# Лекция L6
# Язык программирования для вычислимых функционалов

Вадим Пузаренко

21 октября 2021 г.

# Мотивация

Бестиповое $\lambda$–исчисление достаточно выразительно: к примеру, все вычислимые функции здесь можно сымитировать. Однако отсутствуют возможности в данном исчислении для верификации программ, поскольку отсутствует надлежащая семантика, а вместе с ней и простая модель для описания процессов. Простое типизированное исчисление имеет естественные модели, однако оно маловыразительно. В его рамках могут быть представлены только простейшие функции такие, как полиномы. Для того, чтобы появилась возможность в представлении вычислимых функций, здесь следует добавить константы.

# Синтаксис PCF

## PCF–типы

PCF — простой язык типов с двумя атомарными типами:
$\omega$ — тип натуральных чисел $\{0; 1; 2; \ldots\}$;
$\beta$ — булев тип $\{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$.
Типы в PCF определяются, как и в простом типизированном исчислении, индуктивно по построению:

1. $\omega$ и $\beta$ — PCF–типы;
2. если $\sigma$, $\tau$ — PCF–типы, то и $(\sigma \to \tau)$ — PCF–тип.

# Синтаксис PCF



Сначала для каждого типа $\sigma$ возьмём счетное количество переменных $v_0^\sigma$, $v_1^\sigma$, ..., $v_n^\sigma$, ... данного типа. Далее, зададим следующие константы ($\sigma$ — произвольный тип):

| | |
|---|---|
| $k_n : \omega$ | для каждого $n \in \omega$ |
| $TRUE$ | две булевы константы |
| $FALSE$ | |
| $ISNULL : (\omega \to \beta)$ | |
| $SUCC : (\omega \to \omega)$ | |
| $PRED : (\omega \to \omega)$ | |
| $COND_\sigma : (\beta \to (\sigma \to (\sigma \to \sigma)))$ | |
| $\mathrm{Y}_\sigma : ((\sigma \to \sigma) \to \sigma)$ | |

Будем использовать буквы $c$, $d$ для обозначения данных констант.

# Синтаксис PCF

**Определение.**

**PCF–термы** определяются индукцией по построению:

1. переменные $x^\sigma$ и константа $c^\sigma$ являются PCF–термами типа $\sigma$;
2. если $M$ — PCF–терм типа $(\sigma \to \tau)$ и $N$ — PCF–терм типа $\sigma$, то $(MN)$ — PCF–терм типа $\tau$;
3. если $x^\sigma$ — переменная и $M$ — PCF–терм типа $\tau$, то $\lambda x^\sigma.M$ — PCF–терм типа $(\sigma \to \tau)$.

# Синтаксис PCF



## Примеры.

- Если $M : \beta$, $N : \sigma$ и $P : \sigma$ — PCF–термы, то можно построить PCF–терм $(((COND_\sigma M)N)P)$. Для этого терма также используется запись **If M then N else P**.
- $(ISNULLk_n) : \beta$;
- $(SUCCk_n) : \omega$;
- $(PREDk_n) : \omega$.

# Операционная семантика PCF

## Правила редукции

| | |
|---|---|
| $(ISNULL k_0) \to TRUE$ | $(ISNULL k_{n+1}) \to FALSE$ |
| $(SUCC k_n) \to k_{n+1}$ | $(PRED k_{n+1}) \to k_n$ |
| $(\lambda x.MN) \to [M]^x_N$ | $(\mathrm{Y} M) \to (M(\mathrm{Y} M))$ |
| $((COND\ TRUE)N)P) \to N$ | $((COND\ FALSE)N)P) \to P$ |

# Операционная семантика PCF

## Правила редукции

| | |
|---|---|
| $(ISNULL k_0) \to TRUE$ | $(ISNULL k_{n+1}) \to FALSE$ |
| $(SUCC k_n) \to k_{n+1}$ | $(PRED k_{n+1}) \to k_n$ |
| $(\lambda x.MN) \to [M]^x_N$ | $(\mathrm{Y} M) \to (M(\mathrm{Y} M))$ |
| $((COND\ TRUE)N)P) \to N$ | $((COND\ FALSE)N)P) \to P$ |

## Правила контекста

| | |
|---|---|
| $\dfrac{M \to M'}{(MN) \to (M'N)}$ | $\dfrac{M \to M'}{(cM) \to (cM')}$ |

(здесь $c \in \{SUCC, PRED, COND, ISNULL\}$).

# Операционная семантика PCF

## Правила редукции

| | |
|---|---|
| $(ISNULL k_0) \to TRUE$ | $(ISNULL k_{n+1}) \to FALSE$ |
| $(SUCC k_n) \to k_{n+1}$ | $(PRED k_{n+1}) \to k_n$ |
| $(\lambda x.MN) \to [M]^x_N$ | $(\mathrm{Y} M) \to (M(\mathrm{Y} M))$ |
| $((COND\ TRUE)N)P) \to N$ | $((COND\ FALSE)N)P) \to P$ |

## Правила контекста

| | |
|---|---|
| $\dfrac{M \to M'}{(MN) \to (M'N)}$ | $\dfrac{M \to M'}{(cM) \to (cM')}$ |

(здесь $c \in \{SUCC, PRED, COND, ISNULL\}$).

Пусть $\to^*$ — транзитивное рефлексивное замыкание отношения $\to$: справедливо отношение $M \to^* N$, если найдётся последовательность термов $M = M_0, M_1, \dots, M_n = N$ такая, что $M_i \to M_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$.

# Операционная семантика PCF

## Замечание.

- Тип $\lambda$–терма сохраняется при редукции.
- Правило редукции применяется детерминированно, например, $(\mathrm{Y}_\omega \lambda x^\omega.\mathrm{SUCC}\, x) \to (\lambda x^\omega.\mathrm{SUCC}\, x(\mathrm{Y}_\omega \lambda x^\omega.\mathrm{SUCC}\, x)) \to (\mathrm{SUCC}(\mathrm{Y}_\omega \lambda x^\omega.\mathrm{SUCC}\, x))$.
- Невозможно применить редукцию к следующим PCF–термам:
  - переменные $x^\sigma$ и константы $c$;
  - PCF–термы вида $(\mathrm{COND}_\sigma \mathrm{TRUE})$, $(\mathrm{COND}_\sigma \mathrm{FALSE})$, $((\mathrm{COND}_\sigma \mathrm{TRUE})M)$, $((\mathrm{COND}_\sigma \mathrm{FALSE})M)$;
  - все PCF–термы, которые начинаются с переменной;
  - все PCF–термы вида $\lambda x^\sigma.M$.

## Операционная семантика PCF



Для произвольного $\lambda$–терма $M$ определим

$$\mathrm{eval}(M) = \begin{cases} N, & \text{если } M \to^* N \text{ и к } N \text{ невозможно применить редукцию ;} \\ \uparrow, & \text{если редукционная цепь не обрывается.} \end{cases}$$

Прежде всего нас интересуют замкнутые $\lambda$–термы типов $\omega$ и $\beta$.

$$\mathrm{eval}(M) = \begin{cases} c \in \{k_n, \mathrm{TRUE}, \mathrm{FALSE}\}, & \text{если цепь редукций для } M \text{ обрывается;} \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

# Операционная семантика PCF

## Наивная попытка

$D_\omega = \mathbb{N}$, $D_\beta = \mathbb{B}$, $D_{(\sigma\to\tau)} = (D_\sigma \to D_\tau)$. Пусть $\varrho$ — означивание переменных. Тогда

| | |
|---|---|
| $[\![x^\sigma]\!]_\varrho = \varrho(x^\sigma)$ | $[\![k_n]\!]_\varrho = n$ |
| $[\![\mathrm{TRUE}]\!]_\varrho = \mathrm{true}$ | $[\![\mathrm{FALSE}]\!]_\varrho = \mathrm{false}$ |
| $[\![\mathrm{ISNULL}]\!]_\varrho : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ | $n \mapsto \begin{cases} \mathrm{true}, & \text{если } n = 0; \\ \mathrm{false}, & \text{если } n \neq 0. \end{cases}$ |
| $[\![\mathrm{SUCC}]\!]_\varrho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ | $n \mapsto n+1$ |
| $[\![\mathrm{COND}_\sigma]\!] : \mathbb{B} \times D_\sigma \times D_\sigma \to D_\sigma$ | $(w,a,b) \mapsto \begin{cases} a, & \text{если } w = \mathrm{true}; \\ b, & \text{если } w = \mathrm{false}. \end{cases}$ |

$[\![(M^{(\sigma\to\tau)}N^\sigma)]\!]_\varrho = [\![M^{(\sigma\to\tau)}]\!]_\varrho([\![N^\sigma]\!]_\varrho) \in D_\tau$

$[\![\lambda x^\sigma.M^\tau]\!]_\varrho = (a \mapsto [\![M^\tau]\!]_{\varrho[x^\sigma\mapsto a]} : D_\sigma \to D_\tau$

# Операционная семантика PCF

## Наивная попытка

А что делать с PRED и Y?
В случае с PRED ситуация не настолько серьезная, но имеет определённые препятствия:

$$\mathrm{pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n - 1$$

является частичной функцией, которая не определена в нуле. Однако интерпретация может быть только всюду определенной функцией. Какие варианты?

# Операционная семантика PCF



## Наивная попытка

А что делать с $\mathrm{PRED}$ и $\mathrm{Y}$?
В случае с $\mathrm{PRED}$ ситуация не настолько серьезная, но имеет определённые препятствия:

$$\mathrm{pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n - 1$$

является частичной функцией, которая не определена в нуле.
Однако интерпретация может быть только всюду определенной функцией. Какие варианты?

1. $\mathrm{pred}(0) = 0$;

# Операционная семантика PCF



## Наивная попытка

А что делать с $\mathrm{PRED}$ и $\mathrm{Y}$?
В случае с $\mathrm{PRED}$ ситуация не настолько серьезная, но имеет определённые препятствия:

$$\mathrm{pred} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n - 1$$

является частичной функцией, которая не определена в нуле. Однако интерпретация может быть только всюду определенной функцией. Какие варианты?

1. $\mathrm{pred}(0) = 0$;
2. другой вариант — допустить использование частичных функций (см. препятствие выше).

# Операционная семантика PCF



## Новая попытка

Выход из дилеммы заключается в присоединении символа $\perp$ для "не определено" и расширении семантических областей: $\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, $\mathbb{B}_\perp = \mathbb{B} \cup \{\perp\}$.

# Операционная семантика PCF



## Новая попытка

Выход из дилеммы заключается в присоединении символа $\perp$ для "не определено" и расширении семантических областей: $\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, $\mathbb{B}_\perp = \mathbb{B} \cup \{\perp\}$.

Для каждой частичной функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с областью задания $D_f \subseteq \mathbb{N}$ можем использовать всюду определённую функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D_f; \\ \perp & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, имеется адекватная интерпретация для $PRED$: $[\![PRED]\!]_\varrho = \mathrm{pred}$, где

$$\mathrm{pred}(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } 0 \neq x \in \mathbb{N}; \\ \perp & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

# Операционная семантика PCF



Если функция частичная, то ее можно доопределить до всюду определённой на $\mathbb{N}_\perp$. А что делать с функциями вида

$$g(x) = \begin{cases} \perp, & \text{если } x \in \mathbb{N}; \\ 4, & \text{если } x = \perp. \end{cases}$$

# Операционная семантика PCF



Если функция частичная, то ее можно доопределить до всюду определённой на $\mathbb{N}_\perp$. А что делать с функциями вида
$$g(x) = \begin{cases} \perp, & \text{если } x \in \mathbb{N}; \\ 4, & \text{если } x = \perp. \end{cases}$$
Ограничиваемся рассмотрением только “правильных” функций.

# К интерпретации $\mathrm{Y}$



Так как $\mathrm{Y}_\omega : ((\omega \to \omega) \to \omega)$, должно выполняться $[\![\mathrm{Y}_\omega]\!] : D_{(\omega\to\omega)} \to D_\omega$. Кроме того, $[\![\mathrm{Y}_\omega]\!]([\![M]\!]) = [\![M]\!]([\![\mathrm{Y}_\omega]\!]([\![M]\!]))$. Пусть $f = [\![M]\!] : D_\omega \to D_\omega$; тогда $[\![\mathrm{Y}_\omega]\!](f) = f([\![\mathrm{Y}_\omega]\!](f))$ и $[\![\mathrm{Y}_\omega]\!](f)$ — неподвижная точка для $f$. Однако многие функции из $\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ не имеют неподвижных точек.

Выделим класс функций, имеющих "каноническую" неподвижную точку.

# Стандартная семантика PCF

## Интерпретация типов

Атомарные типы $\omega$ и $\beta$ интерпретируются низкими областями $\mathbb{N}_\perp$ и $\mathbb{B}_\perp$ соответственно; остальные типы $D_{(\sigma\to\tau)}$ — непрерывными функциями $f : D_\sigma \to D_\tau \in [D_\sigma \to D_\tau]$.

# Стандартная семантика PCF



## Интерпретация типов

Атомарные типы $\omega$ и $\beta$ интерпретируются низкими областями $\mathbb{N}_\perp$ и $\mathbb{B}_\perp$ соответственно; остальные типы $D_{(\sigma\to\tau)}$ — непрерывными функциями $f : D_\sigma \to D_\tau \in [D_\sigma \to D_\tau]$.

## Интерпретации констант

$[\![k_n]\!] = n \in \mathbb{N}_\perp, \qquad [\![\mathrm{TRUE}]\!] = \mathrm{true}, \qquad [\![\mathrm{FALSE}]\!] = \mathrm{false}$

| | |
|---|---|
| $[\![\mathrm{SUCC}]\!] = \mathrm{succ} : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ | $\mathrm{succ}(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \in \mathbb{N}; \\ \perp, & \text{если } x = \perp. \end{cases}$ |
| $[\![\mathrm{PRED}]\!] = \mathrm{pred} : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$ | $\mathrm{pred}(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; \\ \perp, & \text{если } x \in \{0, \perp\}. \end{cases}$ |

# Стандартная семантика PCF



## Интерпретации констант

$[\![\mathrm{Y}_\sigma]\!] = \mathbb{Y}_\sigma : [D_\sigma \to D_\sigma] \to D_\sigma \qquad \mathbb{Y}_\sigma(f) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp);$

$$[\![\mathrm{ISNULL}]\!] = \mathrm{isnull} : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{B}_\perp \qquad \mathrm{isnull}(x) = \begin{cases} \mathrm{true}, & \text{если } x = 0; \\ \mathrm{false}, & \text{если } x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; \\ \perp, & \text{если } x = \perp. \end{cases}$$

$[\![\mathrm{COND}_\sigma]\!] = \mathrm{cond}_\sigma : \mathbb{B}_\perp \times D_\sigma \times D_\sigma \to D_\sigma$

$$\mathrm{cond}_\sigma(x, y, z) = \begin{cases} y, & \text{если } x = \mathrm{true}; \\ z, & \text{если } x = \mathrm{false}; \\ \perp, & \text{если } x = \perp. \end{cases}$$

# Стандартная семантика PCF



## Интерпретации констант

$$[\![\mathrm{Y}_\sigma]\!] = \mathbb{Y}_\sigma : [D_\sigma \to D_\sigma] \to D_\sigma \qquad \mathbb{Y}_\sigma(f) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp);$$

$$[\![\mathrm{ISNULL}]\!] = \mathrm{isnull} : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{B}_\perp \qquad \mathrm{isnull}(x) = \begin{cases} \mathrm{true}, & \text{если } x = 0; \\ \mathrm{false}, & \text{если } x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; \\ \perp, & \text{если } x = \perp. \end{cases}$$

$$[\![\mathrm{COND}_\sigma]\!] = \mathrm{cond}_\sigma : \mathbb{B}_\perp \times D_\sigma \times D_\sigma \to D_\sigma$$

$$\mathrm{cond}_\sigma(x, y, z) = \begin{cases} y, & \text{если } x = \mathrm{true}; \\ z, & \text{если } x = \mathrm{false}; \\ \perp, & \text{если } x = \perp. \end{cases}$$

Все функции, интерпретирующие константы, непрерывны.

# Стандартная семантика PCF



## Интерпретация термов

1. PCF-константы $\mathrm{C}$ интерпретируются, как указано выше. Если $x^\sigma$ — переменная, то $[\![x^\sigma]\!]_\varrho = \varrho(x^\sigma)$.
2. Если $M \equiv (N^{(\sigma\to\tau)} P^\sigma)$ и уже заданы интерпретации $[\![N^{(\sigma\to\tau)}]\!]_\varrho \in D_{(\sigma\to\tau)} = [D_\sigma \to D_\tau]$ и $[\![P^\sigma]\!]_\varrho \in D_\sigma$, то $[\![M]\!]_\varrho = [\![(NP)]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho([\![P]\!]_\varrho) \in D_\tau$.
3. Если $M \equiv \lambda x^\sigma.N^\tau$ и уже задана интерпретация $[\![N]\!]_\varrho$ для произвольного $\varrho$, то $[\![M]\!]_\varrho = [\![\lambda x.N]\!]_\varrho = (a \mapsto [\![N]\!]_{\varrho[x\mapsto a]} : D_\sigma \to D_\tau)$ (позже будет доказано, что эта функция также непрерывна).

Спасибо за внимание.