Support TD

5T-TP4 CFD : Mécanique des fluides numérique

Partie 1 : Différences finies

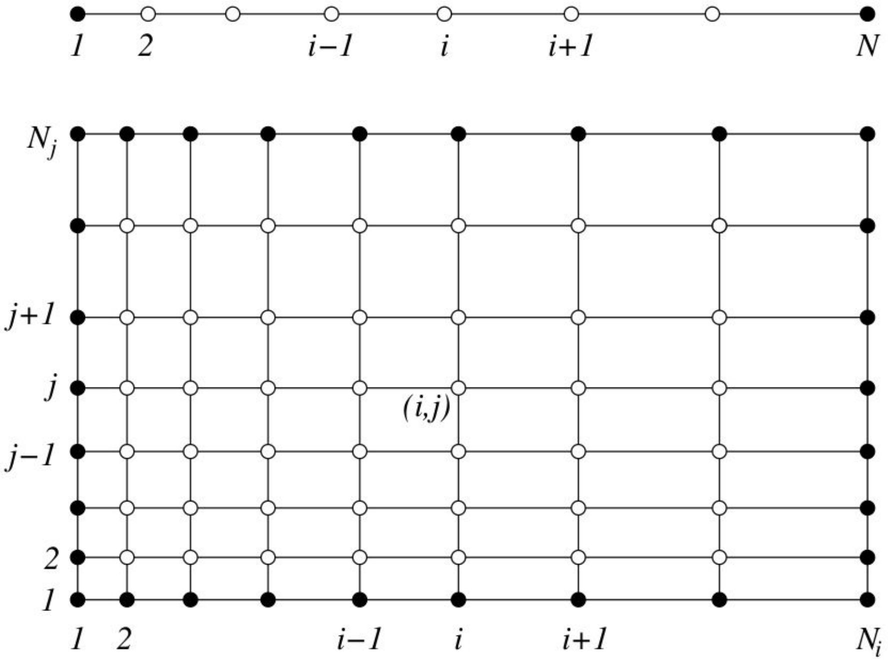
Dahia Chibouti

Bases – Différences finies

- **Grille numérique pour la discrétisation**

1D

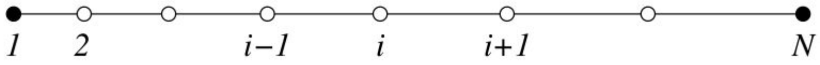
2D



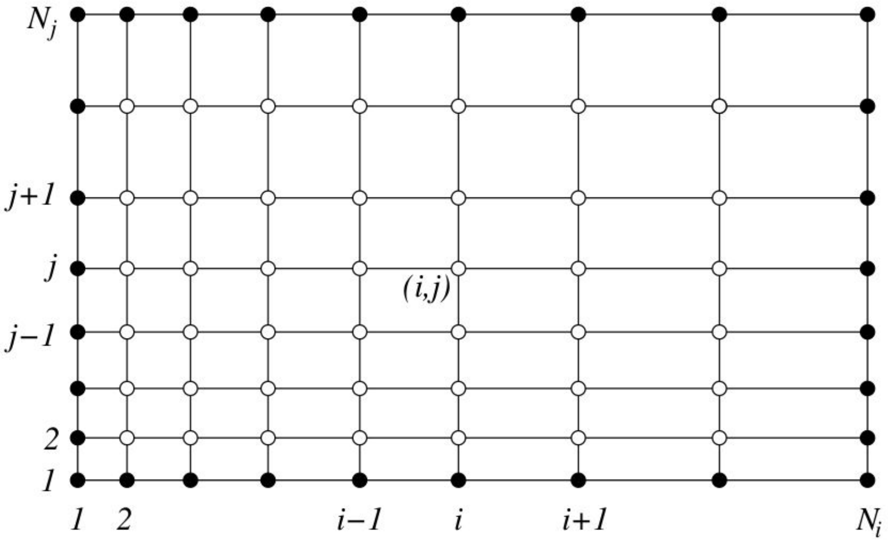
Bases – Différences finies

- **Grille numérique pour la discrétisation**

1D



2D

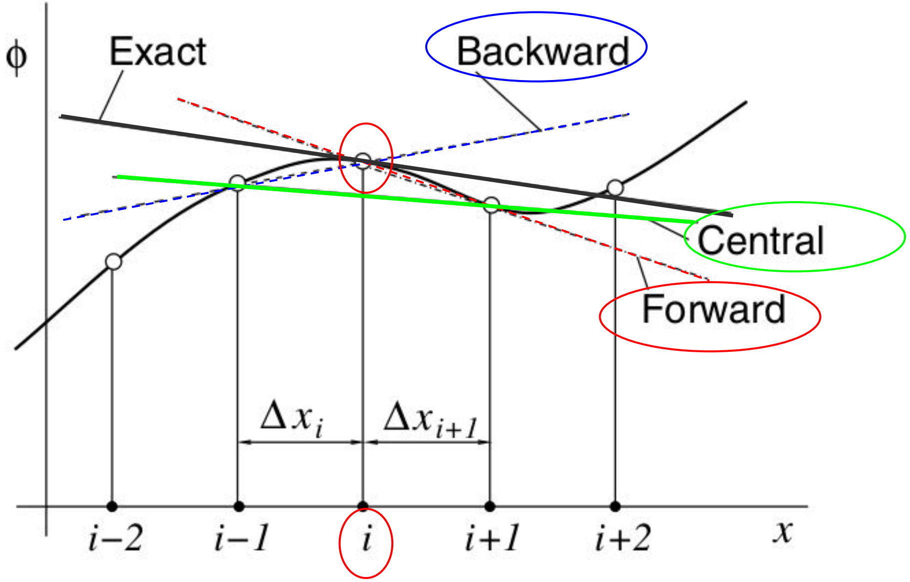


$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

Bases – Différences finies

- **Principe de la dérivation**

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x}$$



Approximation de la première dérivée

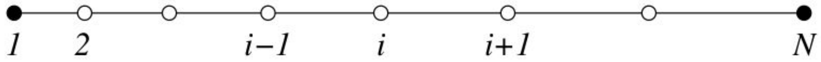
- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$O(\Delta x^p)$

"Higher-order terms"



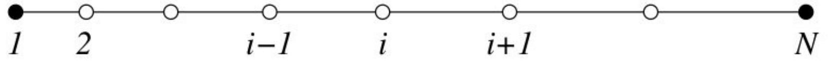
Approximation de la première dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$$O(\Delta x^p)$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Forward : décentré à droite

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Backward : décentré à gauche

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2\,(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6\,(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H\,.$$

Central : centré

Dahia Chibouti

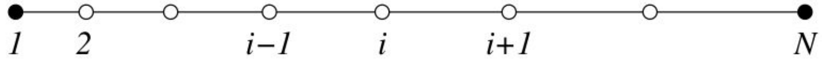
Approximation de la première dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$$O(\Delta x^p)$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Forward : décentré à droite

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Backward : décentré à gauche

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H\,.$$

Central : centré

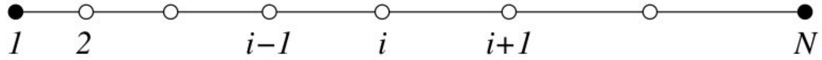
Approximation de la première dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$$O(\Delta x^p)$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Forward : décentré à droite

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Backward : décentré à gauche

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2\,(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6\,(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H\,.$$

Central : centré

Dahia Chibouti

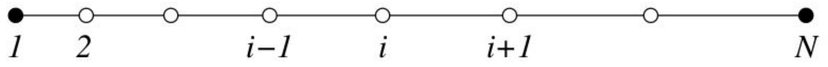
Approximation de la première dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$$O(\Delta x^p)$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Forward : décentré à droite

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H$$

Backward : décentré à gauche

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2\,(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 + (x_i - x_{i-1})^3}{6\,(x_{i+1} - x_{i-1})}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + H\,.$$

Central : centré

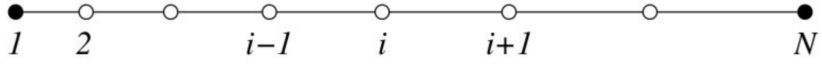
Dahia Chibouti

Approximation de la première dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + \underbrace{H}_{O(\Delta x^p)}$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} ;$$

Forward : décentré à droite

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} ;$$

Backward : décentré à gauche

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} .$$

Central : centré

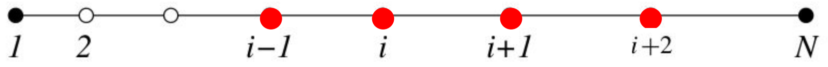
Ajustement polynomial – ordre plus élevé !

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$$O(\Delta x^p)$$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 6\,\phi_{i+1} - 3\,\phi_i - 2\,\phi_{i-1}}{6\,\Delta x} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^3\right);$$

Forward : décentré à droite

Trouver l’expression du schéma Backward (décentré à gauche) d’ordre 3 de la première dérivée ?

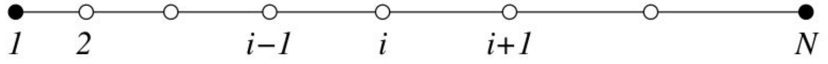
Ajustement polynomial – ordre plus élevé !

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$O(\Delta x^p)$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 6\,\phi_{i+1} - 3\,\phi_i - 2\,\phi_{i-1}}{6\,\Delta x} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^3\right)\,;$$

Forward : décentré à droite

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{2\,\phi_{i+1} + 3\,\phi_i - 6\,\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{6\,\Delta x} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^3\right)\,;$$

Backward : décentré à gauche

Trouver l'expression du schéma centré d'ordre 4 de la première dérivée ?

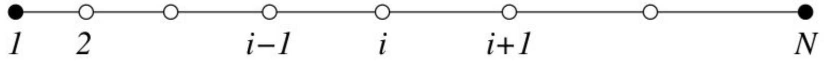
Ajustement polynomial – ordre plus élevé !

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$O(\Delta x^p)$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 6\,\phi_{i+1} - 3\,\phi_i - 2\,\phi_{i-1}}{6\,\Delta x} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^3\right);$$

Forward : décentré à droite

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{2\,\phi_{i+1} + 3\,\phi_i - 6\,\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{6\,\Delta x} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^3\right);$$

Backward : décentré à gauche

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 8\,\phi_{i+1} - 8\,\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{12\,\Delta x} + \mathcal{O}\left((\Delta x)^4\right).$$

Central : centré

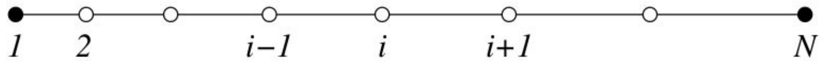
Approximation de la deuxième dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$$O(\Delta x^p)$$



$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Central : centré

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\,\phi_i}{(\Delta x)^2}$$

Trouver l'expression du schéma centré d'ordre 4 de la deuxième dérivée ?

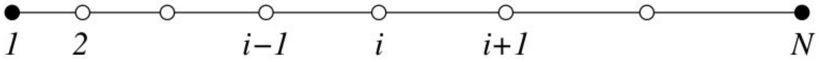
Approximation de la deuxième dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$O(\Delta x^p)$



$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Central : centré

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\,\phi_i}{(\Delta x)^2}$$

Schéma centré d'ordre 4 de la deuxième dérivée :

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 16\,\phi_{i+1} - 30\,\phi_i + 16\,\phi_{i-1} - \phi_{i-2}}{12(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

Dahia Chibouti

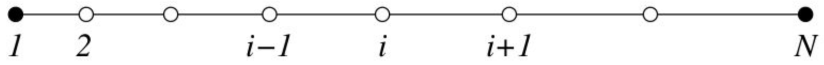
Approximation de la deuxième dérivée

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(x-x_i)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_i + H$$

$O(\Delta x^p)$



L'approche souvent utilisée est schéma centré du second ordre ; la dérivée interne est approximée en des points situés à mi-chemin entre les nœuds, puis une différence centée avec une taille de grille Dx est utilisée :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right]_i \approx \frac{\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})} \approx$$

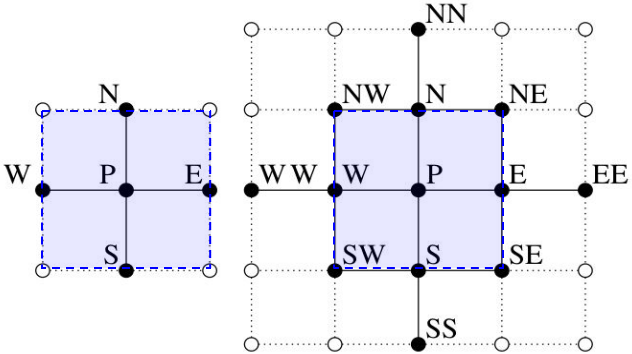
$$\frac{\Gamma_{i+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \Gamma_{i-\frac{1}{2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})}$$

Dahia Chibouti

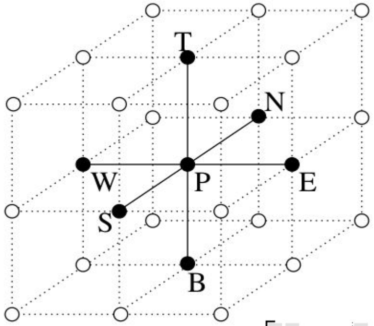
Résolution d’un système algébrique

- **Le système d'équation algébrique**

$$\boxed{A\boldsymbol{\phi} = \mathbf{Q}}$$



2D

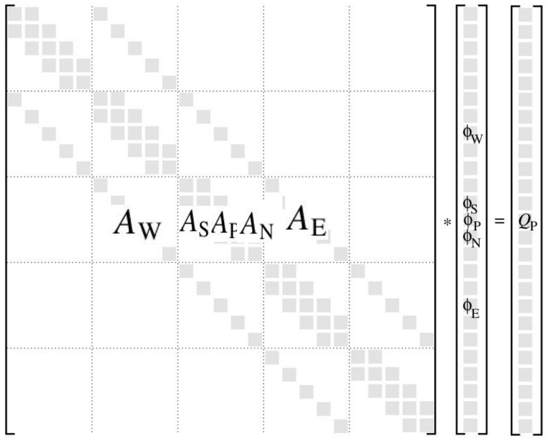


3D

i, j, k	P
$i-1, j, k$	W
$i, j-1, k$	S
$i, j+1, k$	N
$i+1, j, k$	E
$i, j, k-1$	B
$i, j, k+1$	T

$$A_P\phi_P + \sum_l A_l\phi_l = Q_P$$

$$\boxed{A_W\phi_W + A_S\phi_S + A_P\phi_P + A_N\phi_N + A_E\phi_E = Q_P}$$



Dahia Chibouti

Résolution d'un système algébrique

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j}}_{\text{convection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)}_{\text{diffusion}}$$

$$\boxed{A_\mathrm{W}\phi_\mathrm{W} + A_\mathrm{S}\phi_\mathrm{S} + A_\mathrm{P}\phi_\mathrm{P} + A_\mathrm{N}\phi_\mathrm{N} + A_\mathrm{E}\phi_\mathrm{E} = Q_\mathrm{P}}$$

$$A_\mathrm{P}^i\phi_i + A_\mathrm{E}^i\phi_{i+1} + A_\mathrm{W}^i\phi_{i-1} = Q_i$$

first-order upwind (UDS – FDS ou BDS, selon la direction de l'écoulement),

$$\left[\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x}\right]_i \approx \begin{cases} \rho u \dfrac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{if } u > 0\,; \\ \rho u \dfrac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}, & \text{if } u < 0\,. \end{cases}$$

$$A_\mathrm{E}^\mathrm{c} = \frac{\min(\rho u, 0)}{x_{i+1} - x_i}\,; \qquad A_\mathrm{W}^\mathrm{c} = -\frac{\max(\rho u, 0)}{x_i - x_{i-1}}\,;$$

$$A_\mathrm{P}^\mathrm{c} = -(A_\mathrm{E}^\mathrm{c} + A_\mathrm{W}^\mathrm{c})\,.$$

CDS approximation,

$$\left[\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x}\right]_i \approx \rho u \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

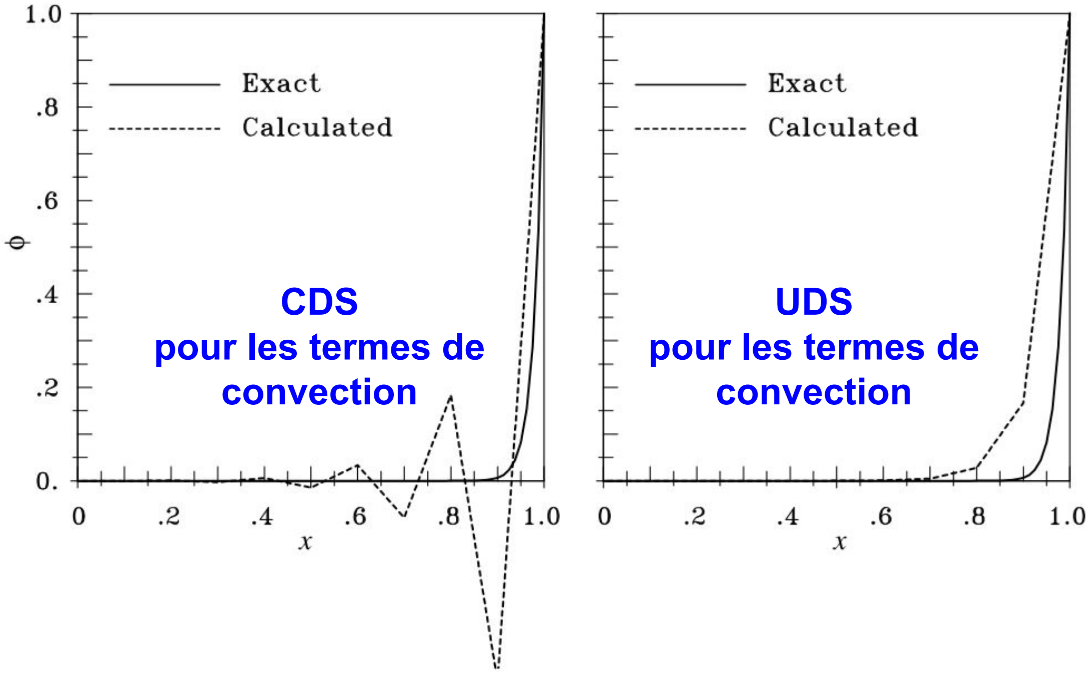
$$A_\mathrm{E}^\mathrm{c} = \frac{\rho u}{x_{i+1} - x_{i-1}}\,; \qquad A_\mathrm{W}^\mathrm{c} = -\frac{\rho u}{x_{i+1} - x_{i-1}}\,;$$

$$A_\mathrm{P}^\mathrm{c} = -(A_\mathrm{E}^\mathrm{c} + A_\mathrm{W}^\mathrm{c}) = 0\,.$$

Dahia Chibouti

Résolution d’un système algébrique

- **convection-diffusion equation**



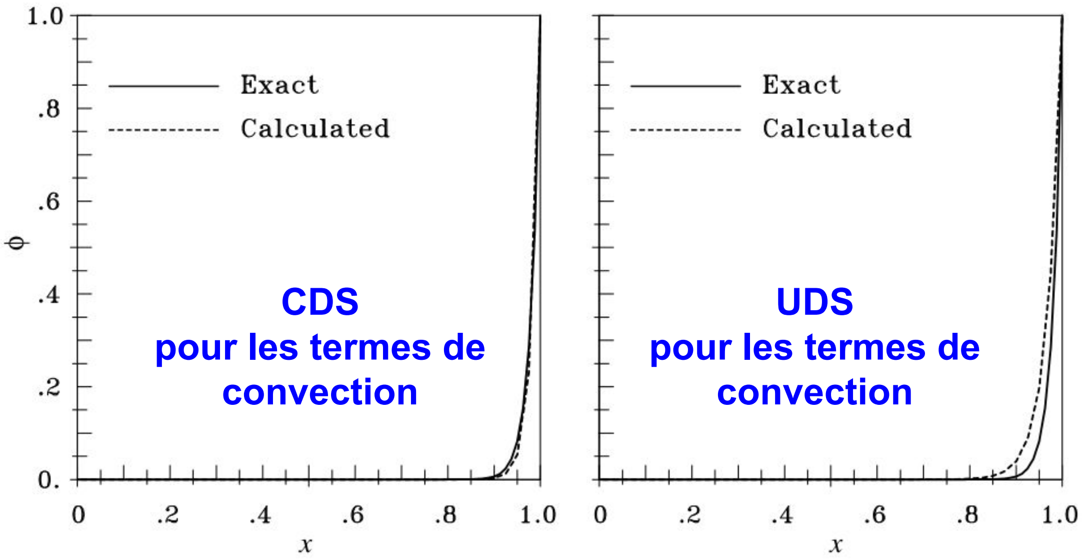
Solution de l'équation de convection-diffusion 1D à Pe = 50 en utilisant une grille uniforme de 11 nœuds.

Peclet number

$$\mathrm{Pe} = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

Résolution d'un système algébrique

- **convection-diffusion equation**



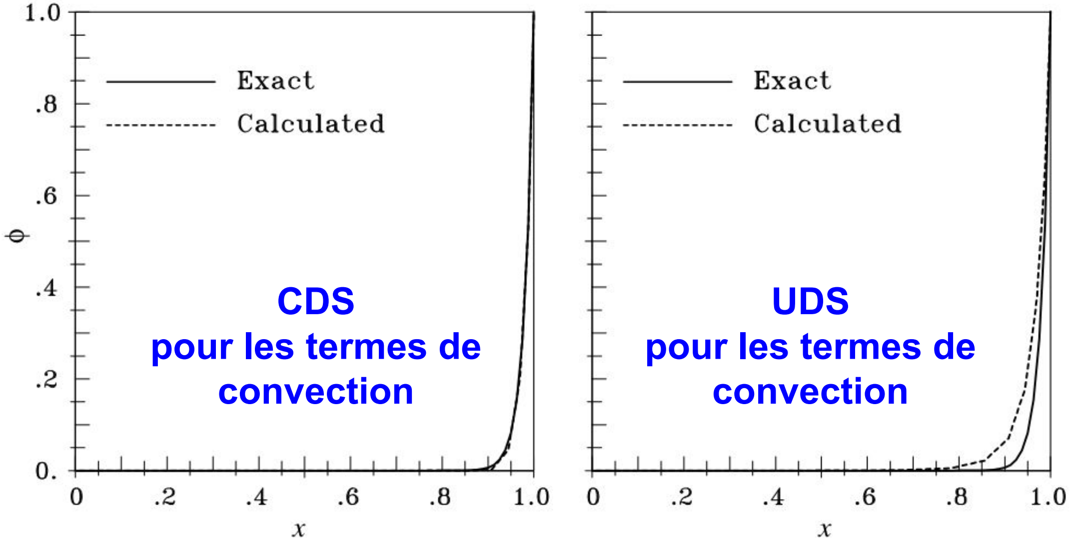
Solution de l'équation de convection-diffusion 1D à Pe = 50 en utilisant une grille uniforme de 41 nœuds.

Peclet number

$$\mathrm{Pe} = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

Résolution d’un système algébrique

- **convection-diffusion equation**



Solution de l'équation de convection-diffusion 1D à Pe = 50 en utilisant une grille non uniforme de 11 nœuds (grille rafinée à l'extrémité droite).

Peclet number

$$\mathrm{Pe} = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

Support TD

5T-TP4 CFD : Mécanique des fluides numérique

Finite Volume Methods

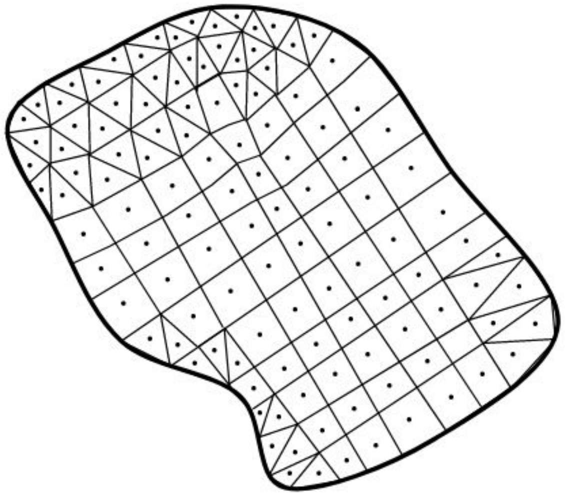
Dahia Chibouti

[S. V. Patankar et D. B. Spalding, 1971]

Basic concept :

[S. V. Patankar et D. B. Spalding, 1971]

- Étape 1 : discrétisation du domaine de calcul
- Étape 2 : intégration des équations sur chaque V.C.
- Étape 3 : approximation des équations intégrales
- Étape 4 : formation du système linéaire
- Étape 5 : résolution du système linéaire



Dahia Chibouti

Basic concept :

[S. V. Patankar et D. B. Spalding, 1971]

- Étape 1 : discrétisation du domaine de calcul
- Étape 2 : intégration des équations sur chaque V.C.
- Étape 3 : approximation des équations intégrales
- Étape 4 : formation du système linéaire
- Étape 5 : résolution du système linéaire

$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi$$

$$\boxed{\int_S \rho\phi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \Gamma\,\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_V q_\phi\,\mathrm{d}V}$$

Dahia Chibouti

Basic concept : [S. V. Patankar et D. B. Spalding, 1971]

- Étape 1 : discrétisation du domaine de calcul
- Étape 2 : intégration des équations sur chaque V.C.
- Étape 3 : approximation des équations intégrales
- Étape 4 : formation du système linéaire
- Étape 5 : résolution du système linéaire

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P + H\ ,$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P}$$

Dahia Chibouti

Basic concept : [S. V. Patankar et D. B. Spalding, 1971]

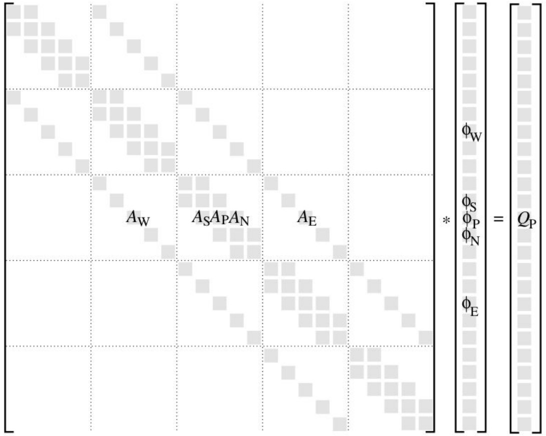
- Étape 1 : discrétisation du domaine de calcul
- Étape 2 : intégration des équations sur chaque V.C.
- Étape 3 : approximation des équations intégrales
- Étape 4 : formation du système linéaire
- Étape 5 : résolution du système linéaire

$$\boxed{A\boldsymbol{\phi} = \mathbf{Q}}$$

Basic concept :

[S. V. Patankar et D. B. Spalding, 1971]

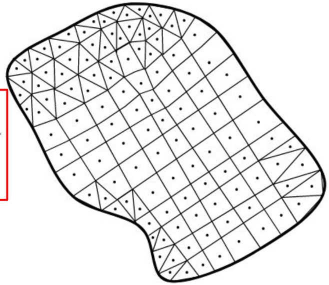
- Étape 1 : discrétisation du domaine de calcul
- Étape 2 : intégration des équations sur chaque V.C.
- Étape 3 : approximation des équations intégrales
- Étape 4 : formation du système linéaire
- Étape 5 : résolution du système linéaire



Dahia Chibouti

Basic concept : [S. V. Patankar et D. B. Spalding, 1971]

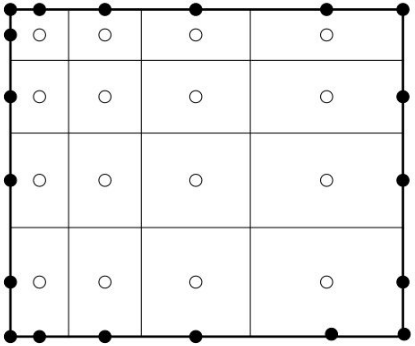
- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

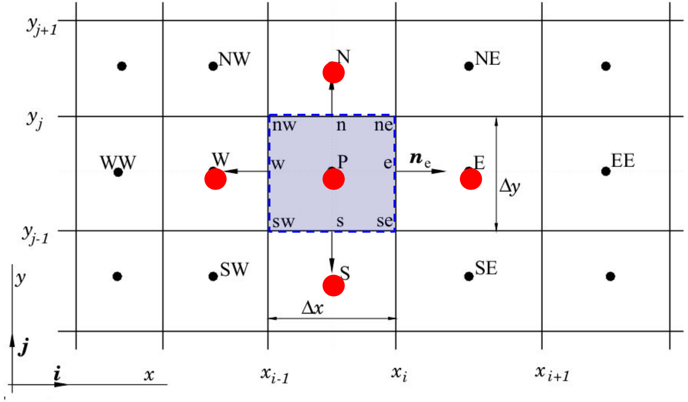


$$\frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + q_\phi \longrightarrow \boxed{\int_S \rho\phi \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \int_S \Gamma\, \nabla\phi\cdot\mathbf{n}\, \mathrm{d}S + \int_V q_\phi\, \mathrm{d}V}$$

Les équations écrites sous forme conservatives, et sont intégrées sur chaque V.C.

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, les intégrales, de volume des termes en divergence des flux, sont transformées en intégrales de surface sur les interfaces Si du V.C.





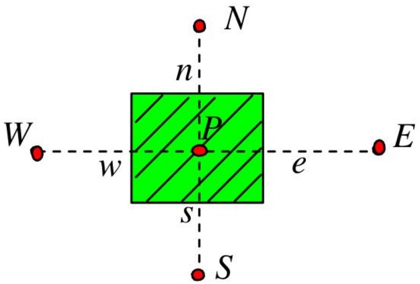


Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

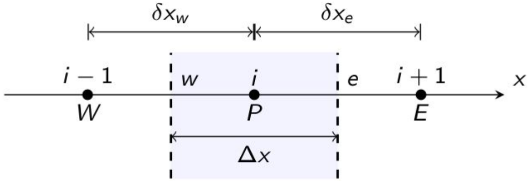


Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx$$

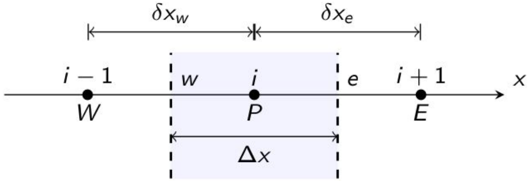
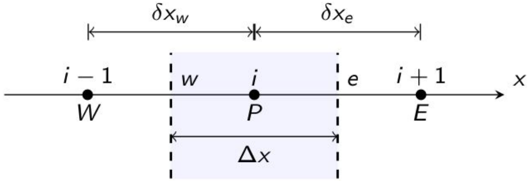


Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

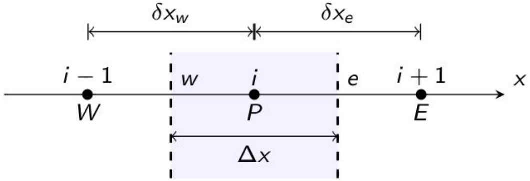
$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx$$

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \frac{d\phi}{dx}\bigg|_e - \Gamma_w \frac{d\phi}{dx}\bigg|_w$$

Dahia Chibouti

Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

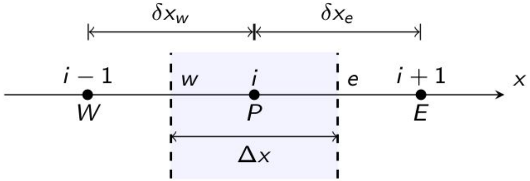
$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx$$

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \frac{d\phi}{dx}\bigg|_e - \Gamma_w \frac{d\phi}{dx}\bigg|_w$$

$$(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w}$$

Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx$$

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \frac{d\phi}{dx}\bigg|_e - \Gamma_w \frac{d\phi}{dx}\bigg|_w$$

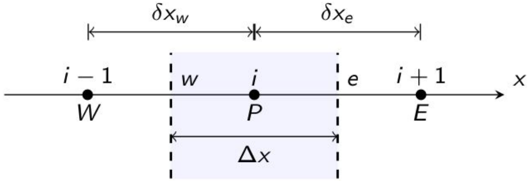
$$(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w}$$

En posant,

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx$$

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \frac{d\phi}{dx}\bigg|_e - \Gamma_w \frac{d\phi}{dx}\bigg|_w$$

$$(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w}$$

En posant,

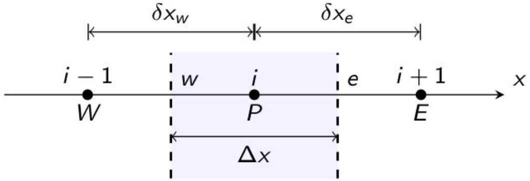
$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

la relation algébrique s'écrit toujours

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi)dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)dx$$

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \frac{d\phi}{dx}\bigg|_e - \Gamma_w \frac{d\phi}{dx}\bigg|_w$$

$$(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w}$$

En posant,

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

la relation algébrique s'écrit toujours

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

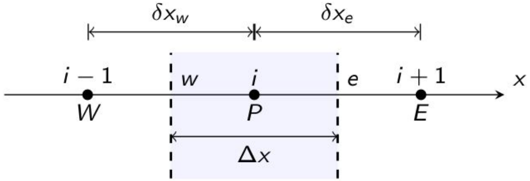
avec

$$\begin{cases} a_E = D_e - \dfrac{F_e}{2} \\ a_W = D_w + \dfrac{F_w}{2} \\ a_P = D_e + \dfrac{F_e}{2} + D_w - \dfrac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

Dahia Chibouti

Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx$$

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_e - \Gamma_w \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_w$$

$$(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w}$$

En posant,

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

la relation algébrique s'écrit toujours

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

avec

$$\begin{cases} a_E = D_e - \dfrac{F_e}{2} \\ a_W = D_w + \dfrac{F_w}{2} \\ a_P = D_e + \dfrac{F_e}{2} + D_w - \dfrac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

Dahia Chibouti

Remarques

1. Par l'équation de continuité, $\rho u =$ constante et donc $F_e = F_w$ et $a_P = a_E + a_W$
2. L'interpolation linéaire $\phi_e = (\phi_E + \phi_P)/2$ correspond aux différences centrées des développements en séries de Taylor. Elle est donc précise à l'ordre 2.
3. a_E et a_W peuvent être négatifs si $|F| > 2D$ et selon le signe de F.
   - la règle n^{o}2 n'est pas forcément vérifiée
   - résultats désastreux, le principe du maximum n'est plus vérifié
     Exemples : $D_e = D_w = 1$ et $F_e = F_w = 4$ donnent $a_E = -1$, $a_W = 3$ et $a_P = 2$.
     Si $\phi_E = 200$ et $\phi_W = 100$ alors $\phi_P = 50$!
     Si $\phi_E = 100$ et $\phi_W = 200$ alors $\phi_P = 250$!
4. Si un des $a_{nb} < 0$ et les autres coefficients sont supérieurs à 0 alors $a_P = \sum_{nb} a_{nb} < \sum_{nb} |a_{nb}|$. Le critère de stabilité de la méthode de Gauss-Seidel (critère de Scarborough $\sum_{nb} |a_{nb}|/|a_P| < 1$) ne sera plus vérifié et la méthode peut donc diverger ce qui **limite le schéma centré à des nombres de Reynolds (ou Péclet Pe ou P) petits**. Le **critère de stabilité** est pour le schéma centré

$$\boxed{P = \frac{F}{D} = \frac{\rho ||\vec{u}|| \delta x}{\Gamma} \leq 2}$$

5. Si $\Gamma = 0$ alors $D_e = D_w$, $a_E = -a_W$ et $a_P = 0$. Le système linéaire est insoluble par la méthode de Gauss-Seidel et la plupart des méthodes itératives.

Le schéma centré n'est pas inutile pour autant !

Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

La discrétisation du terme de diffusion est inchangé. Pour le terme convectif, on pose :

$$\begin{cases} \phi_e = \phi_P & \text{si } F_e > 0 \\ \phi_e = \phi_E & \text{si } F_e < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi_w = \phi_W & \text{si } F_w > 0 \\ \phi_w = \phi_P & \text{si } F_w < 0 \end{cases}$$

En posant l'operateur

$$[A; B] = \max(A, B),$$

le terme convectif s'écrit **(détailler)** :

$$\begin{cases} (\rho u \phi)_e = F_e \phi_e = \phi_P [F_e; 0] - \phi_E [-F_e; 0] \\ (\rho u \phi)_w = F_w \phi_w = \phi_W [F_w; 0] - \phi_P [-F_w; 0] \end{cases}$$

On obtient l'équation de convection/diffusion discrétisée suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

avec

$$\begin{cases} a_E = D_e + [-F_e; 0] \\ a_W = D_w + [F_w; 0] \\ a_P = D_e + [F_e; 0] + D_w + [-F_w; 0] = a_E + a_W + F_e - F_w \end{cases}$$

où a_P et a_{nb} ne sont jamais négatifs. Les solutions sont donc toujours physiquement admissibles. **Le schéma upwind est inconditionnellement stable.** Le critère de Scarborough est vérifié.

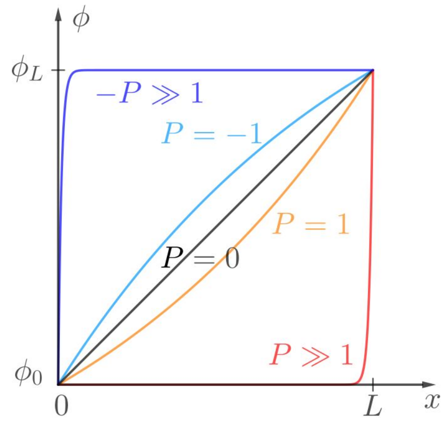
Solution exacte du problème convection-diffusion 1D

Le problème aux valeurs aux limites suivant

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\rho u \phi) = \dfrac{d}{dx}\left(\Gamma \dfrac{d\phi}{dx}\right) \\ \phi(x=0) = \phi_0 \\ \phi(x=L) = \phi_L \end{cases}$$

admet une solution exacte donnée par

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(\dfrac{P\,x}{L}\right) - 1}{\exp(P) - 1}$$



où $P = \rho u L/\Gamma = F/D$ est le nombre de Péclet de maille (L est la largeur de la maille). Pour rappel, le nombre de Péclet est le rapport entre les forces de convection et de diffusion.

Note : selon que la variable ϕ soit assimilée à la vitesse ou à la température on parle de nombre de Reynolds de maille ou de nombre de Péclet de maille. Dans la suite on gardera seulement la notion de Péclet de maille, noté P, puisqu'on travaille généralement sur l'exemple de l'équation de la chaleur.

Solution exacte du problème convection-diffusion 1D

L'analyse de la solution exacte nous donne que :

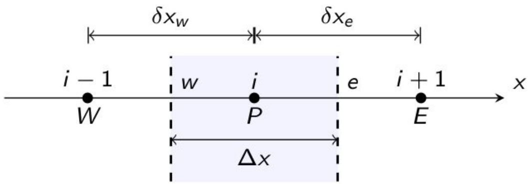
- $P = 0$: pas de convection ou de la diffusion pure. Le profil est linéaire.
- $P \gg 1$: influence prépondérante de ϕ_0
- $-P \gg 1$: influence prépondérante de ϕ_L
- Le schéma centré ($\phi_{L/2} = (\phi_0 + \phi_L)/2$) est
  - exact pour $P = 0$
  - acceptable pour $|P|$ petit
- Le schéma décentré amont ($\phi_{L/2} = \phi_0$ si $P > 0$ et ϕ_L si $P < 0$) est
  - exact pour $|P|$ très grand
  - faux si $|P|$ petit

Remarques

- P est grand en valeur absolue, $d\phi/dx \approx 0$ en $x = L/2$. Donc la diffusion est nulle !
- Or dans le schéma upwind, on calcule le terme de diffusion à partir d'un profil linéaire de ϕ entre 0 et L. C'est-à-dire que pour des grands nombre de Péclet, on surestime la diffusion : introduction de la notion de diffusion numérique !

Schéma exponentiel

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$

avec J le flux total (diffusion et convection). La forme discrète après intégration sur un VC est simplement $J_e - J_w = 0$. Pour calculer J_e et J_w on se sert de la solution exacte entre P et E pour J_e et entre W et P pour J_w. Pour J_e, on a

$$J_e = (\rho u)_e \phi_e - \Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e$$

avec

$$\phi(x) = (\phi_E - \phi_P)\frac{\exp\left(\frac{P_e\, x}{\delta x_e}\right) - 1}{\exp(P_e) - 1} + \phi_P$$

et

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{(\rho u)_e \delta x_e}{\Gamma_e}$$

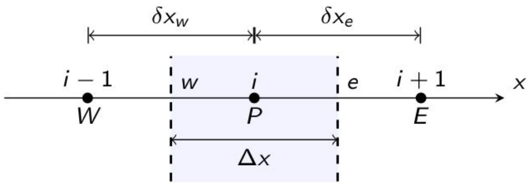
On trouve finalement

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1}\right) \quad \text{et} \quad J_w = F_w \left(\phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(P_w) - 1}\right)$$

J_e et J_w ne dépendent pas de la position de l'interface e ou w entre P et E ou entre P et W

Schéma exponentiel

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$

$$J_e = F_e\left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1}\right) \quad \text{et} \quad J_w = F_w\left(\phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(P_w) - 1}\right)$$

Donc, avec le schéma exponentiel, l'équation de convection/diffusion discrétisée $J_e - J_w = 0$ prend la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

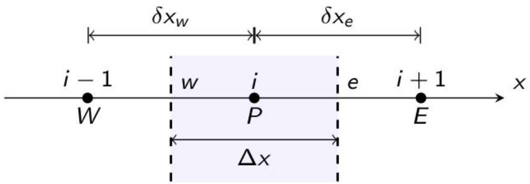
$$\begin{cases} a_E = \dfrac{F_e}{\exp\left(\dfrac{F_e}{D_e}\right) - 1} \\ a_W = \dfrac{F_w}{\exp\left(\dfrac{F_w}{D_w}\right) - 1} \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

Remarques

1. Pour un problème stationnaire, ce schéma permet d'obtenir la solution exacte, quel que soit le nombre de Péclet ou le nombre de nœuds.
2. Cependant, ce schéma est assez peu utilisé car
   - les fonctions exponentielles coûtent assez cher à calculer numériquement
   - il n'est pas exact pour des problèmes 2D, 3D, instationnaires, avec terme source, etc, ... Le coût supplémentaire de calcul n'est alors pas justifié.

Schéma hybride

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



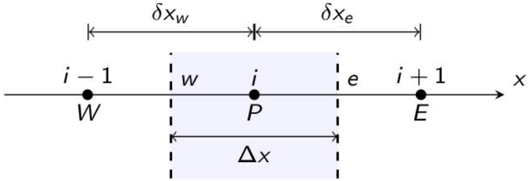
$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$

Il a qualitativement le **même comportement que le schéma exponentiel** mais est **moins coûteux**. Dans le schéma exponentiel, on a

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} \quad \text{soit} \quad \frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp\left(P_e\right) - 1}$$

Schéma hybride

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



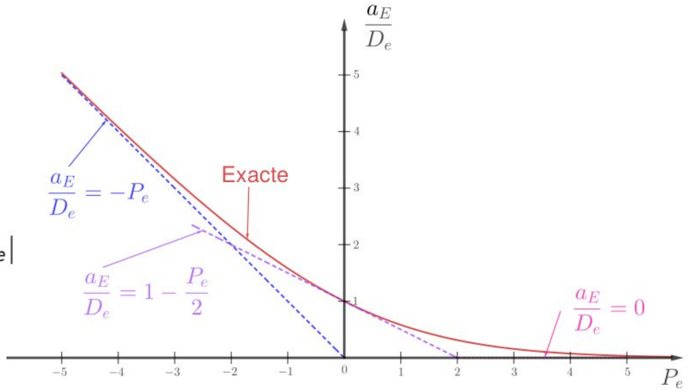
$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$

Il a qualitativement le **même comportement que le schéma exponentiel** mais est **moins coûteux**. Dans le schéma exponentiel, on a

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\dfrac{F_e}{D_e}\right) - 1} \quad \text{soit} \quad \frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1}$$

On note que

- $P_e > 0$. Le point E est en aval du point P et l'influence de E diminue lorsque P_e augmente. Quand $P_e \to \infty$, le rapport a_E/D_e tend vers 0 (droite de la courbe).
- $P_e < 0$. Le point E est en amont du point P et l'influence de E augmente lorsque $|P_e|$ augmente. Quand $P_e \to -\infty$, le rapport a_E/D_e tend vers $-P_e$
- $P_e = 0$. La tangente est $a_E/D_e = 1 - P_e/2$

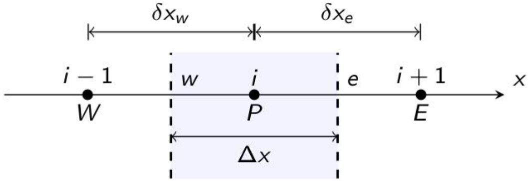


variation du rapport a_E/D_e en fonction du nombre de Péclet de maille P_e

Schéma hybride

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{d}{dx}(\rho u\phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u\phi - \Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$



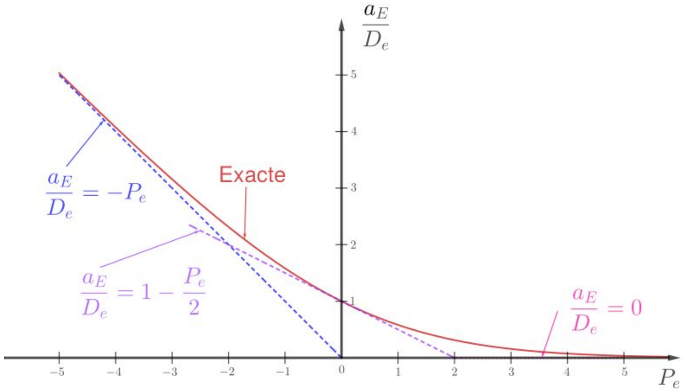
Le **schéma hybride est une combinaison de ces trois tangentes** :

- pour $P_e < -2$, $a_E/D_e = -P_e$
- pour $-2 \leq P_e \leq 2$, $a_E/D_e = 1 - P_e/2$
- pour $P_e > 2$, $a_E/D_e = 0$

Sous forme compacte, le schéma hybride peut s'écrire :

$$a_E = D_e[-P_e; 1 - \frac{P_e}{2}; 0] = [-F_e; D_e - \frac{F_e}{2}; 0]$$

- Il est identique au schéma centré pour $-2 \leq P_e \leq 2$
- Il est identique au schéma upwind pour $|P_e| > 2$ mais avec $D_e = 0$ (pas de diffusion), c'est-à-dire qu'on ne surestime plus la diffusion.



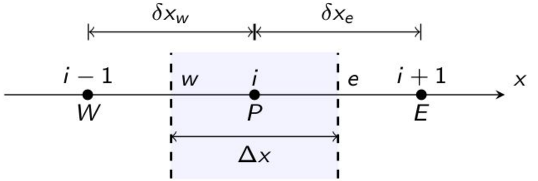
variation du rapport a_E/D_e en fonction du nombre de Péclet de maille P_e

Dahia Chibouti

Schéma hybride

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$

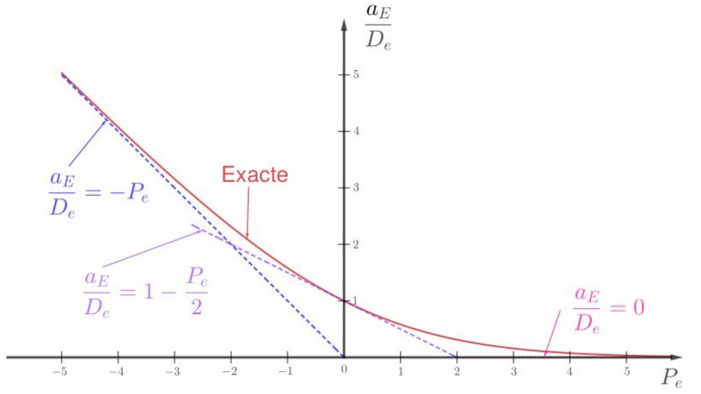


Le schéma hybride est donc une combinaison améliorée entre le schéma centré et le schéma upwind. L'équation de convection/diffusion discrétisée s'écrit :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

avec

$$\begin{cases} a_E = [-F_e; D_e - \dfrac{F_e}{2}; 0] \\ a_W = [F_w; D_w + \dfrac{F_w}{2}; 0] \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$



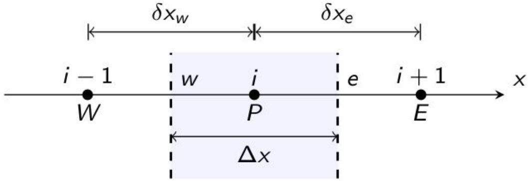
variation du rapport a_E/D_e en fonction du nombre de Péclet de maille P_e

Dahia Chibouti

Schéma hybride / exponentiel

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$



hybride / exponentiel

hybride

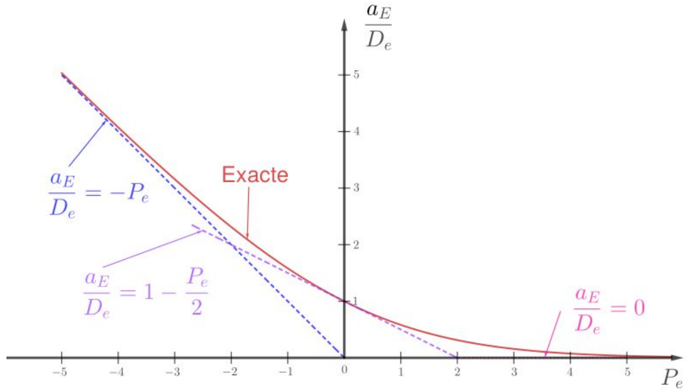
$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

$$\begin{cases} a_E = [-F_e; D_e - \dfrac{F_e}{2}; 0] \\ a_W = [F_w; D_w + \dfrac{F_w}{2}; 0] \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

exponentiel

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

$$\begin{cases} a_E = \dfrac{F_e}{\exp\left(\dfrac{F_e}{D_e}\right) - 1} \\ a_W = \dfrac{F_w}{\exp\left(\dfrac{F_w}{D_w}\right) - 1} \\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases}$$

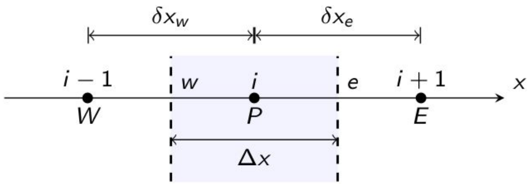


variation du rapport a_E/D_e en fonction du nombre de Péclet de maille P_e

Dahia Chibouti

Schéma Power Law ou Puissance

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$

Avec ce schéma, moins cher que le schéma exponentiel, on interpole beaucoup plus finement la solution exacte que ne le fait le schéma hybride (dont l'écart avec le schéma exponentiel est maximal pour $|P_e| = 2$).
Les coefficients a_E pour le schéma puissance sont définis par :

$$\frac{a_E}{D_e} = \begin{cases} -P_e & \text{pour } P_e < -10 \\ (1+0.1P_e)^5 - P_e & \text{pour } -10 \leq P_e < 0 \\ (1-0.1P_e)^5 & \text{pour } 0 \leq P_e \leq 10 \\ 0 & \text{pour } P_e > 10 \end{cases}$$

La forme compacte, en utilisant l'opérateur $[A; B]$, est :

$$a_E = D_e \left[0; (1-0.1P_e)^5\right] + [0; -F_e]$$

Remarques

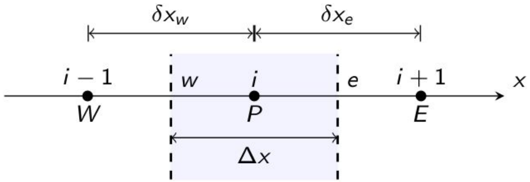
1. Pour $|P_e| > 10$, le schéma puissance est identique au schéma hybride
2. Les schémas puissance et exponentiel sont tellement proches qu'ils ne peuvent pas être comparés graphiquement (voir tableau).
3. Le schéma puissance est recommandé pour une forte convection (grands nombres de Péclet et de Reynolds).

Dahia Chibouti

Récapitulatif des différents schémas convectifs

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = 0 \iff \frac{dJ}{dx} = 0}$$



$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$
$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

schéma	a_E	a_W	remarques
centré	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$D_w - \frac{F_w}{2}$	- valable si $\lvert P_e \rvert \leq 2$
upwind	$D_e + [-F_e; 0]$	$D_w + [F_w; 0]$	- non approprié si $\lvert P_e \rvert$ petit - surestime la diffusion
exponentiel	$\frac{F_e}{\exp(P_e) - 1}$	$\frac{F_w \exp(P_w)}{\exp(P_w) - 1}$	- coût élevé - exact en 1D - $S = 0$, $\partial/\partial t \equiv 0$, ...
hybride	$[-F_e; D_e - \frac{F_e}{2}; 0]$	$[F_w + D_w + \frac{F_w}{2}; 0]$	- erreur maximale pour $\lvert P \rvert \approx 2$
puissance	$D_e[0; (1 - 0.1\lvert P_e \rvert)^5] + [0; -F_e]$	$D_w[0; (1 - 0.1\lvert P_w \rvert)^5] + [0; F_w]]$	- recommandé

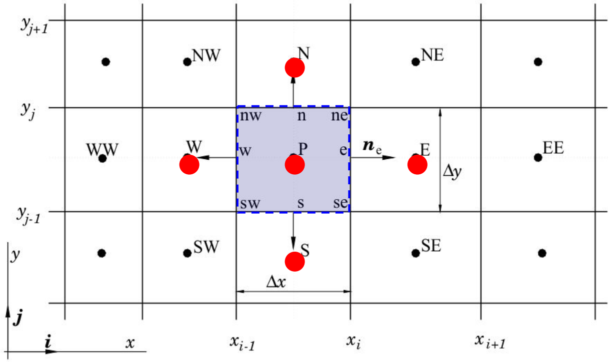
Dahia Chibouti

Discrétisation d’un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$

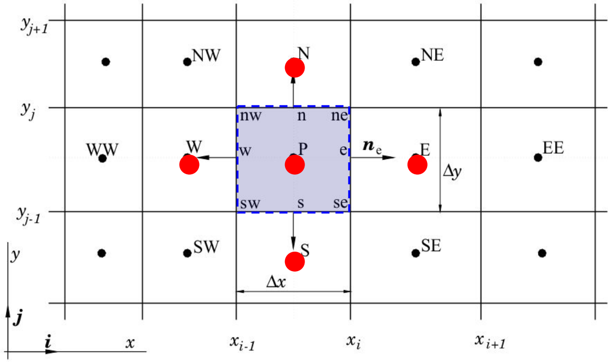
$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S \, dV = 0$$



Discrétisation d’un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



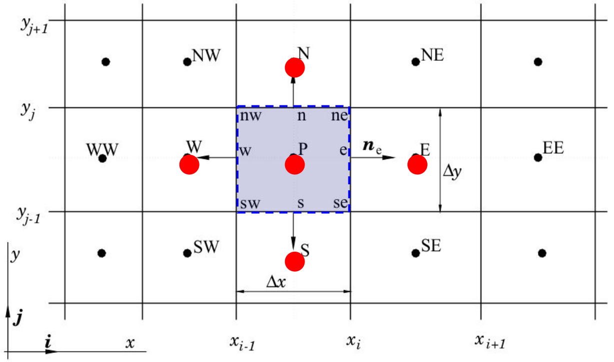
$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S \, dV = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S \, dxdy = 0$$

Discrétisation d’un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S \, dV = 0$$

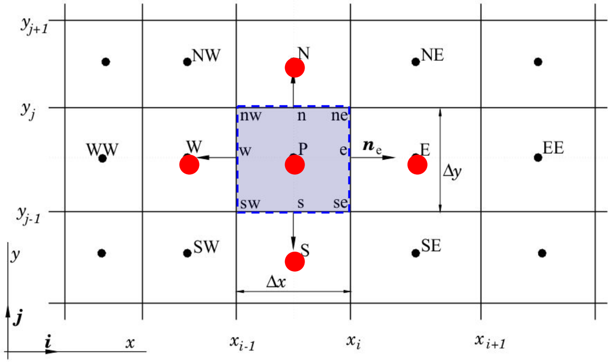
$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S \, dxdy = 0$$

$$\int_s^n \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy + \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_s^n dx + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

Discrétisation d'un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S \; dV = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S \; dxdy = 0$$

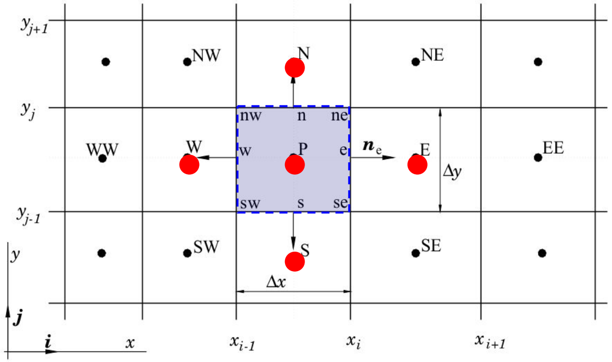
$$\int_s^n \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy + \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_s^n dx + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\Delta y \left(\Gamma_e \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e - \Gamma_w \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_w\right) + \Delta x \left(\Gamma_n \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_n - \Gamma_s \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_s\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

Discrétisation d’un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S \; dV = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S \; dxdy = 0$$

$$\int_s^n \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy + \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_s^n dx + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

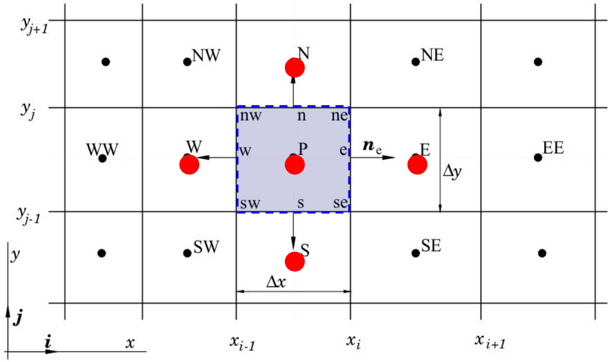
$$\Delta y \left(\Gamma_e \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e - \Gamma_w \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_w\right) + \Delta x \left(\Gamma_n \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_n - \Gamma_s \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_s\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\Delta y \left(\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w}\right) + \Delta x \left(\Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_n} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_s}\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

Discrétisation d'un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S\, dV = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S\, dxdy = 0$$

$$\int_s^n \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy + \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_s^n dx + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\Delta y \left(\Gamma_e \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e - \Gamma_w \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_w\right) + \Delta x \left(\Gamma_n \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_n - \Gamma_s \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_s\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

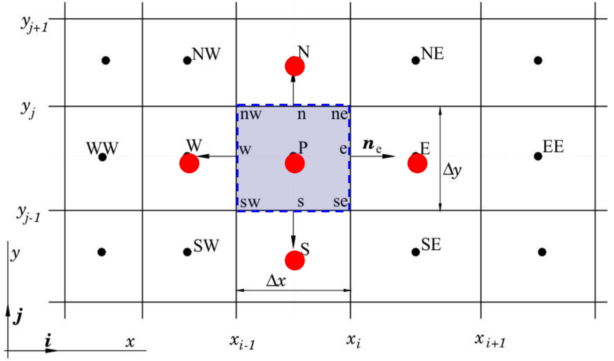
$$\Delta y \left(\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w}\right) + \Delta x \left(\Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_n} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_s}\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\phi_E \frac{\Delta y \Gamma_e}{\delta x_e} + \phi_W \frac{\Delta y \Gamma_w}{\delta x_w} + \phi_N \frac{\Delta x \Gamma_n}{\delta y_n} + \phi_S \frac{\Delta x \Gamma_s}{\delta y_s} - \phi_P \left(\frac{\Delta y \Gamma_e}{\delta x_e} + \frac{\Delta y \Gamma_w}{\delta x_w} + \frac{\Delta x \Gamma_n}{\delta y_n} + \frac{\Delta x \Gamma_s}{\delta y_s}\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

Discrétisation d’un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S \; dV = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S \, dxdy = 0$$

$$\int_s^n \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy + \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_s^n dx + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\Delta y \left(\Gamma_e \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e - \Gamma_w \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_w\right) + \Delta x \left(\Gamma_n \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_n - \Gamma_s \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_s\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\Delta y \left(\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w}\right) + \Delta x \left(\Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_n} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_s}\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

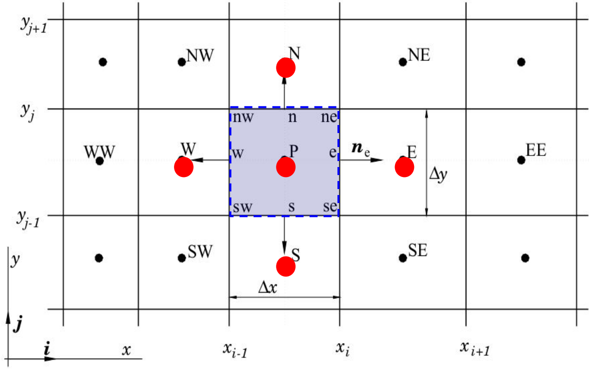
$$\phi_E \frac{\Delta y \Gamma_e}{\delta x_e} + \phi_W \frac{\Delta y \Gamma_w}{\delta x_w} + \phi_N \frac{\Delta x \Gamma_n}{\delta y_n} + \phi_S \frac{\Delta x \Gamma_s}{\delta y_s} - \phi_P \left(\frac{\Delta y \Gamma_e}{\delta x_e} + \frac{\Delta y \Gamma_w}{\delta x_w} + \frac{\Delta x \Gamma_n}{\delta y_n} + \frac{\Delta x \Gamma_s}{\delta y_s}\right) + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\phi_E a_E + \phi_W a_W + \phi_N a_N + \phi_S a_S - \phi_P a_P + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

Discrétisation d'un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S\ dV = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S\, dxdy = 0$$

$$\int_s^n \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy + \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_s^n dx + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

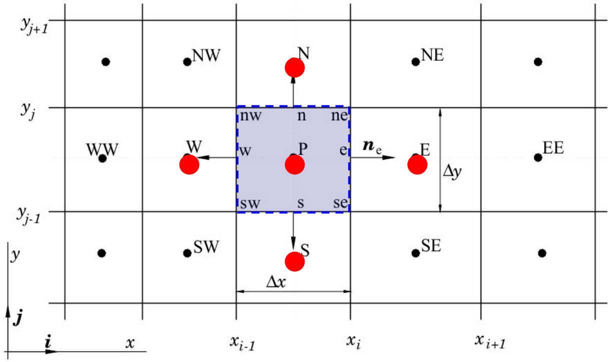
$$\phi_E a_E + \phi_W a_W + \phi_N a_N + \phi_S a_S - \phi_P a_P + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\begin{cases} a_E = \dfrac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x_e} \\ a_W = \dfrac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x_w} \\ a_N = \dfrac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y_n} \\ a_S = \dfrac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y_s} \\ a_P^{(0)} = \rho c \Delta x \Delta y / \Delta t \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^{(0)} - S_P \Delta x \Delta y \\ b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^{(0)} \phi_P^{(0)} \end{cases}$$

Dahia Chibouti

Discrétisation d'un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dV + \int_V S\, dV = 0$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy + \int_s^n \int_w^e S\, dxdy = 0$$

$$\int_s^n \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right]_w^e dy + \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right]_s^n dx + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

$$\phi_E a_E + \phi_W a_W + \phi_N a_N + \phi_S a_S - \phi_P a_P + \bar{S}\Delta x \Delta y = 0$$

Remarques

- **Les flux normaux aux faces traversées sont supposés constants.**
- Les conditions aux limites se gèrent de la même façon qu'en 1D. Il faut cependant faire attention à la taille des mailles.

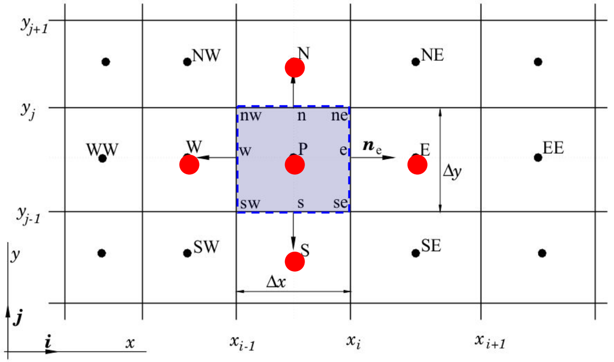
Dahia Chibouti

Discrétisation d’un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$

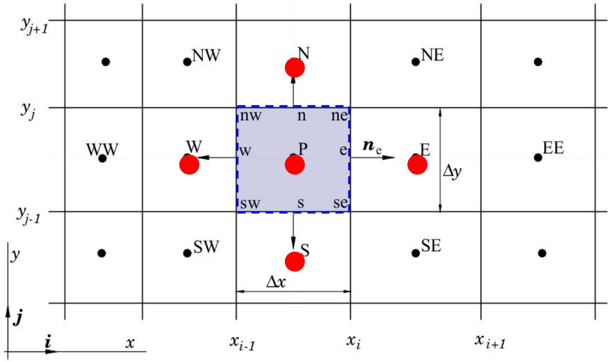
$$\int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} \frac{\rho\phi - \rho^{(0)}\phi^{(0)}}{\Delta t} dxdydz + \int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} \frac{\partial J_x}{\partial x} dxdydz$$
$$= \int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} S dxdydz$$



Discrétisation d'un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} \frac{\rho\phi - \rho^{(0)}\phi^{(0)}}{\Delta t} dxdydz + \int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} \frac{\partial J_x}{\partial x} dxdydz = \int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} S dxdydz$$

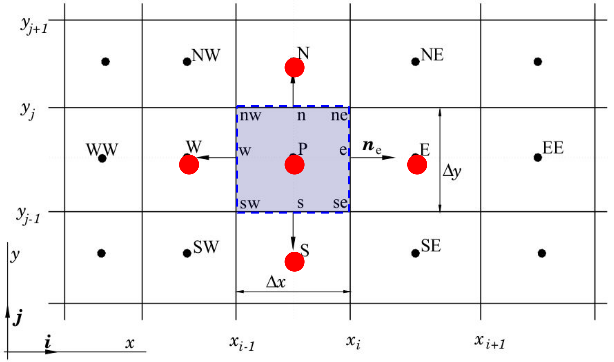
$$\frac{\rho_P\phi_P - \rho_P^{(0)}\phi_P^{(0)}}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z + \underbrace{(J_x)_e \Delta y\Delta z}_{J_e} - \underbrace{(J_x)_w \Delta y\Delta z}_{J_w} = (S_C + S_P\phi_P)\Delta x\Delta y\Delta z \qquad \textbf{(Eq. 1)}$$

où J_e (et respectivement J_w) est le flux total dans la direction x à travers l'interface e (resp. w) de surface $\Delta y\Delta z = 1 \times 1 = 1$

Discrétisation d'un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



$$\int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} \frac{\rho\phi - \rho^{(0)}\phi^{(0)}}{\Delta t} dxdydz + \int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} \frac{\partial J_x}{\partial x} dxdydz$$
$$= \int_0^{\Delta z}\int_0^{\Delta y}\int_0^{\Delta x} S dxdydz$$

$$\frac{\rho_P\phi_P - \rho_P^{(0)}\phi_P^{(0)}}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z + \underbrace{(J_x)_e \Delta y\Delta z}_{J_e} - \underbrace{(J_x)_w \Delta y\Delta z}_{J_w} = (S_C + S_P\phi_P)\Delta x\Delta y\Delta z \qquad \textbf{(Eq. 1)}$$

où J_e (et respectivement J_w) est le flux total dans la direction x à travers l'interface e (resp. w) de surface $\Delta y \Delta z = 1 \times 1 = 1$

On discrétise l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} = 0$ de la même manière :

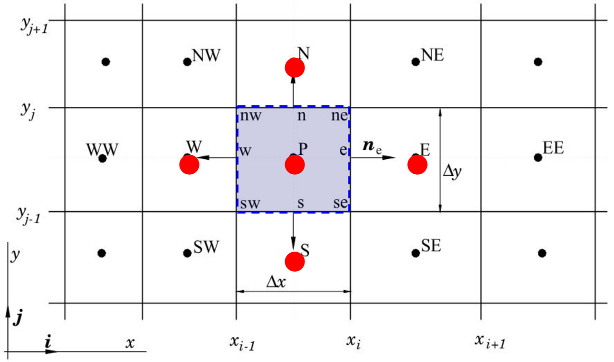
$$\frac{\rho_P - \rho_P^{(0)}}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z + (F_e - F_w) = 0 \qquad \textbf{(Eq. 2)}$$

Dahia Chibouti

Discrétisation d'un problème 2D/3D

- **Équation de Navier-Stokes (convection-diffusion)**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \longrightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S}$$



En combinant les équations : **(Eq. 1)** $- \phi_P \times$ **(Eq. 2)**

$$(\phi_P - \phi_P^{(0)})\frac{\rho^{(0)}\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + (J_e - F_e\phi_P) - (J_w - F_w\phi_P) = (S_C + S_P\phi_P)\Delta x\Delta y\Delta z$$

or

$$\begin{aligned}
J_e - F_e\phi_P &= D_e J_e^\star - F_e\phi_P && (\text{car } J_e^\star = J_e/D_e)\\
&= D_e(B_e\phi_P - A_e\phi_E) - F_e\phi_P\\
&= D_e((A_e + P_e)\phi_P - A_e\phi_E) - F_e\phi_P\\
&= D_e A_e(\phi_P - \phi_E) && (\text{car } P_e = F_e/D_e)\\
&= D_e A(P_e)(\phi_P - \phi_E)\\
&= D_e\left(A(|P_e|) + [-P_e; 0]\right)(\phi_P - \phi_E)\\
&= \underbrace{(D_e A(|P_e|) + [-F_e; 0])}_{a_E}(\phi_P - \phi_E)
\end{aligned}$$

$$J_e - F_e\phi_P = a_E(\phi_P - \phi_E) \qquad J_w - F_w\phi_P = a_W(\phi_W - \phi_P)$$

avec $\quad a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w; 0]$

Dahia Chibouti

Fin

Schéma centré et Upwind Interpolation (UDS)

- **Équation de Navier-Stokes (quantité de mouvement)**

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P \text{ if } (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})_e > 0\ ; \\ \phi_E \text{ if } (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})_e < 0\ . \end{cases}$$

Taylor-series

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P + H\ ,$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P}$$

$$\epsilon_\tau = \frac{(x_e - x_P)^2 - (x_E - x_e)^2}{2\,(x_E - x_P)}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_e - \frac{(x_e - x_P)^3 + (x_E - x_e)^3}{6\,(x_E - x_P)}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_e + H\ .$$