Лекция C8
Относительная вычислимость, II

Вадим Пузаренко

3 июня 2020 г.

Основная информация

Определение.

1. Пусть $A, B \subseteq \omega$; говорят, что A и B **T-эквивалентны** (и используют запись $A \equiv_T B$), если $A \leqslant_T B$ и $B \leqslant_T A$.
2. **Тьюринговой степенью** или **степенью неразрешимости** множества A называется $\deg(A) = \{B : B \equiv_T A\}$.
3. Степень $\deg(A)$ называется **вычислимо перечислимой (относительно $\deg(B)$)**, если $\deg(A)$ содержит (B-)вычислимо перечислимое множество.

Основная информация

Определение.

1. Пусть $A, B \subseteq \omega$; говорят, что A и B **T-эквивалентны** (и используют запись $A \equiv_T B$), если $A \leqslant_T B$ и $B \leqslant_T A$.
2. **Тьюринговой степенью** или **степенью неразрешимости** множества A называется $\deg(A) = \{B : B \equiv_T A\}$.
3. Степень $\deg(A)$ называется **вычислимо перечислимой (относительно $\deg(B)$)**, если $\deg(A)$ содержит (B-)вычислимо перечислимое множество.

Отметим, что отношение $\leqslant_T$ является предпорядком, поэтому оно индуцирует на тьюринговых степенях частичный порядок $(\deg(A) \leqslant \deg(B) \stackrel{def}{\iff} A \leqslant_T B)$. Будем писать $\deg(A) < \deg(B)$, если $A <_T B$, т.е. $A \leqslant_T B$, но $A \not\equiv_T B$.
Кроме того, $\deg(A \oplus B) = \deg(A) \sqcup \deg(B)$ есть точная верхняя грань степеней $\deg(A)$ и $\deg(B)$.

Степени неразрешимости будем обозначать символами **a**, **b**, **c**, ... (возможно, с индексами).

Оператор скачка

Определение.

1. Множество $K^A = \{x : x \in \pi^A(x)\}$ называется **скачком** множества A и обозначается A'.
2. Определим $A^{(n)}$ индукцией по $n \in \omega$: $A^{(0)} = A$, $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$.

Оператор скачка

Определение.

1. Множество $K^A = \{x : x \in \pi^A(x)\}$ называется **скачком** множества A и обозначается A'.
2. Определим $A^{(n)}$ индукцией по $n \in \omega$: $A^{(0)} = A$, $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$.

По теореме C36' и теореме C20 Майхилла об изоморфизме, $K^A \approx K_0^A \approx K_1^A$, где $K_0^A = \{c(x, y) \mid y \in \pi^A(x)\}$, $K_1^A = \{x \mid \pi^A(x) \neq \varnothing\}$.

Теорема о скачке

Теорема C44

1. A' вычислимо перечислимо относительно A, т.е. $A' \leqslant_{\mathrm{CE}} A$;
2. $A' \nleqslant_T A$;
3. $B \leqslant_{\mathrm{CE}} A$, если и только если $B \leqslant_1 A'$ (в частности, $A \leqslant_T A'$);
4. если $A \leqslant_{\mathrm{CE}} B$ и $B \leqslant_T C$, то $A \leqslant_{\mathrm{CE}} C$;
5. $B \leqslant_T A \Leftrightarrow B' \leqslant_1 A'$;
6. если $B \equiv_T A$, то $B' \approx A'$ (а следовательно, $B' \equiv_T A'$);
7. $B \leqslant_{\mathrm{CE}} A$, если и только если $B \leqslant_{\mathrm{CE}} \overline{A}$.

Теорема о скачке

Теорема С44

1. A' вычислимо перечислимо относительно A, т.е. $A' \leqslant_{\mathrm{CE}} A$;
2. $A' \not\leqslant_T A$;
3. $B \leqslant_{\mathrm{CE}} A$, если и только если $B \leqslant_1 A'$ (в частности, $A \leqslant_T A'$);
4. если $A \leqslant_{\mathrm{CE}} B$ и $B \leqslant_T C$, то $A \leqslant_{\mathrm{CE}} C$;
5. $B \leqslant_T A \Leftrightarrow B' \leqslant_1 A'$;
6. если $B \equiv_T A$, то $B' \approx A'$ (а следовательно, $B' \equiv_T A'$);
7. $B \leqslant_{\mathrm{CE}} A$, если и только если $B \leqslant_{\mathrm{CE}} \overline{A}$.

Доказательство.

1), 2) следуют из того, что $\{x : x \in \pi^A(x)\}$ является A-вп, но не A-в множеством. 3) следует из того, что K^A является A-полным.

Теорема о скачке

Доказательство (продолжение)

4) Если $A \neq \varnothing$, то $A = \rho f$ для некоторой B-вф f; следовательно, она C-вф, поскольку $B \leqslant_T C$.

5) ($\Rightarrow$) Если $B \leqslant_T A$, то $B' \leqslant_{\mathrm{CE}} A$ по (1, 4), поскольку $B' \leqslant_{\mathrm{CE}} B$. Из (3) следует, что $B' \leqslant_1 A'$.

5) ($\Leftarrow$) Если $B' \leqslant_1 A'$, то B и $\overline{B}$ являются A-вп в силу (3), поскольку $B, \overline{B} \leqslant_1 B'$. Следовательно, $B \leqslant_T A$ по теореме C8' Поста.

6) непосредственно следует из (5).

7) непосредственно следует из (4). $\square$

Теорема о скачке

Доказательство (продолжение)

4) Если $A \neq \varnothing$, то $A = \rho f$ для некоторой B-вф f; следовательно, она C-вф, поскольку $B \leqslant_T C$.

5) ($\Rightarrow$) Если $B \leqslant_T A$, то $B' \leqslant_{\mathrm{CE}} A$ по (1, 4), поскольку $B' \leqslant_{\mathrm{CE}} B$. Из (3) следует, что $B' \leqslant_1 A'$.

5) ($\Leftarrow$) Если $B' \leqslant_1 A'$, то B и $\overline{B}$ являются A-вп в силу (3), поскольку $B, \overline{B} \leqslant_1 B'$. Следовательно, $B \leqslant_T A$ по теореме C8' Поста.

6) непосредственно следует из (5).

7) непосредственно следует из (4). $\square$

Пусть $\mathbf{a}' = \deg(A')$, если $A \in \mathbf{a}$. Отметим, что $\mathbf{a}' > \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ вп относительно $\mathbf{a}$. По теореме C44(6) скачок корректно определен на степенях.

Пусть $\mathbf{0}^{(n)} = \deg(\varnothing^{(n)})$, $n \in \omega$. Тогда $\mathbf{0} < \mathbf{0}' < \mathbf{0}'' < \ldots < \mathbf{0}^{(n)} < \ldots$

$\mathbf{0} = \deg(\varnothing) = \{B : B \text{ в}\}$;

$\mathbf{0}' = \deg(\varnothing')$, где $\varnothing' \leftrightharpoons K^{\varnothing} \approx K \approx K_0 \approx K_1$;

$\mathbf{0}'' = \deg(\varnothing'') = \deg(\mathrm{Fin}) = \deg(\mathrm{Tot})$.

Модуль

Определение.

1. Последовательность всюду определенных функций $\{f_s(x)\}_{s\in\omega}$ **сходится (поточечно)** к $f(x)$ (записывается как $f(x) = \lim\limits_s f_s(x)$), если $\forall x \exists s_x \forall t \geqslant s_x [f_t(x) = f(x)]$.
2. **Модулем (сходимости)** для $\{f_s\}_{s\in\omega}$ называется такая функция $m(x)$, что $f_s(x) = f(x)$ для всех $x \in \omega$ и $s \geqslant m(x)$ (в частности, $f_{m(x)}(x) = f(x)$ для всех x).
3. Функция $m_0(x) = \mu s(\forall t \geqslant s)[f_t(x) = f(x)]$ называется **наименьшим модулем**.

Пусть $\{f_s(x)\}_{s\in\omega}$ — вычислимая последовательность, т.е. $g(s,x) \leftrightharpoons f_s(x)$ вычислима. Заметим, что наименьший модуль вычислим относительно любого модуля. Если $f = \lim\limits_s f_s$ и m — произвольный модуль, то $f \leqslant_T m$, поскольку $f_{m(x)}(x) = f(x)$. Однако $m \leqslant_T f$ не выполняется в общем случае даже для наименьшего модуля.

Лемма о модуле

Теорема C45

Если A вычислимо перечислимо и $f \leqslant_T A$, то найдутся вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ с условием $\lim\limits_s f_s$ и A-вычислимый модуль сходимости для $\{f_s\}_{s\in\omega}$.

Лемма о модуле

Теорема C45

Если A вычислимо перечислимо и $f \leqslant_T A$, то найдутся вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ с условием $\lim\limits_s f_s$ и A-вычислимый модуль сходимости для $\{f_s\}_{s\in\omega}$.

Доказательство.

Пусть A в.п. и $f = \{e\}^A$. Пусть также $\{A_s\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация для A. Определим следующие функции:

$$f_s(x) = \begin{cases} \{e\}_s^{A_s}(x), & \text{если } \{e\}_s^{A_s}(x)\downarrow; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$m(x) = \mu s(\exists z \leqslant s)[\{e\}_s^{A_s\restriction z}(x)\downarrow \wedge A_s \restriction z = A \restriction z]$.

Нетрудно проверить, что $\{f_s\}_{s\in\omega}$ — вычислимая последовательность. Кроме того, m является A-вф, поскольку отношение $\{e\}_s^{A_s\restriction z}(x)\downarrow$ вычислимо, а предикат $A_s \restriction z = A \restriction z$ вычислим относительно A. Наконец, m является модулем, поскольку по принципу использования, для всех $s \geqslant m(x)$ имеем $\{e\}_s^{A_s\restriction z}(x) = \{e\}_s^{A\restriction z}(x) = \{e\}^A(x) = f(x)$. $\square$

Лемма о пределе

Теорема C46

Какова бы ни была функция f, справедливо $f \leqslant_T A'$, если и только если существует такая A-вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ (т.е. функция $\hat{f}(x,s) \leftrightharpoons f_s(x)$ является A-вычислимой), что $f = \lim_s f_s(x)$.

Лемма о пределе

Теорема C46

Какова бы ни была функция f, справедливо $f \leqslant_T A'$, если и только если существует такая A-вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ (т.е. функция $\hat{f}(x,s) \leftrightharpoons f_s(x)$ является A-вычислимой), что $f = \lim\limits_s f_s(x)$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Пусть $f \leqslant_T A'$. Так как A' вп относительно A, существует такая A-вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$, что $f(x) = \lim\limits_s f_s(x)$ для всех $x \in \omega$, по лемме о модуле, релятивизованной к A.

Лемма о пределе

Теорема С46

Какова бы ни была функция f, справедливо $f \leqslant_T A'$, если и только если существует такая A-вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ (т.е. функция $\hat{f}(x,s) \leftrightharpoons f_s(x)$ является A-вычислимой), что $f = \lim\limits_s f_s(x)$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Пусть $f \leqslant_T A'$. Так как A' вп относительно A, существует такая A-вычислимая последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$, что $f(x) = \lim\limits_s f_s(x)$ для всех $x \in \omega$, по лемме о модуле, релятивизованной к A.

$(\Leftarrow)$ Пусть $f(x) = \lim\limits_s f_s(x)$ для подходящей A-вычислимой последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$. Положим $A_x \leftrightharpoons \{s : \exists t[s \leqslant t \wedge f_t(x) \neq f_{t+1}(x)]\}$. Множества A_x конечны, а $B \leftrightharpoons \{\langle s,x\rangle \mid s \in A_x\}$ принадлежит классу Σ_1^A, поэтому B является A-вп и $B \leqslant_T A'$. Тем самым, по данному x можно вычислить с оракулом B (а следовательно, и с оракулом A') наименьший модуль $m(x) = \mu s[s \notin A_x]$. Таким образом, $f \leqslant_T m \oplus A \leqslant_T B \oplus A \leqslant_T A'$. $\square$

Предел

В частности, *$f \leqslant_T \varnothing'$, если и только если $f = \lim_s f_s$ для некоторой вычислимой последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$*. Этот факт характеризует степени ниже $\mathbf{0}'$. Так как не все степени ниже $\mathbf{0}'$ содержат вп множества, утверждение ниже выделяет вп степени среди степеней $\leqslant \mathbf{0}'$.

Предел

В частности, $f \leqslant_T \varnothing'$, *если и только если* $f = \lim_s f_s$ *для некоторой вычислимой последовательности* $\{f_s\}_{s\in\omega}$. Этот факт характеризует степени ниже $\mathbf{0}'$. Так как не все степени ниже $\mathbf{0}'$ содержат вп множества, утверждение ниже выделяет вп степени среди степеней $\leqslant \mathbf{0}'$.

Теорема C47

Функция f имеет вычислимо перечислимую степень, если и только если $f = \lim_s f_s$ с модулем сходимости $m \leqslant_T f$, где $\{f_s\}_{s\in\omega}$ — вычислимая последовательность.

Предел

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $f \equiv_T A$ и A вп. Применяем лемму о модуле для получения вычислимой последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$ с модулем сходимости $m \leqslant_T A \equiv_T f$.

Предел

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Пусть $f \equiv_T A$ и A вп. Применяем лемму о модуле для получения вычислимой последовательности $\{f_s\}_{s\in\omega}$ с модулем сходимости $m \leqslant_T A \equiv_T f$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $f = \lim\limits_s f_s$ с модулем сходимости $m \leqslant_T f$, где $\{f_s\}_{s\in\omega}$ — вычислимая последовательность. Определим множество B как в доказательстве леммы о пределе и напомним, что $f \leqslant_T B$. С другой стороны, $B \leqslant_T m \leqslant_T f$. Таким образом, $f \equiv_T B$ и f имеет вп степень. $\square$

Основные понятия

Определение.

Пусть $B \subseteq \omega^k$, $k \geqslant 1$. Говорят, что

1. B **принадлежит Σ_0 (Π_0)**, если B вычислимо;

Основные понятия

Определение.

Пусть $B \subseteq \omega^k$, $k \geqslant 1$. Говорят, что

1. B **принадлежит Σ_0 (Π_0)**, если B вычислимо;
2. B **принадлежит Σ_n** (обозначаем $B \in \Sigma_n$ и называем B также **Σ_n-множеством**), если существует такое вычислимое отношение $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2 \ldots, y_n)$, что
   $B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$,
   где отсутствуют одинаковые рядом стоящие кванторы.

Основные понятия

Определение.

Пусть $B \subseteq \omega^k$, $k \geqslant 1$. Говорят, что

1. B **принадлежит Σ_0 (Π_0)**, если B вычислимо;
2. B **принадлежит Σ_n** (обозначаем $B \in \Sigma_n$ и называем B также **Σ_n-множеством**), если существует такое вычислимое отношение $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2 \ldots, y_n)$, что $B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где отсутствуют одинаковые рядом стоящие кванторы.
3. B **принадлежит Π_n** (обозначаем $B \in \Pi_n$ и называем B также **Π_n-множеством**), если существует такое вычислимое отношение $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2 \ldots, y_n)$, что $B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где отсутствуют одинаковые рядом стоящие кванторы.

Основные понятия

Определение.

Пусть $B \subseteq \omega^k$, $k \geqslant 1$. Говорят, что

1. B **принадлежит Σ_0 (Π_0)**, если B вычислимо;
2. B **принадлежит Σ_n** (обозначаем $B \in \Sigma_n$ и называем B также **Σ_n-множеством**), если существует такое вычислимое отношение $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2 \ldots, y_n)$, что
$$B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
где отсутствуют одинаковые рядом стоящие кванторы.
3. B **принадлежит Π_n** (обозначаем $B \in \Pi_n$ и называем B также **Π_n-множеством**), если существует такое вычислимое отношение $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2 \ldots, y_n)$, что
$$B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
где отсутствуют одинаковые рядом стоящие кванторы.
4. B **принадлежит Δ_n** (обозначаем $B \in \Delta_n$ и называем B также **Δ_n-множеством**), если $B \in \Sigma_n \cap \Pi_n$;

Основные понятия

Определение.

Пусть $B \subseteq \omega^k$, $k \geqslant 1$. Говорят, что

1. B **принадлежит Σ_0 (Π_0)**, если B вычислимо;
2. B **принадлежит Σ_n** (обозначаем $B \in \Sigma_n$ и называем B также **Σ_n-множеством**), если существует такое вычислимое отношение $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2 \ldots, y_n)$, что $B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где отсутствуют одинаковые рядом стоящие кванторы.
3. B **принадлежит Π_n** (обозначаем $B \in \Pi_n$ и называем B также **Π_n-множеством**), если существует такое вычислимое отношение $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2 \ldots, y_n)$, что $B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где отсутствуют одинаковые рядом стоящие кванторы.
4. B **принадлежит Δ_n** (обозначаем $B \in \Delta_n$ и называем B также **Δ_n-множеством**), если $B \in \Sigma_n \cap \Pi_n$;
5. B **арифметическое**, если $B \in \bigcup\limits_n (\Sigma_n \cup \Pi_n)$.

Иерархия

Теорема C48

1. $A \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n$;

Иерархия

Теорема C48

1. $A \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n$;
2. $A \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow \forall m > n[A \in \Delta_m]$;

Иерархия

Теорема C48

1. $A \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n$;
2. $A \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow \forall m > n[A \in \Delta_m]$;
3. $A, B \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \Sigma_n(\Pi_n)$;

Иерархия

Теорема C48

1. $A \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n$;
2. $A \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow \forall m > n[A \in \Delta_m]$;
3. $A, B \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \Sigma_n(\Pi_n)$;
4. $R(\overrightarrow{x}, y) \in \Sigma_n \wedge n > 0 \wedge (A = \{\overrightarrow{x} \mid \exists y R(\overrightarrow{x}, y)\}) \Rightarrow A \in \Sigma_n$;

Иерархия

Теорема C48

1. $A \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n$;
2. $A \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow \forall m > n[A \in \Delta_m]$;
3. $A, B \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \Sigma_n(\Pi_n)$;
4. $R(\overrightarrow{x}, y) \in \Sigma_n \wedge n > 0 \wedge (A = \{\overrightarrow{x} \mid \exists y R(\overrightarrow{x}, y)\}) \Rightarrow A \in \Sigma_n$;
5. $[B \leqslant_m A \wedge A \in \Sigma_n] \Rightarrow B \in \Sigma_n$;

Иерархия

Теорема C48

1. $A \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n$;
2. $A \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow \forall m > n[A \in \Delta_m]$;
3. $A, B \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \Sigma_n(\Pi_n)$;
4. $R(\overrightarrow{x}, y) \in \Sigma_n \wedge n > 0 \wedge (A = \{\overrightarrow{x} \mid \exists y R(\overrightarrow{x}, y)\}) \Rightarrow A \in \Sigma_n$;
5. $[B \leqslant_m A \wedge A \in \Sigma_n] \Rightarrow B \in \Sigma_n$;
6. если $R \in \Sigma_n(\Pi_n)$, а предикаты A, B определены следующим образом: $A(\overrightarrow{x}, y) \Leftrightarrow \exists z \leqslant y R(\overrightarrow{x}, y, z)$,
$B(\overrightarrow{x}, y) \Leftrightarrow \forall z \leqslant y R(\overrightarrow{x}, y, z)$,
то $A, B \in \Sigma_n(\Pi_n)$.

Иерархия

Теорема C48

1. $A \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{A} \in \Pi_n$;
2. $A \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow \forall m > n[A \in \Delta_m]$;
3. $A, B \in \Sigma_n(\Pi_n) \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \Sigma_n(\Pi_n)$;
4. $R(\overrightarrow{x}, y) \in \Sigma_n \wedge n > 0 \wedge (A = \{\overrightarrow{x} \mid \exists y R(\overrightarrow{x}, y)\}) \Rightarrow A \in \Sigma_n$;
5. $[B \leqslant_m A \wedge A \in \Sigma_n] \Rightarrow B \in \Sigma_n$;
6. если $R \in \Sigma_n(\Pi_n)$, а предикаты A, B определены следующим образом: $A(\overrightarrow{x}, y) \Leftrightarrow \exists z \leqslant y R(\overrightarrow{x}, y, z)$,
$B(\overrightarrow{x}, y) \Leftrightarrow \forall z \leqslant y R(\overrightarrow{x}, y, z)$,
то $A, B \in \Sigma_n(\Pi_n)$.

Доказательство.

1) Если
$\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то
$\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall y_1 \exists y_2 \ldots \overline{Q} y_n \neg R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Иерархия

Доказательство (продолжение)

2) Достаточно доказать лишь, что $A \in \Sigma_n \Rightarrow A \in \Delta_{n+1}$, а далее применить индукцию и пункт 1. Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, тогда $A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \forall u \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n \overline{Q} u R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Иерархия

Доказательство (продолжение)

2) Достаточно доказать лишь, что $A \in \Sigma_n \Rightarrow A \in \Delta_{n+1}$, а далее применить индукцию и пункт 1. Пусть
$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, тогда
$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \forall u \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow$
$\exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n \overline{Q} u R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

3) Пусть
$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и
$B(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, z_1, z_2, \ldots, z_n)$; тогда
$\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle \in A \cup B \Leftrightarrow$
$\exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n) \vee$
$\exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, z_1, z_2, \ldots, z_n) \Leftrightarrow$
$\exists y_1 \exists z_1 \forall y_2 \forall z_2 \exists y_3 \exists z_3 \ldots Q y_n Q z_n [R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_n) \vee$
$S(x_1, x_2, \ldots, x_k, z_1, z_2, \ldots, z_n)] \Leftrightarrow$
$\exists u_1 \forall u_2 \exists u_3 \ldots Q u_n [R(x_1, x_2, \ldots, x_k, l(u_1), l(u_2), \ldots, l(u_n)) \vee$
$S(x_1, x_2, \ldots, x_k, r(u_1), r(u_2), \ldots, r(u_n))]$.
Аналогично рассматривается и $A \cap B$.

Доказательство (продолжение)

4) Так как $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \in \Sigma_n$, имеем
$R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \Leftrightarrow \exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Далее,
$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \Leftrightarrow$
$\exists y \exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z_1, z_2, \ldots, z_n) \Leftrightarrow$
$\exists u \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, l(u), r(u), z_2, \ldots, z_n)$.

Иерархия

Доказательство (продолжение)

4) Так как $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \in \Sigma_n$, имеем
$R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \Leftrightarrow \exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Qz_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Далее,
$A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \Leftrightarrow$
$\exists y \exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Qz_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z_1, z_2, \ldots, z_n) \Leftrightarrow$
$\exists u \forall z_2 \exists z_3 \ldots Qz_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, l(u), r(u), z_2, \ldots, z_n)$.
5) Пусть $x \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Qy_n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $B \leqslant_m A$ посредством вф f. Тогда $x \in B \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Qy_n R(f(x), y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Иерархия

Доказательство (продолжение)

4) Так как $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \in \Sigma_n$, имеем $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \Leftrightarrow \exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Далее, $A(x_1, x_2, \ldots, x_k) \Leftrightarrow \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \Leftrightarrow$ $\exists y \exists z_1 \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z_1, z_2, \ldots, z_n) \Leftrightarrow$ $\exists u \forall z_2 \exists z_3 \ldots Q z_n S(x_1, x_2, \ldots, x_k, l(u), r(u), z_2, \ldots, z_n)$.

5) Пусть $x \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $B \leqslant_m A$ посредством вф f. Тогда $x \in B \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_n R(f(x), y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

6) Полной индукцией по n. Если $n = 0$, то A и B вычислимы, по предложению C?. Пусть теперь $n > 0$; предположим, что $R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) \in \Sigma_n$, и данное утверждение справедливо для всех $m < n$. Тогда $B \in \Sigma_n$, согласно 4. Далее, существует такое $S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z, u) \in \Pi_{n-1}$, что $A(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) \Leftrightarrow \forall z \leqslant y R(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z) \Leftrightarrow \forall z \leqslant y \exists u S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z, u) \Leftrightarrow \exists \sigma \forall z \leqslant y S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z, \sigma(z))$, где σ пробегает $\omega^{<\omega}$ (которое может быть закодировано множеством всех натуральных чисел). По предположению индукции, $\forall z \leqslant y S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z, \sigma(z)) \in \Pi_{n-1}$, поэтому $A \in \Sigma_n$. Случай, когда $R \in \Pi_n$, сводится к случаю $R \in \Sigma_n$ с помощью 1. □

Сложность индексных множеств

Так как $B = \{\langle x, y\rangle : y \in \pi_x\}$ вп, существует сильная аппроксимация $\{B_s\}_{s\in\omega}$ для $c(B)$. Определим $W_{x,s} \leftrightharpoons \{y \mid c(x,y) \in B_s\}$, тогда $\{W_{x,s}\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация для π_x для каждого $x \in \omega$. Кроме того, предикат $\{\langle y, x, s\rangle \mid y \in W_{x,s}\}$ вычислим, а также существует вф f такая, что $y \in W_{x,s} \Rightarrow y \leqslant f(s)$.

Сложность индексных множеств

Так как $B = \{\langle x, y\rangle : y \in \pi_x\}$ вп, существует сильная аппроксимация $\{B_s\}_{s\in\omega}$ для $c(B)$. Определим $W_{x,s} \leftrightharpoons \{y \mid c(x,y) \in B_s\}$, тогда $\{W_{x,s}\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация для π_x для каждого $x \in \omega$. Кроме того, предикат $\{\langle y, x, s\rangle \mid y \in W_{x,s}\}$ вычислим, а также существует вф f такая, что $y \in W_{x,s} \Rightarrow y \leqslant f(s)$.

Предложение C31

$\mathrm{Fin} \in \Sigma_2$.

Сложность индексных множеств

Так как $B = \{\langle x, y\rangle : y \in \pi_x\}$ вп, существует сильная аппроксимация $\{B_s\}_{s\in\omega}$ для $c(B)$. Определим $W_{x,s} \leftrightharpoons \{y \mid c(x,y) \in B_s\}$, тогда $\{W_{x,s}\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация для π_x для каждого $x \in \omega$. Кроме того, предикат $\{\langle y, x, s\rangle \mid y \in W_{x,s}\}$ вычислим, а также существует вф f такая, что $y \in W_{x,s} \Rightarrow y \leqslant f(s)$.

Предложение C31

$\mathrm{Fin} \in \Sigma_2$.

Доказательство.

$e \in \mathrm{Fin} \Leftrightarrow [\pi_e$ конечно$] \Leftrightarrow \exists s(\forall t > s)[W_{e,s} = W_{e,t}] \Leftrightarrow \exists s\forall t[(t > s) \to (W_{e,s} = W_{e,t})] \Leftrightarrow \exists s\forall t[(t \leqslant s) \vee \forall z \leqslant f(t)(z \in W_{e,s} \leftrightarrow z \in W_{e,t})]$. $\square$

Сложность индексных множеств

Предложение С32

1. $\{\langle x, y\rangle \mid \pi_x \subseteq \pi_y\} \in \Pi_2$;
2. $\{\langle x, y\rangle \mid \pi_x = \pi_y\} \in \Pi_2$;
3. $\mathrm{Tot} = \{e \mid \pi_e = \omega\} \in \Pi_2$.

Сложность индексных множеств

Предложение C32

1. $\{\langle x, y\rangle \mid \pi_x \subseteq \pi_y\} \in \Pi_2$;
2. $\{\langle x, y\rangle \mid \pi_x = \pi_y\} \in \Pi_2$;
3. $\mathrm{Tot} = \{e \mid \pi_e = \omega\} \in \Pi_2$.

Доказательство.

1) $\pi_x \subseteq \pi_y \Leftrightarrow \forall z[(z \in \pi_x) \to (z \in \pi_y)] \Leftrightarrow \forall z[(z \notin \pi_x) \vee (z \in \pi_y)] \Leftrightarrow \forall z[\forall s(z \notin W_{x,s}) \vee \exists t(z \in W_{y,t})] \Leftrightarrow \forall z \forall s \exists t[(z \notin W_{x,s}) \vee (z \in W_{y,t})] \Leftrightarrow \forall s \exists t[(l(s) \notin W_{x,r(s)}) \vee (l(s) \in W_{y,t})]$.
2) $\pi_x = \pi_y \Leftrightarrow [(\pi_x \subseteq \pi_y) \wedge (\pi_y \subseteq \pi_x)]$; остаётся применить теорему C48(3).
3) Пусть $a \in \omega$ таково, что $\pi_a = \omega$; тогда $\pi_e = \omega \Leftrightarrow [\pi_e = \pi_a]$; остаётся применить теорему C48(5). $\square$

Теорема Поста об иерархии

Определение.

Множество A называется **Σ_n-полным** (**Π_n-полным**), если $A \in \Sigma_n(\Pi_n)$ и $B \leqslant_1 A$ для любого $B \in \Sigma_n(\Pi_n)$.

Теорема Поста об иерархии

Определение.

Множество A называется **Σ_n-полным** (**Π_n-полным**), если $A \in \Sigma_n(\Pi_n)$ и $B \leqslant_1 A$ для любого $B \in \Sigma_n(\Pi_n)$.

Теорема C49

1. $B \in \Sigma_{n+1}$, если и только если B вычислимо перечислимо относительно некоторого Π_n-множества;
2. $B \in \Sigma_{n+1}$, если и только если B вычислимо перечислимо относительно некоторого Σ_n-множества;
3. множество $\varnothing^{(n+1)}$ является Σ_{n+1}-полным;
4. $B \in \Sigma_{n+1} \Leftrightarrow B \leqslant_{\mathrm{CE}} \varnothing^{(n)}$;
5. $B \in \Delta_{n+1} \Leftrightarrow B \leqslant_T \varnothing^{(n)}$.

Теорема Поста об иерархии

Доказательство.

1) ($\Rightarrow$) Пусть $B \in \Sigma_{n+1}$, тогда $x \in B \Leftrightarrow \exists y R(x, y)$ для некоторого Π_n-отношения R. Следовательно, B является Σ_1-множеством относительно $c(R)$, поэтому B вп относительно $c(R)$, по теореме и лемме.

Теорема Поста об иерархии

Доказательство.

1) ($\Rightarrow$) Пусть $B \in \Sigma_{n+1}$, тогда $x \in B \Leftrightarrow \exists y R(x,y)$ для некоторого Π_n-отношения R. Следовательно, B является Σ_1-множеством относительно $c(R)$, поэтому B вп относительно $c(R)$, по теореме и лемме.

1) ($\Leftarrow$) Предположим, что B является C-вп для некоторого Π_n-множества C. Тогда для некоторого фиксированного e имеем
$x \in B \Leftrightarrow x \in \pi_e^C \Leftrightarrow \{e\}^C(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists y[\{e\}^C(x) = y] \Leftrightarrow \exists y \exists s \exists \sigma[(\sigma \sqsubseteq C) \wedge (\{e\}_s^\sigma(x) = y)] \Leftrightarrow \exists t[(\sigma_{c_{3,3}(t)} \sqsubseteq C) \wedge (\{e\}_{c_{3,2}(t)}^{\sigma_{c_{3,3}(t)}}(x) = c_{3,1}(t))]$,
по теореме C42. Используя теорему C41, заключаем, что отношение $(\{e\}_{c_{3,2}(t)}^{\sigma_{c_{3,3}(t)}}(x) = c_{3,1}(t))$ вычислимо. Поэтому, согласно теореме C48(3,4,5), достаточно показать, что отношение $\sigma \sqsubseteq C$ принадлежит Σ_{n+1}. Имеем
$\sigma \sqsubseteq C \Leftrightarrow \forall y < \mathrm{Lh}(\sigma)[\sigma(y) = C(y)] \Leftrightarrow \forall y < \mathrm{Lh}(\sigma)[(\sigma(y) = 0 \wedge y \in C) \vee (\sigma(y) = 1 \wedge y \notin C)]$.
Из того, что $C \in \Pi_n$, вытекает, что $(\sigma(y) = 0 \wedge y \in C)$ и $(\sigma(y) = 1 \wedge y \notin C)$ принадлежат Π_n и Σ_n соответственно. Следовательно, отношение в квадратных скобках принадлежит Σ_{n+1} (даже Δ_{n+1}), по теореме C48(2).

Теорема Поста об иерархии

Доказательство (продолжение)

2) Непосредственно следует из 1 и теоремы С44(7).

Теорема Поста об иерархии

Доказательство (продолжение)

2) Непосредственно следует из 1 и теоремы C44(7).

3) Доказывается индукцией по n и очевидно для $n = 1$. Фиксируем $n \geqslant 1$ и предположим, что множество $\varnothing^{(n)}$ является Σ_n-полным. Далее, $B \in \Sigma_{n+1} \iff B$ вп относительно некоторого Σ_n-множества (по 2) $\iff B \leqslant_{\mathrm{CE}} \varnothing^{(n)}$ (по индукционному предположению и теореме C44(4)) $\iff B \leqslant_1 \varnothing^{(n+1)}$ (по теореме C44(3)).

Теорема Поста об иерархии

Доказательство (продолжение)

2) Непосредственно следует из 1 и теоремы C44(7).
3) Доказывается индукцией по n и очевидно для $n = 1$. Фиксируем $n \geqslant 1$ и предположим, что множество $\varnothing^{(n)}$ является Σ_n-полным. Далее, $B \in \Sigma_{n+1} \iff B$ вп относительно некоторого Σ_n-множества (по 2) $\iff B \leqslant_{\mathrm{CE}} \varnothing^{(n)}$ (по индукционному предположению и теореме C44(4)) $\iff B \leqslant_1 \varnothing^{(n+1)}$ (по теореме C44(3)).
4) Непосредственно следует из 2 и 3, поскольку $\varnothing^{(n)}$ является Σ_n-полным.

Теорема Поста об иерархии

Доказательство (продолжение)

2) Непосредственно следует из 1 и теоремы C44(7).
3) Доказывается индукцией по n и очевидно для $n = 1$. Фиксируем $n \geqslant 1$ и предположим, что множество $\varnothing^{(n)}$ является Σ_n-полным. Далее, $B \in \Sigma_{n+1} \iff B$ вп относительно некоторого Σ_n-множества (по 2) $\iff B \leqslant_{\mathrm{CE}} \varnothing^{(n)}$ (по индукционному предположению и теореме C44(4)) $\iff B \leqslant_1 \varnothing^{(n+1)}$ (по теореме C44(3)).
4) Непосредственно следует из 2 и 3, поскольку $\varnothing^{(n)}$ является Σ_n-полным.
5) $B \in \Delta_{n+1} \iff B, \overline{B} \in \Sigma_{n+1} \iff B \leqslant_{\mathrm{CE}} \varnothing^{(n)}, \overline{B} \leqslant_{\mathrm{CE}} \varnothing^{(n)}$ (по 4) $\iff B \leqslant_T \varnothing^{(n)}$ (по теореме C8'). □

Теорема Поста об иерархии

Теорема C50

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \Sigma_0 \arrow[dr, phantom, sloped, "="] & & \Sigma_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Sigma_2 \ \dots \\
\Delta_0 \arrow[ur, phantom, sloped, "="] \arrow[dr, phantom, sloped, "="] & & \Delta_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
& \Pi_0 \arrow[ur, phantom, sloped, "="] & & \Pi_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \Pi_2 \ \dots
\end{tikzcd}
$$

Теорема Поста об иерархии

Теорема C50

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Sigma_0 \arrow[dr, phantom, sloped, "="] & & \Sigma_1 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Sigma_2 \ldots \\
\Delta_0 \arrow[ur, phantom, sloped, "="] \arrow[dr, phantom, sloped, "="] & & \Delta_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta_2 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
 & \Pi_0 \arrow[ur, phantom, sloped, "="] & & \Pi_1 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \Pi_2 \ldots
\end{tikzcd}$$

Доказательство.

Включения следуют из теоремы C48(2). Кроме того, для всех $n > 0$ имеем $\varnothing^{(n)} \in \Sigma_n - \Pi_n$, а $\overline{\varnothing^{(n)}} \in \Pi_n - \Sigma_n$ (по теоремам C49(3,5) и C44(2)). $\square$

Полные пары

Определение.

Для $n \geqslant 1$ положим $(\Sigma_n, \Pi_n) \leqslant_1 (C, D)$, если $(A, \overline{A}) \leqslant_1 (C, D)$ для некоторого Σ_n-множества A.

Полные пары

Определение.

Для $n \geqslant 1$ положим $(\Sigma_n, \Pi_n) \leqslant_1 (C, D)$, если $(A, \overline{A}) \leqslant_1 (C, D)$ для некоторого Σ_n-множества A.

Теорема C51

$(\Sigma_2, \Pi_2) \leqslant_1 (\mathrm{Fin}, \mathrm{Tot})$. В частности, Fin является Σ_2-полным, а множества Inf и Tot Π_2-полны и $\mathrm{Inf} \approx \mathrm{Tot}$.

Полные пары

Определение.

Для $n \geqslant 1$ положим $(\Sigma_n, \Pi_n) \leqslant_1 (C, D)$, если $(A, \overline{A}) \leqslant_1 (C, D)$ для некоторого Σ_n-множества A.

Теорема С51

$(\Sigma_2, \Pi_2) \leqslant_1 (\mathrm{Fin}, \mathrm{Tot})$. В частности, Fin является Σ_2-полным, а множества Inf и Tot Π_2-полны и $\mathrm{Inf} \approx \mathrm{Tot}$.

Доказательство.

По предложению С31 и С32(3) имеем $\mathrm{Fin} \in \Sigma_2$ (следовательно, $\mathrm{Inf} \in \Pi_2$) и $\mathrm{Tot} \in \Pi_2$. Пусть $A \in \Sigma_2$, тогда $\overline{A} \in \Pi_2$, а следовательно, существует такое вычислимое отношение R, что $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall y \exists z R(x, y, z)$.

Полная пара

Доказательство (продолжение)

Используя s-m-n-теорему C25, определим инъективную вф f так:

$$\varkappa_{f(x)}(u) \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } \forall y \leqslant u \exists z R(x,y,z); \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее, $x \in \overline{A} \Longrightarrow \pi_{f(x)} = \omega \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{Tot}$,
$x \in A \Longrightarrow \pi_{f(x)}$ конечно $\Longrightarrow f(x) \in \mathrm{Fin}$ $\square$

Теорема Фридберга

Теорема C52

Существует однозначная вычислимая нумерация семейства PCF.

Теорема Фридберга

Теорема C52

Существует однозначная вычислимая нумерация семейства PCF.

Доказательство.

Сначала разобьём семейство PCF на следующие два семейства:
$L_1 \risingdotseq \{g \in \mathrm{PCF} : |\delta g|$ нечётно$\}$,
$L_2 \risingdotseq \{g \in \mathrm{PCF} : |\delta g|$ чётно или бесконечно$\}$.
Докажем свойства эффективности представлений данных семейств.

Теорема Фридберга

Теорема C52

Существует однозначная вычислимая нумерация семейства PCF.

Доказательство.

Сначала разобьём семейство PCF на следующие два семейства:
$L_1 \leftrightharpoons \{g \in \mathrm{PCF} : |\delta g| \text{ нечётно}\}$,
$L_2 \leftrightharpoons \{g \in \mathrm{PCF} : |\delta g| \text{ чётно или бесконечно}\}$.
Докажем свойства эффективности представлений данных семейств.

(1) *Семейство L_2 вычислимо.* Пусть $\varphi(x, y)$ — универсальная чвф. Тогда существует такая сильная аппроксимация $\{B_s\}_{s\in\omega}$ для впм $c^3(\Gamma_\varphi)$, что $|B_{s+1} - B_s| \leqslant 1$ для всех $s \in \omega$. Обозначим через $\varphi_{x,s}$ функцию, для которой $\Gamma_{\varphi_{x,s}} = \{\langle y, z\rangle \mid c^3(x, y, z) \in B_s\}$, для всех $x, s \in \omega$. Построим аппроксимацию $\{\psi_{x,s}\}_{x,s\in\omega}$ для чвф $\psi(x, y)$ так, что $\nu(x) \leftrightharpoons \psi(x, \cdot)$ — вычислимая нумерация семейства L_2.
Шаг 0. Положим $\psi_{x,0} \leftrightharpoons \varnothing$ для всех $x \in \omega$.

Шаг s. Если $|\delta\varphi_{l(s),r(s)}|$ чётно, то положим $\psi_{l(s),s} \leftrightharpoons \varphi_{l(s),r(s)}$; в противном случае положим $\psi_{l(s),s} \leftrightharpoons \psi_{l(s),s-1}$. В остальных случаях, т.е. при $y \neq l(s)$, положим $\psi_{y,s} \leftrightharpoons \psi_{y,s-1}$.

Теорема Фридберга

Доказательство (продолжение)

Непосредственно из конструкции вытекает справедливость следующих условий:

1.1) $\nu(x) \subseteq \lambda y.\varphi(x,y)$ для всех $x \in \omega$. Индукцией по $s \in \omega$ доказывается, что $\psi_{x,s} \subseteq \varphi_{x,s}$.

1.2) Если $|\delta\lambda y.\varphi(x,y)|$ чётно, то $\nu(x) = \lambda y.\varphi(x,y)$. Пусть $s_0 \in \omega$ таково, что $\varphi_{x,s_0} = \lambda y.\varphi(x,y)$; тогда $\lambda y.\varphi(x,y) \supseteq \nu(x) \supseteq \psi_{x,c(x,s_0)} = \varphi_{x,s_0} = \lambda y.\varphi(x,y)$.

1.3) Если $|\delta\lambda y.\varphi(x,y)|$ бесконечно, то $\nu(x) = \lambda y.\varphi(x,y)$. Из (1.1) следует, что $\nu(x) \subseteq \lambda y.\varphi(x,y)$. Пусть теперь $z \in \delta(\lambda y.\varphi(x,y))$, тогда существует s_0 такое, что $\varphi_{x,s_0}(z)\downarrow$. Если $|\delta\varphi_{x,s_0}|$ чётно, то $\psi_{x,c(x,s_0)} = \varphi_{x,s_0}$; если же $|\delta\varphi_{x,s_0}|$ нечётно, то найдётся $t_0 > s_0$, для которого $|\varphi_{x,t_0} - \varphi_{x,s_0}| = 1$, а следовательно, $\psi_{x,c(x,t_0)} = \varphi_{x,t_0}$.

1.4) Если $|\delta\lambda y.\varphi(x,y)|$ конечно, то $|\delta\nu(x)|$ чётно. Доказывается индукцией по s.

Теорема Фридберга

Доказательство (продолжение)

(2) *Семейство* L_1 *является* γ*-вычислимым, т.е.* $\gamma^{-1}(L_1)$ *вычислимо.*
Действительно, $\gamma(n) \in L_1$, если и только если выполняются следующие условия:
2.1) $\gamma(n)$ — функция: $\forall m_1 < n \forall m_2 < n[(((m_1 \in \gamma(n)) \wedge (m_2 \in \gamma(n))) \wedge (l(m_1) = l(m_2))) \to (m_1 = m_2)]$;
2.2) $|\gamma(n)|$ нечётно.
Пусть h — строго возрастающая вф такая, что $L_1 = \{\gamma(h(n)) \mid n \in \omega\}$ (сущестсвование такой функции следует из предложения C14(1)).

Теорема Фридберга

Доказательство (продолжение)

(2) Семейство L_1 является γ-вычислимым, т.е. $\gamma^{-1}(L_1)$ вычислимо.
Действительно, $\gamma(n) \in L_1$, если и только если выполняются следующие условия:
2.1) $\gamma(n)$ — функция: $\forall m_1 < n \forall m_2 < n[(((m_1 \in \gamma(n)) \wedge (m_2 \in \gamma(n))) \wedge (l(m_1) = l(m_2))) \to (m_1 = m_2)]$;
2.2) $|\gamma(n)|$ нечётно.
Пусть h — строго возрастающая вф такая, что $L_1 = \{\gamma(h(n)) \mid n \in \omega\}$ (сущестсвование такой функции следует из предложения C14(1)).
Множество M минимальных ν-индексов определяется так:
$M = \{i : \forall j < i(\nu(i) \neq \nu(j))\}$. Далее, если инъективная вф g такова, что $c(\Gamma\nu) = \pi g$, то $(\pi(g(i)) = c(\Gamma\nu(i)) = c(\Gamma\nu(j)) = \pi(g(j)))$, поэтому $\{c(i,j) \mid \nu(i) = \nu(j)\} \in \Pi_2$ (см. предложение C32(2)) и, следовательно, $M \in \Sigma_2$. По теореме C49(4), M вп относительно $\varnothing'$ и, следовательно, $M = \rho\widehat{f}$ для некоторой инъективной $\varnothing'$-вф $\widehat{f}$. По лемме о пределе, $\widehat{f}(x) = \lim_s f(x,s)$ для всех $x \in \omega$, где $f(x,s)$ — вф.

Теорема Фридберга

Доказательство (продолжение)

Теперь мы готовы для построения однозначной вычислимой нумерации θ семейства PCF. Для этого будем использовать пошаговую конструкцию, в которой строится аппроксимация $\theta_{x,s}$, а также присутствуют метки двух типов $\boxed{i}_0$ и $\boxed{i}_1$, $i \in \omega$, для которых выполняется следующее:

- для каждого $i \in \omega$ существует ровно одна метка $\boxed{i}_j$ $(j = 0, 1)$;
- каждому числу присваивается не более одной метки;
- если на шаге s на числе x стоит метка вида $\boxed{i}_0$, то она может быть снята на последующем шаге и заменена на метку вида $\boxed{j}_1$, которая уже никогда не смещается;
- если на шаге s на числе x стоит метка вида $\boxed{i}_1$, то на последующих шагах она уже не смещается;
- если на шаге s число x помечено меткой $\boxed{i}_0$, то имеются намерения в перечислении $\nu(\widehat{f}(i))$ в $\theta(x)$;

Теорема Фридберга

Доказательство (продолжение)

- если на шаге $t > s$ имеет место $f(i,s) \neq f(i,t)$, то убираем с числа x метку $\boxed{i}_0$ и устанавливаем метку $\boxed{j}_1$ такую, что данная метка не была ранее установлена ни на каком числе и, к тому же, $\theta_{x,t} \subseteq \gamma(h(j))$;
- если на шаге s число x помечено меткой $\boxed{i}_1$, то $\theta_{x,t} = \gamma(h(i))$ для всех $t \geqslant s$ и, следовательно, $\theta(x) = \gamma(h(i))$.

КОНСТРУКЦИЯ

Шаг 0. Положим $\theta_{x,0} \leftrightharpoons \lambda y.\uparrow$ для всех $x \in \omega$.

Шаг $c(i,s)+1$. Выполняем последовательно пункты 1, 2 и 3.

1. Выполняем процедуру с наименьшим номером, которую можно выполнить.

1 Если метка $\boxed{i}_0$ не установлена к данному шагу, то находим наименьшее число $x_0 \in \omega$, на котором не стоит метка, и устанавливаем на числе x метку $\boxed{i}_0$; положим $\theta_{x_0,c(i,s)+1} \leftrightharpoons \psi_{f(i,s),s}$;

Теорема Фридберга

Доказательство (продолжение)

2 если на x_0 установлена метка $\boxed{i}_0$ и $f(i,s) = f(i, s \dot{-} 1)$, то полагаем $\theta_{x_0,c(i,s)+1} \leftrightharpoons \psi_{f(i,s),s}$;

3 если на x_0 установлена метка $\boxed{i}_0$ и $f(i,s) \neq f(i, s \dot{-} 1)$, то смещаем метку $\boxed{i}_0$ с числа x_0 и устанавливаем метку $\boxed{j}_1$ так, чтобы выполнялось следующее: $\theta_{x,c(i,s)} \subseteq \gamma(h(j))$ и метка $\boxed{j}_1$ не стоит ни на каком числе к данному шагу; положим $\theta_{x,c(i,s)+1} \leftrightharpoons \gamma(h(j))$.

2. Находим наименьшее число i_0, для которого не установлена метка $\boxed{i_0}_1$, после чего находим наименьшее число $x_1 \in \omega$, на котором не установлена никакая метка; далее, устанавливаем метку $\boxed{i_0}_1$ на числе x_1 и положим $\theta_{x_1,c(i,s)+1} \leftrightharpoons \gamma(h(i_0))$.

3. Для всех $y \notin \{x_0; x_1\}$, где x_0 и x_1 определены выше, то положим $\theta_{y,c(i,s)+1} \leftrightharpoons \theta_{y,c(i,s)}$.

Теорема Фридберга

Доказательство (продолжение)

Шаг ω. Положим $\theta(x) \leftrightharpoons \bigcup\limits_{s\in\omega} \theta_{x,s}$ для всех $x \in \omega$.

Так как конструкция вычислима, заключаем, что $F_\theta(x,y) \leftrightharpoons [\theta(x)](y)$ частично вычислима, а следовательно, нумерация θ вычислима. Докажем теперь, что θ — нумерация семейства PCF. Пусть $g(y) \in \mathrm{PCF}$. Если $g \in L_1$, то возьмём $n_0 \in \omega$ такое, что $g = \gamma(h(n_0))$; следовательно, к шагу $n_0 + 1$ устанавливается метка $\boxed{n_0}_1$ на некотором числе $\overline{x}$ (по 2); таким образом, $\theta(\overline{x}) = \bigcup_{s\in\omega} \theta_{\overline{x},s} = \theta_{\overline{x},n_0+1} = \gamma(h(n_0))$. Если же $g \in L_2$, то возьмём $n_1 \in \omega$ такое, что $g = \nu(\widehat{f}(n_1))$; далее, существует $\overline{s} \in \omega$, для которого $\widehat{f}(n_1) = f(n_1,\overline{s}) = f(n_1,t)$ для всех $t \geqslant \overline{s}$. Пусть $z_0 \in \omega$ — число, на котором установлена метка $\boxed{n_1}_0$ на шаге $c(n_1,\overline{s}+1)+1$; тогда

$$\theta(z_0) = \bigcup_{s\in\omega} \theta_{z_0,s} = \bigcup_{s\geqslant\overline{s}} \psi_{f(n_1,s),s} = \bigcup_{s\geqslant\overline{s}} \psi_{\widehat{f}(n_1),s} = \nu(\widehat{f}(n_1)) = g.$$

Наконец, нумерация θ однозначна, поскольку функции h и $\widehat{f}$ инъективны. $\square$

Теорема Фридберга

Упражнение.

Докажите, что существует однозначная вычислимая нумерация семейства CEP.

Теорема Фридберга

Упражнение.

Докажите, что существует однозначная вычислимая нумерация семейства CEP.

С одной стороны, любая однозначная нумерация минимальна; а с другой стороны, если семейство $\mathcal{S}$ имеет однозначную вычислимую нумерацию и $R \in \mathcal{S}$, то семейство $\mathcal{S} \setminus \{R\}$ также вычислимо.

Теорема Фридберга

Упражнение.

Докажите, что существует однозначная вычислимая нумерация семейства CEP.

С одной стороны, любая однозначная нумерация минимальна; а с другой стороны, если семейство $\mathcal{S}$ имеет однозначную вычислимую нумерацию и $R \in \mathcal{S}$, то семейство $\mathcal{S} \setminus \{R\}$ также вычислимо.

Пример.

Пусть $A \in \Sigma_2$, тогда $\mathcal{S}_A \leftrightharpoons \{\{n\}; n \in A\} \cup \{\omega\}$ вычислимо. Однако, если $A \notin \Sigma_1$, то $\mathcal{S}_A \setminus \{\omega\}$ не вычислимо.

Теорема Фридберга

Упражнение.

Докажите, что существует однозначная вычислимая нумерация семейства CEP.

С одной стороны, любая однозначная нумерация минимальна; а с другой стороны, если семейство $\mathcal{S}$ имеет однозначную вычислимую нумерацию и $R \in \mathcal{S}$, то семейство $\mathcal{S} \setminus \{R\}$ также вычислимо.

Пример.

Пусть $A \in \Sigma_2$, тогда $\mathcal{S}_A \leftrightharpoons \{\{n\}; n \in A\} \cup \{\omega\}$ вычислимо. Однако, если $A \notin \Sigma_1$, то $\mathcal{S}_A \setminus \{\omega\}$ не вычислимо.

Упражнение.

Обосновать пример.

Критерий полноты Фридберга

Для любой степени $\mathbf{a}$ справедливо $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{a}$, а по теореме C44, $\mathbf{0}' \leqslant \mathbf{a}'$, т.е. скачок любой степени располагается выше $\mathbf{0}'$. Таким образом, оператор скачка, рассматриваемый как отображение, заданное на степенях, действует в $\{\mathbf{b} : \mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}'\}$. Степень $\mathbf{a}$ называется **полной**, если $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}'$.

Критерий полноты Фридберга

Для любой степени $\mathbf{a}$ справедливо $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{a}$, а по теореме C44, $\mathbf{0}' \leqslant \mathbf{a}'$, т.е. скачок любой степени располагается выше $\mathbf{0}'$. Таким образом, оператор скачка, рассматриваемый как отображение, заданное на степенях, действует в $\{\mathbf{b} : \mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}'\}$. Степень $\mathbf{a}$ называется **полной**, если $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}'$.

Теорема C53

Для любой степени $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}'$ существует такая степень $\mathbf{a}$, что $\mathbf{b} = \mathbf{a} \sqcup \mathbf{0}' = \mathbf{a}'$.

Критерий полноты Фридберга

Для любой степени $\mathbf{a}$ справедливо $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{a}$, а по теореме C44, $\mathbf{0}' \leqslant \mathbf{a}'$, т.е. скачок любой степени располагается выше $\mathbf{0}'$. Таким образом, оператор скачка, рассматриваемый как отображение, заданное на степенях, действует в $\{\mathbf{b} : \mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}'\}$. Степень $\mathbf{a}$ называется **полной**, если $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}'$.

Теорема C53

Для любой степени $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}'$ существует такая степень $\mathbf{a}$, что $\mathbf{b} = \mathbf{a} \sqcup \mathbf{0}' = \mathbf{a}'$.

Доказательство.

Пусть $B \in \mathbf{b}$; построим характеристическую функцию f множества A как совокупность её начальных сегментов $\{f_s\}_{s\in\omega}$, используя B-вычислимое построение с конечными расширениями.

Критерий полноты Фридберга

Доказательство (продолжение)

Шаг 0. Полагаем $f_0 \leftrightharpoons \varnothing$.
Шаг $s+1=2e+1$. (Проверяем, будет ли выполняться $e \in A'$.) Удовлетворяем требованию

$$R_e : \exists \sigma \sqsubseteq A[\{e\}^{\sigma}(e)\downarrow \vee \forall \tau \sqsupseteq \sigma[\{e\}^{\tau}(e)\uparrow]]. \qquad (1)$$

По данному f_s используем оракул $\varnothing'$ для проверки истинности соотношения

$$\exists \sigma \exists t[f_s \sqsubseteq \sigma \wedge \{e\}^{\sigma}_t(e)\downarrow]. \qquad (2)$$

(Заметим, что бескванторная часть соотношения (2) вычислима, поэтому оно является Σ_1-условием и, следовательно, вычислимо относительно $\mathbf{0}'$.)
Если (2) выполняется, то полагаем f_{s+1} равной первой перечисленной такой строке σ (например, строке σ, которая быстрее остальных перечислится во множестве L из теоремы C41(2)). Если (2) не выполняется, то полагаем $f_{s+1} \leftrightharpoons f_s$.

Критерий полноты Фридберга

Доказательство (продолжение)

Шаг $s+1=2e+2$. (Кодируем $B(e)$ в A.) Пусть $n=\mathrm{Lh}(f_s)$. Полагаем $f_{s+1}(n)\leftrightharpoons B(e)$.
Функция $f=\bigcup\limits_{s\in\omega} f_s$ всюду определена, поскольку $\mathrm{Lh}(f_{2e})\geqslant e$.
Пусть $A=\{x : f(x)=0\}$ и $\mathbf{a}=\deg(A)$. Построение B-вычислимо, поскольку на нечётных шагах используется оракул $\varnothing'\leqslant_T B$, а на чётных шагах — оракул B. Так как для любого A имеем $A\oplus\varnothing'\leqslant_T A'$, для доказательства $A'\equiv_T B\equiv_T A\oplus\varnothing'$ достаточно доказать следующие утверждения.

Критерий полноты Фридберга

Доказательство (продолжение)

Шаг $s+1 = 2e+2$. (Кодируем $B(e)$ в A.) Пусть $n = \mathrm{Lh}(f_s)$.
Полагаем $f_{s+1}(n) \leftrightharpoons B(e)$.
Функция $f = \bigcup\limits_{s\in\omega} f_s$ всюду определена, поскольку $\mathrm{Lh}(f_{2e}) \geqslant e$.
Пусть $A = \{x : f(x) = 0\}$ и $\mathbf{a} = \deg(A)$. Построение B-вычислимо, поскольку на нечётных шагах используется оракул $\varnothing' \leqslant_T B$, а на чётных шагах — оракул B. Так как для любого A имеем $A \oplus \varnothing' \leqslant_T A'$, для доказательства $A' \equiv_T B \equiv_T A \oplus \varnothing'$ достаточно доказать следующие утверждения.

Лемма C53A

$A' \leqslant_T B$.

Критерий полноты Фридберга

Доказательство леммы C53A.

Так как построение B-вычислимо, последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ является B-вычислимой. Чтобы определить справедливость отношения $e \in A'$, проверяем B-вычислимо, используя $\varnothing' \leqslant_T B$, выполняется ли (2) для f_s при $s = 2e$. Если "да", то $e \in A'$; в противном случае $e \notin A'$, поскольку $\{e\}^{\sigma}(e)\uparrow$ для всех $\sigma \sqsupseteq f_s$. $\square$

Критерий полноты Фридберга

Доказательство леммы C53A.

Так как построение B-вычислимо, последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ является B-вычислимой. Чтобы определить справедливость отношения $e \in A'$, проверяем B-вычислимо, используя $\varnothing' \leqslant_T B$, выполняется ли (2) для f_s при $s = 2e$. Если "да", то $e \in A'$; в противном случае $e \notin A'$, поскольку $\{e\}^\sigma(e)\uparrow$ для всех $\sigma \sqsupseteq f_s$. □

Лемма C53B

$B \leqslant_T A \oplus \varnothing'$.

Критерий полноты Фридберга

Доказательство леммы C53A.

Так как построение B-вычислимо, последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ является B-вычислимой. Чтобы определить справедливость отношения $e \in A'$, проверяем B-вычислимо, используя $\varnothing' \leqslant_T B$, выполняется ли (2) для f_s при $s = 2e$. Если "да", то $e \in A'$; в противном случае $e \notin A'$, поскольку $\{e\}^\sigma(e)\uparrow$ для всех $\sigma \sqsupseteq f_s$. □

Лемма C53B

$B \leqslant_T A \oplus \varnothing'$.

Доказательство леммы C53B.

Так как $B(e)$ является последним элементом строки f_{2e+2}, достаточно показать, что последовательность $\{f_s\}_{s\in\omega}$ является $A \oplus \varnothing'$-вычислимой. Доказательство проводится индукцией по s. По множеству $\{f_s \mid s \leqslant 2e\}$ с помощью оракула $\varnothing'$ вычисляем f_{2e+1}. Далее, $f_{2e+2} = f_{2e+1}\hat{\ }A(\mathrm{Lh}(f_{2e+1}))$, и, тем самым, f_{2e+2} можно вычислить по f_{2e+1} с помощью оракула A. □

Критерий полноты Фридберга

Несмотря на то, что теорема С53 демонстрирует качественное свойство оператора скачка, из неё также следует одно неприятное свойство, а именно, то, что данный оператор не является инъективным отображением на степенях. Чтобы в этом убедиться, применим теорему к $\mathbf{b} = \mathbf{0}''$ и получим степень $\mathbf{a}$, для которой выполняется $\mathbf{a}' = \mathbf{a} \sqcup \mathbf{0}' = \mathbf{0}''$. Следовательно, $\mathbf{a} | \mathbf{0}'$ (т.е. $\mathbf{0}' \not\leqslant \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \not\leqslant \mathbf{0}'$) и $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'' = (\mathbf{0}')'$.

Критерий полноты Фридберга

Несмотря на то, что теорема С53 демонстрирует качественное свойство оператора скачка, из неё также следует одно неприятное свойство, а именно, то, что данный оператор не является инъективным отображением на степенях. Чтобы в этом убедиться, применим теорему к $\mathbf{b} = \mathbf{0}''$ и получим степень $\mathbf{a}$, для которой выполняется $\mathbf{a}' = \mathbf{a} \sqcup \mathbf{0}' = \mathbf{0}''$. Следовательно, $\mathbf{a}|\mathbf{0}'$ (т.е. $\mathbf{0}' \nleqslant \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \nleqslant \mathbf{0}'$) и $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'' = (\mathbf{0}')'$.
Ниже увидим, что также могут выполняться одновременно условия $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ и $\mathbf{a}' = \mathbf{b}'$.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Теорема C54.

Для любой возрастающей последовательности $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\omega}$ существуют такие верхние грани $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, что

$$\forall \mathbf{d}[(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \leqslant \mathbf{c}) \to \exists n(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{a}_n)]. \tag{3}$$

Теорема Клини-Поста-Спектора

Теорема C54.

Для любой возрастающей последовательности $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\omega}$ существуют такие верхние грани $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, что

$$\forall \mathbf{d}[(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \leqslant \mathbf{c}) \to \exists n(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{a}_n)]. \tag{3}$$

Следствие C30

Никакая строго возрастающая последовательность степеней не имеет точной верхней грани.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Теорема C54.

Для любой возрастающей последовательности $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\omega}$ существуют такие верхние грани $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, что

$$\forall \mathbf{d}[(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \leqslant \mathbf{c}) \to \exists n(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{a}_n)]. \quad (3)$$

Следствие C30

Никакая строго возрастающая последовательность степеней не имеет точной верхней грани.

Следствие C31

Существуют степени $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, не имеющие точной нижней грани.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Теорема С54.

Для любой возрастающей последовательности $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\omega}$ существуют такие верхние грани $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, что

$$\forall \mathbf{d}[(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{b} \wedge \mathbf{d} \leqslant \mathbf{c}) \to \exists n(\mathbf{d} \leqslant \mathbf{a}_n)]. \quad (3)$$

Следствие С30

Никакая строго возрастающая последовательность степеней не имеет точной верхней грани.

Следствие С31

Существуют степени $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, не имеющие точной нижней грани.

Обозначение.

Для множества $A \subseteq \omega$ определим y-**сечение** $A^{[y]} \leftrightharpoons \{c(x,z) \in A | z = y\}$. Положим $A^{[<y]} \leftrightharpoons \bigcup\{A^{[z]} : z < y\}$.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Определение.

Пусть $A, B \subseteq \omega$. Множество B называется A-**густым**, если выполняются следующие требования **густоты** (здесь $y \in \omega$):

$T_y : B^{[y]} =^* A^{[y]}$,

где $X =^* Y$ означает, что симметрическая разность $X \triangle Y \leftrightharpoons (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечна.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Определение.

Пусть $A, B \subseteq \omega$. Множество B называется A-**густым**, если выполняются следующие требования **густоты** (здесь $y \in \omega$):
$T_y : B^{[y]} =^* A^{[y]}$,
где $X =^* Y$ означает, что симметрическая разность $X \triangle Y \leftrightharpoons (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечна.

Отметим, что X конечно, если и только если $X =^* \varnothing$.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Определение.

Пусть $A, B \subseteq \omega$. Множество B называется A-**густым**, если выполняются следующие требования **густоты** (здесь $y \in \omega$):
$T_y : B^{[y]} =^* A^{[y]}$,
где $X =^* Y$ означает, что симметрическая разность $X \triangle Y \leftrightharpoons (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечна.

Отметим, что X конечно, если и только если $X =^* \varnothing$.

Определение.

Частичные функции θ и ψ называются **совместимыми** и записывать как $\mathrm{compat}(\theta, \psi)$, если они имеют общее продолжение, т.е. не существует такого x, что $\psi(x)\downarrow \neq \theta(x)\downarrow$.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Доказательство теоремы C54.

Выберем $A_y \in \mathbf{a}_y$ для всех $y \in \omega$ и определим $A \leftrightharpoons \{c(x,y) : x \in A_y\}$. Построим функции f и g, являющиеся характеристическими A-густых множеств B и C соответственно. Следовательно, $A_y = A^{[y]} \equiv_T B^{[y]} \leqslant_T B$ и $A_y = A^{[y]} \equiv_T C^{[y]} \leqslant_T C$ для всех $y \in \omega$. Тем самым, $\mathbf{b} = \deg(B)$ и $\mathbf{c} = \deg(C)$ будут верхними гранями последовательности $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\omega}$. В дополнении к требованиям густоты

$T^B_y : B^{[y]} =^* A^{[y]}$, $T^C_y : C^{[y]} =^* A^{[y]}$ $(y \in \omega)$

должны удовлетворить для всех $e, i \in \omega$ требованиям

$R_{\langle e,i\rangle} : \{e\}^B = \{i\}^C = h$ – всюду определённая функция $\Longrightarrow \exists y[h \leqslant_T A_y]$.

Пусть f_s, g_s, B_s и C_s — части (необязательно конечные) f, g, B и C соответственно, определённые к концу шага s следующего построения.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Доказательство теоремы С54 (продолжение)

Шаг 0. Полагаем $f_0 = g_0 = \varnothing$ и $B_0 = C_0 = \varnothing$.
Шаг $s+1$. Предположим, что f_s, g_s, $B_s = \{x \in \omega^{[<s]} : f_s(x) = 0\}$ и $C_s = \{x \in \omega^{[<s]} : g_s(x) = 0\}$, причём $\delta f_s \cap \delta g_s \supseteq \omega^{[<s]}$,

$$\forall y \leqslant s[B_s^{[y]} =^* A^{[y]} =^* C_s^{[y]}], \tag{4}$$

$$\delta f_s - \omega^{[<s]} =^* \varnothing =^* \delta g_s - \omega^{[<s]}. \tag{5}$$

Проделываем последовательно процедуры I и II.
Процедура I. (Удовлетворяем $R_{\langle e,i\rangle}$ для $s = c(e,i)$.) Если

$$\begin{gathered}\exists\sigma\exists\tau\exists s\exists t[\mathrm{compat}(\sigma, f_s) \wedge \mathrm{compat}(\tau, g_s)\wedge \\ \wedge(\{e\}_t^{\sigma}(x)\downarrow \neq \{i\}_t^{\tau}(x)\downarrow)],\end{gathered} \tag{6}$$

то пусть (σ,τ) — первая перечисленная пара строк (заметим, что для перечисления (6) требуется оракул $A^{[<s]} \equiv_T A_{s-1}$, поскольку $f_s \equiv_T A^{[<s]} \equiv_T g_s$, по (4) и (5); при $s = 0$ полагаем $A_{s-1} = \varnothing$); положим $\widehat{f} \leftrightharpoons f_s \cup \sigma$ и $\widehat{g} \leftrightharpoons g_s \cup \tau$.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Доказательство теоремы С54 (продолжение)

Если же (6) не выполняется, то $\widehat{f} \leftrightharpoons f_s$ и $\widehat{g} \leftrightharpoons g_s$. В целом, процедура I требует использования оракула $A'_{s-1} \equiv_T (A^{[<s]})'$.

Процедура II. (Удовлетворяем T_s^B и T_s^C.)

Положим $f_{s+1}(x) \leftrightharpoons \widehat{f}(x)$ для всех $x \in \delta\widehat{f}$; $f_{s+1}(x) \leftrightharpoons A(x)$ для всех $x \in \omega^{[s]} - \delta\widehat{f}$. Положим также $g_{s+1}(x) \leftrightharpoons \widehat{g}(x)$ для всех $x \in \delta\widehat{g}$; $g_{s+1}(x) \leftrightharpoons A(x)$ для всех $x \in \omega^{[s]} - \delta\widehat{g}$.

Из (5) вытекает, что f_s (а следовательно, и $\widehat{f}$) определена лишь на конечном множестве элементов из $\bigcup\limits_{t \geqslant s} \omega^{[t]}$ (то же самое выполняется и для функций g_s и $\widehat{g}$). Отсюда заключаем, что $B_{s+1}^{[t]} =^* A^{[t]} =^* C_{s+1}^{[t]}$ для всех $t \leqslant s$ и, к тому же, $\delta f_{s+1} \cap \delta g_{s+1} \supseteq \bigcup\limits_{t \leqslant s} \omega^{[t]}$. Этим описание построения завершается.

Если (6) верно, то $\{e\}^B \neq \{i\}^C$. Если (6) неверно и $\{e\}^B = \{i\}^C = h$ — всюду определённая функция, то для $s = c(e,i)$ покажем, что $h \leqslant_T A^{[<s]}$. Заметим, что $A^{[<s]} \leqslant_T A_s$, поскольку $A^{[<s]} \equiv_T A^{[0]} \oplus \ldots \oplus A^{[s_1]} \equiv_T A_0 \oplus \ldots \oplus A_{s-1} \leqslant_T A_s$.

Теорема Клини-Поста-Спектора

Доказательство теоремы C54 (продолжение)

Для вычисления $h(x)$ с помощью оракула $A^{[<s]}$, находим первую в некотором перечислении множества $\{\sigma : \{e\}^{\sigma}(x)\downarrow\}$ строку σ' такую, что $\mathrm{compat}(\sigma', f_s)$, и полагаем $h(x) \leftrightharpoons \{e\}^{\sigma'}(x)$, иначе для некоторого $\sigma'' \sqsubseteq f$ верно $\mathrm{compat}(\sigma'', f_s)$ и $\{e\}^{\sigma'}(x)\downarrow \neq \{e\}^{\sigma''}(x)\downarrow$, поэтому (6) выполняется либо для σ', либо для σ'', какую бы мы строку $\tau \sqsubseteq C$ такую, что $\{i\}^{\tau}(x)\downarrow$, ни выбрали. $\square$

Теорема Клини-Поста-Спектора

Доказательство теоремы C54 (продолжение)

Для вычисления $h(x)$ с помощью оракула $A^{[<s]}$, находим первую в некотором перечислении множества $\{\sigma : \{e\}^{\sigma}(x)\downarrow\}$ строку σ' такую, что $\mathrm{compat}(\sigma', f_s)$, и полагаем $h(x) \leftrightharpoons \{e\}^{\sigma'}(x)$, иначе для некоторого $\sigma'' \sqsubseteq f$ верно $\mathrm{compat}(\sigma'', f_s)$ и $\{e\}^{\sigma'}(x)\downarrow \neq \{e\}^{\sigma''}(x)\downarrow$, поэтому (6) выполняется либо для σ', либо для σ'', какую бы мы строку $\tau \sqsubseteq C$ такую, что $\{i\}^{\tau}(x)\downarrow$, ни выбрали. $\square$

Упражнение.

Пусть I — счётный идеал, содержащийся в верхней полурешётке тьюринговых степеней. Докажите, что существуют такие степени неразрешимости $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, что
$\forall \mathbf{a}[\mathbf{a} \in \mathrm{I} \iff (\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \leqslant \mathbf{c})]$.

Теорема Мучника-Фридберга

Теорема C55

Существует простое множество A, являющееся низким ($A' \equiv_T \varnothing'$).

Теорема Мучника-Фридберга

Теорема C55

Существует простое множество A, являющееся низким ($A' \equiv_T \varnothing'$).

Следствие C32 (Мучник-Фридберг)

Существует неполная вычислимо перечислимая степень $\mathbf{a}$, т.е. $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$.

Теорема Мучника-Фридберга

Теорема C55

Существует простое множество A, являющееся низким ($A' \equiv_T \varnothing'$).

Следствие C32 (Мучник-Фридберг)

Существует неполная вычислимо перечислимая степень $\mathbf{a}$, т.е. $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$.

Доказательство теоремы C55.

Пусть R — универсальный вп предикат и пусть $\{B_s\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация для $c(R)$. Определим $W_{e,s} = \{x : c(e,x) \in B_s\}$, тогда $x \in W_e \Leftrightarrow R(e,x) \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{s\in\omega} W_{e,s}$. Впм A будем строить по шагам с помощью сильной аппроксимации $\{A_s\}_{s\in\omega}$. Для этого достаточно построить кобесконечное впм A, удовлетворяющее следующим требованиям ($e \in \omega$):
(A простое) P_e: π_e бесконечно $\Longrightarrow \pi_e \cap A \neq \varnothing$;
(A низкое) N_e: $\exists^\infty s[\{e\}_s^{A_s}(e)\downarrow] \Longrightarrow \{e\}^A(e)\downarrow$,
где $\exists^\infty s Q(s)$ означает, что "существует бесконечно много s таких, что $Q(s)$".

Теорема Мучника-Фридберга

Доказательство теоремы С55 (продолжение)

Примем следующее приоритетное упорядочение требований: N_0, P_0, N_1, P_1, $\ldots$

Выполнение требований $\{N_e\}_{e\in\omega}$ гарантирует $A' \leqslant_T \varnothing'$.

Действительно, определим вычислимую функцию g так:

$$g(e,s) \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } \{e\}_s^{A_s}(e)\downarrow; \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если требование N_e выполняется, то существует $\widehat{g}(e) = \lim\limits_s g(e,s)$, для всех $e \in \omega$. Однако $\widehat{g} \leqslant_T \varnothing'$ по лемме о пределе, причём $\widehat{g}$ является характеристической функцией A', поэтому $A' \leqslant_T \varnothing'$.

Напомним, что функция использования $u(A_s; e, x, s)$, определённая как 1+ наибольшее число, исполльзованное при вычислении $\{e\}_s^{A_s}(x)$, если $\{e\}_s^{A_s}(x)\downarrow$; и 0 в противном случае. Для выполнения требования N_e, по данному A_s определим для всех e следующую функцию: (запрещающая функция) $r(e,s) = u(A_s; e, e, s)$.

Функция $r(e,s)$ вычислима, поскольку $\{A_s\}_{s\in\omega}$ сильно вычислима.

Теорема Мучника-Фридберга

Доказательство теоремы C55 (продолжение)

Для удовлетворения N_e пытаемся запретить с приоритетом N_e любые элементы $x \leqslant r(e,s)$ от попадания в A_{s+1}. (Дело в том, что если $\{e\}_s^{A_s}(e)\downarrow$, $r = u(A_s; e, e, s)$ и N_e успешно предотвращает все $x \leqslant r$ от их попадания в дальнейшем в A, то $A \restriction r = A_s \restriction r$ и, следовательно, $\{e\}^A(e)\downarrow$.) Тем самым, такие элементы могут попасть только из-за требований P_i с бо̀льшими приоритетами (а именно, при $i < e$). Стратегия удовлетворения P_i такая же, что и при построении простого множества Поста в теореме C22.

Шаг 0. Положим $A_0 \leftrightharpoons \varnothing$.

Шаг $s+1$. Пусть A_s уже построено, а следовательно, $r(e,s)$ определено для всех e. Выберем наименьшее $i \leqslant s$ такое, что

$$W_{i,s} \cap A_s = \varnothing, \tag{7}$$

$$\exists x[x \in W_{i,s} \wedge (x > 2i) \wedge \forall e \leqslant i(r(e,s) < x)]. \tag{8}$$

Теорема Мучника-Фридберга

Доказательство теоремы C55 (продолжение)

Если такое i существует, выберем наименьшее $x_0 = x$, удовлетворяющее (8). Полагаем $A_{s+1} \leftrightharpoons A_s \cup \{x_0\}$ и скажем, что требование P_i **получило внимание**. Таким образом, $W_{i,s} \cap A_{s+1} \neq \varnothing$, поэтому P_i удовлетворено, (7) не выполняется на шагах $> s+1$ и, следовательно, P_i больше никогда не будет обрабатываться. Если такого i не существует, то полагаем $A_{s+1} \leftrightharpoons A_s$.

Шаг ω. Полагаем $A \leftrightharpoons \bigcup\limits_{s\in\omega} A_s$.

Будем говорить, что x нарушает N_e на шаге $s+1$, если $x \in A_{s+1} - A_s$ и $x \leqslant r(e,s)$. Определим **множество нарушений** для N_e

$I_e = \{x : \exists s[(x \in A_{s+1} - A_s) \wedge (x \leqslant r(e,s))]\} =$
$= \{x : x$ нарушает N_e на некотором шаге $s+1\}$.

(Положительные требования никогда не нарушаются.)

Теорема Мучника-Фридберга

Лемма C55A.

I_e конечно для всех $e \in \omega$. Другими словами, N_e нарушается только конечное число раз.

Теорема Мучника-Фридберга

Лемма C55A.

I_e конечно для всех $e \in \omega$. Другими словами, N_e нарушается только конечное число раз.

Доказательство леммы C55A.

Каждое положительное требование P_i вынуждает перечислить в A не более одного элемента, по (7). Однако, согласно последнему конъюнктивному члену из (8), N_e может быть нарушено из-за P_i, если $i < e$. Следовательно, $|I_e| \leqslant e$. □

Теорема Мучника-Фридберга

Лемма C55A.

I_e конечно для всех $e \in \omega$. Другими словами, N_e нарушается только конечное число раз.

Доказательство леммы C55A.

Каждое положительное требование P_i вынуждает перечислить в A не более одного элемента, по (7). Однако, согласно последнему конъюнктивному члену из (8), N_e может быть нарушено из-за P_i, если $i < e$. Следовательно, $|I_e| \leqslant e$. $\square$

Лемма C55B.

Для каждого e требование N_e удовлетворяется; кроме того, существует $\widehat{r}(e) = \lim\limits_{s} r(e, s)$.

Теорема Мучника-Фридберга

Доказательство леммы C55B.

Зафиксируем e. По лемме C55A, выберем такой шаг s_e, для которого N_e не нарушается ни на каком шаге $s > s_e$. Следовательно, если $\{e\}_s^{A_s}(e)\downarrow$ для некоторого $s > s_e$, то индукцией по $t \geqslant s$ доказывается, что $r(e,t) = r(e,s)$ и $\{e\}_t^{A_t}(e)\downarrow = \{e\}_s^{A_s}(e)\downarrow$ для всех $t \geqslant s$. Поэтому $A \upharpoonright r = A_s \upharpoonright r$ при $r = r(e,s)$. Таким образом, $\{e\}^A(e)\downarrow$ по принципу использования (теорема C42). $\square$

Теорема Мучника-Фридберга

Доказательство леммы C55B.

Зафиксируем e. По лемме C55A, выберем такой шаг s_e, для которого N_e не нарушается ни на каком шаге $s > s_e$. Следовательно, если $\{e\}_s^{A_s}(e)\downarrow$ для некоторого $s > s_e$, то индукцией по $t \geqslant s$ доказывается, что $r(e,t) = r(e,s)$ и $\{e\}_t^{A_t}(e)\downarrow = \{e\}_s^{A_s}(e)\downarrow$ для всех $t \geqslant s$. Поэтому $A \upharpoonright r = A_s \upharpoonright r$ при $r = r(e,s)$. Таким образом, $\{e\}^A(e)\downarrow$ по принципу использования (теорема C42). $\square$

Лемма C55C.

Для каждого i требование P_i удовлетворяется.

Теорема Мучника-Фридберга

Доказательство леммы C55C.

Пусть i такое, что W_i бесконечно. По лемме C55B, найдётся такое s, что $\forall t \geqslant s \forall e \leqslant i[r(e,t) = \widehat{r}(e)]$. Выберем $s' \geqslant s$ так, что все P_j, $j < i$, не получают внимания после шага s'. Далее, пусть $t > s'$ такое, что
$\exists x[x \in W_{i,t} \wedge (x > 2i) \wedge \forall e \leqslant i(\widehat{r}(e) < x)]$.
Теперь либо $W_{i,t} \cap A_t \neq \varnothing$, либо P_i получает внимание на шаге $t+1$. В любом случае $W_{i,t} \cap A_{t+1} \neq \varnothing$, поэтому P_i удовлетворяется к концу шага $t+1$. □

Теорема Мучника-Фридберга

Доказательство леммы C55C.

Пусть i такое, что W_i бесконечно. По лемме C55B, найдётся такое s, что $\forall t \geqslant s \forall e \leqslant i[r(e,t) = \widehat{r}(e)]$. Выберем $s' \geqslant s$ так, что все P_j, $j < i$, не получают внимания после шага s'. Далее, пусть $t > s'$ такое, что
$\exists x[x \in W_{i,t} \wedge (x > 2i) \wedge \forall e \leqslant i(\widehat{r}(e) < x)]$.
Теперь либо $W_{i,t} \cap A_t \neq \varnothing$, либо P_i получает внимание на шаге $t+1$. В любом случае $W_{i,t} \cap A_{t+1} \neq \varnothing$, поэтому P_i удовлетворяется к концу шага $t+1$. □

Доказательство теоремы C55 (окончание)

Из второго конъюнктивного члена (8) следует, что $\overline{A}$ бесконечно. Таким образом, множество A является простым и низким. □

Спасибо за внимание.