Лекция L4
Числа Черча и логическое программирование

Вадим Пузаренко

19 октября 2021 г.

Мотивация

С одной стороны, предлагается математическая модель ВЫЧИСЛИМОСТИ на базе λ–исчисления; с другой стороны, данная идея развивается для построения ЛОГИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ на базе вычислимых функционалов.

Натуральные числа

Числа Черча

0: $\lambda y.\lambda x.x$

1: $\lambda y.\lambda x.(yx)$

2: $\lambda y.\lambda x.(y(yx))$

$\vdots$

n: $\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))$

$\vdots$

Натуральные числа

Числа Черча

0: $\lambda y.\lambda x.x$

1: $\lambda y.\lambda x.(yx)$

2: $\lambda y.\lambda x.(y(yx))$

$\vdots$

n: $\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))$

$\vdots$

Все числа Черча находятся в нормальной форме и, в частности, попарно не равны. Будем рассматривать частичные числовые функции, т.е. $\mathrm{field}(f) \subseteq \omega$.

Натуральные числа

Числа Черча

0: $\lambda y.\lambda x.x$

1: $\lambda y.\lambda x.(yx)$

2: $\lambda y.\lambda x.(y(yx))$

$\vdots$

n: $\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))$

$\vdots$

Все числа Черча находятся в нормальной форме и, в частности, попарно не равны. Будем рассматривать частичные числовые функции, т.е. $\mathrm{field}(f) \subseteq \omega$.

Определение

k-Местная функция f называется **частичной**, если $\delta f \subseteq \omega^k$; она называется **всюду определенной** или **тотальной**, если $\delta f = \omega^k$.

Натуральные числа

Определение

Пусть $f : \omega^k \to \omega$ — частичная функция и F — λ-терм. Будем говорить, что f **представима** с помощью F, если для любых натуральных чисел n_1, n_2, …, n_k выполняется следующее:

1. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\downarrow$, то $((\ldots((F\mathbf{n_1})\mathbf{n_2})\ldots)\mathbf{n_k}) = \mathbf{f(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$;
2. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\uparrow$, то $((\ldots((F\mathbf{n_1})\mathbf{n_2})\ldots)\mathbf{n_k})$ не нормализуем.

Натуральные числа

Определение

Пусть $f : \omega^k \to \omega$ — частичная функция и F — λ-терм. Будем говорить, что f **представима** с помощью F, если для любых натуральных чисел n_1, n_2, …, n_k выполняется следующее:

1. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\downarrow$, то $((\ldots((F\mathbf{n_1})\mathbf{n_2})\ldots)\mathbf{n_k}) = \mathbf{f(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$;
2. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\uparrow$, то $((\ldots((F\mathbf{n_1})\mathbf{n_2})\ldots)\mathbf{n_k})$ не нормализуем.

Простейшие функции

- $0(x) \equiv 0$.
- $s(x) = x + 1$.
- $I^n_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m,\ m \leqslant n$.

Натуральные числа

Оператор **S** суперпозиции

Пусть g_1^m, g_2^m, …, g_n^m — частичные m-местные функции, а h^n — частичная n-местная функция, $m, n \geqslant 1$. Положим
$\mathbf{S}(h, g_1, g_2, \dots, g_n) =$
$\lambda x_1 x_2 \dots x_m . h(g_1(x_1, x_2, \dots, x_m), g_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_m)).$

Натуральные числа

Оператор **S** суперпозиции

Пусть g_1^m, g_2^m, ..., g_n^m — частичные m-местные функции, а h^n — частичная n-местная функция, $m, n \geqslant 1$. Положим
$\mathbf{S}(h, g_1, g_2, \ldots, g_n) =$
$\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$.

Оператор **R** примитивной рекурсии

Пусть h^n и g^{n+2} — частичные числовые функции местности n и $n+2$ соответственно, $n \in \omega$. Определим
$\mathbf{R}(h, g) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_n y . f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)). \end{array}\right.$$

Натуральные числа

Оператор M минимизации

Пусть g^{n+1} — частичная $n+1$-местная функция; определим функцию $\mathbf{M}(g) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_n . f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} y, & \text{если } g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\& \\ & \&\forall i < y[g(x_1, x_2, \ldots, x_n, i) \downarrow \neq 0]; \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Натуральные числа

Оператор M минимизации

Пусть g^{n+1} — частичная $n+1$-местная функция; определим функцию $\mathbf{M}(g) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_n . f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} y, & \text{если } g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0 \& \\ & \& \forall i < y [g(x_1, x_2, \ldots, x_n, i) \downarrow \neq 0]; \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение

Частичная функция f называется **частично вычислимой (ЧВФ)**, если существует последовательность функций g_1, g_2, ..., $g_n = f$, в которой каждая функция является либо простейшей, либо получена из предыдущих с помощью операторов **S**, **R** или **M**.

Натуральные числа

Определение

Частичная функция f называется **примитивно рекурсивной (ПРФ)**, если существует последовательность функций $g_1, g_2, \ldots, g_n = f$, в которой каждая функция является либо простейшей, либо получена из предыдущих с помощью операторов **S** или **R**.

Натуральные числа

Определение

Частичная функция f называется **примитивно рекурсивной (ПРФ)**, если существует последовательность функций $g_1, g_2, \ldots, g_n = f$, в которой каждая функция является либо простейшей, либо получена из предыдущих с помощью операторов **S** или **R**.

Теорема L7

Частичная функция является ЧВФ, если и только она представима некоторым λ-термом.

$s(n) = n + 1$

$SUCC \equiv \lambda z.\lambda y.\lambda x.(y((zy)x))$.

$(SUCC\mathbf{n}) \Rightarrow \mathbf{n+1}$

$$(SUCC\mathbf{n}) \equiv (\lambda z.\lambda y.\lambda x.(y((zy)x))\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))) \Rightarrow$$

$$\lambda y.\lambda x.(y((\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))y)x)) \Rightarrow$$

$$\lambda y.\lambda x.(y(\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))x)) \Rightarrow \lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n+1}\,x)\ldots)) \equiv$$

$\mathbf{n+1}$.

+

$$ADD \equiv \lambda u.\lambda v.\lambda y.\lambda x.((uy)((vy)x))$$

$+$

$ADD \equiv \lambda u.\lambda v.\lambda y.\lambda x.((uy)((vy)x))$

$n, m \mapsto n + m$

- $(\mathbf{n}y) \equiv (\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y \ldots (y}_{n} x) \ldots))y) \Rightarrow \lambda x.(\underbrace{y(y \ldots (y}_{n} x) \ldots))$.
- $((\mathbf{m}y)x) \equiv ((\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y \ldots (y}_{m} x) \ldots))y)x) \Rightarrow$
  $(\lambda x.(\underbrace{y(y \ldots (y}_{m} x) \ldots))x) \Rightarrow (\underbrace{y(y \ldots (y}_{m} x) \ldots))$
- $((ADD\mathbf{n})\mathbf{m}) \equiv ((\lambda u.\lambda v.\lambda y.\lambda x.((uy)((vy)x))\mathbf{n})\mathbf{m}) \Rightarrow$
  $(\lambda v.\lambda y.\lambda x.((\mathbf{n}y)((vy)x))\mathbf{m}) \Rightarrow$
  $\lambda y.\lambda x.(\lambda x.(\underbrace{y(y \ldots (y}_{n} x) \ldots))((\mathbf{m}y)x)) \Rightarrow$
  $\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y \ldots (y}_{n}(\underbrace{y(y \ldots (y}_{m} x) \ldots))) \ldots)) \equiv \mathbf{n} + \mathbf{m}$.

Булевы операции

$$TRUE = \lambda x.\lambda y.x$$
$$FALSE = \lambda x.\lambda y.y$$
$$COND = \lambda x.\lambda y.\lambda z.((xy)z)$$

Булевы операции

$$TRUE = \lambda x.\lambda y.x$$
$$FALSE = \lambda x.\lambda y.y$$
$$COND = \lambda x.\lambda y.\lambda z.((xy)z)$$

$$(((COND\ TRUE)E_1)E_2) \equiv (((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((xy)z)\lambda x.\lambda y.x)E_1)E_2) \Rightarrow ((\lambda y.\lambda z.((\lambda x.\lambda y.xy)z)E_1)E_2) \Rightarrow (\lambda z.((\lambda x.\lambda y.xE_1)z)E_2) \Rightarrow ((\lambda x.\lambda y.xE_1)E_2) \Rightarrow (\lambda y.E_1E_2) \Rightarrow E_1$$

$$(((COND\ FALSE)E_1)E_2) \equiv (((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((xy)z)\lambda x.\lambda y.y)E_1)E_2) \Rightarrow ((\lambda y.\lambda z.((\lambda x.\lambda y.yy)z)E_1)E_2) \Rightarrow (\lambda z.((\lambda x.\lambda y.yE_1)z)E_2) \Rightarrow ((\lambda x.\lambda y.yE_1)E_2) \Rightarrow (\lambda y.yE_2) \Rightarrow E_2$$

Равенство нулю

$$ISNULL = \lambda x_1.((x_1 \lambda x.FALSE)\,TRUE)$$

Равенство нулю

$$ISNULL = \lambda x_1.((x_1 \lambda x.FALSE)\, TRUE)$$

$$(ISNULL\, \mathbf{0}) \equiv (\lambda x_1.((x_1 \lambda x.FALSE)\, TRUE)\mathbf{0}) \Rightarrow$$
$$((\mathbf{0} \lambda x.FALSE)\, TRUE) \equiv ((\lambda y.\lambda x.x \lambda x.FALSE)\, TRUE) \Rightarrow$$
$$(\lambda x.x\, TRUE) \Rightarrow TRUE$$
$$(ISNULL(SUCC\, \mathbf{n})) \Rightarrow (ISNULL\, \mathbf{n}+\mathbf{1}) \equiv$$
$$(\lambda x_1.((x_1 \lambda x.FALSE)\, TRUE)\lambda y.\lambda x.\underbrace{(y(\ldots(y}_{n+1}\, x)\ldots))) \Rightarrow$$
$$((\lambda y.\lambda x.\underbrace{(y(\ldots(y}_{n+1}\, x)\ldots))\lambda x.FALSE)\, TRUE) \Rightarrow$$
$$(\lambda x.\underbrace{(\lambda x.FALSE(\ldots(\lambda x.FALSE}_{n+1}\, x)\ldots))\, TRUE) \Rightarrow$$
$$\underbrace{(\lambda x.FALSE(\ldots(\lambda x.FALSE}_{n+1}\, TRUE)\ldots)) \Rightarrow FALSE$$

Кортежи

$$\langle M_1, M_2\rangle = \lambda z.((zM_1)M_2),$$
$$1^{st} = \lambda z.(z\lambda x.\lambda y.x),$$
$$2^{nd} = \lambda z.(z\lambda x.\lambda y.y),$$
$$PAIR = \lambda x.\lambda y.\lambda z.((zx)y)$$

Кортежи

$$\langle M_1, M_2\rangle = \lambda z.((zM_1)M_2),$$
$$1^{st} = \lambda z.(z\lambda x.\lambda y.x),$$
$$2^{nd} = \lambda z.(z\lambda x.\lambda y.y),$$
$$PAIR = \lambda x.\lambda y.\lambda z.((zx)y)$$

$$((PAIR\ M_1)M_2) \equiv ((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((zx)y)M_1)M_2) \Rightarrow$$
$$(\lambda y.\lambda z.((zM_1)y)M_2) \Rightarrow \lambda z.((zM_1)M_2)$$

Кортежи

$\langle M_1, M_2\rangle = \lambda z.((zM_1)M_2)$,
$1^{st} = \lambda z.(z\lambda x.\lambda y.x)$,
$2^{nd} = \lambda z.(z\lambda x.\lambda y.y)$,
$PAIR = \lambda x.\lambda y.\lambda z.((zx)y)$

$((PAIR\, M_1)M_2) \equiv ((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((zx)y)M_1)M_2) \Rightarrow$
$(\lambda y.\lambda z.((zM_1)y)M_2) \Rightarrow \lambda z.((zM_1)M_2)$

Упражнение

Докажите, что

1. $(1^{st}\langle M_1, M_2\rangle) \Rightarrow M_1$
2. $(2^{nd}\langle M_1, M_2\rangle) \Rightarrow M_2$

Кортежи

$$n - TUPLE =$$
$$\lambda x_1.\lambda x_2.\dots.\lambda x_n.((PAIR\, x_1)((PAIR\, x_2)\dots((PAIR\, x_{n-1})x_n)\dots))$$
$$\langle M_1, M_2, \dots, M_n\rangle = (\dots((n - TUPLE M_1)M_2)\dots M_n) =$$
$$\langle M_1, \langle M_2, \langle M_3, \dots \langle M_{n-1}, M_n\rangle \dots\rangle\rangle\rangle$$
$$(\mathrm{pr}^n_1 t) = (1^{st}\, t)$$
$$(\mathrm{pr}^n_i t) = (1^{st}\underbrace{(2^{nd}(\dots(2^{nd}}_{i-1}\, t)\dots))),\ \text{где } 1 < i < n;$$
$$(\mathrm{pr}^n_n t) = (\underbrace{2^{nd}(\dots(2^{nd}}_{n-1}\, t)\dots))$$

Кортежи

$n - TUPLE =$
$\lambda x_1.\lambda x_2.\ldots.\lambda x_n.((PAIR\,x_1)((PAIR\,x_2)\ldots((PAIR\,x_{n-1})x_n)\ldots))$
$\langle M_1, M_2, \ldots, M_n\rangle = (\ldots((n - TUPLE M_1)M_2)\ldots M_n) =$
$\langle M_1, \langle M_2, \langle M_3, \ldots \langle M_{n-1}, M_n\rangle \ldots\rangle\rangle\rangle$
$(\mathrm{pr}_1^n t) = (1^{st}\, t)$
$(\mathrm{pr}_i^n t) = (1^{st}(\underbrace{2^{nd}(\ldots(2^{nd}}_{i-1}\, t)\ldots)))$, где $1 < i < n$;
$(\mathrm{pr}_n^n t) = (\underbrace{2^{nd}(\ldots(2^{nd}}_{n-1}\, t)\ldots))$

Упражнение

Докажите, что $(\mathrm{pr}_i^n\langle M_1, M_2, \ldots, M_n\rangle) \Rightarrow M_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

$n-1$

$P = \lambda y.\lambda z.\langle FALSE, (((COND(1^{st}z))(2^{nd}z))(y(2^{nd}z)))\rangle$
$((Py)\langle TRUE, x\rangle) \Rightarrow \langle FALSE, x\rangle$
$((Py)((Py)\langle TRUE, x\rangle)) \Rightarrow \langle FALSE, (yx)\rangle$
$((Py)((Py)((Py)\langle TRUE, x\rangle))) \Rightarrow \langle FALSE, (y(yx))\rangle$
$\ldots$

$n-1$

$P = \lambda y.\lambda z.\langle FALSE, (((COND(1^{st} z))(2^{nd} z))(y(2^{nd} z)))\rangle$
$((Py)\langle TRUE, x\rangle) \Rightarrow \langle FALSE, x\rangle$
$((Py)((Py)\langle TRUE, x\rangle)) \Rightarrow \langle FALSE, (yx)\rangle$
$((Py)((Py)((Py)\langle TRUE, x\rangle))) \Rightarrow \langle FALSE, (y(yx))\rangle$
$\ldots$

Упражнение

Докажите, что

1. $((Py)\langle TRUE, x\rangle) \Rightarrow \langle FALSE, x\rangle$
2. $\underbrace{((Py)((Py)\ldots((Py)}_{n}\langle TRUE, x\rangle)\ldots)) \Rightarrow$
   $\langle FALSE, (\underbrace{y(y\ldots(y}_{n-1}\, x)\ldots))\rangle$

$n-1$

$$PRED = \lambda u.\lambda y.\lambda x.(2^{nd}((u(Py))\langle TRUE, x\rangle))$$

$n-1$

$$PRED = \lambda u.\lambda y.\lambda x.(2^{nd}((u(Py))\langle TRUE, x\rangle))$$

$n \mapsto n-1$

$$(PRED\mathbf{n+1}) \equiv$$
$$(\lambda u.\lambda y.\lambda x.(2^{nd}((u(Py))\langle TRUE, x\rangle))\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n+1}\,x)\ldots))) \Rightarrow$$
$$\lambda y.\lambda x.(2^{nd}((\lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n+1}\,x)\ldots))(Py))\langle TRUE, x\rangle)) \Rightarrow$$
$$\lambda y.\lambda x.(2^{nd}((\lambda x.(\underbrace{(Py)((Py)\ldots((Py)}_{n+1}\,x)\ldots)))\langle TRUE, x\rangle)) \Rightarrow$$
$$\lambda y.\lambda x.(2^{nd}((\underbrace{(Py)((Py)\ldots((Py)}_{n+1}\langle TRUE, x\rangle)\ldots)))) \Rightarrow$$
$$\lambda y.\lambda x.(2^{nd}\langle FALSE, (\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))\rangle) \Rightarrow \lambda y.\lambda x.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)\ldots)) \equiv \mathbf{n}$$
$$(PRED\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{0}$$ (упражнение!)

Примеры функций

$$PLUS = \lambda u.\lambda v.((vSUCC)u)$$
$$TIMES = \lambda u.\lambda v.((u(PLUS\, v))\mathbf{0})$$
$$DEGR = \lambda u.\lambda v.((v(TIMES\, u))\mathbf{1})$$
$$CUTDIF = \lambda u.\lambda v.((vPRED)u)$$

Примеры функций

$$PLUS = \lambda u.\lambda v.((vSUCC)u)$$
$$TIMES = \lambda u.\lambda v.((u(PLUS\ v))\mathbf{0})$$
$$DEGR = \lambda u.\lambda v.((v(TIMES\ u))\mathbf{1})$$
$$CUTDIF = \lambda u.\lambda v.((vPRED)u)$$

Упражнение

Какие функции представляются λ–термами выше? Ответ обосновать.

Снова о неподвижной точке

Комбинатор неподвижной точки

$$\mathbb{Y} = \lambda y.(\lambda x.(y(xx))\lambda x.(y(xx)))$$

Снова о неподвижной точке

Комбинатор неподвижной точки

$\mathbb{Y} = \lambda y.(\lambda x.(y(xx))\lambda x.(y(xx)))$

Упражнение

Докажите, что имеет место $(\mathbb{Y}M) \Rightarrow (M(\mathbb{Y}M))$ для любого λ–терма M, в который не входит свободно переменная x.

Снова о неподвижной точке

Теорема L8

1. Для каждого λ–терма M найдётся λ–терм F такой, что $F = M_F^y$ (разумеется, F свободен для y в M; другими словами, равенство λ–термов $y = M$ имеет нетривиальное решение $y = F$).
2. Пусть y, x_1, x_2, …, x_n — попарно различные переменные и M — λ–терм. Тогда существует λ–терм F такой, что выполняется равенство $(\ldots((Fx_1)x_2)\ldots x_n) = M_F^y$ (разумеется, F свободен для y в M; другими словами, равенство λ–термов $(\ldots((yx_1)x_2)\ldots x_n) = M$ имеет нетривиальное решение $y = F$).

Снова о неподвижной точке

Теорема L8

1. Для каждого λ–терма M найдётся λ–терм F такой, что $F = M_F^y$ (разумеется, F свободен для y в M; другими словами, равенство λ–термов $y = M$ имеет нетривиальное решение $y = F$).
2. Пусть y, x_1, x_2, …, x_n — попарно различные переменные и M — λ–терм. Тогда существует λ–терм F такой, что выполняется равенство $(\ldots((Fx_1)x_2)\ldots x_n) = M_F^y$ (разумеется, F свободен для y в M; другими словами, равенство λ–термов $(\ldots((yx_1)x_2)\ldots x_n) = M$ имеет нетривиальное решение $y = F$).

Доказательство.

Пусть $\mathbb{Y}$ — комбинатор неподвижной точки.
1. Положим $F \equiv (\mathbb{Y}\lambda y.M)$; тогда
$F \equiv (\mathbb{Y}\lambda y.M) \Rightarrow (\lambda y.M(\mathbb{Y}\lambda y.M)) \Rightarrow M_F^y$

Снова о неподвижной точке

Доказательство (продолжение)

2. Положим $F \equiv (\mathbb{Y}\lambda y.\lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.M)$; тогда $F \Rightarrow (\lambda y.\lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.M(\mathbb{Y}\lambda y.\lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.M)) \Rightarrow \lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.M_F^y$ и, следовательно,
$(\ldots((Fx_1)x_2)\ldots x_n) \Rightarrow (\ldots((\lambda x_1.\ldots.\lambda x_n.M_F^y x_1)x_2)\ldots x_n) \Rightarrow$
$(\ldots(\lambda x_2.\ldots.\lambda x_n.M_F^y x_2)\ldots x_n) \Rightarrow \ldots \Rightarrow M_F^y$ $\square$

Умножение (рекурсивное определение)

$$m \cdot n = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 0; \\ (m-1) \cdot n + n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Умножение (рекурсивное определение)

$$m \cdot n = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 0; \\ (m-1) \cdot n + n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$((MULT\mathbf{m})\mathbf{n}) =$
$(((COND\,(ISNULL\mathbf{m}))\mathbf{0})((ADD\mathbf{n})((MULT(PRED\mathbf{m}))\mathbf{n})))$
$MULT = \lambda u.\lambda v.(((COND\,(ISNULL\,u))\mathbf{0})((ADD\,v)((MULT(PRED\,u))v)))$

Умножение (рекурсивное определение)

$$m \cdot n = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 0; \\ (m-1)\cdot n + n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$((MULT\,\mathbf{m})\mathbf{n}) =$$
$$(((COND\,(ISNULL\,\mathbf{m}))\mathbf{0})((ADD\,\mathbf{n})((MULT(PRED\,\mathbf{m}))\mathbf{n})))$$
$$MULT = \lambda u.\lambda v.(((COND\,(ISNULL\,u))\mathbf{0})((ADD\,v)((MULT(PRED\,u))v)))$$
$$y = \underbrace{\lambda u.\lambda v.(((COND\,(ISNULL\,u))\mathbf{0})((ADD\,v)((y(PRED\,u))v)))}_{M}$$

Умножение (рекурсивное определение)

$$m \cdot n = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 0; \\ (m-1) \cdot n + n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$((MULT\,\mathbf{m})\mathbf{n}) =$
$(((COND\,(ISNULL\,\mathbf{m}))\mathbf{0})((ADD\,\mathbf{n})((MULT\,(PRED\,\mathbf{m}))\mathbf{n})))$
$MULT = \lambda u.\lambda v.(((COND\,(ISNULL\,u))\mathbf{0})((ADD\,v)((MULT\,(PRED\,u))v)))$
$y = \underbrace{\lambda u.\lambda v.(((COND\,(ISNULL\,u))\mathbf{0})((ADD\,v)((y(PRED\,u))v)))}_{M}$

Тогда $MULT = (\mathbb{Y}\lambda y.M)$

Умножение (рекурсивное определение)

$$((MULT\,\mathbf{m})\mathbf{n}) \equiv (((\mathbb{Y}\lambda y.M)\mathbf{m})\mathbf{n}) \Rightarrow (((\lambda y.M(\mathbb{Y}\lambda y.M))\mathbf{m})\mathbf{n}) \Rightarrow$$
$$(((COND\,(ISNULL\,\mathbf{m}))\mathbf{0})((ADD\,\mathbf{n})(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\,(PRED\,\mathbf{m}))\mathbf{n}))) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } m = 0; \\ ((ADD\,\mathbf{n})(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\,(PRED\,\mathbf{m}))\mathbf{n})), & \text{иначе}; \end{cases} \equiv$$
$$\begin{cases} \mathbf{0}, & \text{если } m = 0; \\ ((ADD\,\mathbf{n})((MULT\,\mathbf{m}-\mathbf{1})\mathbf{n})), & \text{иначе}; \end{cases}$$

Пример.

$$((MULT\mathbf{2})\mathbf{4}) = ((ADD\mathbf{4})((MULT\mathbf{1})\mathbf{4})) =$$
$$((ADD\mathbf{4})((ADD\mathbf{4})((MULT\mathbf{0})\mathbf{4}))) = ((ADD\mathbf{4})((ADD\mathbf{4})\mathbf{0})) =$$
$$((ADD\mathbf{4})\mathbf{4}) = \mathbf{8}$$

Простейшие функции

- $0(x) \equiv 0.$
- $s(x) = x + 1.$
- $I^n_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m, \; m \leqslant n.$

Простейшие функции

- $0(x) \equiv 0$.
- $s(x) = x + 1$.
- $I^n_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m, \ m \leqslant n$.

- $ZERO = \lambda z.\lambda y.\lambda x.x$
- $SUCC = \lambda z.\lambda y.\lambda x.(y((zy)x))$
- $I^n_m = \lambda x_1.\lambda x_2.\ldots.\lambda x_n.x_m \ (m \leqslant n)$

Оператор суперпозиции

Пусть g_1^m, g_2^m, ..., g_n^m — частичные m-местные функции, а h^n — частичная n-местная функция, $m, n \geqslant 1$. Положим
$\mathbf{S}(h, g_1, g_2, \ldots, g_n) =$
$\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$.

Оператор суперпозиции

Пусть g_1^m, g_2^m, ..., g_n^m — частичные m-местные функции, а h^n — частичная n-местная функция, $m, n \geqslant 1$. Положим $\mathbf{S}(h, g_1, g_2, \ldots, g_n) =$
$\lambda x_1 x_2 \ldots x_m . h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$.

Пусть λ–термы H, G_1, G_2, ..., G_n представляют функции h, g_1, g_2, ..., g_n соответственно, т.е.
$((\ldots((H\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n) \Rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_n})$,
$((\ldots((G_i\mathbf{l}_1)\mathbf{l}_2)\ldots)\mathbf{l}_m) \Rightarrow \mathbf{g_i}(\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}, \ldots, \mathbf{l_m})$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ в случаях, когда соответствующие функции на соответствующих аргументах заданы (переменные x_1, x_2, ..., x_m не входят свободно в H, G_1, ..., G_n); в противном случае λ–термы, стоящие слева, не нормализуемы. Положим $F =$
$\lambda x_1 . \lambda x_2 . \ldots . \lambda x_m . ((((H((((G_1 x_1)x_2)\ldots)x_m))((((G_2 x_1)x_2)\ldots)x_m))\ldots)$
$((((G_n x_1)x_2)\ldots)x_m))$

Оператор суперпозиции

Тогда $((\ldots((F\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m) \Rightarrow$
$((((H((((G_1\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m))((((G_2\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m))\ldots)$
$((((G_n\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m)) \Rightarrow$
$((\ldots((H\mathbf{g_1}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}))\mathbf{g_2}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}))\ldots)\mathbf{g_n}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m})) \Rightarrow$
$\mathbf{h}(\mathbf{g_1}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}),\mathbf{g_2}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}),\ldots,\mathbf{g_n}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}))$.

Оператор суперпозиции

Тогда $((\ldots((F\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m) \Rightarrow$
$((((H((((G_1\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m))((((G_2\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m))\ldots)$
$((((G_n\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_m)) \Rightarrow$
$((\ldots((H\mathbf{g_1}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}))\mathbf{g_2}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}))\ldots)\mathbf{g_n}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m})) \Rightarrow$
$\mathbf{h}(\mathbf{g_1}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}),\mathbf{g_2}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}),\ldots,\mathbf{g_n}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_m}))$.

Замечание.

Для частичных функций предложенная схема может действовать неправильно. Например, функция $0(\varphi(x))$ определена только тогда, когда $\varphi(x)\downarrow$, а схема выдаёт всюду определенную функцию, совпадающую с $0(x)$ (проверить!)

Оператор суперпозиции

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Оператор суперпозиции

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$SG = \lambda x.(((COND(ISNULL\, x))\mathbf{0})\mathbf{1})$

Определим функцию
$f_0(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \cdot \mathrm{sg}(s(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) + g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)))$. Отметим, что данная функция совпадает с $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Оператор суперпозиции

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

$SG = \lambda x.(((COND(ISNULL\,x))\mathbf{0})\mathbf{1})$

Определим функцию
$f_0(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \cdot \mathrm{sg}(s(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) + g_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)))$. Отметим, что данная функция совпадает с $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Положим $F_0 \equiv \lambda x_1.\lambda x_2.\ldots.\lambda x_m.((TIMES((\ldots((Fx_1)x_2)\ldots)x_m))$ $(SG(SUCC((PLUS((\ldots((G_1x_1)x_2)\ldots)x_m))((PLUS((\ldots((G_2x_1)x_2)\ldots)x_m))$ $\ldots((PLUS((\ldots((G_{n-1}x_1)x_2)\ldots)x_m))((\ldots((G_nx_1)x_2)\ldots)x_m))))))$

Оператор примитивной рекурсии

Пусть h^n и g^{n+2} — частичные числовые функции местности n и $n+2$ соответственно, $n \in \omega$. Определим $\mathbf{R}(h, g) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_n y . f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)). \end{array}\right.$$

Оператор примитивной рекурсии

Пусть h^n и g^{n+2} — частичные числовые функции местности n и $n+2$ соответственно, $n \in \omega$. Определим $\mathbf{R}(h,g) = \lambda x_1 x_2 \ldots x_n y. f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)). \end{array}\right.$$

Пусть λ–термы H, G представляют функции h, g соответственно, т.е. $((\ldots((H\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n) \Rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_n})$, $((((\ldots((G\mathbf{l}_1)\mathbf{l}_2)\ldots)\mathbf{l}_n)\mathbf{l}_{n+1})\mathbf{l}_{n+2}) \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}, \ldots, \mathbf{l_n}, \mathbf{l_{n+1}}, \mathbf{l_{n+2}})$ в случаях, когда соответствующие функции на соответствующих аргументах заданы (переменные x_1, x_2, …, x_m не входят свободно в H, G); в противном случае λ–термы, стоящие слева, не нормализуемы.

Оператор примитивной рекурсии

Неформально, $(((\ldots((F\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)\mathbf{k}_{n+1}) \equiv$
$(((COND(ISNULL\,\mathbf{k}_{n+1}))((\ldots((H\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n))$
$((((\ldots((G\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1}))(((\ldots((F\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1}))))$

$(((\ldots((yx_1)x_2)\ldots)x_n)x_{n+1}) =$
$(((COND(ISNULL\,x_{n+1}))((\ldots((Hx_1)x_2)\ldots)x_n))$
$((((\ldots((Gx_1)x_2)\ldots)x_n)(PREDx_{n+1}))(((\ldots((yx_1)x_2)\ldots)x_n)(PREDx_{n+1}))))$

Положим $M \equiv$
$\lambda x_1.\lambda x_2.\ldots.\lambda x_n.\lambda x_{n+1}.(((COND(ISNULL\,x_{n+1}))((\ldots((Hx_1)x_2)\ldots)x_n))$
$((((\ldots((Gx_1)x_2)\ldots)x_n)(PREDx_{n+1}))(((\ldots((yx_1)x_2)\ldots)x_n)(PREDx_{n+1}))))$

$F \equiv (\mathbb{Y}\lambda y.M)$

Оператор примитивной рекурсии

$$(((\ldots((F\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)\mathbf{k}_{n+1}) \equiv (((\ldots(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)\mathbf{k}_{n+1}) \Rightarrow$$
$$(((\ldots(((\lambda y.M(\mathbb{Y}\lambda y.M))\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)\mathbf{k}_{n+1}) \Rightarrow$$
$$(((COND(ISNULL\,\mathbf{k}_{n+1}))((\ldots((H\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n))$$
$$((((\ldots((G\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1}))(((\ldots(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)$$
$$(PRED\mathbf{k}_{n+1})))) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} ((\ldots((H\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)), & \text{если } k_{n+1} = 0; \\ ((((\ldots((G\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1})) & \Rightarrow \\ (((\ldots(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1})))), & \text{если } k_{n+1} > 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n), & \text{если } k_{n+1} = 0; \\ \mathbf{g}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_{n+1}-\mathbf{1},\mathbf{f}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_{n+1}-\mathbf{1})), & \text{если } k_{n+1} > 0. \end{cases}$$

Оператор примитивной рекурсии

$$(((\ldots((F\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)\mathbf{k}_{n+1}) \equiv (((\ldots(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)\mathbf{k}_{n+1}) \Rightarrow$$
$$(((\ldots(((\lambda y.M(\mathbb{Y}\lambda y.M))\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)\mathbf{k}_{n+1}) \Rightarrow$$
$$(((COND(ISNULL\,\mathbf{k}_{n+1}))((\ldots((H\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n))$$
$$((((\ldots((G\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1}))(((\ldots(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)$$
$$(PRED\mathbf{k}_{n+1})))) \Rightarrow$$
$$\begin{cases} ((\ldots((H\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)), & \text{если } k_{n+1} = 0; \\ ((((\ldots((G\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1})) & \\ (((\ldots(((\mathbb{Y}\lambda y.M)\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2)\ldots)\mathbf{k}_n)(PRED\mathbf{k}_{n+1})))), & \text{если } k_{n+1} > 0. \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_n}), & \text{если } k_{n+1} = 0; \\ \mathbf{g}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_n},\mathbf{k_{n+1}}-\mathbf{1},\mathbf{f}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2},\ldots,\mathbf{k_n},\mathbf{k_{n+1}}-\mathbf{1})), & \text{если } k_{n+1} > 0. \end{cases}$$

Замечание.

Предложенная схема также работает неправильно для частичных функций (к примеру, если $h(x)$ — частичная функция, а $g(x,y,z) \equiv 0$, то $R(h,g)(x,1) = 0$ даже в случае, когда $h(x)\uparrow$).

Оператор примитивной рекурсии

Определим функцию $g_0(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) = g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) \cdot \mathrm{sg}(s(z))$. Отметим, что данная функция совпадает с $g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z)$.

Оператор примитивной рекурсии

Определим функцию $g_0(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) = g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) \cdot \mathrm{sg}(s(z))$. Отметим, что данная функция совпадает с $g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z)$.

Оператор примитивной рекурсии

Определим функцию $g_0(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) = g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) \cdot \mathrm{sg}(s(z))$. Отметим, что данная функция совпадает с $g(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z)$.

Положим $G_0 \equiv$ $\lambda x_1.\lambda x_2.\ldots.\lambda x_n.\lambda x_{n+1}.\lambda x_{n+2}.((TIMES((((\ldots((Gx_1)x_2)\ldots)x_n)x_{n+1})x_{n+2}))$ $(SG(SUCCx_{n+2})))$

Оператор минимизации

Пусть g^{n+1} — частичная $n+1$-местная функция; определим функцию $\mathbf{M}(g, y) = \lambda y.\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} z, & \text{если } g(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \& (z \geqslant y) \\ & \& \forall i < z[(y \leqslant i) \rightarrow g(x_1, x_2, \ldots, x_n, i) \downarrow \neq 0]; \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Оператор минимизации

Пусть g^{n+1} — частичная $n+1$-местная функция; определим функцию $\mathbf{M}(g, y) = \lambda y.\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} z, & \text{если } g(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0 \& (z \geqslant y) \\ & \& \forall i < z[(y \leqslant i) \to g(x_1, x_2, \ldots, x_n, i) \downarrow \neq 0]; \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть λ–терм G представляет функцию g, т.е. $(((\ldots((G\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n)\mathbf{l}) \Rightarrow \mathbf{g(m_1, m_2, \ldots, m_n, l)}$ в случае, когда функция g на соответствующих аргументах задана (здесь переменные x_1, x_2, …, x_n, y не входят свободно в G); в противном случае λ–терм, стоящий слева, не нормализуем.

Оператор минимизации

Неформально, $((\ldots(((F\mathbf{I})\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n) \equiv$
$(((COND(ISNULL(((\ldots((G\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n)\mathbf{I})))\mathbf{I})$
$((\ldots(((F(SUCC\mathbf{I}))\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n))$

$((\ldots(((zy)x_1)x_2)\ldots)x_n) = (((COND(ISNULL(((\ldots((Gx_1)x_2)\ldots)x_n)y)))y)$
$((\ldots(((z(SUCCy))x_1)x_2)\ldots)x_n))$

Оператор минимизации

Неформально, $((\ldots(((F\mathbf{I})\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n) \equiv$
$(((COND(ISNULL(((\ldots((G\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n)\mathbf{I})))\mathbf{I})$
$((\ldots(((F(SUCC\mathbf{I}))\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n))$

$((\ldots(((zy)x_1)x_2)\ldots)x_n) = (((COND(ISNULL(((\ldots((Gx_1)x_2)\ldots)x_n)y)))y)$
$((\ldots(((z(SUCCy))x_1)x_2)\ldots)x_n))$

Положим
$M \equiv \lambda y.\lambda x_1.\lambda x_2.\ldots.\lambda x_n.(((COND(ISNULL(((\ldots((Gx_1)x_2)\ldots)x_n)y)))y)$
$((\ldots(((z(SUCCy))x_1)x_2)\ldots)x_n))$

$F \equiv (\mathbb{Y}\lambda z.M)$

Оператор минимизации

$$
\begin{array}{l}
((\ldots(((F\mathbf{I})\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n) \equiv ((\ldots((((\mathbb{Y}\lambda z.M)\mathbf{I})\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n) \Rightarrow \\
((\ldots((((\lambda z.M(\mathbb{Y}\lambda z.M))\mathbf{I})\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n) \Rightarrow \\
(((COND(ISNULL(((\ldots((G\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n)\mathbf{I})))\mathbf{I}) \\
((\ldots(((F(SUCC\mathbf{I}))\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n)) \Rightarrow \\
\begin{cases} \mathbf{I}, & \text{если } g(m_1, m_2, \ldots, m_n, l) = 0; \\ ((\ldots(((F(SUCC\mathbf{I}))\mathbf{m}_1)\mathbf{m}_2)\ldots)\mathbf{m}_n) & \text{иначе.} \end{cases}
\end{array}
$$

Спасибо за внимание.