

# Лекция L9

## Высказывания: изоморфизм Карри-Ховарда

Вадим Пузаренко

6 апреля 2020 г.

Класс формул ИИВ совпадает с классом формул ИВ.

$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$	(аксиома)
$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)} (\rightarrow I)$	$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi); \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow E)$
$\frac{\Gamma \vdash \varphi; \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)} (\wedge I)$	$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \varphi} (\wedge E_1)$
$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \psi} (\wedge E_2)$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} (\vee I_1)$
$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} (\vee I_2)$	$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\perp E)$
$\frac{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi); \Gamma, \varphi \vdash v; \Gamma, \psi \vdash v}{\Gamma \vdash v} (\vee E)$	

### Предложение L16

Интуиционистское исчисление высказываний замкнуто относительно операций уточнения и подстановки, а именно, из доказуемости  $\Gamma \vdash \varphi$  следует доказуемость  $\Gamma, \psi \vdash \varphi$  и  $[\Gamma]_{\psi}^{\vee} \vdash [\varphi]_{\psi}^{\vee}$ .

## Предложение L16

Интуиционистское исчисление высказываний замкнуто относительно операций уточнения и подстановки, а именно, из доказуемости  $\Gamma \vdash \varphi$  следует доказуемость  $\Gamma, \psi \vdash \varphi$  и  $[\Gamma]_{\psi}^{\varphi} \vdash [\varphi]_{\psi}^{\varphi}$ .

## ИВ vs ИИВ

Следующие секвенции не доказуемы в ИИВ:

- 1  $\vdash (\varphi \vee \neg \varphi)$  (закон исключенного третьего);
- 2  $\neg \neg \varphi \vdash \varphi$  (закон двойного отрицания);
- 3  $(\neg \varphi \rightarrow \varphi) \vdash \varphi$  (сведение к абсурду).

# Фрагмент ИВ

Лекция L9  
Высказыва-  
ния:  
изоморфизм  
Карри-  
Ховарда

Вадим  
Пузаренко

Ограничимся рассмотрением фрагмента алгебры высказываний, в которых используется только импликация в качестве связки.

## Определение

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  — **атомарные высказывания**.

Индукцией определим **высказывания**:

- 1 любое атомарное высказывание есть высказывание;
- 2 если  $\sigma$  и  $\tau$  — высказывания, то и  $(\sigma \rightarrow \tau)$  также является высказыванием;
- 3 других высказываний нет.

# Фрагмент ИВ

Лекция L9  
Высказывания:  
изоморфизм  
Карри-  
Ховарда

Вадим  
Пузаренко

Ограничимся рассмотрением фрагмента алгебры высказываний, в которых используется только импликация в качестве связки.

## Определение

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  — **атомарные высказывания**.

Индукцией определим **высказывания**:

- 1 любое атомарное высказывание есть высказывание;
- 2 если  $\sigma$  и  $\tau$  — высказывания, то и  $(\sigma \rightarrow \tau)$  также является высказыванием;
- 3 других высказываний нет.

Формально высказывания данного фрагмента совпадают с типами из типизированного  $\lambda$ -исчисления.

# Изоморфизм Карри-Ховарда

Лекция L9  
Высказывания:  
изоморфизм  
Карри-  
Ховарда

Вадим  
Пузаренко

## Теорема L21

Существует биекция между замкнутыми  $\lambda$ -термами типа  $\sigma$  (с точностью до  $\alpha$ -эквивалентности) и доказательствами секвенции  $\vdash \sigma$ .

# Изоморфизм Карри-Ховарда

Лекция L9  
Высказывания:  
изоморфизм  
Карри-  
Ховарда

Вадим  
Пузаренко

## Теорема L21

Существует биекция между замкнутыми  $\lambda$ -термами типа  $\sigma$  (с точностью до  $\alpha$ -эквивалентности) и доказательствами секвенции  $\vdash \sigma$ .

## Следствие L5

Если тип  $\sigma$  таков, что существует замкнутый терм данного типа, то высказывание  $\sigma$  доказуемо.



# Изоморфизм Карри-Ховарда

Лекция L9  
Высказывания:  
изоморфизм  
Карри-  
Ховарда

Вадим  
Пузаренко

## Теорема L21

Существует биекция между замкнутыми  $\lambda$ -термами типа  $\sigma$  (с точностью до  $\alpha$ -эквивалентности) и доказательствами секвенции  $\vdash \sigma$ .

## Следствие L5

Если тип  $\sigma$  таков, что существует замкнутый терм данного типа, то высказывание  $\sigma$  доказуемо.

## Замечание

Для  $\lambda$ -термов, не являющихся замкнутыми, имеется похожее утверждение. Однако в этом случае формулировка более громоздкая, поскольку необходимы в выводе соответствия между свободными переменными в  $\lambda$ -терме и значениями атомарных высказываний.

# Изоморфизм Карри-Ховарда

Лекция L9  
Высказывания:  
изоморфизм  
Карри-  
Ховарда

Вадим  
Пузаренко

## Доказательство.

Сводится к проверке соответствия между деревьями вывода высказывания и построения  $\lambda$ -терма. При этом построение  $(x_1 x_2)$  соответствует правилу вывода  $(\rightarrow E)$ , а  $\lambda x. \sigma$  —  $(\rightarrow I)$ .  $\square$

# Изоморфизм Карри-Ховарда

## Доказательство.

Сводится к проверке соответствия между деревьями вывода высказывания и построения  $\lambda$ -терма. При этом построение  $(x_1 x_2)$  соответствует правилу вывода  $(\rightarrow E)$ , а  $\lambda x. \sigma$  —  $(\rightarrow I)$ .  $\square$

## Пример

$$\frac{\frac{\frac{x_2; \frac{x_2; x_1}{(x_2 x_1)}}{(x_2 (x_2 x_1))}}{\lambda x_1. (x_2 (x_2 x_1))}}{\lambda x_2. \lambda x_1. (x_2 (x_2 x_1))}$$
$$\frac{(\alpha \rightarrow \alpha), \alpha \vdash (\alpha \rightarrow \alpha); \frac{(\alpha \rightarrow \alpha), \alpha \vdash (\alpha \rightarrow \alpha); (\alpha \rightarrow \alpha), \alpha \vdash \alpha}{(\alpha \rightarrow \alpha), \alpha \vdash \alpha}}{(\alpha \rightarrow \alpha), \alpha \vdash \alpha}$$
$$\frac{(\alpha \rightarrow \alpha), \alpha \vdash \alpha}{(\alpha \rightarrow \alpha) \vdash (\alpha \rightarrow \alpha)}$$
$$\vdash ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$$