UPEM - UGE
Master M1

<u>Examen - Couche limite turbulente</u>
<u>Convection naturelle</u>

<u>Exercice 1</u>: *Convection naturelle* /5

Une paroi plane verticale de hauteur L est chauffée à flux uniforme (q_p constant). Dans ce cas, la température de paroi obéit à une loi de la forme :

$$T_p(x)-T_\infty = C\,x^{1/5}$$

0,5 1)- Déterminer la température moyenne sur toute la paroi sous la forme $T_{pm}-T_\infty$.

1 2)- En déduire le coefficient d'échange moyen h_m, puis le coefficient d'échange local h_L en $x=L$.

0,5 2)- Exprimer le coefficient d'échange moyen par convection libre, h_m, en fonction du coefficient d'échange local h_L défini au sommet de la paroi ($x=L$).

On peut aussi prendre comme référence, non pas l'écart entre la température moyenne de paroi et la température ambiante T_∞ (soit $T_{pm}-T_\infty$), mais en prenant comme référence l'écart entre la température au milieu de la paroi $x=L/2$ et la température ambiante, soit $T_p(L/2)-T_\infty$. On obtient alors un coefficient d'échange moyen $h_{L/2}$ basé sur ce dernier écart de température.

0,5 3)- Exprimer le coefficient d'échange moyen, $h_{L/2}$, en fonction du coefficient d'échange local h_L

0,75 4)- Comparer et dire comment varie le coefficient d'échange moyen (surestimé ou sous-évalué) lorsqu'on remplace h_m par $h_{L/2}$? De combien (en %) ?

0,75 5)- Sachant que le nombre de Nusselt s'exprime sous la forme $Nu_x = K\,x^{4/5}$, effectuer la même comparaison pour le nombre de Nusselt moyen (comparaison entre Nu_m et $Nu_{L/2}$). De combien est l'écart sur les deux Nusselt moyens (en %) ?

1 6)- A-t-on les mêmes comparaisons (en %) pour les coefficients d'échange et nombres de Nusselt ? Quel est l'écart (référence) réel à prendre en compte ? Sur h ou sur Nu ?

On rappelle la définition du coefficient d'échange local $h_x = q_p / (T_p(x)-T_\infty)$.

EXERCICE 2: Couche limite:

Il existe au moins deux régions dans la couche limite. L'une loin de la paroi, est contrôlée par la turbulence: c'est la région externe. L'autre, près de la paroi, est dominée par la viscosité: c'est la région interne (ou région de paroi). Dans la région interne, le profil de vitesse adimensionnel U^+ est une fonction de la variable y^+ (loi de paroi):

$$U^+ = f(y^+), \qquad ou \quad U^+ = \frac{U}{U_\tau} \qquad et \quad y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu}$$

Dans la région externe, le profil de vitesse adimensionnel dépend de la variable η (loi de vitesses déficitaire):

$$\frac{U_e - U}{U_\tau} = \Phi(\eta), \qquad ou \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

δ est l'épaiseur de la couche limite. A la frontière $y = \delta$, on a $U = U_e$. La différence $U_e - U$ représente le défaut de vitesses par rapport à la vitesse extérieure. Enfin, U_τ est la vitesse de frottement ($U_\tau = (\tau_p/\rho)^{1/2}$).

Dans ces deux régions, les comportements du profil de vitesse sont indépendants. Une telle approche n'est possible que s'il existe une région intermédiaire (région de recouvrement) dans laquelle le profil de vitesse obéit simultanément aux deux lois (la loi de paroi et la loi de vitesses déficitaire):

$$\frac{U}{U_\tau} = f\left(\frac{yU_\tau}{\nu}\right)$$
$$\frac{U_e - U}{U_\tau} = \Phi(\eta)$$

Une condition de validité de ce modèle est la possibilité de réaliser simultanément $y^+ \to \infty$ et $\eta \to 0$.

1)- Montrer que le rapport $\frac{y^+}{\eta}$ définie un nombre de Reynolds R_τ basé sur la vitesse U_τ. Vers quelle limite tend R_τ quand $y^+ \to \infty$ et $\eta \to 0$?

Les variables η et y^+ étant indépendantes, on montre que:

$$-\eta\frac{d\Phi}{d\eta} = y^+\frac{df}{dy^+} = A, \qquad ou \quad \text{A est une constante}$$

2)- Retrouver, par intégration, respectivement la loi de paroi logarithmique et la loi de vitesses déficitaire:

0,5
$$\frac{U}{U_\tau} = \frac{1}{\chi} ln\left(\frac{yU_\tau}{\nu}\right) + C$$
0,5
$$\frac{U_e - U}{U_\tau} = -\frac{1}{\chi} ln\left(\frac{y}{\delta}\right) + B$$

où χ=0,41 et C est une constante voisine de 5.

1 3)- En déduire l'expression du rapport des vitesses U_e/U_τ.

4)- La relation U_e/U_τ exprime en fait une loi pour le coefficient de frottement C_f ($C_f =$ 1 $\tau_p/(\rho U_e^2/2)$). Montrer que:

$$U_\tau = U_e \left(\frac{C_f}{a}\right)^b$$

où a et b sont des constantes à déterminer.

0,5 5)- En déduire alors la relation à laquelle obéit le coefficient de frottement C_f (utiliser les réponses des questions 3 et 4).

6)- Lorsque $R_\tau \to \infty$, trouver la limite de chacune des grandeurs suivantes:

0,25x3
$$\frac{U_\tau}{U_e}, \qquad C_f \qquad et \quad R_\delta = \frac{U_e \delta}{\nu}$$

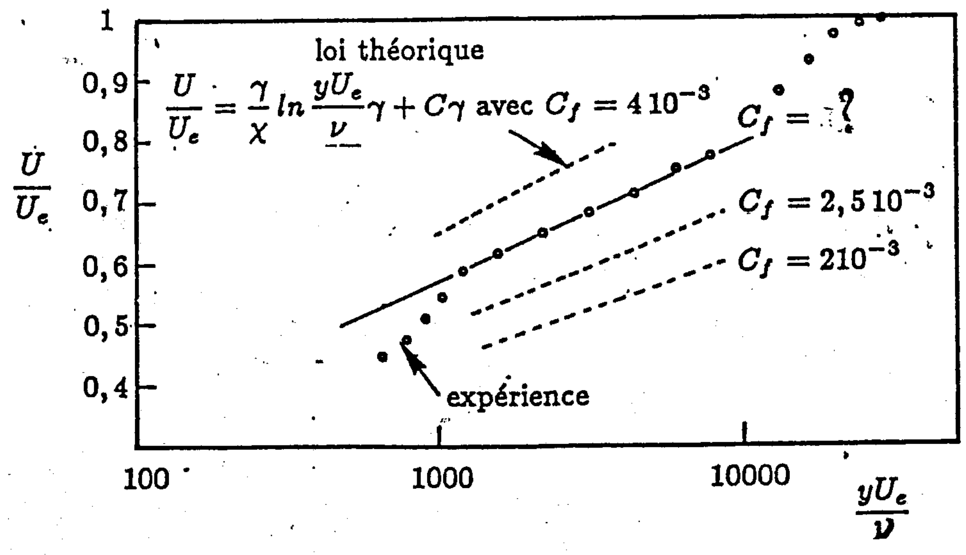
7)Montrer que la loi de paroi logarithmique peut se mettre sous la forme:

1
$$\frac{U}{U_e} = \gamma \left[\frac{1}{\chi} ln\left(\frac{yU_e}{\nu}\gamma\right) + C\right]$$

où γ est une fonction de C_f à déterminer.

La loi logarithmique est souvent utilisée pour déterminer expérimentalement la valeur du frottement pariétal (ou de C_f). En pratique, on trace le rapport $\frac{U}{U_e}$ (expression théorique établie précédemment) en fonction de $\frac{yU_e}{\nu}$, pour différentes valeurs de C_f. Dans le réseau ainsi déterminé, l'une des courbes doit recouper d'assez près les données expérimentales. Elle donne la valeur du coefficient de frottement pariétal C_f. Sur la figure 2, on a tracé un réseau de courbes ainsi que le résultat expérimental.

1,5 8) Déterminer la valeur de Cf donnée par la courbe qui recoupe bien les données expérimentales.



Fig, 2

Exercice 3 : Écoulement turbulent dans une conduite

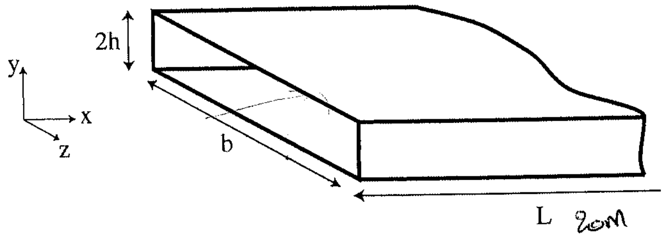


Figure 1: Géométrie de l'écoulement dans une conduite parallélépipédique.

On considère un écoulement d'eau dans une conduite de section parallélépipédique, de largeur $b = 40$ cm et de hauteur $2h = 4$ cm, généré par une différence de pression de $\Delta p = 10^5$ Pa sur une longueur $L = 20$ m (figure 1). On considère l'écoulement comme étant statistiquement stationnaire et invariant par translation selon x. De plus, avec $b \gg h$, on peut considérer le problème comme étant indépendant de z, et donc purement bi-dimensionnel, et l'on note (u_x, u_y) les composantes de la vitesse selon x et y.

On note $\delta_v = \nu/u^*$ l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, où u^* la vitesse de friction à la paroi (définie telle que $\tau_0 = \rho u^{*2}$ est la contrainte à la paroi). On rappelle le profil de vitesse moyen dans la sous-couche inertielle ($\delta_v \ll y \ll h$) :

$$\frac{\overline{u}_x(y)}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta_v} + A \qquad (1)$$

et dans la sous-couche visqueuse ($y < \delta_v$) :

$$\frac{\overline{u}_x(y)}{u^*} = \frac{y}{\delta_v}. \qquad (2)$$

$\frac{\bar{u}}{u_\tau} =$ $\quad \bar{u} =$

$1/\kappa = 2,5$ est la constante de von Kármán, et A une constante sans dimension.

1. Dessiner l'allure du profil de vitesse entre les 2 plans $y = 0$ et $y = 2h$ dans le cas laminaire et dans le cas turbulent.

95

2

2. Rappeler à quoi correspondent la sous-couche visqueuse (SCV) et la sous-couche inertielle (SCI), en particulier du point de vue des mécanismes de transport de quantité de mouvement (1 schéma et quelques lignes de texte). Où la contrainte totale $\tau(y)$ est-elle maximale ? où est-elle nulle ?

1

3. Rappeler l'expression de la contrainte à la paroi τ_0 en fonction de Δp et des dimensions de la conduite. Calculer τ_0, et en déduire u^*, δ_v et le nombre de Reynolds turbulent $Re^* = u^* h/\nu$ (on a $\rho = 10^3$ kg m^{-3} et $\nu = 10^{-6}$ m^2 s^{-1} pour de l'eau à 20°C).

On s'intéresse aux statistiques des fluctuations turbulentes dans la sous-couche inertielle. A distance $\delta_v \ll y \ll h$ fixée, et pour des structures turbulentes de taille $r \ll y$, on admet que l'on peut appliquer localement la théorie de Kolmogorov de la turbulence homogène en régime statistiquement stationnaire. Ainsi, on suppose qu'à chaque valeur de y, la puissance (par unité de masse) fournie par l'écoulement moyen aux fluctuations turbulentes,

$$\epsilon_i(y) = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}, \tag{3}$$

est équilibrée par la puissance dissipée par viscosité à cette même distance y,

$$\epsilon_d(y) = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}. \tag{4}$$

4. ~~Justifiez brièvement (1 schéma et quelques lignes) que le terme ϵ_i est positif.~~

2,0

5. Dans la sous-couche inertielle ($\delta_v \ll y \ll h$), quelle est la taille des structures turbulentes contribuant le plus aux transferts d'énergie ? En admettant que les fluctuations de vitesse dans cette région soient de l'ordre de u^* et indépendantes de y, déduire de (1) et (3) l'ordre de grandeur de $\epsilon_i(y)$ en fonction de u^*, y et κ. Où l'écoulement moyen produit-il le plus de fluctuations turbulentes ?

1,5

6. Dans la sous-couche visqueuse, la dissipation d'énergie par viscosité est simplement donnée par la loi valable pour les écoulements laminaires,

$$\epsilon_v = \nu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right)^2. \tag{5}$$

Calculer ϵ_v pour $y < \delta_v$, et vérifier que cette loi raccorde bien avec $\epsilon_i(y)$ obtenue précédemment pour $y \to \delta_v$. Tracer l'allure de la dissipation en fonction de y, en faisant bien apparaître cette transition entre SCI et SCV.

1

7. En supposant les fluctuations de vitesse v_r' à une échelle r (avec $r \ll y$) données par la loi de Kolmogorov $v_r' \simeq C(\epsilon_i r)^{1/3}$, en déduire v_r'/u^* en fonction de r/y.

8. A partir de l'expression (4), exprimer la vitesse caractéristique $v_\eta'(y)$ des plus petits tourbillons à une distance y de la paroi en fonction de y et de l'échelle de Kolmogorov locale $\eta(y)$. En déduire que cette échelle de Kolmogorov locale varie comme

$$\eta(y) \propto h\, Re^{*-3/4} \left(\frac{y}{h}\right)^{1/4}.$$

0,5

Calculer l'ordre de grandeur de cette échelle pour $y = h$ (application numérique). Que devient $\eta(y)$ pour $y \to \delta_v$?