Элементы теории массового обслуживания

Основные понятия

Элементы теории массового обслуживания

Основные понятия

Система массового обслуживания (СМО) – это случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Элементы теории массового обслуживания

Основные понятия

Система массового обслуживания (СМО) – это случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

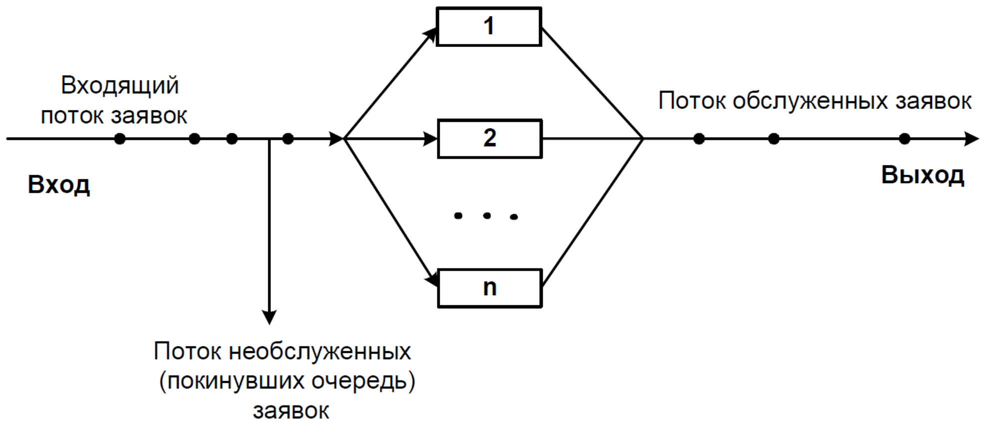
Основные элементы:

-Входящий поток заявок;

- Очередь;

-Каналы обслуживания;

- Выходящий поток заявок.



Элементы теории массового обслуживания

Основные понятия

Система массового обслуживания (СМО) – это случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

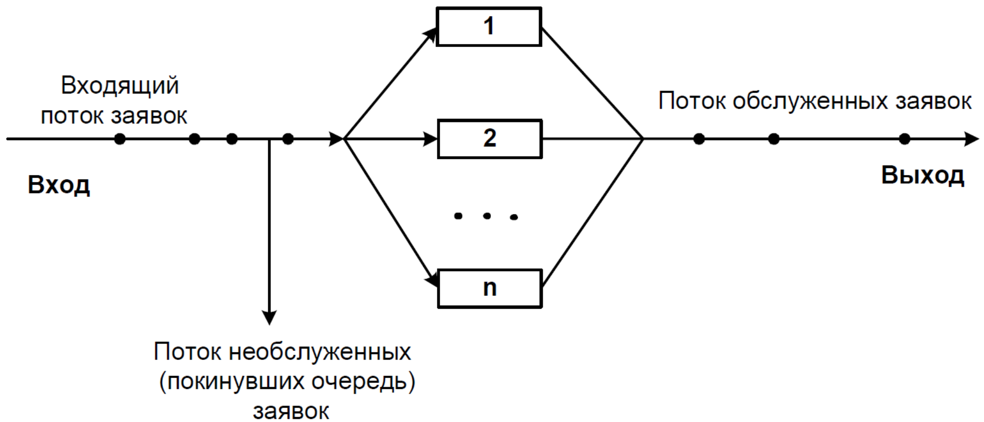
Основные элементы:

-Входящий поток заявок;

- Очередь;

-Каналы обслуживания;

- Выходящий поток заявок.



Типы СМО

системы с отказами - при занятости всех каналов обслуживания заявка покидает систему необслуженной;

Элементы теории массового обслуживания

Основные понятия

Система массового обслуживания (СМО) – это случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

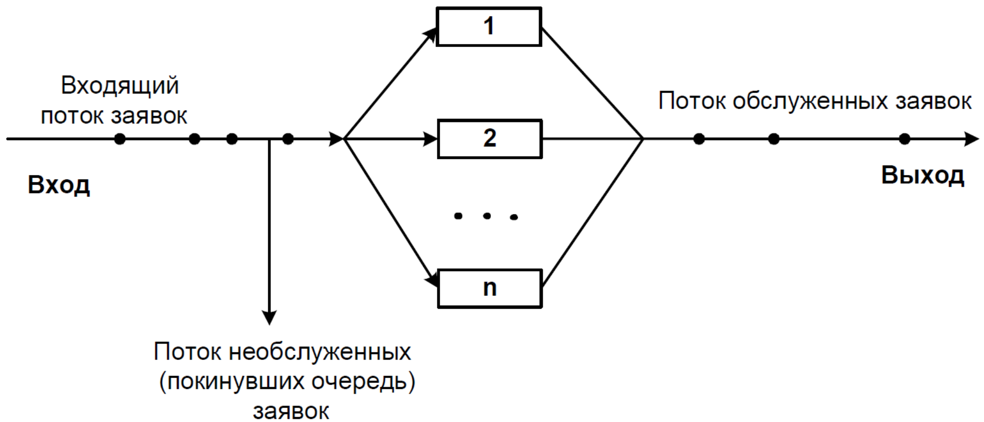
Основные элементы:

-Входящий поток заявок;

- Очередь;

-Каналы обслуживания;

- Выходящий поток заявок.



Типы СМО

системы с отказами - при занятости всех каналов обслуживания заявка покидает систему необслуженной;

системы с неограниченной очередью - заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы обслуживания были заняты;

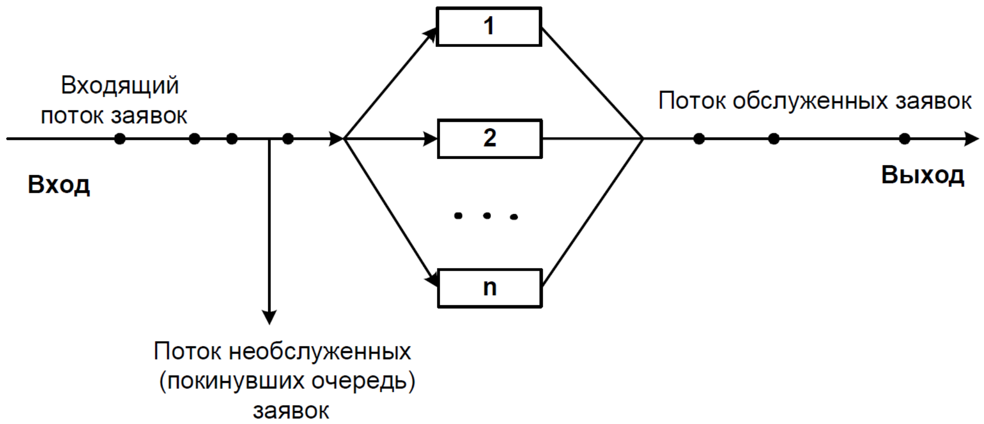
Элементы теории массового обслуживания

Основные понятия

Система массового обслуживания (СМО) – это случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Основные элементы:

-Входящий поток заявок;
- Очередь;
-Каналы обслуживания;
- Выходящий поток заявок.



Типы СМО

системы с отказами - при занятости всех каналов обслуживания заявка покидает систему необслуженной;

системы с неограниченной очередью - заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы обслуживания были заняты;

системы с ожиданием и ограниченной очередью - ограниченно время ожидания или длина очереди.

Граф состояний

Схема возможных состояний и возможных переходов из состояние в состояние.

Граф состояний

Схема возможных состояний и возможных переходов из состояние в состояние.

Пример.

n самолетов ←→ ПВО противника

x_0 – не уничтожено ни одного самолета,

x_1 – уничтожен ровно один самолет,

…………………………………….

x_n – уничтожены все n самолетов.

Граф состояний

Схема возможных состояний и возможных переходов из состояние в состояние.

Пример.

n самолетов ←→ ПВО противника

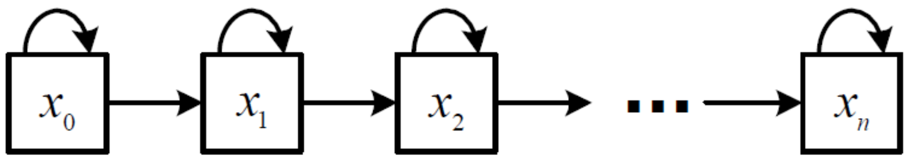
x_0 – не уничтожено ни одного самолета,

x_1 – уничтожен ровно один самолет,

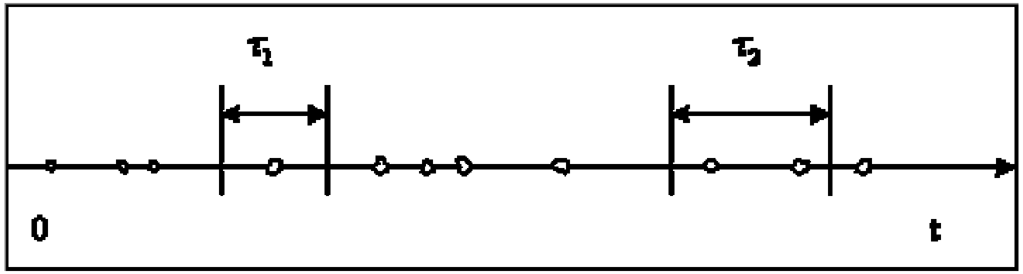
....

x_n – уничтожены все n самолетов.

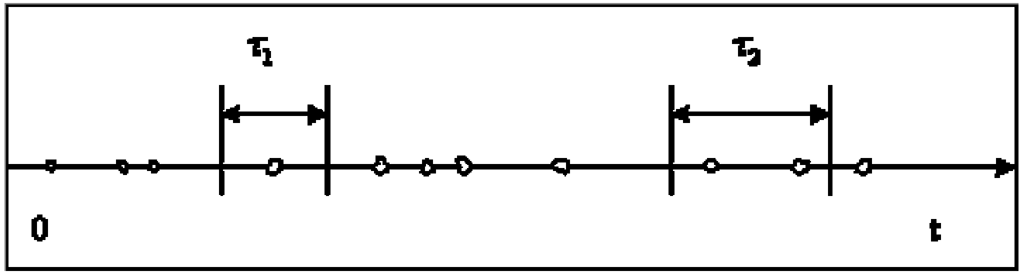
Граф состояний:



Поток событий – последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

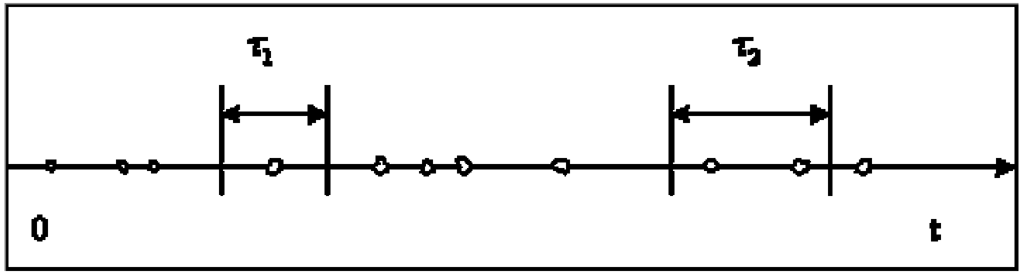


Поток событий – последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.



Интенсивность потока событий λ – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени.

Поток событий – последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.



Интенсивность потока событий λ – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени.

$\lambda = 1/\tau$, где τ – средний промежуток времени между событиями.

Виды потоков событий

1. **Стационарный поток событий -** если его вероятностные характеристики не зависят от

Виды потоков событий

1. **Стационарный поток событий -** если его вероятностные характеристики не зависят от времени.
2. **Поток событий без последствий -** если для любых двух непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от

Виды потоков событий

1. **Стационарный поток событий -** если его вероятностные характеристики не зависят от времени.
2. **Поток событий без последствий -** если для любых двух непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой.
3. **Ординарный поток событий -** если события в нем появляются по одному, а не группами по нескольку

Виды потоков событий

1. **Стационарный поток событий -** если его вероятностные характеристики не зависят от времени.
2. **Поток событий без последствий -** если для любых двух непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой.
3. **Ординарный поток событий -** если события в нем появляются по одному, а не группами по нескольку событий сразу.
4. **Простейший (стационарный пуассоновский) поток событий -** если он обладает тремя свойствами:

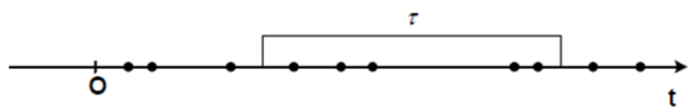
   1) стационарен, 2) не имеет последствий, 3) ординарен.

Теорема. Пусть X - число событий, попадающих на фиксированный интервал времени длины τ (простейший поток). Тогда величина X подчиняется распределению Пуассона.

Теорема. Пусть X - число событий, попадающих на фиксированный интервал времени длины τ (простейший поток). Тогда величина X подчиняется распределению Пуассона.

Доказательство.

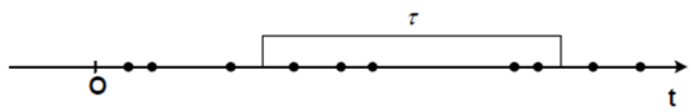
Разобьем интервал длины τ на n равных частей длины $\Delta t = \tau / n$.



Теорема. Пусть X - число событий, попадающих на фиксированный интервал времени длины τ (простейший поток). Тогда величина X подчиняется распределению Пуассона.

Доказательство.

Разобьем интервал длины τ на n равных частей длины $\Delta t = \tau / n$.

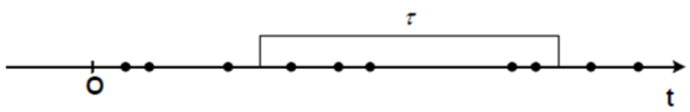


Пусть Y - число точек, попавших на некоторый интервал Δt, $Y \in \{0,1\}$ при малом Δt (в силу ординарности потока).

Теорема. Пусть X - число событий, попадающих на фиксированный интервал времени длины τ (простейший поток). Тогда величина X подчиняется распределению Пуассона.

Доказательство.

Разобьем интервал длины τ на n равных частей длины $\Delta t = \tau / n$.



Пусть Y - число точек, попавших на некоторый интервал Δt, $Y \in \{0,1\}$ при малом Δt (в силу ординарности потока).

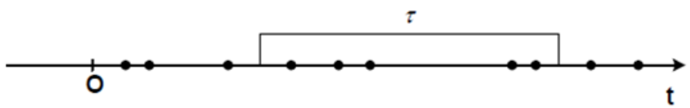
Тогда $EY = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = \lambda \Delta t = \lambda \tau / n \Rightarrow$

вероятность попадания в Δt равна $p = \lambda \tau / n \Rightarrow$

Теорема. Пусть X - число событий, попадающих на фиксированный интервал времени длины τ (простейший поток). Тогда величина X подчиняется распределению Пуассона.

Доказательство.

Разобьем интервал длины τ на n равных частей длины $\Delta t = \tau / n$.



Пусть Y - число точек, попавших на некоторый интервал Δt, $Y \in \{0,1\}$ при малом Δt (в силу ординарности потока).

Тогда $EY = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = \lambda \Delta t = \lambda \tau / n \Rightarrow$

вероятность попадания в Δt равна $p = \lambda \tau / n \Rightarrow$

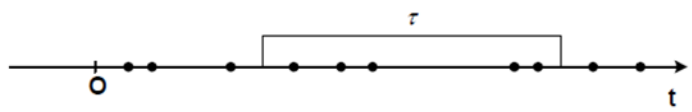
по формуле Бернулли

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} .$$

Теорема. Пусть X - число событий, попадающих на фиксированный интервал времени длины τ (простейший поток). Тогда величина X подчиняется распределению Пуассона.

Доказательство.

Разобьем интервал длины τ на n равных частей длины $\Delta t = \tau / n$.



Пусть Y - число точек, попавших на некоторый интервал Δt, $Y \in \{0,1\}$ при малом Δt (в силу ординарности потока).

Тогда $EY = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = \lambda \Delta t = \lambda \tau / n \Rightarrow$

вероятность попадания в Δt равна $p = \lambda \tau / n \Rightarrow$

по формуле Бернулли

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} .$$

При $n \to \infty, p \to 0$ и $np = \lambda \tau = const$ по формуле Пуассона

$$P(X = m) \approx P_m(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} e^{-\lambda \tau}. \qquad \blacksquare$$

Следствие 1. Вероятность того, что за время τ не поступит ни одного вызова, равна $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

Следствие 1. Вероятность того, что за время τ не поступит ни одного вызова, равна $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

Следствие 2. Величина интервала времени T между соседними событиями простейшего потока подчиняется экспоненциальному распределению.

Следствие 1. Вероятность того, что за время τ не поступит ни одного вызова, равна $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

Следствие 2. Величина интервала времени T между соседними событиями простейшего потока подчиняется экспоненциальному распределению.

Доказательство. Вероятность того, что на участке длины t не появится ни одного события $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$

Следствие 1. Вероятность того, что за время τ не поступит ни одного вызова, равна $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

Следствие 2. Величина интервала времени T между соседними событиями простейшего потока подчиняется экспоненциальному распределению.

Доказательство. Вероятность того, что на участке длины t не появится ни одного события $P(T \geq t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow$

вероятность противоположного события $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow$

$T \sim Exp(\lambda)$.

Найдем вероятность, того, что за небольшой период Δt появится одно событие

Найдем вероятность, того, что за небольшой период Δt появится одно событие

Вероятность события $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Найдем вероятность, того, что за небольшой период Δt появится одно событие

Вероятность события $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Разлагая экспоненту в ряд Тейлора получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Найдем вероятность, того, что за небольшой период Δt появится одно событие

Вероятность события $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Разлагая экспоненту в ряд Тейлора получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

$$P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = 1 - 1 - (-\lambda \Delta t) - \ldots \approx \lambda \Delta t$$

Аналогично, **за небольшой период t не появится ни одно событие**

Найдем вероятность, того, что за небольшой период Δt появится одно событие

Вероятность события $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Разлагая экспоненту в ряд Тейлора получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

$$P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = 1 - 1 - (-\lambda \Delta t) - \dots \approx \lambda \Delta t$$

Аналогично, **за небольшой период t не появится ни одно событие**

$$P(T \geq \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 + (-\lambda \Delta t) + \dots \approx 1 - \lambda \Delta t$$

Классификация СМО (Кендалл)

A|B|C|D

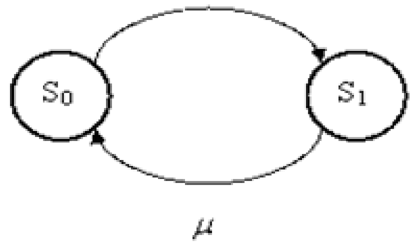
A - входной поток
B - время обслуживания (выходной поток)

Например: M - марковский, G - произвольный, D - регулярный

C - число приборов
D - размер очереди

Одноканальная СМО с отказами (M|M|1|0)

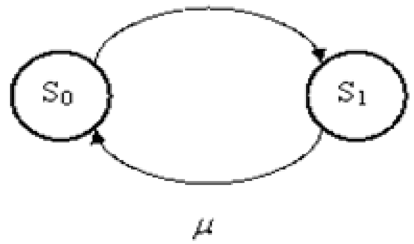
Одноканальная СМО с отказами (M|M|1|0)



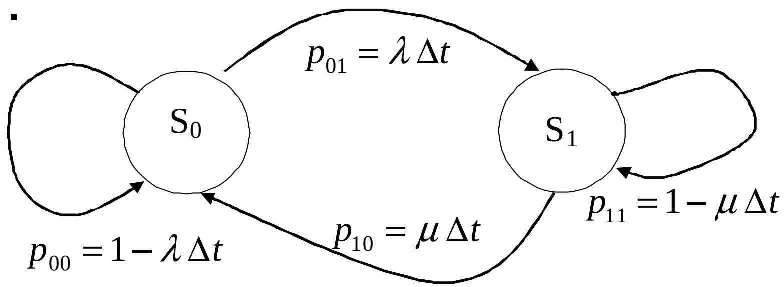
Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуженных заявок имеет интенсивность μ. Два состояния: S_0

Одноканальная СМО с отказами (M|M|1|0)

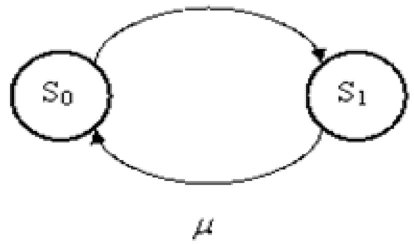
Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуженных заявок имеет интенсивность μ. Два состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят.



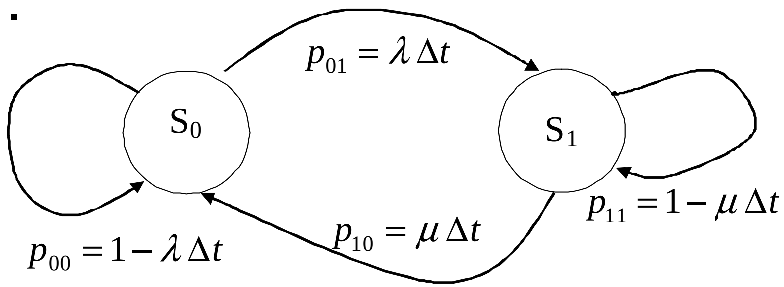
Рассмотрим марковскую цепь с переходами в моменты времени $t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, ..., t_0+n\Delta t, ...$



Одноканальная СМО с отказами (M|M|1|0)



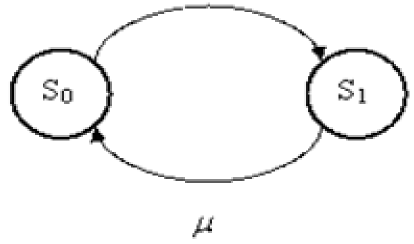
Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуженных заявок имеет интенсивность μ. Два состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят.



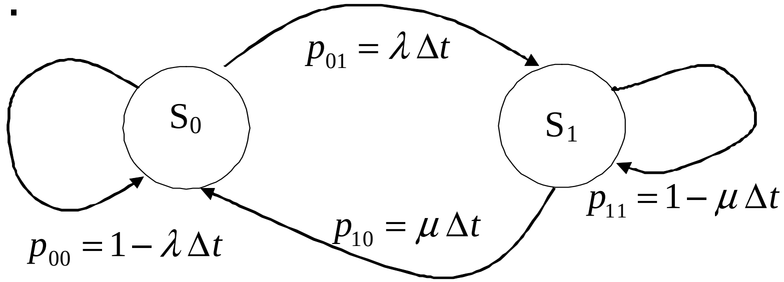
Рассмотрим марковскую цепь с переходами в моменты времени $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, ..., t_0 + n\Delta t, ...$

Обозначим $\pi_0(t)$, $\pi_1(t)$ - вероятности состояний S_0, S_1 в момент t, $\pi_0(t) + \pi_1(t) = 1.$

Одноканальная СМО с отказами (M|M|1|0)



Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуженных заявок имеет интенсивность μ. Два состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят.



Рассмотрим марковскую цепь с переходами в моменты времени $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, ..., t_0 + n\Delta t, ...$

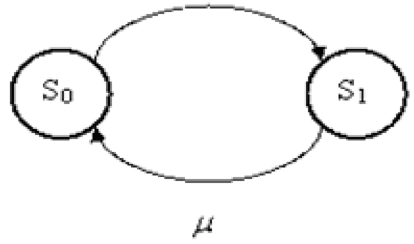
Обозначим $\pi_0(t)$, $\pi_1(t)$ - вероятности состояний S_0, S_1 в момент t,

$\pi_0(t) + \pi_1(t) = 1.$

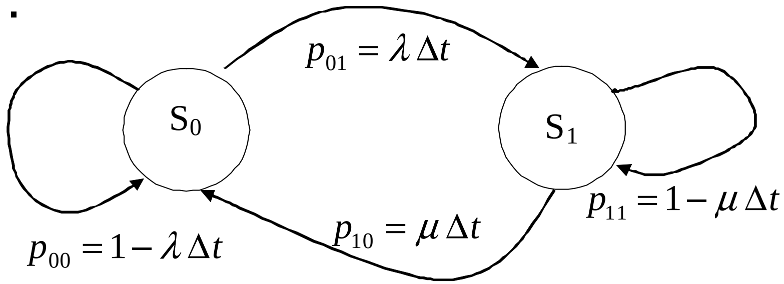
$$\pi_0(t+\Delta t) = \underbrace{\pi_0(t)(1-\lambda\Delta t)}_{S_0 \to S_0} + \underbrace{\pi_1(t)\mu\Delta t}_{S_1 \to S_0} \Rightarrow$$

Одноканальная СМО с отказами (M|M|1|0)

Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуженных заявок имеет интенсивность μ. Два состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят.



Рассмотрим марковскую цепь с переходами в моменты времени $t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, \ldots, t_0+n\Delta t, \ldots$



Обозначим $\pi_0(t)$, $\pi_1(t)$ - вероятности состояний S_0, S_1 в момент t,

$\pi_0(t)+\pi_1(t)=1.$

$$\pi_0(t+\Delta t)=\underbrace{\pi_0(t)(1-\lambda\,\Delta t)}_{S_0\to S_0}+\underbrace{\pi_1(t)\mu\,\Delta t}_{S_1\to S_0}\Rightarrow$$

$$\frac{\pi_0(t+\Delta t)-\pi_0(t)}{\Delta t}=-\lambda\pi_0(t)+\mu\pi_1(t)\Rightarrow\quad \pi_0'(t)=-\lambda\pi_0(t)+\mu\pi_1(t).$$

Предельные вероятности $\pi_0, \pi_1 = const \Rightarrow \; 0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1$, $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}}$$

Предельные вероятности $\pi_0, \pi_1 = const \Rightarrow \quad 0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1$, $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\pi_0 = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}} \Rightarrow$ Вероятность отказа заявки $P_{отк} = \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Предельные вероятности $\pi_0, \pi_1 = const \Rightarrow \quad 0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 \;,\; \pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\pi_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}} \Rightarrow$ Вероятность отказа заявки $P_{отк} = \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Предельные вероятности $\pi_0, \pi_1 = const \Rightarrow \ 0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1$, $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}} \Rightarrow$ Вероятность отказа заявки $P_{отк} = \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени) $A = \lambda Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

Предельные вероятности $\pi_0, \pi_1 = const \Rightarrow$ $0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1$, $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\pi_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}} \Rightarrow$ Вероятность отказа заявки $P_{отк} = \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$. Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени) $A = \lambda Q = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

Пример. В систему поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ = 90 вызовов в час. Средняя продолжительность разговора - 2 мин. Определить показатели эффективности работы СМО при наличии одного телефонного номера.

Предельные вероятности $\pi_0, \pi_1 = const \Rightarrow \ 0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1$, $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\pi_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}} \Rightarrow$ Вероятность отказа заявки $P_{отк} = \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$. Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени) $A = \lambda Q = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

Пример. В систему поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ = 90 вызовов в час. Средняя продолжительность разговора - 2 мин. Определить показатели эффективности работы СМО при наличии одного телефонного номера.

Решение. Интенсивность потока обслуживаний $\mu = 30$ вызовов в час. Вероятность отказа $P_{отк} = 90/120 = 0.75$. Относительная пропускная способность $Q = \dfrac{30}{120} = 0.25$, т.е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществят переговоры. Абсолютная пропускная способность $A = 90 \cdot 0.25 = 22.5$, т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки.

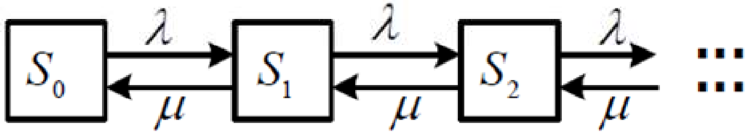
Одноканальная СМО с ожиданием и бесконечной очередью (M|M|1|∞)

Одноканальная СМО с ожиданием и бесконечной очередью (M|M|1|∞)

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, S_2 - канал занят и 1 заявка в очереди,…

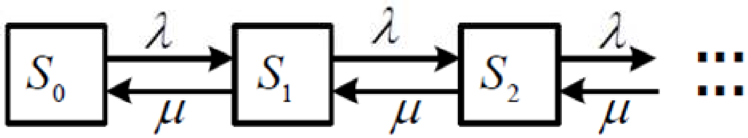
Одноканальная СМО с ожиданием и бесконечной очередью (M|M|1|∞)

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, S_2 - канал занят и 1 заявка в очереди,…



Одноканальная СМО с ожиданием и бесконечной очередью (M|M|1|∞)

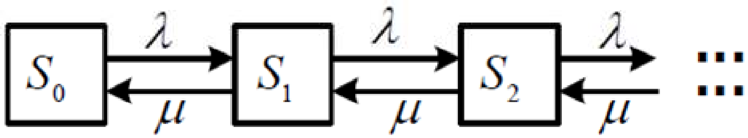
Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, S_2 - канал занят и 1 заявка в очереди,…



Найдем $\pi_n(t+\Delta t)$ - вероятность того, что в момент времени $t+\Delta t$ система находится в состоянии S_n.

Одноканальная СМО с ожиданием и бесконечной очередью (M|M|1|∞)

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, S_2 - канал занят и 1 заявка в очереди,…

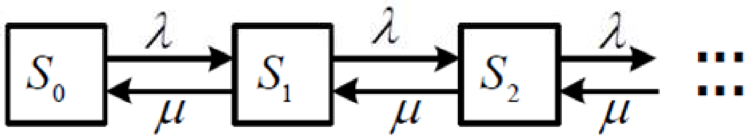


Найдем $\pi_n(t+\Delta t)$ - вероятность того, что в момент времени $t+\Delta t$ система находится в состоянии S_n.

В силу ординарности потоков и малой величины Δt можно считать, что система находится в момент $t+\Delta t$ в S_n, если в момент t она находилась в S_{n-1}, S_n или S_{n+1} .

Одноканальная СМО с ожиданием и бесконечной очередью (M|M|1|∞)

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, S_2 - канал занят и 1 заявка в очереди,…



Найдем $\pi_n(t+\Delta t)$ - вероятность того, что в момент времени $t+\Delta t$ система находится в состоянии S_n.

В силу ординарности потоков и малой величины Δt можно считать, что система находится в момент $t+\Delta t$ в S_n, если в момент t она находилась в S_{n-1}, S_n или S_{n+1} .

$$\begin{aligned}\pi_n(t+\Delta t) \approx \pi_n(t)\Big((1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)+\mu\Delta t\lambda\Delta t\Big)+ \\ +\pi_{n-1}(t)\Big(\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)\Big)+\pi_{n+1}(t)\Big((1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t\Big)\approx \\ \approx(1-(\lambda+\mu)\Delta t)\,\pi_n(t)+\lambda\Delta t\pi_{n-1}(t)+\mu\Delta t\pi_{n+1}(t)\end{aligned}$$

Одноканальная СМО с ожиданием и бесконечной очередью (M|M|1|∞)

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, S_2 - канал занят и 1 заявка в очереди,…

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_2 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots$$

Найдем $\pi_n(t+\Delta t)$ - вероятность того, что в момент времени $t+\Delta t$ система находится в состоянии S_n.

В силу ординарности потоков и малой величины Δt можно считать, что система находится в момент $t+\Delta t$ в S_n, если в момент t она находилась в S_{n-1}, S_n или S_{n+1} .

$$\begin{aligned}\pi_n(t+\Delta t) \approx \pi_n(t)\Big((1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)+\mu\Delta t\lambda\Delta t\Big) + \\ +\pi_{n-1}(t)\Big(\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)\Big)+\pi_{n+1}(t)\Big((1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t\Big)\approx \\ \approx (1-(\lambda+\mu)\Delta t)\ \pi_n(t)+\lambda\Delta t\pi_{n-1}(t)+\mu\Delta t\pi_{n+1}(t)\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d\pi_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)\pi_n(t) + \lambda\pi_{n-1}(t)+\mu\pi_{n+1}(t)$$

Стационарное значение π_n можно найти из условия

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

—

Стационарное значение π_n можно найти из условия

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Тогда

$$0 = -(\lambda + \mu)\pi_n + \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} \Rightarrow$$

Стационарное значение π_n можно найти из условия

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Тогда

$$0 = -(\lambda + \mu)\pi_n + \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} \Rightarrow$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$$

Стационарное значение π_n можно найти из условия

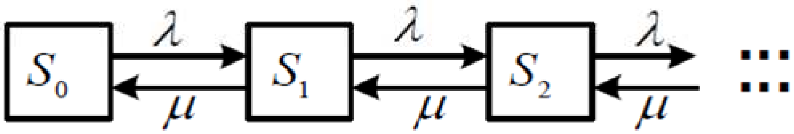
$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Тогда

$$0 = -(\lambda + \mu)\pi_n + \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} \Rightarrow$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$$

Получили уравнение равновесия: левая часть описывает уходы из состояния S_n, а правая - приходы в состояние S_n.



Стационарное значение π_n можно найти из условия

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Тогда

$$0 = -(\lambda + \mu)\pi_n + \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} \Rightarrow$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$$

Получили уравнение равновесия: левая часть описывает уходы из состояния S_n, а правая - приходы в состояние S_n.

$$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_2 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \cdots$$

Из S_0 можно попасть только в S_1, поэтому $\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$

Стационарное значение π_n можно найти из условия

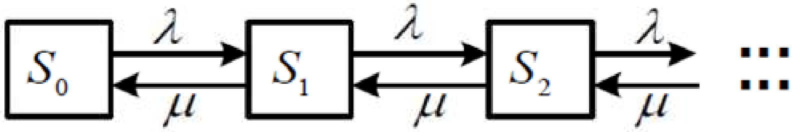
$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Тогда

$$0 = -(\lambda + \mu)\pi_n + \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} \Rightarrow$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$$

Получили уравнение равновесия: левая часть описывает уходы из состояния S_n, а правая - приходы в состояние S_n.



Из S_0 можно попасть только в S_1, поэтому $\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$

Тогда

$$(\lambda + \mu)\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = \mu\pi_1 + \mu\pi_2 \Rightarrow \lambda\pi_1 = \mu\pi_2$$

Стационарное значение π_n можно найти из условия

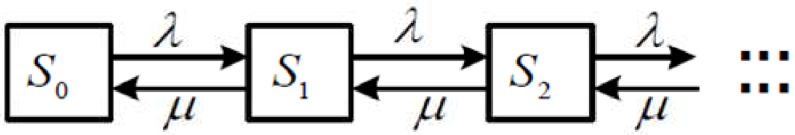
$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

Тогда

$$0 = -(\lambda + \mu)\pi_n + \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} \Rightarrow$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$$

Получили уравнение равновесия: левая часть описывает уходы из состояния S_n, а правая - приходы в состояние S_n.



Из S_0 можно попасть только в S_1, поэтому $\lambda\pi_0 = \mu\pi_1$

Тогда

$$(\lambda + \mu)\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = \mu\pi_1 + \mu\pi_2 \Rightarrow \lambda\pi_1 = \mu\pi_2$$

В результате получаем

$$\pi_n = \frac{\lambda}{\mu}\pi_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_{n-2} = \ldots = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$$

Сумма всех π_i должна равняться 1, поэтому

Сумма всех π_i должна равняться 1, поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

`

Сумма всех π_i должна равняться 1, поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

Пусть $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$. Тогда сумма равна сумме бесконечной геометрической

Сумма всех π_i должна равняться 1, поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

Пусть $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$. Тогда сумма равна сумме бесконечной геометрической прогрессии:

$$\pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \frac{\pi_0}{1-\rho} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \rho = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \Rightarrow$$

Сумма всех π_i должна равняться 1, поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

Пусть $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$. Тогда сумма равна сумме бесконечной геометрической прогрессии:

$$\pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \frac{\pi_0}{1-\rho} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \rho = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \Rightarrow$$

$$\pi_n = \rho^n \pi_0 = \rho^n (1-\rho) = \frac{\lambda^n (\mu - \lambda)}{\mu^n}$$

Сумма всех π_i должна равняться 1, поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1$$

Пусть $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$. Тогда сумма равна сумме бесконечной геометрической прогрессии:

$$\pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \frac{\pi_0}{1-\rho} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \rho = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \Rightarrow$$

$$\pi_n = \rho^n \pi_0 = \rho^n (1-\rho) = \frac{\lambda^n (\mu - \lambda)}{\mu^n}$$

Распределение π_n называется геометрическим.

Одноканальная СМО ограниченной длиной очереди (M|M|1|m)

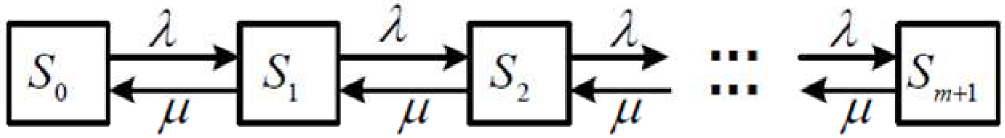
Пусть m - максимальная длина очереди.

Одноканальная СМО ограниченной длиной очереди (M|M|1|m)

Пусть m - максимальная длина очереди.

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, …

S_{m+1} - канал занят и в очереди m заявок.

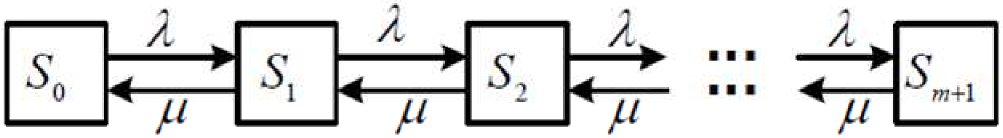


Одноканальная СМО ограниченной длиной очереди (M|M|1|m)

Пусть m - максимальная длина очереди.

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, …

S_{m+1} - канал занят и в очереди m заявок.



Можно показать, что предельные вероятности равны:

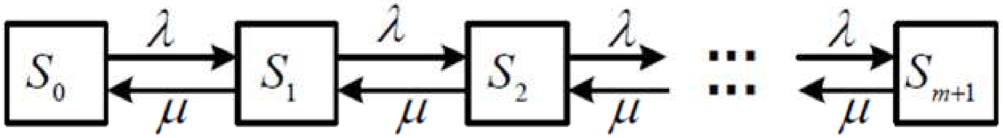
$$\pi_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{m+1}\right)^{-1}, \quad \pi_k = \pi_0 \rho^k, \quad k = 1, \ldots, m+1$$

Одноканальная СМО ограниченной длиной очереди (M|M|1|m)

Пусть m - максимальная длина очереди.

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, …

S_{m+1} - канал занят и в очереди m заявок.



Можно показать, что предельные вероятности равны:

$$\pi_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{m+1}\right)^{-1}, \quad \pi_k = \pi_0 \rho^k, \quad k = 1, \ldots, m+1$$

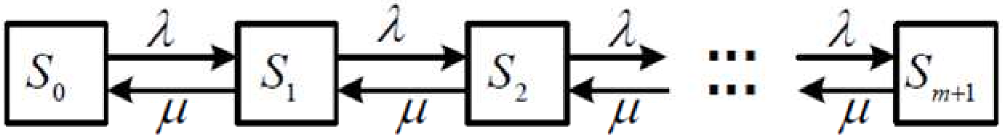
Если $\lambda = \mu$, то $\pi_k = 1/(m+2), \quad k = 0, \ldots, m+1.$

Одноканальная СМО ограниченной длиной очереди (M|M|1|m)

Пусть m - максимальная длина очереди.

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, …

S_{m+1} - канал занят и в очереди m заявок.



Можно показать, что предельные вероятности равны:

$$\pi_0 = \left(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m+1}\right)^{-1}, \quad \pi_k = \pi_0\rho^k, \quad k=1,\ldots,m+1$$

Если $\lambda = \mu$, то $\pi_k = 1/(m+2), \quad k = 0,\ldots,m+1.$

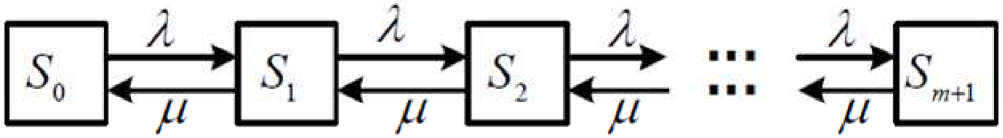
Если $\lambda \neq \mu$, то по формуле геометрической прогрессии $\pi_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$

Одноканальная СМО ограниченной длиной очереди (M|M|1|m)

Пусть m - максимальная длина очереди.

Состояния: S_0 - канал свободен; S_1 - канал занят и нет очереди, …

S_{m+1} - канал занят и в очереди m заявок.



Можно показать, что предельные вероятности равны:

$$\pi_0 = \left(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m+1}\right)^{-1}, \quad \pi_k = \pi_0 \rho^k, \quad k = 1,\ldots,m+1$$

Если $\lambda = \mu$, то $\pi_k = 1/(m+2), \quad k = 0,\ldots,m+1.$

Если $\lambda \neq \mu$, то по формуле геометрической прогрессии $\pi_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}.$

Вероятность отказа $P_{отк} = \pi_{m+1}.$ $\quad Q, A$ - аналогично предыдущему.

Пусть $k \in \{0,1,\ldots,m\}$ - число заявок в очереди. Математическое ожидание

длины очереди $L_{оч} = E(k) = 0 \cdot (\pi_0 + \pi_1) + 1 \cdot \pi_2 + \ldots + m \cdot \pi_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} j \rho^{j-1} \pi_0.$

Можно показать, что

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Можно показать, что

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $T_{оч} = L_{оч} / \lambda$.

Можно показать, что

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $T_{оч} = L_{оч} / \lambda$.

Пример. На АЗС имеется одна колонка, а площадка вмещает не более трех машин. В среднем машины прибывают каждые 2 минуты. Заправка одной машины продолжается в среднем 2.5 минуты. Определить основные характеристики системы.

Можно показать, что

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $T_{оч} = L_{оч} / \lambda$.

Пример. На АЗС имеется одна колонка, а площадка вмещает не более трех машин. В среднем машины прибывают каждые 2 минуты. Заправка одной машины продолжается в среднем 2.5 минуты. Определить основные характеристики системы.

Решение. Интенсивность входящего потока $\lambda = 1/2 = 0.5$ машины в минуту. Интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1/2.5 = 0.4$ машины в минуту. Интенсивность нагрузки $\rho = 0.5/0.4 = 1.25$.

Можно показать, что

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho \ne 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $T_{оч} = L_{оч} / \lambda$.

Пример. На АЗС имеется одна колонка, а площадка вмещает не более трех машин. В среднем машины прибывают каждые 2 минуты. Заправка одной машины продолжается в среднем 2.5 минуты. Определить основные характеристики системы.

Решение. Интенсивность входящего потока $\lambda = 1/2 = 0.5$ машины в минуту. Интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1/2.5 = 0.4$ машины в минуту. Интенсивность нагрузки $\rho = 0.5/0.4 = 1.25$. Вероятность отказа $P_{отк} = \dfrac{(1-\rho)}{1-\rho^5}\rho^4 \approx 0.297$. Относительная пропускная способность $Q = 0.703$.

Можно показать, что

$$L_{оч}=\begin{cases}\dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho\neq 1\\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho=1.\end{cases}$$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $T_{оч}=L_{оч}/\lambda$.

Пример. На АЗС имеется одна колонка, а площадка вмещает не более трех машин. В среднем машины прибывают каждые 2 минуты. Заправка одной машины продолжается в среднем 2.5 минуты. Определить основные характеристики системы.

Решение. Интенсивность входящего потока $\lambda=1/2=0.5$ машины в минуту. Интенсивность потока обслуживаний $\mu=1/2.5=0.4$ машины в минуту. Интенсивность нагрузки $\rho=0.5/0.4=1.25$. Вероятность отказа $P_{отк}=\dfrac{(1-\rho)}{1-\rho^5}\rho^4\approx 0.297$. Относительная пропускная способность $Q=0.703$. Абсолютная пропускная способность $A=0.5\cdot Q=0.352$.

Можно показать, что

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $T_{оч} = L_{оч} / \lambda$.

Пример. На АЗС имеется одна колонка, а площадка вмещает не более трех машин. В среднем машины прибывают каждые 2 минуты. Заправка одной машины продолжается в среднем 2.5 минуты. Определить основные характеристики системы.

Решение. Интенсивность входящего потока $\lambda = 1/2 = 0.5$ машины в минуту. Интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1/2.5 = 0.4$ машины в минуту. Интенсивность нагрузки $\rho = 0.5/0.4 = 1.25$. Вероятность отказа $P_{отк} = \dfrac{(1-\rho)}{1-\rho^5}\rho^4 \approx 0.297$. Относительная пропускная способность $Q = 0.703$. Абсолютная пропускная способность $A = 0.5 \cdot Q = 0.352$.

Среднее число машин, ожидающих в очереди на заправку:

$L_{оч} = 1.559$.

Можно показать, что

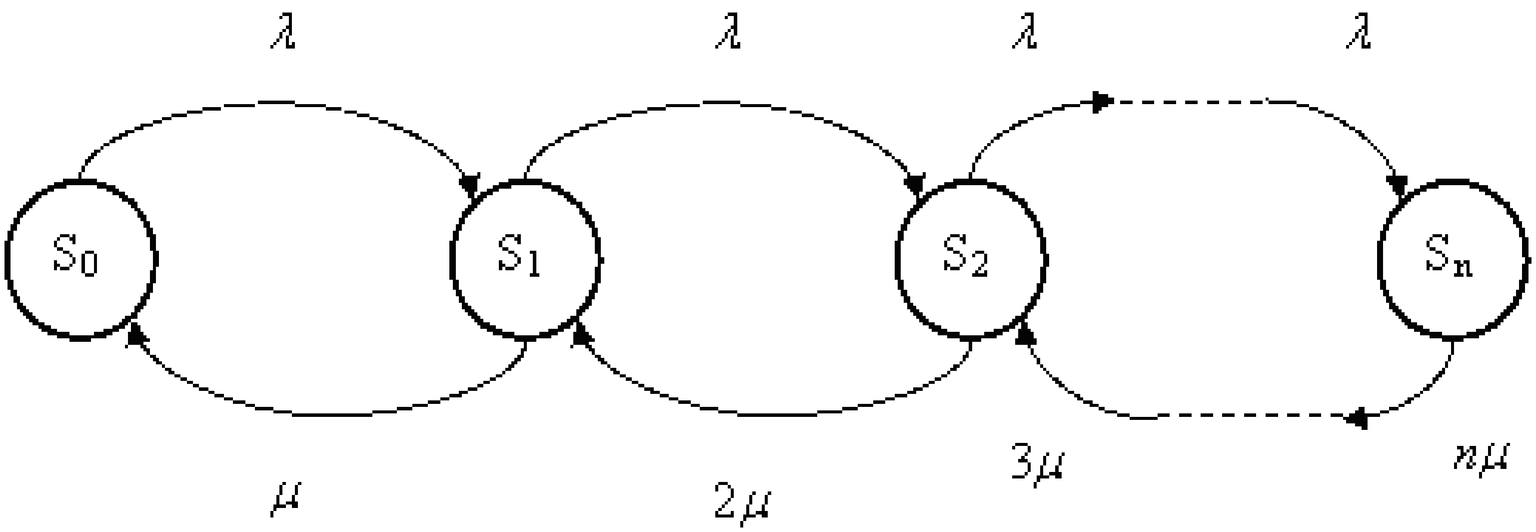
$$L_{оч}=\begin{cases}\dfrac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}, & \rho\neq 1\\[2ex] \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & \rho=1.\end{cases}$$

Среднее время пребывания в очереди (формула Литтла): $T_{оч}=L_{оч}/\lambda$.

Пример. На АЗС имеется одна колонка, а площадка вмещает не более трех машин. В среднем машины прибывают каждые 2 минуты. Заправка одной машины продолжается в среднем 2.5 минуты. Определить основные характеристики системы.

Решение. Интенсивность входящего потока $\lambda=1/2=0.5$ машины в минуту. Интенсивность потока обслуживаний $\mu=1/2.5=0.4$ машины в минуту. Интенсивность нагрузки $\rho=0.5/0.4=1.25$. Вероятность отказа $P_{отк}=\dfrac{(1-\rho)}{1-\rho^5}\rho^4\approx 0.297$. Относительная пропускная способность $Q=0.703$. Абсолютная пропускная способность $A=0.5\cdot Q=0.352$. Среднее число машин, ожидающих в очереди на заправку: $L_{оч}=1.559$. Среднее время ожидания $T_{оч}=3.118$ минут.

n – канальная СМО с отказами (задача Эрланга)



Граф состояний для *n* – канальной СМО с отказами

Обозначим $\rho = \lambda / \mu$ - интенсивность нагрузки канала.

Обозначим $\rho = \lambda / \mu$ - интенсивность нагрузки канала.
Аналогично предыдущей задаче, можно получить предельные вероятности (формулы Эрланга):

$$\pi_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \quad \pi_1 = \pi_0 \rho, \ \pi_2 = \pi_0 \frac{\rho^2}{2!}, ..., \pi_n = \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}$$

Обозначим $\rho = \lambda / \mu$ - интенсивность нагрузки канала.

Аналогично предыдущей задаче, можно получить предельные вероятности (формулы Эрланга):

$$\pi_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \quad \pi_1 = \pi_0 \rho,\ \pi_2 = \pi_0 \frac{\rho^2}{2!}, \ldots, \pi_n = \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}$$

Вероятность отказа $P_{отк} = \pi_n$.

Обозначим $\rho = \lambda / \mu$ - интенсивность нагрузки канала.

Аналогично предыдущей задаче, можно получить предельные вероятности (формулы Эрланга):

$$\pi_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \quad \pi_1 = \pi_0 \rho, \ \pi_2 = \pi_0 \frac{\rho^2}{2!}, \ldots, \pi_n = \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}$$

Вероятность отказа $P_{отк} = \pi_n$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = 1 - \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}$.

Обозначим $\rho = \lambda / \mu$ - интенсивность нагрузки канала.

Аналогично предыдущей задаче, можно получить предельные вероятности (формулы Эрланга):

$$\pi_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \quad \pi_1 = \pi_0 \rho,\ \pi_2 = \pi_0 \frac{\rho^2}{2!}, \ldots, \pi_n = \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}$$

Вероятность отказа $P_{отк} = \pi_n$.

Относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = 1 - \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}$.

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \pi_0 \frac{\rho^n}{n!}\right)$.

Пример. В систему поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ = 90 вызовов в час. Средняя продолжительность разговора - 2 мин. Определить требуемое число телефонных номеров, если нужно обслужить из каждых 100 заявок в среднем не менее 90 заявок.

Пример. В систему поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ = 90 вызовов в час. Средняя продолжительность разговора - 2 мин. Определить требуемое число телефонных номеров, если нужно обслужить из каждых 100 заявок в среднем не менее 90 заявок.

Решение. Интенсивность нагрузки канала $\rho = 3$, т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора поступает в среднем 3 заявки. Рассмотрим $n = 2, 3, 4, \ldots$

Пример. В систему поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ = 90 вызовов в час. Средняя продолжительность разговора - 2 мин. Определить требуемое число телефонных номеров, если нужно обслужить из каждых 100 заявок в среднем не менее 90 заявок.

Решение. Интенсивность нагрузки канала $\rho = 3$, т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора поступает в среднем 3 заявки. Рассмотрим $n = 2, 3, 4, \ldots$

Показатели эффективности	Обозначение	Число каналов (телефонных номеров)					
		1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность	Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,90	0,95
Абсолютная пропускная способность	A	22,5	42,3	58,8	71,5	80,1	85,3

Пример. В систему поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ = 90 вызовов в час. Средняя продолжительность разговора - 2 мин. Определить требуемое число телефонных номеров, если нужно обслужить из каждых 100 заявок в среднем не менее 90 заявок.

Решение. Интенсивность нагрузки канала $\rho = 3$, т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора поступает в среднем 3 заявки. Рассмотрим $n = 2, 3, 4, \ldots$

Показатели эффективности	Обозначение	Число каналов (телефонных номеров)					
		1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность	Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,90	0,95
Абсолютная пропускная способность	A	22,5	42,3	58,8	71,5	80,1	85,3

То есть необходимо иметь 5 каналов.