Линал

Сборник задач по алгебре
под ред. А. И. Кострикина
часть I, 2007 г.

Матрицы

$A = \{a_{ij}\}$ $\qquad$ $A - n \times m$

строки $\qquad$ столбцы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots \end{pmatrix}$$

Определитель есть только у квадратных матриц $(n \times n)$

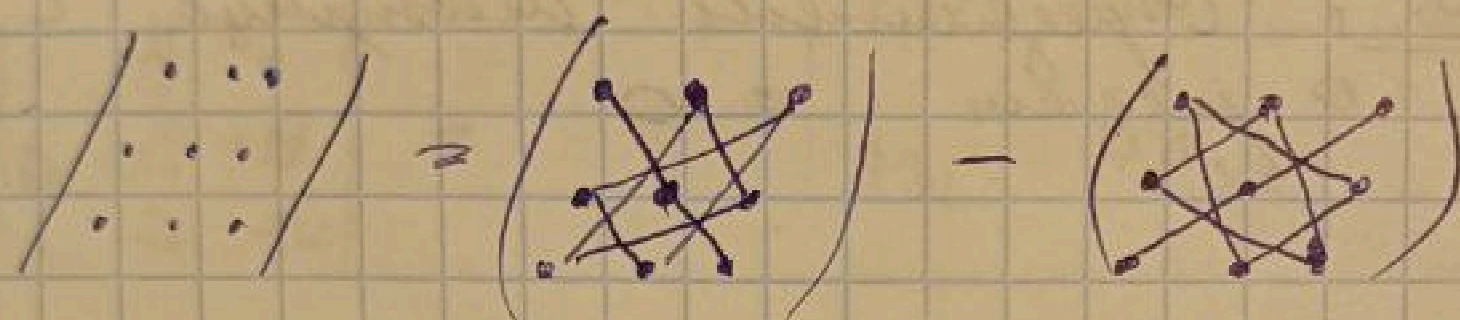
$A - 2\times 2 : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ по опр.: $\Delta = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (\cdot\,\cdot) - (\cdot\,\cdot)$$

A — 3×3: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ по опр. $\Delta =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



Свойства:

① Св-во: Равноправность строк и столбцов.
Или $\det A = \det A^T$, A^T — транс.
(далее строка / столбец = ряд)

② Св-во: Определитель меняет знак при перестановке 2х паралл. рядов

③ Св-во: Определитель матрицы с 2-мя одинак. рядами равен нулю

④ Св-во: Общий множитель любого ряда можно вынести за определитель

Следствия:

① **Следств.:** Если все элементы какого-то ряда пропорциональны элементам другого ряда, то $\Delta = 0$

② **Следств.:** Определитель матрицы с 0 рядом $= 0$

⑤ **Свойство:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

⑥ **Свойство:** Определитель не изменится, если к некоторому ряду прибавить другой, умнож. на число:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Найти определитель матриц:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -9 & -19 \\ 0 & -7 & -20 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -9 & -19 \\ -7 & -20 \end{vmatrix} =$

$= -9 \cdot (-20) - 19 \cdot 7 =$

$= 180 - 133 = 47$

1) **Свойство**: Разложение определителя по строке (столбцу):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

M_{ij} — минор соотв. a_{ij} — это определитель матрицы получ. из A вычеркиванием i строки и j столбца

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2

$$\begin{vmatrix}6&3&0\\4&1&-3\\-2&-3&2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}3&3&0\\4&1&-3\\-2&-3&2\end{vmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix}1&1&0\\4&1&-3\\-2&-3&2\end{vmatrix} = \cancel{6\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&-3\\0&-2&2\end{vmatrix}} =$$

$$= 6\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&-3\\-1&-2&2\end{vmatrix} = 6\cdot(-8) = -48$$

№2

$$\begin{vmatrix}6&3&0\\4&1&-3\\-2&-3&2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}3&3&0\\2&1&-3\\-1&-3&2\end{vmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&-3\\-1&-3&2\end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&-3\\-1&-3&2\end{vmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&-3\\0&-3&-1\end{vmatrix} = 6\cdot(1\cdot(-9) +$$

$$+ (-1)\cdot(-1) + 0) = 6\cdot(-8) = -48$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij}$

$M_{ij} = \begin{vmatrix} \text{—} a_{ij} \text{—} \end{vmatrix}$ не берём элементы из одина с a_{ij} строк и столбцов

№3

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-1 \cdot 13 + 0 + 2 \cdot (-4)) =$$

$$= 4 \cdot (-13 - 8) = 84$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 13 & 12 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 13 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 13 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-1 \cdot 11 + 0 + 0) = -44$$

N4

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&1&1\\x-y&y&z\\x^2-y^2&y^2&z^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&1\\x-y&y-z&z\\x^2-y^2&y^2-z^2&z^2\end{vmatrix} =$$

$$= (x-y)\cdot(-1)^3\cdot(z^2-y^2) + (x^2-y^2)\cdot(z-y) =$$

$$= (y-x)(z^2-y^2) + (z-y)(x^2-y^2) =$$

$$= (z-y)(x-y)(-1\cdot(z+y) + (x+y)) =$$

$$= (z-y)(x-y)(-z-y+x+y) =$$

$$= (z-y)(x-y)(x-z)$$

N5

$+\cdot(-2)$ 2

$$\begin{vmatrix}4&1&2\\-1&2&3\\-2&5&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&1&0\\-7&2&-1\\-4&3&-5\end{vmatrix} =$$

$+\cdot(-2)$ 1

$$= (-7)\cdot(-1)^3\cdot(1\cdot(-5)-0)\cdot(-4)\cdot1\cdot(-1-0) =$$

$$= 7\cdot(-5)+4 = -31$$

Метод Крамера решения СЛАУ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ — неизв.} \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{Ax = D}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=9 \end{cases} \text{ — несовм}$$

__Теорема__: Система (1) имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

Тогда это решение имеет вид:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

A_i — матрица A, в которой i-ый столбец заменён на D.

$$A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

①

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -10 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$+\cdot(-2)$

$$= 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 + 30) = -29$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ -15 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$+\cdot(-5)$

$$= 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 16 & 3 \\ -15 & -1 \end{vmatrix} = -1 (-16 + 45) =$$

$$= -1 (29) = -29$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} =$$ $+(\cdot 3)$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -27 & -6 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 (27 + 60) = -1 \cdot 87 = -87 = -3 \cdot (29)$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$\times(-2)$

$$= 5(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = -5(32-3) = -5(29)$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1(29)}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{3(-29)}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{5(-29)}{-29} = 5$$

Если $\det A = 0$, то может быть:

1) не быть решений → или → 2) быть бесконечное кол-во решений →

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases} \to x + y + z = 1 \to \begin{matrix} x = C_1 \\ y = C_2 \\ z = 1 - C_1 - C_2 \end{matrix}$$

Для однородной системы, т.е. $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

$\det A = 0 \to$ всегда беск. много решений

2

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 10 & 7 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ бесконечно много решений

$$x - y - z = x + 4y + 2z$$

$$-3z = 5y$$

$$y = -\frac{3}{5} z$$

$$x = y + z = -\frac{3}{5} z + z = \frac{2}{5} z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} c \\ -\frac{3}{5} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ — фундаментальное решение

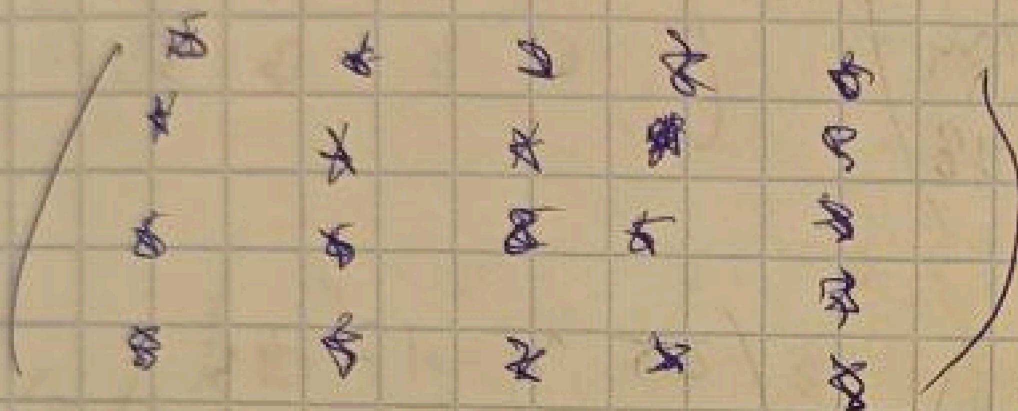
Ранг матрицы

$A - n \times m$

Ранг матрицы –
1) кол-во независимых столбцов
2) кол-во независимых строк
3) макс. порядок ненулевого минора

Поиск ранга матрицы → I. Метод окаймляющих миноров
II. Метод элементарных преобразований

I.



Минор k-ого порядка – определитель подматрицы $k \times k$

Окаймляющим для минора k-ого порядка называется минор, содержащий исходный +1 стр и 1 столб

II. Пусть нашли $M_k \neq 0$. Проверяем все окаймляющие $k+1$ порядка. Если они все $= 0$, то ранг исходной матрицы $A = k$

Если $\exists M_{k+1} \neq 0$, то процедура повторяется

5

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = 2 \neq 0$

$M_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$

$M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \boxed{\text{rank } A = 2}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} z \\ E \\ 6 \\ \end{matrix} \quad \text{rank } A = 3$$

5.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} + \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 7 & 2 \\ -3 & -5 & -5 & 0 \\ 6 & 10 & 10 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 7 & 2 \\ -3 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & \lambda & 7 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & \lambda & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 9 & \lambda+6 & 15 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 0 \\ 9 & \lambda+6 & 15 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & \lambda-9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda = 9 & \text{Rank } A = 2 \\ \lambda \neq 9 & \text{Rank } A = 3 \end{matrix}}$$

7.1 Найти ранг матрицы с помощью окаймления миноров и элементарных преобразований:

7.1 (a, g, k)
7.2 (в, г)
8.6 (g, e)

а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$M_1 = 8 \neq 0$

$M_2^1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 8 \cdot 7 - 1 \cdot 2 = 54 \neq 0$

$M_3^1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot (5 \cdot (-1)^2 \cdot (7 \cdot 1 - 2 \cdot 4) + 5(-1)^3 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)) =$

$= 4 \cdot (-5 + 5) = 0$

$M_3^2 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$M_3^3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = M_3^2 = 0$

$M_3^1 = M_3^2 = M_3^3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{Rank } A = 2$

g) $$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} =$$

Метод элемен

$\cdot(-2)$ $\quad$ $(-1,5)$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rank } A = 3$$

k) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = 1 \neq 0$

$M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

8.6. Метод Крамера:

а)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 16x_2 = 17; \end{cases}$$

$$\det A \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 32 + 1 = 33$$

$$\det A_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 17 & 16 \end{vmatrix} = 16 + 17 = 33$$

$$\det A_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 17 \end{vmatrix} = 34 - 1 = 33$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = 1$$

д)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot (0-0) +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^3 (4-0) + 1 \cdot (-1)^4 \cdot (0-0) = 4$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^2 \cdot (1-(-1)) +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^4 \cdot (1-1) = 12$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \left(1 \cdot (-1)^2 \cdot (0-1) + 1 \cdot (-1)^4 \cdot (3-0)\right) =$$

$$= 4 \cdot (-1 + 3) = 8$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(2 \cdot (-1)^2 (1 - (-1)) + 0 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(2 + 0 \right) = 4$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{4}{4} = 1$$

Семинар

Метод Гаусса

СЛАУ с матрицей A

$$\underbrace{A}_{\text{матрица}} \underbrace{X}_{\text{вектор неизвестных}} = \underbrace{b}_{\text{вектор правой части}}$$

Матрица A – вообще говоря $n \times m$ (прямоугольная)

1) A элем. преобр. строк приводим к ступенчатому виду
2) Выбираем базисный минор

↳ Переменные (элементы x) соотв. столбцам базисного минора, называются базисными, остальные называются свободными.

↳ 3) Свободные переменные полагаем $= c_i$ (const), а базисные выражаем через свободные.

— — — — — — — —

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2, x_3 — базисные

x_4, x_5 — свободные

$x_4 = c_1$

$x_5 = c_2$

x_3 выражаем через c_1 и c_2

x_2 выражаем через $x_3, x_4, x_5 \Rightarrow$ через c_1 и c_2

x_1 — " — c_1 и c_2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

базис СЛАУ] = ФСР (фундаментальная система решений)

Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \boxed{1} & -2 & -3 \end{array}$$

x_1 – базисная

x_2, x_3 – свободные

$$\left.\begin{matrix} x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{matrix}\right\} \text{произвольные константы}$$

$x_1 = 2x_2 + 3x_3 = 2c_1 + 3c_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\text{общее решение СЛАУ}} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ФСР СЛАУ: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
(т.к. нет свободных переменных)

→ единственное решение системы

Rank = 3 (кол-во перем. = 3
матрица невырожденная)

→ Матрица:
→ вырожденная $\det A = 0$
→ невырожденная $\det A \neq 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_4 = c_1$,
$x_5 = c_2$,
$x_6 = c_3$

$x_3 = -c_1$
$x_2 = c_1 - c_3$
$x_1 = c_1 - c_2$

ФСР

$x_4 = c_1, \quad x_5 = c_2, \quad x_6 = c_3$

$x_1 = c_1 - c_2$

$x_2 = c_1 - c_3$

$x_3 = -c_1$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$ Нет решений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 5 \end{matrix} & & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$x_3 = c_1$

$x_4 = c_2$

$x_5 = c_3$

$x_1 = 1$

$$x_2 = \frac{-1 - 3c_1 - 4c_2 - 5c_3}{2}$$

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 - 3c_1 - 4c_2 - 5c_3}{2} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cdot 0 \\ -\frac{3}{2} c_1 \\ 1 c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \cdot 0 \\ -2 c_2 \\ 0 \cdot c_2 \\ 1 \cdot c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \cdot 0 \\ -\frac{5}{2} c_3 \\ 0 \cdot c_3 \\ 0 \\ 1 \cdot c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

8.4 Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

а)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -5 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 4 & -24 & -20 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -48 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$0 + 0 + 0 + 30 \cdot x_4 = 0$

$x_4 = 0$

$-48 x_3 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = 0$

$x_1 = 0$

Метод Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

1. Посокращать матрицу
2. Подобрать базисный минор

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0}
\end{pmatrix}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

$\boxed{\text{Rank} = 3}$

~~$x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$~~

~~$x_1 + 0 + x_3 + 0 + c_2 + 0 = 0$~~

~~$x_1 =$~~

$x_4 = c_1,$

$x_5 = c_2,$

$x_6 = c_3$

$x_1 = -c_1 + c_3 - c_2$

$x_2 = c_1 - c_3$

$x_3 = -c_1$