Лекция A1
Языки, автоматы

Вадим Пузаренко

18 сентября 2024 г.

Содержание

Обозначения

ω	Множество натуральных чисел с нулём.
$\leftrightharpoons$	Равенство по определению.
$\subseteq$	Отношение включения (является подмножеством).
$\supseteq$	Отношение включения (является надмножеством).
$\mathrm{card}(X)$	Мощность множества X.

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Слово непустое. Любая конечная непустая последовательность называется **непустой цепочкой** (**непустым словом**). Другими словами, все непустые слова составляют множество $\Sigma^+ \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \Sigma^n$. В дальнейшем слово $(w_1, w_2, \ldots, w_n)(\in \Sigma^n)$ будем записывать как $w_1 w_2 \ldots w_n$, $n \geqslant 1$. Часто слова будем обозначать строчными греческими буквами (возможно, с индексами).

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Слово непустое. Любая конечная непустая последовательность называется **непустой цепочкой** (**непустым словом**). Другими словами, все непустые слова составляют множество $\Sigma^+ \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \Sigma^n$. В дальнейшем слово $(w_1, w_2, \ldots, w_n) (\in \Sigma^n)$ будем записывать как $w_1 w_2 \ldots w_n$, $n \geqslant 1$. Часто слова будем обозначать строчными греческими буквами (возможно, с индексами).

Слово пустое. Последовательность (*единственная*) длины нуль называется **пустой цепочкой** (**пустым словом**) и обозначается как ε. В этом случае $\Sigma^* \leftrightharpoons \{\varepsilon\} \cup \Sigma^+$.

Основные понятия

Алфавит. Фиксируем произвольное множество Σ, которое будем называть **алфавитом**.

Слово непустое. Любая конечная непустая последовательность называется **непустой цепочкой** (**непустым словом**). Другими словами, все непустые слова составляют множество $\Sigma^+ \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \Sigma^n$. В дальнейшем слово $(w_1, w_2, \ldots, w_n)(\in \Sigma^n)$ будем записывать как $w_1 w_2 \ldots w_n$, $n \geqslant 1$. Часто слова будем обозначать строчными греческими буквами (возможно, с индексами).

Слово пустое. Последовательность (*единственная*) длины нуль называется **пустой цепочкой** (**пустым словом**) и обозначается как ε. В этом случае $\Sigma^* \leftrightharpoons \{\varepsilon\} \cup \Sigma^+$.

Язык. $L \subseteq \Sigma^*$ называется **языком алфавита** Σ.

Структурные свойства, примеры

1. Если $\Sigma = \varnothing$, то $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$; в частности, любой язык пустого алфавита либо пуст, либо состоит лишь из пустого слова.
2. Если $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит, то Σ^* счётно; в частности, любой язык непустого конечного алфавита не более, чем счётен;
3. Если Σ — бесконечный алфавит, то $\mathrm{card}(\Sigma^*) = \mathrm{card}(\Sigma)$ (такие языки нас интересовать в курсе не будут).

Структурные свойства, примеры

1. Если $\Sigma = \varnothing$, то $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$; в частности, любой язык пустого алфавита либо пуст, либо состоит лишь из пустого слова.
2. Если $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит, то Σ^* счётно; в частности, любой язык непустого конечного алфавита не более, чем счётен;
3. Если Σ — бесконечный алфавит, то $\mathrm{card}(\Sigma^*) = \mathrm{card}(\Sigma)$ (такие языки нас интересовать в курсе не будут).

Пример А1.1.

Пусть $\Sigma = \{0\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^n \leftrightharpoons \underbrace{00\ldots0}_{n}$ для подходящего $n \in \omega$.

Слова: конкатенация

Пример A1.2.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}1^{m_2}\ldots0^{n_k}1^{m_k}$ для подходящих $k \in \omega$ и $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots, n_k, m_k \in \omega$.

Слова: конкатенация

Пример A1.2.

Пусть $\Sigma = \{0,1\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}1^{m_2}\ldots0^{n_k}1^{m_k}$ для подходящих $k \in \omega$ и $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots, n_k, m_k \in \omega$.

Определение A1.1.

Определим операцию **конкатенации** (приписывания) на словах следующим образом: если $\alpha = w_1w_2\ldots w_p$, $\beta = s_1s_2\ldots s_q$, то $\alpha\hat{\ }\beta \leftrightharpoons w_1w_2\ldots w_ps_1s_2\ldots s_q$ $(p, q \in \omega)$.

Слова: конкатенация

Пример A1.2.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Тогда все слова языка Σ^* имеют вид $0^{n_1}1^{m_1}0^{n_2}1^{m_2}\ldots 0^{n_k}1^{m_k}$ для подходящих $k \in \omega$ и $n_1, m_1, n_2, m_2, \ldots, n_k, m_k \in \omega$.

Определение A1.1.

Определим операцию **конкатенации** (приписывания) на словах следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_p$, $\beta = s_1 s_2 \ldots s_q$, то $\alpha\hat{}\beta \leftrightharpoons w_1 w_2 \ldots w_p s_1 s_2 \ldots s_q$ $(p, q \in \omega)$.

Определение A1.2.

Говорят, что слово β является (**собственным**; **начальным**; **собственным начальным**) **подсловом** слова α и записывают как $\beta \sqsubseteq \alpha$ ($\beta \sqsubset \alpha$; $\beta \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$; $\beta \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha$), если найдутся слова γ и δ такие, что $\alpha = (\gamma\hat{}\beta)\hat{}\delta$ (причём $\gamma\hat{}\delta \neq \varepsilon$; $\gamma = \varepsilon$; $\gamma = \varepsilon$ и $\delta \neq \varepsilon$).

Слова: конкатенация

Предложение A1.1.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$. Тогда выполняется следующее:

- $\alpha\hat{\ }\varepsilon = \varepsilon\hat{\ }\alpha = \alpha$ $(\alpha \in \Sigma^*)$;
- $\alpha\hat{\ }(\beta\hat{\ }\gamma) = (\alpha\hat{\ }\beta)\hat{\ }\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*)$;
- если $\Sigma = \{0\}$, то $\alpha\hat{\ }\beta = \beta\hat{\ }\alpha$ для всех $\alpha, \beta \in \Sigma^*$;
- если $\Sigma = \{0, 1\}$, то $\alpha\hat{\ }\beta \neq \beta\hat{\ }\alpha$ в общем случае (например, для $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ имеет место $01 \neq 10$).

Слова: конкатенация

Предложение A1.1.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$. Тогда выполняется следующее:

- $\alpha\hat{}\varepsilon = \varepsilon\hat{}\alpha = \alpha$ $(\alpha \in \Sigma^*)$;
- $\alpha\hat{}(\beta\hat{}\gamma) = (\alpha\hat{}\beta)\hat{}\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*)$;
- если $\Sigma = \{0\}$, то $\alpha\hat{}\beta = \beta\hat{}\alpha$ для всех $\alpha, \beta \in \Sigma^*$;
- если $\Sigma = \{0, 1\}$, то $\alpha\hat{}\beta \neq \beta\hat{}\alpha$ в общем случае (например, для $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ имеет место $01 \neq 10$).

Примеры A1.3.

1. $\alpha_1 = 00$, $\beta_1 = 10 \mapsto \alpha_1\hat{}\beta_1 = 0010$;
2. $\alpha_2 = 001$, $\beta_2 = 0 \mapsto \alpha_2\hat{}\beta_2 = 0010$;
3. $\alpha_3 = 01$, $\beta_3 = 10 \mapsto \alpha_3\hat{}\beta_3 = 0110$;
4. $\alpha_4 = 0$, $\beta_4 = 110 \mapsto \alpha_4\hat{}\beta_4 = 0110$.

Слова: длина

Определение А1.3.

Пусть Σ — алфавит. Определим операцию **длины** lh на словах из Σ^* следующим образом: $\mathrm{lh}(\alpha) \leftrightharpoons n$, если $\alpha \in \Sigma^n$ ($n \in \omega \setminus \{0\}$); $\mathrm{lh}(\varepsilon) = 0$. Фактически данная операция выдаёт количество символов в слове с учётом порядка.

Слова: длина

Определение А1.3.

Пусть Σ — алфавит. Определим операцию **длины** lh на словах из Σ^* следующим образом: $\mathrm{lh}(\alpha) \leftrightharpoons n$, если $\alpha \in \Sigma^n$ $(n \in \omega \setminus \{0\})$; $\mathrm{lh}(\varepsilon) = 0$. Фактически данная операция выдаёт количество символов в слове с учётом порядка.

Замечание А1.1.

Отметим, что имеет место равенство $\mathrm{lh}(\alpha_1\hat{\ }\alpha_2) = \mathrm{lh}(\alpha_1) + \mathrm{lh}(\alpha_2)$ для любых слов α_1, $\alpha_2 \in \Sigma^*$. В частности, если $\alpha \sqsubseteq \beta$, то $\mathrm{lh}(\alpha) \leqslant \mathrm{lh}(\beta)$; если же $\alpha \sqsubset \beta$, то $\mathrm{lh}(\alpha) < \mathrm{lh}(\beta)$, как только $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

Слова: обращение, инверсия

Определение A1.4.

Определим операцию **обращения** на Σ^* следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n$, то $\alpha^R \leftrightharpoons w_n \ldots w_2 w_1$.

Слова: обращение, инверсия

Определение А1.4.

Определим операцию **обращения** на Σ^* следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n$, то $\alpha^R \leftrightharpoons w_n \dots w_2 w_1$.

Определение А1.5.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$ и пусть $w \in \Sigma$; тогда положим

$$\overline{w} = \begin{cases} 0, & \text{если } w = 1; \\ 1, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Определим теперь операцию **инверсии** на словах из Σ^* следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n (\in \{0; 1\}^*)$, то $\overline{\alpha} = \overline{w}_1 \overline{w}_2 \dots \overline{w}_n$.

Слова: обращение, инверсия

Определение A1.4.

Определим операцию **обращения** на Σ^* следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n$, то $\alpha^R \leftrightharpoons w_n \ldots w_2 w_1$.

Определение A1.5.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$ и пусть $w \in \Sigma$; тогда положим

$$\overline{w} = \begin{cases} 0, & \text{если } w = 1; \\ 1, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Определим теперь операцию **инверсии** на словах из Σ^* следующим образом: если $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n (\in \{0; 1\}^*)$, то $\overline{\alpha} = \overline{w}_1 \overline{w}_2 \ldots \overline{w}_n$.

Примеры A1.4.

1. $\alpha_1 = abc \mapsto \alpha_1^R = cba$;
2. $\alpha_2 = abba \mapsto \alpha_2^R = abba = \alpha_2$;
3. $\alpha_3 = abab \mapsto \alpha_3^R = baba$.

Слова: обращение, инверсия

Примеры A1.5.

1. $\beta_1 = 1010 \mapsto \beta_1^R = 0101$;
2. $\beta_1 = 1010 \mapsto \overline{\beta_1} = 0101$;
3. $\beta_2 = 101 \mapsto \beta_2^R = 101$;
4. $\beta_2 = 101 \mapsto \overline{\beta_2} = 010$;
5. $\beta_3 = 110 \mapsto \beta_3^R = 011$;
6. $\beta_3 = 110 \mapsto \overline{\beta_3} = 001$.

Слова: обращение, инверсия

Примеры A1.5.

1. $\beta_1 = 1010 \mapsto \beta_1^R = 0101;$
2. $\beta_1 = 1010 \mapsto \overline{\beta_1} = 0101;$
3. $\beta_2 = 101 \mapsto \beta_2^R = 101;$
4. $\beta_2 = 101 \mapsto \overline{\beta_2} = 010;$
5. $\beta_3 = 110 \mapsto \beta_3^R = 011;$
6. $\beta_3 = 110 \mapsto \overline{\beta_3} = 001.$

Сокращение.

Пусть a — буква; тогда через a^n будем обозначать слово $\underbrace{aa\ldots a}_{n}$ $(n \in \omega)$.

Слова: обращение, инверсия

Предложение A1.2.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$. Тогда выполняется следующее:

- $a^R = a$ $(a \in \Sigma)$;
- $(\alpha^R)^R = \alpha$ $(\alpha \in \Sigma^*)$;
- $(\alpha\hat{}\beta)^R = \beta^R\hat{}\alpha^R$ $(\alpha, \beta \in \Sigma^*)$;
- если $\Sigma = \{0\}$, то $\alpha^R = \alpha$ для всех $\alpha \in \Sigma$;
- если $\Sigma = \{0, 1\}$, то $\alpha^R \neq \alpha$ в общем случае (например, для $\alpha = 01$ имеет место $\alpha^R = 10 \neq 01 = \alpha$);
- $\overline{\alpha\hat{}\beta} = \overline{\alpha}\hat{}\overline{\beta}$ $(\alpha, \beta \in \{0, 1\}^*)$;
- $\overline{\alpha^R} = \overline{\alpha}^R$ $(\alpha \in \{0, 1\}^*)$.

Языки: операции

Будем считать, что заранее зафиксирован алфавит Σ, и все рассматриваемые языки L_1, L_2 и L являются языками данного алфавита.

Языки: операции

Будем считать, что заранее зафиксирован алфавит Σ, и все рассматриваемые языки L_1, L_2 и L являются языками данного алфавита.

Теоретико-множественные.

1. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (**объединение**);
2. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cap L_2$ (**пересечение**);
3. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \setminus L_2$ (**разность**);
4. $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (**дополнение**).

Языки: операции

Будем считать, что заранее зафиксирован алфавит Σ, и все рассматриваемые языки L_1, L_2 и L являются языками данного алфавита.

Теоретико-множественные.

1. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (**объединение**);
2. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cap L_2$ (**пересечение**);
3. $L_1, L_2 \mapsto L_1 \setminus L_2$ (**разность**);
4. $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (**дополнение**).

Структурные (основные).

1. $L_1, L_2 \mapsto L_1L_2 = \{\alpha_1\hat{}\alpha_2 \mid \alpha_1 \in L_1, \alpha_2 \in L_2\}$ (**конкатенация языков**);
2. $L \mapsto L^* = \{\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_n \mid \alpha_i \in L, 1 \leqslant i \leqslant n, n \in \omega\}$ (**звездочка Клини**);
3. $L \mapsto L^+ = \{\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_n \mid \alpha_i \in L, 1 \leqslant i \leqslant n, n \in \omega \setminus \{0\}\}$ (**плюс Клини**).

Языки: операции

Структурные (доп.)

1. $L \mapsto L^R = \{\alpha^R \mid \alpha \in L\}$ (**обращение языка**);
2. $L \mapsto \overline{L} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in L\}$ (**инверсия языка**; только при $\Sigma = \{0; 1\}$).

Языки: операции

Структурные (доп.)

1. $L \mapsto L^R = \{\alpha^R \mid \alpha \in L\}$ (**обращение языка**);
2. $L \mapsto \overline{L} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in L\}$ (**инверсия языка**; только при $\Sigma = \{0;1\}$).

Примеры А1.6.

Пусть $\Sigma = \{0;1\}$, $L_1 = \{\underbrace{00\ldots0}_{n} | n \in \omega\}$, $L_2 = \{0\hat{\ }\underbrace{11\ldots1}_{n} | n \in \omega\}$;

тогда

- $L_1 \cap L_2 = \{0\}$;
- $L_1 L_2 = \{0^n\hat{\ }1^m | n \in \omega \setminus \{0\},\ m \in \omega\}$;
- $L_1^R = L_1$, $L_2^R = \{1^n\hat{\ }0 | n \in \omega\}$;
- $\overline{L_1} = \{1^n | n \in \omega\}$, $\overline{L_2} = \{1\hat{\ }0^n | n \in \omega\}$.

Языки: операции

Предложение A1.3.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит (при рассмотрении инверсии $\Sigma = \{0, 1\}$) и пусть L_1, L_2, $\mathrm{L} \subseteq \Sigma^*$. Тогда выполняется следующее:

- $\mathrm{L}\varnothing = \varnothing\mathrm{L} = \varnothing$;
- $(\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2)^R = \mathrm{L}_2^R\mathrm{L}_1^R$;
- $(\mathrm{L}^R)^R = \mathrm{L}$;
- $(\mathrm{L}^*)^* = \mathrm{L}^* = (\mathrm{L}^*)^+$;
- $(\mathrm{L}^+)^+ = \mathrm{L}^+$;
- если $\mathrm{L}_1 \subseteq \mathrm{L}_2$, то $\mathrm{L}_1^* \subseteq \mathrm{L}_2^*$;
- $\overline{\overline{\mathrm{L}}} = \mathrm{L}$;
- $\overline{\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2} = \overline{\mathrm{L}_1}\,\overline{\mathrm{L}_2}$.

ДКА: определение

Определение А1.6.

Двухосновная структура $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ называется **детерминированным конечным автоматом (ДКА)**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний;
- $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит;
- $Q \cap \Sigma = \varnothing$;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ — функция перехода;
- $q_0 \in Q$ — начальное состояние;
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний.

Способы задания ДКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ДКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного мультиграфа, возможно, с петлями, в котором из каждой вершины, обозначающей состояние, исходит ровно одна стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. При этом помечаются также и вершины этого мультиграфа для того, чтобы можно было отличить начальное, а также конечные состояния от остальных.

Способы задания ДКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ДКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного мультиграфа, возможно, с петлями, в котором из каждой вершины, обозначающей состояние, исходит ровно одна стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. При этом помечаются также и вершины этого мультиграфа для того, чтобы можно было отличить начальное, а также конечные состояния от остальных.

Табличный.

Любой ДКА однозначно задаётся таблицей, описывающей функцию перехода, в которой определённым образом выделяются начальное состояние, а также конечные состояния.

ДКА: пример

Пример А1.7.

	0	1
$\triangleright q_0 *$	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_0

Как работает ДКА?

Пусть заданы детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ и слово $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, где $n \in \omega$. Для того, чтобы переработать данное слово заданным автоматом, необходимо проделать следующую процедуру:

$t = 0$: в момент $t = 0$ находимся в состоянии q_0 (в частности, если $\alpha = \varepsilon$, то в состоянии q_0 завершаем работу);

$t \mapsto t + 1$: предположим, что в момент времени t находимся в состоянии $q(t)$; тогда в момент $t + 1$ мы попадаем в состояние $q(t + 1) = \delta(q(t), a_{t+1})$;

Завершение. Если после полной переработки слова α мы попадаем в конечное состояние, а именно, $q(n) \in F$, то слово α распознается автоматом $\mathfrak{A}$; в противном случае слово α им не распознается.

ДКА: функция перехода

Определение A1.7.

Определим **обобщённую функцию перехода** $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$, расширяющую $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, индукцией по длине слова α следующим образом:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$;
- $\delta^*(q, \alpha\hat{\ }a) = \delta(\delta^*(q, \alpha), a)$.

ДКА: функция перехода

Определение А1.7.

Определим **обобщённую функцию перехода** $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$, расширяющую $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, индукцией по длине слова α следующим образом:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$;
- $\delta^*(q, \alpha\hat{}a) = \delta(\delta^*(q, \alpha), a)$.

Определение А1.8.

Язык, распознаваемый ДКА $\mathfrak{A}$, — это $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, \alpha) \in F\}$.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Предложение А1.2.

1) Пустой язык распознаваем некоторым ДКА.
2) Язык Σ^* распознаваем некоторым ДКА.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Предложение А1.2.

1) Пустой язык распознаваем некоторым ДКА.
2) Язык Σ^* распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат $\mathfrak{A}_1 = (\{q_0\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_0) \mid a \in \Sigma\}, q_0, \varnothing)$ распознаёт пустой язык. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\delta^*(q_0, \alpha) = q_0 \notin \varnothing = F$.

Языки, распознаваемые ДКА

Будем считать, что все рассматриваемые языки в конечном алфавите $\Sigma \neq \varnothing$.

Предложение А1.2.

1) Пустой язык распознаваем некоторым ДКА.
2) Язык Σ^* распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_1 = (\{q_0\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_0) \mid a \in \Sigma\}, q_0, \varnothing)$ распознаёт пустой язык. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_0 \notin \varnothing = F$.
2) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_2 = (\{q_0\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_0) \mid a \in \Sigma\}, q_0, \{q_0\})$ распознаёт Σ^*. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_0 \in \{q_0\} = F$. $\square$

Языки, распознаваемые ДКА

Предложение А1.3.

1) Язык $\{\varepsilon\}$ распознаваем некоторым ДКА.
2) Для любого $a \in \Sigma$ язык $\{a\}$ распознаваем некоторым ДКА.

Языки, распознаваемые ДКА

Предложение А1.3.

1) Язык $\{\varepsilon\}$ распознаваем некоторым ДКА.
2) Для любого $a \in \Sigma$ язык $\{a\}$ распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_3 = (\{q_0, q_1\}; \Sigma; \{((q, a), q_1) \mid q \in Q,\ a \in \Sigma\}, q_0, \{q_0\})$ распознаёт язык $\{\varepsilon\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^+$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_1 \notin \{q_0\} = F$, а $\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0 \in \{q_0\} = F$.

Языки, распознаваемые ДКА

Предложение A1.3.

1) Язык $\{\varepsilon\}$ распознаваем некоторым ДКА.
2) Для любого $a \in \Sigma$ язык $\{a\}$ распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

1) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_3 = (\{q_0, q_1\}; \Sigma; \{((q, a), q_1) \mid q \in Q,\ a \in \Sigma\}, q_0, \{q_0\})$ распознаёт язык $\{\varepsilon\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^+$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_1 \notin \{q_0\} = F$, а $\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0 \in \{q_0\} = F$.
2) Покажем, что автомат
$\mathfrak{A}_4 = (\{q_0, q_1, q_2\}; \Sigma; \{((q_0, a), q_1), ((q_1, a), q_2), ((q_2, a), q_2)\} \cup \{((q, b), q_2) \mid a \neq b \in \Sigma,\ q \in Q\}, q_0, \{q_1\})$ распознаёт $\{a\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^+$ $(\alpha \neq a)$ имеем
$\delta^*(q_0, \alpha) = q_2 \notin \{q_1\} = F$; кроме того,
$\delta^*(q_0, a) = \delta(q_0, a) = q_1 \in \{q_1\} = F$ и
$\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0 \notin \{q_1\} = F$. $\square$

Дополнение

Теорема А1.1.

Если язык L конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаётся некоторым ДКА, то и его дополнение $\Sigma^* \setminus \mathrm{L}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Дополнение

Теорема А1.1.

Если язык L конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаётся некоторым ДКА, то и его дополнение $\Sigma^* \setminus \mathrm{L}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его дополнение распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \delta, q_0, Q \setminus F)$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}') \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \in Q \setminus F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \notin F \Leftrightarrow \alpha \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

Дополнение

Теорема A1.1.

Если язык L конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаётся некоторым ДКА, то и его дополнение $\Sigma^* \setminus \mathrm{L}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его дополнение распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \delta, q_0, Q \setminus F)$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}') \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \in Q \setminus F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \notin F \Leftrightarrow \alpha \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

Замечание A1.2.

Отметим, что все атрибуты (количество состояний и, следовательно, переходов) остаются неизменными при переходе от автомата $\mathfrak{A}$ к автомату $\mathfrak{A}'$ в теореме A1.1.

Инверсия

Теорема А1.2.

Если язык L алфавита $\Sigma = \{0; 1\}$ распознаётся некоторым ДКА, то и его инверсия $\overline{\mathrm{L}}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Инверсия

Теорема А1.2.

Если язык L алфавита $\Sigma = \{0; 1\}$ распознаётся некоторым ДКА, то и его инверсия $\overline{\mathrm{L}}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его инверсия распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \tau, q_0, F)$, где $\tau \leftrightharpoons \{((q, \bar{a}), q') \mid ((q, a), q') \in \delta\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\tau^*(q, \overline{\alpha}) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, \alpha) \in F$, что нетрудно доказывается индукцией по длине слова α. Таким образом, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = \overline{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$. $\square$

Инверсия

Теорема А1.2.

Если язык L алфавита $\Sigma = \{0;1\}$ распознаётся некоторым ДКА, то и его инверсия $\overline{\mathrm{L}}$ также распознаётся некоторым ДКА.

Доказательство.

Пусть ДКА $\mathfrak{A} = (Q;\Sigma;\delta,q_0,F)$ таков, что $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что его инверсия распознаётся автоматом $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q;\Sigma;\tau,q_0,F)$, где $\tau \leftrightharpoons \{((q,\bar{a}),q') \mid ((q,a),q') \in \delta\}$. В самом деле, для любого $\alpha \in \Sigma^*$ имеем $\tau^*(q,\overline{\alpha}) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,\alpha) \in F$, что нетрудно доказывается индукцией по длине слова α. Таким образом, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = \overline{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$. $\square$

Замечание А1.3.

Отметим, что все атрибуты (количество состояний и, следовательно, переходов) остаются неизменными при переходе от автомата $\mathfrak{A}$ к автомату $\mathfrak{A}'$ в теореме А1.2.

ε-НКА: определение

Определение A1.9.

Двухосновная структура $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ называется **недетерминированным конечным автоматом с ε-переходами (ε-НКА)**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний;
- $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит;
- $Q \cap \Sigma = \varnothing$;
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ — функция перехода;
- $\varnothing \neq Q_0 \subseteq Q$ — множество начальных состояний;
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний.

Способы задания ε-НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ε-НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного мультиграфа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого мультиграфа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие — их может быть несколько!!!), а также конечные состояния от остальных.

Способы задания ε-НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой ε-НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного мультиграфа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого мультиграфа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие — их может быть несколько!!!), а также конечные состояния от остальных.

Табличный.

Любой ε-НКА однозначно задаётся таблицей, описывающей функцию перехода, в которой определенным образом выделяются начальные, а также конечные состояния.

ε-НКА: пример

Пример A1.8.

	0	1	ε
$\triangleright q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$	$\varnothing$
q_1	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_2*	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
q_3*	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Как работает ε-НКА?

Пусть заданы недетерминированный конечный автомат с ε-переходами $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ и слово $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, где $n \in \omega$. Для того, чтобы переработать данное слово заданным автоматом, необходимо проделать следующую процедуру:

$t = 0$: в момент $t = 0$ находимся в одном из состояний из Q_0; при этом считаем обработанным слово ε;

$t \mapsto t + 1$: предположим, что в момент времени t находимся в состоянии $q(t)$; при этом переработано слово $a_1 a_2 \ldots a_{t'}$, где $t' \leqslant t$; тогда в момент $t + 1$ мы попадаем либо в состояние $q(t + 1) \in \delta(q(t), a_{t'+1})$ (при этом считаем обработанным слово $a_1 a_2 \ldots a_{t'} a_{t'+1}$), либо в состояние $q(t + 1) \in \delta(q(t), \varepsilon)$ (при этом считаем обработанным слово $a_1 a_2 \ldots a_{t'}$);

Завершение. Если после полной переработки слова α, а также возможно некоторого количества ε-переходов после этого, мы попадаем в конечное состояние, а именно, $q(n') \in F$ ($n' \geqslant n$), то слово α распознается автоматом $\mathfrak{A}$; если никакая последовательность не приводит в конечное состояние, то слово α им не распознается.

ε-НКА: распознаваемые слова

Определение A1.10.

Пусть задан ε-НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. Пусть также $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что слово **α распознаётся ε-НКА $\mathfrak{A}$**, если найдутся состояния r_0^0, r_0^1, …, $r_0^{k_0}$, r_1^0, r_1^1, …, $r_1^{k_1}$, …, r_n^0, r_n^1, …, $r_n^{k_n} \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0^0 \in Q_0$;
- $r_i^{j+1} \in \delta(r_i^j, \varepsilon)$; $i, j \in \omega$, $0 \leqslant j < k_i$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$;
- $r_{i+1}^0 \in \delta(r_i^{k_i}, w_{i+1})$; $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n^{k_n} \in F$.

ε-НКА: распознаваемые слова

Определение А1.10.

Пусть задан ε-НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. Пусть также $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что слово $\boldsymbol{\alpha}$ **распознаётся $\boldsymbol{\varepsilon}$-НКА $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$**, если найдутся состояния r_0^0, r_0^1, …, $r_0^{k_0}$, r_1^0, r_1^1, …, $r_1^{k_1}$, …, r_n^0, r_n^1, …, $r_n^{k_n} \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0^0 \in Q_0$;
- $r_i^{j+1} \in \delta(r_i^j, \varepsilon)$; $i, j \in \omega$, $0 \leqslant j < k_i$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$;
- $r_{i+1}^0 \in \delta(r_i^{k_i}, w_{i+1})$; $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n^{k_n} \in F$.

Определение А1.11.

Язык, распознаваемый $\boldsymbol{\varepsilon}$-НКА $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, — это $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \text{ распознается } \mathfrak{A}\}$.

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Теорема A1.3.

Для любого ДКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Теорема A1.3.

Для любого ДКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть задан ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$. Определим ε-НКА $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \tau, \{q_0\}, F)$ так, что $\tau \leftrightharpoons \{((q, a), \{\delta(q, a)\}) \mid q \in Q,\ a \in \Sigma\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \in Q\}$, и покажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \Sigma^*$ таково, что имеет место $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$, т. е. $\delta^*(q_0, \alpha) \in F$. Рассмотрим последовательность $r_0 = q_0 = \delta^*(q_0, \varepsilon)$, $r_1 = \delta(r_0, w_1) = \delta^*(q_0, w_1)$, $r_2 = \delta(r_1, w_2) = = \delta^*(q_0, w_1 w_2)$, $\dots$, $r_n = \delta(r_{n-1}, w_n) = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \dots w_n) = \delta^*(q_0, \alpha)$ состояний; она удовлетворяет определению распознаваемости слова α автоматом $\mathfrak{A}'$, поскольку $r_0 \in \{q_0\}$,
$r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1}) \in \{\delta(r_i, w_{i+1})\} = \tau(r_i, w_{i+1})$ и $r_n \in F$; таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть теперь $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; так как $\mathfrak{A}'$ не содержит ε-переходов, найдётся последовательность состояний $r_0 = q_0$, r_1, r_2, ..., $r_n \in F$, для которой справедливы условия $r_{i+1} \in \tau(r_i, w_{i+1}) = \{\delta(r_i, w_{i+1})\}$. Далее, индукцией по длине слова доказывается, что $r_0 = \delta^*(q_0, \varepsilon)$, $r_i = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \dots w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; в частности, $r_n = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \dots w_n) = \delta^*(q_0, \alpha) \in F$; тем самым, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

ДКА $\Rightarrow$ ε-НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть теперь $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; так как $\mathfrak{A}'$ не содержит ε-переходов, найдётся последовательность состояний $r_0 = q_0$, r_1, r_2, …, $r_n \in F$, для которой справедливы условия $r_{i+1} \in \tau(r_i, w_{i+1}) = \{\delta(r_i, w_{i+1})\}$. Далее, индукцией по длине слова доказывается, что $r_0 = \delta^*(q_0, \varepsilon)$, $r_i = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \dots w_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; в частности, $r_n = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \dots w_n) = \delta^*(q_0, \alpha) \in F$; тем самым, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. □

Замечание A1.4.

Теорема A1.3 носит чисто теоретический характер и демонстрирует, что любой детерминированный конечный автомат может рассматриваться, как частный случай недетерминированного конечного автомата с ε-переходами.

Спасибо за внимание.