

CONVECTION FORCEE INTERNE

Xavier NICOLAS (UPEM)

- I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**
- II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**
- III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**
- IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

[1] W. M. Kays, M. E. Crawford, B. Weigand, Convective heat and mass transfer, 4th ed ., McGraw-Hill (2005)

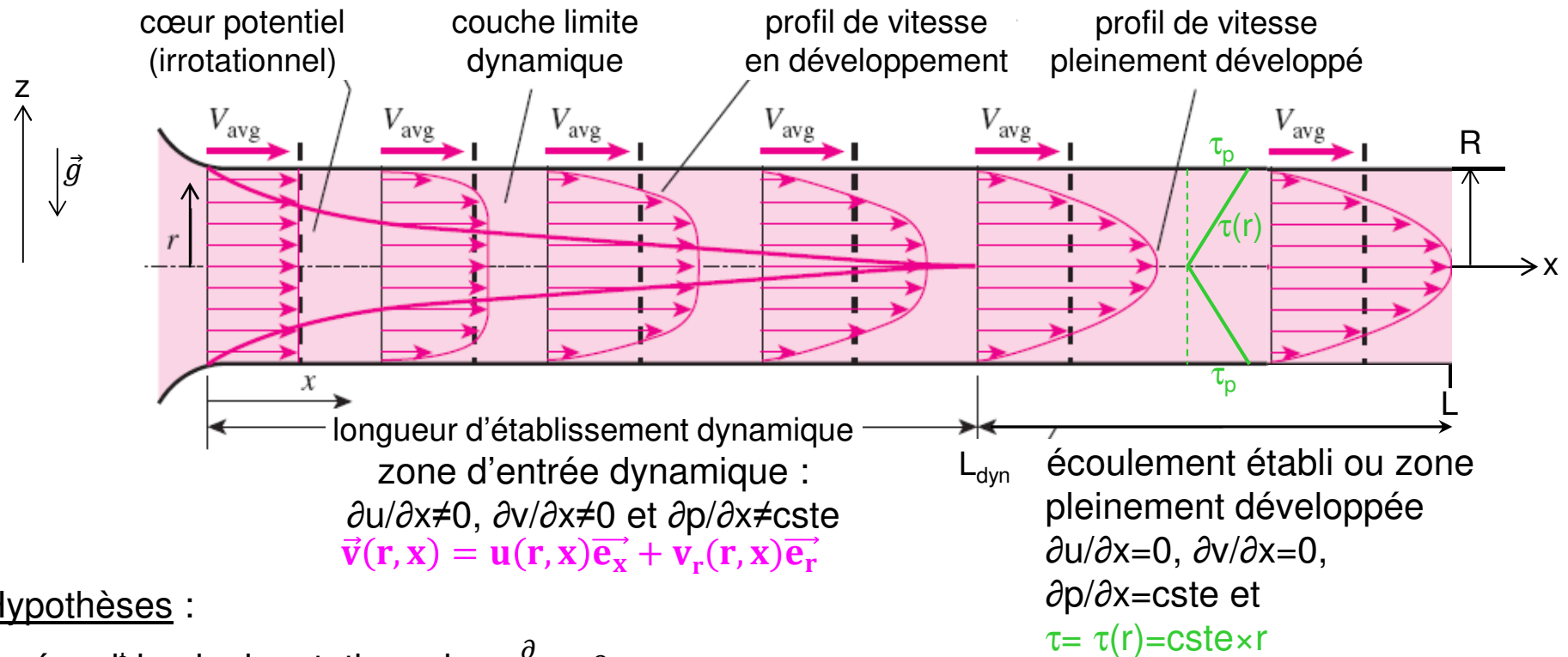
[2] Y. A. Cengel, A. J. Ghajar, Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications, 5th ed., McGraw-Hill (2015)

Objectifs

- Calculer les **profils de vitesse et de température** d'écoulements internes et en déduire leur valeur moyenne dans une section.
- Connaitre les différentes zones de développement d'un écoulement interne et calculer les **longueurs d'entrée dynamique et thermique**.
- Analyser le chauffage (ou le refroidissement) d'un écoulement dans un **tube à parois isothermes ou à flux imposé**.
- Introduire la notion de **température moyenne logarithmique**.
- Obtenir des relations analytiques pour la chute pression, Δp , le coefficient de frottement (C_f) et le nombre de Nusselt, **Nu**, dans le cas d'**écoulements laminaires pleinement développés**.
- Calculer le coefficient de frottement C_f (ou la perte de charge **f ou λ**) et le nombre de Nusselt **Nu** (flux de chaleur) à partir de corrélations empiriques dans le cas d'**écoulements turbulents**.
- Préparer l'étude des **échangeurs thermiques**.

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.1- Introduction : équation du mouvement en tube circulaire



Hypothèses :

- écoulement laminaire stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- pb axisymétrique : $\partial./\partial\theta=0$
- écoulement incompressible : $\rho = \text{cste}$
- propriétés physiques cstes : $\mu = \text{cste}$
- section de la conduite constante : $S=\text{cste}$
- $\vec{f} = \rho\vec{g} \perp \vec{v}$ ou ...
- ... pression motrice $p = p(x)$, où $p = p' + \rho gz$ avec p' la pression statique ;
alors dans l'éq. de N.-S. : $\vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}p'} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}p'} = -\overrightarrow{\text{grad}(p' + \rho gz)} = -\overrightarrow{\text{grad}(p)} = -\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.1- Introduction : équation du mouvement en tube circulaire

- Modèle :

éq. de continuité : $\text{div } \vec{v} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0$ (I.1.1)

éq. de Navier-Stokes : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \overrightarrow{\text{div}} \bar{\tau}$

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \\ u \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right) \end{cases} \quad (\text{I.1.2})$$

- Analyse dimensionnelle :

$r = Rr^*$

$x = Lx^*$

$u = \bar{u}u^*$

$v_r = \bar{v}_r v_r^*$

$p = \rho \bar{u}^2 p^*$

eq. (I.1.1) $\Rightarrow \underbrace{\frac{\bar{u}}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{\bar{v}_r}{R} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^*)}_{\sim -1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{v}_r \sim \epsilon \bar{u}} \quad (\text{I.1.3})$

éq. (I.1.2) $\Rightarrow u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v_r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\epsilon}{\text{Re}_R} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)}_{\sim \frac{1}{\epsilon^2} \gg 1} \right)$

... et on pose :

$\epsilon = \frac{R}{L} (<< 1)$

$\text{Re}_R = \frac{\bar{u}R}{\nu}$

$\Rightarrow u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v_r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\epsilon \text{Re}_R} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)$

$\Rightarrow \boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} (+v_r \frac{\partial u}{\partial r}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)} \quad (\text{eq. N.-S. en tube}) \quad (\text{I.1.4})$

Remarque : la composante v_r est négligeable sauf juste à l'entrée de la conduite où $v_r \neq 0$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.2- Ecoulement laminaire **établi (pleinement développé)** dans un tube

I.2.1- Calcul du profil de vitesse $u(r)$

- Hypothèses supplémentaires :

- écoult établi : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(r) = u(r)\vec{e}_x$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{cste}$$

eq. (I.1.4) $\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$

CL : en $r=0$, $\frac{du}{dr} = 0$

en $r=R$, $u = 0$

$$\Rightarrow u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (I.2.1)$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{S} \iint_S u dS = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (I.2.2)$$

$$\Rightarrow u(r) = 2\bar{u} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (I.2.3)$$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.2- Ecoulement laminaire **établi (pleinement développé)** dans un tube

I.2.2- Calcul de la contrainte pariétale τ_p et du coefficient de frottement C_f

- **Définition de τ_p** = contrainte exercée par le fluide sur la paroi

$$\tau_p = |\tau_{xr}(r = R)| > 0$$

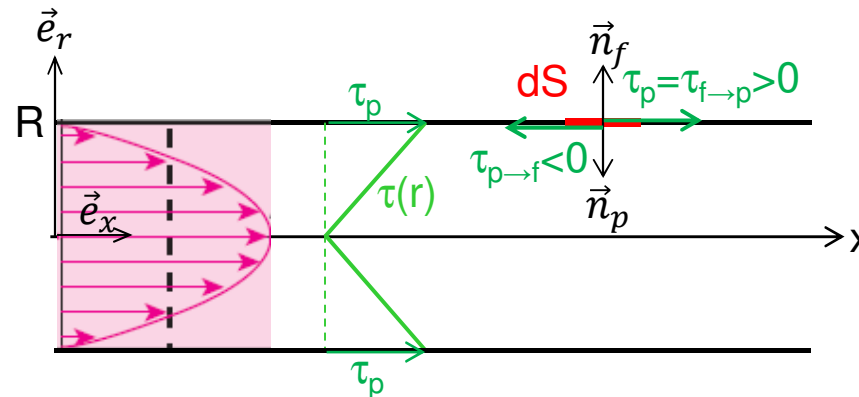
$$\Rightarrow \tau_p = \left| \mu \frac{du}{dr} \right|_{r=R}$$

eq. (I.2.3)

\Rightarrow

$$\tau_p = \frac{4\mu\bar{u}}{R}$$

(I.2.4)



- **Définition de C_f** = contrainte pariétale adimensionnelle :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2} > 0$$

(1.2.5)

eq. (I.2.4)

\Rightarrow

$$C_f = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2} \frac{4\mu\bar{u}}{R} = \frac{16\mu}{\rho 2R\bar{u}}$$

\Rightarrow

$$C_f = \frac{16}{Re_D} \text{ avec } Re_D = \frac{\bar{u}D}{\nu}$$

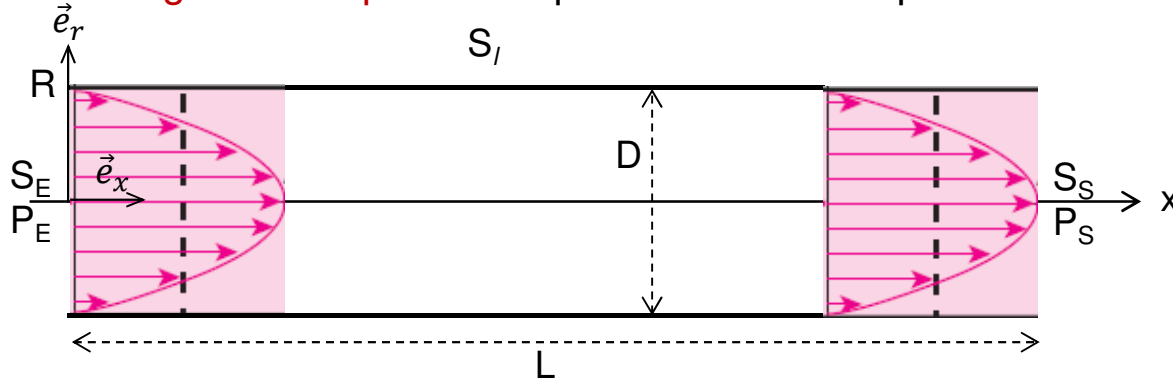
(1.2.6)

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.2- Ecoulement laminaire **établi (pleinement développé)** dans un tube

I.2.3- Calcul de la chute de pression entrée/sortie ΔP_{ES} (perte de charge)

- **Bilan global de q.d.m.** = équilibre des forces pour un écoulement établi (accélération nulle)

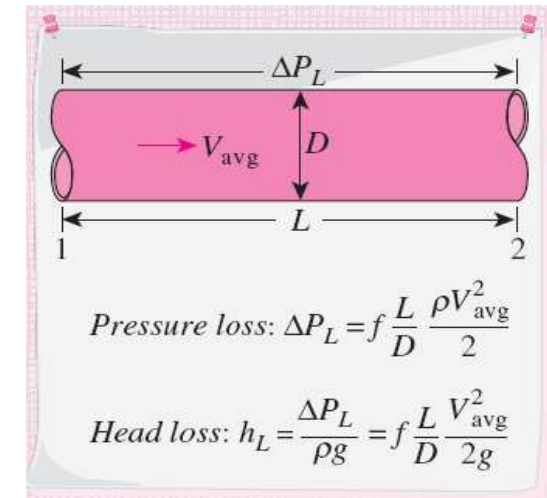


$$\begin{cases} \Delta P_{ES} = P_E - P_S > 0 \\ \frac{dp}{dx} = \text{cste} = -\frac{\Delta P_{ES}}{L} < 0 \end{cases}$$

- Equilibre des forces sur x : $F_{\text{Pression}}(S_E, S_S) = F_{\text{Frottement}}(S_I)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow P_E S_E - P_S S_S &= \tau_p S_I \\ \Leftrightarrow (P_E - P_S) \pi R^2 &= \tau_p 2\pi R L \\ \Leftrightarrow \Delta P_{ES} &= 2 \frac{L}{R} \tau_p = 4 \frac{L}{D} \tau_p > 0 \end{aligned}$$

$$(1.2.5) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P_{ES} = 4C_f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \quad (1.2.7)$$



- **Théorème de Bernoulli généralisé** entre S_E et S_S :

$$\Delta P_{ES} = P_E - P_S = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \quad \text{où } \lambda = f \text{ est le coefficient de perte de charge} \quad (1.2.8)$$

Remarque : (1.2.6) + (1.2.7) + (1.2.8) \Rightarrow

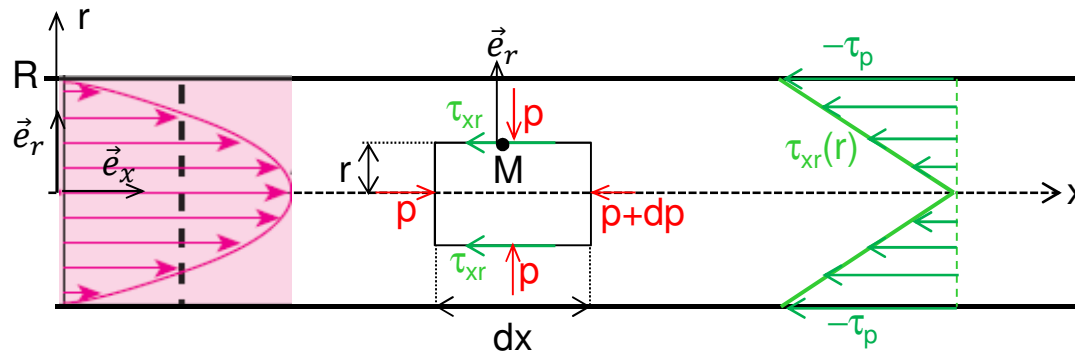
$$\lambda = f = 4C_f = \frac{64}{Re_D} \quad (1.2.9)$$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.2- Ecoulement laminaire **établi (pleinement développé)** dans un tube

I.2.4- Variation radiale linéaire de la contrainte de cisaillement

- **Bilan local de q.d.m.** = équilibre des forces selon x sur un volume élémentaire de longueur dx :



$$\begin{aligned}\vec{T}(M, \vec{e}_r) &= \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{e}_r \\ &= (-p\vec{I} + \bar{\tau}(M)) \cdot \vec{e}_r \\ &= \begin{pmatrix} \tau_{xr} \\ -p \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_r)} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \frac{du}{dr} < 0 \\ -p < 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_r)}\end{aligned}$$

sur \vec{e}_x :

$$p\pi r^2 - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) \pi r^2 + \tau_{xr} 2\pi r dx = 0$$

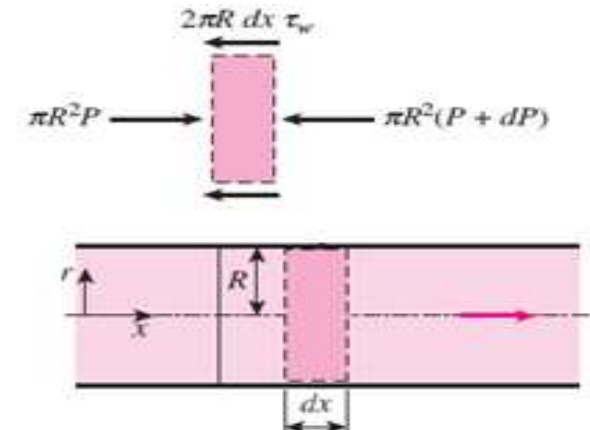
$$\Leftrightarrow \tau_{xr} = \frac{dp}{dx} \frac{r}{2} < 0$$

$$\Rightarrow \tau_p = -\tau_{xr}(r=R) = -\frac{dp}{dx} \frac{R}{2} > 0$$

\Rightarrow la contrainte de cisaillement de la paroi sur le fluide est :

$$\tau_{xr}(r) = -\tau_p \frac{r}{R} < 0 \quad (I.2.10)$$

Conclusion : dans un écoulement établi la contrainte de cisaillement varie linéairement avec le rayon.



Force balance:

$$\pi R^2 P - \pi R^2 (P + dP) - 2\pi R dx \tau_w = 0$$

Simplifying:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.2- Ecoulement laminaire **établi (pleinement développé)** dans un tube

I.2.4- Variation radiale linéaire de la contrainte de cisaillement

- **Remarque 1** : on retrouve le résultat précédent en intégrant l'éq. de Navier-Stokes

- **Remarque 2** : la variation linéaire de $\tau_{xr}(r)$ est aussi valable en régime turbulent à condition de considérer que τ_{xr} est la contrainte visqueuse totale, moléculaire + turbulente :

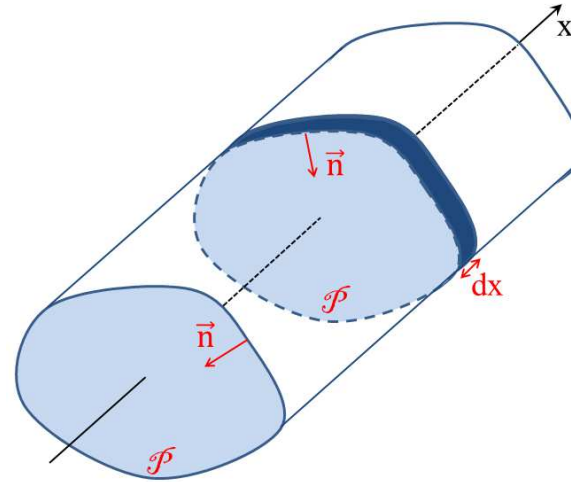
$$\tau_{xr} = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dr}$$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.3- Ecoulements laminaires **établis** en tubes d'**autres section**

Hypothèses :

- écoult laminaire stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- écoult établi selon x : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{cste}$
- prop. phys. cstes : $\rho = \text{cste}$ et $\mu = \text{cste}$
- section S qcq mais cste
- $\vec{v}(r) = u(r)\vec{e}_x$
- $\vec{f} = \rho\vec{g} \perp \vec{v}$ ou pression motrice $p = p(x)$



L'éq. de Navier-Stokes s'écrit :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u = 0 \quad (I.3.1)$$

Elle peut être résolue analytiquement par la méthode de séparation des variables et le principe de superposition (cas d'une section rectangulaire) ou numériquement (autres sections)

Résultats 1 : dans tous les cas, on montre que τ_{xn} (où n est la direction normale à la paroi) varie le long du périmètre \mathcal{P} de la section, mais ne dépend pas de x. Donc, en écoulement établi,

$$\overline{\tau_{xn}} = \frac{1}{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{P}} \tau_{xn} ds = \text{cste} \quad \text{et} \quad C_f = \frac{\overline{\tau_{xn}}}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2} \quad (I.3.2)$$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.3- Ecoulements laminaires **établis** en tubes d'**autres section**

Résultats 2 : dans tous les cas,

$$C_f Re_{D_h} = \text{cste} \quad \text{où} \quad Re_{D_h} = \frac{\bar{u} D_h}{\nu} \quad \text{et} \quad D_h = \frac{4S}{P_m} \quad (1.3.3)$$

S = section de passage du fluide dans la conduite

P_m = périmètre mouillé

Remarque: le débit massique $\dot{m} = \rho \bar{u} S$

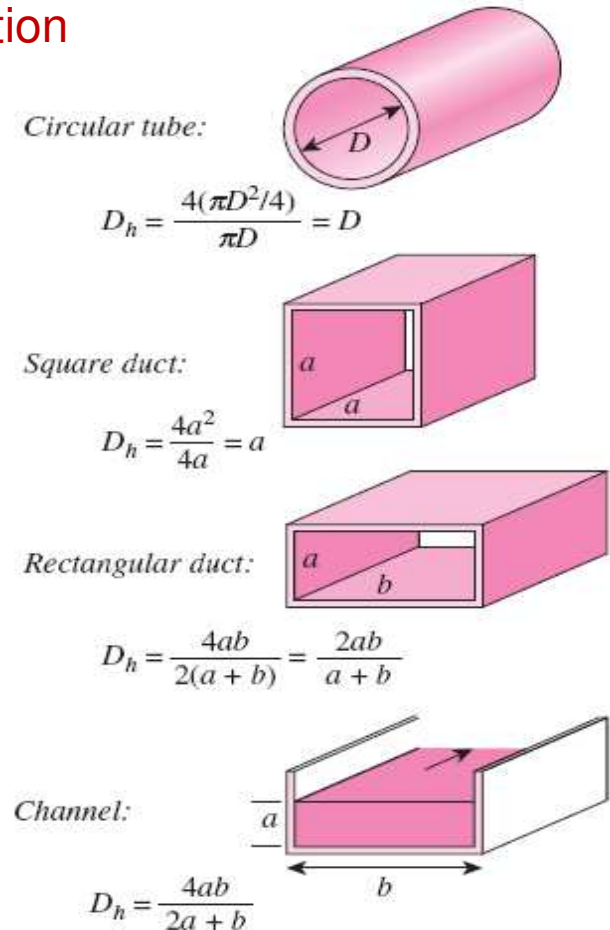
$$\Rightarrow Re_{D_h} = \frac{\rho \bar{u} D_h}{\mu} = \frac{\dot{m} D_h}{\mu S} = \frac{4 \dot{m}}{\mu P_m}$$

\Rightarrow quel que soit le fluide (compressible ou non), pour une conduite de section constante, si $\mu = \text{cste}$, le nombre de Reynolds est constant dans toute la conduite car $\dot{m} = \text{cste}$.

Résultats 3 : quelle que soit la forme de la section de la conduite, le nombre de Reynolds critique entre les régimes laminaire et turbulent est : $Re_{D_h}^* \approx 2300$

De même, le régime turbulent pleinement développé est obtenu pour : $Re_{D_h} > 5000 \text{ à } 10000$

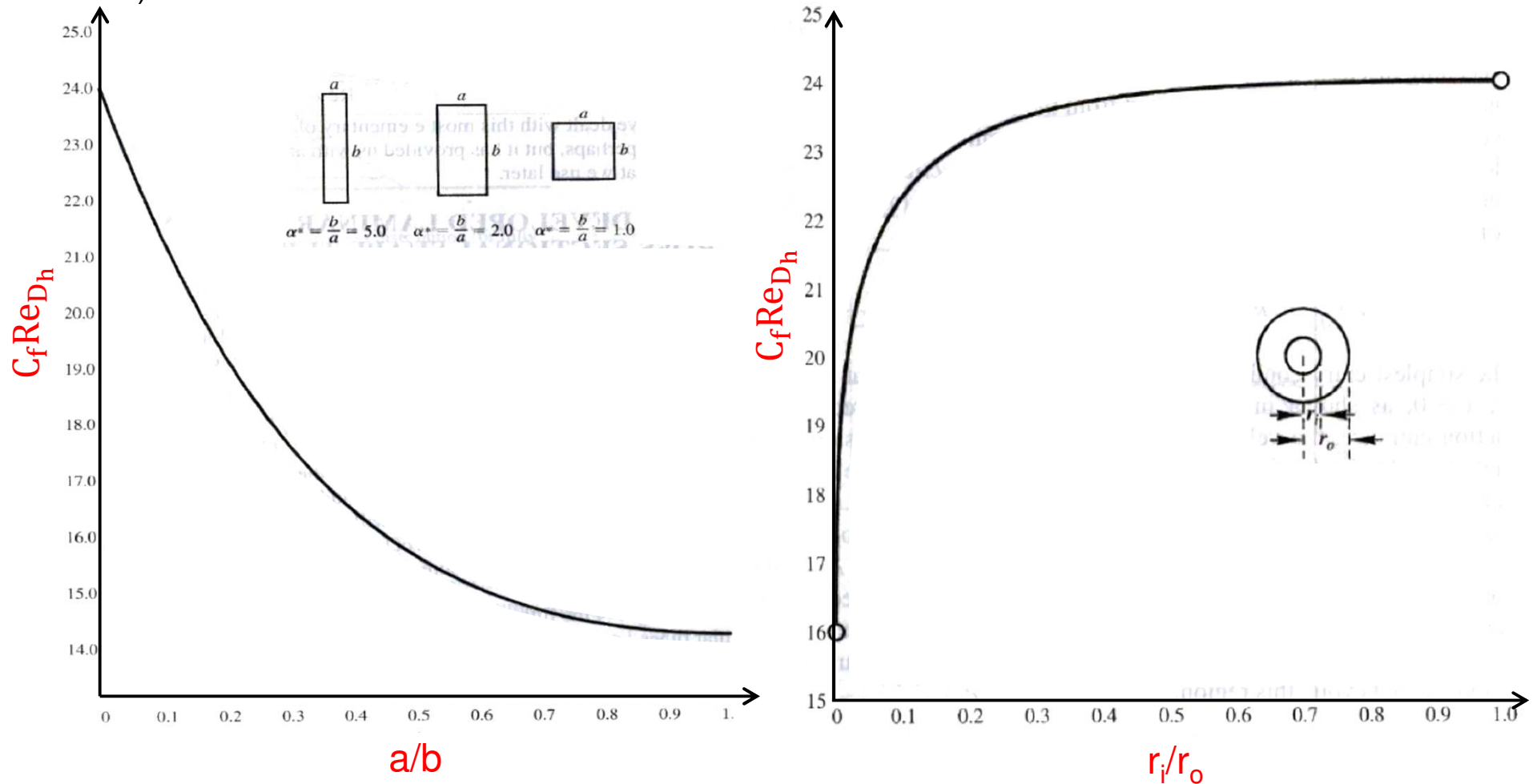
Le régime est transitionnel (bouffées turbulentes) pour : $2300 < Re_{D_h} < 5000$



I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.3- Ecoulements laminaires **établis** en tubes d'**autres section**

Exemples 1 : Coefficients de frottement pour des écoulements pleinement développés dans des conduites rectangulaires (à gauche) et dans des conduites annulaires et cylindriques (à droite).



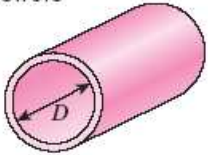
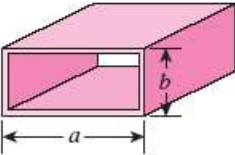
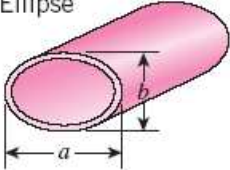
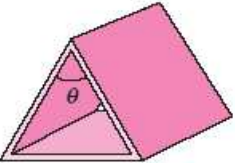
I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.3- Ecoulements laminaires **établis** en tubes d'**autres section**

Exemples 2 : Coefficients de frottement pour des écoulements pleinement développés dans des conduites circulaire, rectangulaires, elliptiques et triangulaires isocèles.

TABLE 8-1

Nusselt number and friction factor for fully developed laminar flow in tubes of various cross sections ($D_h = 4A_c/p$, $Re = V_{avg}D_h/\nu$, and $Nu = hD_h/k$)

Tube Geometry	a/b or θ°	Nusselt Number		Friction Factor $f = 4C_f$
		$T_s = \text{Const.}$	$\dot{q}_s = \text{Const.}$	
Circle 	—	3.66	4.36	64.00/Re
Rectangle 	a/b			
	1	2.98	3.61	56.92/Re
	2	3.39	4.12	62.20/Re
	3	3.96	4.79	68.36/Re
	4	4.44	5.33	72.92/Re
	6	5.14	6.05	78.80/Re
	8	5.60	6.49	82.32/Re
	∞	7.54	8.24	96.00/Re
Ellipse 	a/b			
	1	3.66	4.36	64.00/Re
	2	3.74	4.56	67.28/Re
	4	3.79	4.88	72.96/Re
	8	3.72	5.09	76.60/Re
	16	3.65	5.18	78.16/Re
Isosceles Triangle 	θ			
	10°	1.61	2.45	50.80/Re
	30°	2.26	2.91	52.28/Re
	60°	2.47	3.11	53.32/Re
	90°	2.34	2.98	52.60/Re
	120°	2.00	2.68	50.96/Re

$\Rightarrow C_f Re_{D_h} = 16$ dans un tube cylindrique

$\Rightarrow C_f Re_{D_h} = 24$ entre 2 plans parallèles infinis

$\Rightarrow C_f Re_{D_h} = 13,33$ pour un triangle équilatéral

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.3- Ecoulements laminaires **établis** en tubes d'**autres section**

Exercice : en faisant le bilan des forces dans le cas de deux plans parallèles infinis, retrouver que $C_f Re_{D_h} = 24$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

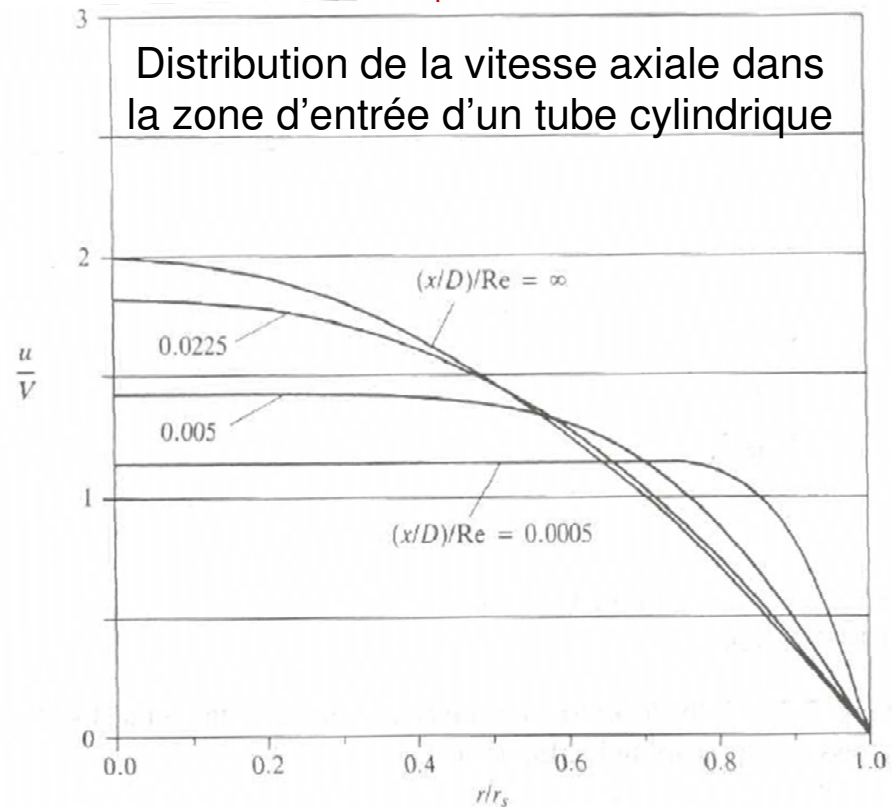
I.4- **Longueur d'entrée dynamique**

Hypothèses : idem au §I.1 sauf, éventuellement, $\vec{v}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{x})\vec{e}_x + \underbrace{(\mathbf{v}_r(\mathbf{r}, \mathbf{x})\vec{e}_r)}_{\substack{\neq 0 \text{ juste à l'entrée} \\ \text{uniquement}}}$

- écoult laminaire stationnaire axisym. : $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
- écoult incompressible : $\rho = \text{cste}$
- propriétés physiques cstes : $\mu = \text{cste}$
- section de la conduite constante : $S = \text{cste}$
- $\vec{f} = \rho \vec{g} \perp \vec{v}$ ou pression motrice $p = p(x)$

$$\text{eq. (I.1.4)} \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\left(+ v_r \frac{\partial u}{\partial r} \right)}_{\substack{=0 \text{ sauf} \\ \text{à l'entrée}}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{CL} &\Rightarrow \text{en } x=0, \begin{cases} u = \bar{u} \\ v_r = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \text{en } r=R, \begin{cases} u = 0 \\ v_r = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \text{en } r=0, \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \\ v_r = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

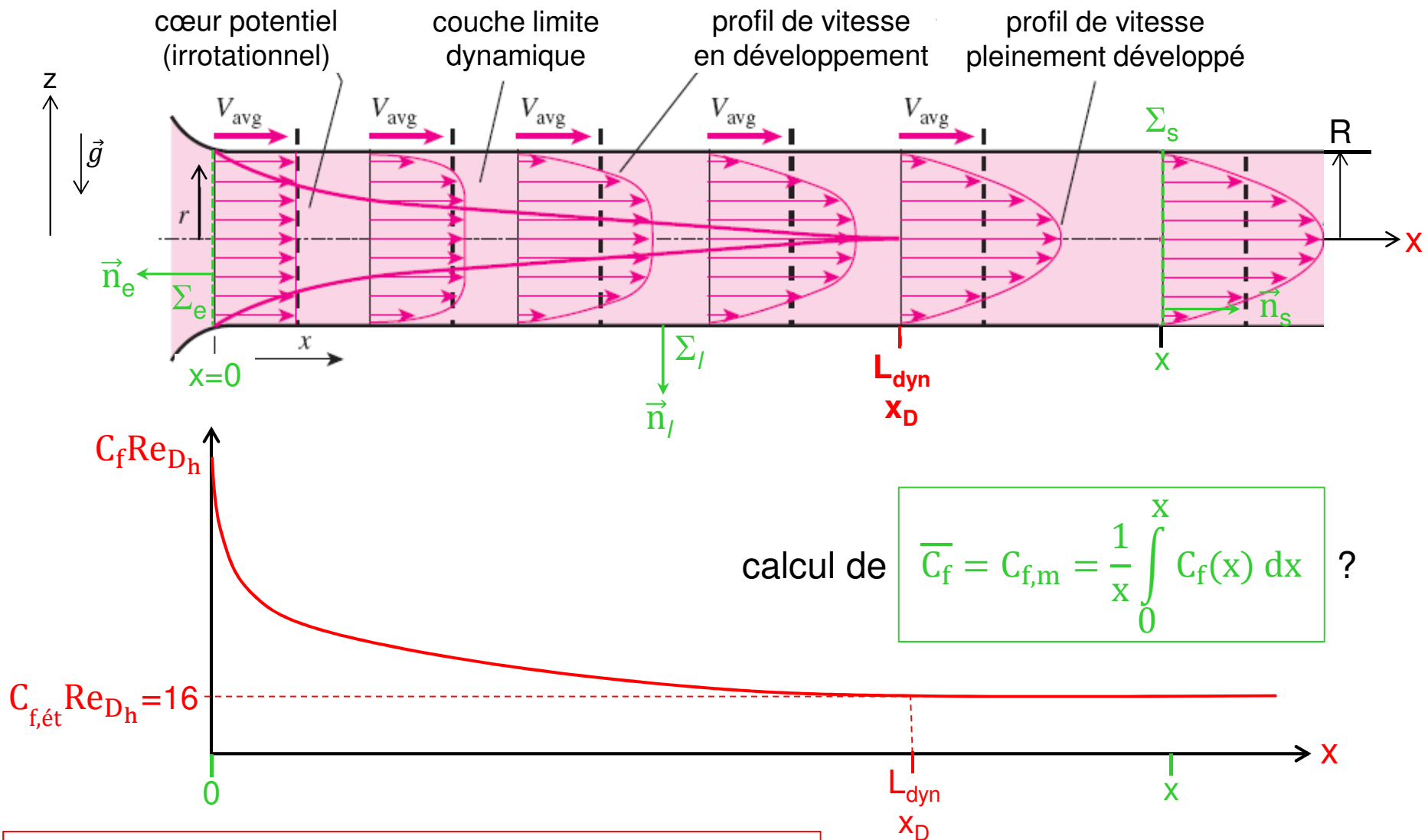


Remarque : dans le cas d'une entrée brusque en conduite (raccord d'une conduite sur un grand réservoir), $v_r \neq 0$ sur quelques diamètres selon x . Shah et London (1978) montrent que v_r doit être pris en compte pour $(x/D)/Re < 0,005$ lorsque $Re < 400$, i.e. : $x < 2D$ pour $Re = 400$
 $x < 0,5D$ pour $Re = 100$.

\Rightarrow on peut négliger v_r dans le calcul d'un régime d'entrée laminaire.

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.4- **Longueur d'entrée dynamique**



On montre que : $L_{dyn} = x_D = C_l D_h Re_{D_h}$ (I.4.1)
 où $C_l \approx 0,056$ pour un tube cylindriq.
 où $C_l \approx 0,011$ pour un canal plan 2D

Exemple : à $Re=1000$, $x/D_h \approx 56$
 dans un tube en régime laminaire
 (c'est bcp + qu'en turbulent !)

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.5- Coefficients de frottement moyen et apparent dans la zone d'entrée dynamique

- Eq. de Navier-Stokes conservative stationnaire : $\overrightarrow{\text{div}} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \overrightarrow{\text{div}} \vec{\sigma} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \overrightarrow{\text{div}} \vec{\tau}$
($\vec{f} = \rho \vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z) \perp \vec{v}$ ou introduit dans la pression motrice)
- Intégration sur le tube de $x=0$ à $x>x_D \Rightarrow$ théorème d'Euler :

$$\frac{\Delta p_{e \rightarrow s}}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} = \bar{C}_f \frac{\Sigma_l}{\Sigma_{e,s}} + \frac{2}{\Sigma_{e,s}} \left[\iint_{\Sigma_s} \left(\frac{u_s(r)}{\bar{u}} \right)^2 d\Sigma_s \right] - 2 \quad (I.5.1)$$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.5- **Coefficients de frottement moyen et apparent dans la zone d'entrée dynamique**

- Intégration pour un tube de $x=0$ à $x>x_D \Rightarrow$ théorème d'Euler (suite) :

$$\frac{\Delta p_{e \rightarrow s}}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} = \bar{C}_f \frac{\Sigma_l}{\Sigma_{e,s}} + \frac{2}{\Sigma_{e,s}} \left[\iint_{\Sigma_s} \left(\frac{u_s(r)}{\bar{u}} \right)^2 d\Sigma_s \right] - 2 \quad (1.5.1)$$

$$\frac{\Delta p_{e \rightarrow s}}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} = \bar{C}_f \frac{4x}{D} + \frac{2}{3}$$

$$\Delta p_{e \rightarrow s} = \left(\underbrace{4\bar{C}_f}_{=\bar{\lambda}} \frac{x}{D} + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \quad (1.5.2)$$

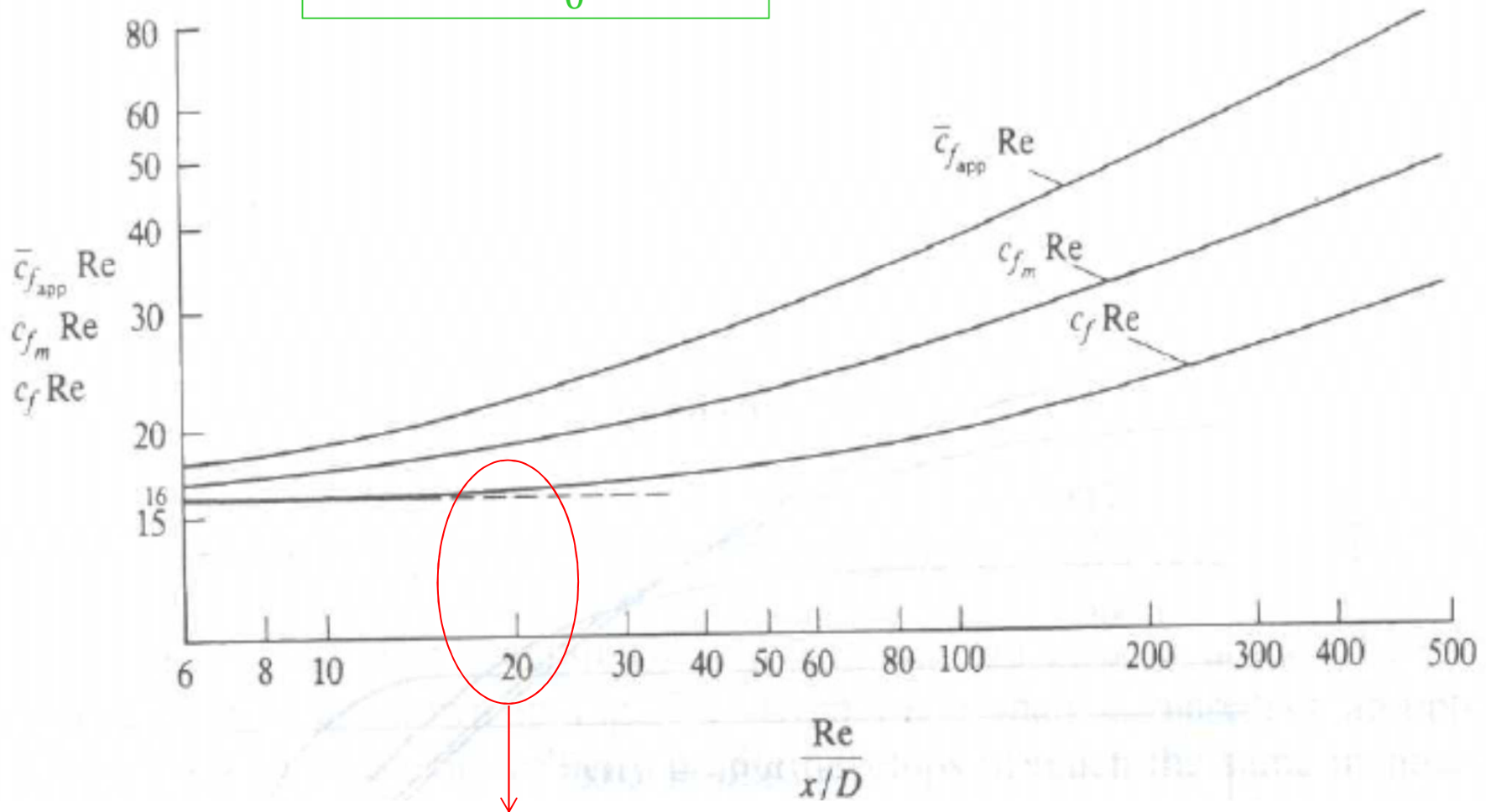
$$\Rightarrow \Delta p_{e \rightarrow s} = 4 \underbrace{\left(\bar{C}_f + \frac{D}{6x} \right)}_{=\bar{C}_{f,app}} \frac{x}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 = \underbrace{4\bar{C}_{f,app}}_{=\bar{\lambda}_{app}} \frac{x}{D} \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2 \quad (1.5.3)$$

I- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **q.d.m.**

I.5- Coefficients de frottement moyen et apparent dans la zone d'entrée dynamique

$$\bar{C}_f = C_{f,m} = \frac{1}{x} \int_0^x C_f(x) dx$$

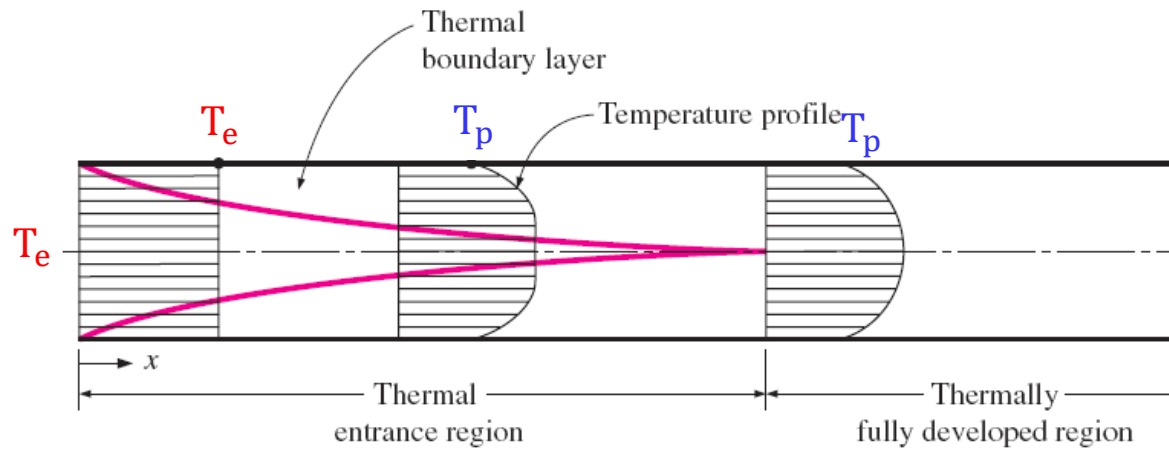
$$\bar{C}_{f,app} = \bar{C}_f + \frac{D}{6x} \quad (I.5.4)$$



On trouve : $x_D/D_h \approx \frac{Re_{Dh}}{20} = 0,05 Re_{Dh}$ cf. éq. (I.4.1)

II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**

II.1- Equation de l'énergie en tube circulaire



cas du refroidissement
d'un fluide entrant à T_e
par une paroi à T_p

Hypothèses :

- écoult laminaire stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- écoult incompressible : $\rho = \text{cste}$ et $\frac{Dp}{Dt} \approx 0$
- propriétés physiques cstes : $\mu = \text{cste}$, $\rho = \text{cste}$, $k = \text{cste}$, $C_p = \text{cste}$, $\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \text{cste}$
- enthalpie massique : $dh = C_p dT$
- section de la conduite constante : $S = \text{cste}$
- pb axisymérique : $\partial / \partial \theta = 0$
- $\vec{f} = \rho \vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z) \perp \vec{v}$ ou introduit dans la pression motrice
- pas de source volumique de chaleur : $\varpi = 0$ et $\vec{r} : \vec{D} = \vec{r} : \nabla \vec{v} \approx 0$ (en W/m^3)

Applications : échangeurs de chaleur

- calcul du flux total échangé Φ_{tot} ou du coef. d'échange moyen \bar{h} et la température de sortie T_s , pour le débit massique \dot{m} , la surface d'échange S_e et la température d'entrée T_e connus.

II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**

II.1- Equation de l'énergie en tube circulaire

- Modèle :

éq. de l'énergie conservative :
$$\underbrace{\frac{\partial \rho h}{\partial t}}_{=0} + \text{div}(\rho \vec{v} h) = -\text{div}(\vec{q}_{\text{cond}}) + \underbrace{\bar{\tau} : \nabla \vec{v} + \frac{Dp}{Dt}}_{=0 \text{ (hyp.)}} + \varpi \quad (\text{II.1.1a})$$

éq. de l'énergie non conservative :
$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \text{div}(\overrightarrow{k \text{grad} T}) + \underbrace{\bar{\tau} : \nabla \vec{v} + \frac{Dp}{Dt}}_{=0 \text{ (hyp.)}} + \varpi \quad (\text{II.1.1b})$$

éq. de l'énergie + hyp. \Rightarrow
$$\rho C_p \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad} T} = k \Delta T \quad (\text{II.1.2})$$

coord. cartésiennes \Rightarrow
$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.1.3})$$

coord. cylindriques \Rightarrow
$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad (\text{II.1.4})$$

II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**

II.1- Equation de l'énergie en tube circulaire

- Analyse dimensionnelle :

$$r = D_h r^*$$

$$x = L x^*$$

$$u = \bar{u} u^*$$

$$v_r = \bar{v} v_r^*$$

$$p = \rho \bar{u}^2 p^*$$

$$\frac{T - T_e}{\Delta T} = T^*$$

$$\text{où } \Delta T = T_e - T_p$$

$$\text{ou } \Delta T = \frac{q_p D_h}{k}$$

on pose :

$$\epsilon = \frac{D_h}{L} \quad (<<1)$$

$$Pe_{D_h} = \frac{\bar{u} D_h}{\alpha}$$

on a vu que :

$$\bar{v}_r \sim \epsilon \bar{u} \quad (\text{I.1.3})$$

$$\text{éq. (II.1.4)} \Rightarrow \quad \frac{\bar{u} \Delta T}{L} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \underbrace{\frac{\bar{v} \Delta T}{D_h}}_{=\frac{\bar{u} \Delta T}{L}} v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{\alpha \Delta T}{L^2} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L^2}{D_h^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \right)$$

(I.1.3)

$$\Rightarrow \quad u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{\alpha}{L \bar{u}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \quad u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{\epsilon}{Pe_{D_h}} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)}_{\sim \frac{1}{\epsilon^2} \gg 1} \right)$$

Si ϵ est petit \Rightarrow

(loin de l'entrée)

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{1}{\epsilon Pe_{D_h}} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)$$

\Rightarrow

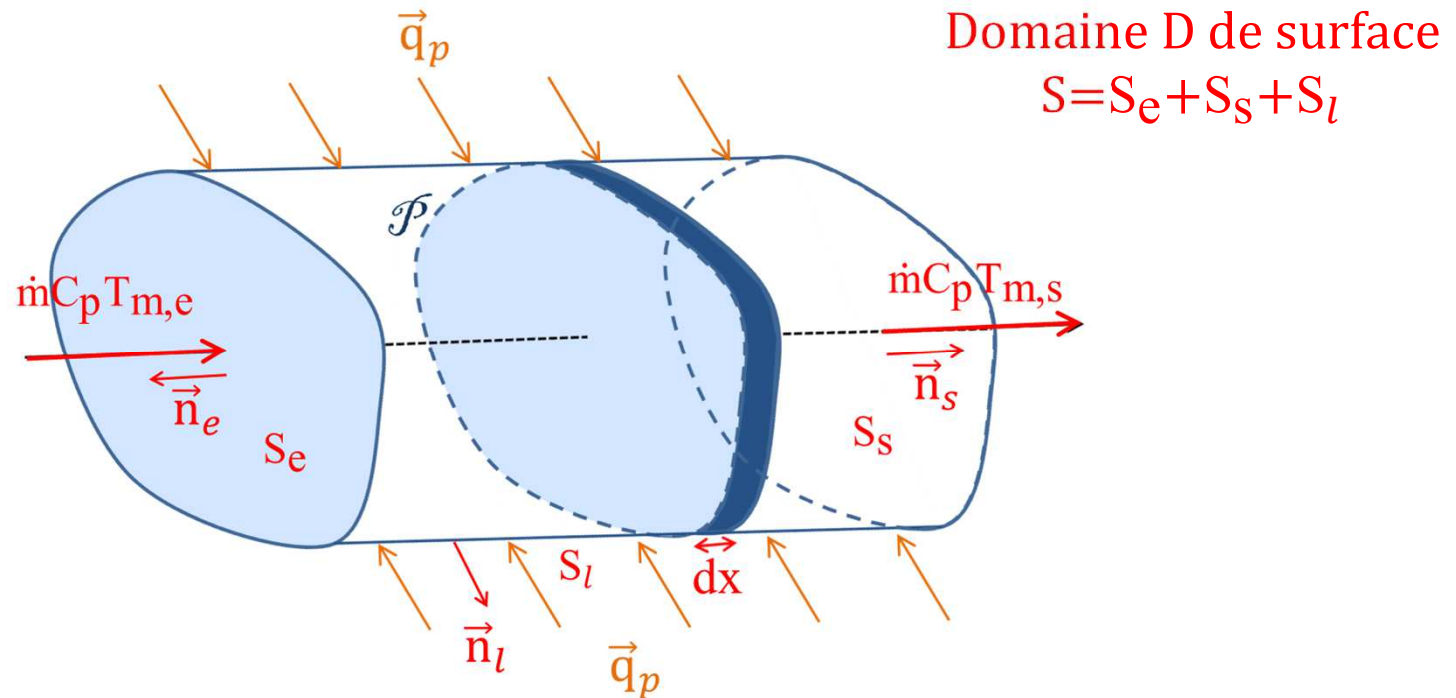
$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \underbrace{\left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}_{=0 \text{ si } v_r=0} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

(si écoult. établi)

(II.1.5)

II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**

II.2- Bilan intégral d'énergie dans un tube



éq. de l'énergie conservative (II.1.1a) :

$$\text{div}(\rho \vec{v} h) = -\text{div}(\vec{q}_{\text{cond}})$$

\iiint_D + théo. de Green-Ostrogradski \Rightarrow

$$\oint_S \rho h \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \oint_S \vec{q}_{\text{cond}} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Leftrightarrow \iint_{S_e} -\rho C_p (T_e - T_{\text{ref}}) u_e dS_e + \iint_{S_s} \rho C_p (T_s - T_{\text{ref}}) u_s dS_s = - \iint_{S_l} \vec{q}_{\text{cond},l} \cdot \vec{n}_l dS_l \\ - \iint_{S_e} \vec{q}_{\text{cond},e} \cdot \vec{n}_e dS_e - \iint_{S_s} \vec{q}_{\text{cond},s} \cdot \vec{n}_s dS_s$$

$\Rightarrow \dots$

II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**

II.2- Bilan intégral d'énergie dans un tube

- **Définition** : la température moyenne débitante est :

$$T_m(x) = \frac{1}{\rho C_p \bar{u} S} \iint_S \rho C_p u T dS \quad \underset{\rho C_p = \text{cste}}{=} \quad \frac{1}{\bar{u} S} \iint_S u T dS \quad (\text{II.2.1})$$

$$\Rightarrow \iint_S \rho C_p u T dS = \rho \bar{u} S C_p T_m(x) = \dot{m} C_p T_m(x)$$

$$\begin{aligned} \dots \Rightarrow \iint_{S_e} -\rho C_p (T_e - T_{\text{ref}}) u_e dS_e + \iint_{S_s} \rho C_p (T_s - T_{\text{ref}}) u_s dS_s &= - \iint_{S_l} \vec{q}_{\text{cond},l} \cdot \vec{n}_l dS_l \\ &\quad - \iint_{S_e} \vec{q}_{\text{cond},e} \cdot \vec{n}_e dS_e - \iint_{S_s} \vec{q}_{\text{cond},s} \cdot \vec{n}_s dS_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \dot{m} C_p [-(T_{m,e} - T_{m,\text{ref}}) + (T_{m,s} - T_{m,\text{ref}})] &= - \iint_{S_l} \vec{q}_p \cdot \vec{n}_l dS_l \\ &\quad - \iint_{S_e} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e dS_e + \iint_{S_s} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s dS_s \end{aligned}$$

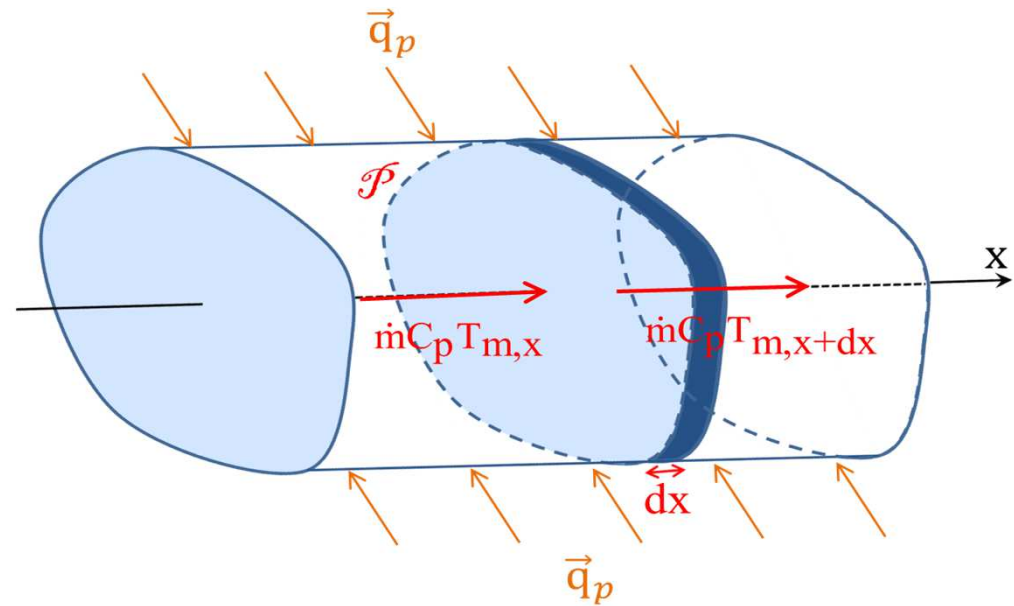
$$\Leftrightarrow \dot{m} C_p (T_{m,s} - T_{m,e}) = \underbrace{- \iint_{S_l} \vec{q}_p \cdot \vec{n}_l dS_l}_{Q_p} \quad \gg \quad \underbrace{- \iint_{S_e} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e dS_e + \iint_{S_s} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s dS_s}_{\substack{Q_{\text{cond},e} \quad -Q_{\text{cond},s} \\ \text{flux de conduction e/s}}}$$

$$\Leftrightarrow \dot{m} C_p \Delta T_{m,es} = Q_p + \underbrace{Q_{\text{cond},e} - Q_{\text{cond},s}}_{\text{négligeable devant } Q_p \text{ si } \varepsilon \ll 1} \quad (\text{II.2.2})$$

II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**

II.2- Bilan intégral d'énergie dans un tube

Bilan d'énergie dans une tranche infinitésimale du tube, de largeur dx



$$\text{Eq. (II.2.2)} \Rightarrow \dot{m}C_p(T_{m,x+dx} - T_{m,x}) = \underbrace{-\iint_{S_l} \vec{q}_p \cdot \vec{n}_l dS_l}_{Q_p} - \underbrace{\iint_{S_x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x dS}_{Q_{\text{cond},x}} + \underbrace{\iint_{S_{x+dx}} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} dS}_{-Q_{\text{cond},x+dx}}$$

$$\Leftrightarrow \dot{m}C_p dT_m = \underbrace{-\vec{q}_p \cdot \vec{n}_l P dx}_{q_p(x)} + \underbrace{\iint_{S_{es}} \left(\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \right) dS}_{q_{es}: \text{négligeable loin de l'entrée ou si } \varepsilon \ll 1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{m}C_p \frac{dT_m}{dx} = q_p(x)P + \underbrace{\iint_{S_{es}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dS}_{\text{négligeable si } \varepsilon \ll 1}} \quad (\text{II.2.3})$$

II- Ecoulements **laminaires** internes : transferts de **chaleur**

II.1- Equation de l'énergie en tube circulaire

II.2- Bilan intégral d'énergie dans un tube

**Partie du cours
traîtée au tableau**

II.3- Transfert de chaleur fluide/paroi

II.3.1- Conditions aux limites – Coefficient d'échange thermique

II.3.2- Définition du régime thermique établi

II.3.3- Nombres de Nusselt et de Stanton

II.4-Transferts thermiques dans un écoulement dynamiquement et thermiquement établi dans un tube cylindrique

II.4.1- Solution pour un chauffage à flux constant : $q_p = \text{cste}$

II.4.2- Solution pour un chauffage à température constante : $T_p = \text{cste}$

II.5- Ecoulement dynamiquement et thermiquement non établi dans un tube cylindrique – Longueur d'entrée thermique

II.6- Ecoulement dynamiquement établi mais thermiquement non établi dans un tube cylindrique – Longueur d'entrée thermique

II.6.1- Solution pour un chauffage à température constante : $T_p = \text{cste}$

II.6.2- Solution pour un chauffage à flux constant : $q_p = \text{cste}$

II.7- Cas des écoulements et transferts de chaleur en canal plan

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.0 - Avant propos

Les équations de Navier-Stokes et de l'énergie s'appliquant aussi bien aux régimes laminaires que turbulents, une grande partie des résultats établis en régime laminaire restent valables, au moins qualitativement, en régime turbulent ... par exemple :

- le bilan global de q.d.m. et **l'équilibre des forces de pression entrée/sortie et de viscosité** au §I.2.3 ;
- la **variation radiale linéaire de la contrainte visqueuse** totale, $\tau_{xr,tot} = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dr}$, dans un écoulement dans un tube (§I.2.4) ;
- la **décroissance dans la direction axiale du coefficient de frottement C_f ou du nombre de Nusselt Nu** dans la zone d'entrée (§I.4 et §II.3.3) ;
- le **bilan intégral de l'énergie** dans un tube au §II.2 (formules (II.2.2) et (II.2.3)) ;
- **l'évolution axiale de la température** dans un tube chauffé à $q_p=cste$ au §II.4.1 et à $T_p=cste$ au §II.4.2 ;
- **l'égalité du flux d'enthalpie entrée/sortie dans un tube avec celui échangé à la paroi** (cf. formules (II.4.11) et (II.4.12))

III- Écoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

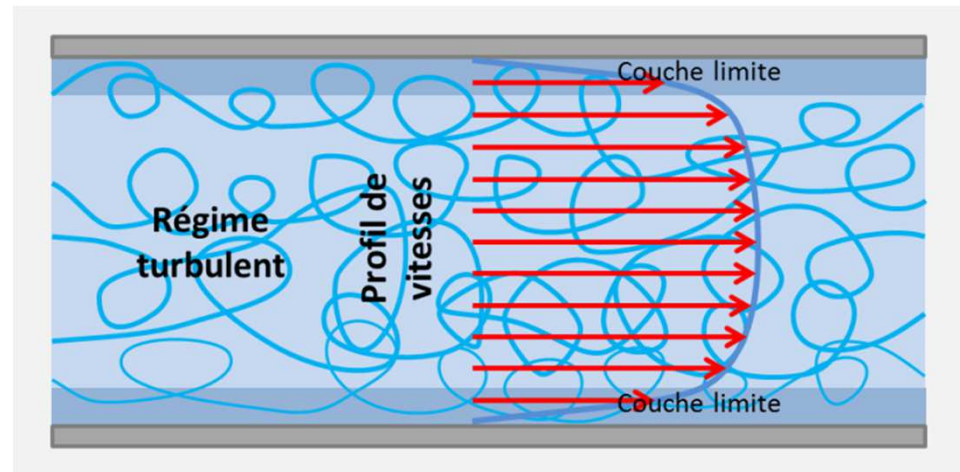
III.1- Introduction : équation du mouvement en tube cylindrique

On considère des écoulements turbulents, moyennés en temps, en conduite d'axe x. Les moyennes temporelles, notées avec une barre (\bar{p} , \bar{v}), sont effectuées sur des durées finies mais assez grandes pour pouvoir faire les hypothèses suivantes :

$$Re > 2300$$

Hypothèses :

- régime permanent : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- pb axisymétrique : $\partial./\partial\theta=0$
- écoult incompressible : $\rho = \text{cste}$
- propriétés physiques cstes : $\mu = \text{cste}$
- section de la conduite constante : $S=\text{cste}$
- $\vec{f} = \rho \vec{g} \perp \vec{v}$ ou pression motrice $\bar{p} = \bar{p}(x)$, où $\bar{p} = \bar{p}' + \rho g z$ et $\bar{p}' =$ pression statique moyenne



III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.1- Introduction : équation du mouvement en tube cylindrique

La décomposition de Reynolds de la vitesse instantanée, $\mathbf{v}(\mathbf{M},t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{M}) + \mathbf{v}'(\mathbf{M},t)$, en la somme de la vitesse moyenne en temps, $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{M})$, et d'une fluctuation, $\mathbf{v}'(\mathbf{M},t)$, fait apparaître dans les équations de Navier-Stokes moyennées en temps (équations **RANS = Reynolds Averaged Navier-Stokes equations**) la divergence de la somme du tenseur des contraintes visqueuses, $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, et du **tenseur des contraintes de Reynolds** $-\rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}$:

$$\overrightarrow{\text{div}}(\bar{\boldsymbol{\tau}} - \rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'})$$

L'**hypothèse de Boussinesq** est que la contribution des contraintes de Reynolds agit comme de la diffusion turbulente et il propose de la modéliser comme suit :

$$\boxed{-\rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} = 2\mu_t \bar{\mathbf{D}}} \quad (\text{III.1.1})$$

où μ_t est la **viscosité dynamique turbulente** et $\bar{\mathbf{D}}$ est le tenseur des vitesses de déformation du champ moyen :

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mathbf{v}} + (\overrightarrow{\text{grad}} \bar{\mathbf{v}})^t \right)$$

On peut aussi définir la **viscosité cinématique turbulente** $\varepsilon_M = \mu_t / \rho$ qui, d'après l'équation (III.1.1), peut aussi s'écrire symboliquement (car le rapport de 2 tenseurs d'ordre 2 n'a pas de sens mathématique) ;

$$\varepsilon_M = \frac{\mu_t}{\rho} = \ll \frac{-\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}}{2\bar{\mathbf{D}}} \gg$$

Ainsi, les viscosités turbulentes μ_t et ε_M sont des caractéristiques du champ des vitesses turbulentes et n'ont rien à voir avec les viscosités moléculaires μ et ν .

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.1- Introduction : équation du mouvement en tube cylindrique

Ainsi, les équations de Navier-Stokes moyennées en temps (équations **RANS = Reynolds Averaged Navier-Stokes equations**) s'écrivent sous les hypothèses précédentes et dans la direction axiale x de l'écoulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cartésien : } \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left(+ \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ \text{cylindrique : } \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \left(+ \bar{v}_r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left((\nu + \epsilon_M) r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \end{array} \right. \quad \text{avec } \epsilon_M = \frac{\mu_t}{\rho} = \frac{-\overline{u'v'}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \quad (III.1.2)$$

Notez que le deuxième terme entre parenthèses du membre de gauche des équations (III.1.2) n'intervient que juste à l'entrée des conduites, lorsque la composante de la vitesse transverse moyenne \bar{v} ou \bar{v}_r est non nulle.

Latzko montre que la **longueur d'entrée dynamique, $x_{D,turb}$, en régime turbulent lisse** dans un cylindre est donnée par :

$$x_{D,turb}/D = 0,623 Re_D^{0,25} \quad (III.1.3)$$

Quand, en régime laminaire on avait obtenu :

$$x_{D,lam}/D = 0,056 Re_D \quad (I.4.1)$$

régime	Re_D	x_D/D
turbul.	$2 \cdot 10^5$	13,2
turbul.	$5 \cdot 10^4$	9,3
turbul.	10^4	6,2
lamin.	10^3	56 !

x_D/D est 5 à 10 fois + petit en régime turbulent par rapport au laminaire !!

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.1- Introduction : équation du mouvement en tube cylindrique

En régime turbulent rugueux, $x_{D,turb}/D$ dépend de l'épaisseur relative ε/D des rugosités de surface. Dans ce régime, $x_{D,turb}$ est encore plus courte qu'en régime turbulent lisse car les rugosités déclenchent encore plus tôt la turbulence et la couche limite croît plus rapidement.

Conséquences :

⇒ on néglige très souvent l'influence de la zone d'entrée ($0 \leq x \leq x_{D,turb}$) en régimes turbulents dans l'analyse des échangeurs (cas des tubes longs);

⇒ l'équation (III.1.2) est donc considérée en **régime établi** : $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \text{cste}$. Elle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cartésien : } \frac{\partial}{\partial y} \left(\overbrace{(v + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}^{=\tau_{xy,tot}/\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \text{cylindrique : } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\underbrace{(v + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}}_{=\tau_{xr,tot}/\rho} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \end{array} \right. \quad (\text{III.1.4})$$

⇒ L'éq. (III.1.4) fait apparaître l'expression de la **contrainte totale**, $\tau_{xr,tot} = \rho(v + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$, somme de la contrainte visqueuse, $\tau_{xr,visc} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$, et de la contrainte turbulente, $\tau_{xr,turb} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$.

⇒ On voit donc qu' **en régime turbulent établi, dans un tube ou un canal, la contrainte totale varie linéairement en fonction de r ou y** (comme en régime établi laminaire : cf. §1.2.4) :

$$\tau_{xr,tot}(r) = -\tau_p \frac{r}{R} < 0 \quad (\text{III.1.5})$$

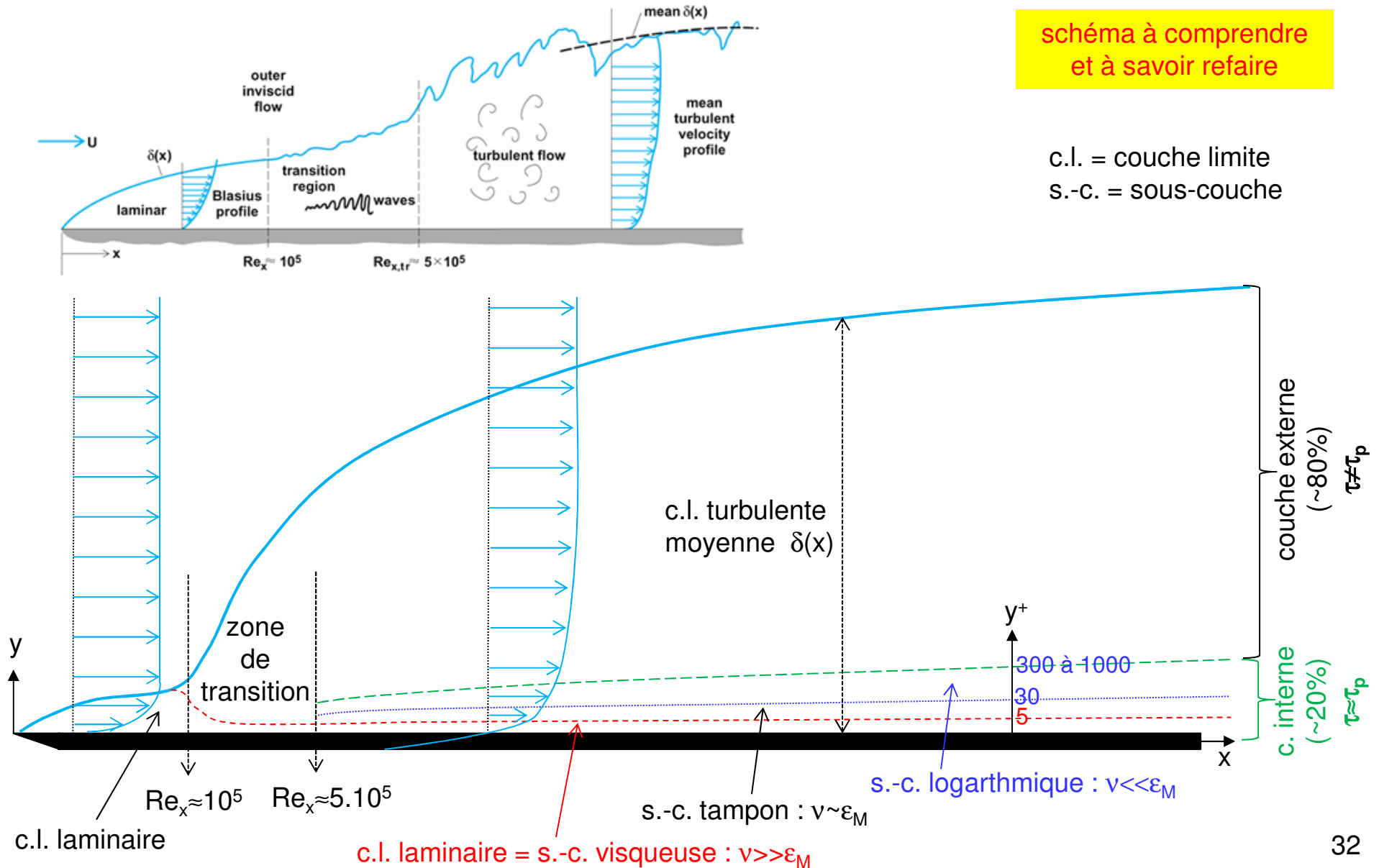
III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.1- Rappels sur le développement d'une couche limite turbulente

schéma à comprendre
et à savoir refaire

c.l. = couche limite
s.-c. = sous-couche



III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.2- Profils de vitesse d'écoulements turbulents

- ⇒ Les commentaires ci-après font référence aux figures des 3 diapos précédentes et suivantes.
- ⇒ Connaître précisément le profil de vitesse près de la paroi est fondamental pour pouvoir calculer τ_p et C_f . **On peut déterminer ces grandeurs de manière semi-analytique/semi-empirique** (i.e. en introduisant des données exp.), surtout en régime turbulent lisse.
- ⇒ Les mesures expérimentales de la vitesse montrent que dans la « **couche interne** », c'est-à-dire dans les premiers 20% de la couche limite dynamique, la contrainte de cisaillement τ est constante et environ égale à la contrainte pariétale τ_p .
- ⇒ Ces mesures montrent que le profil de vitesse, dans toute la section **d'un tube cylindrique de rayon R**, suit une loi universelle, appelée le « **profil universel de vitesse** », à condition d'être écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

⇒	$u^+ = y^+$	pour $y^+ \leq 5$ et $v \gg \varepsilon_M$	(sous-couche visqueuse – loi linéaire)	
⇒	$u^+ = 5 [1 + \ln(y^+/5)]$	pour $5 \leq y^+ \leq 30$	(sous-couche tampon)	
⇒	$u^+ = 2,5 \ln(y^+) + 5,5$	pour $30 \leq y^+$ et $v \ll \varepsilon_M$	(sous-couche logarithmique)	(III.2.1)
⇒	où u^+ et y^+ sont mesurés en « unités de paroi » : $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$; $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$; $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$; $y = R - r$			

- ⇒ Pour un écoulement turbulent **sur une plaque plane**, la loi logarithmique s'écrit :

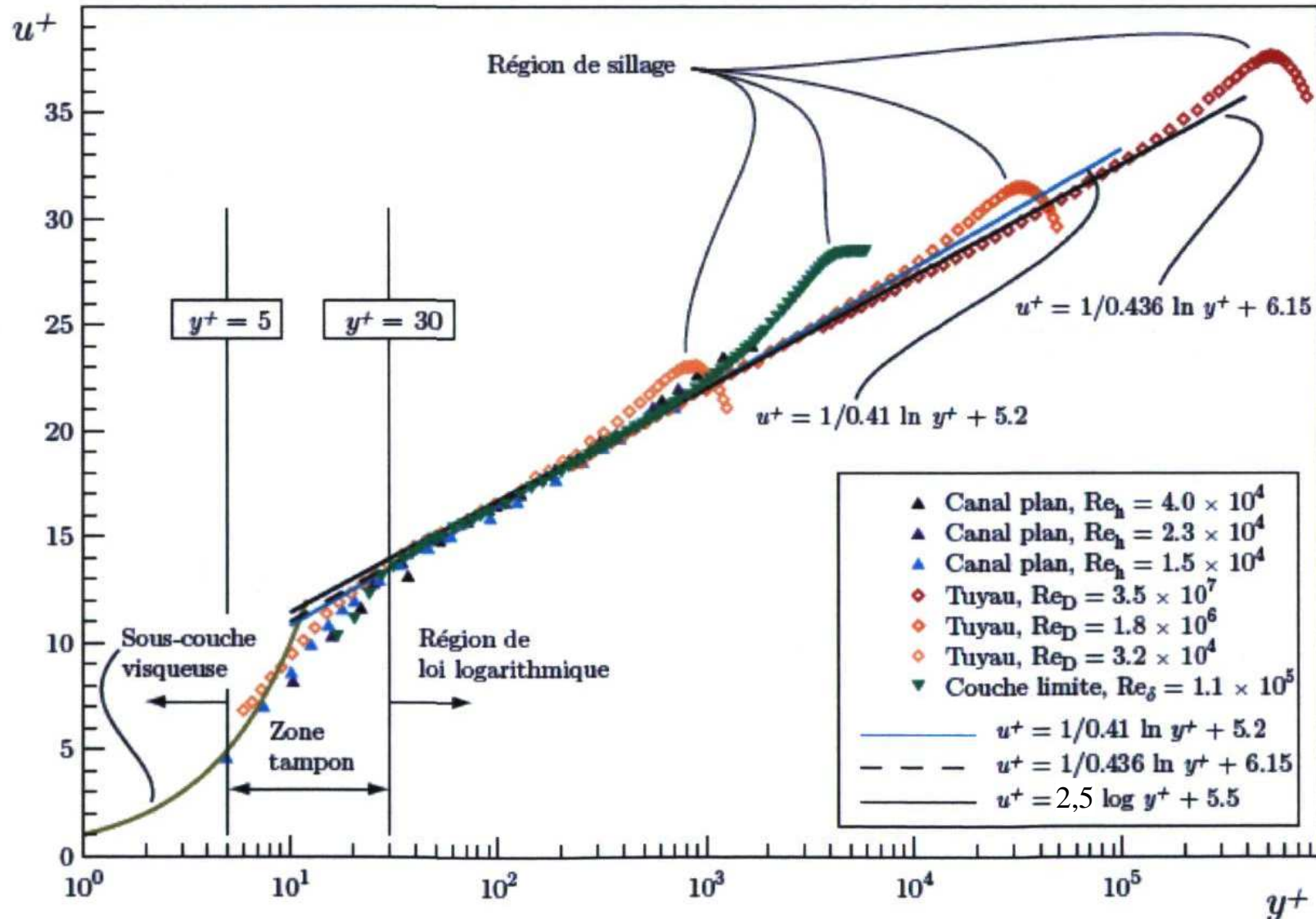
⇒	$u^+ = 2,44 \ln(y^+) + 5$	pour $30 \leq y^+$ et $v \ll \varepsilon_M$	(sous-couche logarithmique)	(III.2.2)
---	---------------------------	---	-----------------------------	-----------

- ⇒ Elle diffère légèrement de celle dans un tube car, dans ce dernier, la pression chute sous l'effet des pertes de charge ($\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \text{cste} < 0$), alors que sur une plaque plane $\bar{p} = p_\infty = \text{cste}$ et $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0$ en dehors et dans la couche limite.

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

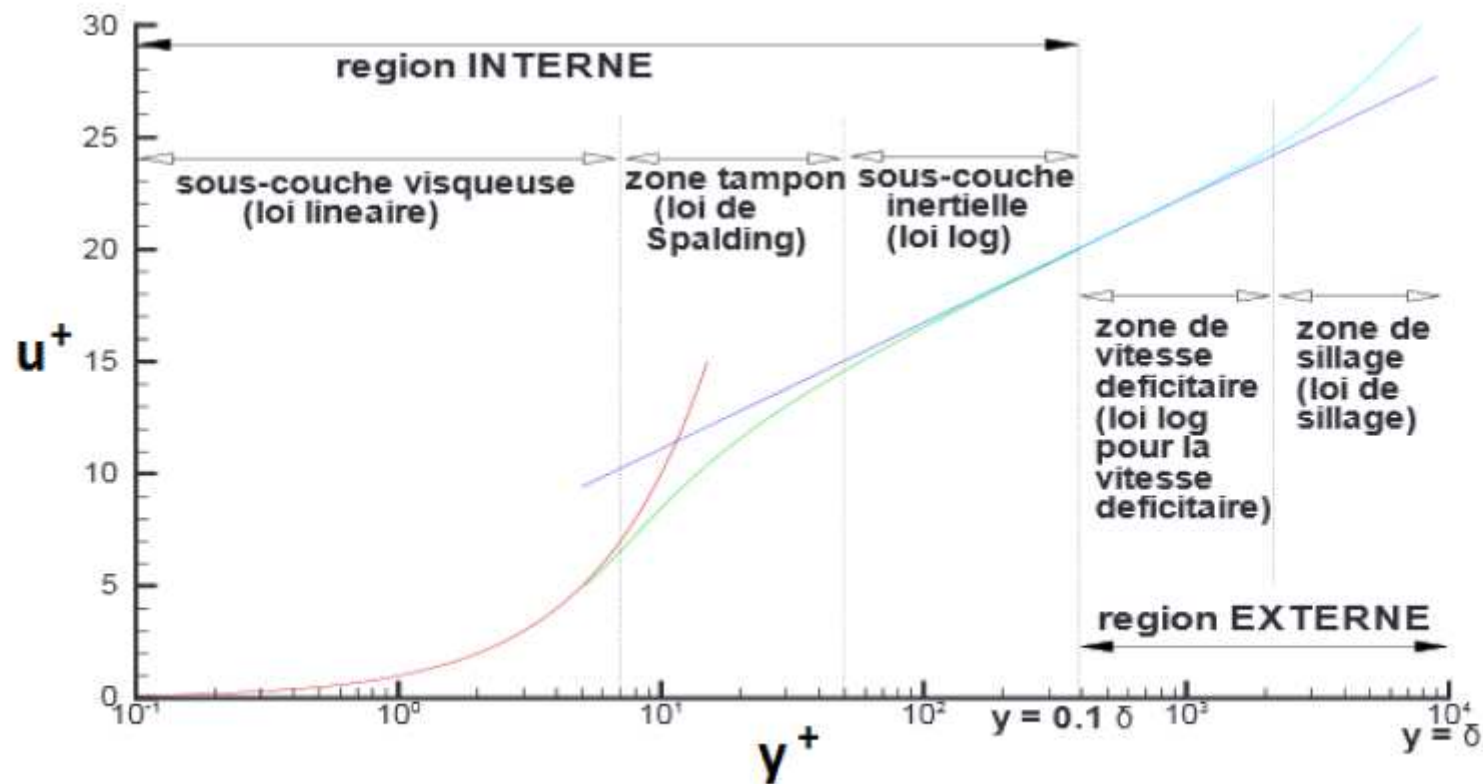
III.2.2- Profils de vitesse d'écoulements turbulents



III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.2- Profils de vitesse d'écoulements turbulents



PROFIL DE VITESSE À TRAVERS LA COUCHE LIMITE TURBULENTE D'UNE PLAQUE PLANE

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.2- Profils de vitesse d'écoulements turbulents

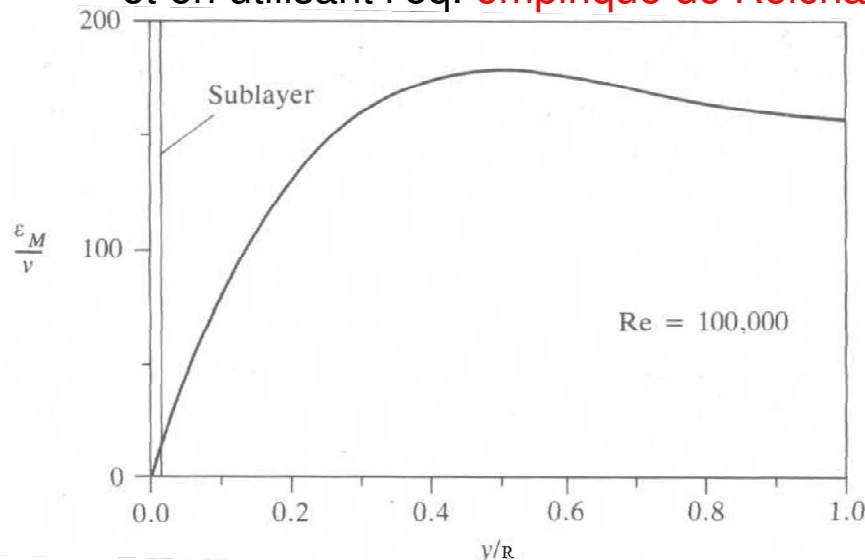
⇒ Remarque à propos de l'éq. (III.2.1) dans un tube : la sous-couche logarithmique s'étend presque jusqu'au centre du tube, mais n'est pas valable au centre, en $r=0$, car :

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=0} \neq 0 \text{ puisque } \left(\frac{du^+}{dy^+}\right)_{y^+=R^+} \neq 0$$

⇒ Pour contourner ce problème, il existe une version améliorée de la loi logarithmique, qui permet d'avoir $\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=0} = 0$ et qui s'écrit :

$$u^+ = 2,5 \ln \left[\frac{1,5 \left(1 + \frac{r}{R}\right)}{1 + 2 \left(\frac{r}{R}\right)^2} y^+ \right] + 5,5 \quad \text{pour } 30 \leq y^+ \text{ et } v \ll \epsilon_M \quad (\text{III.2.3})$$

⇒ Cette éq. est obtenue en intégrant (III.1.4) et (III.1.5) avec $v = 0$: $\tau_{xr,tot}(r) = \rho \epsilon_M \frac{d\bar{u}}{dr} = -\tau_p \frac{r}{R}$ et en utilisant l'éq. **empirique de Reichardt**, tracée ci-dessous et valable pour $y^+ > 5$:



$$\frac{\epsilon_M}{\nu} = K \frac{y^+}{6} \left(1 + \frac{r}{R}\right) 2,5 \ln \left[1 + 2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \quad (\text{III.2.4})$$

$$K=0,4$$

NB : à la paroi, qd $r \rightarrow R$ ou $y \rightarrow 0$, $\frac{\epsilon_M}{\nu} \rightarrow K'y^+$

*Rapport de la viscosité turbulente ϵ_M sur la viscosité moléculaire ν en fonction de la distance à la paroi y/R dans un tube cylindrique **en régime turbulent lisse***

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

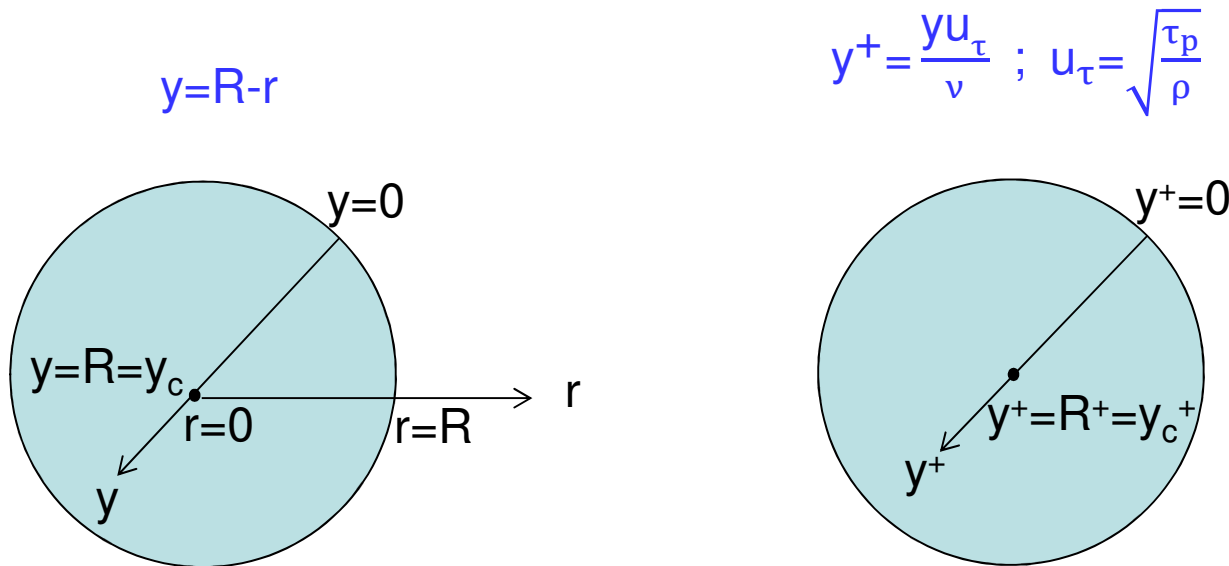
III.2.2- Profils de vitesse d'écoulements turbulents

⇒ Une alternative plus simple au profil universel de vitesse (III.2.1) d'un écoulement dans un tube est le « **profil de vitesse en loi de puissance** » :

$$u^+ = 8,6 y^{+1/7}$$

(III.2.5)

⇒ Ce profil est obtenu par une interpolation du profil (III.2.3) et la puissance 1/7 correspond au **régime turbulent lisse pour $10^4 \leq Re \leq 2.10^5$** environ.



Systèmes de coordonnées dimensionnelles (à gauche) et adimensionnelles en unités de paroi (à droite) dans un tube cylindrique

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.3- Vitesses moyenne \bar{u}_m et maximale \bar{u}_c

⇒ L'éq. (III.2.5) du profil de vitesse en loi de puissance donne une vitesse maximale au centre du tube égale à : $u_c^+ = u_{\max}^+ = 8,6y_c^{+1/7}$

⇒ Donc le rapport de l'éq. (III.2.5) avec cette expression donne, en utilisant la définition des unités de parois dans (III.2.1) et le fait que $y_c = R$:

$$\frac{\bar{u}(y)}{\bar{u}_c} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \quad (\text{III.2.6})$$

⇒ La vitesse moyenne \bar{u}_m est obtenue en intégrant ce profil de vitesse moyen en temps sur la section S de la conduite de rayon R :

$$\bar{u}_m = \frac{1}{S} \iint_S \bar{u} dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \bar{u}(r) 2\pi r dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R \bar{u}_c \left(\frac{R-r}{R}\right)^{1/7} r dr = \frac{2\bar{u}_c}{R^{2+1/7}} \int_0^R r(R-r)^{1/7} dr$$

Une intégration par partie (laissée en exercice) permet de trouver :

$$\bar{u}_m = \frac{49}{60} \bar{u}_c = 0,817 \bar{u}_c = 0,817 \bar{u}_{\max} \quad (\text{III.2.7})$$

⇒ [Remarque 1](#): contrairement au cas laminaire où $u_m = 0,5u_{\max}$, la relation (III.2.7) indique que la vitesse moyenne de l'écoulement en régime turbulent lisse est proche de sa vitesse maximale au centre du tube car le profil tend à s'aplatir.

⇒ [Remarque 2](#): on aurait pu faire le calcul des vitesses moyenne et maximale avec le profil universel de vitesse (III.2.1), mais le calcul intégral doit se faire par morceaux dans chaque sous-couche et est beaucoup plus long que le calcul menant à (III.2.7).

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.4- Coefficient de frottement C_f et de perte de charge λ

⇒ Le coefficient de frottement $C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho\bar{u}_m^2}$ peut être calculé à partir de la vitesse pariétale, u_τ ,

introduite pour définir les unités de paroi dans l'éq. (III.2.1) : $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} = \bar{u}_m \sqrt{\frac{C_f}{2}}$.

⇒ L'éq. (III.2.5) donne : $u_c^+ = 8,6 y_c^{+1/7} \Leftrightarrow \frac{\bar{u}_c}{u_\tau} = 8,6 \left(\frac{Ru_\tau}{v}\right)^{1/7} \Leftrightarrow u_\tau^{8/7} = \frac{\bar{u}_c}{8,6} \left(\frac{v}{R}\right)^{1/7}$

⇒ L'éq. (III.2.7) donne : $\left(\bar{u}_m \sqrt{\frac{C_f}{2}}\right)^{8/7} = \frac{\bar{u}_m}{8,6 \cdot 0,817} \left(\frac{v}{R}\right)^{1/7} \Leftrightarrow \left(\frac{C_f}{2}\right)^{4/7} = \frac{1}{8,6 \cdot 0,817} \left(\frac{v}{\bar{u}_m R}\right)^{1/7}$

⇒ $\Leftrightarrow \frac{C_f}{2} = \left(\frac{2^{1/7}}{8,6 \cdot 0,817} Re_D^{-1/7}\right)^{7/4} \Leftrightarrow \frac{C_f}{2} = 0,03925 Re_D^{-0,25}$

⇒ $C_f = 0,07849 Re_D^{-0,25}$

⇒ $f = \lambda = 4C_f = 0,314 Re_D^{-0,25} \quad (III.2.8)$

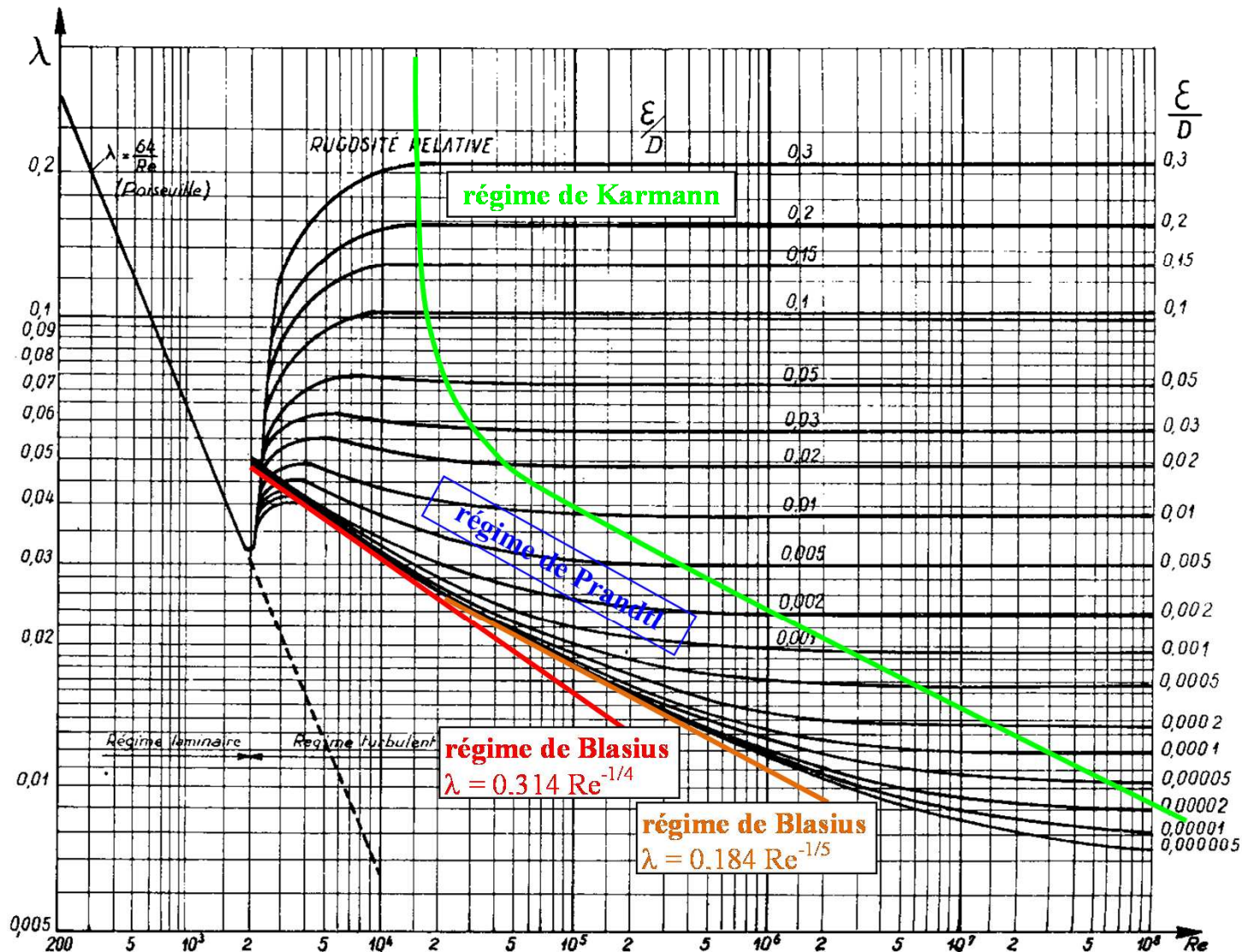
⇒ Ce résultat obtenu de manière semi-analytique, en utilisant le profil de vitesse turbulente en loi de puissance, est en accord avec les mesures expérimentales du coefficient de perte de charge λ pour le régime turbulent lisse de Blasius, valable pour $10^4 < Re_D < 5 \cdot 10^4$ (voir le diagramme de Moody sur la diapo suivante)

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.4- Coefficient de frottement C_f et de perte de charge λ

Diagramme de Moody : il permet la lecture graphique du coefficient de perte de charge régulière, λ , en fonction du nombre de Reynolds, Re , et de l'épaisseur relative des rugosités, ε/D :



III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.4- Coefficient de frottement C_f et de perte de charge λ

⇒ Pour le régime turbulent lisse de Blasius à $Re_D > 5.10^5$ (cf. diagramme de Moody), il vaut mieux évaluer C_f et λ à partir du profil universel de vitesse (III.2.1)-(III.2.2) car le résultat est plus précis qu'avec le profil en puissance.

⇒ Ainsi, en utilisant la même procédure que pour établir (III.2.8), on retrouve l'équation classique de Karman-Nikuradse en régime turbulent lisse :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C_f}{2} = \left(2,5 \ln \left(\frac{Re_D}{2} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) + 1,75 \right)^{-2} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = (0,884 \ln(Re_D \sqrt{\lambda}) - 0,913) \end{cases} \quad (III.2.9)$$

(détail du calcul dans chap.4 du polycopié « Transfert de chaleur et de matière » du Pr. Lauriat)

⇒ Pour mieux coller aux résultats expérimentaux, Kays et Crawford proposent des expressions similaires mais avec des coefficients adaptés :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C_f}{2} = \left(2,46 \ln \left(Re_D \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) + 0,3 \right)^{-2} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = (0,87 \ln(Re_D \sqrt{\lambda}) - 0,8) \end{cases} \quad (III.2.10)$$

⇒ Remarque : ces équations permettent aussi de calculer une approximation correcte de C_f et λ pour des conduites de section non circulaire à condition de remplacer Re_D par Re_{Dh}

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.4- Coefficient de frottement C_f et de perte de charge λ

⇒ Une interpolation des équations (III.2.9) ou (III.2-10), plus facile à utiliser, donne C_f et λ **pour le régime turbulent lisse de Blasius, valable pour $3 \cdot 10^4 < Re_D < 10^6$** (cf. diagramme de Moody) :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_f = 0,046 Re_D^{-0,2} \\ f = \lambda = 4C_f = 0,184 Re_D^{-0,2} \end{cases} \quad (III.2.11)$$

⇒ Toujours pour le **régime turbulent lisse de Blasius**, on peut appliquer la **1^{ère} équation de Petukhov** qui est valable sur une large gamme de nb de Reynolds, **pour $3 \cdot 10^3 < Re_D < 5 \cdot 10^6$** :

$$f = \lambda = 4C_f = (0,790 \ln(Re_D) - 1,64)^{-2} \quad (III.2.12)$$

⇒ **En régime turbulent rugueux pleinement développé** qui apparaît **pour $Re_D > 10^4$ à 10^6** , c'est-à-dire **dans le régime de Karman** du diagramme de Moody, C_f et λ ne dépendent que de l'épaisseur moyenne des rugosités ε/D et pas de Re_D . **L'équation de Karman-Nikuradse** s'écrit pour ce régime :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_f = \left(1,74 \ln \left(\frac{D}{\varepsilon} \right) + 2,28 \right)^{-2} \\ \lambda = \left(0,87 \ln \left(\frac{D}{\varepsilon} \right) + 1,138 \right)^{-2} \end{cases} \quad (III.2.13)$$

III- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **q.d.m.**

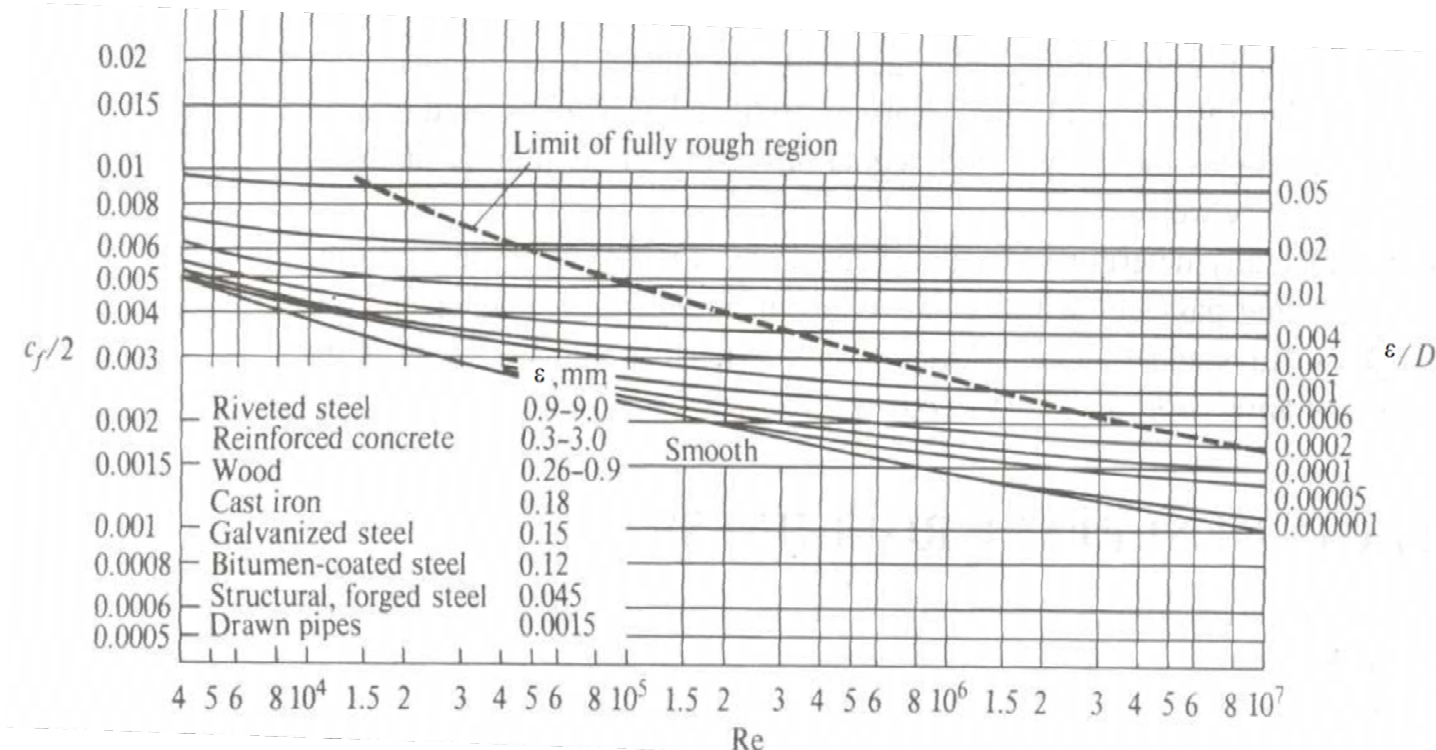
III.2- Ecoulements turbulents pleinement développés

III.2.4- Coefficient de frottement C_f et de perte de charge λ

⇒ La loi de Colebrook (1939) est une loi empirique qui donne $\lambda=f(\text{Re}, \varepsilon/D)$ pour une très large gamme de nombres de Reynolds, $4000 < \text{Re} < 10^8$, et pour $\varepsilon/D \leq 0,05$, ce qui couvre plusieurs régimes turbulents. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{\text{Re}_D \sqrt{\lambda}} \right) \quad (\text{III.2.14})$$

⇒ L'inconvénient de cette loi est qu'elle est non linéaire et peu pratique à l'usage pour déterminer λ . Son tracé graphique permet de retrouver le diagramme de Moody :



IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.1- Introduction : longueur d'établissement thermique $x_{T,turb}$

⇒ La longueur d'établissement thermique $x_{T,turb}$ en régime turbulent, contrairement au cas laminaire (cf. §II.5), ne dépend pas (ou peu) du nombre de Prandtl et est à peu près égale à la longueur d'établissement dynamique, $x_{D,turb}$ (cf. §III.1 et éq. (III.1.3)).

⇒ turbulent :

$$\boxed{\begin{aligned} x_{T,turb} \approx x_{D,turb} & \Rightarrow x_{T,turb}/D_h \approx x_{D,turb}/D_h \approx C_t Re_D^n \\ & \text{où } C_t = \text{cste} \sim 1 \text{ et } n \approx 0,25 \end{aligned}} \quad (IV.1.1)$$

⇒ laminaire :

$$x_{T,lam} \approx x_{D,lam} Pr \Rightarrow x_{T,lam}/D_h \approx C_{th}(Pr) Re_D Pr \quad (II.5.1)$$

⇒ $x_{T,turb}$ est donc très courte (de l'ordre de $10D$ à $15D$: voir diapo 30) : elle est en général négligée dans le calcul des échangeurs.

IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.1- Introduction : influence des modes de chauffage ($q_p=cste$ ou $T_p=cste$)

⇒ Pour des écoulements turbulents dont le nombre de Prandtl est suffisamment grand, le mode de chauffage sur la paroi du tube (flux ou température imposés) n'influence pas la valeur du nombre de Nusselt.

⇒ On peut en effet montrer que le rapport des nombres de Nusselt à flux et à température imposés (où (H): $q_p=cste$ et (T): $T_p=cste$) est tel que :

$$\boxed{Nu_{(H)}/Nu_{(T)} \approx 1 \quad \text{pour } Pr > 0,7} \quad (IV.1.2)$$

⇒ Par contre, la figure dessous montre que : $1 < Nu_{(H)}/Nu_{(T)} < 1,4$ pour $Pr > 0,7$.

⇒ Dans la suite, on ne distinguera pas le mode de chauffage car on ne considèrera pas le cas des très petits nombres de Prandtl.

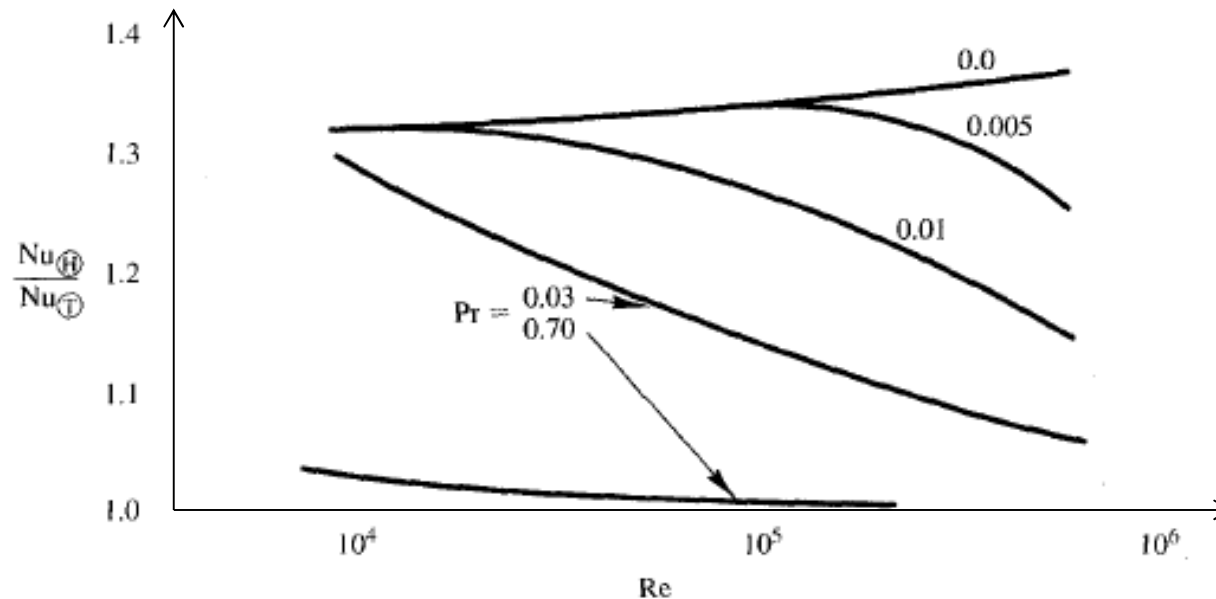


Figure 14-5 Ratio of Nusselt number for *constant heat rate* to Nusselt number for *constant surface temperature* for fully developed conditions in a circular tube

IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.2- Equation de l'énergie turbulente en régimes établis en conduite

Les hypothèses faites au début du §III.1 s'appliquent encore ici. On considère des écoulements turbulents chauffés, pleinement développés, moyennés en temps, en conduite d'axe x. Les moyennes temporelles, notées avec une barre (\bar{T} , \bar{v}), sont effectuées sur des durées finies mais assez grandes pour pouvoir faire les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

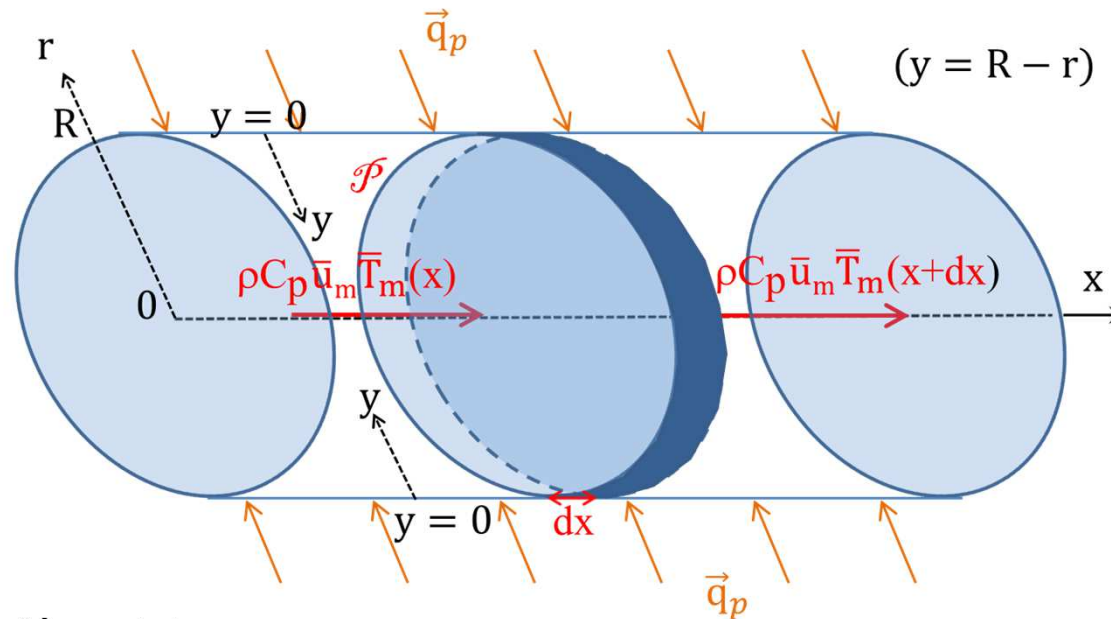
- régime permanent : $\partial \bar{T} / \partial t = 0$
- pb axisymétrique : $\partial \bar{T} / \partial \theta = 0$
- propriétés physiques cstes : $\mu = \text{cste}$, $\rho = \text{cste}$, $k = \text{cste}$, $C_p = \text{cste}$, $\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \text{cste}$
- conduction axiale négligeable : $\partial^2 \bar{T} / \partial x^2 = 0$
- écoulement pleinement développé (**régime dynamique établi**) : $\partial \bar{u} / \partial x = 0$ et $\bar{v}_r = \bar{v}_y = 0$
- section de la conduite constante : $S = \text{cste}$
- pas de source volumique de chaleur : $\varpi = 0$ et $\bar{\tau} : \bar{\bar{D}} = \bar{\tau} : \nabla \bar{\vec{v}} \approx 0$ (en W/m³)

Ainsi, l'éq. de l'énergie moyennée en temps s'écrit sous les hypothèses précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cartésien : } \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\alpha + \epsilon_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \\ \text{cylindrique : } \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r(\alpha + \epsilon_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{avec } \epsilon_T = \frac{-\overline{u'T'}}{\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}} \\ \text{avec } \epsilon_T = \frac{-\overline{u'T'}}{\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}} \end{array} \quad (\text{IV.2.1})$$

IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.2- Equation de l'énergie turbulente en régimes établis en conduite



Hypothèses supplémentaires :

- **régime thermique établi** (cf. éqs. (II.3.7) et (II.4.3)) : $\partial \bar{T} / \partial x = d \bar{T}_m / dx$

Donc l'éq. de l'énergie (IV.2.1) et l'éq. RANS (III.1.3) s'écrivent en coord. cylindriques et en régimes dynamique et thermique établis :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{éq. énergie : } \bar{u} \frac{d \bar{T}_m}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left((\alpha + \epsilon_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) \right] \\ \text{éq. RANS : } \frac{1}{\rho} \frac{d \bar{p}}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left((\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{avec } \epsilon_T = \frac{-\overline{u' T'}}{\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}} \\ \text{avec } \epsilon_M = \frac{-\overline{u' v_r'}}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}} \end{array} \quad \begin{array}{l} Pr = \nu / \alpha \\ Pr_t = \epsilon_M / \epsilon_T \end{array} \quad (IV.2.2)$$

IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.3- Transferts thermiques en régimes dynamique et thermique établis en tube

IV.3.1- Cas des nombres de Prandtl **$0,6 \leq Pr \leq 6$**

Les données empiriques, pour $0,6 \leq Pr \leq 6$, sur les diffusions turbulentes ϵ_T et ϵ_M (cf. éq. (III.2.1) de Reichardt) ou sur le nombre de Prandtl turbulent $Pr_t = \epsilon_M / \epsilon_T$, permettent d'établir une **loi de paroi thermique logarithmique** sous la forme :

$$\Rightarrow T^+ = 2,2 \ln(y^+) + 13,39 Pr^{2/3} - 5,66 \quad \text{pour } y^+ \geq 30 \text{ et } \alpha \ll \epsilon_T \quad (\text{IV.3.1})$$

$$\Rightarrow \text{où } T^+ \text{ et } y^+ \text{ sont les « unités de paroi » : } y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} ; T^+ = \frac{\rho C u_\tau (T_p - \bar{T})}{q_p} ; u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} ; y = R - r$$

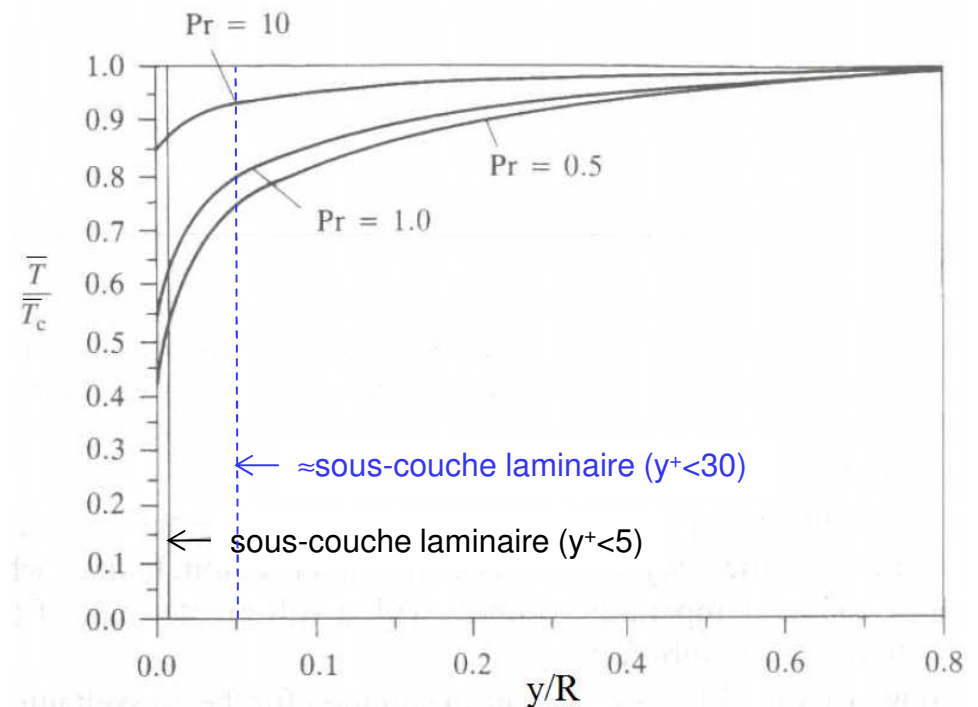
Cette équation est **valable pour $0,6 \leq Pr \leq 6$ et pour $y^+ \geq 30$** . En revanche, elle n'est pas valable dans la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$) et dévie au centre du tube par rapport à la valeur réelle.

La figure ci-contre présente les profils radiaux (selon y) de la température moyenne turbulente \bar{T} , issue de l'éq. (IV.3.1), dans un tube, en fonction du nb de Prandtl moléculaire, pour $Re=10^5$.

On observe un résultat très général :

- plus Pr est grand, plus le profil de \bar{T} est plat et la résistance thermique (zone où $\text{grad} T \neq 0$) est limitée à la sous couche visqueuse ;
- plus Pr est petit, plus le profil de \bar{T} est courbe et la résistance thermique opère sur tout le canal.

\Rightarrow Cela vient de la diffusivité totale : $\alpha + \epsilon_T$ et de son importance relative ($\div \nu$) : $\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_T}{\nu}$. En effet, **Pr est constant dans toute la couche fluide alors que ϵ_T et $\frac{\epsilon_T}{\nu}$ sont nuls à la paroi et maximums au centre.**



IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.3- Transferts thermiques en régimes dynamique et thermique établis en tube

IV.3.1- Cas des nombres de Prandtl **$0,6 \leq Pr \leq 6$**

Bien que **les lois de paroi logarithmiques pour u^+ et T^+** (éqs. (III.2.1) et (IV.3.1)) ne soient pas valables dans la sous-couche visqueuse (qui est toutefois très mince : $y^+ < 5$) et s'éloignent de la valeur réelle au centre du tube, ces deux lois **sont suffisantes pour établir une bonne approximation des nombres de Stanton, $St = h / \rho C \bar{u}_m$, et de Nusselt, $Nu = St Re Pr$** . Ces deux équations permettent d'approcher les valeurs de \bar{u}_c et \bar{T}_c au centre du canal par :

$$u_c^+ = 2,5 \ln(y_c^+) + 5,5$$

$$T_c^+ = 2,2 \ln(y_c^+) + 13,39 Pr^{2/3} - 5,66$$

$$\text{où } y_c^+ = \frac{y_c u_\tau}{\nu} ; u_c^+ = \frac{\bar{u}_c}{u_\tau} ; T_c^+ = \frac{\rho C u_\tau (T_p - \bar{T}_c)}{q_p} ; u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} ; y = R - r$$

En éliminant $\ln(y_c^+)$ de ces deux équations et en substituant les définitions de u_c^+ et T_c^+ , on établit aisément (calcul laissé en exercice) que :

$$2,2 \frac{\bar{u}_c}{u_\tau} = 2,5 \frac{\rho C u_\tau (T_p - \bar{T}_c)}{q_p} + 26,25 - 33,475 Pr^{2/3} \quad (\text{IV.3.2})$$

Nous faisons l'hypothèse que $\bar{u}_c \approx \bar{u}_m$ et que $T_p - \bar{T}_c \approx T_p - \bar{T}_m$. Ceci est raisonnable pour des écoulements turbulents à grand Re et pour $Pr > 0,6$ car les profils de vitesse et de température sont quasiment plats : la valeur moyenne des champs est environ égale à la valeur au centre.

Par ailleurs, on a :

$$\sqrt{\frac{C_f}{2}} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho \bar{u}_m^2}} = \frac{u_\tau}{\bar{u}_m} \quad \left(\approx \frac{u_\tau}{\bar{u}_c} \right) \quad (\text{IV.3.3})$$

$$\frac{\sqrt{\frac{C_f}{2}}}{St} = \frac{\frac{u_\tau}{\bar{u}_m}}{\frac{h}{\rho C \bar{u}_m}} = \frac{\rho C u_\tau (T_p - \bar{T}_m)}{q_p} \quad \left(\approx \frac{\rho C u_\tau (T_p - \bar{T}_c)}{q_p} \right) \quad (\text{IV.3.4})$$

IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.3- Transferts thermiques en régimes dynamique et thermique établis en tube

IV.3.1- Cas des nombres de Prandtl **$0,6 \leq Pr \leq 6$**

Ainsi, en remplaçant (IV.3.3) et (IV.3.4) dans les membres de gauche et de droite de (IV.3.2) respectivement, on obtient :

$$\frac{2,2}{\sqrt{C_f/2}} = 2,5 \frac{\sqrt{C_f/2}}{\text{St}} + 26,25 - 33,475 Pr^{2/3}$$

En isolant le nombre de Stanton de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{St} &= \frac{C_f/2}{0,88 + 13,39(Pr^{2/3} - 0,78)\sqrt{C_f/2}} \\ \text{Nu} &= \frac{\text{Re} Pr C_f/2}{0,88 + 13,39(Pr^{2/3} - 0,78)\sqrt{C_f/2}} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.5})$$

Enfin, en substituant l'expression (III.2.11) de C_f dans l'eq. (IV.3.5), on obtient :

$$\text{Nu} = \frac{0,023 \text{ Re}^{0,8} Pr}{0,88 + 2,03(Pr^{2/3} - 0,78) \text{ Re}^{-0,1}} \quad (\text{IV.3.6})$$

Cette expression relativement compliquée peut être bien approchée pour les gaz, tels que **$0,5 \leq Pr \leq 1$** , par l'expression plus simple suivante :

$$\text{Nu} = 0,022 \text{ Re}^{0,8} Pr^{0,5} \quad (\text{IV.3.7})$$

IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.3- Transferts thermiques en régimes dynamique et thermique établis en tube

IV.3.2- Cas des grands nombres de Prandtl, **$Pr \geq 1$ à 10**

Les fluides de grands nombres de Prandtl moléculaire ($Pr \geq 10$) sont en général des liquides organiques (contenant du carbone) et des huiles. Ils sont traités séparément ici car ils posent au moins deux difficultés :

1- Ces fluides ont en général une viscosité qui varie fortement avec la température ce qui a pour conséquence une grande dispersion des corrélations sur les nombres de Nusselt.

2- Nous avons vu dans la figure de la diapo **48** le profil de température est presque plat, avec une couche limite très fine lorsque $Pr \geq 10$. Ainsi, dans cette gamme de Pr , la température varie très rapidement sur une faible épaisseur (dans $y^+ < 5$). En conséquence, les mesures de la diffusion thermique turbulente ϵ_T et du nombre de Prandtl turbulent $Pr_t = \epsilon_M / \epsilon_T$ sont difficiles à mener si proche de la paroi et, faute de valeurs précises, les modèles de turbulence sont difficiles à construire ou imprécis dans cette fine couche pariétale. De plus, bien que la diffusion thermique turbulente ϵ_T soit très petite pour $y^+ < 5$, son rôle est important sur le champ de température lorsque Pr est grand car le terme de diffusion totale est de la forme : $\frac{1}{Pr} + \frac{\epsilon_T}{\nu}$.

Il semble que la corrélation la meilleure pour ces fluides soit celle de **Gnielinski**, valable pour **$0,5 \leq Pr \leq 2000$ et pour $2300 \leq Re_D \leq 5 \cdot 10^6$** :

$$Nu = \frac{(Re - 1000) Pr C_f / 2}{1,0 + 12,7 (Pr^{2/3} - 1,0) \sqrt{C_f / 2}} \quad (IV.3.8)$$

Cette corrélation a un domaine d'application très large, aussi bien sur Pr que sur Re . D'autre part, elle a la même forme que l'éq. (IV.3.5) : elle contient donc une base théorique minimale ... c'est ce qui en fait sa force.

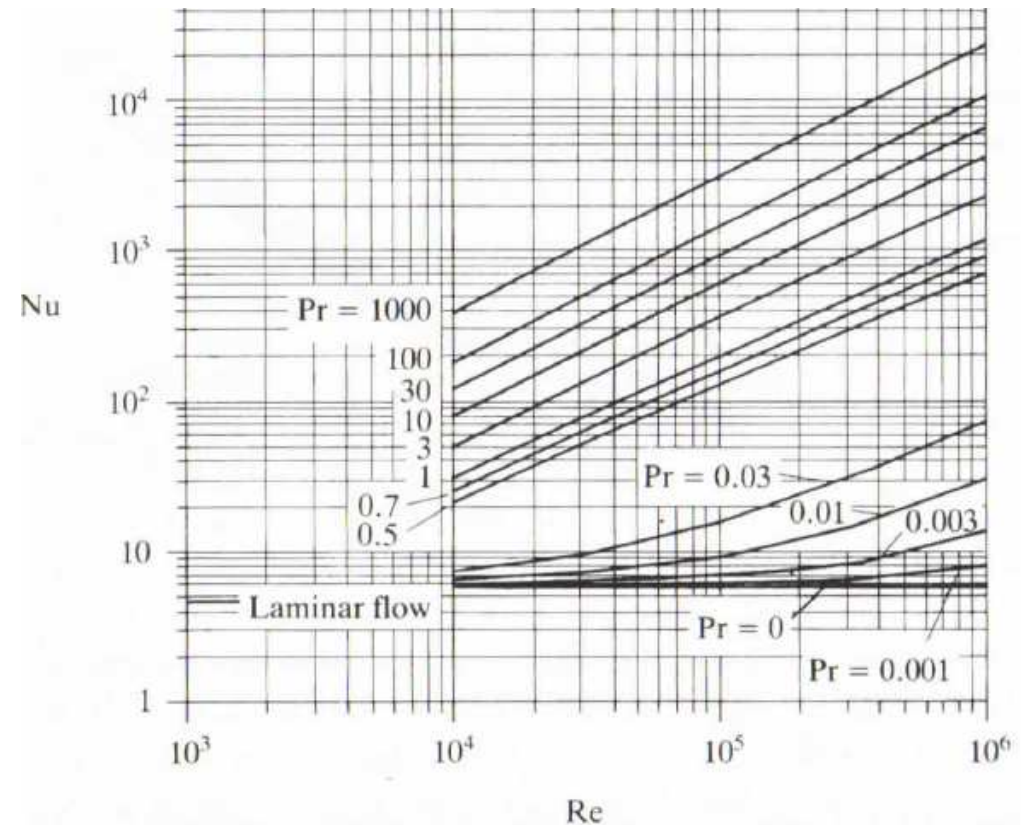
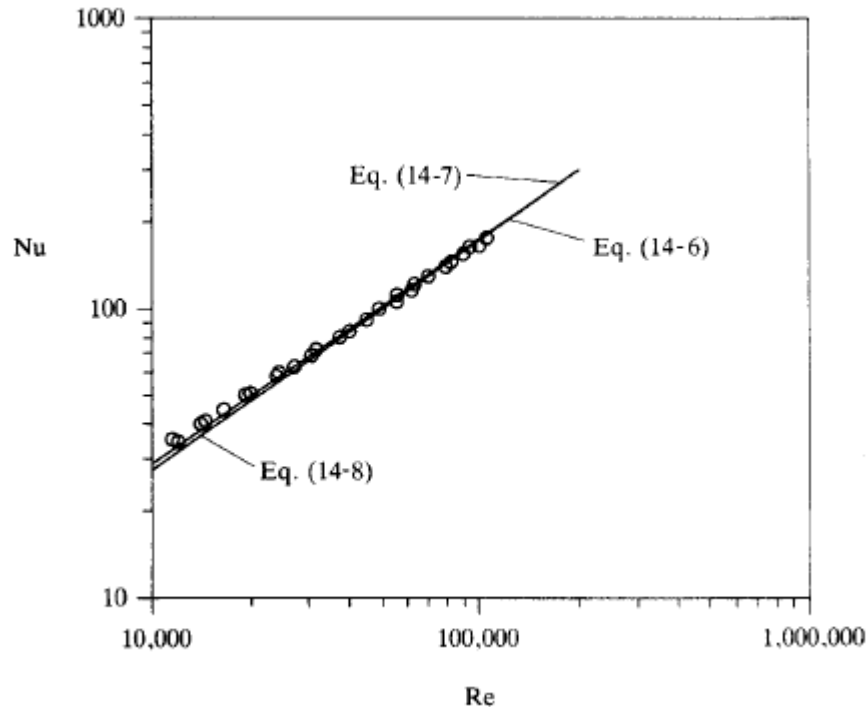
IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.3- Transferts thermiques en régimes dynamique et thermique établis en tube

IV.3.3- Représentation graphique des valeurs du nombre de Nusselt

Les 2 figures ci-dessous présentent le nombre de Nusselt en fonction de Pr et Re pour des écoulements dynamiq. et thermiq. établis, dans des tubes circulaires chauffés à flux constant.

La figure de gauche compare, pour $Pr=0,702$ (air), des résultats expérimentaux (cercles) avec les 3 corrélations précédentes encadrées en rouge (Eq. (14.6)=(IV.3.6) ; Eq. (14.7)=(IV.3.7) ; Eq. (14.8)=(IV.3.8)). La figure de droite est complètement générale. On voit que lorsque $Pr \rightarrow 0$, Nu tend vers une valeur constante, comme en régime laminaire, car la diffusivité thermique tend vers l'infini et domine la diffusion turbulente ϵ_T qui devient négligeable.



IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.3- Transferts thermiques en régimes dynamique et thermique établis en tube

IV.3.3- Autres corrélations du nombre de Nusselt

Les corrélations ci-dessous sont valables pour des tubes lisses et lorsque la différence de température entre la paroi et le fluide est faible. L'équation de **Dittus-Boelter** a tendance à surestimer Nu d'au moins 20% pour les gaz et à le sous-estimer de 10% pour Pr grand.

<i>Smooth tubes:</i>	$f = (0.790 \ln Re - 1.64)^{-2}$	$3000 < Re < 5 \times 10^6$
$Nu = 0.125 f Re Pr^{1/3}$	<i>Chilton–Colburn analogy</i>	<i>First Petukhov equation</i>
$f = 0.184 Re^{-0.2}$	$L/D \geq 60$	
$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3}$	$\left(\begin{array}{l} 0.7 \leq Pr \leq 160 \\ Re > 10,000 \end{array} \right)$	<i>Colburn equation</i>
$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$	<i>Dittus–Boelter equation</i>	même domaine de validité que l'équation de Colburn
$n = 0.4 \text{ for heating and } 0.3 \text{ for cooling}$		

La corrélation de **Sieder et Tate** ci-dessous tient compte de la variation de la viscosité μ du fluide avec T. Toutes les propriétés physiques sont évaluées à la température moyenne du fluide dans la conduite ($T_m = (T_e + T_s)/2$), excepté la viscosité μ_s qui est évaluée à la température de la paroi T_p .

When the variation in properties is large due to a large temperature difference

$$Nu = 0.027 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad \left(\begin{array}{l} 0.7 \leq Pr \leq 17,600 \\ Re \geq 10,000 \end{array} \right) \quad L/D \geq 10$$

IV- Ecoulements **turbulents** internes : transferts de **chaleur**

IV.3- Transferts thermiques en régimes dynamique et thermique établis en tube

IV.3.3- Autres corrélations du nombre de Nusselt

Si $Pr \leq 0,7$, on utilisera les corrélations ci-dessous, en particulier pour les métaux liquides pour lesquels $Pr < 0,01$.

Dans les deux premières relations de Petukhov et de Gnielinski, $f = \lambda = 4C_f$ est le coefficient de perte de charge.

$$Nu = \frac{(f/8) Re Pr}{1.07 + 12.7(f/8)^{0.5} (Pr^{2/3} - 1)} \quad \left(\begin{array}{l} 0.5 \leq Pr \leq 2000 \\ 10^4 < Re < 5 \times 10^6 \end{array} \right) \quad \text{Second Petukhov equation}$$

$$Nu = \frac{(f/8)(Re - 1000) Pr}{1 + 12.7(f/8)^{0.5} (Pr^{2/3} - 1)} \quad \left(\begin{array}{l} 0.5 \leq Pr \leq 2000 \\ 3 \times 10^3 < Re < 5 \times 10^6 \end{array} \right) \quad \text{Gnielinski relation}$$

$$\text{Liquid metals, } T_s = \text{constant:} \quad Nu = 4.8 + 0.0156 Re^{0.85} Pr_s^{0.93}$$

$$\text{Liquid metals, } \dot{q}_s = \text{constant:} \quad Nu = 6.3 + 0.0167 Re^{0.85} Pr_s^{0.93}$$

$$(0.004 < Pr < 0.01) \quad 10^4 < Re < 10^6$$

Rappel : Pour toutes les corrélations de Nu ci-dessus, le mode de chauffage sur la paroi du tube (flux ou température imposés) n'influence pas la valeur de Nu, sauf pour $Pr < 0,01$.

ATTENTION : il faut toujours **bien vérifier le domaine de validité des corrélations** quand vous les appliquez. En général, on doit vérifier des contraintes qui portent sur le rapport de forme **L/D** de la conduite et sur les valeurs de **Re** et de **Pr**.