifier comme :

$$\psi_k^e(y_{i+1})Q_2^e + \psi_k^e(y_i)Q_1^e = \delta_{k,i+1}Q_2^e + \delta_{k,i}Q_1^e = Q_k^e$$

Ce qui simplifie la relation précédente :

$$\sum_{j=1}^{N=2} \left[ u_j^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_k^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_j^e}{dy} dy \right] - Q_k^e = 0$$

On pose maintenant :

$$K_{k,j}^e = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_k^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_j^e}{dy} dy$$

donc

$$\sum_{j=1}^{N=2} \left[ u_j^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_k^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_j^e}{dy} dy \right] - Q_k^e = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N=2} K_{k,j}^e u_j^e = Q_k^e$$

---

<sup>1</sup>On peut montrer que pour un polynôme  $p(x)$  de degré inférieur ou égal à 3,  $\int_a^b p(x) dx = \frac{b-a}{6} (p(a) + 4p(\frac{a+b}{2}) + p(b))$  (quadrature de Simpson).

Calculons  $\frac{d\psi_1^e}{dy}$  et  $\frac{d\psi_2^e}{dy}$  :

$$\boxed{\frac{d\psi_1^e}{dy} = \frac{-1}{h^e}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\psi_2^e}{dy} = \frac{1}{h^e}}$$

Pour un élément  $e$  et  $k = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & u_1^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_1^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_1^e}{dy} dy + u_2^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_1^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_2^e}{dy} dy = Q_1^e \\ \Leftrightarrow & u_1^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{-1}{h^e} a(y) \frac{-1}{h^e} dy + u_2^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{-1}{h^e} a(y) \frac{1}{h^e} dy = Q_1^e \\ \Leftrightarrow & \frac{u_1^e}{h^{e2}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y) dy - \frac{u_2^e}{h^{e2}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y) dy = Q_1^e \end{aligned}$$

À partir de là, on peut utiliser la quadrature de Simpson pour calculer intégrales

$$\begin{aligned} \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y) dy &= \frac{y_{i+1} - y_i}{6} \left( a(y_i) + 4a\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) + a(y_{i+1}) \right) \\ &= \frac{h^e}{6} E\pi \left( (\alpha y_i + \beta)^2 + 4 \left( \alpha \left( \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \right) + \beta \right)^2 + (\alpha y_{i+1} + \beta)^2 \right) \\ &= \frac{h^e}{6} E\pi \left[ \alpha^2 y_i^2 + 2\alpha\beta y_i + \beta^2 + 4\alpha^2 \frac{(y_i + y_{i+1})^2}{4} + 8\alpha\beta \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + 4\beta^2 + \alpha^2 + y_{i+1}^2 + \right. \\ &\quad \left. 2\alpha\beta y_{i+1} + \beta^2 \right] \\ &= \frac{h^e}{6} E\pi \left[ 2\alpha^2 (y_i^2 + 2y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) + 6\alpha\beta (y_i + y_{i+1}) + 6\beta^2 \right] \\ &= \frac{h^e}{3} E\pi \left[ \alpha^2 (y_i + y_{i+1})^2 + 3\alpha\beta (y_i + y_{i+1}) + 3\beta^2 \right] \end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned} & \frac{u_1^e}{h^{e2}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y) dy - \frac{u_2^e}{h^{e2}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y) dy = Q_1^e \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\frac{E\pi}{3h^e} \left( \alpha^2 (y_i + y_{i+1})^2 + 3\alpha\beta (y_i + y_{i+1}) + 3\beta^2 \right)}_{=K_{1,1}^e = -K_{1,2}^e} (u_1^e - u_2^e) = Q_1^e \end{aligned}$$

**On peut s'arrêter ici pour les calculs des intégrales et mettre le résultats des autres en annexe.**

Pour l'élément  $e = 1$  et  $k = 2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& u_1^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_2^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_1^e}{dy} dy + u_2^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\psi_2^e}{dy} a(y) \frac{d\psi_2^e}{dy} dy = Q_2^e \\
\Leftrightarrow & u_1^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{h^e} a(y) \frac{-1}{h^e} dy + u_2^e \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{h^e} a(y) \frac{1}{h^e} dy = Q_2^e \\
\Leftrightarrow & -\frac{u_1^e}{h^{e2}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y) dy + \frac{u_2^e}{h^{e2}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y) dy = Q_2^e \\
\Leftrightarrow & -\frac{u_1^e}{h^{e2}} \left[ \frac{E\pi (\alpha y + \beta)^3}{3\alpha} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} + \frac{u_2^e}{h^{e2}} \left[ \frac{E\pi (\alpha y + \beta)^3}{3\alpha} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} = Q_2^e \\
\Leftrightarrow & -\frac{E\pi}{3\alpha h^{e2}} \left( (\alpha y_{i+1} + \beta)^3 - (\alpha y_i + \beta)^3 \right) u_1^e + \frac{E\pi}{3\alpha h^{e2}} \left( (\alpha y_{i+1} + \beta)^3 - (\alpha y_i + \beta)^3 \right) u_2^e = Q_2^e \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\frac{E\pi}{3h^{e2}} (y_{i+1} - y_i) \left( \alpha^2 y_i^2 + \alpha^2 y_i y_{i+1} + \alpha^2 y_{i+1}^2 + 3\alpha\beta y_i + 3\alpha\beta y_{i+1} + 3\beta^2 \right)}_{=-K_{2,1}^e = K_{2,2}^e} (-u_1^e + u_2^e) = Q_2^e
\end{aligned}$$

On constate que l'expression est toujours la même en fonction de  $y_i, y_{i+1}$  pour les composantes de  $K_{k,j}^e$ . Seul le signe va changer.

Ainsi, pour les deux éléments, on a :

$$\begin{aligned}
& \text{pour l'élément 1 : } \begin{cases} K_{1,1}^1 u_1^1 + K_{1,2}^1 u_2^1 = Q_1^1 \\ K_{2,1}^1 u_1^1 + K_{2,2}^1 u_2^1 = Q_2^1 \end{cases} \\
& \text{pour l'élément 2 : } \begin{cases} K_{1,1}^2 u_1^2 + K_{1,2}^2 u_2^2 = Q_1^2 \\ K_{2,1}^2 u_1^2 + K_{2,2}^2 u_2^2 = Q_2^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

De là, on peut écrire les systèmes linéaires d'un élément  $e$  sous forme matricielle et identifier  $[K^e]$  ainsi que les vecteurs  $\{u^e\}$ ,  $\{f^e\}$  et  $\{Q^e\}$ . :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{1,1}^e & K_{1,2}^e \\ K_{2,1}^e & K_{2,2}^e \end{bmatrix}}_{[K^e]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}}_{\{u^e\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}}_{\{Q^e\}}$$

et de façon évidente,  $\{f^e\} = \{0\}$

(c) Discrétisation avec 2 éléments.

$$\begin{array}{ccccccc}
U_1 & & \text{élément 1} & & U_2 & & \text{élément 2} & & U_3 \\
\bullet & & & & \bullet & & & & \bullet \\
y_1 = 0 & & h^1 = L/2 & & y_2 = L/2 & & h^2 = L/2 & & y_3 = L
\end{array}$$

- i. En utilisant la question précédente, exprimer les systèmes linéaires locaux aux éléments 1 et 2. À la question précédente, l'expression du système linéaire local à un élément *quelconque*  $e$  a été écrit. Ils ont donc la même forme

- élément 1 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 \end{bmatrix}}_{[K^1]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{Bmatrix}}_{\{u^1\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \end{Bmatrix}}_{\{Q^1\}}$$

- élément 2 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 \end{bmatrix}}_{[K^2]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix}}_{\{u^2\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}}_{\{Q^2\}}$$

- ii. Construire le tableau de connexion pour la numérotation des nœuds et des éléments de la figure précédente.
- iii. En déduire la forme du système linéaire global.

**Numérotation ordonnée** Le tableau de connexion permet d'écrire rapidement le système linéaire globale à partir des systèmes linéaire locaux aux éléments. Pour la numérotation ordonnée, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'élément 1 est entre les nœuds 1 et 2. L'élément 2 est entre les nœuds 2 et 3. Le tableau de connexion permet de savoir où placer les termes des systèmes linéaires locaux dans le système linéaire global. Le numéro de l'élément nous indique dans quelle ligne du tableau de connexion il faut regarder. Une fois la ligne identifiée, les numéros dans les colonnes nous indiquent dans quelle ligne et quelle colonne le terme devra apparaître dans la matrice globale. Par exemple, où placer le terme  $K_{2,1}^2$  dans la matrice  $[K]$  globale ? Il faut se placer sur la 2ème ligne du tableau de connexion (car c'est l'élément 2). Le premier indice est 2, donc la ligne dans la matrice globale sera le numéro inscrit dans la 2ème colonne du tableau de connexion, c'est-à-dire 3. Le deuxième indice est 1, donc la colonne dans la matrice globale est le numéro inscrit sur la première colonne du tableau de connexion, c'est-à-dire 2. Donc  $K_{2,1}^2$  devra apparaître dans la 3ème ligne et 2ème colonne de la matrice  $[K]$  globale. Donc :

$K_{1,1}^1 : (1, 1)$ ,  $K_{1,2}^1 : (1, 2)$ ,  $K_{2,1}^1 : (2, 1)$ ,  $K_{2,2}^1 : (2, 2)$ ,  $K_{1,1}^2 : (2, 2)$ ,  $K_{1,2}^2 : (2, 3)$ ,  $K_{2,1}^2 : (3, 2)$ ,  $K_{2,2}^2 : (3, 3)$ . Il faut additionner les termes qui ont la même position dans le système linéaire globale. Pour les vecteurs, le principe est le même :  $Q_1^1 : (1)$ ,  $Q_1^2 : (2)$ ,  $Q_2^1 : (2)$ ,  $Q_2^2 : (3)$ , donc le système linéaire global s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 & 0 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 + K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ 0 & K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_1^2 + Q_2^1 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

La continuité de la variable primaire consiste à écrire que le déplacement du deuxième nœud de l'élément 1 est égal au déplacement du premier nœud de l'élément 2 :  $u_2^1 = u_1^2 = U_2$ . De façon générale :  $u_1^e = u_2^{e+1} = U_{e+1}$

La continuité de la variable secondaire repose sur l'équilibre des forces : s'il n'y a pas de terme de forçage sur un nœud considéré, alors la somme de la force appliquée sur le premier nœud de l'élément  $n$  et de la force appliquée au premier nœud de l'élément  $n + 1$  est nulle :  $Q_2^n + Q_1^{n+1} = 0$ . En revanche s'il existe un terme de forçage  $A$ , alors cette somme vaut ce terme de forçage appliqué au nœud considéré :  $Q_2^n + Q_1^{n+1} = A$ . Dans notre cas, il n'y a pas de terme de

forçage sur un nœud partagé, donc  $Q_2^e + Q_1^{e+1} = 0$ .  
Finalement, on obtient

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 & 0 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 + K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ 0 & K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ Q_2^2 \end{Bmatrix}$$

**Numérotation désordonnée** Le tableau de connexion associé s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d'où :  $K_{1,1}^1 : (3, 3)$ ,  $K_{1,2}^1 : (3, 1)$ ,  $K_{2,1}^1 : (1, 3)$ ,  $K_{2,2}^1 : (1, 1)$ ,  $K_{1,1}^2 : (2, 2)$ ,  $K_{1,2}^2 : (2, 3)$ ,  $K_{2,1}^2 : (3, 2)$ ,  $K_{2,2}^2 : (3, 3)$   
et  $Q_1^1 : (3)$ ,  $Q_1^2 : (1)$ ,  $Q_2^1 : (2)$ ,  $Q_2^2 : (3)$ , soit finalement, le système linéaire global :

$$\begin{bmatrix} K_{2,2}^1 & 0 & K_{2,1}^1 \\ 0 & K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ K_{1,2}^1 & K_{2,1}^2 & K_{1,1}^1 + K_{2,2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^2 \\ Q_1^1 \\ Q_1^1 + Q_2^2 = 0 \end{Bmatrix}$$

**Conditions aux limites essentielles en numérotation ordonnée** Pour prendre en compte les conditions aux limites essentielles, on rajoute un vecteur au second membre où toutes les composantes sont nulles sauf celles de la condition aux limites (et on substitue la première ligne de la matrice  $[K]$  par un vecteur lignes  $[1, 0, \dots, 0]$  de sorte à retomber sur  $U_1 = u(0)$ , c'est-à-dire la condition à la limite imposée). En l'occurrence, nous avons imposé un déplacement nul sur le premier nœud :  $U_1 = u(0) = 0$ . Par ailleurs, la condition aux limites naturelles est imposée au dernier nœud :  $Q_2^2 = Q_L$ , et toutes les autres composantes du vecteur  $Q_i^e$  sont nulles. Donc :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 + K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 \\ 0 & K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(0) = 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En remplaçant les  $K_{k,j}^e$  et les conditions aux limites par leur expressions, le système linéaire global s'écrit finalement **ATTENTION LA MATRICE EST TRANSPOSÉE** :

$$\frac{E\pi}{3h^e} \begin{bmatrix} \frac{3h^e}{E\pi} & -(\alpha^2 h^{e2} + 3\alpha\beta h^e + 3\beta^2) & 0 \\ 0 & 2(4\alpha^2 h^{e2} + 6\alpha\beta h^e + 3\beta^2) & -(7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2) \\ 0 & -(7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2) & (7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

- iv. En utilisant les conditions aux limites essentielles, montrer que les déplacements des nœuds 2 et 3 s'écrivent :

$$U_2 = \frac{6LF}{E\pi(\alpha^2 L^2 + 6\alpha\beta L + 12\beta^2)}, \quad U_3 = U_2 + \frac{6LF}{E\pi(7\alpha^2 L^2 + 18\alpha\beta L + 12\beta^2)}$$



Il suffit de résoudre le système obtenu à la question précédente qui donne :

$$\frac{E\pi}{3h^e} U_1 = 0 \Rightarrow \boxed{U_1 = 0}$$

$$\frac{E\pi}{3h^e} \left[ -(\alpha^2 h^{e2} + 3\alpha\beta h^e + 3\beta^2) U_1 + 2(4\alpha^2 h^{e2} + 6\alpha\beta h^e + 3\beta^2) U_2 - (7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2) U_3 \right] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{E\pi}{3h^e} \left[ -(7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2) U_2 + (7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2) U_3 \right] = F \quad (3)$$

En additionnant (2) et (3), on peut déterminer  $U_2$  puis par suite,  $U_3$  :

$$(2) + (3) \Leftrightarrow \frac{E\pi}{3h^e} U_2 \left[ 2(4\alpha^2 h^{e2} + 6\alpha\beta h^e + 3\beta^2) - (7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2) \right] = F$$

$$U_2 = \frac{3h^e F}{E\pi (\alpha^2 h^{e2} + 3\alpha\beta h^e + 3\beta^2)}$$

$$= \frac{3\frac{L}{2} F}{E\pi \left( \alpha^2 \frac{L^2}{4} + 3\alpha\beta \frac{L}{2} + 3\beta^2 \right)} (\times 4/4)$$

$$\boxed{U_2 = \frac{6LF}{E\pi (\alpha^2 L^2 + 6\alpha\beta L + 12\beta^2)}}$$

et partant de (3)

$$U_3 = U_2 + \frac{3h^e F}{E\pi (7\alpha^2 h^{e2} + 9\alpha\beta h^e + 3\beta^2)}$$

$$= U_2 + \frac{3\frac{L}{2} F}{E\pi \left( 7\alpha^2 \frac{L^2}{4} + 9\alpha\beta \frac{L}{2} + 3\beta^2 \right)} (\times 4/4)$$

$$\boxed{U_3 = U_2 + \frac{6LF}{E\pi (7\alpha^2 L^2 + 18\alpha\beta L + 12\beta^2)}}$$

Force :

v. En déduire le déplacement  $U(y)$  le long de la barre.

**Par interpolation de Lagrange**  $U^e(y) = \sum_{j=1}^2 \psi_j^e(y) u_j^e$

Pour l'élément 1 :

$$U^1(y) = \psi_1^1(y) u_1^1 + \psi_2^1(y) u_2^1$$

$$= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} U_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} U_2$$

$$= y U_2 / h^e = 2 U_2 y / L$$

Pour l'élément 2 :

$$\begin{aligned}
U^2(y) &= \psi_1^2(y)u_1^2 + \psi_2^2(y)u_2^2 \\
&= \frac{y_3 - y}{y_3 - y_2}U_2 + \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}U_3 \\
&= \frac{L - y}{L/2}U_2 + \frac{y - L/2}{L/2}U_3 \\
&= 2U_2 - 2U_2y/L + 2U_3y/L - U_3 \\
&= \frac{2y}{L}(U_3 - U_2) + 2U_2 - U_3
\end{aligned}$$

**De façon classique** Il faut déterminer les expressions linéaires du déplacement sur les éléments :  $U^1(y) = a_1y + b_1$ ; En  $y = 0$ ,  $U^1(0) = U_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$  et  $a_1 = \frac{U_2 - U_1}{h^e} = \frac{U_2}{h^e}$ . Finalement,  $U^1(y) = yU_2/h^e$ .

Ensuite  $U^2(y) = a_2y + b_2$ ; La pente vaut  $a_2 = \frac{U_3 - U_2}{h^e}$  et en  $y = h^e$ ,

on a  $\frac{U_3 - U_2}{h^e}h^e + b^2 = U_2 \Rightarrow b_2 = 2U_2 - U_3$ , d'où  $U^2(y) = \frac{U_3 - U_2}{h^e}y + 2U_2 - U_3$

- vi. En déduire la déformation  $\varepsilon(y)$  le long de la barre. Que remarquez-vous en  $y = L/2$  ? Que doit-on en conclure au niveau des variables secondaires ? Il suffit de calculer la dérivée des déplacements déterminés à la question précédente :

$$\varepsilon^1(y) = U_2/h^e$$

$$\varepsilon^2(y) = (U_3 - U_2)/h^e$$

On voit que  $\varepsilon^1(y = L/2) \neq \varepsilon^2(y = L/2)$ . Or une des propriétés qui a permis de résoudre le problème avec la méthode des éléments finis est la continuité des variables secondaires, propriété qui pourtant se perd dans la forme discrétisée de la solution. Ceci s'explique par le choix de l'ordre des fonctions d'interpolation qui sont utilisées pour reconstruire le déplacement aux éléments.

Ici, les fonctions d'interpolation sont des polynômes d'ordre 1. Les déplacements sur les éléments sont donc approchés par des fonctions linéaires dont les dérivées (donc les déformations) sont des constantes qui ne permettent pas d'assurer la continuité de la déformation entre les éléments. Nous devons en déduire que la continuité des variables secondaires est une propriété qui ne s'applique que pour la *solution exacte* si on utilise des fonctions d'interpolation d'ordre 1 pour reconstruire le déplacement sur les éléments. Il aurait donc fallu choisir des fonctions d'interpolation d'ordre au moins 2 pour assurer la continuité des déformations entre éléments.

- (d) Discrétisation sur 3 éléments.

$$\begin{array}{ccccccc}
U_4 & & U_3 & & U_1 & & U_2 \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
y_4 = 0 & \text{élément 2} & y_3 = L/3 & \text{élément 1} & y_1 = 2L/3 & \text{élément 3} & y_2 = L \\
& h^2 = L/3 & & h^1 = L/3 & & h^3 = L/3 &
\end{array}$$

- Construire le tableau de connexion.
- En déduire la forme du système linéaire global.

iii. En tenant compte des conditions aux limites, en déduire la forme finale du système linéaire à résoudre.

### 3. Analyse physique des résultats.

Expliquer l'évolution des déplacements de la poutre conique lorsque  $\alpha > 0$  (Fig. 1a) et  $\alpha < 0$  (Fig. 1b). Pour le graphe (a) : il n'y a aucun déplacement en  $y = 0$  à cause de la

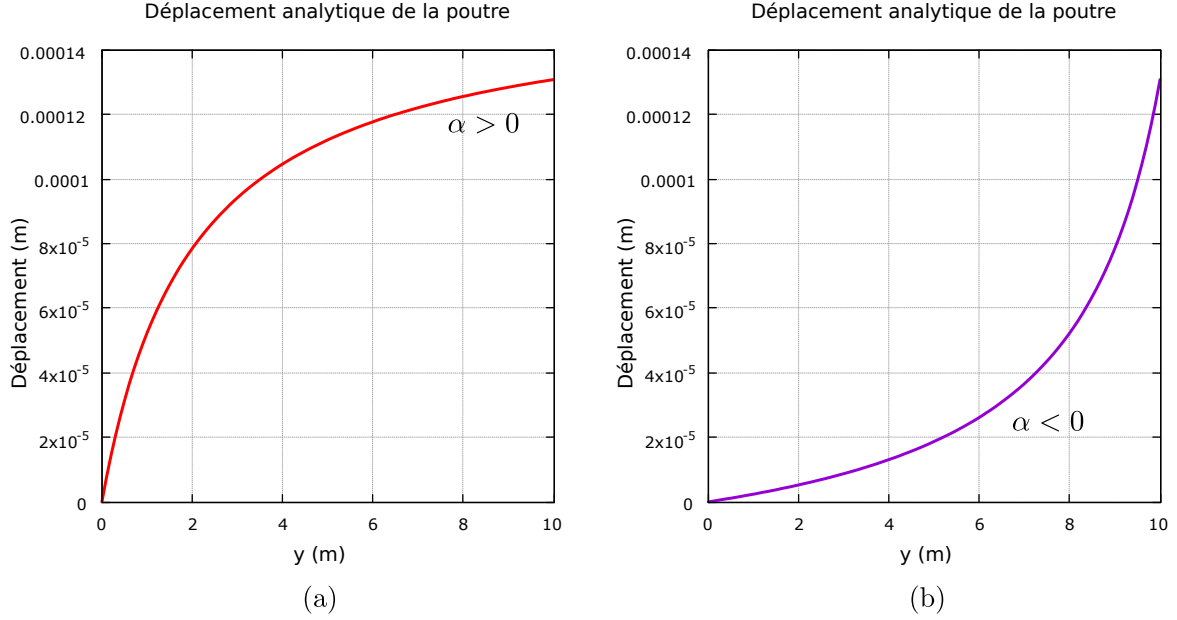


Figure 2: (a) : Déplacement de la barre conique quand  $\alpha > 0$ . (b) : Déplacement de la barre conique quand  $\alpha < 0$ .

condition d'encastrement. de  $y = 0$  à  $y = 1$ , la pente est la plus forte : c'est là où il y a le plus de déformation, car c'est là où la section est la plus faible. Cette zone de la barre subit donc la plus forte des contraintes.

Pour le graphe (b) : même remarque, sauf que comme la section décroît de  $y = 0$  à  $y = L$ , la pente est la plus forte dans ce voisinage là.

## Annexe : Expression des termes $K_{k,j}^e$

Expression des termes  $K_{k,j}^e$  pour un élément quelconque  $e$

$$\begin{aligned}
 K_{1,1}^e &= \frac{E\pi}{3h^e} [\alpha^2 (y_i + y_{i+1})^2 + 3\alpha\beta (y_i + y_{i+1}) + 3\beta^2] \\
 K_{1,2}^e &= -K_{1,1}^1 = -\frac{E\pi}{3h^e} [\alpha^2 (y_i + y_{i+1})^2 + 3\alpha\beta (y_i + y_{i+1}) + 3\beta^2] \\
 K_{2,1}^e &= -K_{1,1}^1 = -\frac{E\pi}{3h^e} [\alpha^2 (y_i + y_{i+1})^2 + 3\alpha\beta (y_i + y_{i+1}) + 3\beta^2] \\
 K_{2,2}^e &= K_{1,1}^1 = \frac{E\pi}{3h^e} [\alpha^2 (y_i + y_{i+1})^2 + 3\alpha\beta (y_i + y_{i+1}) + 3\beta^2]
 \end{aligned}$$

Remarque : les expressions sont les mêmes pour tous les termes au signe près.

## TP1: Application numérique sur Octave

Afin de vérifier que le schéma numérique *éléments finis* est correctement programmé, il est courant d'étudier la vitesse avec laquelle la solution numérique tend vers la solution exacte : c'est ce que l'on appelle *vitesse de convergence* de la méthode numérique. Pour cela, il est nécessaire de connaître la solution mathématique exacte, ce qui est souvent aisé pour des problèmes 1D. On considérera 3 erreurs :

- l'erreur entre le déplacement calculé et le déplacement exact  $\epsilon_1$  :

$$\epsilon_1 = \sqrt{\sum_{e=1}^N \left[ \int_{y_i}^{y_{i+1}} (u_{\text{exa}} - u^e)^2 dy \right]}$$

- l'erreur entre la déformation calculée et la déformation exacte  $\epsilon_2$  :

$$\epsilon_2 = \sqrt{\sum_{e=1}^N \left[ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \left( \left( \frac{du_{\text{exa}}}{dy} - \frac{du^e}{dy} \right)^2 \right) dy \right]}$$

- l'erreur totale  $\epsilon_3$  qui combine les 2 erreurs précédentes :

$$\epsilon_3 = \sqrt{\sum_{e=1}^N \left[ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \left( \left( \frac{du_{\text{exa}}}{dy} - \frac{du^e}{dy} \right)^2 + (u_{\text{exa}} - u^e)^2 \right) dy \right]}$$

avec  $N$  le nombre total d'éléments,  $u^e(y)$  le déplacement numérique sur l'élément  $e$  et  $u_{\text{exa}}(y)$  le déplacement exact.

Pour un maillage suffisamment fin, ces erreurs peuvent s'écrire  $\epsilon = ch^\gamma$  avec  $c$  une constante et  $h$  la taille des éléments. La valeur de  $\gamma$  donne la vitesse de convergence de la méthode. Plus  $\gamma$  est grand, plus la vitesse sera grande et plus l'écart entre l'approximation et la solution exacte diminuera rapidement. Sachant que  $\epsilon = ch^\gamma \equiv ce^{\gamma \ln h}$  et donc que  $\ln \epsilon = \ln c + \gamma \ln h$ , il est donc courant de chercher  $\gamma$  comme la pente de la droite  $\ln(\epsilon) = f[\ln(h)]$ , pour  $h$  suffisamment petit

1. Connaissant la solution exacte du problème, déterminer l'ordre de convergence  $\gamma$  de la méthode numérique pour les 3 erreurs mentionnées ci-dessus. On doit trouver  $\theta \approx 2$  avec  $N = 2, 1024$
2. Dans cette partie, on choisit 12 éléments ( $N = 12$ ), le module d'Young  $E = 30 \cdot 10^6$  Pa, la longueur de la barre  $L = 90$  m et une force  $F = 3000$  N.

Bien que l'objectif de la méthode des éléments finis soit de donner une solution numérique *proche* de la solution exacte, le coût de calcul pour l'obtenir est un paramètre déterminant. Ainsi, il est souvent préférable d'utiliser des tailles d'éléments variables pour réduire leur nombre et donc la taille de la matrice qui devra ensuite être résolue (généralement très coûteux!). Dans Octave, la distribution de la taille des éléments suit une loi polynomiale pilotée par le paramètre  $p$ .

- (a) Choisir les paramètres  $\alpha = 0.1^\circ$  et  $\beta = 0.1 \text{ m}$  pour représenter la loi de variation de la section de la barre. Comparer la solution numérique et analytique lorsque  $p = 0$  (maillage régulier) et lorsque  $p = 2$  (raffinement polynômiale d'ordre  $p = 2$ ). Dans quelle zone du domaine la discrétisation doit-elle être raffinée ? Justifier.
  - (b) Prendre maintenant  $\alpha < 0$  et  $\beta > |\alpha L|$ . Donner l'intervalle de valeur  $p$  qui permet de raffiner la discrétisation dans la bonne zone du domaine. Justifier.
  - (c) Comparer les erreurs de la solution numérique sans raffinement et avec raffinement pour le cas  $\alpha < 0$  ou  $\alpha > 0$ .
3. Répondre aux questions 2.(c).vi. et 3. de l'exercice précédent.

## TD/TP 2 – Poutre de section rectangulaire soumise à un chargement : modèle d'Euler-Bernoulli

L'objectif de l'exercice est de résoudre par la méthode des éléments finis le déplacement vertical et la déformation d'une poutre de section rectangulaire constante  $S = H \times l$  et de longueur  $L$ . Cette poutre est soumise à une charge uniforme répartie entre les abscisses  $a$  et  $b$  avec  $b \geq a$ . L'extrémité gauche est encastree alors que celle de droite repose sur un appui glissant. (Fig. 3). On note  $E$  le module d'Young,  $I_{Gz} = lH^3/12$  le moment quadratique selon la droite

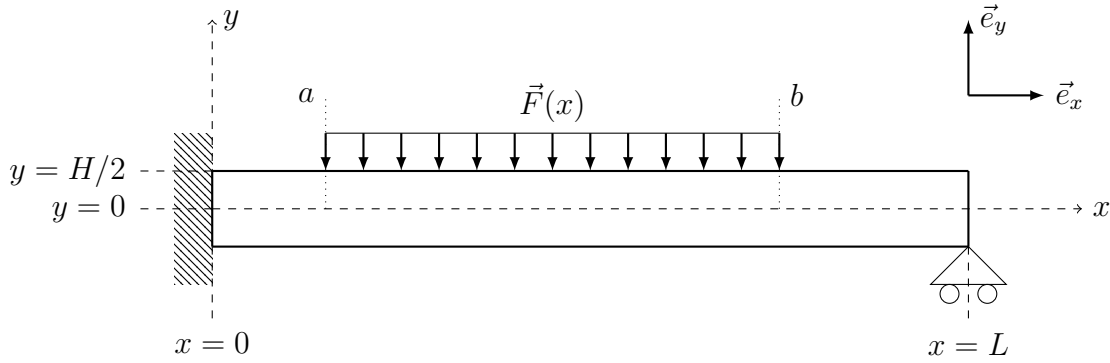


Figure 3: Poutre soumise à une charge distribuée  $\vec{F}(x)$ .

( $Gz$ ) perpendiculaire au plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et on suppose que la masse de la barre est négligeable. Le déplacement vertical  $w(x)$  est solution de l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ -F, & a < x < b \\ 0, & b < x < L \end{cases} \quad (3)$$

Conditions aux limites

$$w(x=0) = 0, \quad \theta(x=0) \equiv \frac{dw}{dx} = 0, \quad w(x=L) = 0, \quad M(x=L) \equiv EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (4)$$

DANS LA SUITE DU TRAVAIL, NOUS PRENDRONS  $a = 0$  ET  $b = L$ .

1. Résolution analytique.

(a) Résoudre analytiquement l'équation différentielle (3) avec les conditions aux limites (4). On *primitive* une première fois l'équation (3) :

$$\int \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = \int -F dx \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -Fx + A_1$$

ce qui fait apparaître une première constante  $A_1$ . On primitive une seconde fois :

$$\int \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = \int (-Fx + A_1) dx \Leftrightarrow EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} = -F \frac{x^2}{2} + A_1 x + A_2$$

ce qui fait apparaître une seconde constante  $A_2$ . On primitive une troisième fois :

$$\int \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = \int \left( -F \frac{x^2}{2} + A_1 x + A_2 \right) dx \Leftrightarrow EI_{Gz} \frac{dw}{dx} = -F \frac{x^3}{6} + A_1 \frac{x^2}{2} + A_2 x + A_3$$

ce qui fait apparaître une troisième constante  $A_3$ . Enfin, il reste à faire la quatrième primitive :

$$\begin{aligned} \int \left( EI_{Gz} \frac{dw}{dx} \right) &= \int \left( -F \frac{x^3}{6} + A_1 \frac{x^2}{2} + A_2 x + A_3 \right) \\ \Leftrightarrow w(x) EI_{Gz} &= -F \frac{x^4}{24} + A_1 \frac{x^3}{6} + A_2 \frac{x^2}{2} + A_3 x + A_4 \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{w(x) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left( -F \frac{x^4}{24} + A_1 \frac{x^3}{6} + A_2 \frac{x^2}{2} + A_3 x + A_4 \right)}$$

avec  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites. Les conditions aux limites en  $x = 0$  donnent :

$$w(x = 0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A_4 = 0}$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{A_3 = 0}$$

Les conditions limites en  $x = L$  donnent :

$$w(x = L) = -F \frac{L^4}{24} + A_1 \frac{L^3}{6} + A_2 \frac{L^2}{2} = 0 \quad (1)$$

et

$$\left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=L} = -F \frac{L^2}{2} + A_1 L + A_2 = 0 \quad (2)$$

En calculant  $(1) - (2) \times \frac{L^2}{2}$ , on élimine la constante  $A_2$  et on détermine  $A_1$  :

$$\begin{aligned} (1) - (2) \times \frac{L^2}{2} &\Leftrightarrow -F \frac{L^4}{24} + A_1 \frac{L^3}{65} + A_2 \frac{L^2}{2} + F \frac{L^4}{4} - A_1 \frac{L^3}{2} - A_2 \frac{L^2}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{24} FL^4 - A_1 \frac{L^3}{3} = 0 \Leftrightarrow A_1 = \frac{5}{24} FL^4 \frac{3}{L^3} = \boxed{\frac{5FL}{8} = A_1} \end{aligned}$$

De (2), on a :

$$A_2 = F \frac{L^2}{2} - A_1 L = F \frac{L^2}{2} - \frac{5}{8} FL^2 = \boxed{-\frac{1}{8} FL^2 = A_2}$$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$w(x) = \frac{1}{EI_{Gz}} \left( -F \frac{x^4}{24} + \frac{5}{48} FLx^3 - \frac{FL^2 x^2}{16} \right)$$

$$\boxed{w(x) = \frac{Fx^2}{EI_{Gz}} \left( -\frac{x^2}{24} + \frac{5Lx}{48} - \frac{L^2}{16} \right)}$$

(b) En déduire l'expression de  $\frac{dw}{dx}$ . On en déduit alors  $dw/dx$  :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI_{Gz}} \left( -F \frac{x^3}{6} + \frac{5FLx^2}{16} - \frac{FL^2x}{8} \right)$$

$$\boxed{\frac{dw}{dx} = \frac{Fx}{EI_{Gz}} \left( \frac{x^2}{6} + \frac{5L}{16} - \frac{L^2}{8} \right)}$$

2. Mise en pratique de la méthode des éléments finis pour obtenir une approximation  $W(x)$  de la solution analytique  $w(x)$ .

- (a) Écrire la formulation mathématique affaiblie sur un élément quelconque de longueur  $h^e$ , compris entre les coordonnées globales  $x_i$  et  $x_{i+1}$  ( $h^e = x_{i+1} - x_i$ ).  
En déduire les expressions des variables primaires et secondaires.

On utilisera les notations locales à l'élément : 1 est le premier nœud local en  $x_i$  et 2 est le second nœud local en  $x_{i+1}$ . On note également

- $w_1^e, w_2^e$  et  $Q_1^e, Q_2^e$  les variables primaires et secondaires au nœud local 1,
- $w_3^e, w_4^e$  et  $Q_3^e, Q_4^e$  les variables primaires et secondaires au nœud local 2.

(a) On multiplie l'équation différentielle par une fonction test qu'on note  $v(x)$  :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_{Gz} \frac{d^2w}{dx^2} \right) v + Fv = 0$$

Puis on l'intègre sur le long de l'élément  $e$  (entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$ ) :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_{Gz} \frac{d^2w}{dx^2} \right) v + Fv \right] dx = 0$$

On réalise ensuite une intégration par partie (qu'il faudra faire deux fois). On rappelle que :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)$$

Dans notre cas, on prend

$$f'(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_{Gz} \frac{d^2w}{dx^2} \right) \text{ et } g(x) = v$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_{Gz} \frac{d^2w}{dx^2} \right) v \right] dx = \left[ \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2w}{dx^2} \right) v \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} dx}_A$$

Il faut intégrer par partie une seconde fois le terme  $A$  : on prendra

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2w}{dx^2} \right) \text{ et } g(x) = \frac{dv}{dx}$$



$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dv}{dx} dx = - \left[ EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dv}{dx} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

On se retrouve finalement avec :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} EI_{Gz} \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv \right) dx + \left[ v \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \left[ \frac{dv}{dx} EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0$$

En développant les termes de bords, il faut penser aux vecteurs unitaires normales à l'élément  $e$ ,  $n_z = (\vec{n} \wedge \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z$ . En  $x_i$ , le vecteur normale est tel que  $n_z = -1$  et en  $x_{i+1}$ ,  $n_z = +1$  :

$$\begin{aligned} & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} EI_{Gz} \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv \right) dx \\ & + v(x_{i+1}) \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x_{i+1}} n_z \\ & - v(x_i) \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x_i} n_z \\ & - \frac{dv}{dx} \Big|_{x_{i+1}} EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x_{i+1}} n_z \\ & + \frac{dv}{dx} \Big|_{x_i} EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x_i} n_z = 0 \end{aligned}$$

Ce qui revient à

$$\boxed{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} EI_{Gz} \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv \right) dx + v(x_{i+1}) Q_3^e + v(x_i) Q_1^e - \frac{dv}{dx} \Big|_{x_{i+1}} Q_4^e - \frac{dv}{dx} \Big|_{x_i} Q_2^e = 0}$$

qui constitue la formulation mathématique affaiblie du problème avec

$$\begin{aligned} Q_1^e &= - \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x_i}, \quad Q_2^e = - EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x_i} \\ Q_3^e &= \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x_{i+1}}, \quad Q_4^e = EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x_{i+1}} \end{aligned}$$

” Les variables secondaires sont celles qui apparaissent à côté de la fonction test et/ou ses dérivées et les variables primaires s'expriment avec le même niveau de dérivation que la fonction test dans les termes de bords.”

Dans le premier terme de bords :

$$\left[ v \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$v$  n'est pas dérivée, donc ici la variable primaire est simplement  $w$ . De plus, le terme qui pondère  $v$  est la variable secondaire. Dans le second terme de bords :

$$\left[ \frac{dv}{dx} EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

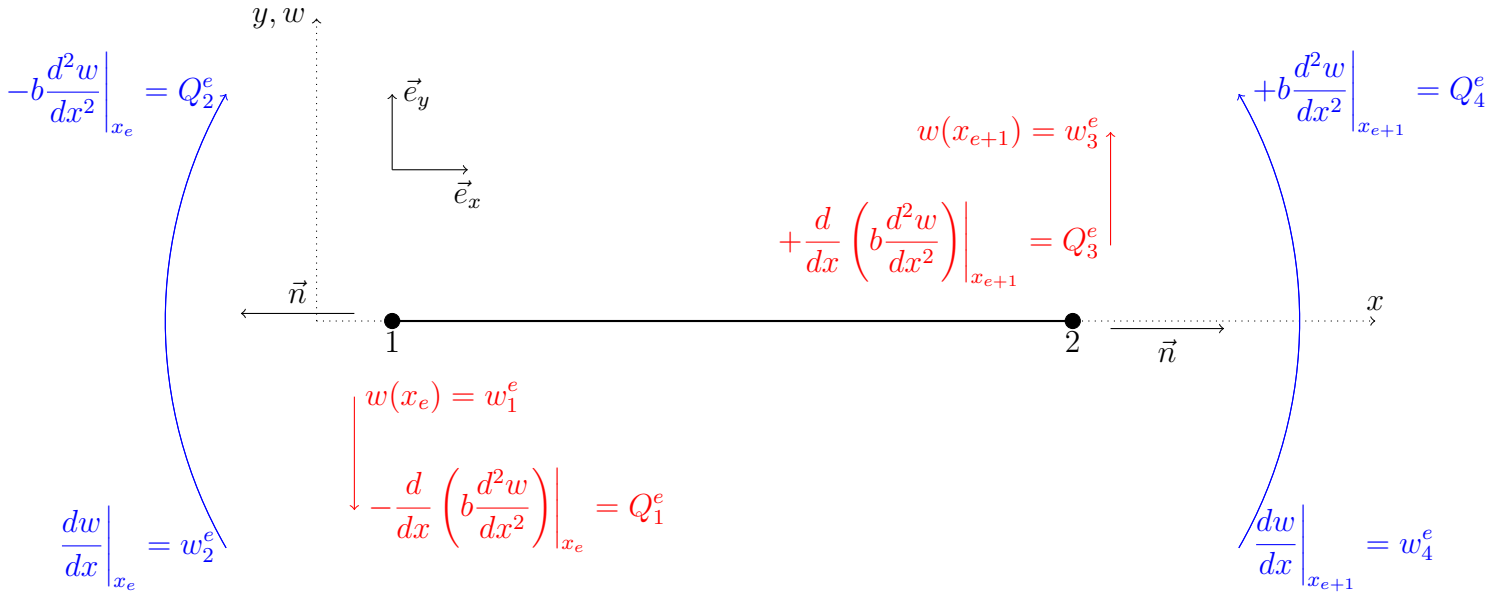
$v$  est dérivée une fois, donc ici la variable primaire est  $dw/dx$ . De plus, le terme qui pondère  $dv/dx$  est la variable secondaire.

Donc en résumé, les variables primaires sont :

$$\boxed{w \text{ et } \frac{dw}{dx}} \text{ variables primaires}$$

et les variables secondaires sont :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \text{ et } EI_{Gz} \frac{d^2 w}{dx^2}} \text{ variables secondaires}$$



- (b) En notant  $W^e(x) = \sum_{j=1}^4 \psi_j^e(x) w_j^e$  l'approximation discrète de la fonction  $w(x)$  sur l'élément  $e$ , avec

$$\begin{aligned} \psi_1^e(x) &= 1 - 3 \left( \frac{x - x_e}{h^e} \right)^2 + 2 \left( \frac{x - x_e}{h^e} \right)^3, & \psi_2^e(x) &= (x - x_e) \left( 1 - \frac{x - x_e}{h^e} \right)^2, \\ \psi_3^e(x) &= 3 \left( \frac{x - x_e}{h^e} \right)^2 - 2 \left( \frac{x - x_e}{h^e} \right)^3, & \psi_4^e(x) &= (x - x_e) \left( \left( \frac{x - x_e}{h^e} \right)^2 - \frac{x - x_e}{h^e} \right) \end{aligned}$$

montrer que les nœuds locaux sont solution du système linéaire local à l'élément  $e$

$$[K^e] \{w^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\}$$

Exprimer les éléments de la matrice, et des seconds membres<sup>2</sup>.

- (c) 1 élément.

L'élément 1 est compris entre  $x_1 = 0$  et  $x_2 = L$ .

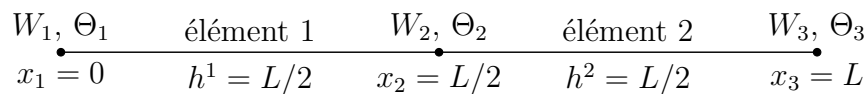
$$\begin{array}{ccc} W_1, \Theta_1 & \text{élément 1} & W_2, \Theta_2 \\ \bullet & \xrightarrow{h^1 = L} & \bullet \\ x_1 = 0 & & x_2 = L \end{array}$$

<sup>2</sup>On peut montrer que pour un polynôme  $p(x)$  de degré inférieur ou égal à 3,  $\int_a^b p(x) dx = \frac{b-a}{6} (p(a) + 4p(\frac{a+b}{2}) + p(b))$  (quadrature de Simpson).

- i. En utilisant la question (b), exprimer le système linéaires sur l'élément 1.
- ii. En utilisant les conditions aux limites essentielles, montrer que l'angle  $\theta(L) \approx \Theta_2$  s'écrit :

$$\Theta_2 = \frac{FL^3}{48EI_{Gz}}$$

- iii. Comparer les expressions de l'angle évalué par  $L$ ,  $\Theta_2$ , et  $\left. \frac{dW^1}{dx} \right|_{x=L}$ . Remarque.
  - iv. Exprimer le moment  $EI_{Gz} \left. \frac{d^2W^1}{dx^2} \right|_{x=L}$ . Remarque.
  - v. Comparer les expressions de la force données par  $Q_2^1$  et  $\left. \frac{d}{dx} \left( EI_{Gz} \frac{d^2W^1}{dx^2} \right) \right|_{x=L}$ . Remarque.
- (d) 2 éléments.
- L'élément 1 est compris entre  $x_1 = 0$  et  $x_2 = L/2$  et l'élément 2 est compris entre  $x_2 = L/2$  et  $x_3 = L$ .



- i. En utilisant la question (b), exprimer les systèmes linéaires sur les éléments 1 et 2.
- ii. En utilisant la continuité des variables primaires et secondaires, donner la forme du système linéaire global. Combien avez-vous d'équations et d'inconnues ?
- iii. En utilisant les conditions aux limites essentielles et naturelles, simplifier le système linéaire global.
- iv. Donner l'expression du système linéaire global portant sur les seules inconnues primaires  $W_i$  et  $\Theta_i$ .
- v. En utilisant OCTAVE, calculer les angles  $\Theta_2$  et  $\Theta_3$  et le déplacement  $W_2$ . En déduire la valeur de la force  $Q_2^2$ .

## TP2: Application numérique sur Octave

L'objectif du TP est de déterminer les paramètres numériques nécessaires pour simuler correctement la physique des cas qui vous sont proposés.

### 1. Chargement total sur la poutre

- (a) Dans le cas où la poutre est chargée entièrement, en faisant varier le nombre d'éléments  $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots\}$ , vérifier que l'ordre de convergence de la méthode est environ égal à 2.

### 2. Chargement localisé sur la poutre

On propose maintenant d'appliquer un chargement local sur la poutre ( $0 < a < b < L$ ). Soit  $\alpha = (b + a)/2$  le centre de la zone de chargement de la poutre et  $\ell = (b - a)/2$  :

- (a) Chargement de taille  $L/4$

Chaque bi(mo)nôme se verra attribué leur propre valeur de  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{L}{7} + \frac{5L}{7} \left( \frac{\text{n}^\circ \text{ du bi(mo)nôme} - 1}{\text{nb total de bi(mo)nôme}} \right)$$

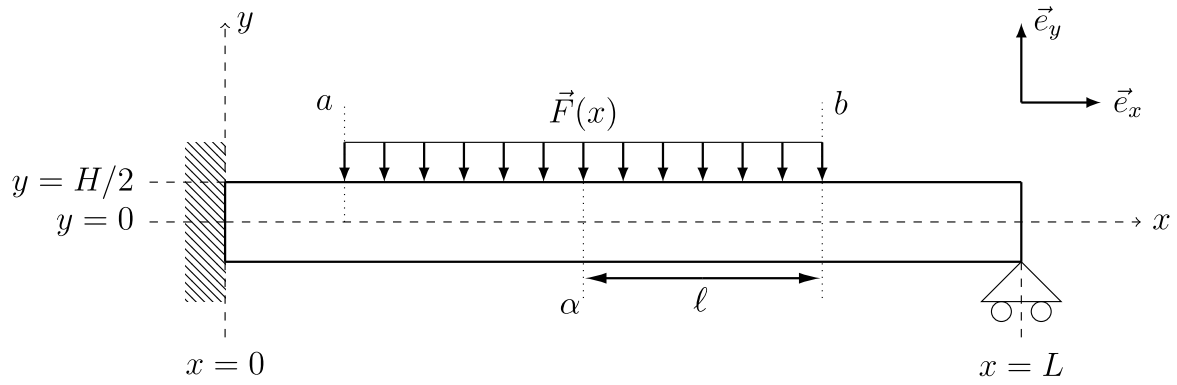


Figure 4: (a) : Déplacement de la barre conique quand  $\alpha > 0$ . (b) : Déplacement de la barre conique quand  $\alpha < 0$ .

- i. En faisant varier le nombre d'éléments  $\{10, 20, 40, 80, 160, \dots\}$ , relevez le déplacement maximal  $w_{\max}$  ainsi que l'angle maximal  $\theta_{\max}$  de la poutre.
- ii. Calculez le rapport des écarts successifs entre les solutions (déplacement et angle) pour différents choix de nombres d'éléments (**Les résultats doivent être présentés dans un tableau**). Pour le déplacement, par exemple :

$$\frac{w_{\max}(10) - w_{\max}(20)}{w_{\max}(40) - w_{\max}(20)}$$

avec  $w_{\max}(10)$  le déplacement maximal obtenu avec 10 éléments,  $w_{\max}(20)$  le déplacement maximal obtenu avec 20 éléments,  $w_{\max}(40)$  le déplacement maximal obtenu avec 40 éléments. Ce rapport doit tendre vers 4. Justifier.

- iii. Avec quel nombre d'éléments doit-on calculer nos solutions numériques si on autorise une erreur de 1 % par rapport à la solution obtenue avec le plus grand nombre d'éléments ?

(b) Chargement de taille  $L/32$

Chaque bi(mo)nôme se verra attribué leur propre valeur de  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{L}{63} + \frac{65L}{63} \left( \frac{\text{n}^\circ \text{ du bi(mo)nôme} - 1}{\text{nb total de bi(mo)nôme}} \right)$$

Répondre aux mêmes questions que pour le point (a).