Лекция А1
Языки, автоматы

Вадим Пузаренко

16 ноября 2022 г.

Содержание

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Слово непустое. Любая конечная непустая последовательность называется **непустой цепочкой** (**непустым словом**). Другими словами, все непустые слова составляют множество $\Sigma^+ \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \Sigma^n$. В дальнейшем слово $(w_1, w_2, \ldots, w_n)(\in \Sigma^n)$ будем записывать как $w_1 w_2 \ldots w_n$, $n \geqslant 1$. Часто слова будем обозначать строчными греческими буквами (возможно, с индексами).

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Слово непустое. Любая конечная непустая последовательность называется **непустой цепочкой** (**непустым словом**). Другими словами, все непустые слова составляют множество $\Sigma^+ \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \Sigma^n$. В дальнейшем слово $(w_1, w_2, \ldots, w_n)(\in \Sigma^n)$ будем записывать как $w_1 w_2 \ldots w_n$, $n \geqslant 1$. Часто слова будем обозначать строчными греческими буквами (возможно, с индексами).

Слово пустое. Последовательность (*единственная*) длины нуль называется **пустой цепочкой** (**пустым словом**) и обозначается как ε. В этом случае $\Sigma^* \leftrightharpoons \{\varepsilon\} \cup \Sigma^+$.

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Слово непустое. Любая конечная непустая последовательность называется **непустой цепочкой** (**непустым словом**). Другими словами, все непустые слова составляют множество $\Sigma^+ \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \Sigma^n$. В дальнейшем слово $(w_1, w_2, \ldots, w_n)(\in \Sigma^n)$ будем записывать как $w_1 w_2 \ldots w_n$, $n \geqslant 1$. Часто слова будем обозначать строчными греческими буквами (возможно, с индексами).

Слово пустое. Последовательность (*единственная*) длины нуль называется **пустой цепочкой** (**пустым словом**) и обозначается как ε. В этом случае $\Sigma^* \leftrightharpoons \{\varepsilon\} \cup \Sigma^+$.

Язык. $L \subseteq \Sigma^*$ называется **языком алфавита** Σ.

Структурные свойства, примеры

1. Если $\Sigma = \varnothing$, то $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$; в частности, любой язык пустого алфавита либо пуст, либо состоит из пустого слова.
2. Если $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит, то Σ^* счётно; в частности, любой язык непустого конечного алфавита не более, чем счётен;
3. Если Σ — бесконечный алфавит, то $\mathrm{card}(\Sigma^*) = \mathrm{card}(\Sigma)$ (такие языки нас интересовать в курсе не будут).

Структурные свойства, примеры

1. Если $\Sigma = \varnothing$, то $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$; в частности, любой язык пустого алфавита либо пуст, либо состоит из пустого слова.
2. Если $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит, то Σ^* счётно; в частности, любой язык непустого конечного алфавита не более, чем счётен;
3. Если Σ — бесконечный алфавит, то $\mathrm{card}(\Sigma^*) = \mathrm{card}(\Sigma)$ (такие языки нас интересовать в курсе не будут).

Пример А1.1.

Пусть $\Sigma = \{0\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^n \leftrightharpoons \underbrace{00\ldots0}_{n}$ для подходящего $n \in \omega$.

Слова, конкатенация

Пример A1.2.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}1^{m_2}\ldots 0^{n_k}1^{m_k}$ для подходящих $k \in \omega$ и $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots, n_k, m_k \in \omega$.

Слова, конкатенация

Пример А1.2.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}1^{m_2}\ldots 0^{n_k}1^{m_k}$ для подходящих $k \in \omega$ и $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots, n_k, m_k \in \omega$.

Определение А1.1.

Определим операцию **конкатенации** (приписывания) на словах следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_p$, $\beta = s_1 s_2 \ldots s_q$, то $\alpha \hat{}\, \beta \leftrightharpoons w_1 w_2 \ldots w_p s_1 s_2 \ldots s_q$ $(p, q \in \omega)$.

Слова, конкатенация

Пример A1.2.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}1^{m_2}\ldots 0^{n_k}1^{m_k}$ для подходящих $k \in \omega$ и $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots, n_k, m_k \in \omega$.

Определение A1.1.

Определим операцию **конкатенации** (приписывания) на словах следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_p$, $\beta = s_1 s_2 \ldots s_q$, то $\alpha \hat{\ } \beta \leftrightharpoons w_1 w_2 \ldots w_p s_1 s_2 \ldots s_q$ $(p, q \in \omega)$.

Определение A1.2.

Говорят, слово β является **(собственным; начальным; собственным начальным) подсловом** слова α и записывают как $\beta \sqsubseteq \alpha$ ($\beta \sqsubset \alpha$; $\beta \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$; $\beta \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha$), если найдутся слова γ и δ такие, что $\alpha = (\gamma \hat{\ } \beta)\hat{\ }\delta$ (причём $\gamma \hat{\ } \delta \neq \varepsilon$; $\gamma = \varepsilon$; $\gamma = \varepsilon$ и $\delta \neq \varepsilon$).

Слова, конкатенация

Предложение A1.1.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$. Тогда выполняется следующее:

- $\alpha\hat{}\varepsilon = \varepsilon\hat{}\alpha = \alpha$ $(\alpha \in \Sigma^*)$;
- $\alpha\hat{}(\beta\hat{}\gamma) = (\alpha\hat{}\beta)\hat{}\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*)$;
- если $\Sigma = \{0\}$, то $\alpha\hat{}\beta = \beta\hat{}\alpha$ для всех $\alpha, \beta \in \Sigma^*$;
- если $\Sigma = \{0, 1\}$, то $\alpha\hat{}\beta \neq \beta\hat{}\alpha$ в общем случае (например, для $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ имеет место $01 \neq 10$).

Слова, конкатенация

Предложение A1.1.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$. Тогда выполняется следующее:

- $\alpha\hat{}\varepsilon = \varepsilon\hat{}\alpha = \alpha$ $(\alpha \in \Sigma^*)$;
- $\alpha\hat{}(\beta\hat{}\gamma) = (\alpha\hat{}\beta)\hat{}\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*)$;
- если $\Sigma = \{0\}$, то $\alpha\hat{}\beta = \beta\hat{}\alpha$ для всех $\alpha, \beta \in \Sigma^*$;
- если $\Sigma = \{0, 1\}$, то $\alpha\hat{}\beta \neq \beta\hat{}\alpha$ в общем случае (например, для $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ имеет место $01 \neq 10$).

Примеры A1.3.

1. $\alpha_1 = 00,\ \beta_1 = 10 \mapsto \alpha_1\hat{}\beta_1 = 0010$;
2. $\alpha_2 = 001,\ \beta_2 = 0 \mapsto \alpha_2\hat{}\beta_2 = 0010$;
3. $\alpha_3 = 01,\ \beta_3 = 10 \mapsto \alpha_3\hat{}\beta_3 = 0110$;
4. $\alpha_4 = 0,\ \beta_4 = 110 \mapsto \alpha_4\hat{}\beta_4 = 0110$.

Слова, длины

Определение А1.3.

Пусть Σ — алфавит. Определим операцию **длины** lh на словах из Σ^* следующим образом: $\mathrm{lh}(\alpha) \leftrightharpoons n$, если $\alpha \in \Sigma^n$ $(n \in \omega \setminus \{0\})$; $\mathrm{lh}(\varepsilon) = 0$. Фактически данная операция выдаёт количество символов в слове.

Слова, длины

Определение А1.3.

Пусть Σ — алфавит. Определим операцию **длины** lh на словах из Σ^* следующим образом: $\mathrm{lh}(\alpha) \leftrightharpoons n$, если $\alpha \in \Sigma^n$ $(n \in \omega \setminus \{0\})$; $\mathrm{lh}(\varepsilon) = 0$. Фактически данная операция выдаёт количество символов в слове.

Замечание А1.1.

Отметим, что имеет место равенство $\mathrm{lh}(\alpha_1\hat{}\alpha_2) = \mathrm{lh}(\alpha_1) + \mathrm{lh}(\alpha_2)$ для любых слов α_1 и α_2. В частности, если $\alpha \sqsubseteq \beta$, то $\mathrm{lh}(\alpha) \leqslant \mathrm{lh}(\beta)$; если же $\alpha \sqsubset \beta$, то $\mathrm{lh}(\alpha) < \mathrm{lh}(\beta)$.

Слова, обращение, инверсия

Определение А1.4.

Определим операцию **обращения** следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n$, то $\alpha^R \leftrightharpoons w_n \ldots w_2 w_1$.

Слова, обращение, инверсия

Определение А1.4.

Определим операцию **обращения** следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n$, то $\alpha^R \leftrightharpoons w_n \ldots w_2 w_1$.

Определение А1.5.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$ и пусть $w \in \Sigma$; тогда положим

$$\overline{w} = \begin{cases} 0, & \text{если } w = 1; \\ 1, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Определим теперь операцию **инверсии** на словах следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n (\in \{0; 1\}^*)$, то $\overline{\alpha} = \overline{w}_1 \overline{w}_2 \ldots \overline{w}_n$.

Слова, обращение, инверсия

Определение А1.4.

Определим операцию **обращения** следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n$, то $\alpha^R \leftrightharpoons w_n \ldots w_2 w_1$.

Определение А1.5.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$ и пусть $w \in \Sigma$; тогда положим

$$\overline{w} = \begin{cases} 0, & \text{если } w = 1; \\ 1, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Определим теперь операцию **инверсии** на словах следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n (\in \{0; 1\}^*)$, то $\overline{\alpha} = \overline{w}_1 \overline{w}_2 \ldots \overline{w}_n$.

Примеры А1.4.

1. $\alpha_1 = abc \mapsto \alpha_1^R = cba$;
2. $\alpha_2 = abba \mapsto \alpha_2^R = abba = \alpha_2$;
3. $\alpha_3 = abab \mapsto \alpha_3^R = baba$.

Обращение, инверсия

Примеры А1.5.

1. $\beta_1 = 1010 \mapsto \beta_1^R = 0101$;
2. $\beta_1 = 1010 \mapsto \overline{\beta_1} = 0101$;
3. $\beta_2 = 101 \mapsto \beta_2^R = 101$;
4. $\beta_2 = 101 \mapsto \overline{\beta_2} = 010$;
5. $\beta_3 = 110 \mapsto \beta_3^R = 011$;
6. $\beta_3 = 110 \mapsto \overline{\beta_3} = 001$.

Обращение, инверсия

Примеры A1.5.

1. $\beta_1 = 1010 \mapsto \beta_1^R = 0101$;
2. $\beta_1 = 1010 \mapsto \overline{\beta_1} = 0101$;
3. $\beta_2 = 101 \mapsto \beta_2^R = 101$;
4. $\beta_2 = 101 \mapsto \overline{\beta_2} = 010$;
5. $\beta_3 = 110 \mapsto \beta_3^R = 011$;
6. $\beta_3 = 110 \mapsto \overline{\beta_3} = 001$.

Сокращение.

Пусть a — буква; тогда через a^n будем обозначать слово $\underbrace{aa\ldots a}_{n}$ $(n \in \omega)$.

Языки, операции

Будем считать, что заранее зафиксирован алфавит Σ, и все рассматриваемые языки L_1, L_2 и L являются языками данного алфавита.

Языки, операции

Будем считать, что заранее зафиксирован алфавит Σ, и все рассматриваемые языки L_1, L_2 и L являются языками данного алфавита.

Теоретико-множественные.

1. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (**объединение**);
2. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cap L_2$ (**пересечение**);
3. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \setminus L_2$ (**разность**);
4. $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (**дополнение**).

Языки, операции

Будем считать, что заранее зафиксирован алфавит Σ, и все рассматриваемые языки L_1, L_2 и L являются языками данного алфавита.

Теоретико-множественные.

1. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (**объединение**);
2. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cap L_2$ (**пересечение**);
3. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \setminus L_2$ (**разность**);
4. $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (**дополнение**).

Структурные (основные).

1. $L_1, L_2 \mapsto L_1L_2 = \{\alpha_1\hat{}\alpha_2 \mid \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\}$ (**конкатенация языков**);
2. $L \mapsto L^* = \{\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_n \mid \alpha_i \in L, 1 \leqslant i \leqslant n, n \in \omega\}$ (**звездочка Клини**);
3. $L \mapsto L^+ = \{\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_n \mid \alpha_i \in L, 1 \leqslant i \leqslant n, n \in \omega \setminus \{0\}\}$.

Языки, операции

Структурные (доп.)

1. $L \mapsto L^R = \{\alpha^R \mid \alpha \in L\}$ (**обращение языка**);
2. $L \mapsto \overline{L} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in L\}$ (**инверсия языка**; только при $\Sigma = \{0; 1\}$).

Языки, операции

Структурные (доп.)

1. $L \mapsto L^R = \{\alpha^R \mid \alpha \in L\}$ (**обращение языка**);
2. $L \mapsto \overline{L} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in L\}$ (**инверсия языка**; только при $\Sigma = \{0; 1\}$).

Примеры A1.6.

Пусть $\Sigma = \{0; 1\}$, $L_1 = \{\underbrace{00\ldots0}_{n} | n \in \omega\}$, $L_2 = \{0\hat{\ }\underbrace{11\ldots1}_{n} | n \in \omega\}$;

тогда

- $L_1 \cap L_2 = \{0\}$;
- $L_1 L_2 = \{0^n\hat{\ }1^m | n \in \omega \setminus \{0\},\ m \in \omega\}$;
- $L_1^R = L_1$, $L_2^R = \{1^n\hat{\ }0 | n \in \omega\}$;
- $\overline{L_1} = \{1^n | n \in \omega\}$, $\overline{L_2} = \{1\hat{\ }0^n | n \in \omega\}$.

ДКА: определение

Определение А1.6.

Двухосновная структура $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ называется **детерминированным конечным автоматом (ДКА)**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний;
- $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит;
- $Q \cap \Sigma = \varnothing$;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ — функция перехода;
- $q_0 \in Q$ — начальное состояние;
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний.

Способы задания ДКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ДКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного графа, возможно, с петлями, в котором из каждой вершины, обозначающей состояние, исходит ровно одна стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. При этом помечаются также и вершины этого графа для того, чтобы можно было отличить начальное, а также конечные состояния от остальных.

Способы задания ДКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ДКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного графа, возможно, с петлями, в котором из каждой вершины, обозначающей состояние, исходит ровно одна стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. При этом помечаются также и вершины этого графа для того, чтобы можно было отличить начальное, а также конечные состояния от остальных.

Табличный.

Любой ДКА однозначно задаётся таблицей, описывающей функцию перехода, в которой определённым образом выделяются начальное состояние, а также конечные состояния.

ДКА: пример

Пример A1.7.

	0	1
$\triangleright q_0 *$	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_0

Как работает ДКА?

Пусть заданы детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ и слово $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, где $n \in \omega$. Для того, чтобы переработать данное слово на заданном автомате, необходимо проделать следующую процедуру:

$t = 0$: в момент $t = 0$ находимся в состоянии q_0 (в частности, если $\alpha = \varepsilon$, то в состоянии q_0 завершаем работу);

$t \mapsto t + 1$: предположим, что в момент времени t находимся в состоянии $q(t)$; тогда в момент $t + 1$ мы попадаем в состояние $q(t + 1) = \delta(q(t), a_{t+1})$;

Завершение. Если после полной переработки слова α мы попадаем в конечное состояние, а именно, $q(n) \in F$, то слово α распознается автоматом $\mathfrak{A}$; в противном случае слово α им не распознается.

ДКА: функция перехода

Определение A1.7.

Определим функцию $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$, расширяющую $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, индукцией по длине слова α следующим образом:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$;
- $\delta^*(q, \alpha\hat{\ }a) = \delta(\delta^*(q, \alpha), a)$.

ДКА: функция перехода

Определение A1.7.

Определим функцию $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$, расширяющую $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, индукцией по длине слова α следующим образом:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$;
- $\delta^*(q, \alpha\hat{\ }a) = \delta(\delta^*(q, \alpha), a)$.

Определение A1.8.

Язык, распознаваемый ДКА $\mathfrak{A}$, — это $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, \alpha) \in F\}$.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Предложение A1.2.

1) Пустой язык распознаваем некоторым ДКА.
2) Язык Σ^* распознаваем некоторым ДКА.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Предложение А1.2.

1) Пустой язык распознаваем некоторым ДКА.
2) Язык Σ^* распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_1 = (\{q_0\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_0) \mid a \in \Sigma\}, q_0, \varnothing)$ распознаёт пустой язык. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_0 \notin \varnothing = F$.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Предложение А1.2.

1) Пустой язык распознаваем некоторым ДКА.
2) Язык Σ^* распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат $\mathfrak{A}_1 = (\{q_0\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_0) \mid a \in \Sigma\}, q_0, \varnothing)$ распознаёт пустой язык. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\delta^*(q_0, \alpha) = q_0 \notin \varnothing = F$.
2) Покажем, что автомат $\mathfrak{A}_2 = (\{q_0\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_0) \mid a \in \Sigma\}, q_0, \{q_0\})$ распознаёт Σ^*. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\delta^*(q_0, \alpha) = q_0 \in \{q_0\} = F$. $\square$

Языки, распознаваемые ДКА

Предложение А1.3.

1) Язык $\{\varepsilon\}$ распознаваем некоторым ДКА.
2) Для любого $a \in \Sigma$ язык $\{a\}$ распознаваем некоторым ДКА.

Языки, распознаваемые ДКА

Предложение A1.3.

1) Язык $\{\varepsilon\}$ распознаваем некоторым ДКА.
2) Для любого $a \in \Sigma$ язык $\{a\}$ распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_3 = (\{q_0, q_1\}; \Sigma; \{((q, a), q_1) \mid q \in Q,\ a \in \Sigma\}, q_0, \{q_0\})$ распознаёт язык $\{\varepsilon\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^+$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_1 \notin \{q_0\} = F$, а $\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0 \in \{q_0\} = F$.

Языки, распознаваемые ДКА

Предложение А1.3.

1) Язык $\{\varepsilon\}$ распознаваем некоторым ДКА.
2) Для любого $a \in \Sigma$ язык $\{a\}$ распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_3 = (\{q_0, q_1\}; \Sigma; \{((q, a), q_1) \mid q \in Q,\ a \in \Sigma\}, q_0, \{q_0\})$ распознаёт язык $\{\varepsilon\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^+$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_1 \notin \{q_0\} = F$, а $\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0 \in \{q_0\} = F$.
2) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_4 = (\{q_0, q_1, q_2\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_1), ((q_1, a), q_2), ((q_2, a), q_2)\} \cup \{((q, b), q_2) \mid a \neq b \in \Sigma,\ q \in Q\}, q_0, \{q_1\})$ распознаёт $\{a\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^+$ $(\alpha \neq a)$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_2 \notin \{q_1\} = F$; кроме того,
$\delta^*(q_0, a) = \delta(q_0, a) = q_1 \in \{q_1\} = F$ и
$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0 \notin \{q_1\} = F$. $\square$

Дополнение

Теорема А1.1.

Если язык L конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаётся некоторым ДКА, то и его дополнение $\Sigma^* \setminus \mathrm{L}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Дополнение

Теорема A1.1.

Если язык L конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаётся некоторым ДКА, то и его дополнение $\Sigma^* \setminus \mathrm{L}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его дополнение распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta, q_0, Q \setminus F)$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}') \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \in Q \setminus F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \notin F \Leftrightarrow \alpha \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

Дополнение

Теорема A1.1.

Если язык L конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаётся некоторым ДКА, то и его дополнение $\Sigma^* \setminus \mathrm{L}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его дополнение распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta, q_0, Q \setminus F)$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}') \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \in Q \setminus F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \notin F \Leftrightarrow \alpha \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. □

Замечание A1.2.

Отметим, что все атрибуты (количество состояний и, следовательно, переходов) остаются неизменными при переходе от автомата $\mathfrak{A}$ к автомату $\mathfrak{A}'$ в теореме A1.1.

Инверсия

Теорема A1.2.

Если язык L алфавита $\Sigma = \{0; 1\}$ распознаётся некоторым ДКА, то и его инверсия $\overline{\mathrm{L}}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Инверсия

Теорема A1.2.

Если язык L алфавита $\Sigma = \{0; 1\}$ распознаётся некоторым ДКА, то и его инверсия $\overline{\mathrm{L}}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его инверсия распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \tau, q_0, F)$, где $\tau = \{((q, \overline{a}), q') \mid ((q, a), q') \in \delta\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\tau^*(q, \overline{\alpha}) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, \alpha) \in F$, что нетрудно доказывается индукцией по длине слова α. Таким образом, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = \overline{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$. $\square$

Инверсия

Теорема A1.2.

Если язык L алфавита $\Sigma = \{0; 1\}$ распознаётся некоторым ДКА, то и его инверсия $\overline{\mathrm{L}}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его инверсия распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \tau, q_0, F)$, где $\tau = \{((q, \bar{a}), q') \mid ((q, a), q') \in \delta\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\tau^*(q, \overline{\alpha}) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, \alpha) \in F$, что нетрудно доказывается индукцией по длине слова α. Таким образом, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = \overline{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$. □

Замечание A1.3.

Отметим, что все атрибуты (количество состояний и, следовательно, переходов) остаются неизменными при переходе от автомата $\mathfrak{A}$ к автомату $\mathfrak{A}'$ в теореме A1.2.

ε-НКА: определение

Определение А1.9.

Двухосновная структура $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ называется **недетерминированным конечным автоматом с ε-переходами (ε-НКА)**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний;
- $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит;
- $Q \cap \Sigma = \varnothing$;
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ — функция перехода;
- $\varnothing \neq Q_0 \subseteq Q$ — множество начальных состояний;
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний.

Способы задания ε-НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ε-НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного графа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого графа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие!!!), а также конечные состояния от остальных.

Способы задания ε-НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ε-НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного графа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого графа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие!!!), а также конечные состояния от остальных.

Табличный.

Любой ε-НКА однозначно задаётся таблицей, описывающей функцию перехода, в которой определенным образом выделяются начальные, а также конечные состояния.

ε-НКА: пример

Пример A1.8.

Как работает ε-НКА?

Пусть заданы недетерминированный конечный автомат с ε-переходами $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ и слово $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, где $n \in \omega$. Для того, чтобы переработать данное слово на заданном автомате, необходимо проделать следующую процедуру:

$t = 0$: в момент $t = 0$ находимся в одном из состояний из Q_0;

$t \mapsto t+1$: предположим, что в момент времени t находимся в состоянии $q(t)$; при этом переработано слово $a_1 a_2 \ldots a_{t'}$; тогда в момент $t+1$ мы попадаем в состояние $q(t+1) \in \delta(q(t), a_{t'+1}) \cup \delta(q(t), \varepsilon)$;

Завершение. Если после полной переработки слова α мы попадаем в конечное состояние, а именно, $q(n') \in F$ $(n' \geqslant n)$, то слово α распознается автоматом $\mathfrak{A}$; если никакая последовательность не приводит в конечное состояние, то слово α им не распознается.

ε-НКА: распознаваемые слова

Определение A1.10.

Пусть задан ε-НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. Пусть также $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что слово α **распознаётся ε-НКА** $\mathfrak{A}$, если найдутся состояния r_0^0, r_0^1, ..., $r_0^{k_0}$, r_1^0, r_1^1, ..., $r_1^{k_1}$, ..., r_n^0, r_n^1, ..., $r_n^{k_n} \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0^0 \in Q_0$;
- $r_i^{j+1} \in \delta(r_i^j, \varepsilon)$, $0 \leqslant j < k_i$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$;
- $r_{i+1}^0 \in \delta(r_i^{k_i}, w_{i+1})$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n^{k_n} \in F$.

ε-НКА: распознаваемые слова

Определение A1.10.

Пусть задан ε-НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. Пусть также $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что слово α **распознаётся** ε**-НКА** $\mathfrak{A}$, если найдутся состояния r_0^0, r_0^1, $\ldots$, $r_0^{k_0}$, r_1^0, r_1^1, $\ldots$, $r_1^{k_1}$, $\ldots$, r_n^0, r_n^1, $\ldots$, $r_n^{k_n} \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0^0 \in Q_0$;
- $r_i^{j+1} \in \delta(r_i^j, \varepsilon)$, $0 \leqslant j < k_i$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$;
- $r_{i+1}^0 \in \delta(r_i^{k_i}, w_{i+1})$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n^{k_n} \in F$.

Определение A1.11.

Язык, распознаваемый ε-НКА $\mathfrak{A}$, — это $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \text{ распознается } \mathfrak{A}\}$.

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Теорема А1.3.

Для любого ДКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Теорема А1.3.

Для любого ДКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть задан ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$. Определим ε-НКА $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \tau, \{q_0\}, F)$ так, что $\tau = \{((q, a), \{\delta(q, a)\}) \mid q \in Q,\ a \in \Sigma\}$, и покажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$ таково, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$, т. е. $\delta^*(q_0, \alpha) \in F$. Рассмотрим последовательность $r_0 = q_0 = \delta^*(q_0, \varepsilon)$, $r_1 = \delta(r_0, w_1) = \delta^*(q_0, w_1)$, $r_2 = \delta(r_1, w_2) = = \delta^*(q_0, w_1 w_2)$, ..., $r_n = \delta(r_{n-1}, w_n) = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \dots w_n) = \delta^*(q_0, \alpha)$ состояний; она удовлетворяет определению распознаваемости слова α автоматом $\mathfrak{A}'$, поскольку $r_0 \in \{q_0\}$, $r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1}) \in \{\delta(r_i, w_{i+1})\} = \tau(r_i, w_{i+1})$ и $r_n \in F$; таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть теперь $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; так как $\mathfrak{A}'$ не содержит ε-переходов, найдётся последовательность состояний $r_0 = q_0$, r_1, r_2, $\ldots$, $r_n \in F$, для которой справедливы условия $r_{i+1} \in \tau(r_i, w_{i+1}) = \{\delta(r_i, w_{i+1})\}$. Далее, индукцией по длине слова доказывается, что $r_0 = \delta^*(q_0, \varepsilon)$, $r_i = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; в частности, $r_n = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \ldots w_n) = \delta^*(q_0, \alpha) \in F$; тем самым, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть теперь $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; так как $\mathfrak{A}'$ не содержит ε-переходов, найдётся последовательность состояний $r_0 = q_0$, r_1, r_2, …, $r_n \in F$, для которой справедливы условия $r_{i+1} \in \tau(r_i, w_{i+1}) = \{\delta(r_i, w_{i+1})\}$. Далее, индукцией по длине слова доказывается, что $r_0 = \delta^*(q_0, \varepsilon)$, $r_i = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; в частности, $r_n = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \ldots w_n) = \delta^*(q_0, \alpha) \in F$; тем самым, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

Замечание А1.4.

Теорема А1.3 носит чисто теоретический характер и демонстрирует, что любой детерминированный конечный автомат может рассматриваться, как частный случай недетерминированного конечного автомата.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Формально любой ε-переход не увеличивает временную сложность, поскольку для "считывания" пустого слова не требуется дополнительных усилий. В связи с этим возникает вопрос, имеется ли возможность построить недетерминированный конечный автомат, не использующий ε-переходов? Если да, то какие усилия для этого потребуются и чем придётся пожертвовать?

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Теорема A1.4.

Для любого ε-НКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$, не содержащий ε-переходов, для которого имеет место $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Теорема A1.4.

Для любого ε-НКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$, не содержащий ε-переходов, для которого имеет место $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть задан ε-НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. На множестве Q определим отношение предпорядка следующим образом:
$q_0 \trianglelefteq q_1$, если и только если найдётся последовательность $q_0 = r_0$, $r_1, \ldots, r_n = q_1$ состояний такая, что $r_{i+1} \in \delta(r_i, \varepsilon)$ для всех i, $0 \leqslant i < n$, для некоторого $n \in \omega$.
Далее, определим автомат $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta', Q_0, F')$ так, что $\delta'(q, a) = \bigcup\{\delta(q', a) \mid q \trianglelefteq q'\}$ для всех $q \in Q$ и $a \in \Sigma$ и $F' = \{q \mid q \trianglelefteq q' \text{ для некоторого } q' \in F\}$.
Покажем теперь, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Доказательство (продолжение).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда найдётся последовательность r_0, r_1, …, r_n состояний, для которой выполняется следующее: $r_0 \in Q_0$, $r_n \in F'$ и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta'(r_i, w_{i+1})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$, где $n \in \omega$. Так как $r_{i+1} \in \delta'(r_i, w_{i+1})$, существует последовательность $r_i = s_i^0$, s_i^1, …, $s_i^{k_i}$ состояний такая, что $s_i^{j+1} \in \delta(s_i^j, \varepsilon)$ (это означает, что $r_i \trianglelefteq s_i^{k_i}$) и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta(s_i^{k_i}, w_{i+1})$, где $0 \leqslant i < n$. Так как $r_n \in F'$, существует последовательность $r_n = s_n^0$, s_n^1, …, $s_n^{k_n}$ состояний такая, что $s_n^{i+1} \in \delta(s_n^i, \varepsilon)$ для всех i, $0 \leqslant i < n$ (снова это означает, что $r_n \trianglelefteq s_n^{k_n}$), и, к тому же, $s_n^{k_n} \in F$. Тем самым, последовательность s_0^0, s_0^1, …, $s_0^{k_0}$, s_1^0, s_1^1, …, $s_1^{k_1}$, …, s_n^0, s_n^1, …, $s_n^{k_n}$ состояний удовлетворяет условиям определения для $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ таково, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$, и пусть $r_0^0,\ r_0^1,\ \ldots,\ r_0^{k_0},\ r_1^0,\ r_1^1,\ \ldots,\ r_1^{k_1},\ \ldots,\ r_n^0,\ r_n^1,\ \ldots,\ r_n^{k_n}$ — последовательность состояний из определения распознавания слова α на ε-НКА $\mathfrak{A}$. Далее, из определения отношения $\trianglelefteq$ на словах вытекает, что $r_i^0 \trianglelefteq r_i^{k_i}$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, $r_{i+1}^0 \in \delta'(r_i^0, w_{i+1})$ и $r_n^0 \in F'$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. $\square$

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ таково, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$, и пусть $r_0^0,\ r_0^1,\ \ldots,\ r_0^{k_0},\ r_1^0,\ r_1^1,\ \ldots,\ r_1^{k_1},\ \ldots,\ r_n^0,\ r_n^1,\ \ldots,\ r_n^{k_n}$ — последовательность состояний из определения распознавания слова α на ε-НКА $\mathfrak{A}$. Далее, из определения отношения $\trianglelefteq$ на словах вытекает, что $r_i^0 \trianglelefteq r_i^{k_i}$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, $r_{i+1}^0 \in \delta'(r_i^0, w_{i+1})$ и $r_n^0 \in F'$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. $\square$

Замечание А1.5.

Трансформация, описанная в теореме А1.4, имеет следующую сложность: количество состояний сохраняется (обозначим его через $n(Q)$); если в $\mathfrak{A}$ количество стрелок в переходах, соответствующих буквам из Σ, равнялось n, то количество стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ можно оценить числом $n' \leqslant n(Q) \cdot n$, причём данная оценка является точной (почему?)

НКА: определение

Обычно в литературе под недетерминированным конечным автоматом понимается конечный автомат, не содержащий ε-переходов.

НКА: определение

Обычно в литературе под недетерминированным конечным автоматом понимается конечный автомат, не содержащий ε-переходов.

Определение А1.12.

Двухосновная структура $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ называется **недетерминированным конечным автоматом (НКА)**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний;
- $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит;
- $Q \cap \Sigma = \varnothing$;
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ — функция перехода;
- $\varnothing \neq Q_0 \subseteq Q$ — множество начальных состояний;
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний.

Способы задания НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного графа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из Σ, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого графа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие!!!), а также конечные состояния от остальных.

Способы задания НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного графа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из Σ, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого графа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие!!!), а также конечные состояния от остальных.

Табличный.

Любой НКА однозначно задаётся таблицей, описывающей функцию перехода, в которой определённым образом выделяются начальные, а также конечные состояния.

НКА: пример

Пример А1.9.

Как работает НКА?

Пусть заданы недетерминированный конечный автомат $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ и слово $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, где $n \in \omega$. Для того, чтобы переработать данное слово на заданном автомате, необходимо проделать следующую процедуру:

$t = 0$: в момент $t = 0$ находимся в одном из состояний из Q_0;

$t \mapsto t + 1$: предположим, что в момент времени t находимся в состоянии $q(t)$; при этом переработано слово $a_1 a_2 \ldots a_t$; тогда в момент $t + 1$ мы попадаем в состояние $q(t + 1) \in \delta(q(t), a_{t+1})$;

Завершение. Если после полной переработки слова α мы попадаем в конечное состояние, а именно, $q(n) \in F$, то слово α распознается автоматом $\mathfrak{A}$; если никакая последовательность не приводит в конечное состояние, то слово α им не распознается.

НКА: распознаваемые слова

Определение А1.13.

Пусть задан НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. Пусть также $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что слово α **распознаётся** НКА $\mathfrak{A}$, если найдутся состояния $r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0 \in Q_0$;
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n \in F$.

НКА: распознаваемые слова

Определение А1.13.

Пусть задан НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. Пусть также $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что слово α **распознаётся** НКА $\mathfrak{A}$, если найдутся состояния r_0, r_1, …, $r_n \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0 \in Q_0$;
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n \in F$.

Определение А1.14.

Язык, распознаваемый НКА $\mathfrak{A}$, — это $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \text{ распознаётся НКА } \mathfrak{A}\}$.

НКА: основные примеры

Предложение А1.4.

Для любого $\alpha \in \Sigma^*$ язык $\{\alpha\}$ распознаваем некоторым НКА.

НКА: основные примеры

Предложение A1.4.

Для любого $\alpha \in \Sigma^*$ язык $\{\alpha\}$ распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$; определим автомат $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, \{q_0\}, F)$ следующим образом:

- $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$;
- $F = \{q_n\}$;
- $\delta = \{((q_i, w_{i+1}), \{q_{i+1}\}) \mid 0 \leqslant i < n\} \cup \{((q_i, a), \varnothing) \mid a \in \Sigma \setminus \{w_{i+1}\}, 0 \leqslant i < n\} \cup \{((q_n, a), \varnothing) \mid a \in \Sigma\}$.

Так как последовательность q_0, q_1, $\ldots$, q_n состояний удовлетворяет условиям определения распознавания слова α в автомате $\mathfrak{A}$, имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

НКА: основные примеры

Доказательство (окончание).

Остаётся теперь только показать, что $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ при $\beta \in \Sigma^* \setminus \{\alpha\}$. Разберем несколько случаев.

НКА: основные примеры

Доказательство (окончание).

Остаётся теперь только показать, что $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ при $\beta \in \Sigma^* \setminus \{\alpha\}$. Разберем несколько случаев.

$\beta \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$. В этом случае единственной последовательностью состояний для считывания слова β будет q_0, q_1, $\ldots$, $q_{\mathrm{lh}(\beta)}$, причём $\mathrm{lh}(\beta) < n$; в частности, $q_{\mathrm{lh}(\beta)} \notin \{q_n\} = F$. Таким образом, $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

НКА: основные примеры

Доказательство (окончание).

Остаётся теперь только показать, что $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ при $\beta \in \Sigma^* \setminus \{\alpha\}$. Разберем несколько случаев.

$\beta \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$. В этом случае единственной последовательностью состояний для считывания слова β будет q_0, q_1, $\ldots$, $q_{\mathrm{lh}(\beta)}$, причём $\mathrm{lh}(\beta) < n$; в частности, $q_{\mathrm{lh}(\beta)} \notin \{q_n\} = F$. Таким образом, $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

$\beta \not\sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$. Пусть γ — слово наибольшей длины, для которого выполняются соотношения $\gamma \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$ и $\gamma \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \beta$. Тогда $\beta = \gamma\hat{\ }\beta_1$ для некоторого $\beta_1 \neq \varepsilon$ (скажем, $\beta_1 = a\hat{\ }\beta_2$). Как и ранее, единственной считывающей последовательностью состояний слова γ будет q_0, q_1, $\ldots$, $q_{\mathrm{lh}(\gamma)}$. Из того, что $\beta \not\sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$, вытекает, что $\gamma\hat{\ }a \not\sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$; следовательно, $\delta(q_{\mathrm{lh}(\gamma)}, a) = \varnothing$. Таким образом, $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. □

НКА: объединение языков

Теорема А1.5.

Если языки L_1 и L_2 конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаются некоторыми НКА, то язык $L_1 \cup L_2$ также распознаётся некоторым НКА.

НКА: объединение языков

Теорема А1.5.

Если языки L_1 и L_2 конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаются некоторыми НКА, то язык $L_1 \cup L_2$ также распознаётся некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть недетерминированные конечные автоматы $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, Q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, Q_0^2, F_2)$ таковы, что $L_1 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $L_2 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. Без ограничения общности, можно считать, что $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Положим $\mathfrak{A}' = (Q_1 \cup Q_2; \Sigma; \delta_1 \cup \delta_2, Q_0^1 \cup Q_0^2, F_1 \cup F_2)$ и докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = L_1 \cup L_2$.

НКА: объединение языков

Доказательство (окончание).

$L_1 \cup L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in L_1 \cup L_2$; разберём только случай, когда $\alpha \in L_1$, — случай, когда $\alpha \in L_2$, рассматривается аналогично. Пусть последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний свидетельствует о том, что $\alpha \in L_1$ в автомате $\mathfrak{A}_1$. Тогда $q_0 \in Q_0^1 \subseteq Q_0^1 \cup Q_0^2$, $q_{i+1} \in \delta_1(q_i, w_{i+1}) \subseteq (\delta_1 \cup \delta_2)(q_i, w_{i+1})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$, и, к тому же, $q_n \in F_1 \subseteq F_1 \cup F_2$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: объединение языков

Доказательство (окончание).

$L_1 \cup L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in L_1 \cup L_2$; разберём только случай, когда $\alpha \in L_1$, — случай, когда $\alpha \in L_2$, рассматривается аналогично. Пусть последовательность q_0, q_1, ..., q_n состояний свидетельствует о том, что $\alpha \in L_1$ в автомате $\mathfrak{A}_1$. Тогда $q_0 \in Q_0^1 \subseteq Q_0^1 \cup Q_0^2$, $q_{i+1} \in \delta_1(q_i, w_{i+1}) \subseteq (\delta_1 \cup \delta_2)(q_i, w_{i+1})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$, и, к тому же, $q_n \in F_1 \subseteq F_1 \cup F_2$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L_1 \cup L_2$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда найдётся последовательность q_0, q_1, ..., q_n состояний из $Q_1 \cup Q_2$ такая, что $q_0 \in Q_0^1 \cup Q_0^2$, $q_{i+1} \in (\delta_1 \cup \delta_2)(q_i, w_{i+1})$ и, к тому же, $q_n \in F_1 \cup F_2$. Пусть для определённости $q_0 \in Q_0^2$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ и $(\delta_1 \cup \delta_2) \restriction Q_2 = \delta_2$, приходим к тому, что $q_i \in Q_2$, $q_{i+1} \in \delta_2(q_i, w_{i+1})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$, и, к тому же, $q_n \in F_2$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2) \subseteq L_1 \cup L_2$. $\square$

НКА: объединение языков

Замечание A1.6.

Трансформация, описанная в теореме A1.5, имеет следующую сложность: количество состояний и стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ есть сумма соответственно количеств состояний и количеств стрелок из автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

НКА: объединение языков

Замечание А1.6.

Трансформация, описанная в теореме А1.5, имеет следующую сложность: количество состояний и стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ есть сумма соответственно количеств состояний и количеств стрелок из автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Следствие А1.1.

Объединение конечного числа языков, распознаваемых недетерминированными конечными автоматами, является языком, распознаваемым некоторым НКА.

НКА: объединение языков

Замечание A1.6.

Трансформация, описанная в теореме A1.5, имеет следующую сложность: количество состояний и стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ есть сумма соответственно количеств состояний и количеств стрелок из автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Следствие A1.1.

Объединение конечного числа языков, распознаваемых недетерминированными конечными автоматами, является языком, распознаваемым некоторым НКА.

Доказательство.

Проводится индукцией по количеству n языков, распознаваемых недетерминированными конечными автоматами, причём база индукции описывается в предложении A1.2(1), а индукционный шаг — в теореме A1.5. $\square$

НКА: конечные языки

Следствие А1.2.

Любой конечный язык распознаваем некоторым НКА.

НКА: конечные языки

Следствие А1.2.

Любой конечный язык распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из следствия А1.1 и предложения А1.4. $\square$

НКА: обращение

Теорема А1.6.

Язык L распознаваем некоторым НКА, если и только если его обращение L^R также распознаваемо некоторым НКА.

НКА: обращение

Теорема А1.6.

Язык L распознаваем некоторым НКА, если и только если его обращение L^R также распознаваемо некоторым НКА.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Разберём только случай, когда $L \neq \varnothing$: случай, когда $L = \varnothing$, очевиден, поскольку L^R также пуст. Пусть НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ таков, что $L = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что $L^R = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ для автомата $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta', F, Q_0)$, где $q \in \delta'(q', a) \Leftrightarrow q' \in \delta(q, a)$ для всех $q, q' \in Q$ и $a \in \Sigma$. (Другими словами, в автомате все стрелки меняем на противоположные, начальные состояния — на конечные, а конечные состояния — на начальные.)

НКА: обращение

Теорема A1.6.

Язык L распознаваем некоторым НКА, если и только если его обращение L^R также распознаваемо некоторым НКА.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Разберём только случай, когда $L \neq \varnothing$: случай, когда $L = \varnothing$, очевиден, поскольку L^R также пуст. Пусть НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ таков, что $L = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что $L^R = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ для автомата $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta', F, Q_0)$, где $q \in \delta'(q', a) \Leftrightarrow q' \in \delta(q, a)$ для всех $q, q' \in Q$ и $a \in \Sigma$. (Другими словами, в автомате все стрелки меняем на противоположные, начальные состояния — на конечные, а конечные состояния — на начальные.)

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L^R$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существует последовательность q_0, q_1, ..., q_n состояний такая, что $q_0 \in F$, $q_n \in Q_0$ и $q_{i+1} \in \delta'(q_i, w_{i+1})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$.

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \ldots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \dots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.
$L^R \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in L^R$, т. е. $w_n \dots w_2 w_1 \in L$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{n-i})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$. Из определения следует, что $q_i \in \delta'(q_{i+1}, w_{n-i})$ и, следовательно, $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \dots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.

$L^R \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in L^R$, т. е. $w_n \dots w_2 w_1 \in L$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{n-i})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$. Из определения следует, что $q_i \in \delta'(q_{i+1}, w_{n-i})$ и, следовательно, $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$(\Leftarrow)$ Если L^R распознаваем некоторым НКА, то, по доказанному, $(L^R)^R = L$ также распознаваем некоторым НКА. $\square$

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \ldots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.
$L^R \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in L^R$, т. е. $w_n \ldots w_2 w_1 \in L$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{n-i})$ для всех i, $0 \leqslant i < n$. Из определения следует, что $q_i \in \delta'(q_{i+1}, w_{n-i})$ и, следовательно, $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.
($\Leftarrow$) Если L^R распознаваем некоторым НКА, то, по доказанному, $(L^R)^R = L$ также распознаваем некоторым НКА. □

Замечание А1.7.

Трансформация, описанная в теореме А1.6, сохраняет как количество состояний, так и количество стрелок.

НКА: конкатенация

Теорема А1.7.

Если языки L_1 и L_2 распознаваемы некоторыми НКА, то их конкатенация L_1L_2 также распознаваема некоторым НКА.

НКА: конкатенация

Теорема А1.7.

Если языки L_1 и L_2 распознаваемы некоторыми НКА, то их конкатенация L_1L_2 также распознаваема некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть НКА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, Q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, Q_0^2, F_2)$ таковы, что $L_1 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $L_2 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. Будем считать, что $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. По теореме А1.4, достаточно построить ε-НКА, распознающий язык L_1L_2. Определим $\mathfrak{A}' = (Q_1 \cup Q_2; \Sigma; \delta', Q_0^1, F_2)$ так, что
$\delta' = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{((q, \varepsilon), q') \mid q \in F_1,\ q' \in Q_0^2\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \notin F_1\}$;
докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = L_1L_2$.

НКА: конкатенация

Доказательство (продолжение).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L_1L_2$. Пусть $\alpha = w_1w_2\dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существуют последовательность q_0, q_1, …, q_m $(m \geqslant n)$ и $0 \leqslant i_0 < i_1 < \dots < i_{n-1} < m$, удовлетворяющие следующим условиям: $q_0 \in Q_0^1$, $q_m \in F_2$ и $q_{i_j+1} \in \delta'(q_{i_j}, w_{j+1})$ $(0 \leqslant j < n)$, а также $q_{k+1} \in \delta'(q_k, \varepsilon)$ $(0 \leqslant k < m,\ k \neq i_j,\ 0 \leqslant j < n)$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, должно выполняться $m > n$. Из того, что $\delta'(q, \varepsilon) \subseteq Q_2$ $(q \in Q_1 \cup Q_2)$ и $\delta'(q', \varepsilon) = \varnothing$ $(q' \in Q_2)$, вытекает $m \leqslant n + 1$. Пусть k_0 таково, что $q_{k_0+1} \in \delta'(q_{k_0}, \varepsilon)$; тогда $q_{k_0} \in F_1$ и $q_j \in Q_1$ $(0 \leqslant j \leqslant k_0)$; следовательно, $\alpha_1 = w_1w_2\dots w_{k_0} \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1) = L_1$. Кроме того, $q_{k_0+1} \in Q_0^2$ и $q_j \in Q_2$ $(k_0 + 1 \leqslant j \leqslant n + 1)$; следовательно, $\alpha_2 = w_{k_0+1}\dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2) = L_2$. Таким образом, $\alpha = \alpha_1\hat{}\alpha_2 \in L_1L_2$.

НКА: конкатенация

Доказательство (окончание).

$L_1L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $u_1u_2\ldots u_m \in L_1$ и $v_1v_2\ldots v_n \in L_2$; тогда существуют последовательности $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q_1$ и $s_0, s_1, \ldots, s_n \in Q_2$, удовлетворяющие следующим условиям: $r_0 \in Q_0^1$, $s_0 \in Q_0^2$, $r_m \in F_1$, $s_n \in F_2$ и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta_1(r_i, u_{i+1})$ $(0 \leqslant i < m)$, $s_{j+1} \in \delta_2(s_j, v_{j+1})$ $(0 \leqslant j < n)$. Далее, имеем $s_0 \in \delta'(r_m, \varepsilon)$ и, тем самым, $u_1u_2\ldots u_mv_1v_2\ldots v_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. $\square$

НКА: конкатенация

Доказательство (окончание).

$L_1L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $u_1u_2\ldots u_m \in L_1$ и $v_1v_2\ldots v_n \in L_2$; тогда существуют последовательности $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q_1$ и $s_0, s_1, \ldots, s_n \in Q_2$, удовлетворяющие следующим условиям: $r_0 \in Q_0^1$, $s_0 \in Q_0^2$, $r_m \in F_1$, $s_n \in F_2$ и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta_1(r_i, u_{i+1})$ $(0 \leqslant i < m)$, $s_{j+1} \in \delta_2(s_j, v_{j+1})$ $(0 \leqslant j < n)$. Далее, имеем $s_0 \in \delta'(r_m, \varepsilon)$ и, тем самым, $u_1u_2\ldots u_mv_1v_2\ldots v_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. $\square$

Замечание А1.8.

Трансформация построения НКА без ε-переходов, описанная в теореме А1.7, имеет следующую сложность: количество состояний равняется $n(Q_1) + n(Q_2)$, а количество стрелок — $n' \leqslant n_1 + n_2 + n(Q_1) \cdot n_2$, причём данная оценка является точной. (см. теорему А1.4).

НКА: свойство вахтера

Зачастую на практике необходимо, чтобы конечный автомат имел единственное начальное состояние. Следующая трансформация позволяет не только предполагать данное условие, но и при этом, что в начальное состояние вернуться уже не удастся.

НКА: свойство вахтера

Зачастую на практике необходимо, чтобы конечный автомат имел единственное начальное состояние. Следующая трансформация позволяет не только предполагать данное условие, но и при этом, что в начальное состояние вернуться уже не удастся.

Теорема A1.8.

Для любого НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ существует НКА $\mathfrak{A}' = (Q'; \Sigma; \delta', \{\overline{q}\}, F')$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, удовлетворяющий, к тому же, условию $\overline{q} \notin \delta'(q, a)$ для всех $q \in Q'$ и $a \in \Sigma$.

НКА: свойство вахтера

Зачастую на практике необходимо, чтобы конечный автомат имел единственное начальное состояние. Следующая трансформация позволяет не только предполагать данное условие, но и при этом, что в начальное состояние вернуться уже не удастся.

Теорема A1.8.

Для любого НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ существует НКА $\mathfrak{A}' = (Q'; \Sigma; \delta', \{\overline{q}\}, F')$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, удовлетворяющий, к тому же, условию $\overline{q} \notin \delta'(q, a)$ для всех $q \in Q'$ и $a \in \Sigma$.

Доказательство.

По теореме A1.4, достаточно построить ε-НКА $\mathfrak{A}'$, удовлетворяющий заключению теоремы. Определим $\mathfrak{A}' = (Q \cup \{\overline{q}\}; \Sigma; \delta', \{\overline{q}\}, F)$ так, что $\overline{q} \notin Q$ и $\delta' = \delta \cup \{((\overline{q}, \varepsilon), Q_0)\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \in Q\}$; докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: свойство вахтера

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и, к тому же, $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) = \delta'(q_i, w_{i+1})$ $(0 \leqslant i < n)$. Так как $q_0 \in Q_0 = \delta'(\overline{q}, \varepsilon)$, имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ (следует рассмотреть последовательность $\overline{q}$, q_0, q_1, …, q_n).

НКА: свойство вахтера

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда существует последовательность q_0, q_1, ..., q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и, к тому же, $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) = \delta'(q_i, w_{i+1})$ $(0 \leqslant i < n)$. Так как $q_0 \in Q_0 = \delta'(\overline{q}, \varepsilon)$, имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ (следует рассмотреть последовательность $\overline{q}$, q_0, q_1, ..., q_n).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существуют последовательность r_0, r_1, ..., r_m $(m > n)$ состояний и $0 \leqslant j_0 < j_1 < \ldots < j_n \leqslant m$ такие, что $r_0 = \overline{q}$, $r_m \in F$ и, к тому же, $r_{j_i+1} \in \delta'(r_{j_i}, w_{i+1}) = \delta(r_{j_i}, w_{i+1})$ $(0 \leqslant i < n)$, $r_{k+1} \in \delta'(r_k, \varepsilon)$ $(0 \leqslant k < m,\ k \neq j_i,\ 0 \leqslant i < n)$. Из определения функции δ' перехода, а также из того, что $\mathfrak{A}$ не содержит ε-переходов, следует, что $r_1 \in Q_0 (= \delta'(r_0, \varepsilon))$ и $m = n + 1$. Тем самым, последовательность r_1, r_2, ..., r_{n+1} свидетельствует о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. □

НКА: свойство вахтера

Замечание A1.9.

Трансформация, описанная в теореме A1.8, имеет сложность $n(Q) + 1$ для количества состояний и $n' \leqslant 2 \cdot n_1$ для количества стрелок, причём последняя оценка является точной (здесь n_1 — количество стрелок в автомате $\mathfrak{A}$).

НКА: звёздочка Клини

Теорема A1.9.

Если язык L распознаваем некоторым НКА, то и L^* распознаваем некоторым НКА.

НКА: звёздочка Клини

Теорема А1.9.

Если язык L распознаваем некоторым НКА, то и L^* распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть язык L распознаётся НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, \{q_0\}, F)$ (по теореме А1.8 можно предполагать, что автомат $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойству вахтера). По теореме А1.4, достаточно построить ε-НКА $\mathfrak{A}'$, распознающий язык L^*. Определим автомат $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta', \{q_0\}, \{q_0\})$ так, что $\delta' = \delta \cup \{((q, \varepsilon), \{q_0\}) \mid q \in F \setminus \{q_0\}\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \in (Q \setminus F) \cup \{q_0\}\}$; докажем, что $L^* = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: звёздочка Клини

Теорема A1.9.

Если язык L распознаваем некоторым НКА, то и L^* распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть язык L распознаётся НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, \{q_0\}, F)$ (по теореме A1.8 можно предполагать, что автомат $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойству вахтера). По теореме A1.4, достаточно построить ε-НКА $\mathfrak{A}'$, распознающий язык L^*. Определим автомат $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta', \{q_0\}, \{q_0\})$ так, что $\delta' = \delta \cup \{((q, \varepsilon), \{q_0\}) \mid q \in F \setminus \{q_0\}\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \in (Q \setminus F) \cup \{q_0\}\}$; докажем, что $L^* = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$L^* \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha \in L^*$; если $\alpha = \varepsilon$, то $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, поскольку $q_0 \in \{q_0\} \cap F$; перейдём к рассмотрению случая, когда $\alpha = \beta_0\hat{}\beta_1\hat{}\ldots\hat{}\beta_n$, где $\varepsilon \neq \beta_i \in L$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существуют последовательности $r_0^i = q_0$, r_1^i, ..., $r_{k_i}^i \in F$ состояний, подтверждающие $\beta_i \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ ($\mathrm{lh}(\beta_i) = k_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$).

НКА: звёздочка Клини

Доказательство (окончание).

Тем самым, последовательность $q_0 = r_0^0,\ r_1^0,\ \ldots,\ r_{k_0}^0,\ r_0^1,\ r_1^1,\ \ldots,\ r_{k_1}^1,\ r_0^2,\ \ldots,\ r_0^n,\ r_1^n,\ \ldots,\ r_{k_n}^n,\ q_0$ свидетельствует о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, поскольку $q_0 \in \delta'(r_{k_i}^i, \varepsilon)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и q_0 — конечное состояние автомата $\mathfrak{A}'$.

НКА: звёздочка Клини

Доказательство (окончание).

Тем самым, последовательность $q_0 = r_0^0,\ r_1^0,\ \ldots,\ r_{k_0}^0,\ r_0^1,\ r_1^1,\ \ldots,\ r_{k_1}^1,\ r_0^2,\ \ldots,\ r_0^n,\ r_1^n,\ \ldots,\ r_{k_n}^n,\ q_0$ свидетельствует о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, поскольку $q_0 \in \delta'(r_{k_i}^i, \varepsilon)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и q_0 — конечное состояние автомата $\mathfrak{A}'$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L^*$. Пусть $\varepsilon \neq \alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существует последовательность $q_0 = s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_m = q_0$ состояний, свидетельствующая о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть также $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{k+1} = m$ — возрастающая последовательность всех номеров состояния q_0. Рассмотрим пару $i_j < i_{j+1}$ ближайших таких номеров. Так как $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойству вахтёра, имеем $i_j < i_j + 1 < i_{j+1}$, и единственный способ попасть из $s_{i_{j+1}-1}$ в q_0 только по ε-переходу; следовательно, $s_{i_{j+1}-1} \in F \setminus \{q_0\}$. Таким образом, $\alpha = \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_k$, где последовательность $s_{i_j} = q_0,\ s_{i_j+1},\ \ldots,\ s_{i_{j+1}-1}$ свидетельствует о том, что $\alpha_j \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$, т. е. $\alpha \in L^*$.

$\square$

НКА: звёздочка Клини

Замечание A1.10.

Трансформация, описанная в теореме A1.9, сначала осуществляет переход от произвольного НКА к НКА, удовлетворяющему свойству вахтёра ($n(Q'') = n(Q) + 1$, $n'' \leqslant 2 \cdot n_1$), а затем уже к НКА, распознающему звёздочку Клини ($n(Q') = n(Q'') = n(Q) + 1$, $n' \leqslant 2 \cdot n_1^2$).

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Теорема A1.10.

Для любого недетерминированного конечного автомата $\mathfrak{A}$ существует детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A}'$, для которого имеет место равенство $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Теорема А1.10.

Для любого недетерминированного конечного автомата $\mathfrak{A}$ существует детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A}'$, для которого имеет место равенство $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ — НКА. Определим ДКА $\mathfrak{A}' = (\mathcal{P}(Q); \Sigma; \tau, Q_0, F')$ так, что $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \varnothing\}$ и $\tau(S, a) = \bigcup\limits_{s \in S} \delta(s, a)$ для всех $a \in \Sigma$ и $S \subseteq Q$; докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Теорема A1.10.

Для любого недетерминированного конечного автомата $\mathfrak{A}$ существует детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A}'$, для которого имеет место равенство $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ — НКА. Определим ДКА $\mathfrak{A}' = (\mathcal{P}(Q); \Sigma; \tau, Q_0, F')$ так, что $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \varnothing\}$ и $\tau(S, a) = \bigcup\limits_{s \in S} \delta(s, a)$ для всех $a \in \Sigma$ и $S \subseteq Q$; докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда существует последовательность $q_0 \in Q_0$, q_1, …, $q_n \in F$ состояний из Q такая, что $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1})$ $(0 \leqslant i < n)$. Индукцией по $i < n$ докажем, что $q_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Доказательство (окончание).

В самом деле, имеем $q_0 \in \tau^*(Q_0, \varepsilon) = Q_0$. Далее, предположим, что $q_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_i)$; тогда $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) \subseteq \bigcup_{s \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_i)} \delta(s, w_{i+1}) =$ $\tau(\tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_i), w_{i+1}) = \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_{i+1})$. В конечном итоге, получаем $q_n \in \tau^*(Q_0, \alpha) \cap F$; тем самым, $\tau^*(Q_0, \alpha) \in F'$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА ⇒ ДКА

Доказательство (окончание).

В самом деле, имеем $q_0 \in \tau^*(Q_0, \varepsilon) = Q_0$. Далее, предположим, что $q_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$; тогда $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) \subseteq \bigcup\limits_{s \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)} \delta(s, w_{i+1}) = \tau(\tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i), w_{i+1}) = \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_{i+1})$. В конечном итоге, получаем $q_n \in \tau^*(Q_0, \alpha) \cap F$; тем самым, $\tau^*(Q_0, \alpha) \in F'$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда $\tau^*(Q_0, \alpha) \in F'$. Состояния r_0, r_1, …, r_n из Q будем находить обратной индукцией по $i \leqslant n$ так, чтобы $r_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$ и $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$. Возьмём $r_n \in \tau^*(Q_0, \alpha) \cap F$. Предположим, что r_{i+1}, …, r_n уже выбраны. Так как $r_{i+1} \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i w_{i+1}) = \tau(\tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i), w_{i+1}) = \bigcup\limits_{s \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)} \delta(s, w_{i+1})$, найдётся $r_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots, w_i)$ такое, что $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$. В конечном итоге, $r_0 \in \tau^*(Q_0, \varepsilon) = Q_0$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. □

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А1.11.

Трансформация, описанная в теореме А1.10, имеет сложность $2^{n(Q)}$ по количеству состояний и $2^{n(Q)} \cdot n(\Sigma)$ по количеству стрелок. Данная оценка является точной (см. пример ниже). Тем самым, при рассмотрении детерминированных конечных автоматов основным показателем является количество состояний, а количество стрелок задаётся однозначно по числу состояний.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А1.11.

Трансформация, описанная в теореме А1.10, имеет сложность $2^{n(Q)}$ по количеству состояний и $2^{n(Q)} \cdot n(\Sigma)$ по количеству стрелок. Данная оценка является точной (см. пример ниже). Тем самым, при рассмотрении детерминированных конечных автоматов основным показателем является количество состояний, а количество стрелок задаётся однозначно по числу состояний.

Пример А1.10.

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы А1.3, А1.4, А1.10, А1.5; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы А1.3, А1.4, А1.10, А1.5; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема А1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.5; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.7; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.5; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.7; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
4. звёздочки Клини $L \mapsto L^*$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.9; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.5; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.7; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
4. звёздочки Клини $L \mapsto L^*$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.9; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)}$);
5. обращения $L \mapsto L^R$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.6; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)+1}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.5; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.7; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
4. звёздочки Клини $L \mapsto L^*$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.9; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)}$);
5. обращения $L \mapsto L^R$ (теоремы A1.3, A1.4, A1.10, A1.6; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)+1}$);
6. инверсии $L \mapsto \overline{L}$ при $\Sigma = \{0; 1\}$ (теорема A1.2; трансформация имеет сложность $n(Q)$).

ДКА: пересечение

Теорема А1.11.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их пересечение $L_1 \cap L_2$ также распознаваемо некоторым ДКА.

ДКА: пересечение

Теорема A1.11.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их пересечение $L_1 \cap L_2$ также распознаваемо некоторым ДКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из того, что языки, распознаваемые ДКА, замкнуты относительно операций объединения и дополнения, а также тождества де Моргана
$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \setminus ((\Sigma^* \setminus L_1) \cup (\Sigma^* \setminus L_2))$. □

Произведение автоматов

Определение A1.15.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, q_0^2, F_2)$ — ДКА. Определим их **произведение** как автомат $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F) = (Q_1 \times Q_2; \Sigma; \delta_1 \times \delta_2, (q_0^1, q_0^2), F)$, для которого имеют место соотношения $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ для всех $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ и $a \in \Sigma$, а также $F \subseteq Q_1 \times Q_2$.

Произведение автоматов

Определение А1.15.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, q_0^2, F_2)$ — ДКА. Определим их **произведение** как автомат $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F) = (Q_1 \times Q_2; \Sigma; \delta_1 \times \delta_2, (q_0^1, q_0^2), F)$, для которого имеют место соотношения $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ для всех $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ и $a \in \Sigma$, а также $F \subseteq Q_1 \times Q_2$.

Лемма А1.1.

Выполняется равенство $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha) = (\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha))$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

Произведение автоматов

Определение A1.15.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, q_0^2, F_2)$ — ДКА. Определим их **произведение** как автомат $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F) = (Q_1 \times Q_2; \Sigma; \delta_1 \times \delta_2, (q_0^1, q_0^2), F)$, для которого имеют место соотношения $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ для всех $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ и $a \in \Sigma$, а также $F \subseteq Q_1 \times Q_2$.

Лемма A1.1.

Выполняется равенство $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha) = (\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha))$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

Доказательство.

Индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$. В самом деле, $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2) = (\delta_1^*(q_1, \varepsilon), \delta_2^*(q_2, \varepsilon))$; далее, $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha\hat{\ }a) = (\delta_1 \times \delta_2)((\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha), a) = (\delta_1 \times \delta_2)((\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha)), a) = (\delta_1(\delta_1^*(q_1, \alpha), a), \delta_2(\delta_2^*(q_2, \alpha), a)) = (\delta_1^*(q_1, \alpha\hat{\ }a), \delta_2^*(q_2, \alpha\hat{\ }a))$. $\square$

Произведение автоматов

Второе доказательство теоремы A1.11.

Воспользовавшись леммой A1.1, приходим к следующей эквивалентности для произведения автоматов $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F_1 \times F_2)$ $(\alpha \in \Sigma^*)$:
$\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) \Leftrightarrow (\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1^0, q_2^0), \alpha) = (\delta_1^*(q_1^0, \alpha), \delta_2^*(q_2^0, \alpha)) \in F_1 \times F_2 \Leftrightarrow [\delta_1^*(q_1^0, \alpha) \in F_1$ и $\delta_2^*(q_2^0, \alpha) \in F_2] \Leftrightarrow [\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)] \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1) \cap \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. $\square$

Произведение автоматов

Второе доказательство теоремы A1.11.

Воспользовавшись леммой A1.1, приходим к следующей эквивалентности для произведения автоматов $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F_1 \times F_2)$ $(\alpha \in \Sigma^*)$:
$\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) \Leftrightarrow (\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1^0, q_2^0), \alpha) = (\delta_1^*(q_1^0, \alpha), \delta_2^*(q_2^0, \alpha)) \in F_1 \times F_2 \Leftrightarrow [\delta_1^*(q_1^0, \alpha) \in F_1$ и $\delta_2^*(q_2^0, \alpha) \in F_2] \Leftrightarrow [\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)] \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1) \cap \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. $\square$

Замечание A1.12.

В первом доказательстве трансформация имеет сложность *экспоненциальную* по количеству состояний. Трансформация, изложенная во втором доказательстве, имеет сложность $n(Q_1) \cdot n(Q_2)$, что значительно ниже изложенной в первом доказательстве.

ДКА: объединение

Теорема А1.12.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то $L_1 \cup L_2$ также распознаваем некоторым ДКА.

ДКА: объединение

Теорема A1.12.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то $L_1 \cup L_2$ также распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

Здесь можно применить теоремы A1.1, A1.11 к равенству $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \setminus ((\Sigma^* \setminus L_1) \cap (\Sigma^* \setminus L_2))$, однако мы приведём явную конструкцию, которая соответствует данным рассуждениям.
Пусть ДКА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ таковы, что $L_1 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $L_2 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$; докажем, что $L_1 \cup L_2 = \mathrm{L}((\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)((Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2)))$.
В самом деле, $\alpha \in \mathrm{L}((\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)((Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2))) \Leftrightarrow (\delta_1 \times \delta_2)^*((q_0^1, q_0^2), \alpha) \in ((Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2)) \Leftrightarrow [\delta_1^*(q_0^1, \alpha) \in F_1 \vee \delta_2^*(q_0^2, \alpha) \in F_2] \Leftrightarrow [\alpha \in L_1 \vee \alpha \in L_2] \Leftrightarrow \alpha \in L_1 \cup L_2$ для любого $\alpha \in \Sigma^*$. $\square$

ДКА: разность

Теорема А1.13.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их разность $L_1 \setminus L_2$ также распознаваема некоторым ДКА.

ДКА: разность

Теорема А1.13.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их разность $L_1 \setminus L_2$ также распознаваема некоторым ДКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из того, что языки, распознаваемые ДКА, замкнуты относительно операций пересечения и дополнения, а также тождества $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap (\Sigma^* \setminus L_2)$. □

ДКА: разность

Теорема А1.13.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их разность $L_1 \setminus L_2$ также распознаваема некоторым ДКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из того, что языки, распознаваемые ДКА, замкнуты относительно операций пересечения и дополнения, а также тождества $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap (\Sigma^* \setminus L_2)$. □

Замечание А1.13.

Трансформации для объединения и разности, использующие НКА, имеют сложность *экспоненциальную* по количеству состояний. Трансформации, изложенные в теоремах А1.12, А1.13, имеет сложность $n(Q_1) \cdot n(Q_2)$, что значительно ниже трансформаций, использующих НКА.

Спасибо за внимание.