Глава 4. Числовые характеристики случайных величин

Глава 4. Числовые характеристики случайных величин

Определение. Математическим ожиданием *дискретной случайной величины* называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \,,$$

где x_k - значения случайной величины X,
$p_k = P(X = x_k)$ - их вероятности, $k = 1, \ldots, n$.

Глава 4. Числовые характеристики случайных величин

Определение. Математическим ожиданием *дискретной случайной величины* называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k ,$$

где x_k - значения случайной величины X , $p_k = P(X = x_k)$ - их вероятности, $k = 1, \ldots, n$. Если множество значений X счетно, то

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

если ряд сходится абсолютно, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} | x_k | p_k < \infty$.

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная ее закон распределения

X	3	5	2
p	0.1	0.6	0.3

Решение. $EX = 3 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.3 = 3.9$.

Найдем математическое ожидание для некоторых законов распределения дискретных случайных величин:

1. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей биномиальный закон распределения $Bin(n, p)$, равно:

$$EX = np.$$

Найдем математическое ожидание для некоторых законов распределения дискретных случайных величин:

1. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей биномиальный закон распределения $Bin(n, p)$, равно:

$$EX = np.$$

Доказательство.

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

Найдем математическое ожидание для некоторых законов распределения дискретных случайных величин:

1. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей биномиальный закон распределения $Bin(n, p)$, равно:

$$EX = np.$$

Доказательство.

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

Найдем математическое ожидание для некоторых законов распределения дискретных случайных величин:

1. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей биномиальный закон распределения $Bin(n, p)$, равно:

$$EX = np.$$

Доказательство.

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m p^m (1-p)^{n-1-m}}_{1} = np.$$

2. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей закон распределения Пуассона $P(\lambda)$, равно:

$$EX = \lambda.$$

2. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей закон распределения Пуассона $P(\lambda)$, равно:

$$EX = \lambda.$$

Доказательство.

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}}_{=1} = \lambda.$$

Определение. Математическим ожиданием *случайной величины X,* имеющей абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f(x)$, называют интеграл

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

(если интеграл сходится абсолютно, т. е. существует

$$E|X|=\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx).$$

Найдем математическое ожидание для некоторых законов распределения непрерывных случайных величин:

1. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,b]$ равно:

$$EX = \frac{a+b}{2}.$$

Найдем математическое ожидание для некоторых законов распределения непрерывных случайных величин:

1. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,b]$ равно:

$$EX = \frac{a+b}{2}.$$

Доказательство.

$$EX = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

2. Математическое ожидание случайной величины X имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ равно:

$$EX = a.$$

2. Математическое ожидание случайной величины X имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ равно:

$$EX = a.$$

Доказательство.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| y = \frac{(x-a)}{\sigma},\ dx = \sigma dy \right|$$

2. Математическое ожидание случайной величины X имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ равно:

$$EX = a.$$

Доказательство.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| y = \frac{(x-a)}{\sigma},\ dx = \sigma dy \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + a) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

2. Математическое ожидание случайной величины X имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ равно:

$$EX = a.$$

Доказательство.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| y = \frac{(x-a)}{\sigma},\ dx = \sigma dy \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + a) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{A} + a \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=1} = a.$$

2. Математическое ожидание случайной величины X имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ равно:

$$EX = a.$$

Доказательство.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| y = \frac{(x-a)}{\sigma}, \ dx = \sigma dy \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + a) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{A} + a \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=1} = a.$$

$A = 0$ как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку.

3. Математическое ожидание случайной величины X имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, равно:

$$EX = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Математическое ожидание случайной величины X имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, равно:

$$EX = \frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство.

$$EX = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{\infty} x de^{-\lambda x} =$$

3. Математическое ожидание случайной величины X имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, равно:

$$EX = \frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство.

$$EX = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda(-\frac{1}{\lambda}) \int_0^{\infty} x d e^{-\lambda x} =$$

$$= -\int_0^{\infty} x d e^{-\lambda x} = \underbrace{-x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \int_0^{\infty} d e^{-\lambda x} =$$

3. Математическое ожидание случайной величины X имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, равно:

$$EX = \frac{1}{\lambda}.$$

Доказательство.

$$EX = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} x de^{-\lambda x} =$$

$$= -\int_0^{\infty} x de^{-\lambda x} = \underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} de^{-\lambda x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

4. Покажем, что математическое ожидание не всегда существует.

Рассмотрим распределение Коши, которое определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

4. Покажем, что математическое ожидание не всегда существует.

Рассмотрим распределение Коши, которое определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Математическое ожидание

$$E\,|\,X\,| = \int_{-\infty}^{\infty} |\,x\,| \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} x \frac{1}{1+x^2}dx =$$

4. Покажем, что математическое ожидание не всегда существует.

Рассмотрим распределение Коши, которое определяется плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Математическое ожидание

$$E|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} x\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\ln\left(1+x^2\right) = \frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\infty} = \infty.$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $EC = C$.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $EC = C$.

Доказательство. $EC = \sum_k C p_k = C \sum_k p_k = C$ (для непрерывных случайных величин доказывается аналогично).

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $EC = C$.

Доказательство. $EC = \sum_k Cp_k = C\sum_k p_k = C$ (для непрерывных случайных величин доказывается аналогично).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $E\left(C \cdot X\right) = C \cdot EX$.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $EC = C$.

Доказательство. $EC = \sum_k Cp_k = C\sum_k p_k = C$ (для непрерывных случайных величин доказывается аналогично).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $E\left(C \cdot X\right) = C \cdot EX$.

Доказательство.

$$E\left(C \cdot X\right) = \sum_k C\, x_k\, p_k = C\sum_k x_k\, p_k = C \cdot EX.$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $E\left(X+\mathrm{Y}\right)=EX+E\mathrm{Y}$.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $E\left(X+\mathrm{Y}\right)=EX+E\mathrm{Y}$.

Доказательство.

$$E\left(X+\mathrm{Y}\right)=\sum_{k,l}(x_k+y_l)P\left(X=x_k, Y=y_l\right)=$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $E\left(X+\mathrm{Y}\right)=EX+E\mathrm{Y}$.

Доказательство.

$$E\left(X+\mathrm{Y}\right)=\sum_{k,l}(x_k+y_l)P\left(X=x_k,Y=y_l\right)=$$

$$=\sum_k x_k \underbrace{\sum_l P\left(X=x_k,Y=y_l\right)}_{=P\left(X=x_k\right)}+\sum_l y_l \underbrace{\sum_k P\left(X=x_k,Y=y_l\right)}_{=P\left(Y=y_l\right)}=$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $E(X+\mathrm{Y})=EX+E\mathrm{Y}$.

Доказательство.

$$E(X+\mathrm{Y})=\sum_{k,l}(x_k+y_l)P(X=x_k,Y=y_l)=$$

$$=\sum_k x_k \underbrace{\sum_l P(X=x_k,Y=y_l)}_{=P(X=x_k)}+\sum_l y_l \underbrace{\sum_k P(X=x_k,Y=y_l)}_{=P(Y=y_l)}=$$

$$=\sum_k x_k P(X=x_k)+\sum_l y_l P(Y=y_l)=EX+EY.$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $E(X+Y)=EX+EY$.

Доказательство.

$$E(X+Y)=\sum_{k,l}(x_k+y_l)P(X=x_k,Y=y_l)=$$

$$=\sum_k x_k \underbrace{\sum_l P(X=x_k,Y=y_l)}_{=P(X=x_k)}+\sum_l y_l \underbrace{\sum_k P(X=x_k,Y=y_l)}_{=P(Y=y_l)}=$$

$$=\sum_k x_k P(X=x_k)+\sum_l y_l P(Y=y_l)=EX+EY.$$

Следствие. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $E(X+Y)=EX+EY$.

Доказательство.

$$E(X+Y)=\sum_{k,l}(x_k+y_l)P(X=x_k,Y=y_l)=$$

$$=\sum_k x_k \underbrace{\sum_l P(X=x_k,Y=y_l)}_{=P(X=x_k)}+\sum_l y_l \underbrace{\sum_k P(X=x_k,Y=y_l)}_{=P(Y=y_l)}=$$

$$=\sum_k x_k P(X=x_k)+\sum_l y_l P(Y=y_l)=EX+EY.$$

Следствие. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Замечание. $E(X\text{-}Y)=EX\text{-}EY$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = EX \cdot EY$.

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $E(X\mathrm{Y}) = EX \cdot E\mathrm{Y}$.

Доказательство. $E(X\,\mathrm{Y}) = \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k, Y = y_l) =$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = EX \cdot EY$.

Доказательство. $E(XY) = \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k, Y = y_l) =$

$$= \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k) P(Y = y_l) =$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = EX \cdot EY$.

Доказательство. $E(XY) = \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k, Y = y_l) =$

$$= \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k) P(Y = y_l) =$$

$$\left[\sum_k x_k P(X = x_k)\right]\left[\sum_l y_l P(Y = y_l)\right] = EX \cdot EY.$$

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = EX \cdot EY$.

Доказательство. $E(XY) = \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k, Y = y_l) =$

$$= \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k) P(Y = y_l) =$$

$$\left[\sum_{k} x_k P(X = x_k)\right]\left[\sum_{l} y_l P(Y = y_l)\right] = EX \cdot EY.$$

5. Если $X \geq Y$, то $EX \geq EY$.

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = EX \cdot EY$.

Доказательство. $E(XY) = \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k, Y = y_l) =$

$$= \sum_{k,l} x_k y_l P(X = x_k) P(Y = y_l) =$$

$$\left[\sum_k x_k P(X = x_k)\right]\left[\sum_l y_l P(Y = y_l)\right] = EX \cdot EY .$$

5. Если $X \geq Y$, то $EX \geq EY$.

Доказательство. Обозначим $Z = X - Y$, тогда

$$EZ = \sum_k z_k P(Z = z_k) \geq 0 \text{ так как все } z_k \geq 0.$$

Пример. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Пример. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости через X и на второй – через Y.

Тогда $EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.

Пример. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости через X и на второй – через Y.

Тогда $EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.

Очевидно, что $EY = \frac{7}{2}$. Значит

$E\left(X + Y\right) = EX + EY = 7$.