

# Résumé du cours : CFD – Mécanique des fluides

Dahia Chibouti

Année 2020/2021



Dahia Chibouti

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle  
(MSME UMR 8208 CNRS)

Bureau E25 -2e étage du bâtiment Lavoisier  
dahia.chibouti@univ-eiffel.com

## Contents

<b>1</b>	<b>Les équations de Navier-Stokes</b>	<b>2</b>
1.1	Établissement des équations de Navier-Stokes . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Étapes de la simulation numérique en mécanique des fluides</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Notion sur le maillage</b>	<b>4</b>
3.1	Type d'éléments : . . . . .	4
3.2	Type de maillages : . . . . .	5
3.3	Maillage structuré : . . . . .	5
3.4	Maillage non structuré : . . . . .	6
3.5	Maillage hybride . . . . .	6
3.6	Différents maillages sur une aile d'avion . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Notion de diffusion numérique</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Critères de construction de « bons » maillages</b>	<b>8</b>

## Objectifs

- Etablir les équations de Navier-Stokes à partir des bilans sur le volume de contrôle (section 1.1);
- Comprendre les étapes de la simulation (section 2) ;
- Construire des bon maillages en faisant attention à la diffusion numérique les sections (3 et 4)

# 1 Les équations de Navier-Stokes

Nous les appelons les équations de Navier-Stokes en hommage au Français **Henri Navier** et au Britannique **Georges Gabriel Stokes** qui les ont formalisées en 1823 et 1845. Ces équations décrivent d'un point de vue macroscopique le mouvement d'un fluide (liquide ou gaz). Leurs applications sont nombreuses.

### Les applications :

Ces équations ont de nombreuses applications, elles sont utilisées pour calculer les écoulements

- dans l'air autour d'une voiture ou d'une aile d'avion;
- de l'eau autour d'un navire;
- de l'eau sous pression dans les cœurs des réacteurs nucléaires.

Elles servent également à estimer

- la circulation des masses d'air;
- la dynamique des océans.

Et ce ne sont que quelques exemples.

## 1.1 Établissement des équations de Navier-Stokes

En mécanique des fluides, nous parlons souvent de la conservation :

- Conservation de la masse ( $\rho$ )
- Conservation de la quantité de mouvement ( $\rho\vec{v}$ )

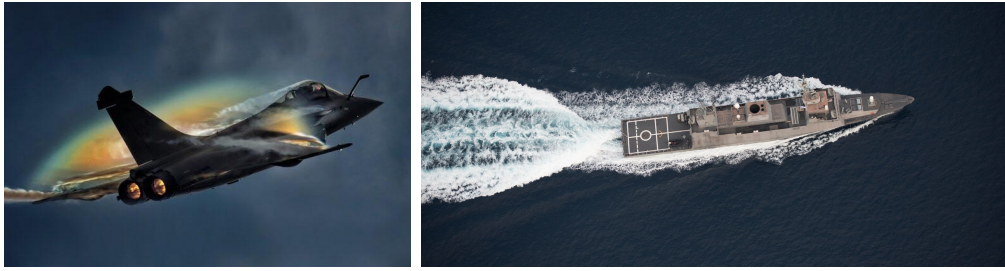


Figure 1: Exemple d'application

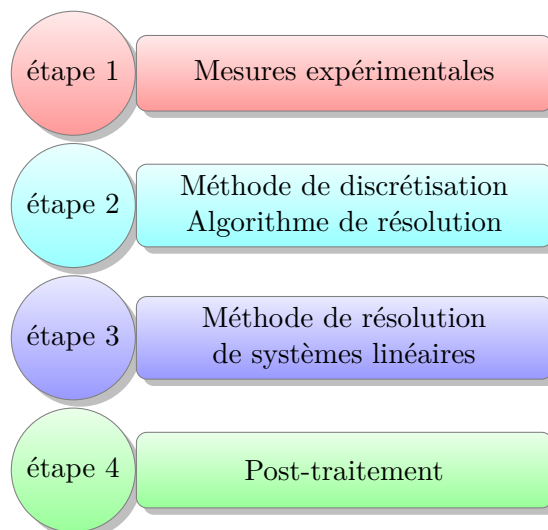
- Conservation de l'énergie ( $\rho h$ )
- ou même Conservation de la fraction massique ou molaire d'un mélange ( $\omega_i$ ).

Considérons un volume élémentaire .....

$$\underbrace{\rho}_{\substack{\downarrow \\ m}} \underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right)}_a = \underbrace{-\nabla p}_{F_{\text{pression}}} + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{F_{\text{visqueuse}}}$$

Figure 2: équation de conservation de la quantité de mouvement

## 2 Étapes de la simulation numérique en mécanique des fluides



- **Phénomènes physiques** : écoulements avec transfert de chaleur et de masse
- **Modèle mathématique** : EDP ou système d'EDP non-linéaires sur un domaine continu, Système d'équations algébriques linéaires sur un domaine discret;
- **Solution** : champs de l'écoulement sur un domaine discret
- **Images 1D, 2D, 3D des champs de l'écoulement** : graphes, isolignes, isosurfaces, ...
- **Méthodes de discrétisation** = méthode de résolution discrète des EDP :
  - méthode des volumes finis (VF)
  - méthode des volumes finis (VF)
  - méthode des différences finies (DF)
  - méthode des éléments finis (EF)
  - méthodes spectrales (MS)
- **Algorithmes de résolution** = méthode d'intégration temporelle et de découplage vitesse/-pression :
  - algorithmes itératifs prédicteurs/correcteurs : SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC, PISO, ...
  - algorithmes de projection : Goda, Karniadakis, Kim et Moin, ...
  - algorithme de lagrangien augmenté
- **Méthodes de résolution de systèmes linéaires** :
  - méthodes itératives : Gauss-Seidel, SOR, Ligne par ligne, ...
  - méthodes directes : Gauss, Thomas, Jacobi, ...
  - méthodes multi-grilles, ...

## 3 Notion sur le maillage

### 3.1 Type d'éléments :

Deux formes géométriques sont principalement utilisées pour discrétiser le domaine bidimensionnel (2D) en éléments: ce sont des triangles et des quadrilatères. Chaque forme a ses avantages et ses inconvénients. du maillage

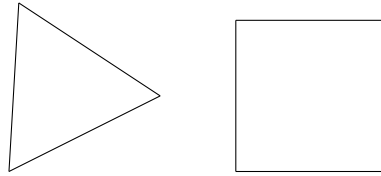


Figure 3: (a) triangle, (b) quadrilatère

## 3.2 Type de maillages :

Il existe trois principaux types de maillages:

- Maillage structuré,
  - mono bloc
  - multi blocs
- Maillage non structuré,
- Maillage hybride.

## 3.3 Maillage structuré :

La grille structurée est caractérisée par un motif [répétitif](#), le même nombre d'éléments autour de chaque nœud interne et la [numérotation ordonnée](#) des éléments. Il est peu probable que les grilles structurées contiennent des éléments déformés. Par conséquent, le résultat à travers la grille a une meilleure continuité.

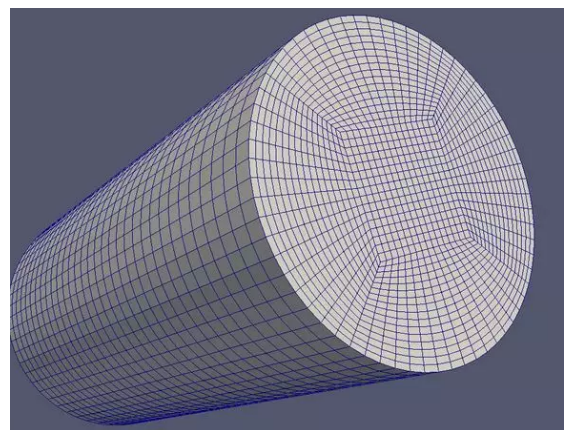
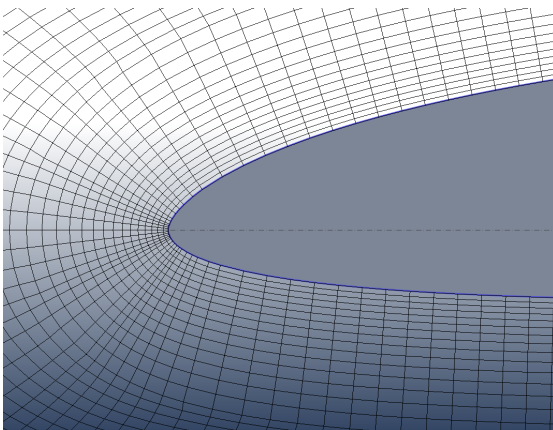


Figure 4: Grille structurée

### 3.4 Maillage non structuré :

Les grilles non structurées sont caractérisées par l'absence de motifs, des changements dans de nombreux éléments autour des nœuds et une numérotation aléatoire des éléments. L'inconvénient est que la connexion explicite nécessite plus de mémoire et d'espace disque, le temps de calcul est plus lent et il n'y a pas d'ordre entre les nombres, il est donc plus difficile à déboguer. En revanche, ce type de grille est facile à automatiser et très robuste.

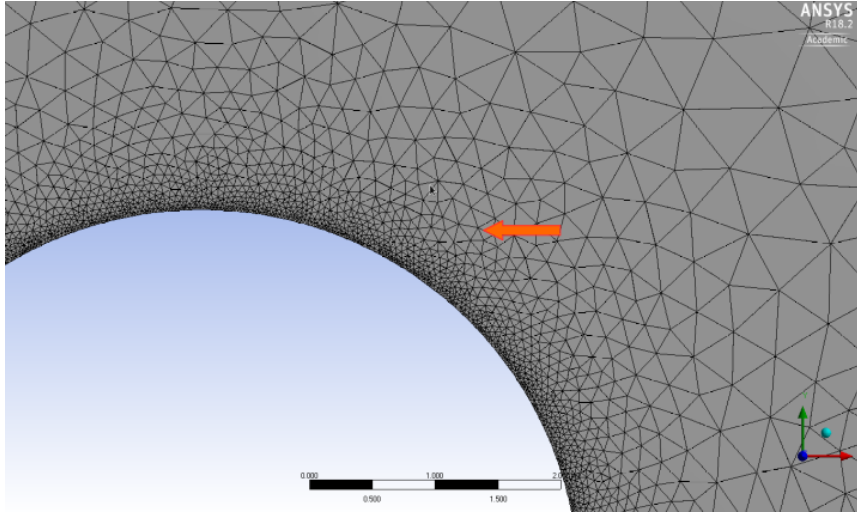


Figure 5: Grille non structurée

### 3.5 Maillage hybride

En mécanique des fluides, le genre de grille principalement utilisée pour discrétiser des problèmes complexes est le maillage hybride. Ce dernier comprend plusieurs types d'éléments. Exemple: La combinaison d'éléments triangulaires et quadrilatéraux.

En général, l'élément quadrangle couvre la zone près de la surface de contact, et le triangle discrétise le reste du domaine d'analyse. Le dernier point confirme à nouveau le choix des éléments quadrilatéraux pour améliorer la précision, tout comme le voisinage du solide.

Les grilles hybrides comprennent également certaines zones structurées, tandis que d'autres n'en comportent pas. Il arrive que le maillage devienne non-structuré pour mieux représenter les limites, ou un raffinement local est utilisé afin d'améliorer la précision.

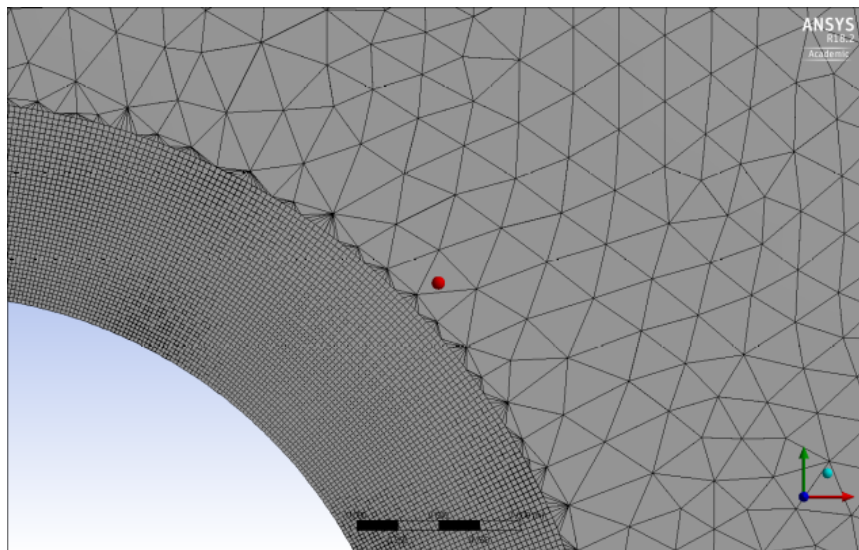


Figure 6: Maillage hybride

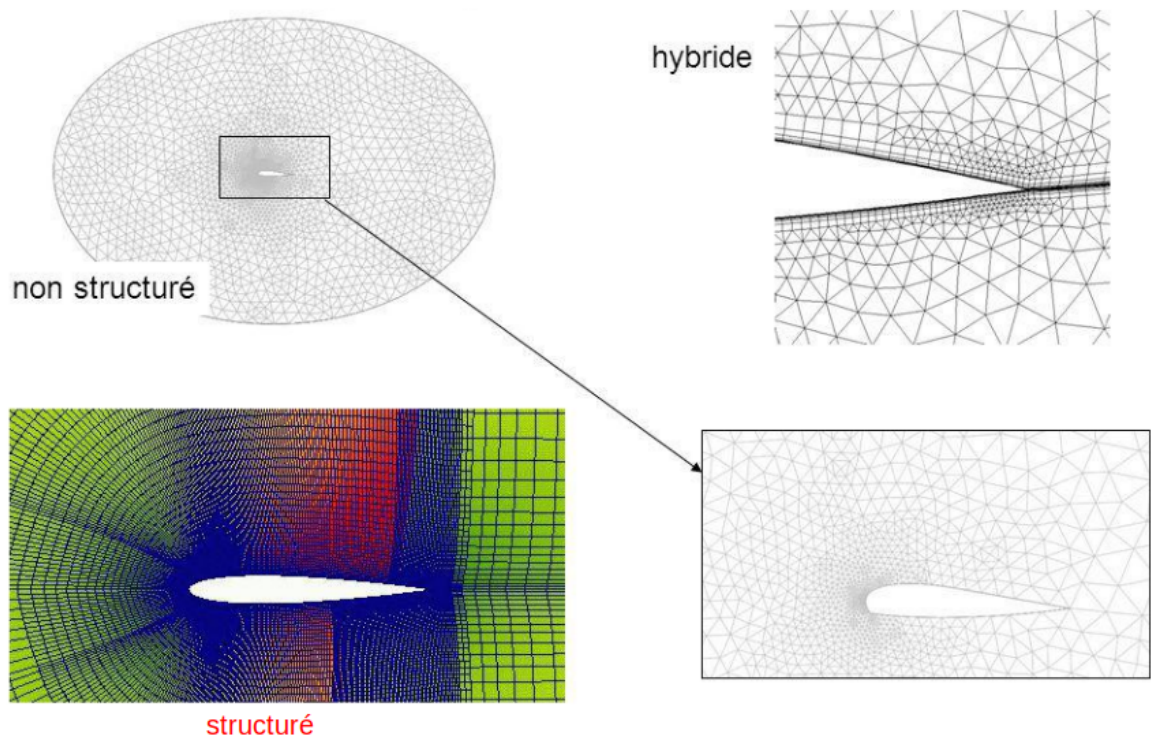


Figure 7: Différents maillages sur une aile d'avion

### 3.6 Différents maillages sur une aile d'avion

## 4 Notion de diffusion numérique

Dans le cas du schéma de discrétisation du premier ordre et dans certains types de maillages ; le comportement de certaines solutions numériques semble être que l'écoulement calculé a [une diffusion physique excessive](#).

La diffusion numérique provient donc d'erreurs de discrétisation liées au :

- forts gradients dans la direction orthogonale à l'écoulement;
- maillage qui n'est pas alignée avec la direction d'écoulement principale.

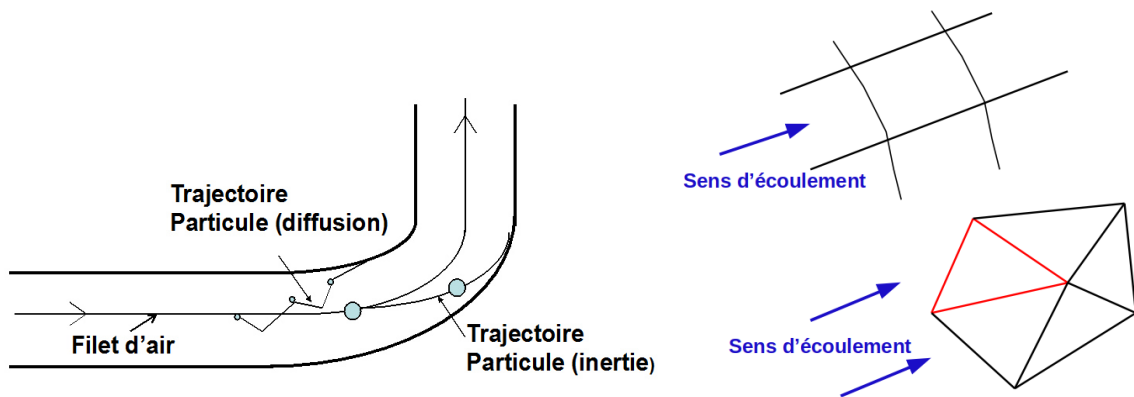


Figure 8: (a) forts gradients, (b) alignement

Voici quelques indications pour limiter la diffusion numérique :

- Les maillages triangulaires et tétraédriques ne peuvent pas être alignés.
- Les maillages quadrilatère ou hexaédrique peuvent être alignés et étirés dans la direction de l'écoulement si cette dernière est connue.

## 5 Critères de construction de « bons » maillages

Dans un premier lieu il faut prendre en compte certains critères afin de pouvoir construire un bon maillage :

- **facilité du création du maillage;**
  - Utilisation des maillages triangulaires et tétraédriques : [facile à automatiser](#).
- **précision des résultats;**



- **Raffinement** dans les zones de fort gradient.
  - **Alignement** du maillage avec la direction de l'écoulement.
  - **rapport d'allongement**  $\frac{Dx}{Dy}$  de chaque maille ne doit pas être trop grand. ( $\frac{Dx}{Dy} < 5$  ,  $10 < \frac{Dx}{Dy} < 30$ ).
  - **rapport de taille** de deux mailles voisines ne doit pas être trop grand ( $0,8 < \frac{Dx_1}{Dx_2}, \frac{Dy_1}{Dy_2} < 1,2$ ).
  - Eviter les **fortes déformations** angulaires des mailles ( $45^\circ < \theta < 135^\circ$ ).
- **rapidité et coût des calculs (en mémoire et en temps)**
    - Utiliser des maillages quadrilatéraux ( $2D$ ) et hexaédriques ( $3D$ ) si la direction privilégiée de l'écoulement est connue.
    - Utiliser des **maillages hybrides** (triangulaires/ quadrilatéraux et tétraédriques/hexaédriques) { **hybride  $\longrightarrow$  combine précision, efficacité des calculs et facilité à générer le maillage** }.