Дисперсия случайных величин

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boxed{DX = E\left[X - EX\right]^2}$$

Величина $\sigma_X = \sqrt{DX}$ называется стандартным уклонением (или средним квадратическим отклонением).

Дисперсия случайных величин

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boxed{DX = E\left[X - EX\right]^2}$$

Величина $\sigma_X = \sqrt{DX}$ называется стандартным уклонением (или средним квадратическим отклонением).

Другой вид формулы для дисперсии:

$$DX = E\left[X - EX\right]^2 = E\left[X^2 - 2X \cdot EX + \left(EX\right)^2\right] =$$

Дисперсия случайных величин

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boxed{DX = E\left[X - EX\right]^2}$$

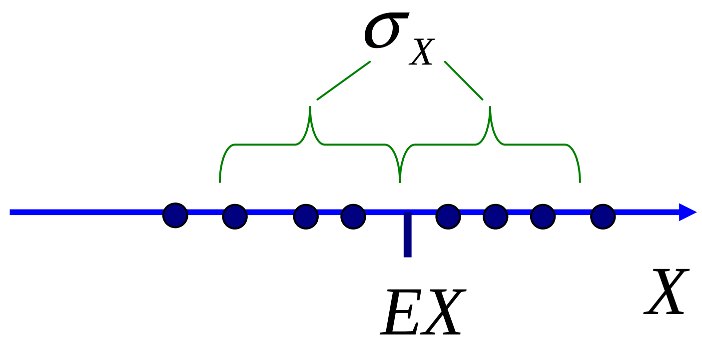
Величина $\sigma_X = \sqrt{DX}$ называется стандартным уклонением (или средним квадратическим отклонением).

Другой вид формулы для дисперсии:

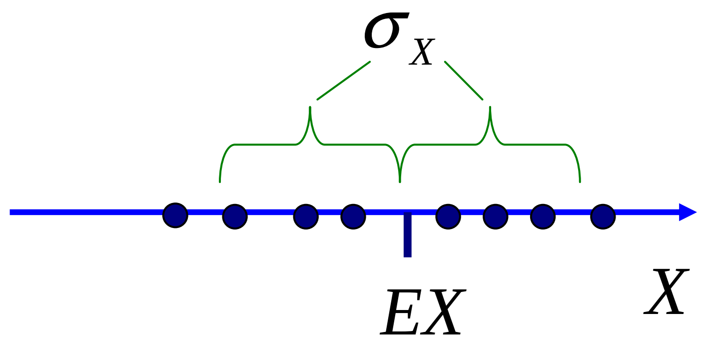
$$DX = E\left[X - EX\right]^2 = E\left[X^2 - 2X \cdot EX + \left(EX\right)^2\right] =$$

$$= EX^2 - 2EX \cdot EX + \left(EX\right)^2 = \boxed{EX^2 - \left(EX\right)^2}.$$

Дисперсия- это ***мера рассеяния*** всех возможных значений случайной величины относительно ожидаемого значения.

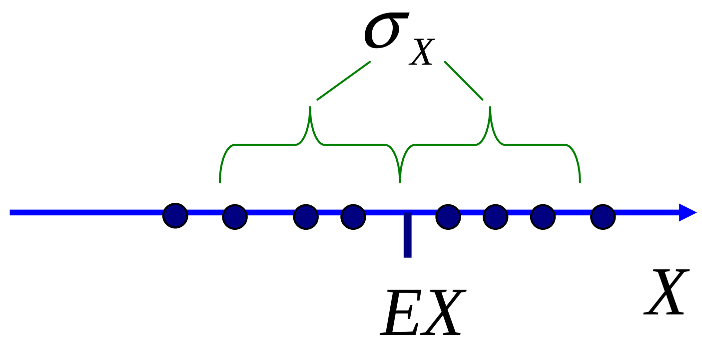


Дисперсия- это ***мера рассеяния*** всех возможных значений случайной величины относительно ожидаемого значения.



Дисперсия характеризует изменчивость (вариацию) случайной величины: чем больше вариация, тем дальше от средней находятся возможные значения случайной величины.

Дисперсия- это ***мера рассеяния*** всех возможных значений случайной величины относительно ожидаемого значения.



Дисперсия характеризует изменчивость (вариацию) случайной величины: чем больше вариация, тем дальше от средней находятся возможные значения случайной величины.

Если сравнивают две случайные величины, то та из них, которая имеет большую дисперсию, более вариабельна.

Пусть случайная величина X - дискретная, тогда

$$DX=\sum_k \left(x_k-EX\right)^2 p_k ,$$

где $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ - значения X, $p_k = P\left(X = x_k\right)$;

$$EX=\sum_k x_k p_k .$$

Пусть случайная величина X - дискретная, тогда

$$DX = \sum_k \left(x_k - EX \right)^2 p_k \,,$$

где $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ - значения X, $p_k = P\left(X = x_k \right)$;

$$EX = \sum_k x_k p_k \,.$$

либо $DX = \sum\limits_k x_k{}^2 p_k - \left(EX \right)^2$.

Пусть случайная величина X - дискретная, тогда

$$DX = \sum_k \left(x_k - EX \right)^2 p_k ,$$

где $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ - значения X, $p_k = P\left(X = x_k \right)$;

$$EX = \sum_k x_k p_k .$$

либо $DX = \sum_k {x_k}^2 p_k - \left(EX \right)^2$.

Если случайная величина X - непрерывная с плотностью $f(x)$, то

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

Пусть случайная величина X - дискретная, тогда

$$DX = \sum_k \left(x_k - EX \right)^2 p_k ,$$

где $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ - значения X, $p_k = P\left(X = x_k \right)$;

$$EX = \sum_k x_k p_k .$$

либо $DX = \sum_k x_k{}^2 p_k - \left(EX \right)^2$.

Если случайная величина X - непрерывная с плотностью $f(x)$, то

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

или $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(EX \right)^2$.

Пример. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	2	3	10
p	0.1	0.4	0.5

Найти среднее квадратическое отклонение σ_X.

Пример. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	2	3	10
p	0.1	0.4	0.5

Найти среднее квадратическое отклонение σ_X.

Решение. Математическое ожидание

$$EX = 2\cdot 0.1 + 3\cdot 0.4 + 10\cdot 0.5 = 6.4.$$

Математическое ожидание X^2:

$$EX^2 = 2^2\cdot 0.1 + 3^2\cdot 0.4 + 10^2\cdot 0.5 = 54.$$

Пример. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	2	3	10
p	0.1	0.4	0.5

Найти среднее квадратическое отклонение σ_X.

Решение. Математическое ожидание

$$EX = 2\cdot 0.1 + 3\cdot 0.4 + 10\cdot 0.5 = 6.4.$$

Математическое ожидание X^2:

$$EX^2 = 2^2\cdot 0.1 + 3^2\cdot 0.4 + 10^2\cdot 0.5 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$DX = EX^2 - \left(EX\right)^2 = 54 - 6.4^2 = 13.04.$$

Значит $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{13.04} \approx 3.61$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$DC = E\left(C - \underbrace{EX}_{=C}\right)^2 = 0.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю:

$$DC = E\Big(C - \underbrace{EX}_{=C}\Big)^2 = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = E(CX - ECX)^2 = C^2E(X - EX)^2 = C^2DX.$$

В частности, $D(-X) = DX$.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$DC = E\left(C - \underbrace{EX}_{=C}\right)^2 = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = E(CX - ECX)^2 = C^2 E(X - EX)^2 = C^2 DX.$$

В частности, $D(-X) = DX$.

3. $D(X + C) = DX$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$DC = E\left(C - \underbrace{EX}_{=C}\right)^2 = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D\left(CX\right) = E(CX - ECX)^2 = C^2E(X - EX)^2 = C^2DX.$$

В частности, $D(-X) = DX$.

3. $D(X + C) = DX$

Доказательство. $D(X + C) = E\left(X + C - E\left(X + C\right)\right)^2 =$

$$= E\left(X + C - EX - C\right)^2 = DX.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю:

$$DC = E\left(C - \underbrace{EX}_{=C}\right)^2 = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D\left(CX\right) = E(CX - ECX)^2 = C^2 E(X - EX)^2 = C^2 DX.$$

В частности, $D(-X) = DX$.

3. $D(X + C) = DX$

Доказательство. $D(X + C) = E\left(X + C - E\left(X + C\right)\right)^2 =$

$$= E\left(X + C - EX - C\right)^2 = DX.$$

4. Для случайной величины, заданной линейной функцией $aX + b$, выполняется: $D\left(aX + b\right) = a^2 D\left(X\right)$.

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

$$=\underbrace{E\left(X-EX\right)^2}_{DX}+\underbrace{E\left(Y-EY\right)^2}_{DY}+2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right).$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

$$=\underbrace{E\left(X-EX\right)^2}_{DX}+\underbrace{E\left(Y-EY\right)^2}_{DY}+2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right).$$

Так как X и Y независимы, то

$$E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)=$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

$$=\underbrace{E\left(X-EX\right)^2}_{DX}+\underbrace{E\left(Y-EY\right)^2}_{DY}+2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right).$$

Так как X и Y независимы, то

$$E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)=$$

$$=\underbrace{E(X\cdot Y)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(X\cdot EY)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(Y\cdot EX)}_{EX\cdot EY}+EX\cdot EY=0.$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

$$=\underbrace{E\left(X-EX\right)^2}_{DX}+\underbrace{E\left(Y-EY\right)^2}_{DY}+2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right).$$

Так как X и Y независимы, то

$$E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)=$$

$$=\underbrace{E(X\cdot Y)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(X\cdot EY)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(Y\cdot EX)}_{EX\cdot EY}+EX\cdot EY=0.$$

$$\Downarrow$$

$$D(X+Y)=DX+DY.$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

$$=\underbrace{E(X-EX)^2}_{DX}+\underbrace{E(Y-EY)^2}_{DY}+2E(X-EX)(Y-EY).$$

Так как X и Y независимы, то

$$E(X-EX)(Y-EY)=$$

$$=\underbrace{E(X\cdot Y)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(X\cdot EY)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(Y\cdot EX)}_{EX\cdot EY}+EX\cdot EY=0.$$

$$\Downarrow$$

$$D(X+Y)=DX+DY.$$

Замечания. а) Дисперсия разности независимых X, Y равна $D(X-Y)=DX+DY$.

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

$$=\underbrace{E\left(X-EX\right)^2}_{DX}+\underbrace{E\left(Y-EY\right)^2}_{DY}+2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right).$$

Так как X и Y независимы, то

$$E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)=$$

$$=\underbrace{E(X\cdot Y)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(X\cdot EY)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E(Y\cdot EX)}_{EX\cdot EY}+EX\cdot EY=0.$$

$$\Downarrow$$

$$D(X+Y)=DX+DY.$$

Замечания. а) Дисперсия разности независимых X, Y равна $D(X-Y)=DX+DY$.

б) Свойство справедливо и для суммы $n\geq 2$ попарно независимых случайных величин.