Лекция L3
Типизированное λ–исчисление, II

Вадим Пузаренко

17 октября 2021 г.

Построение типов

Напомним основные определения предыдущей лекции.

Построение типов

Напомним основные определения предыдущей лекции.

Определение

Определим понятие **типа** индукцией по построению.

Построение типов

Напомним основные определения предыдущей лекции.

Определение

Определим понятие **типа** индукцией по построению.

1. Каждый простейший тип является типом.

Построение типов

Напомним основные определения предыдущей лекции.

Определение

Определим понятие **типа** индукцией по построению.

1. Каждый простейший тип является типом.
2. Если π и τ — типы, то $(\pi \to \tau)$ также является типом.

Построение типов

Напомним основные определения предыдущей лекции.

Определение

Определим понятие **типа** индукцией по построению.

1. Каждый простейший тип является типом.
2. Если π и τ — типы, то $(\pi \to \tau)$ также является типом.
3. Других типов нет.

Построение типов

Напомним основные определения предыдущей лекции.

Определение

Определим понятие **типа** индукцией по построению.

1. Каждый простейший тип является типом.
2. Если π и τ — типы, то $(\pi \to \tau)$ также является типом.
3. Других типов нет.

Предполагается, что типы, имеющие различные записи, различны. Другими словами, нетривиальной пары синонимов нет.

Типизация λ–термов

Определение

Любое отображение γ, сопоставляющее каждой переменной некоторый тип, называется **типизацией** переменных. При этом будем говорить, что переменная x имеет тип $\gamma(x)$.
Упорядоченную пару, состоящую из переменной и её типа, будем называть **типизированной переменной** (будем записывать как $x : \tau$ или x^{τ}).

Типизация λ–термов

Определение

Любое отображение γ, сопоставляющее каждой переменной некоторый тип, называется **типизацией** переменных. При этом будем говорить, что переменная x имеет тип $\gamma(x)$.
Упорядоченную пару, состоящую из переменной и её типа, будем называть **типизированной переменной** (будем записывать как $x : \tau$ или x^τ).

Если каждой переменной приписан некоторый тип, то мы также можем приписать типы и некоторым λ–термам.

Типизация λ–термов

Определение

Любое отображение γ, сопоставляющее каждой переменной некоторый тип, называется **типизацией** переменных. При этом будем говорить, что переменная x имеет тип $\gamma(x)$.
Упорядоченную пару, состоящую из переменной и её типа, будем называть **типизированной переменной** (будем записывать как $x : \tau$ или x^τ).

Если каждой переменной приписан некоторый тип, то мы также можем приписать типы и некоторым λ–термам.

Замечание.

Всегда будем считать, что типизация γ переменных обязательно удовлетворяет следующему условию: каждый тип приписывается бесконечному количеству переменных.

Типизация λ–термов

Полагаем, что сигнатура σ также типизирована, т.е. каждой константе **c** заранее приписывается тип $t(\mathbf{c})$. Далее, пусть задана типизация γ переменных.

Типизация λ–термов

Полагаем, что сигнатура σ также типизирована, т.е. каждой константе **c** заранее приписывается тип $t(\mathbf{c})$. Далее, пусть задана типизация γ переменных.

Определение

Индукцией по построению λ–термов зададим **приписывание типа** следующим образом:

Типизация λ–термов

Полагаем, что сигнатура σ также типизирована, т.е. каждой константе **c** заранее приписывается тип $t(\mathbf{c})$. Далее, пусть задана типизация γ переменных.

Определение

Индукцией по построению λ–термов зададим **приписывание типа** следующим образом:

1. всякая переменная x получает тип $\tau = \gamma(x)$;

Типизация λ–термов

Полагаем, что сигнатура σ также типизирована, т.е. каждой константе **c** заранее приписывается тип $t(\mathbf{c})$. Далее, пусть задана типизация γ переменных.

Определение

Индукцией по построению λ–термов зададим **приписывание типа** следующим образом:

1. всякая переменная x получает тип $\tau = \gamma(x)$;
2. всякая константа **c** получает некоторый тип $t(\mathbf{c})$, независимо от типизации γ;

Типизация λ–термов

Полагаем, что сигнатура σ также типизирована, т.е. каждой константе **c** заранее приписывается тип $t(\mathbf{c})$. Далее, пусть задана типизация γ переменных.

Определение

Индукцией по построению λ–термов зададим **приписывание типа** следующим образом:

1. всякая переменная x получает тип $\tau = \gamma(x)$;
2. всякая константа **c** получает некоторый тип $t(\mathbf{c})$, независимо от типизации γ;
3. если M и N — λ–термы, уже получившие типы $(\pi \to \tau)$ и π, то λ–терм (MN) получает тип τ;

Типизация λ–термов

Полагаем, что сигнатура σ также типизирована, т.е. каждой константе **c** заранее приписывается тип $t(\mathbf{c})$. Далее, пусть задана типизация γ переменных.

Определение

Индукцией по построению λ–термов зададим **приписывание типа** следующим образом:

1. всякая переменная x получает тип $\tau = \gamma(x)$;
2. всякая константа **c** получает некоторый тип $t(\mathbf{c})$, независимо от типизации γ;
3. если M и N — λ–термы, уже получившие типы $(\pi \to \tau)$ и π, то λ–терм (MN) получает тип τ;
4. если M — λ–терм, уже получивший тип π, а переменная x — тип τ, то λ–терм $\lambda x.M$ получает тип $\tau \to \pi$;

Типизация λ–термов

Полагаем, что сигнатура σ также типизирована, т.е. каждой константе **c** заранее приписывается тип $t(\mathbf{c})$. Далее, пусть задана типизация γ переменных.

Определение

Индукцией по построению λ–термов зададим **приписывание типа** следующим образом:

1. всякая переменная x получает тип $\tau = \gamma(x)$;
2. всякая константа **c** получает некоторый тип $t(\mathbf{c})$, независимо от типизации γ;
3. если M и N — λ–термы, уже получившие типы $(\pi \to \tau)$ и π, то λ–терм (MN) получает тип τ;
4. если M — λ–терм, уже получивший тип π, а переменная x — тип τ, то λ–терм $\lambda x.M$ получает тип $\tau \to \pi$;
5. всякий λ–терм получает тип только согласно пп. 1–4.

Типизация λ–термов

Определение

Упорядоченную пару, состоящую из λ–терма и его типа, будем называть **типизированным λ–термом**. Для типизированных λ–термов используется та же запись, что и для переменных: $A : \tau$ обозначает λ–терм A типа τ.

Типизация λ–термов

Определение

Упорядоченную пару, состоящую из λ–терма и его типа, будем называть **типизированным λ–термом**. Для типизированных λ–термов используется та же запись, что и для переменных: $A : \tau$ обозначает λ–терм A типа τ.

Определение

Пусть задана типизация γ переменных. λ–Терм t назовем **типизируемым при типизации переменных** γ, если в результате этой типизации он получает некоторый тип. λ–Терм назовем **типизируемым**, если его переменным можно приписать типы так, что сам этот λ–терм получит некоторый тип.

Типизация λ–термов

Исчисление приписывания типов

Зафиксируем типизацию Γ переменных.

$\Gamma \vdash \mathbf{c} : t(\mathbf{c})$	— аксиома
$\Gamma \vdash x : \gamma(x)$	— аксиома
$\dfrac{\Gamma \vdash M : (\pi \to \tau);\ \Gamma \vdash N : \pi}{\Gamma \vdash (MN) : \tau}$ (I)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \pi;\ \Gamma \vdash x : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : (\tau \to \pi)}$ (II)

Нормализация

Обозначение

Пусть M_1 и M_2 — λ–термы. Будем обозначать $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_2$, если существует λ–терм с дырой T такой, что $M_1 = T[R_1]$, $M_2 = T[R_2]$, где λ–термы R_1 и R_2 таковы, что $R_1 \to R_2$ является β–конверсией.

Нормализация

Обозначение

Пусть M_1 и M_2 — λ–термы. Будем обозначать $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_2$, если существует λ–терм с дырой T такой, что $M_1 = T[R_1]$, $M_2 = T[R_2]$, где λ–термы R_1 и R_2 таковы, что $R_1 \to R_2$ является β–конверсией.

Замечание

Заметим, что $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_2$ влечёт $M_1 \Rightarrow M_2$.

Нормализация

Обозначение

Пусть M_1 и M_2 — λ–термы. Будем обозначать $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_2$, если существует λ–терм с дырой T такой, что $M_1 = T[R_1]$, $M_2 = T[R_2]$, где λ–термы R_1 и R_2 таковы, что $R_1 \to R_2$ является β–конверсией.

Замечание

Заметим, что $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_2$ влечёт $M_1 \Rightarrow M_2$.

Обозначение

Пусть M_1 и M_2 — λ–термы, а $n \geqslant 1$ — натуральное число. Будем обозначать $M_1 \Rightarrow^n_\beta M_2$, если существует последовательность λ–термов $M_1 = N_0, N_1, \ldots, N_n = M_2$, для которой выполняется условие $N_i \Rightarrow^1_\beta N_{i+1}$ для всех i, $0 \leqslant i < n$.

Нормализация

Определение

Пусть $n \in \omega + 1$ и M — λ–терм. Определим **β–ранг $\mathbf{rk}_\beta(M)$** λ–терма M следующим образом. Будем считать, что $\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$, если

Нормализация

Определение

Пусть $n \in \omega + 1$ и M — λ–терм. Определим **β–ранг $\mathrm{rk}_\beta(M)$** λ–терма M следующим образом. Будем считать, что $\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$, если

$n = 0$. M — любой λ–терм;

Нормализация

Определение

Пусть $n \in \omega + 1$ и M — λ–терм. Определим **β–ранг $\mathrm{rk}_\beta(M)$** λ–терма M следующим образом. Будем считать, что $\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$, если

$n = 0.$ M — любой λ–терм;

$0 < n < \omega.$ существует λ–терм M', для которого выполняется условие $M \Rightarrow^n_\beta M'$;

Нормализация

Определение

Пусть $n \in \omega + 1$ и M — λ–терм. Определим **β–ранг $\mathrm{rk}_\beta(M)$** λ–терма M следующим образом. Будем считать, что $\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$, если

$n = 0$. M — любой λ–терм;

$0 < n < \omega$. существует λ–терм M', для которого выполняется условие $M \Rightarrow_\beta^n M'$;

$n = \omega$. существует последовательность $\{M_n | n \in \omega\}$ λ–термов, для которой выполняется условие $M_i \Rightarrow_\beta^1 M_{i+1}$ для всех $i \in \omega$.

При необходимости выше используется преобразование α–конверсии.

Нормализация

Определение

Пусть $n \in \omega + 1$ и M — λ–терм. Определим **β–ранг $\mathrm{rk}_\beta(M)$** λ–терма M следующим образом. Будем считать, что $\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$, если

- $n = 0$. M — любой λ–терм;
- $0 < n < \omega$. существует λ–терм M', для которого выполняется условие $M \Rightarrow_\beta^n M'$;
- $n = \omega$. существует последовательность $\{M_n | n \in \omega\}$ λ–термов, для которой выполняется условие $M_i \Rightarrow_\beta^1 M_{i+1}$ для всех $i \in \omega$.

При необходимости выше используется преобразование α–конверсии. Для $n < \omega$ определим

$$\mathrm{rk}_\beta(M) = n \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} [(\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n) \& (\mathrm{rk}_\beta(M) \not\geqslant n+1)].$$

Нормализация

Определение

Пусть $n \in \omega + 1$ и M — λ–терм. Определим **β–ранг $\mathrm{rk}_\beta(M)$** λ–терма M следующим образом. Будем считать, что $\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$, если

- $n = 0$. M — любой λ–терм;
- $0 < n < \omega$. существует λ–терм M', для которого выполняется условие $M \Rightarrow_\beta^n M'$;
- $n = \omega$. существует последовательность $\{M_n | n \in \omega\}$ λ–термов, для которой выполняется условие $M_i \Rightarrow_\beta^1 M_{i+1}$ для всех $i \in \omega$.

При необходимости выше используется преобразование α–конверсии. Для $n < \omega$ определим

$$\mathrm{rk}_\beta(M) = n \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} [(\mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n)\&(\mathrm{rk}_\beta(M) \not\geqslant n+1)].$$

Замечание

λ-Терм M нормальный $\Leftrightarrow \mathrm{rk}_\beta(M) = 0$.

Нормализация

Предложение L3

$\mathrm{rk}_\beta(M) = \omega \Leftrightarrow \mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$ для всех $n \in \omega$.

Нормализация

Предложение L3

$\mathrm{rk}_\beta(M) = \omega \Leftrightarrow \mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$ для всех $n \in \omega$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Непосредственно следует из определения.

Нормализация

Предложение L3

$\mathrm{rk}_\beta(M) = \omega \Leftrightarrow \mathrm{rk}_\beta(M) \geqslant n$ для всех $n \in \omega$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Непосредственно следует из определения.
$(\Leftarrow)$ Воспользуемся здесь фактически леммой Кёнига. Построим по шагам последовательность λ–термов из определения. Положим $M_0 = M$. Предположим, что $M_0, M_1, \ldots, M_k$ уже найдены (при этом они удовлетворяют условиям $\mathrm{rk}_\beta(M_i) \geqslant n$ для всех $n \in \omega$ и $0 \leqslant i \leqslant k$, а также $M_i \Rightarrow^1_\beta M_{i+1}$, $0 \leqslant i < k$). Зададим теперь M_{k+1}: так как каждый λ–терм имеет лишь конечное число подтермов, множество $\{N | M_k \Rightarrow^1_\beta N\}$ конечно (содержит, скажем, m элементов $N_1, N_2, \ldots, N_m$). Если бы каждый λ–терм из этого списка имел конечный β–ранг ($\mathrm{rk}_\beta(N_j) = n_j$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m$), то и M_k имел бы конечный β–ранг ($\mathrm{rk}_\beta(M_k) = \max\{n_j | 1 \leqslant j \leqslant m\} + 1$).

Нормализация

Доказательство (продолжение)

Следовательно, существует λ–терм N такой, что $M_k \Rightarrow^1_\beta N$ и $\mathrm{rk}_\beta(N) \geqslant n$ для всех $n \in \omega$. Положим $M_{k+1} = N$. $\square$

Нормализация

Доказательство (продолжение)

Следовательно, существует λ–терм N такой, что $M_k \Rightarrow^1_\beta N$ и $\mathrm{rk}_\beta(N) \geqslant n$ для всех $n \in \omega$. Положим $M_{k+1} = N$. $\square$

Определение

Будем говорить, что λ–терм **сильно нормализуем**, если $\mathrm{rk}_\beta(M) < \omega$.

Нормализация

Доказательство (продолжение)

Следовательно, существует λ–терм N такой, что $M_k \Rightarrow^1_\beta N$ и $\mathrm{rk}_\beta(N) \geqslant n$ для всех $n \in \omega$. Положим $M_{k+1} = N$. □

Определение

Будем говорить, что λ–терм **сильно нормализуем**, если $\mathrm{rk}_\beta(M) < \omega$.

Замечание

Из предложения L3 вытекает, что λ–терм M сильно нормализуем, если и только если существует $n_0 \in \omega$ такое, что $\mathrm{rk}_\beta(M) = n_0$.

Нормализация

Предложение L4

Любой сильно нормализуемый λ–терм нормализуем.

Нормализация

Предложение L4

Любой сильно нормализуемый λ–терм нормализуем.

Доказательство.

Пусть M — сильно нормализуемый λ–терм. Докажем методом от противного, что он нормализуем. Для этого, в предположении, что λ–терм M не нормализуем, построим соответствующую бесконечную последовательность. Положим $M_0 = M$. Предположим, что λ–термы $M_0, M_1, \ldots, M_k$ таковы, что $M_i \Rightarrow^1_\beta M_{i+1}$ для всех $0 \leqslant i < k$. В частности, $M_0 \Rightarrow M_k$ и M_k также не нормализуем (иначе M был бы нормализуем). Следовательно, существует λ–терм N такой, что $M_k \Rightarrow^1_\beta N$; положим $M_{k+1} = N$. $\square$

Нормализация

Замечание

Поскольку для сильно нормализуемого λ–терма M отсутствуют бесконечные цепочки β–конверсий, любая максимальная по включению цепь завершается на (единственном для M!) нормальном λ–терме.

Нормализация

Замечание

Поскольку для сильно нормализуемого λ–терма M отсутствуют бесконечные цепочки β–конверсий, любая максимальная по включению цепь завершается на (единственном для M!) нормальном λ–терме.

Теорема L6

Любой типизируемый λ–терм сильно нормализуем.

Нормализация

Замечание

Поскольку для сильно нормализуемого λ–терма M отсутствуют бесконечные цепочки β–конверсий, любая максимальная по включению цепь завершается на (единственном для M!) нормальном λ–терме.

Теорема L6

Любой типизируемый λ–терм сильно нормализуем.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{N}$ — множество всех сильно нормализуемых λ–термов. Отметим некоторые свойства данного множества. Пусть $k \in \omega$, x — переменная и M, M_1, $\ldots$, M_n — λ–термы.

Нормализация

Доказательство (продолжение)

1. Если M — нормальный λ–терм, то $M \in \mathcal{N}$; в частности, $x \in \mathcal{N}$ для каждой переменной x;
2. $M \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \lambda x.M \in \mathcal{N}$ (вытекает из того, что каждая β–конверсия в $\lambda x.M$ применяется к подтерму λ–терма M);
3. если $M \in \mathcal{N}$ и $M \Rightarrow_\beta^k M'$, то $M' \in \mathcal{N}$ (действительно, если бы $\mathrm{rk}_\beta(M') = \omega$, то и $\mathrm{rk}_\beta(M) = \omega$);
4. $M \in \mathcal{N} \Leftrightarrow [M' \in \mathcal{N}$ для каждого λ–терма M' с условием $M \Rightarrow_\beta^1 M']$ (($\Rightarrow$) следует из предыдущего пункта; ($\Leftarrow$) фактически повторяет доказательство предложения L3);
5. если $M_1, M_2, \ldots, M_n \in \mathcal{N}$, то $((\ldots((xM_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{N}$ (вытекает из того, что β–конверсия должна применяться к M_i для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$).

Нормализация

Пример

Обращение утверждения пункта (3) не выполняется (для этого достаточно рассмотреть λ–терм $(\lambda x.z(\Omega\Omega))$).

Нормализация

Пример

Обращение утверждения пункта (3) не выполняется (для этого достаточно рассмотреть λ–терм $(\lambda x.z(\Omega\Omega))$).

Лемма L6A

$Q \in \mathcal{N}$ и $((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$ влекут $((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{N}$.

Нормализация

Пример

Обращение утверждения пункта (3) не выполняется (для этого достаточно рассмотреть λ–терм $(\lambda x.z(\Omega\Omega))$).

Лемма L6A

$Q \in \mathcal{N}$ и $((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$ влекут $((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{N}$.

Доказательство леммы L6A.

Индукцией по сумме β–рангов λ–термов, стоящих в посылке. Применим β–конверсию к подтерму R λ–терма $M \equiv ((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n)$.

Нормализация

Доказательство леммы L6A (продолжение)

1. $R \equiv (\lambda x.PQ)$. Тогда $M' \equiv ((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$.

Нормализация

Доказательство леммы L6A (продолжение)

1. $R \equiv (\lambda x.PQ)$. Тогда $M' \equiv ((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$.
2. R — подтерм M_i (к примеру, M_1). Тогда $M' \equiv ((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1')M_2)\ldots)M_n)$, где $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_1'$. Имеем

$$((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \Rightarrow^1_\beta ((\ldots(([P]^x_Q M_1')M_2)\ldots M_n),$$

а по свойству (3) для $\mathcal{N}$, $((\ldots(([P]^x_Q M_1')M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$. По индукционному предположению, $M' \in \mathcal{N}$.

Нормализация

Доказательство леммы L6A (продолжение)

1. $R \equiv (\lambda x.PQ)$. Тогда $M' \equiv ((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$.
2. R — подтерм M_i (к примеру, M_1). Тогда $M' \equiv ((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1')M_2)\ldots)M_n)$, где $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_1'$. Имеем

$$((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \Rightarrow^1_\beta ((\ldots(([P]^x_Q M_1')M_2)\ldots M_n),$$

   а по свойству (3) для $\mathcal{N}$, $((\ldots(([P]^x_Q M_1')M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$. По индукционному предположению, $M' \in \mathcal{N}$.
3. R — подтерм Q. Тогда $M' \equiv ((\ldots(((\lambda x.PQ')M_1)M_2)\ldots)M_n)$, где $Q \Rightarrow^1_\beta Q'$. По свойству (3) для $\mathcal{N}$, $Q' \in \mathcal{N}$. Далее, $[P]^x_Q \Rightarrow [P]^x_{Q'}$. Следовательно, $((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \Rightarrow ((\ldots(([P]^x_{Q'} M_1)M_2)\ldots M_n)$. Снова по индукционному предположению, $M' \in \mathcal{N}$.

Нормализация

Доказательство леммы L6A (продолжение)

1. $R \equiv (\lambda x.PQ)$. Тогда $M' \equiv ((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$.
2. R — подтерм M_i (к примеру, M_1). Тогда $M' \equiv ((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1')M_2)\ldots)M_n)$, где $M_1 \Rightarrow^1_\beta M_1'$. Имеем
$$((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \Rightarrow^1_\beta ((\ldots(([P]^x_Q M_1')M_2)\ldots M_n),$$
а по свойству (3) для $\mathcal{N}$, $((\ldots(([P]^x_Q M_1')M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{N}$. По индукционному предположению, $M' \in \mathcal{N}$.
3. R — подтерм Q. Тогда $M' \equiv ((\ldots(((\lambda x.PQ')M_1)M_2)\ldots)M_n)$, где $Q \Rightarrow^1_\beta Q'$. По свойству (3) для $\mathcal{N}$, $Q' \in \mathcal{N}$. Далее, $[P]^x_Q \Rightarrow [P]^x_{Q'}$. Следовательно, $((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \Rightarrow ((\ldots(([P]^x_{Q'} M_1)M_2)\ldots M_n)$. Снова по индукционному предположению, $M' \in \mathcal{N}$.
4. R — подтерм P. Рассматривается аналогично п. 2. □

Нормализация

Определение

Для подмножеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ λ–термов определим

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} = \{M \in \Lambda | (MN) \in \mathcal{B} \text{ для всех } N \in \mathcal{A}\}.$$

Нормализация

Определение

Для подмножеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq \Lambda$ λ–термов определим

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} = \{M \in \Lambda | (MN) \in \mathcal{B} \text{ для всех } N \in \mathcal{A}\}.$$

Определение

Непустое множество $\mathcal{B} \subseteq \Lambda$ назовем $\mathcal{N}$**–насыщенным**, если выполняется следующее:

$$Q \in \mathcal{N},\ ((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{B} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ ((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{B}.$$

Нормализация

Определение

Для подмножеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$ $\lambda-$термов определим

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B} = \{M \in \Lambda | (MN) \in \mathcal{B} \text{ для всех } N \in \mathcal{A}\}.$$

Определение

Непустое множество $\mathcal{B} \subseteq \Lambda$ назовем $\mathcal{N}$**–насыщенным**, если выполняется следующее:

$$Q \in \mathcal{N},\ ((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots M_n) \in \mathcal{B} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ ((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{B}.$$

По лемме L6A, само множество $\mathcal{N}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным.

Нормализация

Лемма L6B

Если $\mathcal{B}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным множеством и $\mathcal{A} \neq \varnothing$, то $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ также $\mathcal{N}$–насыщенно.

Нормализация

Лемма L6B

Если $\mathcal{B}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным множеством и $\mathcal{A} \neq \varnothing$, то $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ также $\mathcal{N}$–насыщенно.

Доказательство.

Пусть $Q \in \mathcal{N}$ и $((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{A} \to \mathcal{B}$; тогда имеем $(((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots)M_n)N) \in \mathcal{B}$ для всех $N \in \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{B}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным, получаем $(((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n)N) \in \mathcal{B}$ для всех $N \in \mathcal{A}$, а следовательно, $((\ldots(((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. $\square$

Нормализация

Лемма L6B

Если $\mathcal{B}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным множеством и $\mathcal{A} \neq \varnothing$, то $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ также $\mathcal{N}$–насыщенно.

Доказательство.

Пусть $Q \in \mathcal{N}$ и $((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{A} \to \mathcal{B}$; тогда имеем $(((\ldots(([P]^x_Q M_1)M_2)\ldots)M_n)N) \in \mathcal{B}$ для всех $N \in \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{B}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным, получаем $(((\ldots((((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n)N) \in \mathcal{B}$ для всех $N \in \mathcal{A}$, а следовательно, $((\ldots((((\lambda x.PQ)M_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. $\square$

Конструкция

Для каждого типа σ определим множество $\mathcal{N}_\sigma \subseteq \Lambda$ следующим образом:

- $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}$ для простейшего типа α;
- $\mathcal{N}_{\sigma\to\tau} = \mathcal{N}_\sigma \to \mathcal{N}_\tau$.

Нормализация

По лемме L6B, для каждого типа σ множество $\mathcal{N}_\sigma$ будет $\mathcal{N}$–насыщенным.

Нормализация

По лемме L6B, для каждого типа σ множество $\mathcal{N}_\sigma$ будет $\mathcal{N}$–насыщенным.

Лемма L6C

Пусть σ — тип. Тогда выполняются следующие условия:

1. для любых переменной x и λ–термов $M_1, M_2, \ldots, M_n \in \mathcal{N}$ имеем $((((xM_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{N}_\sigma$. В частности, $x \in \mathcal{N}_\sigma$;
2. $\mathcal{N}_\sigma \subseteq \mathcal{N}$.

Нормализация

По лемме L6B, для каждого типа σ множество $\mathcal{N}_\sigma$ будет $\mathcal{N}$–насыщенным.

Лемма L6C

Пусть σ — тип. Тогда выполняются следующие условия:

1. для любых переменной x и λ–термов $M_1, M_2, \ldots, M_n \in \mathcal{N}$ имеем $((((xM_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{N}_\sigma$. В частности, $x \in \mathcal{N}_\sigma$;
2. $\mathcal{N}_\sigma \subseteq \mathcal{N}$.

Доказательство леммы L6C.

Пп. (1) и (2) будем доказывать одновременно индукцией по построению типа σ. Пусть сначала $\sigma \equiv \alpha$ — простейший тип. Тогда по определению $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}$ и, по свойству 5, имеем $((\ldots((xM_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{N} = \mathcal{N}_\alpha$ для любых M_1, M_2, ..., $M_n \in \mathcal{N}$ и переменной x.

Нормализация

Доказательство леммы L6C (продолжение).

Предположим, что утверждения выполняются для σ и τ, и докажем их справедливость для $(\sigma \to \tau)$. Выберем любые M_1, M_2, ..., $M_n \in \mathcal{N}$. Пусть $N \in \mathcal{N}_\sigma$; по п. (2) для σ имеем $N \in \mathcal{N}$ и, по п. (1) для τ, заключаем $(((\ldots((xM_1)M_2)\ldots)M_n)N) \in \mathcal{N}_\tau$. Следовательно, $((\ldots((xM_1)M_2)\ldots)M_n) \in \mathcal{N}_\sigma \to \mathcal{N}_\tau = \mathcal{N}_{\sigma\to\tau}$. Далее, если $M \in \mathcal{N}_{\sigma\to\tau}$, то $(MN) \in \mathcal{N}_\tau \subseteq \mathcal{N}$ для всех $N \in \mathcal{N}_\sigma$. Однако, сильная нормализуемость (MN) влечёт сильную нормализуемость M. $\square$

Лемма L6D (об адекватности).

Если λ–терму M может быть приписан тип τ, то $M \in \mathcal{N}_\tau$. Более того, какова бы ни была типизация $\{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_k : \sigma_k\} \vdash M : \tau$, будет выполняться соотношение $[M]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\,M_2\ldots M_k} \in \mathcal{N}_\tau$, как только $M_1 \in \mathcal{N}_{\sigma_1}$, $M_2 \in \mathcal{N}_{\sigma_2}$, ..., $M_k \in \mathcal{N}_{\sigma_k}$.

Нормализация

Доказательство леммы L6D.

Будем проводить индукцией по построению λ–терма M.
Воспользуемся сокращением $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_k : \sigma_k\}$.

Доказательство леммы L6D.

Будем проводить индукцией по построению λ–терма M. Воспользуемся сокращением $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_k : \sigma_k\}$.

1. $M \equiv x_i$. Тогда $\tau \equiv \sigma_i$ и $[M]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \equiv M_i \in \mathcal{N}_{\sigma_i} = \mathcal{N}_\tau$.

Нормализация

Доказательство леммы L6D.

Будем проводить индукцией по построению λ–терма M. Воспользуемся сокращением $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_k : \sigma_k\}$.

1. $M \equiv x_i$. Тогда $\tau \equiv \sigma_i$ и $[M]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \equiv M_i \in \mathcal{N}_{\sigma_i} = \mathcal{N}_\tau$.
2. $M \equiv (PQ)$. Тогда имеем $\Gamma \vdash P : (\sigma \to \tau)$ и $\Gamma \vdash Q : \sigma$ для подходящего типа σ. По предположению индукции, $[P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \in \mathcal{N}_{\sigma\to\tau}$ и $[Q]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \in \mathcal{N}_\sigma$, а по определению, $[M]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \equiv ([P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k}[Q]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k}) \in \mathcal{N}_\tau$.

Нормализация

Доказательство леммы L6D.

Будем проводить индукцией по построению λ–терма M. Воспользуемся сокращением $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_k : \sigma_k\}$.

1. $M \equiv x_i$. Тогда $\tau \equiv \sigma_i$ и $[M]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \equiv M_i \in \mathcal{N}_{\sigma_i} = \mathcal{N}_\tau$.
2. $M \equiv (PQ)$. Тогда имеем $\Gamma \vdash P : (\sigma \to \tau)$ и $\Gamma \vdash Q : \sigma$ для подходящего типа σ. По предположению индукции, $[P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \in \mathcal{N}_{\sigma\to\tau}$ и $[Q]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \in \mathcal{N}_\sigma$, а по определению, $[M]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k} \equiv ([P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k}[Q]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k}) \in \mathcal{N}_\tau$.
3. $M \equiv \lambda x.P$. Можно считать, что x не входит свободно в M_1, M_2, …, M_k и отличается от x_1, x_2, …, x_k. Тогда должно выполняться $\tau = (\tau_1 \to \tau_2)$ и $\Gamma, x : \tau_1 \vdash P : \tau_2$. По предположению индукции, для каждого λ–терма $N \in \mathcal{N}_{\tau_1}$ справедливо соотношение $[P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k\ x}_{M_1\ M_2 \ldots M_k\ N} \in \mathcal{N}_{\tau_2}$. Так как x не входит свободно в M_i для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$, имеем $[P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k\ x}_{M_1\ M_2 \ldots M_k\ N} \equiv [[P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\ M_2 \ldots M_k}]^x_N$.

Нормализация

Доказательство леммы L6D (продолжение)

Так как $N \in \mathcal{N}_{\tau_1}$ и $\mathcal{N}_{\tau_2}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным множеством, заключаем, что $(\lambda x.[[P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\, M_2 \ldots M_k}]N) \in \mathcal{N}_{\tau_2}$. И, наконец, так как $N \in \mathcal{N}_{\tau_1}$, имеем $\lambda x.[[P]^{x_1\ x_2\ \ldots x_k}_{M_1\, M_2 \ldots M_k}] \in \mathcal{N}_{\tau_1} \to \mathcal{N}_{\tau_2} = \mathcal{N}_{\tau_1 \to \tau_2} = \mathcal{N}_{\tau}$. $\square$

Нормализация

Доказательство леммы L6D (продолжение)

Так как $N \in \mathcal{N}_{\tau_1}$ и $\mathcal{N}_{\tau_2}$ является $\mathcal{N}$–насыщенным множеством, заключаем, что $(\lambda x.[[P]^{x_1\ x_2\ \dots x_k}_{M_1\, M_2 \dots M_k}]N) \in \mathcal{N}_{\tau_2}$. И, наконец, так как $N \in \mathcal{N}_{\tau_1}$, имеем $\lambda x.[[P]^{x_1\ x_2\ \dots x_k}_{M_1\, M_2 \dots M_k}] \in \mathcal{N}_{\tau_1} \to \mathcal{N}_{\tau_2} = \mathcal{N}_{\tau_1 \to \tau_2} = \mathcal{N}_{\tau}$. □

Доказательство теоремы L6 (окончание)

Пусть M — λ–терм, которому можно приписать тип τ; тогда по лемме об адекватности, $M \in \mathcal{N}_\tau$, а по лемме L6C(2), $\mathcal{N}_\tau \subseteq \mathcal{N}$. Таким образом, $M \in \mathcal{N}$, т.е. M сильно нормализуем. □

Спасибо за внимание.