Лекция L5
Денотационная семантика

Вадим Пузаренко

20 октября 2021 г.

Мотивация

Нашей целью является построение математической модели, соответствующей синтаксическому λ–исчислению. При этом каждый λ–терм должен получить в модели свою интерпретацию. Также проверяются свойства корректности (а именно, равные λ–термы должны получить одно и то же значение) и полноты (а именно, λ–термы, принимающие одно и то же значение во всех моделях, равны).

Предварительные обозначения и понятия

- Σ — множество всех типов, построенных из атомарных типов α_1, α_2, ..., α_n, ...
- Будем рассматривать типизированные λ–термы, полагая, что переменные а приори типизированы.
- Если A, B — множества, то $(A \to B)$ — множество всех функций, действующих из A в B.

Модель множеств

Для каждого атомарного типа σ фиксируем множество D_σ. Для более высоких типов определяем $D_{(\sigma\to\tau)}$ как множество функций из D_σ в D_τ:

$$D_{(\sigma\to\tau)} = D_\sigma \to D_\tau$$

Модель множеств

Для каждого атомарного типа σ фиксируем множество D_σ. Для более высоких типов определяем $D_{(\sigma\to\tau)}$ как множество функций из D_σ в D_τ:

$$D_{(\sigma\to\tau)} = D_\sigma \to D_\tau$$

Замечание.

Согласно преобразованию Карри, имеем

$$D_{(\tau_1\to(\tau_2\to\sigma))} = D_{\tau_1} \to (D_{\tau_2} \to D_\sigma) \cong ((D_{\tau_1} \times D_{\tau_2}) \to D_\sigma)$$

В более общей форме,

$$D_{(\tau_1\to(\tau_2\to(\ldots(\tau_n\to\sigma)\ldots)))} \cong (D_{\tau_1} \times D_{\tau_2} \times \ldots \times D_{\tau_n}) \to D_\sigma$$

Модель множеств

Означиванием переменных называется отображение ϱ, сопоставляющее переменной x^σ типа σ элемент $\varrho(x) \in D_\sigma$.

Модель множеств

Означиванием переменных называется отображение ϱ, сопоставляющее переменной x^σ типа σ элемент $\varrho(x) \in D_\sigma$.

Пусть ϱ — означивание переменных. Положим (здесь $a \in D_\tau$)

$$\varrho[y^\tau \mapsto a](x^\sigma) = \begin{cases} \varrho(x^\sigma), & \text{если } x^\sigma \not\equiv y^\tau; \\ a, & \text{если } x^\sigma \equiv y^\tau. \end{cases}$$

Модель множеств

Определение

Определим **интерпретацию** $[\![M]\!]_\varrho$ λ-терма M индукцией по построению, для любого означивания переменных ϱ.

1. $[\![x^\sigma]\!]_\varrho = \varrho(x) \in D_\sigma$;
2. если λ-термы M, N получили типы $(\sigma \to \tau)$, σ соответственно, а также заданы $[\![M]\!]_\varrho \in D_{(\sigma\to\tau)}$, $[\![N]\!]_\varrho \in D_\sigma$, то $[\![(MN)]\!]_\varrho = [\![M]\!]_\varrho([\![N]\!]_\varrho) \in D_\tau$;
3. если λ-терм M получает тип σ, а также уже задано $[\![M]\!]_\varrho \in D_\sigma$, то $[\![\lambda x^\tau.M]\!]_\varrho = ((a(\in D_\tau) \mapsto [\![M]\!]_{\varrho[x^\tau\mapsto a]}) : D_\tau \to D_\sigma) \in D_{(\tau\to\sigma)}$.

Модель множеств

Определение

Определим **интерпретацию** $[\![M]\!]_\varrho$ λ-терма M индукцией по построению, для любого означивания переменных ϱ.

1. $[\![x^\sigma]\!]_\varrho = \varrho(x) \in D_\sigma$;
2. если λ-термы M, N получили типы $(\sigma \to \tau)$, σ соответственно, а также заданы $[\![M]\!]_\varrho \in D_{(\sigma\to\tau)}$, $[\![N]\!]_\varrho \in D_\sigma$, то $[\![(MN)]\!]_\varrho = [\![M]\!]_\varrho([\![N]\!]_\varrho) \in D_\tau$;
3. если λ-терм M получает тип σ, а также уже задано $[\![M]\!]_\varrho \in D_\sigma$, то $[\![\lambda x^\tau.M]\!]_\varrho = ((a(\in D_\tau) \mapsto [\![M]\!]_{\varrho[x^\tau\mapsto a]}) : D_\tau \to D_\sigma) \in D_{(\tau\to\sigma)}$.

Замечание

Значение $[\![M]\!]_\varrho$ зависит только от значений переменных, входящих свободно в M. А именно, $[\![M]\!]_\varrho = [\![M]\!]_{\varrho'}$, как только $\varrho(x^\sigma) = \varrho'(x^\sigma)$ для любой переменной x, входящей свободно в M.

Модель множеств

Замечание

В частности, если M — замкнутый λ- терм (т.е. без свободных переменных), то $[\![M]\!]_\varrho$ не зависит от ϱ (и в этом случае можно записывать как $[\![M]\!]$).

Модель множеств

Замечание

В частности, если M — замкнутый λ- терм (т.е. без свободных переменных), то $[\![M]\!]_\varrho$ не зависит от ϱ (и в этом случае можно записывать как $[\![M]\!]$).

Примеры.

1. $[\![\lambda x^\sigma.x]\!] = id_{D_\sigma} : D_\sigma \to D_\sigma$.
2. $[\![\lambda x^\sigma.y^\tau]\!]_\varrho = (a \mapsto \varrho(y^\tau)) : D_\sigma \to D_\tau$ — постоянная функция, принимающая значение $\varrho(y^\tau)$ в случае, когда $y^\tau \not\equiv x^\sigma$.
3. Вычислим значение $\mathbf{n} \equiv \lambda y^{(\sigma\to\sigma)}.\lambda x^\sigma.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))$:

$$[\![\lambda y^{(\sigma\to\sigma)}.\lambda x^\sigma.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))]\!] = (f \mapsto$$

$$[\![\lambda x^\sigma.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))]\!]_{y\mapsto f}) : (D_\sigma \to D_\sigma) \to (D_\sigma \to D_\sigma),$$

Модель множеств

Примеры.

$$[\![\lambda x^{\sigma}.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))]\!]_{y\mapsto f} = (a \mapsto [\![(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))]\!]_{y\mapsto f,x\mapsto a}) :$$

$D_{\sigma} \to D_{\sigma}$,

$$[\![(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))]\!]_{y\mapsto f,x\mapsto a} =$$

$$\underbrace{[\![y]\!]_{y\mapsto f,x\mapsto a}([\![y]\!]_{y\mapsto f,x\mapsto a}(\ldots([\![y]\!]_{y\mapsto f,x\mapsto a}}_{n}([\![x]\!]_{y\mapsto f,x\mapsto a}))\ldots))) =$$

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n}(a)))) = (\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n})(a) = f^{n}(a)$$

$$[\![\lambda x^{\sigma}.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))]\!]_{y\mapsto f} = (a \mapsto f^{n}(a)) : D_{\sigma} \to D_{\sigma}(= f^{n}),$$

$$[\![\lambda y^{(\sigma\to\sigma)}.\lambda x^{\sigma}.(\underbrace{y(y\ldots(y}_{n}\,x)))]\!] = (f \mapsto f^{n}) : (D_{\sigma} \to D_{\sigma}) \to$$

$(D_{\sigma} \to D_{\sigma})$.

Модель множеств

Упражнение.

1. Вычислить $[\![\lambda x^{\sigma}.\lambda y^{\tau}.y]\!]$
2. Вычислить $[\![\lambda x^{\sigma}.\lambda y^{\tau}.x]\!]$
3. Вычислить $[\![\lambda x^{(\sigma\to\sigma)}.\lambda y^{((\sigma\to\sigma)\to\sigma)}.(x(yx))]\!]$.

Структура представлений

Сопоставим

1. каждому типу σ множество A_σ;
2. каждой паре типов σ, τ отображение $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : (A_{(\sigma\to\tau)} \to (A_\sigma \to A_\tau))$;

в этом случае система $\mathcal{A} = (A_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ называется **структурой представлений**. Она называется **экстенсиональной**, если отображение $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}$ инъективно, для всех σ, $\tau \in \Sigma$.

Структура представлений

Сопоставим

1. каждому типу σ множество A_σ;
2. каждой паре типов σ, τ отображение $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : (A_{(\sigma\to\tau)} \to (A_\sigma \to A_\tau))$;

в этом случае система $\mathcal{A} = (A_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ называется **структурой представлений**. Она называется **экстенсиональной**, если отображение $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}$ инъективно, для всех σ, $\tau \in \Sigma$.

Экстенсиональность означает, что два различных элемента f, $g \in A_{(\sigma\to\tau)}$ кодируют посредством $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}$ две различные функции $A_\sigma \to A_\tau$.

Структура представлений

Сопоставим

1. каждому типу σ множество A_σ;
2. каждой паре типов σ, τ отображение $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : (A_{(\sigma\to\tau)} \to (A_\sigma \to A_\tau));$

в этом случае система $\mathcal{A} = (A_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ называется **структурой представлений**. Она называется **экстенсиональной**, если отображение $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}$ инъективно, для всех σ, $\tau \in \Sigma$.

Экстенсиональность означает, что два различных элемента f, $g \in A_{(\sigma\to\tau)}$ кодируют посредством $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}$ две различные функции $A_\sigma \to A_\tau$.

Одним из примеров структуры представлений может служить модель множеств. В этом случае отображения $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}$ будут тождественны и, в частности, структура экстенсиональна.

Структура представлений

Замечание.

Довольно часто используется модель, в которой $A_{(\sigma\to\tau)}$ является подмножеством множества $A_\sigma \to A_\tau$ всех функций, действующих из A_σ в A_τ. В этом случае $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : A_{(\sigma\to\tau)} \to (A_\sigma \to A_\tau)$ будет канонической инъекцией и, следовательно, система является экстенсиональной структурой представлений.

Модель термов I

Для произвольного λ–терма M типа σ обозначим через $\langle M \rangle$ класс β–эквивалентности типизированных λ–термов M', содержащий M. По доказанному, все представители данного класса также будут иметь тип σ. Обозначим

$$T_\sigma = \{\langle M \rangle | M \text{ — } \lambda\text{–терм типа } \sigma\}$$

Далее, $M : (\sigma \to \tau) = M' : (\sigma \to \tau)$, $N : \sigma = N' : \sigma$ влечёт $(MN) : \tau = (M'N') : \tau$, поэтому можно сопоставить каждому $\langle M \rangle \in T_{(\sigma \to \tau)}$ отображение

$$\langle N \rangle \mapsto \langle (MN) \rangle : T_\sigma \to T_\tau$$

(это отображение и определяет $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} \langle M \rangle$). Тем самым, $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : T_{(\sigma \to \tau)} \to (T_\sigma \to T_\tau)$. Так определённая структура $(T_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})$ будет называться β–**моделью термов**.

Модель термов I

Данная структура представлений не экстенсиональна. Возьмём $Q_1 \equiv y^{(\sigma\to\tau)}$, $Q_2 \equiv \lambda x^\sigma.(y^{(\sigma\to\tau)}x^\sigma)$. Тогда для любого $\langle P\rangle \in T_\sigma$ имеем:

$\mathrm{app}_{\sigma,\tau}(\langle Q_1\rangle)(\langle P\rangle) = \mathrm{app}_{\sigma,\tau}(\langle y^{(\sigma\to\tau)}\rangle)(\langle P\rangle) = \langle (y^{(\sigma\to\tau)}P)\rangle$

$\mathrm{app}_{\sigma,\tau}(\langle Q_2\rangle)(\langle P\rangle) = \langle (Q_2 P)\rangle = \langle (\lambda x^\sigma.(y^{(\sigma\to\tau)}x^\sigma)P)\rangle = \langle (y^{(\sigma\to\tau)}P)\rangle$

η–редукция

$\boxed{\lambda x.(Px) \Rightarrow_\eta P}$, где x не входит свободно в P.

η–редукция

$\boxed{\lambda x.(Px) \Rightarrow_\eta P}$, где x не входит свободно в P.

Пример

Пусть $\mathrm{E} \equiv \lambda x.\lambda y.(xy)$; тогда $\mathrm{E} \Rightarrow_\eta \lambda x.x \equiv \mathrm{I}$, если $x \not\equiv y$. λ–Термы E и I находятся в нормальной форме, поэтому $\mathrm{E} \neq \mathrm{I}$. Однако, $((Ex)y) = (xy)$ и действия λ–термов E и I совпадают на двойных λ–термах.

η–редукция

$\boxed{\lambda x.(Px) \Rightarrow_\eta P}$, где x не входит свободно в P.

Пример

Пусть $\mathrm{E} \equiv \lambda x.\lambda y.(xy)$; тогда $\mathrm{E} \Rightarrow_\eta \lambda x.x \equiv \mathrm{I}$, если $x \not\equiv y$. λ–Термы E и I находятся в нормальной форме, поэтому $\mathrm{E} \neq \mathrm{I}$. Однако, $((Ex)y) = (xy)$ и действия λ–термов E и I совпадают на двойных λ–термах.

η–Нормальная форма

Будем говорить, что λ–терм t находится в **η–нормальной форме**, если к нему невозможно применить η–редукцию.

η–редукция

$\boxed{\lambda x.(Px) \Rightarrow_\eta P}$, где x не входит свободно в P.

Пример

Пусть $\mathrm{E} \equiv \lambda x.\lambda y.(xy)$; тогда $\mathrm{E} \Rightarrow_\eta \lambda x.x \equiv \mathrm{I}$, если $x \not\equiv y$. λ–Термы E и I находятся в нормальной форме, поэтому $\mathrm{E} \neq \mathrm{I}$. Однако, $((Ex)y) = (xy)$ и действия λ–термов E и I совпадают на двойных λ–термах.

η–Нормальная форма

Будем говорить, что λ–терм t находится в **η–нормальной форме**, если к нему невозможно применить η–редукцию.

Замечание.

Каждый λ–терм можно привести конечным числом применений η–редукций к η–нормальной форме (почему?)

$\beta\eta$–редукция

Конечное число применений β– и η–редукций будем называть $\beta\eta$–**редукцией**. Будем записывать $M \Rightarrow_{\beta\eta} N$, если существует последовательность $M = M_0, M_1, \ldots, M_k = N$ такая, что для каждого $0 \leqslant i < k$ выполняется $M_i \Rightarrow M_{i+1}$ или $M_i \Rightarrow_\eta M_{i+1}$.

$\beta\eta$–редукция

Конечное число применений β– и η–редукций будем называть $\beta\eta$–**редукцией**. Будем записывать $M \Rightarrow_{\beta\eta} N$, если существует последовательность $M = M_0, M_1, \ldots, M_k = N$ такая, что для каждого $0 \leqslant i < k$ выполняется $M_i \Rightarrow M_{i+1}$ или $M_i \Rightarrow_\eta M_{i+1}$.

Предложение L5

Отношение $\beta\eta$–редукции рефлексивно и транзитивно, а также замкнуто относительно контекста. Кроме того, оно замкнуто относительно подстановок термов, т.е.

$$M \Rightarrow_{\beta\eta} M',\ N \Rightarrow_{\beta\eta} N' \text{ влечет } [M]^x_N \Rightarrow_{\beta\eta} [M']^x_{N'}$$

$\beta\eta$–редукция

Конечное число применений β– и η–редукций будем называть $\beta\eta$**–редукцией**. Будем записывать $M \Rightarrow_{\beta\eta} N$, если существует последовательность $M = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_k = N$ такая, что для каждого $0 \leqslant i < k$ выполняется $M_i \Rightarrow M_{i+1}$ или $M_i \Rightarrow_\eta M_{i+1}$.

Предложение L5

Отношение $\beta\eta$–редукции рефлексивно и транзитивно, а также замкнуто относительно контекста. Кроме того, оно замкнуто относительно подстановок термов, т.е.

$$M \Rightarrow_{\beta\eta} M',\ N \Rightarrow_{\beta\eta} N' \text{ влечет } [M]^x_N \Rightarrow_{\beta\eta} [M']^x_{N'}$$

Теорема Черча–Россера L9

Отношение $\beta\eta$–редукции конфлюэнтно. А именно, каковы бы ни были λ–термы M, M_1 и M_2, для которых выполнено $M \Rightarrow_{\beta\eta} M_1$ и $M \Rightarrow_{\beta\eta} M_2$, найдётся λ–терм N такой, что $M_1 \Rightarrow_{\beta\eta} N$ и $M_2 \Rightarrow_{\beta\eta} N$.

$\beta\eta$–редукция

$\beta\eta$–Нормальная форма

Будем говорить, что λ–терм M находится в **$\beta\eta$–номальной форме**, если он одновременно находится и в η–нормальной, и в нормальной формах.

$\beta\eta$–редукция

$\beta\eta$–Нормальная форма

Будем говорить, что λ–терм M находится в **$\beta\eta$–номальной форме**, если он одновременно находится и в η–нормальной, и в нормальной формах.

Следствие L1

Если λ–терм M приводится к нормальной форме, то он приводится и к $\beta\eta$–нормальной форме. (Справедливо и обратное утверждение.)

$\beta\eta$–редукция

$\beta\eta$–Нормальная форма

Будем говорить, что λ–терм M находится в **$\beta\eta$–номальной форме**, если он одновременно находится и в η–нормальной, и в нормальной формах.

Следствие L1

Если λ–терм M приводится к нормальной форме, то он приводится и к $\beta\eta$–нормальной форме. (Справедливо и обратное утверждение.)

Следствие L2

Для всякого λ–терма $\beta\eta$–нормальная форма определяется однозначно, если она существует.

$\beta\eta$–Эквивалентность

Два λ–терма M и N будем называть $\beta\eta$–**эквивалентными** и обозначать как $M \simeq_{\beta\eta} N$, если найдётся λ–терм P такой, что $M \Rightarrow_{\beta\eta} P$ и $N \Rightarrow_{\beta\eta} P$.

$\beta\eta$–Эквивалентность

Два λ–терма M и N будем называть $\beta\eta$–**эквивалентными** и обозначать как $M \simeq_{\beta\eta} N$, если найдётся λ–терм P такой, что $M \Rightarrow_{\beta\eta} P$ и $N \Rightarrow_{\beta\eta} P$.

Предложение L6

Отношение $\beta\eta$–эквивалентности действительно является отношением эквивалентности и замкнуто относительно контекста. Кроме того, оно замкнуто относительно взятия подстановки.

$\beta\eta$–Эквивалентность

Два λ–терма M и N будем называть $\beta\eta$–**эквивалентными** и обозначать как $M \simeq_{\beta\eta} N$, если найдётся λ–терм P такой, что $M \Rightarrow_{\beta\eta} P$ и $N \Rightarrow_{\beta\eta} P$.

Предложение L6

Отношение $\beta\eta$–эквивалентности действительно является отношением эквивалентности и замкнуто относительно контекста. Кроме того, оно замкнуто относительно взятия подстановки.

Каждый класс $\beta\eta$–эквивалентности состоит из нескольких классов относительно отношения $=$, поскольку $M = N$ влечёт $M \simeq_{\beta\eta} N$.

$\beta\eta$–Эквивалентность

Предложение L7

1. Если x не входит свободно ни в M, ни в N, то $(Nx) \simeq_{\beta\eta} (Mx)$ влечёт $N \simeq_{\beta\eta} M$.
2. Если $(MP) \simeq_{\beta\eta} (NP)$ для всякого λ–терма P, не имеющего свободные вхождения свободных переменных λ-термов M и N, то $M \simeq_{\beta\eta} N$.

$\beta\eta$–Эквивалентность

Предложение L7

1. Если x не входит свободно ни в M, ни в N, то $(Nx) \simeq_{\beta\eta} (Mx)$ влечёт $N \simeq_{\beta\eta} M$.
2. Если $(MP) \simeq_{\beta\eta} (NP)$ для всякого λ–терма P, не имеющего свободные вхождения свободных переменных λ-термов M и N, то $M \simeq_{\beta\eta} N$.

Доказательство.

(1) Если $(Nx) \simeq_{\beta\eta} (Mx)$, то $\lambda x.(Nx) \simeq_{\beta\eta} \lambda x.(Mx)$. Так как x не входит свободно ни в M, ни в N, имеем $\lambda x.(Nx) \simeq_{\beta\eta} N$ и $\lambda x.(Mx) \simeq_{\beta\eta} M$; в силу транзитивности и симметричности, $M \simeq_{\beta\eta} N$.
(2) Если P — переменная, не входящая свободно в M и N, то данное утверждение получаем непосредственно из п. 1. $\square$

Модель термов II

Возьмём теперь в качестве $\langle M\rangle_{\beta\eta}$ класс относительно $\simeq_{\beta\eta}$, содержащий M. Обозначим через $\mathcal{S}_\sigma$ множество классов λ-термов типа σ. Определим теперь систему $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$, которую будем называть **моделью** $\beta\eta$-**термов**. Эта структура представлений будет уже экстенсиональной, что следует из предыдущего предложения.

Модель Хенкина

Пусть $(A_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ — экстенсиональная структура представлений. Зададим, как и для модели множеств, интерпретацию $[\![\cdot]\!]_\varrho$ типизированных λ–термов индукцией по построению, для любого фиксированного означивания ϱ переменных $(\varrho(x^\sigma) \in A_\sigma)$:

1. $[\![x^\sigma]\!]_\varrho = \varrho(x)$;
2. если P и Q — λ–термы типов $(\sigma \to \tau)$ и σ соответственно, а по предположению, уже заданы $[\![P]\!]_\varrho \in A_{(\sigma\to\tau)}$ и $[\![Q]\!]_\varrho \in A_\sigma$, то положим $[\![(PQ)]\!]_\varrho = (\mathrm{app}_{\sigma,\tau}[\![P]\!]_\varrho)([\![Q]\!]_\varrho) \in A_\tau$;
3. если Q — λ–терм типа τ, а по предположению, уже задано $[\![Q]\!]_\varrho \in A_\tau$, то положим $[\![\lambda x^\sigma.Q]\!]'_\varrho = (a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma\mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau)$.

Модель Хенкина

Пусть $(A_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ — экстенсиональная структура представлений. Зададим, как и для модели множеств, интерпретацию $[\![\cdot]\!]_\varrho$ типизированных λ–термов индукцией по построению, для любого фиксированного означивания ϱ переменных ($\varrho(x^\sigma) \in A_\sigma$):

1. $[\![x^\sigma]\!]_\varrho = \varrho(x)$;
2. если P и Q — λ–термы типов $(\sigma \to \tau)$ и σ соответственно, а по предположению, уже заданы $[\![P]\!]_\varrho \in A_{(\sigma\to\tau)}$ и $[\![Q]\!]_\varrho \in A_\sigma$, то положим $[\![(PQ)]\!]_\varrho = (\mathrm{app}_{\sigma,\tau}[\![P]\!]_\varrho)([\![Q]\!]_\varrho) \in A_\tau$;
3. если Q — λ–терм типа τ, а по предположению, уже задано $[\![Q]\!]_\varrho \in A_\tau$, то положим $[\![\lambda x^\sigma.Q]\!]'_\varrho = (a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma\mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau)$.
   Хотя мы и задали в качестве интерпретации λ–терма $\lambda x^\sigma.Q$ функцию $A_\sigma \to A_\tau$, мы должны определить элемент $A_{(\sigma\to\tau)}$. Тем самым, необходимо выполнение дополнительного требования:

Модель Хенкина

(H)	любая функция, определенная индукцией и имеющая вид $a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau$, попадает в образ отображения $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : A_{(\sigma\to\tau)} \to (A_\sigma \to A_\tau)$ $(\sigma, \tau \in \Sigma)$.

При выполнении условия (H) третье условие приобретает вид

3. $[\![\lambda x^\sigma.Q]\!]_\varrho = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau) = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}([\![\lambda x^\sigma.Q]\!]'_\varrho)$.

Модель Хенкина

(H)	любая функция, определенная индукцией и имеющая вид $a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau$, попадает в образ отображения $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : A_{(\sigma\to\tau)} \to (A_\sigma \to A_\tau)$ $(\sigma, \tau \in \Sigma)$.

При выполнении условия (H) третье условие приобретает вид

3. $[\![\lambda x^\sigma.Q]\!]_\varrho = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma\mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau) = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}([\![\lambda x^\sigma.Q]\!]'_\varrho)$.

Экстенсиональную структуру представлений, удовлетворяющую условию (H), назовём **моделью Хенкина**.

Модель Хенкина

(H)	любая функция, определенная индукцией и имеющая вид $a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau$, попадает в образ отображения $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : A_{(\sigma\to\tau)} \to (A_\sigma \to A_\tau)$ $(\sigma, \tau \in \Sigma)$.

При выполнении условия (H) третье условие приобретает вид

3. $[\![\lambda x^\sigma.Q]\!]_\varrho = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto a]} : A_\sigma \to A_\tau) = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}([\![\lambda x^\sigma.Q]\!]'_\varrho)$.

Экстенсиональную структуру представлений, удовлетворяющую условию (H), назовём **моделью Хенкина**.

Примеры.

Нетрудно понять, что модель множеств является моделью Хенкина. Наша цель — показать, что $\beta\eta$–модель термов также является моделью Хенкина.

Модель Хенкина и $\beta\eta$–модель термов

Рассмотрим $\beta\eta$–модель термов $\mathcal{S} = (S_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$. Определим означивание ϱ переменных каждой переменной x^σ, присваивающее класс $\beta\eta$–эквивалентности подходящего терма M типа σ: сначала каждой переменной x^σ сопоставим λ–терм $r(x^\sigma)$ типа σ и положим $\varrho(x^\sigma) = \langle r(x^\sigma)\rangle_{\beta\eta}$. Определим теперь интерпретацию λ–терма M при означивании ϱ. Обозначим через

$$M[r] = [M]^{x_1^{\sigma_1}\ x_2^{\sigma_2}\ \ldots x_n^{\sigma_n}}_{r(x_1^{\sigma_1})\,r(x_2^{\sigma_2})\cdots r(x_n^{\sigma_n})}$$

результат одновременной подстановки λ–терма M, свободными переменными которого являются $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, …, $x_n^{\sigma_n}$.

Модель Хенкина и $\beta\eta$–модель термов

Рассмотрим $\beta\eta$–модель термов $\mathcal{S} = (S_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$. Определим означивание ϱ переменных каждой переменной x^σ, присваивающее класс $\beta\eta$–эквивалентности подходящего терма M типа σ: сначала каждой переменной x^σ сопоставим λ–терм $r(x^\sigma)$ типа σ и положим $\varrho(x^\sigma) = \langle r(x^\sigma)\rangle_{\beta\eta}$. Определим теперь интерпретацию λ–терма M при означивании ϱ. Обозначим через

$$M[r] = [M]^{x_1^{\sigma_1}\ x_2^{\sigma_2}\ \ldots x_n^{\sigma_n}}_{r(x_1^{\sigma_1})\, r(x_2^{\sigma_2}) \cdots r(x_n^{\sigma_n})}$$

результат одновременной подстановки λ–терма M, свободными переменными которого являются $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, $\ldots$, $x_n^{\sigma_n}$.

Предложение L8

$\beta\eta$–Модель термов является моделью Хенкина такая, что $[\![M]\!]_\varrho = \langle M[r]\rangle_{\beta\eta}$ для любого λ–терма M.

Модель Хенкина и $\beta\eta$–модель термов

Доказательство.

Доказывать будем индукцией по построению λ–термов.

1. $M \equiv x^\sigma$: $[\![x^\sigma]\!]_\varrho = \varrho(x^\sigma) = \langle r(x^\sigma)\rangle_{\beta\eta} = \langle [x^\sigma]^{x^\sigma}_{r(x^\sigma)}\rangle_{\beta\eta}$.
2. $M \equiv (PQ)$: пусть P и Q — λ–термы типов $(\sigma \to \tau)$ и σ соответственно; тогда
$[\![(PQ)]\!]_\varrho = \mathrm{app}_{\sigma,\tau}[\![P]\!]_\varrho([\![Q]\!]_\varrho) \overset{(1)}{=} \mathrm{app}_{\sigma,\tau}\langle P[r]\rangle_{\beta\eta}(\langle Q[r]\rangle_{\beta\eta}) = \langle (P[r]Q[r])\rangle_{\beta\eta} = \langle (PQ)[r]\rangle_{\beta\eta}$
3. $M \equiv \lambda x^\sigma.Q$: пусть Q — λ–терм типа τ; тогда для всех λ–термов N типа σ имеем
$[\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto N]} \overset{(1)}{=} \langle Q[r[x^\sigma \mapsto N]]\rangle_{\beta\eta} \overset{(2)}{=} \langle Q[r[x^\sigma \mapsto x^\sigma][x^\sigma \mapsto N]]\rangle_{\beta\eta} = \langle (\lambda x^\sigma.Q[r[x^\sigma \mapsto x^\sigma]]N)\rangle_{\beta\eta} = \langle (\lambda x^\sigma.Q[r]N)\rangle_{\beta\eta} = \langle (M[r]N)\rangle_{\beta\eta} = \mathrm{app}_{\sigma,\tau}(\langle M[r]\rangle)(\langle N\rangle)$.

Тем самым, функция $\langle N\rangle_{\beta\eta} \mapsto [\![Q]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto \langle N\rangle_{\beta\eta}]}$ лежит в образе $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}$ и $[\![\lambda x^\sigma.Q]\!]_\varrho = \langle M[r]\rangle_{\beta\eta}$.

(1) Справедливо по индукционному предположению.

Модель Хенкина и $\beta\eta$–модель термов

Доказательство (продолжение).

(2) Здесь используется то, что переменную x^{σ} можно переименовать так, чтобы она не встречалась ни в одном из λ–термов $r(x_i^{\sigma_i})$. $\square$

Модель Хенкина и $\beta\eta$–модель термов

Доказательство (продолжение).

(2) Здесь используется то, что переменную x^σ можно переименовать так, чтобы она не встречалась ни в одном из λ–термов $r(x_i^{\sigma_i})$. $\square$

Определение.

Модель Хенкина называется **корректной**, если выполняется следующее соотношение:
$M \simeq_{\beta\eta} N \Longrightarrow [[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$ для любого означивания переменных ϱ.]

$\lambda_{\beta\eta}$–исчисление

Аксиомы

(α) $\lambda x^\sigma.M = \lambda y^\sigma.[M]^x_y$, если $y \notin \mathrm{FV}(M)$.
(β) $(\lambda x^\sigma.MN) = [M]^x_N$, если N свободен для x в M.
(η) $\lambda x^\sigma.(Mx) = M$, если $x^\sigma \notin \mathrm{FV}(M)$.
(ϱ) $M = M$

$\lambda_{\beta\eta}$–исчисление

Аксиомы

(α) $\lambda x^\sigma.M = \lambda y^\sigma.[M]^x_y$, если $y \notin \mathrm{FV}(M)$.
(β) $(\lambda x^\sigma.MN) = [M]^x_N$, если N свободен для x в M.
(η) $\lambda x^\sigma.(Mx) = M$, если $x^\sigma \notin \mathrm{FV}(M)$.
(ϱ) $M = M$

Правила вывода

(σ)	$\dfrac{M = N}{N = M}$	(τ)	$\dfrac{M = N,\ N = P}{M = P}$
(μ)	$\dfrac{M = M'}{(MN) = (M'N)}$	(ν)	$\dfrac{N = N'}{(MN) = (MN')}$
(ξ)	$\dfrac{M = M'}{\lambda x^\sigma.M = \lambda x^\sigma.M'}$		

Корректность

Теорема о корректности (L10)

Все модели Хенкина в $\lambda_{\beta\eta}$–исчислении корректны.

Корректность

Теорема о корректности (L10)

Все модели Хенкина в $\lambda_{\beta\eta}$–исчислении корректны.

Доказательство.

Для того, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что все аксиомы и правила вывода выполняются во всех моделях. Ясно, что аксиома (ρ) и правила (σ), (τ) выполняются во всех моделях. Справедливость (μ), (ν) и (ξ) проверяется непосредственно из определения интерпретации λ–термов на моделях Хенкина.

(η) $[\![\lambda x^\sigma.(Mx)]\!]_\varrho = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![(Mx)]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto a]}) \stackrel{(1)}{=} \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto \mathrm{app}_{\sigma,\tau}([\![M]\!]_\varrho)([\![x]\!]_{x^\sigma \mapsto a})) = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(\mathrm{app}_{\sigma,\tau}([\![M]\!]_\varrho)) = [\![M]\!]_\varrho$.

(1) Здесь используется свойство $x^\sigma \notin \mathrm{FV}(M)$.

Корректность

Теорема о корректности (L10)

Все модели Хенкина в $\lambda_{\beta\eta}$–исчислении корректны.

Доказательство.

Для того, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что все аксиомы и правила вывода выполняются во всех моделях. Ясно, что аксиома (ρ) и правила (σ), (τ) выполняются во всех моделях. Справедливость (μ), (ν) и (ξ) проверяется непосредственно из определения интерпретации λ–термов на моделях Хенкина.

(η) $[\![\lambda x^\sigma.(Mx)]\!]_\varrho = \mathrm{app}_{\sigma,\tau}^{-1}(a \mapsto [\![(Mx)]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto a]}) \stackrel{(1)}{=} \mathrm{app}_{\sigma,\tau}^{-1}(a \mapsto \mathrm{app}_{\sigma,\tau}([\![M]\!]_\varrho)([\![x]\!]_{x^\sigma \mapsto a})) = \mathrm{app}_{\sigma,\tau}^{-1}(\mathrm{app}_{\sigma,\tau}([\![M]\!]_\varrho)) = [\![M]\!]_\varrho$.

(1) Здесь используется свойство $x^\sigma \notin \mathrm{FV}(M)$.

Лемма L10A.

Имеет место $[\![[M]_N^x]\!]_\varrho = [\![M]\!]_{\varrho[x^\sigma \mapsto [\![N]\!]_\varrho]}$, если N свободен для x в M.

Корректность

Упражнение

Доказать лемму.

Доказательство (продолжение).

(α) Пусть y не входит свободно в M; тогда

$[\![\lambda y.[M]^x_y]\!]_\varrho = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![[M]^x_y]\!]_{\varrho[y\mapsto a]}) \stackrel{(1)}{=} \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![M]\!]_{\varrho[y\mapsto a][x\mapsto a]}) \stackrel{(2)}{=} \mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![M]\!]_{\varrho[x\mapsto a]}) = [\![\lambda x^\sigma.M]\!]_\varrho$.

(β) $[\![(\lambda x^\sigma.MN)]\!]_\varrho = \mathrm{app}_{\sigma,\tau}([\![\lambda x^\sigma.M]\!]_\varrho)([\![N]\!]_\varrho) = \mathrm{app}_{\sigma,\tau}(\mathrm{app}^{-1}_{\sigma,\tau}(a \mapsto [\![M]\!]_{\varrho[x\mapsto a]}))([\![N]\!]_\varrho) = (a \mapsto [\![M]\!]_{\varrho[x\mapsto a]})([\![N]\!]_\varrho) = [\![M]\!]_{\varrho[x\mapsto [\![N]\!]_\varrho]} \stackrel{(1)}{=} [\![[M]^x_N]\!]_\varrho$.

(1) согласно лемме L10A; (2) выполняется, поскольку $y \notin \mathrm{FV}(M)$. $\square$

Полнота

Определение.

Модель Хенкина называется **полной**, если для произвольных λ–термов M и N выполняется следующее соотношение: $[[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$ для любого означивания переменных $\varrho] \Longrightarrow M \simeq_{\beta\eta} N$.

Полнота

Определение.

Модель Хенкина называется **полной**, если для произвольных λ–термов M и N выполняется следующее соотношение: $[[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$ для любого означивания переменных $\varrho] \Longrightarrow M \simeq_{\beta\eta} N$.

Возьмём модель множеств, в которой атомарный тип α в качестве интерпретации D_α имеет конечное множество. Тогда эта модель не полна, поскольку λ–термы

$$\mathbf{n} = \lambda y^{(\alpha\to\alpha)}.\lambda x^\alpha.(\underbrace{y(y(\ldots(y}_{n}\,x)\ldots))),\ n = 2, 3, \ldots$$

находятся в $\beta\eta$–нормальной форме и, к тому же, имеют один и тот же тип $((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))$. Множество $D_{((\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha))} = (D_\alpha \to D_\alpha) \to (D_\alpha \to D_\alpha)$ содержит лишь конечное число элементов. Итак, бесконечно много λ–термов вида $\mathbf{n}$ должны иметь одну и ту же интерпретацию.

Полнота

Теорема о полноте (L11)

1. Модель $\beta\eta$–термов полна.
2. Пусть в модели множеств каждый атомарный тип интерпретируется бесконечным множеством; тогда эта модель полна.

Полнота

Теорема о полноте (L11)

1. Модель $\beta\eta$–термов полна.
2. Пусть в модели множеств каждый атомарный тип интерпретируется бесконечным множеством; тогда эта модель полна.

Доказательство.

(1) Пусть M и N — λ–термы, для которых выполняется соотношение $[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$ для любого означивания переменных ϱ. Из предложения L8 вытекает, что $\langle M[r]\rangle_{\beta\eta} = \langle N[r]\rangle_{\beta\eta}$, как только $\varrho(x^\sigma) = \langle r(x^\sigma)\rangle_{\beta\eta}$ для каждой переменной x^σ, входящей свободно в M или N. Возьмём $r(x^\sigma) = x^\sigma$ для всех переменных, т. е. $\varrho(x^\sigma) = \langle x^\sigma\rangle_{\beta\eta}$. Тогда $M[r] = M$ и $N[r] = N$. Таким образом, $\langle M\rangle_{\beta\eta} = \langle N\rangle_{\beta\eta}$, т.е. $M \simeq_{\beta\eta} N$. □

Логические предикаты

Пусть $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ — модель Хенкина. В дальнейшем вместо $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}(f)$ будем использовать запись $\hat{f}$.

Логические предикаты

Пусть $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ — модель Хенкина. В дальнейшем вместо $\mathrm{app}_{\sigma,\tau}(f)$ будем использовать запись $\hat{f}$.

Определение (Плоткин 1980)

Логический предикат (ЛП) на $\mathcal{A}$ — это семейство $\mathcal{R} = \{R_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ подмножеств $R_\sigma \subseteq D_\sigma$, которое строится следующим образом:

1. для каждого атомарного типа σ множество R_α — произвольное фиксированное подмножество D_α;
2. $R_{(\sigma\to\tau)} = \{f \in D_{(\sigma\to\tau)} | \hat{f}(a) \in R_\tau$ для всех $a \in R_\sigma\}$; другими словами, $f \in R_{(\sigma\to\tau)} \iff \hat{f}(R_\sigma) \subseteq R_\tau$.

Логические предикаты

Примеры.

- Возьмём $R_\alpha = D_\alpha$, где α — атомарный тип; тогда $R_\sigma = D_\sigma$ для всех типов $\sigma \in \Sigma$.
- Возьмём $R_\alpha = \varnothing$, где α — атомарный тип; тогда
  1. $R_{(\alpha\to\sigma)} = D_{(\alpha\to\sigma)}$;
  2. $R_{((\alpha\to\sigma)\to\beta)} = \varnothing$;
  3. $R_{(\tau\to(\alpha\to\sigma))} = D_{(\tau\to(\alpha\to\sigma))}$;

  для произвольных типов σ, τ и атомарных типов α, β.

Логические предикаты

Примеры.

- Возьмём $R_\alpha = D_\alpha$, где α — атомарный тип; тогда $R_\sigma = D_\sigma$ для всех типов $\sigma \in \Sigma$.
- Возьмём $R_\alpha = \varnothing$, где α — атомарный тип; тогда
  1. $R_{(\alpha\to\sigma)} = D_{(\alpha\to\sigma)}$;
  2. $R_{((\alpha\to\sigma)\to\beta)} = \varnothing$;
  3. $R_{(\tau\to(\alpha\to\sigma))} = D_{(\tau\to(\alpha\to\sigma))}$;

  для произвольных типов σ, τ и атомарных типов α, β.

Основная теорема о ЛП (L12)

Если $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ — логический предикат на модели Хенкина, то $[\![M]\!] \in R_\sigma$ для любого замкнутого λ–терма M типа σ.

Логические предикаты

Доказательство.

Проводится индукцией по построению λ–терма. Для этих целей докажем вспомогательное утверждение, в котором одновременно учитываются λ–термы, в которых встречаются свободные переменные.

Логические предикаты

Доказательство.

Проводится индукцией по построению λ–терма. Для этих целей докажем вспомогательное утверждение, в котором одновременно учитываются λ–термы, в которых встречаются свободные переменные.

Предложение L9

Для любых λ–терма M типа σ и означивания переменных ϱ выполняется соотношение $[\![M]\!]_\varrho$, как только $\varrho(x^\tau) \in R_\tau$ для любой переменной x^τ, свободно входящей в M.

Логические предикаты

Доказательство.

Проводится индукцией по построению λ–терма. Для этих целей докажем вспомогательное утверждение, в котором одновременно учитываются λ–термы, в которых встречаются свободные переменные.

Предложение L9

Для любых λ–терма M типа σ и означивания переменных ϱ выполняется соотношение $[\![M]\!]_\varrho$, как только $\varrho(x^\tau) \in R_\tau$ для любой переменной x^τ, свободно входящей в M.

Доказательство предложения L9

$M \equiv x^\sigma$. Если $\varrho(x^\sigma) \in R_\sigma$, то и $[\![M]\!]_\varrho = \varrho(x^\sigma) \in R_\sigma$.

Логические предикаты

Доказательство предложения L9 (продолжение).

$M \equiv (N^{(\rho\to\sigma)}P^{\rho})$. Пусть имеет место $\varrho(x^{\tau}) \in R_{\tau}$ для любой переменной x^{τ}, входящей свободно в M. Тогда $[\![M]\!]_{\varrho} = \widehat{[\![N^{(\rho\to\sigma)}]\!]}_{\varrho}([\![P^{\rho}]\!]_{\varrho})$, а по предположению индукции, $[\![N^{(\rho\to\sigma)}]\!]_{\varrho} \in R_{(\rho\to\sigma)}$ и $[\![P^{\rho}]\!]_{\varrho} \in R_{\rho}$. Из определения $R_{(\rho\to\sigma)}$ следует, что $[\![M^{\sigma}]\!]_{\varrho} \in R_{\sigma}$.

$M \equiv \lambda x^{\sigma_1}N^{\sigma_2}$, где $\sigma = (\sigma_1 \to \sigma_2)$. Пусть имеет место $\varrho(y^{\tau}) \in R_{\tau}$ для любой переменной y^{τ}, свободно входящей в M. Рассмотрим $[\![M]\!]_{\varrho} = \mathrm{app}^{-1}_{\sigma_1,\sigma_2}(a \mapsto [\![N]\!]_{\varrho[x^{\sigma_1}\mapsto a]}) : D_{\sigma_1} \to D_{\sigma_2}$. Чтобы показать, что $[\![M]\!]_{\varrho} \in R_{(\sigma_1\to\sigma_2)}$, нам необходимо доказать, что $\widehat{[\![M]\!]_{\varrho}}(a) \in R_{\sigma_2}$ для всех $a \in R_{\sigma_1}$. Однако $\widehat{[\![M]\!]_{\varrho}}(a) = [\![N]\!]_{\varrho[x^{\sigma_1}\mapsto a]}$, а по индукционному предположению, имеем $[\![N]\!]_{\varrho[x^{\sigma_1}\mapsto a]} \in R_{\sigma_2}$, поскольку в означивании $\varrho[x^{\sigma} \mapsto a]$ всякая свободная переменная y^{τ} удовлетворяет условию $\varrho(y^{\tau}) \in R_{\tau}$ (переменные, отличные от x^{σ_1}, свободно входят в M, а $\varrho[x^{\sigma_1} \mapsto a](x^{\sigma_1}) = a \in R_{\sigma_1}$). Таким образом, $[\![M]\!]_{\varrho} \in R_{\sigma}$. $\square$

Логические предикаты

Замечание.

Предложение L9 можно проинтерпретировать так, что каждый логический предикат на модели Хенкина сам, в свою очередь, является моделью Хенкина.

Логические предикаты

Замечание.

Предложение L9 можно проинтерпретировать так, что каждый логический предикат на модели Хенкина сам, в свою очередь, является моделью Хенкина.

Следствие L3

Пусть α, β — атомарные типы.

1. Не существует замкнутого λ–терма типа α.
2. Не существует замкнутого λ–терма типа $((\alpha \to \sigma) \to \beta)$, где σ — произвольный тип.
3. С точностью до $\beta\eta$–эквивалентности существует ровно один замкнутый λ–терм типа $(\alpha \to \alpha)$, а именно, $\mathbf{I}_\alpha = \lambda x^\alpha . x$.

Логические предикаты

Доказательство.

(1), (2) Следует рассмотреть логический предикат $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, где $R_\alpha = \varnothing$ для любого атомарного типа α.

(3) Рассмотрим модель множеств, в которой все базовые множества бесконечны. Пусть M — замкнутый λ–терм и пусть $f = [\![M]\!] : D_\alpha \to D_\alpha$. Для каждого $a \in D_\alpha$ положим логический предикат $\mathcal{R}^a$ так, что $R^a_\alpha = \{a\}$. Тогда из определения следует, что $R^a_{(\alpha\to\alpha)} = \{g \in D_{(\alpha\to\alpha)} | g(a) = a\}$. По теореме L11, $[\![M]\!] \in R^a_{(\alpha\to\alpha)}$ и, следовательно, $f(a) = a$. Так как данное условие выполняется для всех $a \in D_\alpha$, имеем $[\![M]\!] = [\![\mathbf{I}_\alpha]\!]$, а из полноты модели множеств вытекает $M \simeq_{\beta\eta} \mathbf{I}_\alpha$. $\square$

λ–Определимость

Определение.

Пусть $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ — модель Хенкина. Элемент $f \in D_\alpha$ называется **λ–определимым**, если существует замкнутый λ–терм M типа α такой, что $[\![M]\!] = f$.

λ–Определимость

Определение.

Пусть $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ — модель Хенкина. Элемент $f \in D_\alpha$ называется **λ–определимым**, если существует замкнутый λ–терм M типа α такой, что $[\![M]\!] = f$.

Теперь возникает вопрос: можно ли охарактеризовать λ–определимые элементы D_σ, $\sigma \in \Sigma$, с помощью логических предикатов? В следствии L3 показано с помощью логических предикатов, что не существует таких элементов в D_α или $D_{((\alpha\to\sigma)\to\alpha)}$, а во множестве $D_{(\alpha\to\alpha)}$ имеется только один λ–определимый элемент f, при этом удовлетворяющий условию $\hat{f} = \mathrm{id}_{D_\alpha}$ (везде α — атомарный тип, а σ — произвольный тип). Для того, чтобы получить дополнительную информацию, необходимо расширить понятие логического предиката.

Логические отношения

Определение.

Пусть заданы n моделей Хенкина $\mathcal{A}^{(i)} = (D^{(i)}_\sigma, \mathrm{app}^{(i)}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. **Логическим отношением** между $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, …, $\mathcal{A}^{(n)}$ называется семейство $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ n-арных отношений $R_\sigma \subseteq D^{(1)}_\sigma \times D^{(2)}_\sigma \times \dots \times D^{(n)}_\sigma$ $(\sigma \in \Sigma)$, которое определяется индуктивно согласно построению типов следующим образом:

1. возьмём произвольное подмножество $R_\alpha \subseteq D^{(1)}_\alpha \times D^{(2)}_\alpha \times \dots \times D^{(n)}_\alpha$ для каждого атомарного типа α;
2. $R_{(\sigma\to\tau)} = \{(f_1, f_2, \dots, f_n) \in D^{(1)}_{(\sigma\to\tau)} \times D^{(2)}_{(\sigma\to\tau)} \times \dots \times D^{(n)}_{(\sigma\to\tau)} | (\widehat{f_1}(a_1), \widehat{f_2}(a_2), \dots, \widehat{f_n}(a_n)) \in R_\tau$ для всех $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_\sigma\}$.

Логические отношения

Определение.

Пусть заданы n моделей Хенкина $\mathcal{A}^{(i)} = (D_\sigma^{(i)}, \mathrm{app}_{\sigma,\tau}^{(i)})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. **Логическим отношением** между $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, $\ldots$, $\mathcal{A}^{(n)}$ называется семейство $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ n-арных отношений $R_\sigma \subseteq D_\sigma^{(1)} \times D_\sigma^{(2)} \times \ldots \times D_\sigma^{(n)}$ $(\sigma \in \Sigma)$, которое определяется индуктивно согласно построению типов следующим образом:

1. возьмём произвольное подмножество $R_\alpha \subseteq D_\alpha^{(1)} \times D_\alpha^{(2)} \times \ldots \times D_\alpha^{(n)}$ для каждого атомарного типа α;
2. $R_{(\sigma\to\tau)} = \{(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in D_{(\sigma\to\tau)}^{(1)} \times D_{(\sigma\to\tau)}^{(2)} \times \ldots \times D_{(\sigma\to\tau)}^{(n)} | (\widehat{f_1}(a_1), \widehat{f_2}(a_2), \ldots, \widehat{f_n}(a_n)) \in R_\tau$ для всех $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_\sigma\}$.

Логические предикаты — это в точности унарные логические отношения. В случае, когда $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(2)} = \ldots = \mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}$, будем называть n–местными логическими отношениями на $\mathcal{A}$.

Логические отношения

Замечание.

Каждое логическое отношение $\mathcal{R}$ между $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, …, $\mathcal{A}^{(n)}$ может быть воспринято как логический предикат на модели Хенкина $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$, где $D_\sigma = D_\sigma^{(1)} \times D_\sigma^{(2)} \times \ldots \times D_\sigma^{(n)}$, $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : D_{(\sigma\to\tau)} \to (D_\sigma \to D_\tau) = D^{(1)}_{(\sigma\to\tau)} \times D^{(2)}_{(\sigma\to\tau)} \times \ldots \times D^{(n)}_{(\sigma\to\tau)} \to (D_\sigma^{(1)} \times D_\sigma^{(2)} \times \ldots \times D_\sigma^{(n)} \to D_\tau^{(1)} \times D_\tau^{(2)} \times \ldots \times D_\tau^{(n)})$. В этом случае $(f_1, f_2, \ldots, f_n) \mapsto ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (\widehat{f_1}(a_1), \widehat{f_2}(a_2), \ldots, \widehat{f_n}(a_n)))$.

Логические отношения

Замечание.

Каждое логическое отношение $\mathcal{R}$ между $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, …, $\mathcal{A}^{(n)}$ может быть воспринято как логический предикат на модели Хенкина $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$, где $D_\sigma = D_\sigma^{(1)} \times D_\sigma^{(2)} \times \ldots \times D_\sigma^{(n)}$, $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : D_{(\sigma\to\tau)} \to (D_\sigma \to D_\tau) = D_{(\sigma\to\tau)}^{(1)} \times D_{(\sigma\to\tau)}^{(2)} \times \ldots \times D_{(\sigma\to\tau)}^{(n)} \to (D_\sigma^{(1)} \times D_\sigma^{(2)} \times \ldots \times D_\sigma^{(n)} \to D_\tau^{(1)} \times D_\tau^{(2)} \times \ldots \times D_\tau^{(n)})$. В этом случае $(f_1, f_2, \ldots, f_n) \mapsto ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (\widehat{f_1}(a_1), \widehat{f_2}(a_2), \ldots, \widehat{f_n}(a_n)))$.

Основная теорема о логических отношениях (L13)

Если $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ — логическое отношение между моделями Хенкина $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, …, $\mathcal{A}^{(n)}$, то для любого замкнутого λ–терма M типа σ имеем $([\![M]\!]^{\mathcal{A}^{(1)}}, [\![M]\!]^{\mathcal{A}^{(2)}}, \ldots, [\![M]\!]^{\mathcal{A}^{(n)}}) \in R_\sigma$.

Логические отношения

Замечание.

Каждое логическое отношение $\mathcal{R}$ между $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, ..., $\mathcal{A}^{(n)}$ может быть воспринято как логический предикат на модели Хенкина $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$, где $D_\sigma = D_\sigma^{(1)} \times D_\sigma^{(2)} \times \ldots \times D_\sigma^{(n)}$, $\mathrm{app}_{\sigma,\tau} : D_{(\sigma\to\tau)} \to (D_\sigma \to D_\tau) = D_{(\sigma\to\tau)}^{(1)} \times D_{(\sigma\to\tau)}^{(2)} \times \ldots \times D_{(\sigma\to\tau)}^{(n)} \to (D_\sigma^{(1)} \times D_\sigma^{(2)} \times \ldots \times D_\sigma^{(n)} \to D_\tau^{(1)} \times D_\tau^{(2)} \times \ldots \times D_\tau^{(n)})$. В этом случае $(f_1, f_2, \ldots, f_n) \mapsto ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (\widehat{f_1}(a_1), \widehat{f_2}(a_2), \ldots, \widehat{f_n}(a_n)))$.

Основная теорема о логических отношениях (L13)

Если $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ — логическое отношение между моделями Хенкина $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}^{(2)}$, ..., $\mathcal{A}^{(n)}$, то для любого замкнутого λ–терма M типа σ имеем $([\![M]\!]^{\mathcal{A}^{(1)}}, [\![M]\!]^{\mathcal{A}^{(2)}}, \ldots, [\![M]\!]^{\mathcal{A}^{(n)}}) \in R_\sigma$.

Доказательство.

Непосредственно следует из замечания и теоремы L12. $\square$

Логические отношения

В случае, когда $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(2)} = \ldots = \mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}$ теорема L13 утверждает следующее: *Для каждого n–арного логического отношения $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ на модели Хенкина $\mathcal{A}$ выполняется соотношение $(\underbrace{[\![M]\!], [\![M]\!], \ldots, [\![M]\!]}_{n}) \in R_\sigma$ для любого замкнутого λ–терма M типа σ.*

Логические отношения

В случае, когда $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(2)} = \ldots = \mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}$ теорема L13 утверждает следующее: *Для каждого n–арного логического отношения $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ на модели Хенкина $\mathcal{A}$ выполняется соотношение $(\underbrace{[\![M]\!], [\![M]\!], \ldots, [\![M]\!]}_{n}) \in R_\sigma$ для любого замкнутого λ–терма M типа σ.*

Теорема L14 (необходимое условие λ–определимости)

Пусть $\mathcal{A} = (D_\sigma, \mathrm{app}_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$ — модель Хенкина. Если $f \in D_\sigma$ — λ–определимый элемент, то выполняется соотношение $(\underbrace{f, f, \ldots, f}_{n}) \in R_\sigma$ для каждого n–местного логического отношения $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ на $\mathcal{A}$.

Логические отношения

Необходимое условие (теорема L14) не является достаточным. Для того, чтобы это понять, следует рассмотреть модель множеств, базовыми множествами которого являются конечными. Однако в специальных случаях можно также показать и достаточность.

Логические отношения

Необходимое условие (теорема L14) не является достаточным. Для того, чтобы это понять, следует рассмотреть модель множеств, базовыми множествами которого являются конечными. Однако в специальных случаях можно также показать и достаточность.

Определение.

Порядковое число $o(\alpha)$ типа α определяется индуктивно следующим образом:

1. $o(\alpha) = 0$, если α — атомарный тип;
2. $o(\tau \to \sigma) = \max\{o(\tau) + 1, o(\sigma)\}$.

Логические отношения

Примеры.

Пусть α — атомарный тип; тогда

- $o(\alpha \to \alpha) = 1$;
- $o(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) = 1$;
- $o((\alpha \to \alpha) \to \alpha) = 2$.

Логические отношения

Примеры.

Пусть α — атомарный тип; тогда

- $o(\alpha \to \alpha) = 1$;
- $o(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) = 1$;
- $o((\alpha \to \alpha) \to \alpha) = 2$.

$o(\sigma) \leqslant 1$

$\sigma \equiv (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\ldots(\alpha_{n-1} \to \alpha_n)\ldots)))$, где α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — атомарные типы ($n \geqslant 1$).

Логические отношения

Примеры.

Пусть α — атомарный тип; тогда

- $o(\alpha \to \alpha) = 1$;
- $o(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) = 1$;
- $o((\alpha \to \alpha) \to \alpha) = 2$.

$o(\sigma) \leqslant 1$

$\sigma \equiv (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\ldots(\alpha_{n-1} \to \alpha_n)\ldots)))$, где α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — атомарные типы $(n \geqslant 1)$.

$o(\sigma) \leqslant 2$

$\sigma \equiv (\tau_1 \to (\tau_2 \to (\ldots(\tau_{n-1} \to \alpha_n)\ldots)))$, где $o(\tau_i) \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, α_n — атомарный тип.

Логические отношения

Для простоты разберём случай с одним атомарным типом α. В модели множеств с базовым множеством D_α λ–термы интерпретируются следующим образом:

$o(\sigma) = 0$. λ–термы типа α элементами $a \in D_\alpha$;

$o(\sigma) = 1$. λ–термы типа $\sigma \equiv (\underbrace{\alpha \to (\alpha \to \ldots \to (\alpha}_{n} \to \alpha)\ldots))$ функцией $f : \underbrace{D_\alpha \to (D_\alpha \to \ldots \to (D_\alpha}_{n} \to D_\alpha))$ (или, используя преобразование, обратное преобразованию Карри, функцией $\tilde{f} : D_\alpha^n \to D_\alpha$);

$o(\sigma) = 2$. λ–термы типа $\sigma \equiv (\tau_1 \to (\tau_2 \to \ldots \to (\tau_m \to \alpha)\ldots))$, где $\tau_i \equiv (\alpha \to (\alpha \to \ldots \to (\alpha \to \alpha)))$, функционалами $F \in D_{\tau_1} \to (D_{\tau_2} \to \ldots \to (D_{\tau_m} \to D_\alpha)\ldots))$ или, используя преобразование, обратное преобразованию Карри, $F \in D_{\tau_1} \times D_{\tau_2} \times \ldots \times D_{\tau_m} \to D_\alpha$.

Логические отношения

В настоящий момент известен только частичный результат обращения теоремы L14.

Логические отношения

В настоящий момент известен только частичный результат обращения теоремы L14.

Теорема L15 (Плоткин 1980)

Пусть заданы простые типы над некоторым атомарным типом α и модель множеств $\mathcal{A}$ с бесконечным базовым множеством D_α. Для каждого типа σ с порядковым числом $o(\sigma) \leqslant 2$ справедлива следующая эквивалентность:
f — λ–определимый элемент, если и только если $f \in P_\sigma$ для любого логического предиката $\mathcal{P} = (P_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ на $\mathcal{A}$ и, к тому же, $(f, f) \in R_\sigma$ для любого бинарного логического отношения $\mathcal{R} = (R_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ на $\mathcal{A}$.

Логические отношения

Замечания к доказательству.

Пусть $\sigma \equiv (\tau_1 \to (\tau_2 \to \ldots \to (\tau_m \to \alpha) \ldots))$.

1. Тогда для логического предиката $(P_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ имеет место следующая эквивалентность: $f \in P_\sigma$, если и только если $(\ldots((fh_1)h_2)\ldots h_m) \in P_\alpha$ для всех $(h_1, h_2, \ldots, h_m) \in P_{\tau_1} \times P_{\tau_2} \times \ldots \times P_{\tau_m}$.
2. Если $o(\tau_i) = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то не существует замкнутого λ–терма типа σ (достаточно рассмотреть случай, когда $P_\alpha = \varnothing$).
3. Б. Плоткиным было получено полное описание для λ–определимых типов. Однако для этих целей потребовалось обобщение понятия логического отношения.

Спасибо за внимание.