Повторение.

Несобственные интегралы

I род

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\ ; \quad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx\ ; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

II род

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — особенность в точке a и/или b и/или на промежутке между a и b

$\Downarrow$

тогда разделим интеграл по этой точке на два интеграла

2337 $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$ → интеграл сходится, т.к. имеет конечный предел, равный π

$$\lim_{b \to -1+0} \int\limits_b^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b \to -1+0} \arcsin x \Big|_b^0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{a \to 1-0} \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \to 1-0} \arcsin x \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

2338 $$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x+2) + B(x-1) = 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A-1+A=0 \\ 2A-1=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1|\Big|_2^{+\infty} - \frac{1}{3}\ln|x+2|\Big|_2^{+\infty} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_2^b =$$

$$= 0 - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4} = \frac{2}{3}\ln 2$$

$$*1 \quad \int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x - \frac{1}{2x^2}\right]\Big|_1^b =$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^3}dx = \ln|x| + \int x^{-3}dx =$$

$$= \ln x + \frac{x^{-2}}{-2} + C = \ln x$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln b - \frac{1}{2b^2}\right] - \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \infty - 0 + \frac{1}{2} = \infty \rightarrow$$ интеграл расходится

$$*2 \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0}\left[\int x^{-\frac{1}{2}}dx\right]\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]\Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 - 0 = 2 \rightarrow$$ интеграл сходится

*3 $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]\Big|_0^b$

$= 0 - (-1) = 1$

---

*4 $\int\limits_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2}\,dx$

$$\frac{2+\cos x}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int\limits_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}dx = \left\{\begin{array}{l} t = x-1 \\ b = 3-1 \\ a = 1-1 \end{array}\right\} = \int\limits_0^2 \frac{dt}{t^2} \Rightarrow$$

$\int\limits_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ расходится (т.к. $a=0$ и $\alpha \geq 1$)

$\Downarrow$

$\int\limits_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2}dx$ также расходится

(по признаку сравнения

$0 < f(x) \leq g(x)$)

---

*5 $\int\limits_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+2\sqrt{x}}dx$; $\sin\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ $(\sin y \underset{y\to 0}{\sim} y)$; $\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+2\sqrt{x}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{2+2\sqrt{x}} = \frac{1}{x(2+2\sqrt{x})} \sim \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{3/2}}$

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{2x^{3/2}}dx$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+2\sqrt{x}}dx$ также сходится

Формулы тригонометрии

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$tg^2 x = \dfrac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$1 + tg^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, k, l

$1 + ctg^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t}$, $t \neq \pi k$

$tg\,t \cdot ctg\,t = 1$, $t \neq \pi l$

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos(x - t)$, где $\cos t = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

$tg(x+y) = \dfrac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \cdot tg\,y}$

$tg(x-y) = \dfrac{tg\,x - tg\,y}{1 + tg\,x \cdot tg\,y}$

Таблица интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

Несобственные интегралы

№2337, 2340, 2343, 2359, 2369, 2371, 2361,
2367, 2378, 2368, 2373

№2337, 2338 ХI-5 в тетради

№2340 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Rightarrow \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1$$

$$Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C=1$$

$$Ax^2+Bx^2-Ax+Bx+Cx+A+C=1$$

$$x^2(A+B)+x(-A+B+C)+(A+C)=1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B+C=0 \\ A=B+C \\ B+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-4C+C=0 \\ A=B+C \\ B=1-2C \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=\frac{2}{3} \\ A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}; \quad \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

$$\int \frac{1}{1+x^3}dx = \int \frac{1}{3(x+1)}dx + \int \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x+2}{x^2-x+1}\,dx = \dots +$$

$$+ \frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-x+1}\,dx = \dots + \frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{2}(2x-1-3)}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \dots + \frac{1}{3}\int \frac{-\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}(-3)}{x^2-x+1}\,dx = \dots +$$

$$+ \frac{1}{3}\int -\frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \dots + \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$\boxed{\begin{array}{l} dt = t'dx \\ dx = \frac{1}{t'}dt \end{array}}$

$$\left\{\begin{array}{l} t = x^2-x+1 \\ dx = \frac{1}{2x-1}\,dt \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{\cancel{2x-1}}{t}\cdot\frac{1}{\cancel{2x-1}}\,dt + \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \dots + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}\,dx = \dots + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} t = x-\frac{1}{2} \\ dt = dx \end{array}\right\}$$

$$= \dots + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + C$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\left(2\ln|x+1| - \ln|x^2-x+1|\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{6} \ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_0^b =$$

$$= \left(\ln\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{(b+1)^2}{b^2-b+1}\right) + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2b-1}{\sqrt{3}}\right) -$$

$$-\left(\ln\left(\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \left(0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{2b-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) - \left(0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to0}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(+\infty) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

2343 $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \left\{\begin{array}{l} t = x^5 \\ dx = \frac{1}{5x^4}dt\end{array}\right\} =$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{dt}{5t\sqrt{1+t+t^2}}$$

$$\frac{1}{5t\sqrt{1+t+t^2}} = \frac{A}{5t} + \frac{B}{\sqrt{1+t+t^2}}$$

$$A\sqrt{1+t+t^2} + B(5t) = 1$$

$$\left(A\sqrt{1+t+t^2}\right)^2 = \left(1 - B(5t)\right)^2$$

$$A^2(1+t+t^2) = 1 - B\,10t + B^2\,25t^2$$

$$1\cdot A^2 + t(A^2+10B) + t^2(A^2-25B^2) = 1$$

2359 $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ = Исследовать сходимость:

$= \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}$; $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$, $\alpha > 1$, т.к. $\alpha = \frac{5}{3}$

$\Updownarrow$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}$ также сходится (т.к. $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} \to 1$)

2369 $f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

При $x \to 0$:

$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p \cdot 1} \Rightarrow p < 1$ – интервал сходится

При $x \to \frac{\pi}{2}$:

$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{1 \cdot (x-\frac{\pi}{2})^q} \Rightarrow q < 1$ – интервал сходится

$\frac{2}{x}$

Т.е. при $p<1$ и $q<1$ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ сходится

$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha > 1 \text{ – сходится} \\ \alpha \leq 1 \text{ – расходится} \end{cases}$ $a \neq 0$

$\int\limits_0^{a} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha < 1 \text{ – сходится} \\ \alpha \geq 1 \text{ – расходится} \end{cases}$

2371 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$

При $p = q$:

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^p} \Rightarrow \begin{cases} p < 1 \Rightarrow x \to 0 \\ p \geq 1 \Rightarrow x \to +\infty \end{cases}$

При $p < q$:

$x \to 0$:

$\frac{1}{x^p + x^q} = \frac{1}{x^p(1 + x^{q-p})} \sim \frac{1}{x^p} \Rightarrow p < 1$

$x \to \infty$:

$f(x) \sim g(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} \frac{\frac{1}{x^p + x^q}}{\frac{1}{x^q}} = \frac{x^q}{x^q + x^p} \to 1$

При $p < q$: $p < 1$, $q > 1$ — инт. сход.

При $p > q$: $p > 1$, $q < 1$ — инт. сход.

$\max(p, q) > 1$

$\min(p, q) < 1$

2361 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$

2367 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx \quad (n \geq 0)$

$f(x) = \cos ax$

$F(x) = \frac{1}{a}\sin ax$ – огранич.

$g(x) = \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ – монотон.

$F(x)$ огранич. и $g(x)$ монотонна $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx$ сходится по признаку Дирихле

2378 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

<=> особой точкой 0 не является, можно 0 заменить на a:

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$; ⟶ если есть абсолютная сходимость, то и условная тоже будет

Проверим:

$\int_a^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

$|\sin x| \geq \sin^2 x$

$\Leftarrow$

$\frac{|\sin x|}{x}$ – расход.

$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ сходится по признаку Дирихле

$f(x) = \sin x$

$F(\cancel{x}) = |\cos x| < 1$

$g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

Числовые ряды

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ — числовой ряд

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{n \text{ слагаемых}}$ — частичная сумма ряда

Если $\exists$ конечный $\lim_{n \to \infty} S_n = S \Leftrightarrow$ ряд сходится

Критерий Коши сходимости ряда:

ряд (1) сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$:

$\forall n > N, \; \forall p > 0: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

Необходимый признак сходимости:

$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ * необходимый, но не достаточный признак

2550 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$a_n = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}$; $A(3n+1) + B(3n-2) = 1$

$\begin{cases} 3A + 3B = 0 \Rightarrow A = -B \\ A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 3A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\rightarrow a_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n-2} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3n+1};$

$$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \overset{\to 0}{\left(\frac{1}{3n+1}\right)}\right) = \frac{1}{3}$$

<u>Признаки сравнения</u>

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k; \quad a_k, b_k \geq 0, \quad \boxed{a_k \leq b_k}$

$\rightarrow$ Если $\sum a_k$ расход., то $\sum b_k$ расход.

$\rightarrow$ Если $\sum b_k$ сход., то $\sum a_k$ сход.

Пример:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ – сход. $|q| < 1$

расход. $|q| > 1$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ – сход. $\alpha > 1$

расход. $\alpha \leq 1$

Если $\underset{k\to\infty}{a_k \sim b_k}$, то $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сход.

сход. и расход. одновременно.

$\frac{2}{x}$

2552 $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$$

$$\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1} +$$
$$+ \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} +$$
$$+ \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3} + \dots$$

остаётся:

$$\cancel{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2} +$$
$$+ \sqrt{n+1} - \cancel{2\sqrt{n}} + \sqrt{n-1} +$$
$$+ \sqrt{n-1} + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$S_n = -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$$

$$S_n = -\sqrt{2} + 1 + 0 = -\sqrt{2} + 1$$

2561 $$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

Общий член стремится к $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ нарушен необходимый признак сходимости:

$$a_n = \frac{n}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$$ (необходимый признак нарушен $\Rightarrow$ ряд расходится)

2564 $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 5}} + \ldots +$

$+ \dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} \to \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

гармонический ряд расходится => => исходный ряд также расходится

2547 $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right) + \ldots$

$$a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{Для геом. прогрессии}}$$

$$S_n = S_n^1 + S_n^2$$

$$S_n^1 = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$S_n^2 = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2}$ – ряд сходится;

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3}$ – ряд сходится; => ряд с $a_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}$ также сходится

$\dfrac{2}{x}$

Через что доказывать сходимость:

→ Признак сравнения

→ Признак Даламбера:

$a_n > 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \left[\begin{array}{l} q<1 \text{ — ряд сходится} \\ q>1 \text{ — ряд расходится} \end{array}\right.$

→ Признак Коши:

$a_n \geqslant 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad \left[\begin{array}{l} q<1 \text{ — ряд сходится} \\ q>1 \text{ — ряд расходится} \end{array}\right.$

→ Интегральный признак:

Пусть $f(x)$, $x>0$ — неотр. и невозраст.,
тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно

2548 $\quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$

По п. Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)-1)\,2^n}{2^{n+1}\,(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

$a_n = \frac{2n-1}{2^n}$

$q = \frac{1}{2} \Rightarrow q<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд сходится

2573 Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots \quad (|a_n| < 10)$$

~~Критерий Коши:~~

ряд сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N, \ p > 0:$

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{10^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{10^n} + \ldots \frac{1}{10^{n+p-1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10^n}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{p}\right)}{\frac{9}{10}} < \frac{1}{9 \cdot 10^{n-1}} < \varepsilon$$

$$1 = \varepsilon \cdot 9 \cdot 10^{N-1}$$

$$N = \log_{10}\left(\frac{1}{9\varepsilon}\right) + 1$$

2575.2

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(1 - \frac{1}{(n+p)^2}\right)}{1 - \frac{1}{n+1}} <$$

$$< \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{N^2} \Rightarrow$$

$$\cancel{1 = \varepsilon \cdot N(N+1); \ \varepsilon N^2 + \varepsilon N - 1 = 0} \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\cancel{N^2 + N - \frac{1}{\varepsilon} = 0}$$

Функциональные ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ — функциональный ряд ; $x \in R$

при каждом фиксированном $x \to$ числовой ряд

Множество x таких, что ряд сходится называется областью сходимости

Определить область абсолютной и условной сходимости:

27/8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

Абсолютная сходимость:

→ по Даламберу проверим сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n}\right|} = \left|\cancel{\frac{n}{n+2}} \cdot \frac{x}{2x+1}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x}{2x+1} < 1$$

$$-1 < \frac{x}{2x+1} \qquad \frac{x}{2x+1} < 1$$

$$0 < \frac{x+2x+1}{2x+1} \qquad \frac{x-2x-1}{2x+1} < 0$$

$$\frac{3x+1}{2x+1} > 0 \qquad \frac{-x-1}{2x+1} < 0 ; \frac{x+1}{2x+1} > 0$$

$+ \quad - \quad +$ ($-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$) $\qquad + \quad - \quad +$ (-1, $-\frac{1}{2}$)

$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty) \qquad x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$

$\Rightarrow$ При $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$

сходимость будет абсолютная.

При $x \in (-1; -\frac{1}{3})$ проверим условную сходимость, получим по п. Даламбера, что

$q = \frac{x}{2x+1}$; $\Rightarrow \frac{x}{2x+1} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$ будет условная сходимость.

Ответ: абс. сход.: $(-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$;
усл. сход.: $(-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$

<u>2721</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$

Абсолютная сходимость (по п. Коши)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{\frac{2^n \sin^n x}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2\sin x}{n^{\frac{2}{n}}} \right| = |2\sin x|$$

$q = |2\sin x|$, по п. Коши при $q < 1$ ряд сходится

$|2\sin x| < 1$

$-1 < 2\sin x < 1$

$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < \sin x$ $\qquad$ $\sin x < \frac{1}{2}$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) < \arcsin(\sin x)$

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x$

$\arcsin(\sin x) < \arcsin(\frac{1}{2})$

$x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

При $x \in (-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n)$ сходимость абсолютная;

при $2\sin x < 1$:

$x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$\frac{2}{x}$

2774 С помощью т. Вейерштрасса доказать равномерную сходимость

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$: последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится при $n\to\infty$, если:

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \ \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N(\varepsilon)$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(поточечная сходимость = обычная сх.)

Теорема /она же признак/ Вейерштрасса /она же мажорантный признак сходимости/

Если для функционального ряда $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)}_{\text{ряд (1)}}$ $\exists$ сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$; $|a_n(x)| \le C_n \ \forall n$

Тогда ряд (1) — ряд, сходящийся абсолютно равномерно

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < \infty$

$\frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}$ — ряд сходится т.к. $\alpha > 1$ $(2>1)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса исходный ряд также сходится б) $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2 < x < +\infty$

Учитывая признак Лейбница, ... имеем:

$\frac{1}{x+2^n} \leq \frac{1}{-2+2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$1>$ сход. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходится ряд так-же сход.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leq x < +\infty$

$\frac{x}{1+n^4x^2} \leq \frac{x}{n^4x^2} = \frac{1}{n^4x} \leq \frac{1}{n^4}$, $\alpha > 1$ $(\alpha = 4)$

при $x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow \frac{1}{n^4}$ (сходится) $\Rightarrow$ сходится ряд также сходится (по признаку Абеля)

При $x = 0$:

$S_n = 0$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $|x| < +\infty$

$\frac{2}{x}$

$\frac{n}{1+n^2} = \frac{1}{\frac{1}{n}+n} \geq \frac{1}{n+1}$ расходится (гарм. ряд)

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$

$0 \leq x^n \leq 2^n$

$0 \leq x^{-n} \leq 2^n$

$S \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$

$(x^n + x^{-n}) \leq 2^{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot 2 \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n!}\cdot\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} = 0 =$$

$0 < 1 \Rightarrow$

ряд сходится

Степенные ряды

2855 Разложить:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1+(-x))^{-2} = 1 + 2x + \frac{2\cdot 3}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad |x|<1$$

2860

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x}$$

$$A(1-x)(1+x) + B(1+x) + C(1-x)^2 = x$$

$$A(1-x^2) + B(1+x) + C(1-x)^2 = x$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+C=0 \\ B+A=1 \\ -C=A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-1 \\ B=2 \\ A=1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

r:

$$(1+(-x))^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(1+(-x))^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

J:

2901

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-t^2)^n}{n!} dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2x+1}}{2x+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

2904

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$

2306

$$x + \frac{x^3}{5} + \frac{x^5}{5}, \quad |x|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\,dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\,dt = \int_0^x \frac{-1}{t^2-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad +C$$

$\ldots x = \frac{\ldots}{n+1} + C$

$\int dx = x + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$

$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$

$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$

$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Интегралы

Неопределённые

1631 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x^2} dx =$

$= \int 1\, dx + \int -\frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = x - 2\ln|x| -$

$- \frac{1}{x} + C$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

1646 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx =$

$= \int (e^{2x} - e^x + 1)\, dx = 2e^{2x} - e^x + x + C$

1692 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \left| \begin{array}{l} t = e^{-x} \\ dt = t'dx = -e^{-x}dx \\ dx = -\frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int -\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\cdot t} =$

$= \int -\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln|t+\sqrt{t^2+1}| + C = -\ln\left|\frac{1}{e^x} + \sqrt{\frac{1}{e^{2x}}+1}\right| + C$

1655 $\int \sin^5 x \cos x\, dx = \int \sin^5 x\, d\sin x = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

1742 $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx =$

$= \left| \begin{array}{l} t = 2x \\ dt = t'dx = 2dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}x + \int \frac{\cos t}{4} dt = \frac{1}{2}x +$

$+ \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1792 $\int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq 1)$ $= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = u'dx = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^n dx \\ v = \int dv = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| =$

$$= (\ln x)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = (\ln x)\frac{x^{n+1}}{n+1} -$$

$$-\frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

1826 $\underbrace{\int \sin(\ln x)\,dx}_{I} = \left| \begin{array}{l} u = \sin(\ln x) \\ du = u'dx = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx \\ dv = dx \\ v = \int dv = x \end{array} \right| =$

$$= \sin(\ln x)\cdot x - \int x\,\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx = \sin(\ln x)\cdot x -$$

$$-\int \cos(\ln x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \\ du = u'dx = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx \\ dv = dx \\ v = \int dv = x \end{array} \right| =$$

$$= \sin(\ln x)\cdot x - \left(\cos(\ln x)\cdot x - \int -x\cdot\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx\right) =$$

$$= \sin(\ln x)\cdot x - \cos(\ln x)\cdot x - \int \sin(\ln x)\,dx$$

$\Downarrow$

$$I = \sin(\ln x)\,x - \cos(\ln x)\,x - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))}{2}$$

1808 $\int x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln\frac{1+x}{1-x} \\ \cancel{du = u'dx = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \ln\frac{1+x}{1-x} =} \\ \cancel{= \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^2}\ln\frac{1+x}{1-x}} = \\ dv = x\,dx \\ v = \int dv = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$

$\cancel{= \left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{x}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx =}$

$= \left| \begin{array}{l} u = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln 1+x - \ln 1-x \\ du = u'dx = \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx \\ dv = x\,dx \\ v = \int dv = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = (\ln 1+x - \ln 1-x)\frac{x^2}{2} -$

$- \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = \ldots - \int \frac{x^2 - x^3 + x^2 + x^3}{2(1-x^2)}\,dx =$

$= \ldots - \int \frac{2x^2}{2(1-x^2)}\,dx = \ldots + \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\,dx = \ldots + \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx =$

$= \ldots + \int dx - \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln 1+x - \ln 1-x) + x -$

$- \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}(x^2-1) + x + C$

1985

17 июня

13

880 $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} =$

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x+x^2}$$

По методу вычеркивания,

$$A = \frac{1}{(1+x)(1+x+x^2)}\Big|_{x=0} = 1$$

$$B = \frac{1}{x(1+x+x^2)}\Big|_{x=-1} = -1$$

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1(1+x)(1+x+x^2) - 1(x^2+x+1)x + (Cx+D)(x^2+x)}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$1 = (x^2+x+1)(x+1) - (x^2+x+1)x + (Cx+D)(x^2+x)$$

$C = 0$

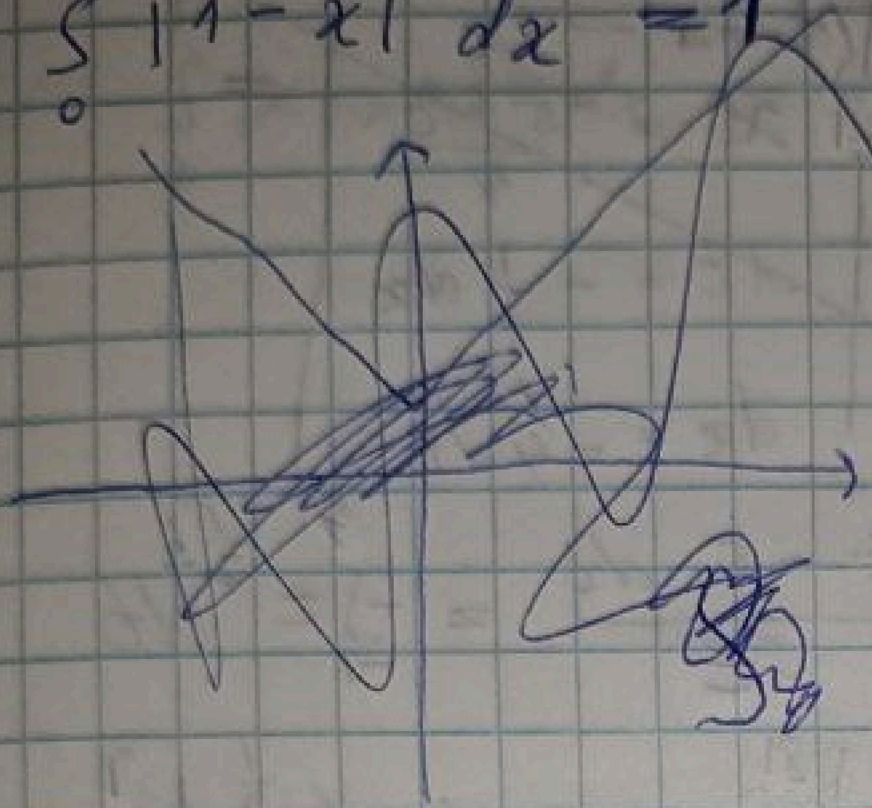
$D = -1$

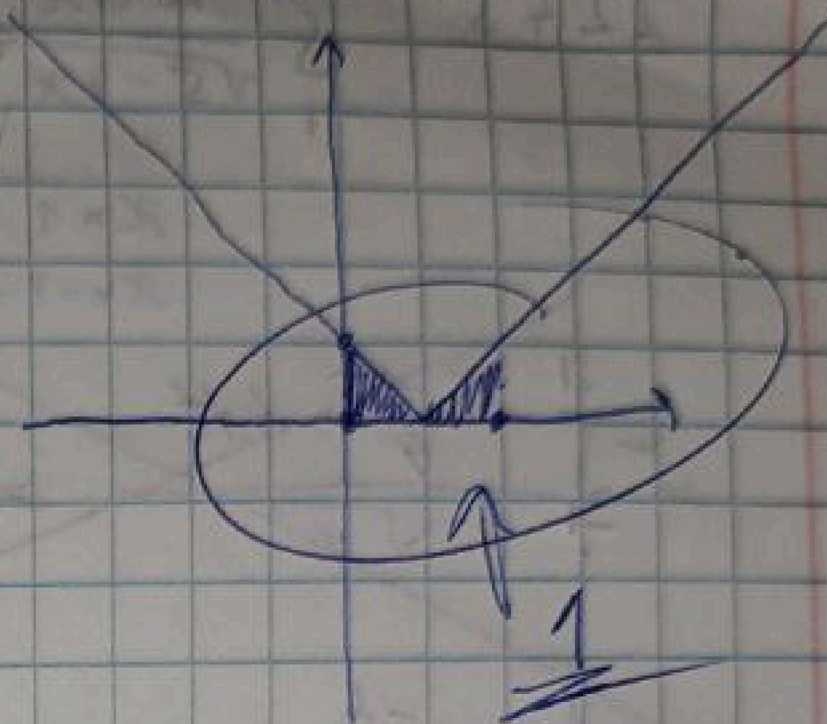
$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-1}{1+x}dx + \int \frac{-1}{1+x+x^2}dx =$$

$= \ln|x| - \ln|x+1| + \ldots =$

2131 р.   33829 р

2211 $\int_0^2 |1-x|\,dx = 1$ Определенные





2246 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t \\ x=0 \to t=0 \\ x=a \to t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin t)^2 \cdot$

$\cos 2a =$

$\cdot (a\cos t)(a\cos t\,dt) = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cos t)^2\,dt =$

$= \frac{a^4}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt =$

2245 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}} = \left| \begin{array}{l} t=5-4x \\ x = \frac{5-t}{4} \\ dt = -\frac{1}{4}dx \\ dx = -4dt \end{array} \right| =$

$x=1 \Rightarrow t=1$

$x=-1 \Rightarrow t=9$

$$= -\int_1^9 \frac{\frac{5-t}{4}\,4dt}{\sqrt{t}} = -\int_1^9 \frac{t-5}{\sqrt{t}}\,dt = -\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt +$$

$$+ \int_1^9 5t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 + 10t^{\frac{1}{2}}\Big|_1^9 =$$

$$= -18 + \frac{2}{3} + 30 - 10 = 1\frac{1}{3}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{5-4x} \\ x = \frac{5-t^2}{4} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{5-4x}}dx \\ dx = \frac{\sqrt{5-4x}}{2}dt \\ x=-1 \Rightarrow t=3 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right| = \int_3^1 \frac{\frac{5-t^2}{4}\,\frac{t\,dt}{2}}{t} =$$

$$= \int_3^1 \frac{5-t^2}{8}\,dt = \frac{5}{8}x\Big|_3^1 - \frac{1}{8}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_3^1 =$$

$$= \frac{5}{8} - \frac{10}{8} - \frac{1}{24} + \frac{9}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{12-1}{24} = \frac{11}{24}$$

Несобственные

2338 $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x^2+x-2} =$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$A = \frac{1}{x+2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1}{x-1}\Big|_{x=-2} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_2^{b}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left(\ln x-1 - \ln x+2\right)\Big|_2^{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_2^{b} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2$$

2370 а $\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$ Если $n<0$, то 0 – особая точка; если $n>0$, то 1 – особая точка.

$\underline{x\to 0}$: $f(x) \sim \frac{1}{x^{-n}}$

$-n<1$ – сход. (при $n>1$)

$\underline{x \to 1}$: $\sqrt{1-x^4} = \sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}$;

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ сход.

$x \to b$ $\quad f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-b)^{\alpha}}\right)$

$\underline{2371}$ $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = \underbrace{\int_0^a \frac{dx}{x^p + x^q}}_{p<1 \text{ или } q<1} + \underbrace{\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}}_{p>1 \text{ или } q>1}$$

При $p = q$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^p}$$

$\Downarrow$

Интеграл сходится при $p > 1$, если $x \to \infty$, и при $p = 1$, если $x \to 0 \Rightarrow$ он расходится.

При $p < q$:

...

Абсолютная сходимость

2367 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx,\ n \ge 0.$

$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$ — ограничен

$\frac{1}{1+x^n} \to 0$ при $x \to \infty$

по признаку Дирихле исходный интеграл сходится условно при $n \in (0; +\infty)$;

абсолютно

$\int \frac{|\cos ax|}{1+x^n}\,dx \le \int \frac{1}{1+x^n}\,dx \le \int \frac{1}{x^n}\,dx$ — сход при $n \in (1, +\infty)$

2378 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ Указание: $|\sin x| \ge \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

2550 $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\dots$

$$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{1}{4\cdot 1}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$a_n=\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1}$$

$$A(3n+1)+B(3n-2)=1$$

$$3An+A+3Bn-2B=1$$

$$\begin{cases}3A+3B=0\\ A-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\ B=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^{\to 0}=\frac{1}{3}$$

8131 p. 3382

2546 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$

$S_1 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4^n}$ } $a_n = \frac{1}{4^n}$ $\quad S = S_1 + S_2$

$S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$S_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)}{2^{2n+1}}$; $a_n = -\frac{1}{2^{2n+1}}$

$S_1 = \frac{1\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$; $S_2 = \frac{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{2n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}$

$S = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2548 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

~~$a_n = \frac{2n-1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}$~~ $\quad \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$S_n = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{2}{2^3}} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

S^* $\quad 3 \quad 0$

$S^* = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1$; $S_n = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} + 1 - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{2} S_n$

$\frac{1}{2} S_n = 1{,}5 \Rightarrow S_n = 3$

2584 $S_n = \frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \dots + \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(1+3n)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(-2+4n)}$

$$a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(1+3n)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(-2+4n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{4\cdot 7\cdot 10\cdots(1+3n)}\,(1+6n)}{\cancel{2\cdot 6\cdot 10\cdots(-2+4n)}\,(-2+8n)} \cdot \frac{\cancel{2\cdot 6\cdot 10\cdots(-2+4n)}}{\cancel{4\cdot 7\cdot 10\cdots(1+3n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+6n}{-2+8n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+6}{\frac{2}{n}+8} = \frac{3}{4}$$

Ряд сходится.

Функциональные ряды

27/8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n};$

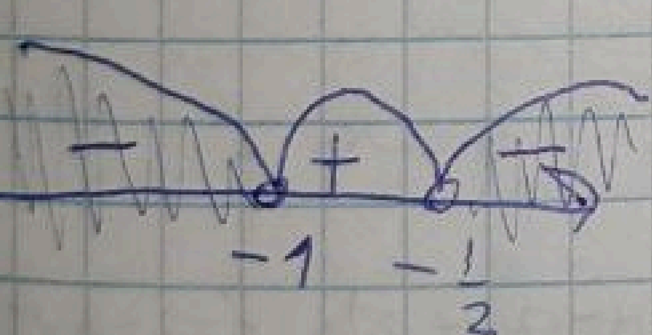
по Даламберу:

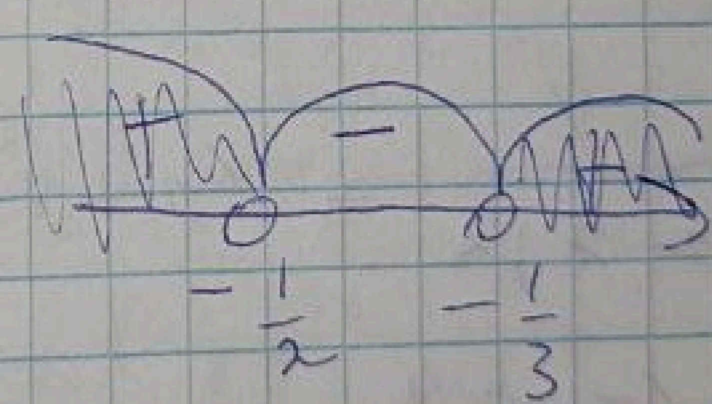
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n}\right|} = \left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$$

$$\frac{x}{2x+1} < 1 \quad и \quad \frac{x}{2x+1} > -1$$

$$\frac{x-2x-1}{2x+1} < 0 \qquad \frac{x+2x+1}{2x+1} > 0$$

$$\frac{-x-1}{2x+1} < 0 \qquad \frac{3x+1}{2x+1} > 0$$





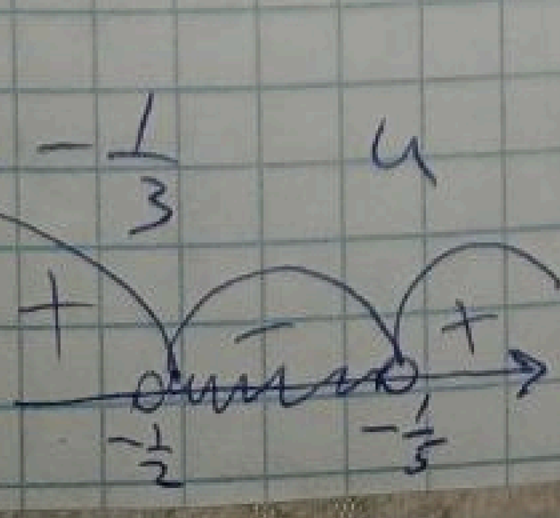
$$x \in \left(\left((-\infty;-1)\cup\left(-\tfrac{1}{2};+\infty\right)\right)\cap\left((-\infty;-\tfrac{1}{2})\cup\left(-\tfrac{1}{3};+\infty\right)\right)\right)$$

Абсолют. сход. при: $x \in \left((-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)\right)$

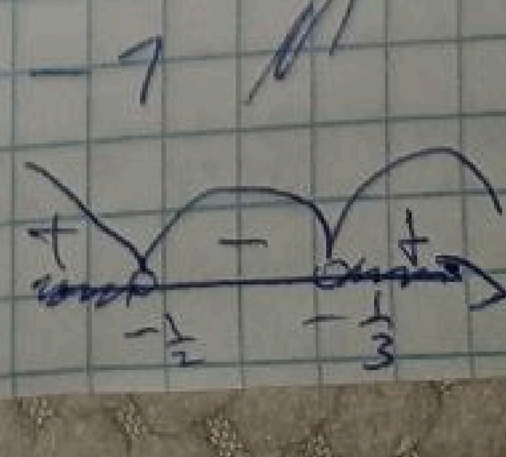
Условно сходит-ся на всей числовой прямой.

$$\frac{x}{2x+1} < -\frac{1}{3} \quad и \quad \frac{x}{2x+1} > -1$$

$$\frac{5x+1}{3(2x+1)} < 0$$



$$\frac{3x+1}{2x+1} > 0$$



Ряд Тейлора. Основные разложения.

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$

$(-\infty < x < +\infty)$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots +$

$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$

$(-1 < x \le 1)$

2855

$\frac{1}{(1-x)^2} = (1+(-x))^{-2} = 1 + 2x +$

$+ \frac{-2(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \dots + \frac{-2(-2-1)\dots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n =$

$= 1 + 2x + 3x^2 + \dots$

$\underline{2804}$ $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$

...

$\underline{2801}$ $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}\,dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^x \frac{(-t^2)^n}{n!}\,dt =$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^x t^{2n}\,dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

<u>Ряды Фурье</u> Если $f(x)$ имеет период $2l$, то можно представить в виде ряда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Если $f(x)$ – чёт. на $[-l, l]$, то

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \ldots;\quad b_n = 0.$$

Если $f(x)$ – нечёт. на $[-l, l]$, то

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \ldots;\quad a_n = 0.$$

В комп. форме:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{l}}, \text{ где } c_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{\pi n x}{l}}\,dx$$

Сочи 27 июл.
3 авг.

<u>2358</u> $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1}$

$$\frac{x^2}{x^2(x^2-1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x^2-1+\frac{1}{x^2}} \sim \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{x^2} \to 0$

сход.

1983... 1 п. 2382...

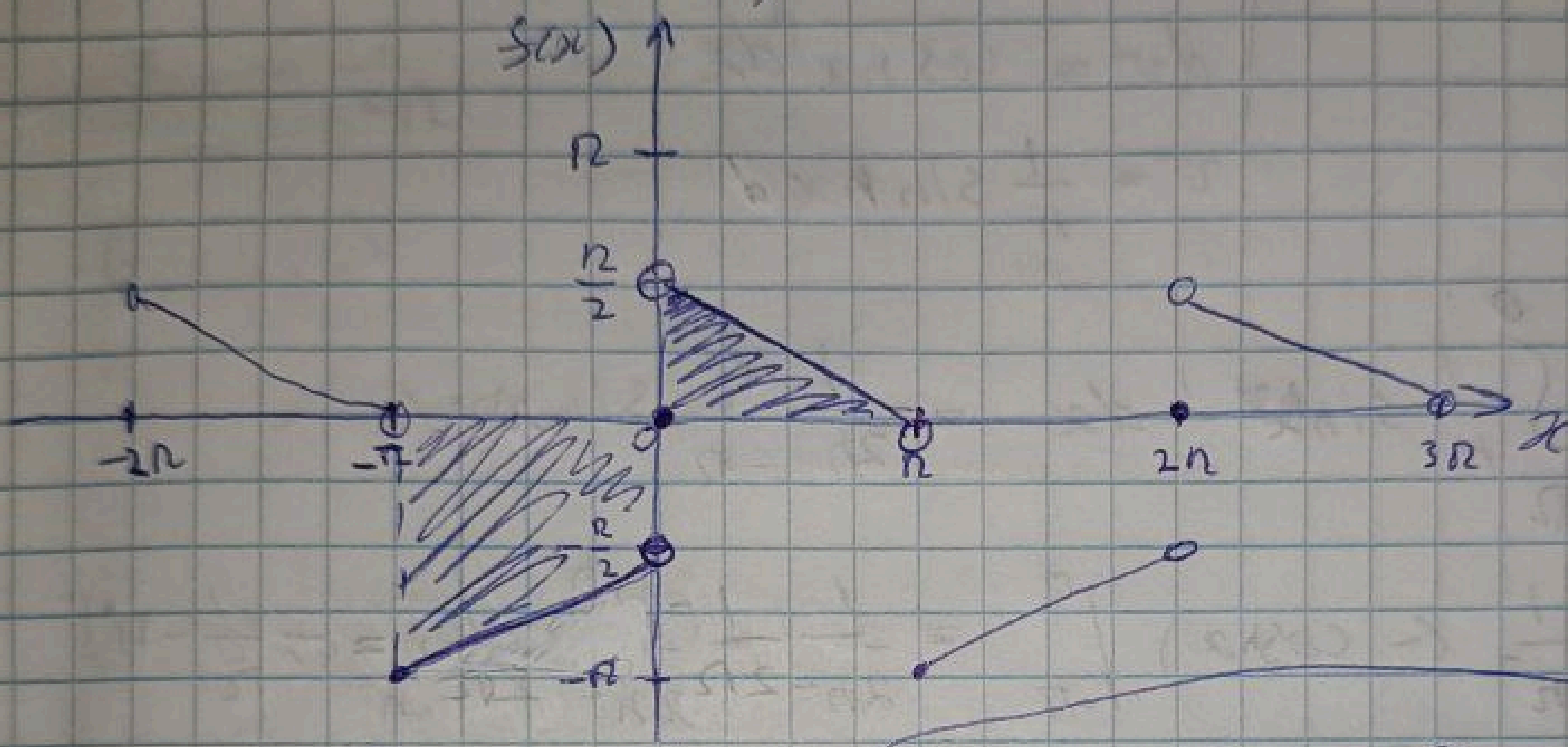
Разложение в ряд Фурье функции

чет. $f(x) = f(-x)$

нечет. $f(-x) = -f(x)$

Период 2π

(5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\pi + x}{2}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi \end{cases}$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi + x}{2}\,dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx\right) = -\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{\pi} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\pi}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{\int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi + x}{2}\cos\frac{\pi n x}{\pi}\,dx}_{a^*} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos\frac{\pi n x}{\pi}\,dx}_{a^{**}}\Bigg) = \frac{1}{\pi}\left(a^* + a^{**}\right)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$a^{*} = \int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi + x}{2} \cos nx \, dx =$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
$du = u'dx$
$v = \int dv$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \frac{-\pi + x}{2} \\ du = \frac{1}{2} dx \\ dv = \cos nx \, dx \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{-\pi + x}{2} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} -$$

$$- \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{n} \sin nx \frac{1}{2} dx = -\frac{1}{2n} \int_{-\pi}^{0} \sin nx \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2n^2} (-\cos nx) \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2n^2} - \frac{(-1)^n}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} (1 - (-1)^n)$$

$$a^{**} = \int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \frac{\pi - x}{2} \\ du = -\frac{1}{2} x \\ dv = \cos nx \, dx \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{\pi - x}{2} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} -$$

$$- \int_{0}^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx \left(-\frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2n} \int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2n^2} \cos nx \Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{2n^2} (-1)^n - \frac{1}{2n^2} =$$

$$= \frac{1}{2n^2} \left(-(-1)^n - 1 \right)$$

S 7

28829 р.

1 р.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n^2}(1-(-1)^n) + \frac{1}{2n^2}(-(-1)^n - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi}\left(1-(-1)^n - (-1)^n - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}(-1)^n$$

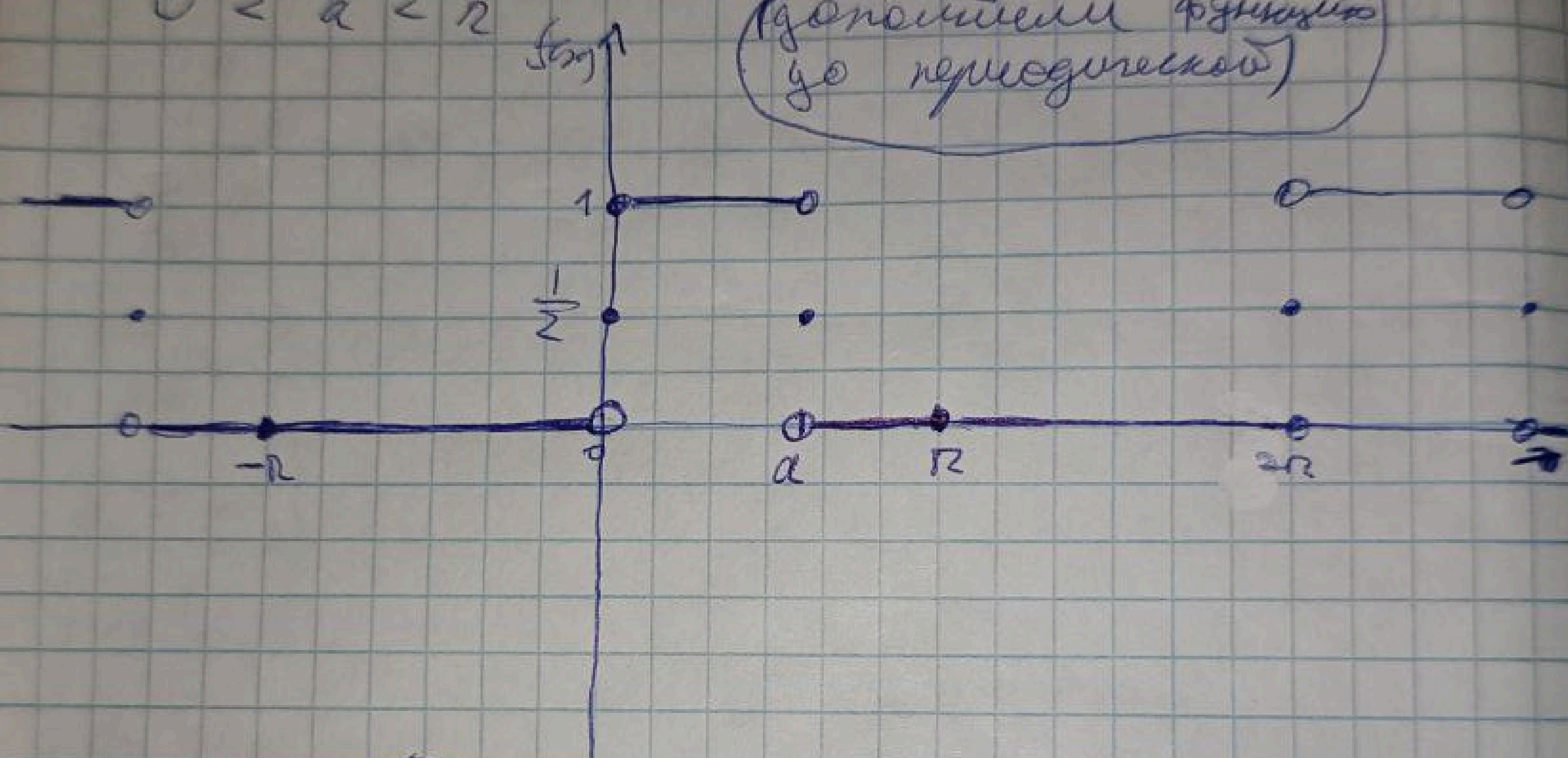
$b_n \dots$

№2

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \quad a < x \le \pi \\ 1, & 0 < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = a,\ x = 0 \end{cases}$$

Период 2π (дополнили функцию до периодической)

$0 < a < \pi$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} a$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin nx \Big|_0^a = \frac{\sin na}{\pi n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\pi}\,dx =$$

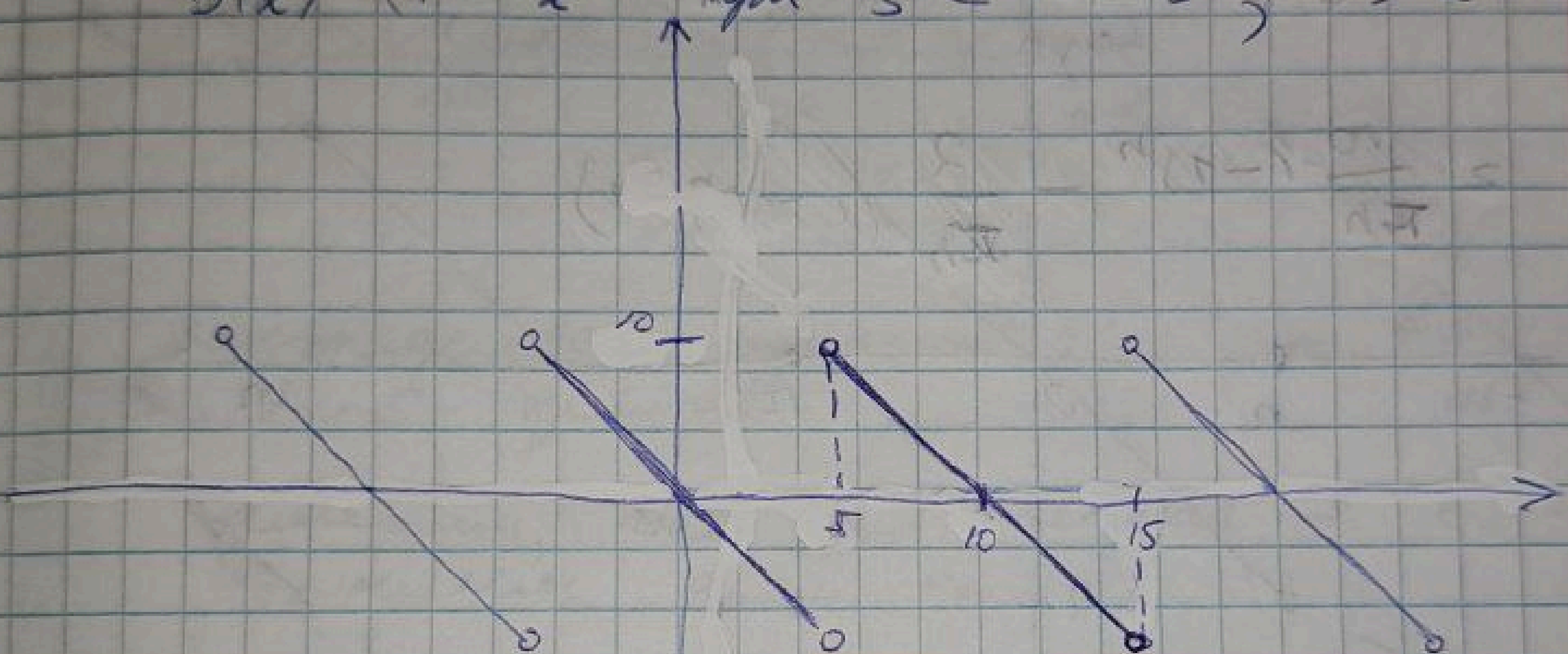
$$= -\frac{1}{\pi n}\cos nx \Big|_0^a = -\frac{\cos na}{\pi n} + \frac{1}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}\left(1 - \cos na\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi n}a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{\pi n}\cos nx +$$

$$+ \frac{1}{\pi n}\left(1 - \cos na\right)_{n\pi} \sin nx$$

№ 11

$f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$, $f(x+10) = f(x)$



Заметим, что функция $f(x)$ нечётная, тогда $a_0 = 0$, $a_n = 0$, вычислим b_n:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{5}\int_{0}^{5} -x \sin\frac{\pi n x}{5}dx = -\frac{2}{5}\int_{0}^{5} x\sin\frac{\pi n x}{5}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin\frac{\pi n x}{5}dx \\ v = -\frac{5}{n\pi}\cos\frac{\pi n x}{5} \end{matrix} \right| = -\frac{2}{5}\left(x\left(-\frac{5}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{5}\right)\Bigg|_0^5 - \right.$$

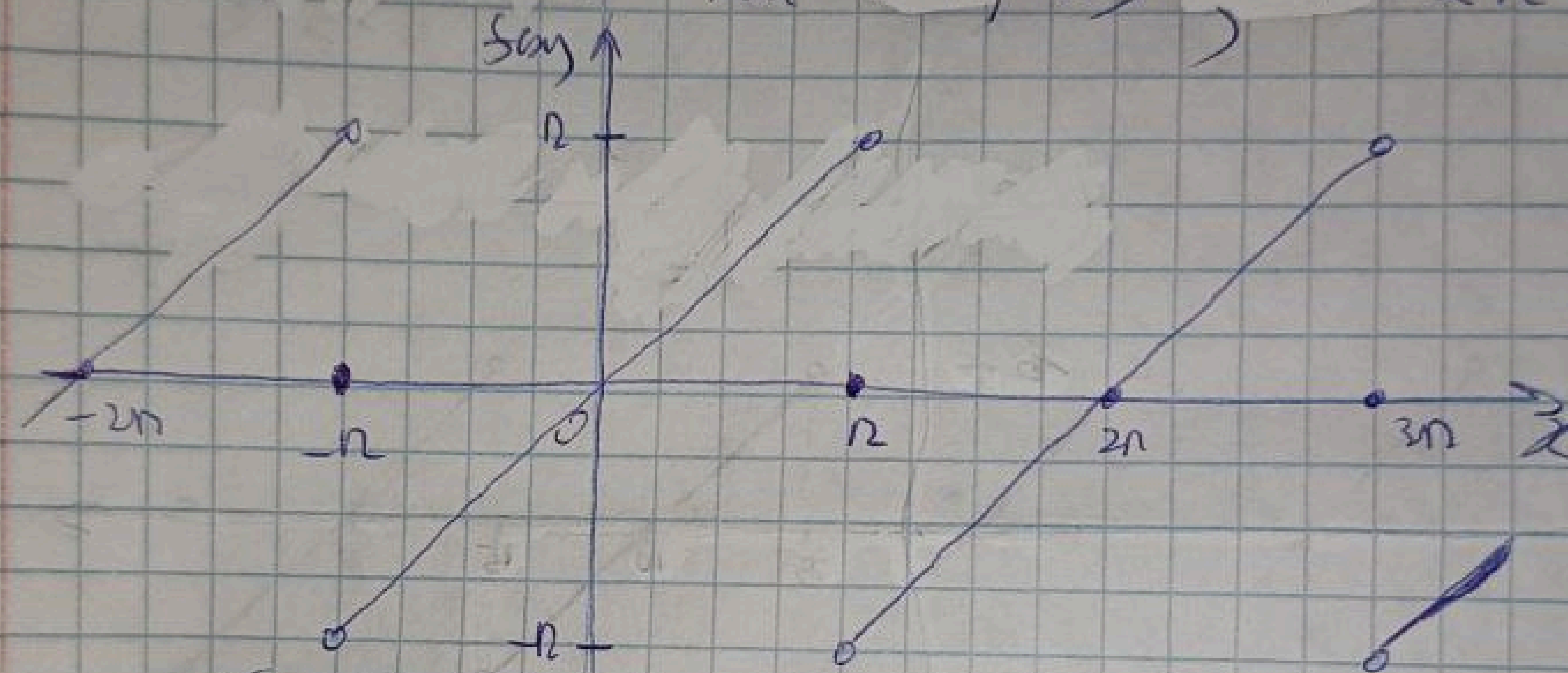
$$\left. - \int_0^5 -\frac{5}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{5}dx \right) = -\frac{2}{5}\left(-\frac{25}{\pi n}\cos\pi n + \frac{5}{\pi n}\cdot\frac{5}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{5}\Bigg|_0^5\right.$$

$$= -\frac{2}{5}\left(-\frac{25}{\pi n}\cos \pi n + 0\right) = \frac{10}{\pi n}(-1)^n$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\pi n}(-1)^n \sin\frac{\pi n x}{5}$$

N 1

$f(x) = x$ на $(-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$



(Доопределили функцию с периодом 2π на всю числовую прямую.)

Заметим, что функция f(x) нечётная, поэтому $a_0 = 0$ и $a_n = 0$, а b_n равно:

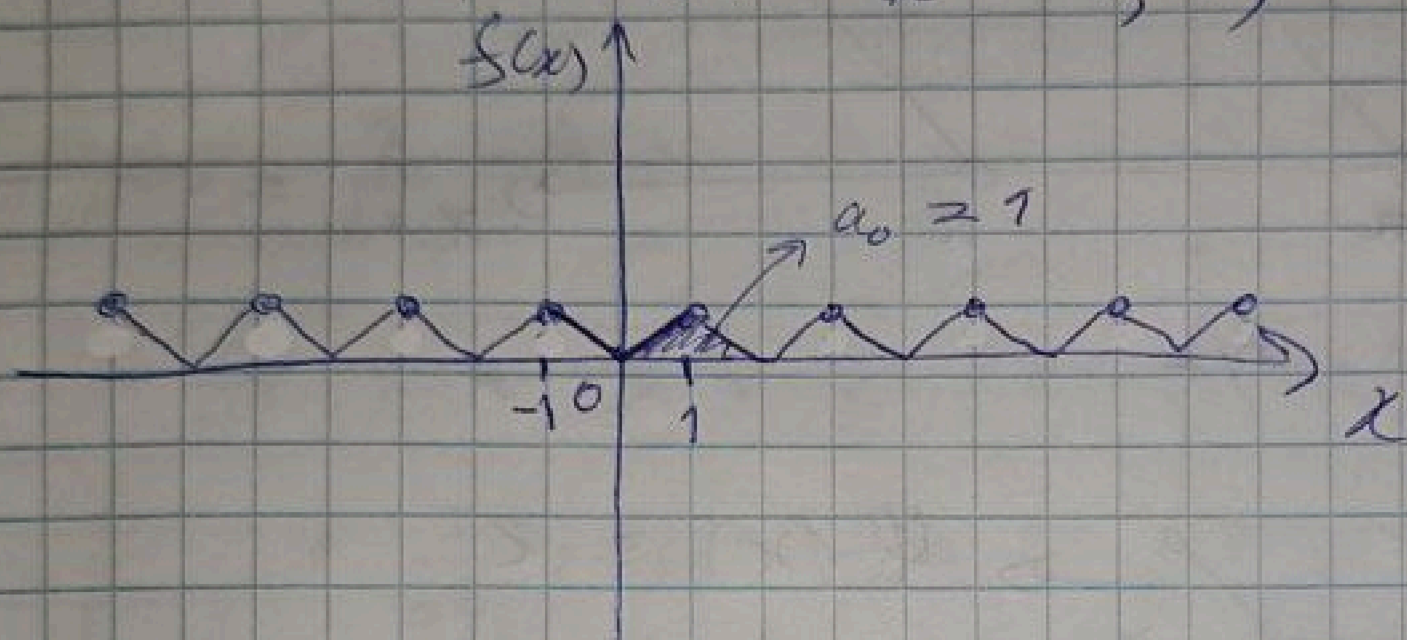
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\frac{\pi n x}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin nx\,dx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx$$

№4 $f(x) = |x|$ на $(-1; 1)$



Доопределяем функцию $f(x)$ на всей числовой прямой.

Заметим, что она чётная $\Rightarrow b_n = 0$.
Вычислим a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x| \cos\frac{\pi n x}{1} = \frac{2}{1}\int_{0}^{1} |x| \cos \pi n x\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 x \cos \pi n x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos \pi n x\,dx \\ v = \frac{1}{\pi n}\cos \pi n x \end{array} \right| = x\frac{1}{\pi n}\cos \pi n x \Big|_0^1 -$$

Дальше потеряно, вернуть на место

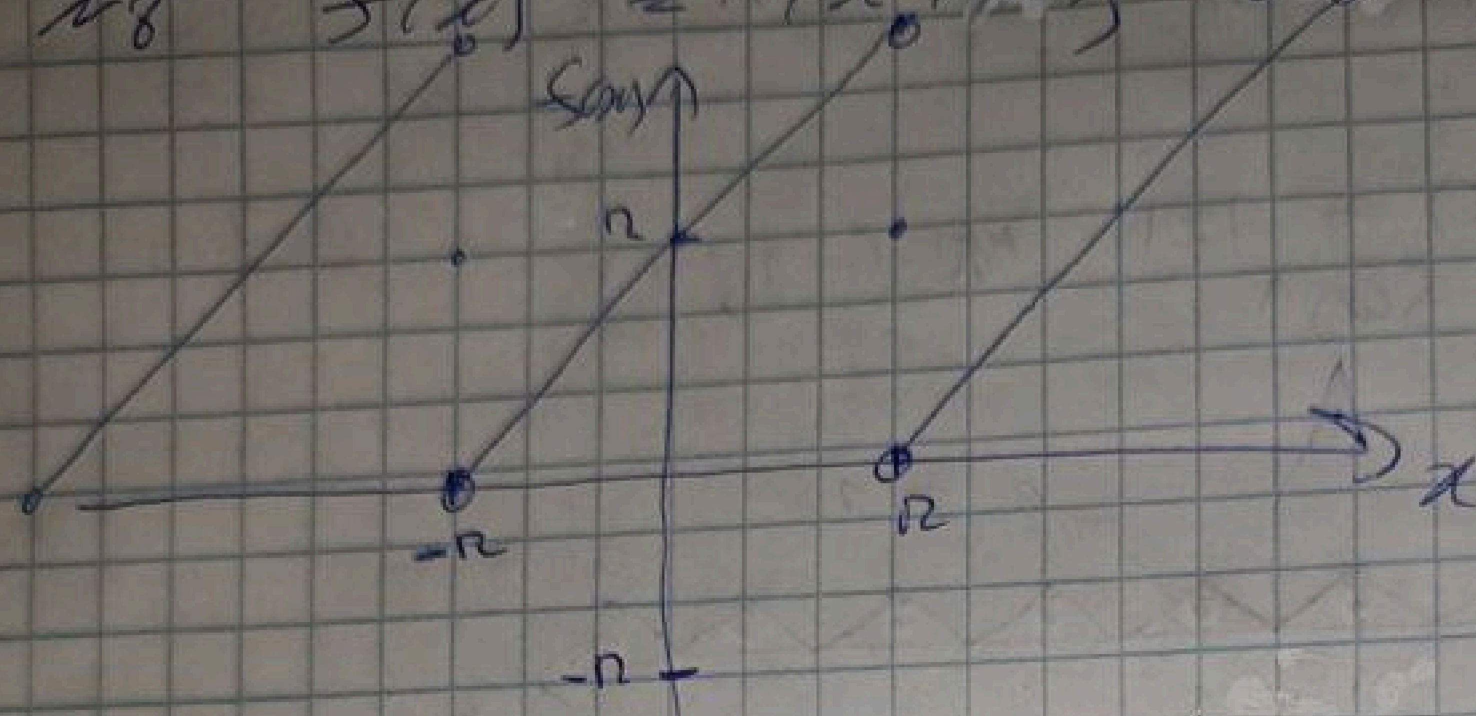
должен быть $\sin$, пересчитать

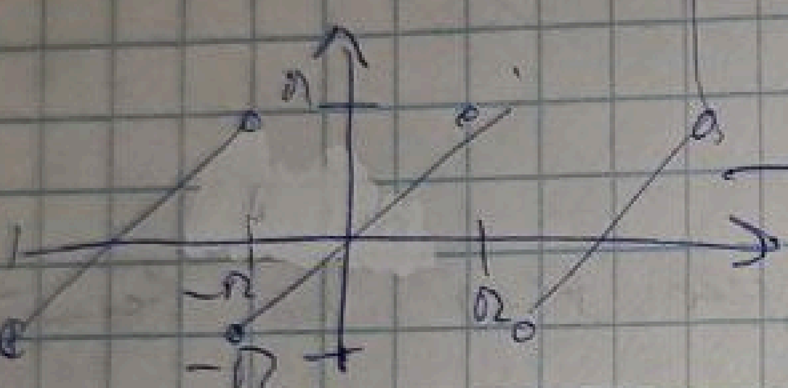
$$-\frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos \pi n x\,dx = \frac{1}{\pi n}(-1)^n - \frac{1}{\pi n^2}\sin \pi n x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(-1)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}(-1)^n \cos \pi n x$$

№8 $f(x) = (x+\pi)$, $[-\pi; \pi]$





$\Rightarrow \varphi(x) = x$

$(-\pi, \pi)$

где $\varphi(x) = x$; $\varphi(x)$ – нечёт. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{0\,\varphi(x)} = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx + \pi = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin\frac{\pi n x}{\pi}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x+\pi \\ du = dx \\ dv = \sin nx\,dx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right| =$$

$$= (x+\pi)\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx =$$

$$= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)(-1)^n + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{n}\right)(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos\frac{\pi n x}{\pi}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x+\pi \\ du = dx \\ dv = \cos nx\,dx \\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right| =$$

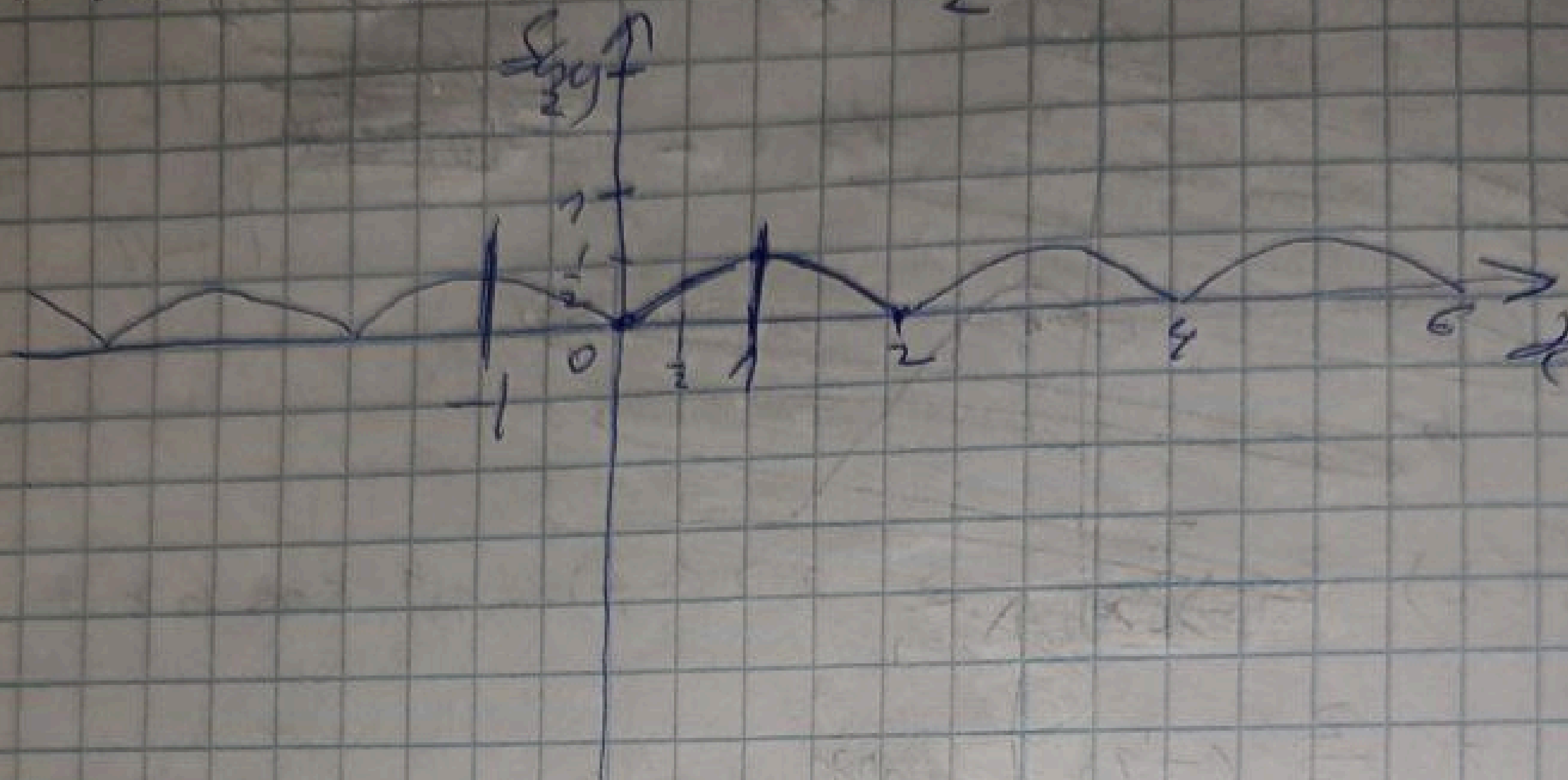
$$= (x+\pi)\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2}(-1)^n$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi\left(-\frac{1}{n}\right)(-1)^n\cos nx +$$

$$+ \frac{2}{n^2}(-1)^n \sin nx$$

№2 $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ на $(0, 2)$



Доопределяем функцию на числовой прямой с периодом 2.

Функция $f(x)$ четная $\Rightarrow b_n = 0$.

Вычислим a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x - \frac{x^2}{2}\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{6}x^3\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 0 + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\cos\frac{\pi n x}{1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{1}\int_{0}^{1}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\cos \pi n x\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = x - \frac{x^2}{2} \\ du = (-x+1)\,dx \\ dv = \cos \pi n x\,dx \\ v = \frac{1}{\pi n}\sin \pi n x \end{array}\right| = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi n}\sin \pi n x\right)\Big|_{0}^{1} -$$

р. ~~общ~~... 5

р. 33829 р.

$$-\frac{1}{\pi n}\int_0^1 (\sin \pi n x)(-x+1)\,dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^1 (x-1)\sin \pi n x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x-1 \\ du = dx \\ dv = \sin \pi n x\,dx \\ v = -\frac{1}{\pi n}\cos \pi n x \end{array} \right| = (x-1)\left(-\frac{1}{\pi n}\cos \pi n x\right)\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos \pi n x\,dx = -\frac{1}{\pi n} + \frac{1}{(\pi n)^2}\sin \pi n x\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}$$

$$f(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi n}\right)\cos \pi n x$$

Интегралы

№2

$$\int_0^{\pi}(2x+\sin(2x))\,dx = 2\int_0^{\pi} x\,dx + \int_0^{\pi}\sin 2x\,dx =$$

$$= x^2\Big|_0^{\pi} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\Big|_0^{\pi} = \pi^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \pi^2$$

$$\int_0^1 \log^3\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\int_0^1 \log^3 x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x\ln 10}\,dx \\ dx = (dt)\,x\ln 10 \end{array} \right| =$$

$$x = 10^t \qquad 10 = e^{\ln 10};\quad 10^t = e^{t\ln 10}$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} t^3\,x\ln 10\,dt = -\int_{-\infty}^{0} t^3\,10^t \ln 10\,dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} t^3 e^{t\ln 10}\ln 10\,dt =$$

Сот 2 ...
3 абн.
18131 р.

$$= \left| a = t\ln 10 \right| = -\frac{1}{\ln^3 10}\int_{-\infty}^{0} a^3 e^a\, da =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = a^3 \\ du = 3a^2\, da \\ dv = e^a\, da \\ v = e^a \end{array} \right| = \frac{-1}{\ln^3 10}\; a^3 e^a \Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^a\, 3a^2\, da =$$

$$= \frac{-1}{\ln^3 10}\; a^3 e^a \Big|_{-\infty}^{0} - 3\int_{-\infty}^{0} e^a a^2\, da = \left| \begin{array}{l} u = a^2 \\ du = 2a\, da \\ dv = e^a\, da \\ v = e^a \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-1}{\ln^3 10}\; a^3 e^a \Big|_{-\infty}^{0} - 3\left(a^2 e^a \Big|_{-\infty}^{0} - 2\int_{-\infty}^{0} e^a\, a\, da \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = a \\ du = da \\ dv = e^a\, da \\ v = e^a \end{array} \right| = \frac{-1}{\ln^3 10}\; \underbrace{a^3 e^a \Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} - 3\left(\underbrace{a^2 e^a \Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} - 2 \cdot \left(\underbrace{a e^a \Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} e^a\, da \right) \right) = \frac{-1}{\ln^3 10}\; -6 e^a \Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{\ln^3 10}\,(-6) = \frac{6}{\ln^3 10}$$

$$\int_1^5 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ v = \operatorname{arctg} x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x \Big|_1^5 -$$

$$- \int_1^5 \operatorname{arctg} x\, dx = 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} -$$

$$-\left(\int_1^5 \operatorname{arctg} x \, dx\right) = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dx = (1+x^2)\,dt \end{matrix} \right| =$$

$$x = \operatorname{tg} t$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} - \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 5} t \, (1+x^2)\, dt =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} - \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 5} t \, (1+\operatorname{tg}^2 t)\, dt =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} - \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 5} t \, \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \left| \begin{matrix} u = t \\ du = dt \\ dv = \frac{1}{\cos^2} dt \\ v = \operatorname{tg} t \end{matrix} \right| =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} - \left(t \operatorname{tg} t - \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 5} \operatorname{tg} t \, dt\right) =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} - \left(t \operatorname{tg} t - \int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg} 5} \frac{\sin t}{\cos t}\, dt\right) =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} - \left(t \operatorname{tg} t + \ln \cos t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-\cos(\operatorname{arctg} 5)}\right) =$$

$$= 5 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{4} - t \operatorname{tg} t - \ln \cos t\,(-\cos(\operatorname{arctg} 5))$$

$$+ \ln \cos t \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Big|_1^5 -$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$$

№3

$$\int_0^1 \ln^4\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\int_0^1 \ln^4 x\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = \ln x \to x = e^t \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ dx = x\,dt \end{array}\right| = -\int_{-\infty}^{0} t^4 x\,dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} t^4 e^t\,dt = \left|\begin{array}{l} u = t^4 \\ du = 4t^3dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{array}\right| =$$

$$= -1\cdot\left(t^4e^t - 4\int_{-\infty}^{0} e^t t^3 dt\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = t^3 \\ du = 3t^2 dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{array}\right| = -1\cdot\left(t^4e^t - 4\cdot\right.$$

$$\cdot\left(t^3e^t - 3\cdot\int_{-\infty}^{0} t^2 e^t dt\right)\Big) = \left|\begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t\,dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{array}\right| =$$

$$= -1\cdot\left(t^4e^t - 4\cdot\left(t^3e^t - 3\cdot\left(t^2e^t - \right.\right.\right.$$

$$-2\int_{-\infty}^{0} te^t dt = \left|\begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{array}\right| =$$

$$= -1\cdot\left(t^4e^t\Big|_{-\infty}^{0} - 4\cdot\left(t^3e^t\Big|_{-\infty}^{0} - \right.\right.$$

$$-3\cdot\left(t^2e^t\Big|_{-\infty}^{0} - 2\cdot\left(te^t\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^t dt\right)\right)\right)\right) =$$

18131 p. 3382 p

$= -24 e^t \Big|_{-\infty}^{0} = -24$

№4

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \\ v = \int dv = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right| =$$

$$v = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{x \, d(1+x^2)}{2x(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{-2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$x(Ax+B) + C(1+x^2) = 1$

$\begin{cases} A + C = 0 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{array}$

$\frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{x} = \frac{1}{x(x^2+1)}$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{x \, d(1+x^2)}{2x(1+x^2)} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x -$$

$$- \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C$$

№8

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \ln x - \int \frac{x\,d(1+x^2)}{2x(1+x^2)} =$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int x \sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x\,dx \\ v = -\cos x \end{array}\right| =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

$$\int x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x\,dx \\ v = \sin x \end{array}\right| =$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x +$$

$$+ \cos x + C$$

1 p. 33829 p.

08. 119 p.

№11 $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx =$

$= \int x^{\frac{1}{4}} dx - 2\int x^{\frac{5}{12}} dx + \int x^{-\frac{1}{4}} dx =$

$= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C$

— $\int_1^3 \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x \rightarrow x = e^t \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x\,dt \end{matrix} \right| = \int_0^{\ln 3} t x \, dt =$

$= \int_0^{\ln 3} t e^t dt = \left| \begin{matrix} u = t \\ du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{matrix} \right| = te^t \Big|_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} e^t dt = te^t \Big|_0^{\ln 3} - e^t \Big|_0^{\ln 3} =$

$= \left(e^t (t-1)\right) \Big|_0^{\ln 3} = e^{\ln 3} (\ln 3 - 1) - e^0 (0 - 1) = 3(\ln 3 - 1) + 1$

— $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 1}{2} dx$ $\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{\pi}{4} + 0 + 0 = \frac{\pi}{4}$

соч 2 ...

3 авч.

18131 р.

...08.

№12 $\int (\sin^5 x)(\cos x)\, dx =$

$= \int \sin^5 x \, d\sin x = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x + 1}{2} dx =$

$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx =$

$= \pi - 0 + 0 - 0 = \pi$

$\int (\ln x + \sqrt{x^2+1})\, dx =$

$= \int \ln x \, dx + \int \sqrt{x^2+1}\, dx =$

$= \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ x = e^t \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x\, dt \end{array} \right| = \int t e^t dt +$

$+ \int \sqrt{x^2+1}\, dx = \left| \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ dv = e^t dt \\ v = e^t \end{array} \right| =$

=

= (

$$= te^t - \int e^t\,dt + \int \sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} k = x^2+1 \to x = \sqrt{k-1} \\ dk = 2x\,dx \\ dx = \frac{dk}{2x} \end{array} \right| = te^t - e^t + \int \frac{k}{2x}\,dk$$

...

Определить сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}$$

Интегральный признак Коши:

Пусть дан ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

причем

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \dots > a_n > \dots$$

и $f(x)$ — такая непрерывная монотонно убывающая функция что $f(n) = a_n$.

Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ одновременно сходятся и расходятся.

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$f(n) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}, \text{ при } \cancel{x} > 1$$

непрерывна и монотонно убывает.

Рассмотрим интеграл от этой

1 р.

S 7

33829 р.

08.

19р.

функции $\int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\hookrightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \overset{e}{=} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

(при $\alpha > 1$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ сходится)

$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$ сход.

(по интегральному признаку Коши)

ЛИБО

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^2}$, а $\frac{1}{n^2}$ сход. $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$ также сход.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

сход.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \overset{e}{\operatorname{tg}} \frac{1}{n}$ сход.

8131 р.

33829 р.

119р.

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{n^2}$ сход., $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ сход.

Интегралы . прогода

$$\int_{-1}^{0} x e^{-x}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_{-1}^{0} +$$

$$+ \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_{-1}^{0} = \left(-\frac{x+1}{e^x}\right)\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= -1 + 0 = -1$$

$$\int_0^1 x^2 3^x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ dv = 3^x dx \\ v = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right| = \left(x^2 \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 - \right.$$

$$-\frac{2}{\ln 3}\int_0^1 3^x x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = 3^x dx \\ v = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array} \right| = \frac{3}{\ln 3} - \left(x\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\ln 3}\int_0^1 3^x\,dx\right) = \frac{3}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{3^x}{2\ln 3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3 = \ln 3$$

Сочи 27 июля

1985...

3 авг.

18131 р.

5 авг.

27.07 – 05.08.

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array}\right| = \lim_{a\to 0}\left(x\ln x\Big|_a^1 - \int_a^1 x\,\frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{a\to 0}\left(x\ln x - x\right)\Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(x(\ln x - 1)\right)\Big|_a^1 =$$

$$= -1 - 0 = -1$$