$e_1, \dots, e_n$ – вектора – линейно незав., если:

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha_i = 0$

$$\alpha_1 (e_1) + \dots + \alpha_n (e_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

СЛАУ:

$$\left(e_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, e_n\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

– 6.3.

б) $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$

$3a_1 = 2a_2$

$\alpha_1 \frac{2}{3} a_2 + \alpha_2 a_2 = 0$

лин. зав.

$a_2 \underbrace{\left(\alpha_1 \cdot \frac{2}{3} + \alpha_2\right)}_{\neq 0} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \left(\boxed{2} \quad 3\right)$$

$\alpha_2 = c$

$2\alpha_1 = -3\alpha_2 = -3c$

$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c \\ 2c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

в)
$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\det A \neq 0$

$A\alpha = 0$

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

лин. нез.

6.12

ж) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1$ и a_3 – лин. нез.

базис

$\det = 1 \neq 0$

$a_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_3 a_3$

$a_4 = \beta_1 a_1 + \beta_3 a_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 1$

$a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3$ $\qquad a_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = -1$

$\beta_3 = 4$

$a_4' = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$a_4 = 1 \cdot a_1 + 4 \cdot a_3$

j) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$

$a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot (-1) - (-5) \cdot 2) +$

$+ 1 \cdot (-1)^3 \cdot ((-1) \cdot 3 - (-5) \cdot 4) +$

$+ (-3) \cdot (-1)^4 \cdot (3 \cdot 2 - 1 \cdot 4) =$

$= 2 \cdot 9 + (-17) + (-3) \cdot 2 =$

$= -5;$

$\det A = -5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & 12 & 3 \\ 6 & 6 & 12 & 0 \\ 6 & 10 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & 12 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -10 & 14 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} & -2 & -5 & 7 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1$

$a_4 = 1a_1 + 1a_2 - 1a_3$

$$a_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

34.11 Доказать, что каждая из двух заданных
а) систем векторов S и S' является базисом. Найти матрицу перехода от S к S':

$e_1, \dots, e_n$

$e_1', \dots, e_n'$

$e_1' = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$e_2' = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

$e_3' = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$

- матрица перехода от $\{e_i\} \to \{e_i'\}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \end{pmatrix}$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix};$

$e_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot (3 \cdot 2 - 3 \cdot 8) +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^3 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^4 \cdot (2 \cdot 8 - 3 \cdot 3) =$$

$$= -18 + 10 + 7 = -1; \quad \det A \neq 0 \Rightarrow$$

лін. нез. базис

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 14 & 9 \\ 8 & 13 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1)^2 \cdot (14 \cdot 2 - 13 \cdot 9) +$$

$$+ 5 \cdot (-1)^3 \cdot (5 \cdot 2 - 13 \cdot 1) +$$

$$+ 8 \cdot (-1)^4 \cdot (5 \cdot 9 - 14 \cdot 1) =$$

$$= 3 \cdot (-89) + 15 + 8 \cdot 31 \neq 0$$

$\det A' \neq 0 \Rightarrow$ лін. нез. базис

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} -41 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Линейные операторы

$\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве X над полем K

$\mathcal{A}: X \to X$

1) $\forall x, y \in X: \mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$

2) $\forall \lambda \in K, \forall x \in X: \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A} x$

Если выбран базис $\{e_i\}$ в X, то матрица A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\{e_i\}$

$$A = (\mathcal{A}e_1 \mid \mathcal{A}e_2 \mid \dots \mid \mathcal{A}e_n)$$

стандарт. базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

39.1 (а, б, в, г*, д)

а) $x \longmapsto a$ (а-фиксированный вектор)

$\mathcal{A}(x+y) = a$ ← при $a \neq 0$

$\not=$

$\mathcal{A}x + \mathcal{A}y = a + a$

если $a = 0$, то $\mathcal{A}(x+y) = 0 = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$

$\mathcal{A}(\lambda x) = 0$

$\lambda \mathcal{A} x = \lambda \cdot 0 = 0$

$a \neq 0 \Rightarrow$ не явл. лин. оператором

$a = 0 \Rightarrow$ линейный оператор =

= "нулевой" оператор $\mathcal{O}$

матрица в стандартном базисе $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

б) $x \longmapsto x + a$ (а - фикс. вектор)

при $a \neq 0$ не вып. 1);

при $a = 0$: $\mathcal{A}(x+y) = x + y = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$

$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda x$

$\lambda \mathcal{A} x = \lambda x$

$a \neq 0 \Rightarrow$ не явл. лин. опер.

$a = 0 \Rightarrow$ линейный оператор =

= "единичный" лин. оп. $\mathcal{E}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & & & \end{pmatrix}$ — главные диагональ = 1

в)

в) $x \mapsto \alpha x$ (α – фикс. скаляр)

1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

2) $\alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

д) $x \mapsto (a, x)\, x$ (a – фикс. вектор)

2) $(a, \lambda x)(\lambda x) = \lambda(a, x)(\lambda x) =$

$= (a, x)(\lambda^2 x)$

г) $x \mapsto (a, x)\, a$ (a – фикс. вектор)

$A(x+y)$:

1) $(a, x+y)\, a = (a, x)\, a + (a, y)\, a$

$Ax + Ay$: $(a, x)\, a + (a, y)\, a$

2) $A(\lambda x) = (a, \lambda x)\, a = (a, x)\, \lambda a$

$(a, e_1) = \alpha$

$Ae_1 = \alpha a$

$Ae_2 = \beta a$

$Ae_1 = \alpha a = \alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha\beta \\ \alpha\gamma \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \right.$ b_1

6.3

д) $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$,

$a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{9} & \cancel{8} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Исходная матрица имеет ненулевое решение → векторы a_1, a_2, a_3 и a_4 линейно зависимы в) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Исходная матрица имеет ненулевое решение $\Rightarrow$ векторы a_1, a_2, a_3 и a_4 линейно зависимы

6.12

а) $a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

6.3

g) $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & 6 & 18 & 12 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 12 & 6 & 18 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = 0 \Rightarrow$$

Система зависимых векторов

e) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$

$a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}; \qquad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\\0&0&4&16\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\\0&0&1&4\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=0 \Rightarrow$$ система зависимых векторов

6.12

а) $a_1=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\\1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\3\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-2\end{pmatrix},$

$a_4=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\2\end{pmatrix},\ a_5=\begin{pmatrix}7\\-6\\-7\\0\end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix}5&4&1&3\\2&1&1&4\\-3&-2&-1&-1\\1&3&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\2&1&1&4\\-3&-2&-1&-1\\1&3&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\2&2&0&2\\-3&-2&-1&-1\\1&3&-2&2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\1&1&0&1\\-3&-2&-1&-1\\1&3&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\1&1&0&1\\-3&-3&0&-3\\1&3&-2&2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\1&3&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\1&3&-2&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=0\Rightarrow$$ Не базис (лин. зав. вект.)

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & -3 & -2 & -8 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -4 & -8 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; \det A \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & -4 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Линейный оператор г.о

$\mathcal{A}: X \to X$

выбрать базис $\{e_i\}$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A = (\mathcal{A}e_i)$

если базис (e_i')

$\mathcal{A} \leftrightarrow A' = (\mathcal{A}e_i')$

$A' = B^{-1} A B$,

где B – матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{e_i'\}$

B^{-1} – обратн. матрица,

$\mathcal{B}^{-1}$ – обратный лин. оператор к мат. B

Если выполняется:

$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{E}$

Тогда $\underset{\mathcal{B}^{-1}}{\overset{\mathcal{D}}{\shortparallel}}$ – обратн. к $\mathcal{B}$

Обратная матрица.
Способ нахождения

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee}$$

$A^{\vee}$ – транспонированная матрица из алгебраического дополнения

$$A = \begin{array}{c} \qquad j \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} i \end{array}$$

$$A^{\vee} = \begin{array}{c} \qquad i \\ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & A_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} j \end{array}$$

① Способ:

$$A_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

② способ:

$$(A \mid E) \sim (E \mid A^{-1})$$

Пример:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

18. 9

б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

1) $\det A = 24 + (-58) + 33 = -1$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18$

$A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11$

$A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$

$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -8 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -8 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -8 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -6 & 24 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\ {\scriptstyle -8}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & -\frac{1}{6}-7 & -\frac{1}{3}+4 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\ {\scriptstyle +3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6}-7+16 & -\frac{1}{3}+4-8 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{53}{6} & -\frac{13}{3} & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -13 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{53}{6} & -\frac{13}{3} & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 13 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\mathcal{A}: X \to X$ – линейный оператор

Вектор $v \in X$ называется собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, соответвующим собственному значению $\lambda \in k$, если $\mathcal{A}v = \lambda v$, $v \neq 0$.

Подпространство $V_\lambda = \{v \in X : \mathcal{A}v = \lambda v\}$ называется собственным подпространством соответствующим собственному значению λ.

$\mathcal{A} \leftrightarrow A$: собственные значения λ удовлетворяют $\det|A - \lambda E| = 0$

собственные вектора v – решение СЛАУ $(A - \lambda E)v = 0$

алгебр. уравн. для λ n-ого порядка над полем $\mathbb{C}$, если $A = n \times n$

↑ называется характеристическим уравнением

Хар. уравн. $\chi(\lambda) = \det|A - \lambda E| = 0$

$$\chi(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(-\lambda) + c_n$$

c_k – сумма диаг. миноров порядка k,

т.е. $c_1 = \operatorname{tr} A$ – сумма диаг. элементов

$c_n = \det A$

Пример! $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$$

$$\chi(\lambda) = (-\lambda)^2 + 6(-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \longleftrightarrow v^1 \text{ — собственный вектор} \\ \lambda_2 = 5 \longleftrightarrow v^2 \text{ — собственный вектор} \end{array} \right.$

индекс для вектора

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix}$

инд. для компонента вектора

$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda_1 E) v^1 = 0$ $\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = 0$

$v_1^1 \quad v_2^1$

$(3 \quad \boxed{1}) \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -3c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda_2 = 5$:

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & \boxed{1} \\ 3 & -3 \end{array}\right) \quad v^2 = \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Th Если $\forall \lambda_i$ их геометрическая кратность (r) совпадает с алгебраической кратностью (k), тогда матрица лин. оператора A диагонализируется.

$$A = TDT^{-1}, \text{ где } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$T = \left(v^1 \,\Big|\, v^2 \,\Big|\, \dots \,\Big|\, v^n \right).$$

Алгебраическая кратность (k):

кратность λ_i как корня уравнения $\chi(\lambda) = 0$

Геометрическая кратность (r):

геом. крат. (r) = размерность V_{λ_i}

$$\| $$

$$n - \operatorname{rank}(A - \lambda_i E)$$

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}}_{D}T^{-1}$$

матрица перехода
из базиса собственных подпространств

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix};$$ 1 способ:

$\det(A-\lambda E)=0$ → характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot(-1)^6\cdot\left(-\lambda(4-\lambda)+4\right)=$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=$$

$$\cancel{=2\lambda^2-8\lambda+8-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda=-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-2)^2=0$$

$\lambda=2$ ⇒ алг. крат. (2) $=3$

⇒ геом. крат. (2) $=3-1=2$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}=1$$

$$\begin{array}{ccc} v_1' & v_2' & v_3' \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccc} v_1' & v_2' & v_3' \\ \left(\boxed{-2} \right. & 1 & \left. 0 \right) \\ & c_1 & c_2 \end{array}$$

$$-2v_1' + c_1 + 0c_2 = 0$$

$$v_1' = \frac{c_1}{2}$$

$$v' = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \left\{ c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

базис

2 способ:

$$\chi(\lambda) = (-\lambda)^3 + 6 \cdot (-\lambda)^2 +$$

$$+ 12(-\lambda) + 8 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

18.8 (H-λ),
18.9 (H, H-λ),
40.15,
40.16

18.8

1) de
A
A
A

18.8 С помощью присоединённой матрицы найти обратную к матрице:

н) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1) $\det A = 6 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = -6$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 30$

$A_{23} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$A_{32} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$

$A^{-1} = \dfrac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 12 \\ 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1) $\det A = 1 \cdot (-1)^2 \cdot (7 \cdot 7 - 0 \cdot 0) +$
$+ 2 \cdot (-1)^3 \cdot (3 \cdot 7 - 0 \cdot 0) + 0 = 49 - 42 = 7$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 49$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$

$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 49 & 21 & 0 \\ 14 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1) $\det A = 1 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 3 - 3 \cdot 0) = 3$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det A = 2 \cdot (-1)^2 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) +$
$+ 3 \cdot (-1)^3 \cdot (0 \cdot 2 - 0 \cdot 0) +$
$+ 0 = 4$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$; $A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

$\det A = \cos^2 a - \sin a(-\sin a) = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$

18.9

4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 4 & \frac{17}{3} & 1 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{19}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{19}{3} & 0 & -\frac{5}{6} & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & -6 & 7 & -2 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -38 & 41 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 16 \end{array}\right)$

u) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{12}{3} & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$ (-2)

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 5 & 13 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

k) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$$

Семинар №3

$$A = TJT^{-1}$$

J – жорданова нормальная форма

T – составлена из столбцов = жорд. базис

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix};$$

количество клеток = сумме геом. кратностей всех λ_i – с. ч. A (собственных значений)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$ соотв. базис v, u, w

Координаты I-ого столбца (разложение образа первого вектора по базису)

$$Av = \lambda \cdot v + 0 \cdot u + 0 \cdot w$$

$$Au = 1 \cdot v + \lambda \cdot u + 0 \cdot w$$

$$Aw = 0 \cdot v + 1 \cdot u + \lambda \cdot w$$

$(A - \lambda E) v = 0 \Rightarrow v$ – собств. вектор, соотв. λ

однородная система для v

Алгоритм построения жордановой формы и жорданова базиса:

1) Находим все λ_i и их k_i, r_i

2а) Если у конкретного λ^* верно, что $k^* = r^*$, то количество собственных векторов $= k^*$ $\Rightarrow$ λ^* соотв. k^* одномерн. жорд. клеток

2б) Если у λ: $k > r$, тогда записываем вектор в общем виде: $v = c_1 v^1 + \ldots + c_r v^r$ и для присоед. вект.:

$$(A - \lambda E) u = c_1 v^1 + \ldots + c_r v^r$$

$\Rightarrow$ возникает условие совместности СЛАУ (для c_i)

$\Rightarrow$ цепочки векторов собств. + присоед.

$\Rightarrow (A - \lambda E) u = v \Rightarrow u$ — первый присоединённый к v вектор

$\Rightarrow (A - \lambda E) w = u \Rightarrow w$ — второй присоединённый к v вектор

$\Downarrow$ или первый присоединённый к u вектор

Корневые векторы размерности 1, 2 и т.д.

N1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Собств. числа: $\det |A - \lambda E| = 0$

$$(-\lambda)^4 + \underbrace{c_1}_{tr A}(-\lambda)^3 + c_2(-\lambda)^2 + c_3(-\lambda) +$$

$$+ \underbrace{c_4}_{\det A} = 0$$

$tr A$ – след матрицы – сумма диагональных элементов

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot$$

$$\cdot \left[(1-\lambda)(2-\lambda)^2 + \underbrace{1 + (1-\lambda)}_{2-\lambda} \right] -$$

$$-1 \cdot \left[\underbrace{1 + (1-\lambda)}_{2-\lambda} \right] =$$

$$= (2-\lambda)\Big[(3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) +$$

$+\, 3 - \lambda - 1] = (2-\lambda)^2 [(3-\lambda)\cdot$

$\cdot(1-\lambda)+1] = (2-\lambda)^2[\lambda^2-4\lambda+4] =$

$= (2-\lambda)^4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2,\ k = 4$

$$(A-\lambda E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A-2E) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$r = 4 - 2 = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ \hline & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) \text{ либо } \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & & & \\ \hline & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (A-\lambda E)v = 0 \\ (A-\lambda E)u = v \\ (A-\lambda E)w = u \end{array}}$$

$$\boxed{d_1 c_1 + d_2 c_2 = 0}$$

$T = (v^{I}, u^{I}; v^{II}, u^{II})$

v^{I} и v^{II} – независ. собств.

u^{I} – присоед. к v^{I}

u^{II} – присоед. к v^{II}

$T = (v^{I}; v^{II}, u^{II}, w^{II})$

v^{I} и v^{II} – нез. собств.

u^{II} – первый присоед. к v^{II}

w^{II} – второй присоед. к v^{II}

$n = 5$

$r = 3$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{1} & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Ищем собственный вектор

нижний индекс обозначает компоненту

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Гаусс

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -c_2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & c_2 \end{array}\right)$$

Условие совместности

$$\boxed{c_1 = c_2}$$

(собств. при этом можно найти)

$\Downarrow$ Получаем структуру (2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad T = \left(v^{I} \middle| v^{II} \middle| u^{II} \middle| w^{II} \right)$$

$$v^{I} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ при } c_1 \neq c_2 \rightarrow v^{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

собственный вектор, для которого нет присоединённого

по опред. он нетривиальный

$$v^{II} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ при } c_1 = c_2 \quad v^{II} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - d_2 \\ 1 + d_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Возьмём $d_1 = d_2 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$w = \begin{pmatrix} -1 - s_2 \\ s_1 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

N2

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \\ -3 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Допустим, мы уже нашли, что: $\lambda = 2$, $k = 4$, $r = 2$

Ищем собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} \cancel{-6} & \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{4} \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ c_1 \\ -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -8 & 4 & 2c_2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & c_1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & -c_2 \\ -3 & 0 & -4 & 2 & c_2 \end{array}\right) \Rightarrow$$ совместна при любых c_1 и c_2

Сколько есть линейно независимых векторов, таков и будет размер клетки (тонд к.)

$$v^{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{II} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \cancel{-6} & \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{4} & \cancel{0} \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ -3 & 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{I} \\ u_2^{I} \\ u_3^{I} \\ u_4^{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ 3 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Для v^{II}:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \\ u_3^{II} \\ u_4^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - d_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ 1 - 2d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти ж. ф. и ж. б.

① $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det |A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (-\lambda(2-\lambda)+1) =$$

$$= (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^4$$

$(1-\lambda)^4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ k = 4$ — алг. кр. (λ по диаг.)

$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A - 1E) = 1$

$n = 4 - 1 = 3$ геом. кр. (клетки)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$T = (v^{I}, v^{II}, v^{III}, u^{III})$

v^{I}, v^{II} и v^{III} — независ. собств.

u^{III} — присоед. к v^{III}

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & \underset{c_1}{\overset{1}{\uparrow}} & \underset{c_2}{\overset{0}{\uparrow}} & \underset{c_3}{\overset{0}{\uparrow}} \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

<u>условие совместности</u>

$$c_2 = c_3 = -3c_1$$

$$A = TJT^{-1}$$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$$