Использование доверительных интервалов для проверки гипотез о параметрах

Пусть известно, что $X \sim F(x;\theta)$, где F - известная функция распределения, θ - неизвестный параметр.

Использование доверительных интервалов для проверки гипотез о параметрах

Пусть известно, что $X \sim F(x;\theta)$, где F - известная функция распределения, θ - неизвестный параметр. Рассматривается гипотеза

$$H_0 = "\theta = \theta_0".$$

Использование доверительных интервалов для проверки гипотез о параметрах

Пусть известно, что $X \sim F(x;\theta)$, где F - известная функция распределения, θ - неизвестный параметр. Рассматривается гипотеза

$$H_0 = "\theta = \theta_0".$$

Пусть по выборке построен $\gamma \cdot 100\%$ доверительный интервал для θ,

Использование доверительных интервалов для проверки гипотез о параметрах

Пусть известно, что $X \sim F(x;\theta)$, где F - известная функция распределения, θ - неизвестный параметр. Рассматривается гипотеза

$$H_0 = "\theta = \theta_0".$$

Пусть по выборке построен $\gamma \cdot 100\%$ доверительный интервал для θ, т.е. с вероятностью γ,

для любого возможного θ , $\theta_1 < \theta < \theta_2$

Использование доверительных интервалов для проверки гипотез о параметрах

Пусть известно, что $X \sim F(x;\theta)$, где F - известная функция распределения, θ - неизвестный параметр. Рассматривается гипотеза

$$H_0 = "\theta = \theta_0".$$

Пусть по выборке построен $\gamma \cdot 100\%$ доверительный интервал для θ, т.е. с вероятностью γ,

для любого возможного θ , $\theta_1 < \theta < \theta_2 \quad \Rightarrow$

для $\theta = \theta_0$ с вероятностью γ выполняется: $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$

Использование доверительных интервалов для проверки гипотез о параметрах

Пусть известно, что $X \sim F(x;\theta)$, где F - известная функция распределения, θ - неизвестный параметр. Рассматривается гипотеза

$$H_0 = "\theta = \theta_0".$$

Пусть по выборке построен $\gamma \cdot 100\%$ доверительный интервал для θ, т.е. с вероятностью γ,

для любого возможного θ , $\theta_1 < \theta < \theta_2 \quad \Rightarrow$

для $\theta = \theta_0$ с вероятностью γ выполняется: $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2 \Rightarrow$

$$P\left(\theta_0 \notin [\theta_1, \theta_2]\right) = 1 - \gamma = \alpha.$$

Использование доверительных интервалов для проверки гипотез о параметрах

Пусть известно, что $X \sim F(x;\theta)$, где F - известная функция распределения, θ - неизвестный параметр. Рассматривается гипотеза

$$H_0 = "\theta = \theta_0".$$

Пусть по выборке построен $\gamma \cdot 100\%$ доверительный интервал для θ, т.е. с вероятностью γ,

для любого возможного θ , $\theta_1 < \theta < \theta_2 \quad \Rightarrow$

для $\theta = \theta_0$ с вероятностью γ выполняется: $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$

$$P\left(\theta_0 \notin [\theta_1,\, \theta_2]\right) = 1 - \gamma = \alpha.$$

Таким образом, гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$, если предполагаемое значение параметра θ_0 не попадает в доверительный интервал.

Проверка гипотез об однородности выборок

Гипотеза о равенстве дисперсий $H_0 : DX = DY$.

Гипотеза о равенстве математических ожиданий $H_0 : EX = EY$.

Гипотеза о равенстве распределений $H_0 : F_X(x) = F_Y(x)$.

Проверка гипотез об однородности выборок

Проверка гипотез об однородности выборок

1 задача. Пусть имеются две выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, являющиеся реализациями независимых случайных величин X, Y, причем $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ (параметры неизвестны).

Проверка гипотез об однородности выборок

1 задача. Пусть имеются две выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, являющиеся реализациями независимых случайных величин X, Y, причем $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ (параметры неизвестны). Проверяется гипотеза о равенстве дисперсий

$$H_0 = "\sigma_1^2 = \sigma_2^2".$$

Проверка гипотез об однородности выборок

1 задача. Пусть имеются две выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, являющиеся реализациями независимых случайных величин X, Y, причем $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ (параметры неизвестны). Проверяется гипотеза о равенстве дисперсий

$$H_0 = "\sigma_1^2 = \sigma_2^2".$$

Обозначим S_X^2, S_Y^2 - выборочные дисперсии X, Y,

$$K_{n-1} = \frac{nS_X^2}{\sigma_1^2}, \quad K_{m-1} = \frac{mS_Y^2}{\sigma_2^2}$$

Проверка гипотез об однородности выборок

1 задача. Пусть имеются две выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, являющиеся реализациями независимых случайных величин X, Y, причем $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ (параметры неизвестны). Проверяется гипотеза о равенстве дисперсий

$$H_0 = "\sigma_1^2 = \sigma_2^2".$$

Обозначим S_X^2, S_Y^2 - выборочные дисперсии X, Y,

$$K_{n-1} = \frac{nS_X^2}{\sigma_1^2}, \quad K_{m-1} = \frac{mS_Y^2}{\sigma_2^2}.$$

По свойству хи-квадрат распределения

$$K_{n-1} \sim \chi^2_{n-1}, \quad K_{m-1} \sim \chi^2_{m-1}.$$

Проверка гипотез об однородности выборок

1 задача. Пусть имеются две выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, являющиеся реализациями независимых случайных величин X, Y, причем $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ (параметры неизвестны). Проверяется гипотеза о равенстве дисперсий

$$H_0 = "\sigma_1^2 = \sigma_2^2".$$

Обозначим S_X^2, S_Y^2 - выборочные дисперсии X, Y,

$$K_{n-1} = \frac{nS_X^2}{\sigma_1^2}, \quad K_{m-1} = \frac{mS_Y^2}{\sigma_2^2}$$

По свойству хи-квадрат распределения

$$K_{n-1} \sim \chi^2_{n-1}, \quad K_{m-1} \sim \chi^2_{m-1}.$$

Значит $F = \dfrac{K_{n-1}/(n-1)}{K_{m-1}/(m-1)} \sim F_{n-1,m-1}$ - распределение Фишера

Проверка гипотез об однородности выборок

1 задача. Пусть имеются две выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, являющиеся реализациями независимых случайных величин X, Y, причем $X \sim N(a_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$ (параметры неизвестны). Проверяется гипотеза о равенстве дисперсий

$$H_0 = "\sigma_1^2 = \sigma_2^2".$$

Обозначим S_X^2, S_Y^2 - выборочные дисперсии X, Y,

$$K_{n-1} = \frac{nS_X^2}{\sigma_1^2}, \quad K_{m-1} = \frac{mS_Y^2}{\sigma_2^2}$$

По свойству хи-квадрат распределения

$$K_{n-1} \sim \chi^2_{n-1}, \quad K_{m-1} \sim \chi^2_{m-1}.$$

Значит $F = \dfrac{K_{n-1}/(n-1)}{K_{m-1}/(m-1)} \sim F_{n-1,m-1}$ - распределение Фишера

(если H_0 верна, то отношение не зависит от σ_1, σ_2).

По таблице распределения Фишера найдем такие значения q_1, q_2, что

$$F_{n-1,m-1}(q_1) = \alpha / 2, \; F_{n-1,m-1}(q_2) = 1 - \alpha / 2.$$

По таблице распределения Фишера найдем такие значения q_1, q_2, что

$$F_{n-1,m-1}(q_1) = \alpha / 2, \; F_{n-1,m-1}(q_2) = 1 - \alpha / 2.$$

Тогда

$$P\left(q_1 < F < q_2\right) = 1 - \alpha.$$

По таблице распределения Фишера найдем такие значения q_1, q_2, что

$$F_{n-1,m-1}(q_1) = \alpha / 2,\ F_{n-1,m-1}(q_2) = 1 - \alpha / 2.$$

Тогда

$$P\left(q_1 < F < q_2\right) = 1 - \alpha.$$

Значит, гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α, если $F_{набл} \notin (q_1, q_2)$.

По таблице распределения Фишера найдем такие значения q_1, q_2, что

$$F_{n-1,m-1}(q_1) = \alpha / 2,\ F_{n-1,m-1}(q_2) = 1 - \alpha / 2.$$

Тогда

$$P\left(q_1 < F < q_2\right) = 1 - \alpha.$$

Значит, гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α, если $F_{набл} \notin (q_1, q_2)$.

Замечание. Для исправленных дисперсий,

$$F = \frac{\tilde{S}_X^2}{\tilde{S}_Y^2}.$$

- критерий дисперсионного отношения.

Пример. Исследуются два измерительных прибора. Для диагностики первого прибора проведено 10 независимых испытаний, для второго – 12 испытаний. В первом случае получена дисперсия $\tilde{S}_X^2 = 1.2$, во втором $\tilde{S}_Y^2 = 0.8$. Предполагая нормальность ошибки измерения, проверить, значимо ли отличаются приборы по точности ($\alpha = 0.05$):

Пример. Исследуются два измерительных прибора. Для диагностики первого прибора проведено 10 независимых испытаний, для второго – 12 испытаний. В первом случае получена дисперсия $\tilde{S}_X^2 = 1.2$, во втором $\tilde{S}_Y^2 = 0.8$. Предполагая нормальность ошибки измерения, проверить, значимо ли отличаются приборы по точности ($\alpha = 0.05$):

$$F_{набл} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5,$$

Пример. Исследуются два измерительных прибора. Для диагностики первого прибора проведено 10 независимых испытаний, для второго – 12 испытаний. В первом случае получена дисперсия $\tilde{S}_X^2 = 1.2$, во втором $\tilde{S}_Y^2 = 0.8$. Предполагая нормальность ошибки измерения, проверить, значимо ли отличаются приборы по точности ($\alpha = 0.05$):

$$F_{набл} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5,$$

$$q_1 = F_{9,11}^{-1}(0.025) = 0.255, \quad q_2 = F_{9,11}^{-1}(0.975) = 3.587.$$

Так как $F_{набл} \in (0.255, 3.587)$, то нельзя утверждать, что точность приборов существенно различается.

2 задача. Проверяется гипотеза о равенстве средних

$$H_0 = "a_1 = a_2",$$

2 задача. Проверяется гипотеза о равенстве средних

$$H_0 = "a_1 = a_2",$$

проверяемая по независимым выборкам $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, где $X \sim N(a_1, \sigma)$, $Y \sim N(a_2, \sigma)$ (дисперсии совпадают).

2 задача. Проверяется гипотеза о равенстве средних

$$H_0 = "a_1 = a_2",$$

проверяемая по независимым выборкам $(X_1, \ ..., \ X_n)$ и $(Y_1, \ ..., \ Y_m)$, где $X \sim N(a_1, \sigma)$, $Y \sim N(a_2, \sigma)$ (дисперсии совпадают).

Если H_0 верна, то $E(\bar{X} - \bar{Y}) = 0$,

2 задача. Проверяется гипотеза о равенстве средних

$$H_0 = "a_1 = a_2",$$

проверяемая по независимым выборкам $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, где $X \sim N(a_1, \sigma)$, $Y \sim N(a_2, \sigma)$ (дисперсии совпадают).

Если H_0 верна, то $E(\bar{X} - \bar{Y}) = 0$,

$$D(\bar{X} - \bar{Y}) \underset{\substack{\text{независимость} \\ X \text{ и } Y}}{=} D\bar{X} + D\bar{Y} = \frac{DX}{n} + \frac{DY}{m} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right).$$

2 задача. Проверяется гипотеза о равенстве средних

$$H_0 = "a_1 = a_2",$$

проверяемая по независимым выборкам $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, где $X \sim N(a_1, \sigma)$, $Y \sim N(a_2, \sigma)$ (дисперсии совпадают).

Если H_0 верна, то $E(\bar{X} - \bar{Y}) = 0$,

$$D(\bar{X} - \bar{Y}) \underset{\substack{\text{независимость} \\ X \text{ и } Y}}{=} D\bar{X} + D\bar{Y} = \frac{DX}{n} + \frac{DY}{m} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right).$$

Значит, по свойству нормального распределения,

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(0, \sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right)$$

2 задача. Проверяется гипотеза о равенстве средних

$$H_0 = "a_1 = a_2",$$

проверяемая по независимым выборкам $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$, где $X \sim N(a_1, \sigma)$, $Y \sim N(a_2, \sigma)$ (дисперсии совпадают).

Если H_0 верна, то $E(\bar{X} - \bar{Y}) = 0$,

$$D(\bar{X} - \bar{Y}) \underset{\substack{\text{независимость} \\ X \text{ и } Y}}{=} D\bar{X} + D\bar{Y} = \frac{DX}{n} + \frac{DY}{m} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right).$$

Значит, по свойству нормального распределения,

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(0, \sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - a_1 - a_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1).$$

Обозначим $K = \underbrace{\boxed{\dfrac{nS_X^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{n-1}} + \underbrace{\boxed{\dfrac{mS_Y^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{m-1}} \Rightarrow K \sim \chi^2_{n+m-2}$.

Обозначим $K = \underbrace{\boxed{\dfrac{nS_X^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{n-1}} + \underbrace{\boxed{\dfrac{mS_Y^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{m-1}} \Rightarrow K \sim \chi^2_{n+m-2}$. Тогда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{K/(n+m-2)}} \sim t_{n+m-2}$$

- распределение Стьюдента.

Обозначим $K = \underbrace{\boxed{\dfrac{nS_X^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{n-1}} + \underbrace{\boxed{\dfrac{mS_Y^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{m-1}} \Rightarrow K \sim \chi^2_{n+m-2}$. Тогда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{K/(n+m-2)}} \sim t_{n+m-2}$$

- распределение Стьюдента. Таким образом, критерий:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} \frac{\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{nS_X^2 + mS_Y^2}}.$$

Обозначим $K = \underbrace{\boxed{\frac{nS_X^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{n-1}} + \underbrace{\boxed{\frac{mS_Y^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{m-1}} \Rightarrow K \sim \chi^2_{n+m-2}$. Тогда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{K/(n+m-2)}} \sim t_{n+m-2}$$

- распределение Стьюдента. Таким образом, критерий:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \frac{\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{nS_X^2 + mS_Y^2}}.$$

Если $|T_{набл}| > t_{cr}(\alpha, n+m-2)$, то гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α.

Пример. Исследуется влияние удобрения на урожайность. На 8 участках, где применялось удобрение, урожайность - 16 ц/га при среднеквадратическом уклонении $S_1 = 3$ ц/га, а на 10 участках, где оно не применялось - 14 ц/га при $S_2 = 2$ ц/га.

Пример. Исследуется влияние удобрения на урожайность. На 8 участках, где применялось удобрение, урожайность - 16 ц/га при среднеквадратическом уклонении $S_1 = 3$ ц/га, а на 10 участках, где оно не применялось - 14 ц/га при $S_2 = 2$ ц/га. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить эффективность удобрения предполагая нормальность распределения урожайности и одинаковую дисперсию выборок.

Пример. Исследуется влияние удобрения на урожайность. На 8 участках, где применялось удобрение, урожайность - 16 ц/га при среднеквадратическом уклонении $S_1 = 3$ ц/га, а на 10 участках, где оно не применялось - 14 ц/га при $S_2 = 2$ ц/га. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить эффективность удобрения предполагая нормальность распределения урожайности и одинаковую дисперсию выборок.

$$T_{набл} = \frac{16-14}{\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}} \frac{\sqrt{8+10-2}}{\sqrt{8 \cdot 3^2 + 10 \cdot 2^2}} \approx 1.6.$$

Пример. Исследуется влияние удобрения на урожайность. На 8 участках, где применялось удобрение, урожайность - 16 ц/га при среднеквадратическом уклонении $S_1 = 3$ ц/га, а на 10 участках, где оно не применялось - 14 ц/га при $S_2 = 2$ ц/га. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверить эффективность удобрения предполагая нормальность распределения урожайности и одинаковую дисперсию выборок.

$$T_{набл} = \frac{16-14}{\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}} \frac{\sqrt{8+10-2}}{\sqrt{8\cdot 3^2 + 10\cdot 2^2}} \approx 1.6.$$

$t_{cr}(0.05,16) = 2.12, \ |T_{набл}| < t_{cr} \quad \Rightarrow \quad H_0$ принимается,

т.е. разница в урожайности несущественна.

Критерий Манна и Уитни

является непараметрическим аналогом t-критерия для сравнения двух средних значений непрерывных распределений (не требуется нормальность распределений).

Пусть r_i – порядковый номер (ранг) наблюдения X_i, s_j – порядковый номер (ранг) наблюдения Y_j в общем вариационном ряде, построенном по объединенной выборке $\mathbf{X}_n \cup \mathbf{Y}_m$.

Если несколько значений в выборке равны, им начисляется ранг, представляющий собой среднее значение из тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны.

Общая сумма рангов по выборке объема N равна

$$\sum_{i=1}^{N} R_i = \frac{N \cdot (N+1)}{2}.$$

Пусть $R_1 = \sum_{i=1}^{n} r_i$, $R_2 = \sum_{j=1}^{m} s_j$ – суммы рангов,

$$U_1 = nm + \frac{n(n+1)}{2} - R_1,\ \ U_2 = nm + \frac{m(m+1)}{2} - R_2.$$

Статистика критерия имеет вид

$$S_{MU} = \frac{U - \dfrac{nm}{2}}{\sqrt{\dfrac{nm\left(n+m+1\right)}{12}}},$$

где $U = \min\left\{U_1, U_2\right\}$. Распределение статистики Манна-Уитни при справедливости гипотезы H_0 хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом при $n_1 + n_2 > 60$, $n_1 \geq 8$, $n_2 \geq 8$.

Гипотеза H_0 отвергается при $\left|S_{MU}\right| > \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

3 задача. Проверяется гипотеза о равенстве распределений

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x),$$

проверяемая по независимым выборкам $(X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, \ldots, Y_m)$

Критерий Смирнова

В критерии Смирнова используется статистика вида:

$$S_C = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn},$$

где

$$D_{mn}(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_n) = \sup_{-\infty<x<\infty} \left| F_m(x) - G_n(x) \right|,$$

$F_m(x)$ и $G_n(x)$ – эмпирические функции распределения, построенные по выборкам $\mathbf{X}_m$ и $\mathbf{Y}_n$ соответственно.

Критерий Смирнова имеет правостороннюю критическую область. При стремлении объемов выборок к бесконечности статистика критерия Смирнова сходится к распределению Колмогорова. Гипотеза отвергается, если

$$S_C > K^{-1}(1-\alpha)$$

где $K(t)$ - функция распределения Колмогорова, α - вероятность ошибки первого рода.

Замечание 1. При малых значениях объемов m и n распределение статистики Смирнова может значительно отклоняться от предельного закона, поэтому можно использовать поправку

$$S_{CM} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}}\left(D_{m,n} + \frac{m+n}{4.6mn}\right).$$

Замечание 2. При использовании критерия Смирнова рекомендуется брать объемы выборок m и n , представляющие собой взаимно простые числа.

Критерий однородности Лемана–Розенблатта

Статистика критерия имеет вид:

$$T = \frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} [G_m(x) - F_n(x)]^2 dH_{m+n}(x),$$

где $H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n} G_m(x) + \frac{n}{m+n} F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения объединенной выборки.

Статистику можно вычислить как

$$T = \frac{1}{mn(m+n)} \left[n \sum_{i=1}^{n} (r_i - i)^2 + m \sum_{j=1}^{m} (s_j - j)^2 \right] - \frac{4mn-1}{6(m+n)},$$

где r_i – порядковый номер (ранг) наблюдения X_i,

s_j – порядковый номер (ранг) наблюдения Y_j в общем вариационном ряде, построенном по объединенной выборке $\mathbf{X}_n \cup \mathbf{Y}_m$.

Критерий Лемана-Розенблатта имеет правостороннюю критическую область. При стремлении объемов выборок к бесконечности статистика критерия Лемана-Розенблатта сходится к распределению a_1. Гипотеза отвергается, если

$$T > a_1^{-1}(1-\alpha)$$

где α - вероятность ошибки первого рода.

Критерий однородности Андерсона-Дарлинга-Петита

Статистика критерия имеет вид

$$A^2 = \frac{mn}{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[G_m(x) - F_n(x)\right]^2}{(1 - H_{m+n}(x))H_{m+n}(x)} dH_{m+n}(x).$$

или

$$A^2 = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m+n-1} \frac{\left(M_i(m+n) - mi\right)^2}{i(m+n-i)},$$

где M_i – число элементов из первой выборки, меньших или равных *i*-му элементу вариационного ряда объединенной выборки.

Критерий Андерсона-Дарлинга-Петита имеет правостороннюю критическую область. При стремлении объемов выборок к бесконечности статистика критерия Андерсона-Дарлинга-Петита сходится к распределению a_2. Гипотеза отвергается, если

$$A^2 > a_2^{-1}(1-\alpha)$$

где α - вероятность ошибки первого рода.

Критерий однородности χ^2

Пусть осуществляется k последовательных серий независимых наблюдений, состоящих из $n_1, n_2, \ldots, n_k$ наблюдений. Пусть ν_{ij} – число наблюдений i-го исхода в j-й серии. Пусть p_{ij} – неизвестная вероятность появления i-го исхода в j-й серии. $\left(i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, k\right)$.

Тогда гипотеза однородности может быть сформулирована следующим образом:

$$H_0 : \left(p_{1j}, \ldots, p_{sj}\right) = \left(p_1, \ldots, p_s\right),\ j = 1, \ldots, k.$$

Статистика критерия имеет вид

$$\chi_n^2 = n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - n_j \nu_i / n\right)^2}{n_j \nu_i} = n\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{\nu_{ij}^{\ 2}}{n_j \nu_i} - 1\right)$$

Эта статистика при $n \to \infty$ имеет распределение $\chi^2_{\left(\left(s-1\right)\left(k-1\right)\right)}$.

Гипотеза отвергается, если $\chi_n^2 > F^{-1}_{\chi^2_{(s-1)(k-1)}}(1-\alpha)$.

Проверка гипотезы независимости

Пусть в эксперименте наблюдается двумерная случайная величина $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с неизвестной функцией распределения $F_\xi(x, y)$, и есть основания предполагать, что ξ_1 и ξ_2 независимы.

Гипотеза независимости: $H_0 : F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$,

где $F_{\xi_i}(x)$ – одномерные функции распределения.

Для проверки гипотезы независимости используется критерий χ^2 Пирсона. Если исходные данные негруппированы, то предварительно производится группировка наблюдений.

Пусть случайная величина ξ_1 принимает значения $c_1, \ldots, c_s$, а ξ_2 – $b_1, \ldots, b_k$. Обозначим ν_{ij} количество наблюдений $\left(c_i, b_j\right)$,

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij} = n.$$

Таблица сопряженности признаков ξ_1 и ξ_2 имеет вид:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	b_1	$\dots$	b_k	
c_1	ν_{11}		ν_{1k}	$\nu_{1\bullet}$
$\dots$				$\dots$
c_s	ν_{s1}		ν_{sk}	$\nu_{s\bullet}$
	$\nu_{\bullet 1}$	$\dots$	$\nu_{\bullet k}$	

Статистика критерия независимости χ^2 Пирсона имеет вид

$$\chi_n^2 = n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\nu_{ij} - \nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j} / n\right)^2}{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}} = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\nu_{ij}{}^2}{\nu_{i\bullet}\nu_{\bullet j}} - 1\right)$$

имеет распределение $\chi^2_{\left((s-1)(k-1)\right)}$ при $n \to \infty$.

Гипотеза отвергается, если $\chi_n^2 > F^{-1}_{\chi^2_{(s-1)(k-1)}}(1-\alpha)$.

Проверка гипотез о корреляции

Пусть из генеральной совокупности случайно и независимо выбраны объекты $a_1, ..., a_n$.

Каждый объект описывается двумя переменными X и Y (количественными).

Выборка наблюдений над случайными величинами X, Y:

$$(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n),$$

где $x_i = X(a_i)$, $y_i = Y(a_i)$.

Требуется по наблюдениям оценить форму зависимости и ее тесноту.
Зависимость можно использовать для прогнозирования Y при известном X для новых объектов.

Корреляционный анализ

- служит для выявления зависимостей между статистическими показателями. Коэффициент линейной корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Выборочный коэффициент линейной корреляции - оценка ρ_{XY}:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y},$$

где $s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}$ - выборочный коэффициент ковариации;

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,,\ s_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2,\ s_y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\,,\ \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2\,,$$

$s_x = \sqrt{s_x^2}$ и s_y - выборочное стандартное отклонение,

$\overline{y}, \overline{x}$ - выборочные средние. Обозначим $\rho_{XY} = \rho,\ r_{xy} = r$.

Свойства выборочного коэффициента корреляции аналогичны свойствам «истинного» коэффициента.

Свойства выборочного коэффициента корреляции аналогичны свойствам «истинного» коэффициента.

1. $-1 \leq r \leq +1;$

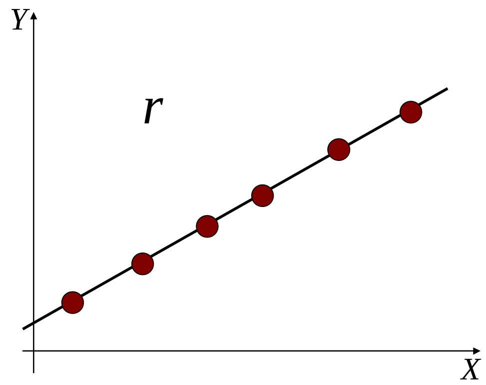
Свойства выборочного коэффициента корреляции аналогичны свойствам «истинного» коэффициента.

1. $-1 \le r \le +1$;

2. Если $y_i = a + bx_i$ (строгая линейная зависимость), то $|r| = 1$.

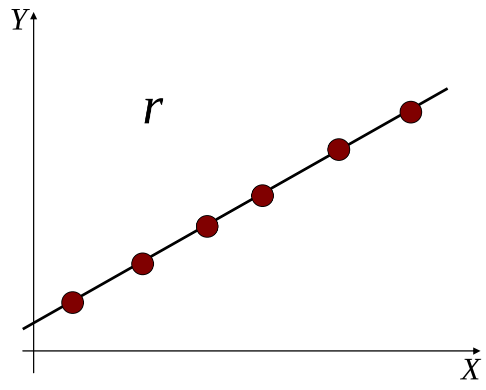
Если $b < 0$, то $r = -1$;

если $b > 0$, то $r = +1$



Свойства выборочного коэффициента корреляции аналогичны свойствам «истинного» коэффициента.

1. $-1 \le r \le +1$;



2. Если $y_i = a + bx_i$ (строгая линейная зависимость), то $|r| = 1$.

   Если $b < 0$, то $r = -1$;

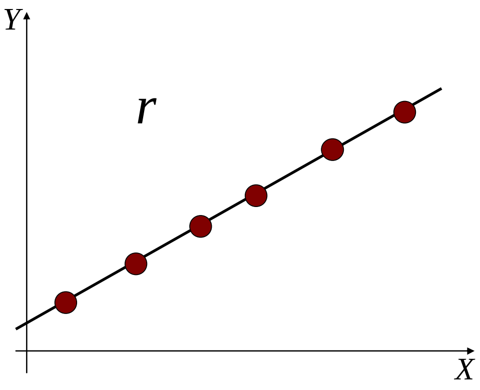
   если $b > 0$, то $r = +1$

3. Если $y_i = a = const$ для любых x_i, то $r = 0$.

Свойства выборочного коэффициента корреляции аналогичны свойствам «истинного» коэффициента.

1. $-1 \le r \le +1$;

2. Если $y_i = a + bx_i$ (строгая линейная зависимость), то $|r| = 1$.

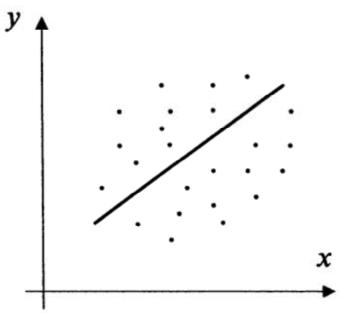


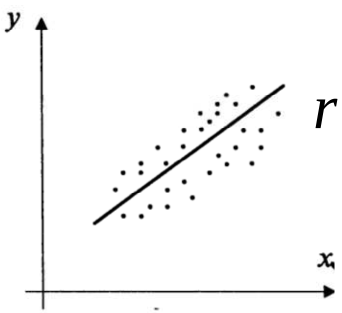
Если $b < 0$, то $r = -1$;

если $b > 0$, то $r = +1$

3. Если $y_i = a = const$ для любых x_i, то $r = 0$.

4. Чем ближе выборочные точки к прямой линии, тем больше $|r|$.

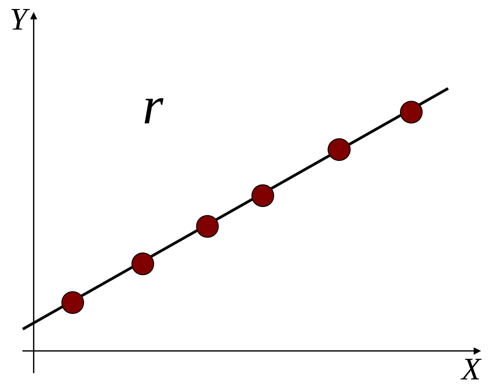




r ближе к 1

Свойства выборочного коэффициента корреляции аналогичны свойствам «истинного» коэффициента.

1. $-1 \le r \le +1$;



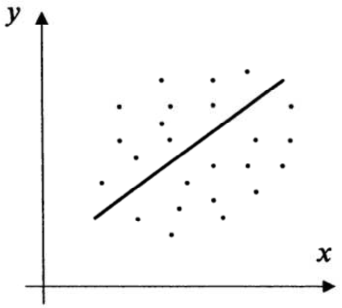
2. Если $y_i = a + bx_i$ (строгая линейная зависимость), то $|r| = 1$.

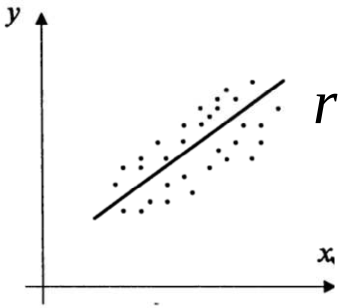
Если $b < 0$, то $r = -1$;

если $b > 0$, то $r = +1$

3. Если $y_i = a = const$ для любых x_i, то $r = 0$.

4. Чем ближе выборочные точки к прямой линии, тем больше $|r|$.





r ближе к 1

То есть r_{xy} - количественная оценка тесноты линейной связи между X и Y.

5. Пусть (X, Y) подчиняется нормальному распределению. Тогда при достаточно больших n $(n > 200)$ распределение r_{XY} также приблизительно нормально.

5. Пусть (X, Y) подчиняется нормальному распределению. Тогда при достаточно больших n $(n > 200)$ распределение r_{XY} также приблизительно нормально.

Замечание. Рассмотрим z-преобразование Фишера:

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

5. Пусть (X, Y) подчиняется нормальному распределению. Тогда при достаточно больших n $(n > 200)$ распределение r_{XY} также приблизительно нормально.

Замечание. Рассмотрим z-преобразование Фишера:

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

(обратное преобразование $r = \operatorname{th} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$).

5. Пусть (X, Y) подчиняется нормальному распределению. Тогда при достаточно больших n $(n > 200)$ распределение r_{XY} также приблизительно нормально.

Замечание. Рассмотрим z-преобразование Фишера:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

(обратное преобразование $r = \operatorname{th} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$).

Распределение величины z при $n > 10$ хорошо описывается нормальным распределением с математическим ожиданием $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\rho}{1-\rho} + \dfrac{\rho}{2(n-1)}$ и дисперсией $\dfrac{1}{n-3}$.

5. Пусть (X, Y) подчиняется нормальному распределению. Тогда при достаточно больших n ($n > 200$) распределение r_{XY} также приблизительно нормально.

Замечание. Рассмотрим z-преобразование Фишера:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$$

(обратное преобразование $r = \operatorname{th} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$).

Распределение величины z при $n > 10$ хорошо описывается нормальным распределением с математическим ожиданием $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\rho}{1-\rho} + \dfrac{\rho}{2(n-1)}$ и дисперсией $\dfrac{1}{n-3}$.

Существуют таблицы z-преобразования, позволяющие находить доверительные интервалы для ρ.

Проверка гипотез о корреляции

Рассматривается гипотеза о незначимости коэффициента линейной корреляции $H_0 = "\rho = 0"$.

Проверка гипотез о корреляции

Рассматривается гипотеза о незначимости коэффициента линейной корреляции $H_0 = "\rho = 0"$.

Свойство. Распределение статистики

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

при нормально распределенных X, Y и достаточно больших n описывается распределением Стьюдента t_{n-2}.

Проверка гипотез о корреляции

Рассматривается гипотеза о незначимости коэффициента линейной корреляции $H_0 = "\rho = 0"$.

Свойство. Распределение статистики

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

при нормально распределенных X, Y и достаточно больших n описывается распределением Стьюдента t_{n-2}.

Таким образом, H_0 отвергается на уровне значимости α, если $|T_{набл}| > \mathrm{t}_{cr}(\alpha, n-2)$.

Проверка гипотез о корреляции

Рассматривается гипотеза о незначимости коэффициента линейной корреляции $H_0 = "\rho = 0"$.

Свойство. Распределение статистики

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

при нормально распределенных X, Y и достаточно больших n описывается распределением Стьюдента t_{n-2}.

Таким образом, H_0 отвергается на уровне значимости α, если $|T_{набл}| > \mathrm{t}_{cr}(\alpha, n-2)$.

Замечание. При малых n более надежные результаты дает z-преобразование Фишера: $t = z\sqrt{n-3} \sim N(0,1)$.

Проверка гипотез о корреляции

Рассматривается гипотеза о незначимости коэффициента линейной корреляции $H_0 = "\rho = 0"$.

Свойство. Распределение статистики

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$$

при нормально распределенных X, Y и достаточно больших n описывается распределением Стьюдента t_{n-2}.

Таким образом, H_0 отвергается на уровне значимости α, если $|T_{набл}| > \mathrm{t}_{cr}(\alpha, n-2)$.

Замечание. При малых n более надежные результаты дает z-преобразование Фишера: $t = z\sqrt{n-3} \sim N(0,1)$. Т.е. если $|t_{набл}| > t_{cr} = \Phi_0^{-1}\left((1-\alpha)/2\right)$, то H_0 отвергается

(Φ_0 - функция Лапласа).

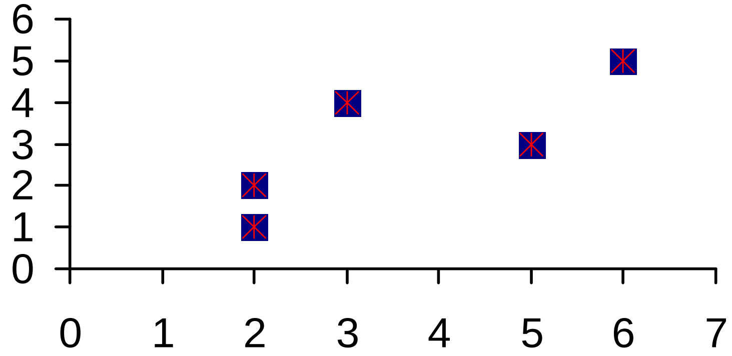
Пример. Найти оценку коэффициента корреляции по выборке. Проверить значимость коэффициента ($\alpha = 0.05$).

x	2	3	5	2	6
y	1	4	3	2	5

Пример. Найти оценку коэффициента корреляции по выборке.

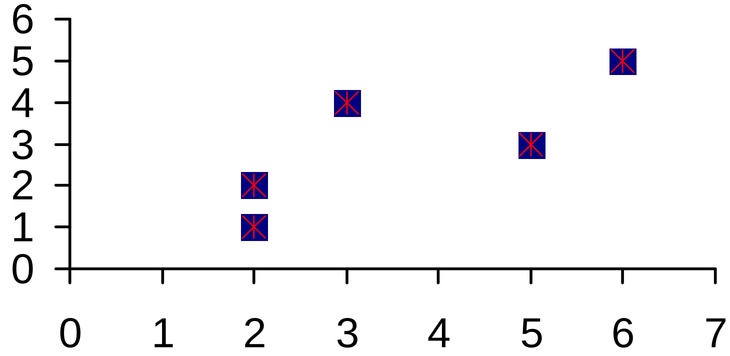
Проверить значимость коэффициента ($\alpha = 0.05$).

x	2	3	5	2	6
y	1	4	3	2	5



Пример. Найти оценку коэффициента корреляции по выборке. Проверить значимость коэффициента ($\alpha = 0.05$).

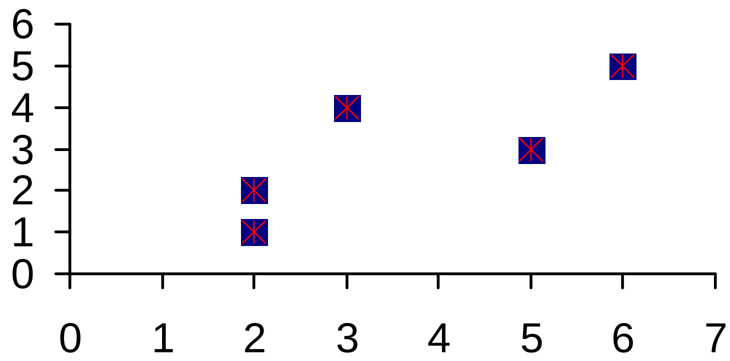
						Σ	сред
x	2	3	5	2	6	18	3.6
y	1	4	3	2	5	15	3
x^2	4	9	25	4	36	78	15.6
y^2	1	16	9	4	25	55	11
$x \cdot y$	2	12	15	4	30	63	12.6



Пример. Найти оценку коэффициента корреляции по выборке.

Проверить значимость коэффициента ($\alpha = 0.05$).

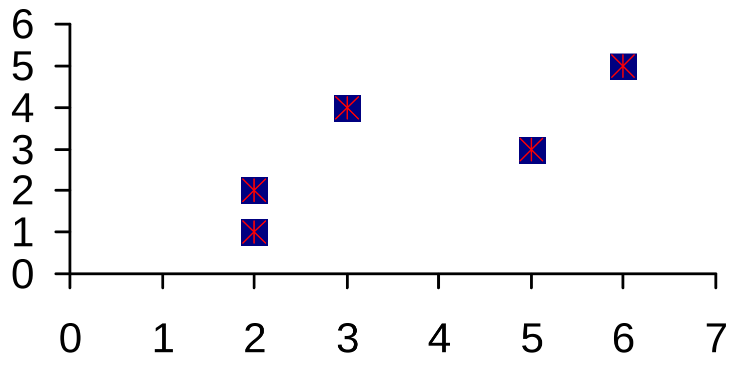
						Σ	сред
x	2	3	5	2	6	18	3.6
y	1	4	3	2	5	15	3
x^2	4	9	25	4	36	78	15.6
y^2	1	16	9	4	25	55	11
$x \cdot y$	2	12	15	4	30	63	12.6



$$s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 12.6 - 3.6 \cdot 3 = 1.8,$$

Пример. Найти оценку коэффициента корреляции по выборке. Проверить значимость коэффициента ($\alpha = 0.05$).

						Σ	сред
x	2	3	5	2	6	18	3.6
y	1	4	3	2	5	15	3
x^2	4	9	25	4	36	78	15.6
y^2	1	16	9	4	25	55	11
$x \cdot y$	2	12	15	4	30	63	12.6



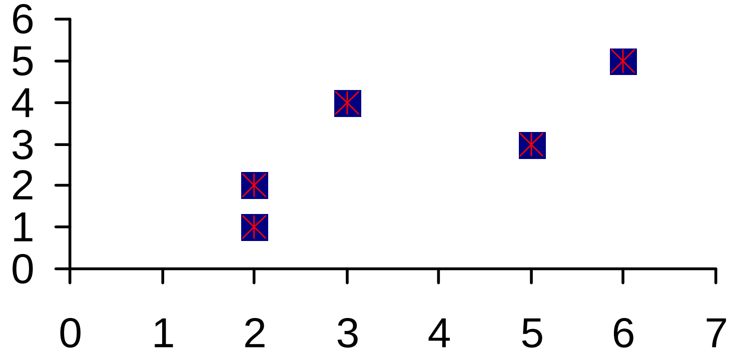
$$s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 12.6 - 3.6 \cdot 3 = 1.8,$$

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 15.6 - 3.6^2 = 2.64,$$

Пример. Найти оценку коэффициента корреляции по выборке.

Проверить значимость коэффициента ($\alpha = 0.05$).

						Σ	сред
x	2	3	5	2	6	18	3.6
y	1	4	3	2	5	15	3
x^2	4	9	25	4	36	78	15.6
y^2	1	16	9	4	25	55	11
$x \cdot y$	2	12	15	4	30	63	12.6



$$s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 12.6 - 3.6 \cdot 3 = 1.8,$$

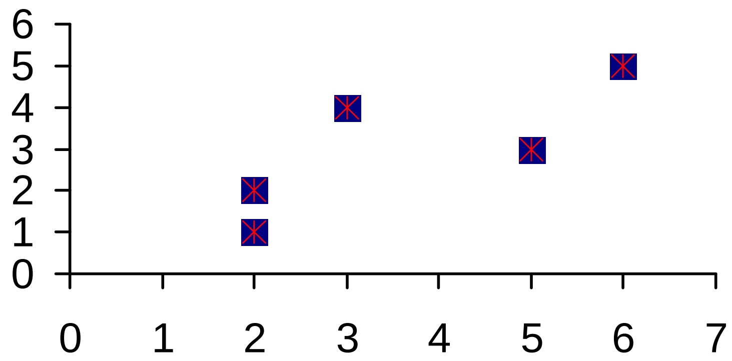
$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 15.6 - 3.6^2 = 2.64,$$

$$s_y^2 = \overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2 = 11 - 3^2 = 2,$$

Пример. Найти оценку коэффициента корреляции по выборке.

Проверить значимость коэффициента ($\alpha = 0.05$).

						Σ	сред
x	2	3	5	2	6	18	3.6
y	1	4	3	2	5	15	3
x^2	4	9	25	4	36	78	15.6
y^2	1	16	9	4	25	55	11
$x \cdot y$	2	12	15	4	30	63	12.6



$$s_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 12.6 - 3.6 \cdot 3 = 1.8,$$

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 15.6 - 3.6^2 = 2.64,$$

$$s_y^2 = \overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2 = 11 - 3^2 = 2,$$

$$r = \frac{1.8}{\sqrt{2.64}\sqrt{2}} \approx 0.783.$$

Проверка H_0 - рассмотрим два способа:

а) $$T_{набл} = \frac{0.783}{\sqrt{1-0.783^2}} \cdot \sqrt{3} \approx 2.18,$$

Проверка H_0 - рассмотрим два способа:

а) $$T_{набл} = \frac{0.783}{\sqrt{1-0.783^2}} \cdot \sqrt{3} \approx 2.18,$$

$$t_{cr}(0.05, 3) = 3.18,$$

Проверка H_0 - рассмотрим два способа:

а)
$$T_{набл} = \frac{0.783}{\sqrt{1-0.783^2}} \cdot \sqrt{3} \approx 2.18,$$

$$t_{cr}(0.05, 3) = 3.18,$$

$T_{набл} < t_{cr} \Rightarrow$ корреляция незначима.

Проверка H_0 - рассмотрим два способа:

а)
$$T_{набл} = \frac{0.783}{\sqrt{1-0.783^2}} \cdot \sqrt{3} \approx 2.18,$$

$$t_{cr}(0.05, 3) = 3.18,$$

$T_{набл} < t_{cr} \;\; \Rightarrow$ корреляция незначима.

б) с помощью z-преобразования:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0.783}{1-0.783} = 1.05,$$

Проверка H_0 - рассмотрим два способа:

а)
$$T_{набл} = \frac{0.783}{\sqrt{1-0.783^2}} \cdot \sqrt{3} \approx 2.18,$$

$$t_{cr}(0.05, 3) = 3.18,$$

$T_{набл} < t_{cr} \;\; \Rightarrow$ корреляция незначима.

б) с помощью z-преобразования:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0.783}{1-0.783} = 1.05,$$

$$t = 1.05 \cdot \sqrt{2} = 1.48,$$

Проверка H_0 - рассмотрим два способа:

а)
$$T_{набл} = \frac{0.783}{\sqrt{1-0.783^2}} \cdot \sqrt{3} \approx 2.18,$$

$$t_{cr}(0.05, 3) = 3.18,$$

$T_{набл} < t_{cr} \Rightarrow$ корреляция незначима.

б) с помощью z-преобразования:

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0.783}{1-0.783} = 1.05,$$

$$t = 1.05 \cdot \sqrt{2} = 1.48,$$

$$t_{cr} = 1.96,$$

$t_{набл} < t_{cr} \Rightarrow$ корреляция незначима.