# Лекция С3
# Вычислимые и вычислимо перечислимые множества

Вадим Пузаренко

11 декабря 2023 г.

# Характеристическая функция



## Определение С3.1.

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — множество кортежей натуральных чисел. Тогда его **характеристическая функция** $\chi_A : \omega^n \to \omega$ определяется следующим образом:

$$\chi_A(k_1, \ldots, k_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle k_1, \ldots, k_n \rangle \in A; \\ 1, & \text{если } \langle k_1, \ldots, k_n \rangle \in \omega^n \setminus A. \end{cases}$$

**Частичная характеристическая функция** множества $A$ $\chi_A^* : \omega^n \to \omega$ определяется следующим образом:

$$\chi_A^*(k_1, \ldots, k_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle k_1, \ldots, k_n \rangle \in A; \\ \uparrow, & \text{если } \langle k_1, \ldots, k_n \rangle \in \omega^n \setminus A. \end{cases}$$

Тогда $\delta\chi_A^* = A$.

# Вычислимые множества



**Определение С3.2.**

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

# Вычислимые множества



## Определение C3.2.

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

## Примеры C3.1.

Следующие подмножества $\omega$ вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\omega$;

# Вычислимые множества



## Определение С3.2.

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

## Примеры С3.1.

Следующие подмножества $\omega$ вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\omega$;
- $\varnothing$;

# Вычислимые множества



**Определение С3.2.**

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

**Примеры С3.1.**

Следующие подмножества $\omega$ вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\omega$;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого $n$;

# Вычислимые множества

## Определение С3.2.

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

## Примеры С3.1.

Следующие подмножества $\omega$ вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\omega$;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого $n$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;

# Вычислимые множества



## Определение C3.2.

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

## Примеры C3.1.

Следующие подмножества $\omega$ вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\omega$;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого $n$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;
- $\omega \setminus \{1\}$;

# Вычислимые множества

## Определение C3.2.

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

## Примеры C3.1.

Следующие подмножества $\omega$ вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\omega$;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого $n$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;
- $\omega \setminus \{1\}$;
- $\omega \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого $n$;

# Вычислимые множества

## Определение C3.2.

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество $A$ называется **вычислимым**, если его характеристическая функция $\chi_A$ вычислима.

## Примеры C3.1.

Следующие подмножества $\omega$ вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\omega$;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого $n$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;
- $\omega \setminus \{1\}$;
- $\omega \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого $n$;
- $\omega \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$.

# Примеры вычислимых множеств



**Примеры С3.2.**

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

# Примеры вычислимых множеств



**Примеры C3.2.**

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;

# Примеры вычислимых множеств



**Примеры C3.2.**

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;

# Примеры вычислимых множеств



**Примеры С3.2.**

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;

# Примеры вычислимых множеств



## Примеры С3.2.

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;
- $\{\langle n, m \rangle \in \omega^2 \mid \ n | m\}$;

# Примеры вычислимых множеств



**Примеры С3.2.**

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;
- $\{\langle n, m\rangle \in \omega^2 \mid \ n|m\}$;
- $\{\langle n, m\rangle \in \omega^2 \mid \ n + m$ — простое число$\}$;

# Примеры вычислимых множеств



**Примеры C3.2.**

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;
- $\{\langle n, m\rangle \in \omega^2 \mid \; n|m\}$;
- $\{\langle n, m\rangle \in \omega^2 \mid \; n + m$ — простое число$\}$;
- $\{\langle n, m\rangle \in \omega^2 \mid \; n, m$ — простые числа, $|n - m| = 2\}$.

# Сильно вычислимые последовательности



**Определение C3.3(1).**

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{\langle m, n\rangle \mid m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- $n \mapsto |A_n|$ — вычислимая функция.

# Сильно вычислимые последовательности



**Определение C3.3(1).**

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{\langle m, n\rangle \mid m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- $n \mapsto |A_n|$ — вычислимая функция.

**Определение C3.3(2).**

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{\langle m, n\rangle \mid m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- $n \mapsto \max(A_n \cup \{0\})$ — вычислимая функция.

# Сильно вычислимые последовательности



## Определение С3.3(3).

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{\langle m, n\rangle \mid m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m \in A_n) \to (m \leqslant f(n))$, для всех $m, n \in \omega$.

# Сильно вычислимые последовательности



## Определение С3.3(3).

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{\langle m, n\rangle \mid m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m \in A_n) \to (m \leqslant f(n))$, для всех $m, n \in \omega$.

## Определение С3.4.

**Канонической нумерацией** конечных множеств называется $\gamma(n)$, определяемая следующим образом: $\gamma(0) \leftrightharpoons \varnothing$;
$\gamma(n) = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_k\}$, если $n = 2^{x_1} + \ldots + 2^{x_k}$.

# Сильно вычислимые последовательности

## Определение С3.3(3).

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{\langle m,n\rangle \mid m\in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m\in A_n)\to(m\leqslant f(n))$, для всех $m,n\in\omega$.

## Определение С3.4.

**Канонической нумерацией** конечных множеств называется $\gamma(n)$, определяемая следующим образом: $\gamma(0)\leftrightharpoons\varnothing$;
$\gamma(n)=\{x_1<x_2<\ldots<x_k\}$, если $n=2^{x_1}+\ldots+2^{x_k}$.

## Определение С3.3(4).

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если существует вф $f$ такая, что $A_n=\gamma(f(n))$ для всех $n\in\omega$.

# Сильно вычислимые последовательности



**Определение C3.3(5′).**

Пусть $A_n$ — последовательность конечных множеств. Будем считать, что она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\{\langle m, n\rangle \mid m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
2. существует вф $f$ такая, что $|A_n| \leqslant f(n)$ для всех $n \in \omega$.

**Упражнение C3.1.**

Докажите, что $(5') \not\Leftarrow (1)$.

# Сильно вычислимые последовательности

**Предложение C3.1.**

$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4).$

# Сильно вычислимые последовательности



**Предложение С3.1.**

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

**(1 $\Rightarrow$ 2)**

Первые условия совпадают, поэтому проверим справедливость второго условия. Пусть вычислимые функции $g(m) = |A_m|$ и $h(n, m)$ таковы, что $h(n, m) = 0 \Leftrightarrow m \in A_n$. Определим сначала вспомогательную частично вычислимую функцию $\psi(n, k)$ такую, что $\psi(n, 0) = 0$, а при $k > 0$ функция $\lambda k.\psi(n, k)$ перечисляет в порядке возрастания множество $A_n$ $(n \in \omega)$:

$$\left[\begin{array}{l} \psi(n, 0) = 0; \\ \psi(n, k+1) = \mu t[((k = 0) \vee (t > \psi(n, k))) \wedge (t \in A_n)]. \end{array}\right.$$

В самом деле, $q(n, k, z) = \mu t[(k \cdot (\mathrm{s}(z) \dot{-} t)) + h(n, t) = 0]$ — ч.в.ф. из определения примитивной рекурсии. Далее, $\max(A_n \cup \{0\}) = \psi(n, g(n))$.

# Сильно вычислимые последовательности



**$(2 \Rightarrow 3)$**

Как и в предыдущем случае, первые условия совпадают. Докажем справедливость второго условия. Однако второе условие выполняется, если в качестве функции $f(n)$ взять $\max(A_n \cup \{0\})$, поскольку имеет место

$$(m \in A_n) \to (m \leqslant \max(A_n \cup \{0\})),$$

для всех $m, n \in \omega$.

# Сильно вычислимые последовательности



**$(2 \Rightarrow 3)$**

Как и в предыдущем случае, первые условия совпадают. Докажем справедливость второго условия. Однако второе условие выполняется, если в качестве функции $f(n)$ взять $\max(A_n \cup \{0\})$, поскольку имеет место

$$(m \in A_n) \to (m \leqslant \max(A_n \cup \{0\})),$$

для всех $m, n \in \omega$.

**$(3 \Rightarrow 4)$**

Пусть вычислимые функции $g(n)$ и $h(n, m)$ таковы, что $h(n, m) = 0 \Leftrightarrow m \in A_n$, а $g(n)$ удовлетворяет второму условию из (3). Тогда $f(n) = \sum\limits_{i=0}^{g(n)} (2^i \cdot \overline{\mathrm{sg}}(h(n, i)))$ будет искомой.

# Сильно вычислимые последовательности

## $(4 \Rightarrow 1)$

Сначала докажем первое условие из (1). В самом деле,
$m \in \gamma(f(n)) \Leftrightarrow (\left[\frac{f(n)}{2^m}\right]$ нечетно):
$m \in \gamma(f(n)) \Rightarrow f(n) = \ldots + 2^m + \ldots = \ldots + 2^m \cdot (1 + 2 \cdot (\ldots))$ и $\sum\limits_{i \in A_{f(n)},\, i<m} 2^i < 2^m$;
$m \notin \gamma(f(n)) \Rightarrow f(n) = \ldots + \ldots = \ldots + 2^m \cdot (2 \cdot (\ldots))$ и $\sum\limits_{i \in A_{f(n)},\, i<m} 2^i < 2^m$.
Таким образом, $\chi_Q(n, m) = \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rest}(\left[\frac{f(n)}{2^m}\right], 2))$, где $Q = \{\langle m, n\rangle \mid m \in \gamma(f(n))\}$.
Далее, $m \in \gamma(f(n)) \Rightarrow m < 2^m \leqslant f(n)$, поэтому $|A_n| = \sum\limits_{i=0}^{f(n)} \overline{\mathrm{sg}}(\chi_Q(i, n))$. При $f(n) = 0$ также соотношение справедливо. □

# Вычислимо перечислимые множества



**Определение С3.5.**

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф $\varphi$.

# Вычислимо перечислимые множества



**Определение С3.5.**

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф $\varphi$.

**Примеры С3.3.**

Следующие множества вычислимо перечислимы:

# Вычислимо перечислимые множества



**Определение C3.5.**

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф $\varphi$.

**Примеры C3.3.**

Следующие множества вычислимо перечислимы:

- $\omega$;

# Вычислимо перечислимые множества

**Определение С3.5.**

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф $\varphi$.

**Примеры С3.3.**

Следующие множества вычислимо перечислимы:

- $\omega$;
- $\{n\}$ для любого $n \in \omega$;

# Вычислимо перечислимые множества

**Определение С3.5.**

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф $\varphi$.

**Примеры С3.3.**

Следующие множества вычислимо перечислимы:

- $\omega$;
- $\{n\}$ для любого $n \in \omega$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $n_1, \ldots, n_k \in \omega$;

# Вычислимо перечислимые множества

**Определение C3.5.**

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф $\varphi$.

**Примеры C3.3.**

Следующие множества вычислимо перечислимы:

- $\omega$;
- $\{n\}$ для любого $n \in \omega$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $n_1, \ldots, n_k \in \omega$;
- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;

# Вычислимо перечислимые множества

**Определение С3.5.**

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф $\varphi$.

**Примеры С3.3.**

Следующие множества вычислимо перечислимы:

- $\omega$;
- $\{n\}$ для любого $n \in \omega$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $n_1, \ldots, n_k \in \omega$;
- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$.

# Вычислимо перечислимые множества

**Теорема С3.1.**

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

# Вычислимо перечислимые множества



**Теорема C3.1.**

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
2. $\chi_A^*$ — ч.в.ф.;

# Вычислимо перечислимые множества



**Теорема С3.1.**

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
2. $\chi^*_A$ — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;

# Вычислимо перечислимые множества

**Теорема С3.1.**

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
2. $\chi_A^*$ — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
4. $A = \varnothing$ или $A = \rho f$, $f$ — в.ф.;
5. $A$ конечно или $A = \rho f$, $f$ — инъективная в.ф.;

# Вычислимо перечислимые множества



**Теорема С3.1.**

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
2. $\chi^*_A$ — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
4. $A = \varnothing$ или $A = \rho f$, $f$ — в.ф.;
5. $A$ конечно или $A = \rho f$, $f$ — инъективная в.ф.;
6. $A = \exists y Q(x, y)$, $Q$ — вычислимый предикат;

# Вычислимо перечислимые множества



**Теорема C3.1.**

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
2. $\chi_A^*$ — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, $\varphi$ — ч.в.ф.;
4. $A = \varnothing$ или $A = \rho f$, $f$ — в.ф.;
5. $A$ конечно или $A = \rho f$, $f$ — инъективная в.ф.;
6. $A = \exists y Q(x, y)$, $Q$ — вычислимый предикат;
7. существует сильно вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ такая, что $\varnothing = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_s \subseteq A_{s+1} \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_s A_s = A$;
8. существует сильно вычислимая последовательность, удовлетворяющая условию (7) и дополнительно условию $|A_{s+1} - A_s| \leqslant 1$, $s \in \omega$.

# Вычислимо перечислимые множества



**Доказательство.**

(1 ⇒ 2) $\chi^*_A(x) = 0(\varphi(x))$.

# Вычислимо перечислимые множества

**Доказательство.**

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi_A^*(x) = 0(\varphi(x))$. (2 $\Rightarrow$ 1) $\delta\chi_A^* = A$.

# Вычислимо перечислимые множества



## Доказательство.

$(1 \Rightarrow 2)$ $\chi_A^*(x) = 0(\varphi(x))$. $(2 \Rightarrow 1)$ $\delta\chi_A^* = A$.
$(2 \Rightarrow 3)$ $\psi(x) = x \cdot \mathrm{s}(\chi_A^*(x))$ и $\rho\psi = \delta\chi_A^* = A$.

# Вычислимо перечислимые множества



## Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi_A^*(x) = 0(\varphi(x))$. (2 $\Rightarrow$ 1) $\delta\chi_A^* = A$.
(2 $\Rightarrow$ 3) $\psi(x) = x \cdot \mathrm{s}(\chi_A^*(x))$ и $\rho\psi = \delta\chi_A^* = A$.
(3 $\Rightarrow$ 4) Пусть $A \neq \varnothing$ и $x_0 \in A$. Так как $\psi(x)$ частично вычислима, по теореме Клини о нормальной форме найдутся примитивно рекурсивные функция $U$ и отношение $T(x, y)$, для которых выполняется $\psi(x) = U(\mu y . T(x, y))$. Определим вспомогательную вф $f_1(x, s)$ следующим образом:

$$f_1(x, s) = \begin{cases} U(\mu y \leqslant s . T(x, y)), & \text{если } \exists y \leqslant s T(x, y); \\ x_0, & \text{если } \forall y \leqslant s \neg T(x, y). \end{cases}$$

Таким образом, $A = \rho f$, где $f(x) = f_1(l(x), r(x))$ — вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция.

# Вычислимо перечислимые множества

## Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi^*_A(x) = 0(\varphi(x))$. (2 $\Rightarrow$ 1) $\delta\chi^*_A = A$.
(2 $\Rightarrow$ 3) $\psi(x) = x \cdot \mathrm{s}(\chi^*_A(x))$ и $\rho\psi = \delta\chi^*_A = A$.
(3 $\Rightarrow$ 4) Пусть $A \neq \varnothing$ и $x_0 \in A$. Так как $\psi(x)$ частично вычислима, по теореме Клини о нормальной форме найдутся примитивно рекурсивные функция $U$ и отношение $T(x, y)$, для которых выполняется $\psi(x) = U(\mu y.T(x, y))$. Определим вспомогательную вф $f_1(x, s)$ следующим образом:

$$f_1(x,s) = \begin{cases} U(\mu y \leqslant s.T(x,y)), & \text{если } \exists y \leqslant s T(x,y); \\ x_0, & \text{если } \forall y \leqslant s \neg T(x,y). \end{cases}$$

Таким образом, $A = \rho f$, где $f(x) = f_1(l(x), r(x))$ — вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция.
(5 $\Rightarrow$ 4) Если $A$ бесконечно, то $A = \rho f$ для некоторой вычислимой функции $f$. Пусть теперь $A$ конечно (скажем, $A = \{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$). Тогда

$$f_0(x) = n_0 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x) + n_1 \cdot \overline{\mathrm{sg}}|x-1| + \ldots + n_{k-1} \cdot \overline{\mathrm{sg}}|x-(k-1)| + n_k \cdot \overline{\mathrm{sg}}(k \dot{-} x)$$

вычислима и $\rho f_0 = A$.

# Вычислимо перечислимые множества



## Доказательство (продолжение).

$(4 \Rightarrow 5)$ Пусть $A$ бесконечно и пусть вф $f$ такова, что $\rho f = A$. Возьмём вспомогательную функцию $g$, выдающую наименьшие $f$-номера элементов множества $A$ в порядке возрастания:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(n+1) = \mu t.[(t > g(n)) \wedge \forall i < t(f(i) \neq f(t))]. \end{array}\right.$$

Тогда $f_0(n) \leftrightharpoons f(g(n))$ вычислима, инъективна и $\rho f_0 = A$.

# Вычислимо перечислимые множества



## Доказательство (продолжение).

(4 $\Rightarrow$ 5) Пусть $A$ бесконечно и пусть вф $f$ такова, что $\rho f = A$. Возьмём вспомогательную функцию $g$, выдающую наименьшие $f$-номера элементов множества $A$ в порядке возрастания:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(n+1) = \mu t.[(t > g(n)) \wedge \forall i < t(f(i) \neq f(t))]. \end{array}\right.$$

Тогда $f_0(n) \leftrightharpoons f(g(n))$ вычислима, инъективна и $\rho f_0 = A$.

(4 $\Rightarrow$ 8) Если $A = \varnothing$, то положим $A_n = \varnothing$ для всех $n \in \omega$. Последовательность $A_n$ сильно вычислима, поскольку $\chi_S(m, n) \equiv 1$, где $S = \{\langle m, n\rangle | m \in A_n\}$, и $|A_n| = 0$. Нетрудно понять, что эта последовательность удовлетворяет посылке условия 8.

Пусть теперь $A \neq \varnothing$; возьмём вф $f$ из условия 4 (т.е. $\rho f = A$) и положим $A_n = \{m | \exists i < n(m = f(i))\}$. Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ сильно вычислима, поскольку $S = \{\langle m, n\rangle | m \in A_n\}$ — вычислимое отношение $(m \in A_n \Leftrightarrow \exists i < n(m = f(i)))$, а функция $g(n) = \max(A_n \cup \{0\})$ также вычислима:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(n+1) = \max\{g(n), f(n)\}. \end{array}\right.$$

# Вычислимо перечислимые множества



## Доказательство (окончание).

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
($A_0 = \varnothing$) $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
($A_s \subseteq A_{s+1}$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
($A_s \subseteq A$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
($A \subseteq \bigcup_s A_s$) Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0$; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.

# Вычислимо перечислимые множества



## Доказательство (окончание).

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
($A_0 = \varnothing$) $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
($A_s \subseteq A_{s+1}$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
($A_s \subseteq A$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
($A \subseteq \bigcup_s A_s$) Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0$; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.
($8 \Rightarrow 7$) Очевидно.

# Вычислимо перечислимые множества

## Доказательство (окончание).

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
$(A_0 = \varnothing)$ $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
$(A_s \subseteq A_{s+1})$ Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
$(A_s \subseteq A)$ Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
$(A \subseteq \bigcup_s A_s)$ Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0$; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.
$(8 \Rightarrow 7)$ Очевидно.
$(7 \Rightarrow 6)$ В самом деле, $A = \exists y Q(x, y)$, где $Q = \{\langle x, y\rangle | x \in A_y\}$ вычислимо ($A = \bigcup_y A_y$).

# Вычислимо перечислимые множества

## Доказательство (окончание).

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
$(A_0 = \varnothing)$ $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
$(A_s \subseteq A_{s+1})$ Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
$(A_s \subseteq A)$ Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
$(A \subseteq \bigcup_s A_s)$ Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0$; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.
$(8 \Rightarrow 7)$ Очевидно.
$(7 \Rightarrow 6)$ В самом деле, $A = \exists y Q(x, y)$, где $Q = \{\langle x, y\rangle | x \in A_y\}$ вычислимо $(A = \bigcup_y A_y)$.
$(6 \Rightarrow 1)$ В самом деле, $A = \delta\psi$, где $\psi(x) = \mu y.Q(x, y)$ — чвф. Если $x \in A$, то $Q(x, y)$ для некоторого $y$; возьмём наименьшее такое $y_0 = y$; следовательно, $\psi(x) \downarrow = y_0$. Если же $x \notin A$, то не выполняется $Q(x, y)$ ни для какого $y$ и, следовательно, $\psi(x) \uparrow$. $\square$

# Унарные vs $k$-местные



**Лемма С3.1.**

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — множество. Тогда $A$ вычислимо перечислимо, если и только если $c^n(A)$ вычислимо перечислимо.

# Унарные vs $k$-местные



**Лемма С3.1.**

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — множество. Тогда $A$ вычислимо перечислимо, если и только если $c^n(A)$ вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

($\Rightarrow$) Пусть $A \subseteq \omega^n$ вычислимо перечислимо; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, $\psi_1(x) = \psi(c_{n,1}(x), c_{n,2}(x), \ldots, c_{n,n}(x))$ также чвф и $c^n(A) = \delta\psi_1$; тем самым, $c^n(A)$ — впм.

($\Leftarrow$) Пусть $c^n(A) = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x)$; тогда $\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ также чвф и $A = \delta\psi_2$; таким образом, $A$ — впм. $\square$

# Унарные vs $k$-местные



**Лемма С3.2.**

Пусть $A \subseteq \omega$ — множество. Тогда $A$ вычислимо перечислимо, если и только если $B = \{\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle | A(c^n(k_1, k_2, \ldots, k_n))\}$ вычислимо перечислимо.

# Унарные vs $k$-местные

## Лемма С3.2.

Пусть $A \subseteq \omega$ — множество. Тогда $A$ вычислимо перечислимо, если и только если $B = \{\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle | A(c^n(k_1, k_2, \ldots, k_n))\}$ вычислимо перечислимо.

## Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $A \subseteq \omega$ вычислимо перечислимо; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x)$. Следовательно, $\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ также чвф и $B = \delta\psi_1$; тем самым, $B$ — впм.
($\Leftarrow$) Пусть $B = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; тогда $\psi_2(x) = \psi(c_{n,1}(x), c_{n,2}(x), \ldots, c_{n,n}(x))$ также чвф и $A = \delta\psi_2$; таким образом, $A$ — впм. □

# ВМ vs ВПМ



**Замечание С3.1.**

Трансформации, описанные в леммах С3.1 и С3.2, взаимно обратны. К примеру, $A \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C3.1}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C3.2}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_k$ и $A \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C3.2}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C3.1}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_1$ тождественны.

# ВМ vs ВПМ



**Замечание С3.1.**

Трансформации, описанные в леммах С3.1 и С3.2, взаимно обратны. К примеру, $A \in \mathrm{CEP}_k \overset{\text{C3.1}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\text{C3.2}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_k$ и $A \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\text{C3.2}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_k \overset{\text{C3.1}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_1$ тождественны.

**Лемма С3.3.**

Любое вычислимое множество вычислимо перечислимо.

# ВМ vs ВПМ

**Замечание С3.1.**

Трансформации, описанные в леммах С3.1 и С3.2, взаимно обратны. К примеру, $A \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C3.1}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C3.2}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_k$ и $A \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C3.2}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C3.1}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_1$ тождественны.

**Лемма С3.3.**

Любое вычислимое множество вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

Пусть $A \subseteq \omega$ — вычислимое множество. Тогда функция $\chi_A(x)$ вычислима и, следовательно, $\chi_A^*(x) = \mu y.[\chi_A(x) = 0]$ — чвф. По теореме С3.1(2), $A$ — впм. $\square$

# Операции на ВПМ



**Лемма С3.4.**

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

# Операции на ВПМ

**Лемма C3.4.**

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — чвф. Тогда $A \cap B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. $\square$

# Операции на ВПМ

**Лемма C3.4.**

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — чвф. Тогда $A \cap B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. $\square$

**Лемма C3.5.**

Пусть $A \subseteq \omega^k$, $B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их декартово произведение $A \times B$ также вычислимо перечислимо.

# Операции на ВПМ

**Лемма С3.4.**

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — чвф. Тогда $A \cap B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. □

**Лемма С3.5.**

Пусть $A \subseteq \omega^k$, $B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их декартово произведение $A \times B$ также вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

Пусть $A \subseteq \omega^k$, $B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — чвф. Тогда $A \times B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. □

# Операции на ВПМ



**Лемма С3.6.**

Пусть $A, B \subseteq \omega$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их объединение $A \cup B$ также вычислимо перечислимо.

# Операции на ВПМ

**Лемма C3.6.**

Пусть $A, B \subseteq \omega$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их объединение $A \cup B$ также вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

Пусть $A, B \subseteq \omega$ — впм; тогда по теореме C3.1(6), $A = \exists y Q_1(x, y)$, $B = \exists y Q_2(x, y)$, где $Q_1$ и $Q_2$ — вычислимые предикаты, и $A \cup B = \exists y (Q_1(x, y) \vee Q_2(x, y))$. Таким образом, $A \cup B$ — впм, по теореме C3.1(6). $\square$

# Операции на ВПМ

**Лемма С3.6.**

Пусть $A, B \subseteq \omega$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их объединение $A \cup B$ также вычислимо перечислимо.

**Доказательство.**

Пусть $A, B \subseteq \omega$ — впм; тогда по теореме С3.1(6), $A = \exists y Q_1(x, y)$, $B = \exists y Q_2(x, y)$, где $Q_1$ и $Q_2$ — вычислимые предикаты, и $A \cup B = \exists y (Q_1(x, y) \vee Q_2(x, y))$. Таким образом, $A \cup B$ — впм, по теореме С3.1(6). $\square$

**Лемма С3.7.**

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$ — вычислимо перечислимое множество. Тогда его проекция $\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ также вычислимо перечислима.

# Операции на ВПМ

**Доказательство.**

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$; тогда $c^{n+1}(A)$ также является впм, по лемме С3.1, и, по теореме С3.1(6), $c^{n+1}(A) = \exists t Q(x, t)$, где $Q$ — вычислимый предикат; следовательно,
$c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) = \exists z Q(c(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), l(z)), r(z))$.
Таким образом, $c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y))$ — впм, по теореме С3.1(6); по лемме С3.1, $\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ также впм. $\square$

# Операции на ВПМ



## Доказательство.

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$; тогда $c^{n+1}(A)$ также является впм, по лемме С3.1, и, по теореме С3.1(6), $c^{n+1}(A) = \exists t Q(x,t)$, где $Q$ — вычислимый предикат; следовательно,
$c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) = \exists z Q(c(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), l(z)), r(z))$.
Таким образом, $c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y))$ — впм, по теореме С3.1(6); по лемме С3.1, $\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ также впм. $\square$

## Лемма С3.8.

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$ — впм. Тогда следующие множества также будут вычислимо перечислимыми:

1. $\exists i \leqslant y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$;
2. $\exists i < y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$;
3. $\forall i \leqslant y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$;
4. $\forall i < y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$.

# Операции на ВПМ

**Доказательство.**

**1)** Так как
$\exists i \leqslant y A(x_1, x_2, \dots, x_n, i) = \exists i[(i \leqslant y) \wedge A(x_1, x_2, \dots, x_n, i)]$,
используя леммы С3.1–С3.5, С3.7, заключаем, что
$\exists i \leqslant y A(x_1, x_2, \dots, x_n, i)$ является впм.

**2)** Рассматривается аналогично предыдущему случаю.

**3)** Пусть $A = \delta\varphi$, где $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ — чвф. Тогда
$\forall i \leqslant y A(x_1, x_2, \dots, x_n, i) = \delta\varphi_1$, где

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \prod_{i=0}^{y} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, i).$$

**4)** Заметим, что $\forall i < y A(x_1, x_2, \dots, x_n, i) = \forall i \leqslant y\Big((y > 0) \wedge (\neg(i \geqslant y \dot{-} 1) \vee A(x_1, x_2, \dots, x_n, i))\Big)$. Остаётся применить леммы С3.1–С3.4 и п. 3. $\square$

# Операции на ВПМ

## Лемма С3.9.

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — впм и пусть $\psi_1$, $\psi_2$, …, $\psi_n$ — $k$-местные чвф. Тогда $B = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | A(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k),$
$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))\}$ также является вычислимо перечислимым множеством.

# Операции на ВПМ

## Лемма С3.9.

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — впм и пусть $\psi_1$, $\psi_2$, …, $\psi_n$ — $k$-местные чвф. Тогда $B = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | A(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))\}$ также является вычислимо перечислимым множеством.

## Доказательство.

Пусть $A = \delta\varphi$, где $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — чвф. Тогда $B = \delta\varphi_1$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varphi(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ — чвф. Таким образом, $B$ также является впм. $\square$

# Операции на ВПМ

**Лемма С3.9.**

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — впм и пусть $\psi_1$, $\psi_2$, …, $\psi_n$ — $k$-местные чвф. Тогда $B = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | A(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))\}$ также является вычислимо перечислимым множеством.

**Доказательство.**

Пусть $A = \delta\varphi$, где $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — чвф. Тогда $B = \delta\varphi_1$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varphi(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ — чвф. Таким образом, $B$ также является впм. $\square$

**Лемма С3.10.**

Пусть $A \subseteq \omega$ — впм и пусть $\varphi$ — чвф. Тогда $\varphi(A)$ также является вычислимо перечислимым множеством.

# Операции на ВПМ

**Доказательство.**

Пусть множество $A$ и функция $\varphi$ удовлетворяют посылке. По теореме С3.1(3), $A = \rho\psi$ для некоторой чвф $\psi(x)$ и $\varphi(A) = \rho\varphi_1$, где $\varphi_1(x) = \varphi(\psi(x))$ — чвф. Снова по теореме С3.1(3), $\varphi(A)$ — впм. $\square$

# Теорема Поста



**Теорема C3.2.**

Пусть $A \subseteq \omega$. Тогда $A$ вычислимо, если и только если $A$ и $\overline{A} = \omega \setminus A$ вычислимо перечислимы.

# Теорема Поста

**Теорема C3.2.**

Пусть $A \subseteq \omega$. Тогда $A$ вычислимо, если и только если $A$ и $\overline{A} = \omega \setminus A$ вычислимо перечислимы.

**Доказательство.**

($\Rightarrow$) Непосредственно следует из того, что любое вычислимое множество вычислимо перечислимо (см. лемму C3.3), а также того, что класс вычислимых множеств замкнут относительно операции дополнения (см. предложение C1.3).

# Теорема Поста

## Теорема С3.2.

Пусть $A \subseteq \omega$. Тогда $A$ вычислимо, если и только если $A$ и $\overline{A} = \omega \setminus A$ вычислимо перечислимы.

## Доказательство.

($\Rightarrow$) Непосредственно следует из того, что любое вычислимое множество вычислимо перечислимо (см. лемму С3.3), а также того, что класс вычислимых множеств замкнут относительно операции дополнения (см. предложение С1.3).

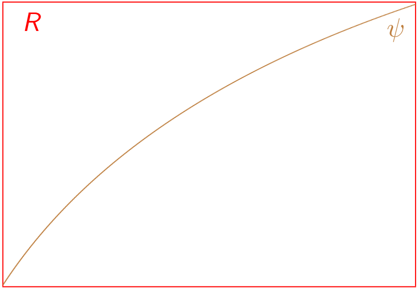
($\Leftarrow$) Пусть $A \subseteq \omega$ и $\overline{A} = \omega \setminus A$ — впм; по теореме С3.1(6), $A = \exists y Q_0(x, y)$ и $\overline{A} = \exists y Q_1(x, y)$, где $Q_0$ и $Q_1$ — вычислимые отношения. Определим $f(k) = \mu s[Q_0(k, s) \vee Q_1(k, s)]$; функция $f$ частично вычислима и всюду определена, поскольку $A \cup \overline{A} = \omega$. Далее, $k \in A \Leftrightarrow Q_0(k, f(k))$ и, следовательно, $\chi_A(k) = \chi_{Q_0}(k, f(k))$. Таким образом, $A$ вычислимо. $\square$

# Основные принципы: Униформизация



# Основные принципы: Униформизация





# Теорема об униформизации



**Теорема С3.3.**

Пусть $R \subseteq \omega^{n+1}$ — вп предикат. Тогда найдётся $n$-местная чвф $\psi$, униформизующая данный предикат, а именно, удовлетворяющая следующим условиям:

- $\delta\psi = \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$;
- $\Gamma_\psi \subseteq R$ (другими символами, $\forall \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \delta\psi . R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)))$.

# Теорема об униформизации

## Теорема C3.3.

Пусть $R \subseteq \omega^{n+1}$ — вп предикат. Тогда найдётся $n$-местная чвф $\psi$, униформизующая данный предикат, а именно, удовлетворяющая следующим условиям:

- $\delta\psi = \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$;
- $\Gamma_\psi \subseteq R$ (другими символами, $\forall \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \delta\psi . R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)))$.

## Доказательство.

Пусть $R \subseteq \omega^{n+1}$ — вп предикат; по лемме C3.1, множество $c^{n+1}(R) \subseteq \omega$ вп. Следовательно, $c^{n+1}(R) = \exists y Q(x, y)$ для некоторого вычислимого предиката $Q(x, y)$. Значит, $R = \exists y Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}), y)$. Положим $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l(\mu z . Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z)), r(z)))$. Покажем, что чвф $\psi$ удовлетворяет заключению теоремы.

# Теорема об униформизации



## Доказательство (продолжение).

$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow \Leftrightarrow \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. $(\Rightarrow)$ Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow = t_0$; тогда найдётся $z_0$ такое, что $\mu z.Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z)), r(z)) = z_0$ и $l(z_0) = t_0$. Следовательно, существует $z_0$ такое, что $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z_0)), r(z_0))$, откуда заключаем, что $R(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z_0))$. Таким образом, $\exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$.

# Теорема об униформизации



## Доказательство (продолжение).

$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)\downarrow \Leftrightarrow \exists y R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. ($\Rightarrow$) Пусть $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)\downarrow = t_0$; тогда найдётся $z_0$ такое, что $\mu z.Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, l(z)), r(z)) = z_0$ и $l(z_0) = t_0$. Следовательно, существует $z_0$ такое, что $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, l(z_0)), r(z_0))$, откуда заключаем, что $R(x_1, x_2, \dots, x_n, l(z_0))$. Таким образом, $\exists y R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$.
($\Leftarrow$) Пусть теперь $\exists y R(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$; тогда $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, y), t)$ для некоторых $y$ и $t$. Возьмём $z = c(y, t)$; далее, имеем $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, l(z)), r(z))$ для некоторого $z$. Выберем наименьшее $z_0 = z$, для которого выполняется данное отношение. Тогда $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = l(\mu z.Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, l(z)), r(z))) = l(z_0)$. Таким образом, $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)\downarrow$.

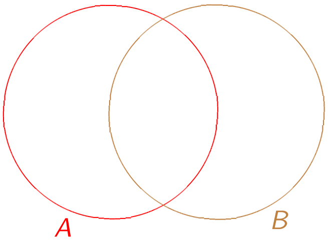
# Теорема об униформизации



## Доказательство (окончание).

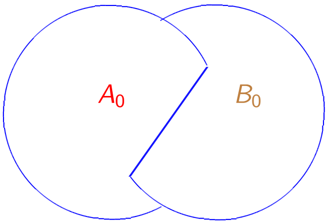
$\Gamma_\psi \subseteq R$. Пусть кортеж $\langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$ таков, что $\psi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\downarrow$; покажем, что $R(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0)$, где $t_0 = \psi(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Действительно, пусть $z_0$ таково, что $\mu z.Q(c^{n+1}(k_1, k_2, \ldots, k_n, l(z)), r(z)) = z_0$; тогда $l(z_0) = t_0$ и $Q(c^{n+1}(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0), r(z_0))$. Следовательно, $Q(c^{n+1}(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0), y)$ для некоторого $y$; таким образом, $R(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0)$. $\square$

# Основные принципы: Редукция



# Основные принципы: Редукция





# Теорема о редукции

**Теорема С3.4.**

Каковы бы ни были впм $A$, $B$, найдутся впм $A_0$ и $B_0$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$;
2. $A_0 \cup B_0 = A \cup B$;
3. $A_0 \cap B_0 = \varnothing$.

# Теорема о редукции

## Теорема C3.4.

Каковы бы ни были впм $A$, $B$, найдутся впм $A_0$ и $B_0$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$;
2. $A_0 \cup B_0 = A \cup B$;
3. $A_0 \cap B_0 = \varnothing$.

## Доказательство.

Пусть $A$, $B$ — впм; положим $R = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ (бинарный вп предикат). По теореме об униформизации (C3.3), существует чвф $\psi$ такая, что $\delta\psi = \exists y R(x, y) = A \cup B$ и $\rho\psi \subseteq \{0; 1\}$. Положим $A_0 = \psi^{-1}(0)$, $B_0 = \psi^{-1}(1)$; тогда $A_0 \cap B_0 = \psi^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(1) = \varnothing$, $A_0 \cup B_0 = \psi^{-1}(0) \cup \psi^{-1}(1) = \delta\psi = A \cup B$. Далее, $x \in A_0 \Rightarrow R(x, 0) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B_0 \Rightarrow R(x, 1) \Leftrightarrow x \in B$. $\square$

# Теорема о графике

**Теорема C3.5.**

Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — частичная функция. Тогда $\psi$ — чвф, если и только если $\Gamma_\psi = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, y\rangle | \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y\}$ — впм.

# Теорема о графике

## Теорема С3.5.

Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — частичная функция. Тогда $\psi$ — чвф, если и только если
$\Gamma_\psi = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, y\rangle | \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y\}$ — впм.

## Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — чвф. Определим чвф $\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightharpoons c^{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k))$; тогда $\rho\psi_2 = c^{k+1}(\Gamma_\psi)$, где $\psi_2(x) = c^{k+1}(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x), \psi(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x)))$. Таким образом, $c^{k+1}(\Gamma_\psi)$ — впм, а по лемме С3.1, $\Gamma_\psi$ также впм.
($\Leftarrow$) Пусть $\Gamma_\psi$ — впм; по теореме об униформизации (С3.3), существует чвф $\psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, для которой выполняются условия $\delta\psi_3 = \exists y \Gamma_\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = \delta\psi$ и $\Gamma_\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k, \psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_k))$, т.е. $\Gamma_{\psi_3} \subseteq \Gamma_\psi$. Таким образом, $\psi = \psi_3$ и $\psi$ также является чвф. $\square$

# Универсальные предикаты

## Определение C3.6.

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^n)$; предикат $R \subseteq \omega^{n+1}$ называется **универсальным для семейства** $\mathcal{S}$, если $\mathcal{S} = \{\lambda x_1 x_2 \dots x_n . R(e_0, x_1, x_2, \dots, x_n) | e_0 \in \omega\}$. Если $\mathcal{S}$ — семейство всех $k$-местных вычислимо перечислимых предикатов, то предикат $R$ будем называть просто **универсальным**.

# Универсальные предикаты



## Определение C3.6.

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^n)$; предикат $R \subseteq \omega^{n+1}$ называется **универсальным для семейства** $\mathcal{S}$, если $\mathcal{S} = \{\lambda x_1 x_2 \ldots x_n . R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) | e_0 \in \omega\}$. Если $\mathcal{S}$ — семейство всех $k$-местных вычислимо перечислимых предикатов, то предикат $R$ будем называть просто **универсальным**.

## Теорема C3.6.

Каково бы ни было $k \geqslant 1$, существует универсальный $k+1$-местный вычислимо перечислимый предикат.

# Универсальные предикаты

## Определение С3.6.

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^n)$; предикат $R \subseteq \omega^{n+1}$ называется **универсальным для семейства** $\mathcal{S}$, если $\mathcal{S} = \{\lambda x_1 x_2 \ldots x_n . R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) | e_0 \in \omega\}$. Если $\mathcal{S}$ — семейство всех $k$-местных вычислимо перечислимых предикатов, то предикат $R$ будем называть просто **универсальным**.

## Теорема С3.6.

Каково бы ни было $k \geqslant 1$, существует универсальный $k+1$-местный вычислимо перечислимый предикат.

## Доказательство.

Пусть $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — универсальная чвф (см. теорему С2.3); положим $R = \delta\varphi$ и покажем, что $R$ является универсальным $k+1$-местным вп предикатом.

# Универсальные предикаты



## Доказательство (окончание).

В самом деле, пусть $A \subseteq \omega^k$ — впм; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Так как $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — универсальная чвф, существует $e_0$ такое, что $\varphi(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Следовательно, $A = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)\}$. $\square$

# Универсальные предикаты

## Доказательство (окончание).

В самом деле, пусть $A \subseteq \omega^k$ — впм; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Так как $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — универсальная чвф, существует $e_0$ такое, что $\varphi(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Следовательно, $A = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)\}$. □

## Следствие C3.1.

Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (окончание).

В самом деле, пусть $A \subseteq \omega^k$ — впм; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Так как $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_k)$ — универсальная чвф, существует $e_0$ такое, что $\varphi(e_0, x_1, x_2, \dots, x_k) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Следовательно, $A = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_k\rangle | R(e_0, x_1, x_2, \dots, x_k)\}$. $\square$

## Следствие С3.1.

Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

## Доказательство.

Пусть последовательность $W_n$ вычислимо перечислимых множеств такова, что $R = \{\langle m, n\rangle | m \in W_n\}$ является универсальным бинарным вп предикатом. Покажем, что множество $A = \{n | n \in W_n\}$ удовлетворяет заключению следствия. В самом деле, $A$ вычислимо перечислимо.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (окончание).

Допустим, что оно вычислимо; тогда по теореме Поста (С3.2), $\overline{A} = \{n | n \notin W_n\}$ также вп. Так как $R$ является универсальным, $\overline{A} = W_{e_0}$ для подходящего $e_0$. Тем самым, $e_0 \in W_{e_0} \Leftrightarrow e_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow e_0 \notin W_{e_0}$, противоречие. □

# Универсальные предикаты



## Доказательство (окончание).

Допустим, что оно вычислимо; тогда по теореме Поста (C3.2), $\overline{A} = \{n | n \notin W_n\}$ также вп. Так как $R$ является универсальным, $\overline{A} = W_{e_0}$ для подходящего $e_0$. Тем самым, $e_0 \in W_{e_0} \Leftrightarrow e_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow e_0 \notin W_{e_0}$, противоречие. □

## Теорема C3.7 (Мучник)

Существует бинарный вычислимо перечислимый предикат, универсальный для семейства всех вычислимых множеств (как подсемейства семейства всех вычислимо перечислимых множеств).

# Универсальные предикаты

**Доказательство (окончание).**

Допустим, что оно вычислимо; тогда по теореме Поста (С3.2), $\overline{A} = \{n | n \notin W_n\}$ также вп. Так как $R$ является универсальным, $\overline{A} = W_{e_0}$ для подходящего $e_0$. Тем самым, $e_0 \in W_{e_0} \Leftrightarrow e_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow e_0 \notin W_{e_0}$, противоречие. □

**Теорема С3.7 (Мучник)**

Существует бинарный вычислимо перечислимый предикат, универсальный для семейства всех вычислимых множеств (как подсемейства семейства всех вычислимо перечислимых множеств).

**Доказательство.**

Пусть $\varphi(x_0, x_1)$ — чвф, универсальная для семейства всех чвф, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$. По теореме о графике (С3.5) и лемме С3.1, $c^3(\Gamma_\varphi)$ — впм.

# Универсальные предикаты



## Доказательство (продолжение).

Следовательно, существует медленно растущая сильно вычислимая последовательность $A_s$ вычислимо перечислимых множеств (см. теорему С3.1(8)), являющаяся сильной аппроксимацией для впм $c^3(\Gamma_\varphi)$. В процессе конструкции будет строиться последовательность $B_n$ множеств, удовлетворяющая следующим условиям:

**А)** $R = \{\langle n, m\rangle | m \in B_n\}$ вп;

**Б)** если $\varphi_n(x) \leftrightharpoons \lambda x.\varphi(n, x)$ всюду определена, то $\varphi_n = \chi_{B_n}$;

**В)** если $\varphi_n(x)$ не является всюду определенной, то $B_n$ конечно.

Из условий (А), (Б), (В) будет следовать, что $R$ — вп предикат, универсальный для семейства всех вм. В самом деле, $R$ вп, по (А). Кроме того, для любого $n \in \omega$ множество $B_n$ вычислимо: если $\varphi_n$ всюду определена, то $\varphi_n$ вычислима и $\varphi_n = \chi_{B_n}$; если же $\varphi_n$ не является всюду определенной, то $B_n$ конечно и, в частности, вычислимо. В обратную сторону, пусть $C$ — вычислимое множество; тогда найдётся $n_0 \in \omega$, для которого выполняется $\varphi_{n_0} = \chi_C$; по (Б), $C = B_{n_0}$.

# Универсальные предикаты



## Доказательство (продолжение).

Прежде, чем перейти к описанию конструкции, введём вспомогательные функции и множества: $\varphi_{n,s}$ — конечная функция с $\Gamma_{\varphi_{n,s}} = \{\langle m, k\rangle | c^3(n, m, k) \in A_s\}$;
$k(n, s) = \max\{l | \forall i < l(i \in \delta\varphi_{n,s})\}$; $B_n = \bigcup_s B_{n,s}$;
$R_s = \bigcup_n c(\{n\} \times B_{n,s})$.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (продолжение).

Прежде, чем перейти к описанию конструкции, введём вспомогательные функции и множества: $\varphi_{n,s}$ — конечная функция с $\Gamma_{\varphi_{n,s}} = \{\langle m,k\rangle | c^3(n,m,k) \in A_s\}$;
$k(n,s) = \max\{l | \forall i < l (i \in \delta\varphi_{n,s})\}$; $B_n = \bigcup_s B_{n,s}$;
$R_s = \bigcup_n c(\{n\} \times B_{n,s})$.

**КОНСТРУКЦИЯ**

**Шаг $s$.** Для всех $n$ и $s$ положим $B_{n,s} = \{m < k(n,s) | \varphi_{n,s}(m) = 0\}$.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (продолжение).

Прежде, чем перейти к описанию конструкции, введём вспомогательные функции и множества: $\varphi_{n,s}$ — конечная функция с $\Gamma_{\varphi_{n,s}} = \{\langle m, k\rangle | c^3(n, m, k) \in A_s\}$;
$k(n, s) = \max\{l | \forall i < l(i \in \delta\varphi_{n,s})\}$; $B_n = \bigcup_s B_{n,s}$;
$R_s = \bigcup_n c(\{n\} \times B_{n,s})$.

**КОНСТРУКЦИЯ**

**Шаг $s$.** Для всех $n$ и $s$ положим $B_{n,s} = \{m < k(n, s) | \varphi_{n,s}(m) = 0\}$.

Докажем теперь справедливость пп. (А), (Б), (В).

**А) $R_s$ — сильная аппроксимация для $c(R)$.** В самом деле, пусть вф $f_0$ из определения С3.3(3), а именно, $m \in A_s \Rightarrow m \leqslant f_0(s)$ для всех $m$ и $s$; тогда $m \in R_s \Rightarrow m \leqslant c(m, \varphi_{l(m)}(r(m))) = c^3(l(m), r(m), \varphi_{l(m)}(r(m))) \in A_s \Rightarrow m \leqslant f_0(s)$.

# Универсальные предикаты



## Доказательство (продолжение).

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность $R_s$ сильно вычислима.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (продолжение).

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность $R_s$ сильно вычислима.

$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (продолжение).

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность $R_s$ сильно вычислима.

$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.

$(R_s \subseteq R_{s+1})$ Пусть $m \in R_s$; тогда $(\imath)$ $c(m, 0) \in A_s$ и, следовательно, $c(m, 0) \in A_{s+1}$; $(\imath\imath)$ кроме того, $\delta\varphi_{n,s} \subseteq \delta\varphi_{n,s+1}$, поэтому $k(n, s) \leqslant k(n, s + 1)$ для всех $n$; тем самым, $r(m) < k(l(m), s) \Rightarrow r(m) < k(l(m), s + 1)$.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (продолжение).

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность $R_s$ сильно вычислима.
$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.
$(R_s \subseteq R_{s+1})$ Пусть $m \in R_s$; тогда $(\imath)$ $c(m, 0) \in A_s$ и, следовательно, $c(m, 0) \in A_{s+1}$; $(\imath\imath)$ кроме того, $\delta\varphi_{n,s} \subseteq \delta\varphi_{n,s+1}$, поэтому $k(n, s) \leqslant k(n, s+1)$ для всех $n$; тем самым, $r(m) < k(l(m), s) \Rightarrow r(m) < k(l(m), s+1)$.
$(R_s \subseteq c(R))$ Пусть $m \in R_s$; тогда $r(m) \in B_{l(m),s}$ и, следовательно, $r(m) \in B_{l(m)}$; таким образом, $\langle l(m), r(m)\rangle \in R$ и $m = c(l(m), r(m)) \in c(R)$.

# Универсальные предикаты



## Доказательство (продолжение).

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность $R_s$ сильно вычислима.

$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.

$(R_s \subseteq R_{s+1})$ Пусть $m \in R_s$; тогда **(i)** $c(m, 0) \in A_s$ и, следовательно, $c(m, 0) \in A_{s+1}$; **(ii)** кроме того, $\delta\varphi_{n,s} \subseteq \delta\varphi_{n,s+1}$, поэтому $k(n, s) \leqslant k(n, s+1)$ для всех $n$; тем самым, $r(m) < k(l(m), s) \Rightarrow r(m) < k(l(m), s+1)$.

$(R_s \subseteq c(R))$ Пусть $m \in R_s$; тогда $r(m) \in B_{l(m),s}$ и, следовательно, $r(m) \in B_{l(m)}$; таким образом, $\langle l(m), r(m)\rangle \in R$ и $m = c(l(m), r(m)) \in c(R)$.

$(c(R) \subseteq \bigcup_s R_s)$ Пусть $m \in c(R)$; тогда $r(m) \in B_{l(m)} = \bigcup_s B_{l(m),s}$ и, следовательно, $r(m) \in B_{l(m),s_0}$ для подходящего $s_0$. Таким образом, $m = c(l(m), r(m)) \in R_{s_0}$.

# Универсальные предикаты

## Доказательство (окончание).

**Б) Если $\varphi_n(x)$ всюду определена, то $\varphi_n = \chi_{B_n}$.** Сначала индукцией по $l \in \omega$ покажем, что **для всех $l$ выполняется $k(n,s) \geqslant l$ для подходящего $s$**. Если $l = 0$, то положим $s = 0$. Предположим, что $k(n,s) \geqslant l_0$ для подходящего $s = s_0$. Так как $l_0 \in \delta\varphi_n$, найдётся шаг $s_1$ такой, что $l_0 \in \delta\varphi_{n,s_1}$. Далее, возьмём $s_2 = \max\{s_0, s_1\}$; тогда $k(n, s_2) \geqslant l_0 + 1$. Пусть теперь последовательность $s_m$ такова, что $k(n, s_m) \geqslant m$; тогда если $\varphi_n(m) = 0$, то $\varphi_{n,s_m}(m) = 0$ и $m \in B_{n,s_m} \subseteq B_n$. Если же $\varphi_n(m) = 1$, то $\varphi_{n,s}(m) \neq 0$ ни для какого $s$ и, следовательно, $m \notin B_{n,s}$ для всех $s$; тем самым, $m \notin B_n$.

**В) Если $\varphi_n(x)$ не является всюду определенной, то $B_n$ конечно.** Пусть $\varphi_n(x)$ — функция, не являющаяся всюду определённой. Пусть $k_0$ — наименьшее число, для которого $\varphi_n(k_0)\uparrow$. Тогда $k(n,s) \leqslant k_0$ для всех $s$ и, следовательно, $m \in B_n \Rightarrow m < k_0$. Таким образом, $B_n$ конечно. □

# Универсальные предикаты

**Следствие С3.2.**

Существует вычислимо перечислимое множество, не являющееся вычислимым.

# Универсальные предикаты

## Следствие С3.2.

Существует вычислимо перечислимое множество, не являющееся вычислимым.

## Доказательство.

Пусть $R$ — вп предикат, универсальный для семейства всех вычислимых множеств (см. теорему Мучника (С3.7)). Покажем, что $c(R)$ удовлетворяет заключению следствия. По лемме С3.1, множество $c(R)$ вычислимо перечислимо. Из леммы С15(4) вытекает, что достаточно показать, что $R$ не вычислимо. В самом деле, если бы $R$ было вычислимым, то $\chi_R(x_0, x_1)$ была чвф, универсальной для всех чвф, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, что противоречило бы предложению С12. $\square$

# Универсальный язык



**Определение C3.7.**

Язык $L \subseteq (\Sigma_1 \cup \Sigma)^*$ называется **универсальным** для семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$, если $\mathcal{S} = \{\{\beta \in \Sigma^* \mid \alpha\hat{}\beta \in L\} \mid \alpha \in \Sigma_1^*\}$.

**Упражнение C3.2.**

Докажите, что не существует регулярного языка, универсального для семейства всех регулярных языков фиксированного непустого конечного алфавита.

# Вычислимые множества



## Предложение С3.2.

Для $A \subseteq \omega$ выполняются следующие условия:

1. Множество $A$ вычислимо и бесконечно, если и только если $A = \rho f$ для некоторой строго возрастающей вф $f$;
2. Множество $A \neq \varnothing$ вычислимо, если и только если $A = \rho f$ для некоторой возрастающей вф $f$.

# Вычислимые множества



## Предложение C3.2.

Для $A \subseteq \omega$ выполняются следующие условия:

1. Множество $A$ вычислимо и бесконечно, если и только если $A = \rho f$ для некоторой строго возрастающей вф $f$;
2. Множество $A \neq \varnothing$ вычислимо, если и только если $A = \rho f$ для некоторой возрастающей вф $f$.

## Доказательство.

1) ($\Rightarrow$) Пусть $A$ бесконечно и вычислимо; покажем, что функция, перечисляющая $A$ в порядке строгого возрастания, вычислима. Действительно, пусть $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots\}$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} f(0) = a_0, \\ f(x+1) = \mu y(y \in A \wedge (y > f(x))); \end{array}\right.$$

и, следовательно, вычислимая функция $f$ перечисляет множество $A$ в порядке строгого возрастания.

# Вычислимые множества

## Доказательство (продолжение).

($\Leftarrow$) Так как $n \in A \Leftrightarrow \exists y \leqslant n(f(y) = n)$, заключаем, что $A$ вычислимо.

# Вычислимые множества

## Доказательство (продолжение).

($\Leftarrow$) Так как $n \in A \Leftrightarrow \exists y \leqslant n(f(y) = n)$, заключаем, что $A$ вычислимо.

# Вычислимые множества

## Доказательство (продолжение).

($\Leftarrow$) Так как $n \in A \Leftrightarrow \exists y \leqslant n(f(y) = n)$, заключаем, что $A$ вычислимо.

2) ($\Rightarrow$) Если $A$ бесконечно, то следует воспользоваться п. 1. Пусть теперь $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно; тогда $f(x) = a_0 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x) + a_1 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-1|) + \ldots + a_{k-1} \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-(k-1)|) + a_k \cdot \mathrm{sg}(\mathrm{s}(x) \dot{-} k)$ вычислима, возрастающая и $\rho f = A$.

# Вычислимые множества

## Доказательство (продолжение).

($\Leftarrow$) Так как $n \in A \Leftrightarrow \exists y \leqslant n(f(y) = n)$, заключаем, что $A$ вычислимо.

2) ($\Rightarrow$) Если $A$ бесконечно, то следует воспользоваться п. 1. Пусть теперь $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно; тогда $f(x) = a_0 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x) + a_1 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-1|) + \ldots + a_{k-1} \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-(k-1)|) + a_k \cdot \mathrm{sg}(\mathrm{s}(x) \dot{-} k)$ вычислима, возрастающая и $\rho f = A$.

($\Leftarrow$) Сначала покажем, что функция, осуществляющая перечисление наименьших номеров в порядке строгого возрастания, вычислима:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(x+1) = \mu y.[(y > g(x)) \wedge (f(y) > f(g(x)))]. \end{array}\right.$$

Если $A$ бесконечно, то $g(x)$ всюду определена и, следовательно, $f_0(x) \leftrightharpoons f(g(x))$ вычислима; к тому же, $f_0(x)$ строго возрастающая и $\rho f_0 = A$, а из п. 1 следует, что $A$ вычислимо.

# Вычислимые множества



## Доказательство (окончание).

Если же $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно, то функция $\chi_A(x) = \mathrm{sg}(|x - a_1| \cdot |x - a_2| \cdot \ldots \cdot |x - a_k|)$ вычислима, а следовательно, $A$ также вычислимо. $\square$

# Вычислимые множества

## Доказательство (окончание).

Если же $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно, то функция $\chi_A(x) = \mathrm{sg}(|x - a_1| \cdot |x - a_2| \cdot \ldots \cdot |x - a_k|)$ вычислима, а следовательно, $A$ также вычислимо. $\square$

## Теорема С3.8.

Пусть $A$ — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существуют непересекающиеся бесконечные вычислимые множества $B_0, B_1 \subseteq A$.

# Вычислимые множества

## Доказательство (окончание).

Если же $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно, то функция $\chi_A(x) = \mathrm{sg}(|x - a_1| \cdot |x - a_2| \cdot \ldots \cdot |x - a_k|)$ вычислима, а следовательно, $A$ также вычислимо. □

## Теорема С3.8.

Пусть $A$ — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существуют непересекающиеся бесконечные вычислимые множества $B_0, B_1 \subseteq A$.

## Доказательство.

Так как $A$ — бесконечное впм, имеем $A = \rho f$ для некоторой инъективной вф $f$ (см. теорему С3.1(5)). Определим вспомогательную вф $g(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(x+1) = \mu y.[(y > g(x)) \wedge (f(y) > f(g(x)))]. \end{array}\right.$$

Тогда вычислимая функция $f_0(x) = f(g(x))$ строго возрастающая.

# Вычислимые множества



## Доказательство (окончание).

Положим $h_0(x) = f_0(2 \cdot x + 1)$ и $h_1(x) = f_0(2 \cdot x)$. Данные функции вычислимы и, к тому же, строго возрастающие, поэтому $B_0 = \rho h_0$ и $B_1 = \rho h_1$ — вычислимые бесконечные множества, по предложению C3.2(1). Кроме того, $B_0 \cap B_1 = \varnothing$, что следует из свойства инъективности функции $f_0(x)$. Также имеем
$B_0 \cup B_1 = \rho h_0 \cup \rho h_1 \subseteq \rho f_0 \subseteq \rho f = A$. $\square$

# Вычислимые множества

## Доказательство (окончание).

Положим $h_0(x) = f_0(2 \cdot x + 1)$ и $h_1(x) = f_0(2 \cdot x)$. Данные функции вычислимы и, к тому же, строго возрастающие, поэтому $B_0 = \rho h_0$ и $B_1 = \rho h_1$ — вычислимые бесконечные множества, по предложению C3.2(1). Кроме того, $B_0 \cap B_1 = \varnothing$, что следует из свойства инъективности функции $f_0(x)$. Также имеем $B_0 \cup B_1 = \rho h_0 \cup \rho h_1 \subseteq \rho f_0 \subseteq \rho f = A$. $\square$

## Следствие C3.3.

Пусть $A$ — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существует бесконечное вычислимое множество $B \subseteq A$ такое, что $A \setminus B$ бесконечно.

# Вычислимые множества

## Доказательство (окончание).

Положим $h_0(x) = f_0(2 \cdot x + 1)$ и $h_1(x) = f_0(2 \cdot x)$. Данные функции вычислимы и, к тому же, строго возрастающие, поэтому $B_0 = \rho h_0$ и $B_1 = \rho h_1$ — вычислимые бесконечные множества, по предложению C3.2(1). Кроме того, $B_0 \cap B_1 = \varnothing$, что следует из свойства инъективности функции $f_0(x)$. Также имеем
$B_0 \cup B_1 = \rho h_0 \cup \rho h_1 \subseteq \rho f_0 \subseteq \rho f = A$. □

## Следствие C3.3.

Пусть $A$ — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существует бесконечное вычислимое множество $B \subseteq A$ такое, что $A \setminus B$ бесконечно.

## Доказательство.

Пусть $A$ — бесконечное впм. Возьмём в качестве $B$ множество $B_0$. Тогда $B$ вычислимо и бесконечно. Кроме того, $A \setminus B \supseteq B_1$, поэтому $A \setminus B$ бесконечно. □

# Максимальные множества



**Определение С3.8.**

Вычислимо перечислимое множество $A$ называется **максимальным**, если каково бы ни было впм $B \supseteq A$, выполняется следующее: $|B - A| < \infty$ или $|\omega - B| < \infty$.

# Максимальные множества



**Определение С3.8.**

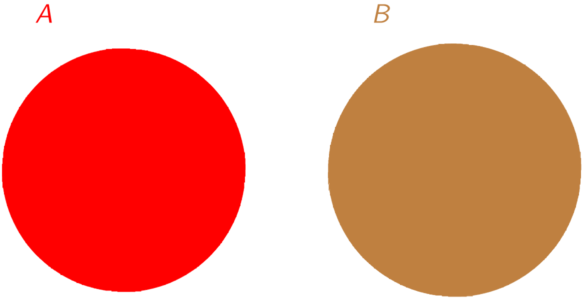
Вычислимо перечислимое множество $A$ называется **максимальным**, если каково бы ни было впм $B \supseteq A$, выполняется следующее: $|B - A| < \infty$ или $|\omega - B| < \infty$.

**Упражнение С3.3.**

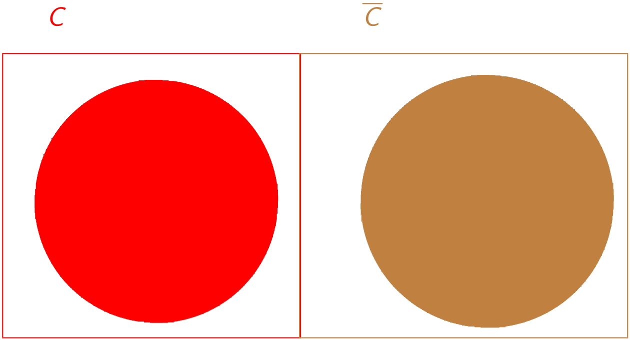
Максимальные множества существуют.

# Основные принципы: Отделимость





# Основные принципы: Отделимость



# Неотделимая пара

## Определение C3.9.

Непересекающиеся вычислимо перечислимые множества $A \subseteq \omega$ и $B \subseteq \omega$ называются **вычислимо отделимыми**, если существует вычислимое множество $C \subseteq \omega$ такое, что $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. В противном случае, $A$ и $B$ называются **вычислимо неотделимыми**.

# Неотделимая пара

**Определение C3.9.**

Непересекающиеся вычислимо перечислимые множества $A \subseteq \omega$ и $B \subseteq \omega$ называются **вычислимо отделимыми**, если существует вычислимое множество $C \subseteq \omega$ такое, что $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. В противном случае, $A$ и $B$ называются **вычислимо неотделимыми**.

**Теорема C3.9.**

Существует вычислимо неотделимая пара вычислимо перечислимых множеств.

# Неотделимая пара

## Определение С3.9.

Непересекающиеся вычислимо перечислимые множества $A \subseteq \omega$ и $B \subseteq \omega$ называются **вычислимо отделимыми**, если существует вычислимое множество $C \subseteq \omega$ такое, что $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. В противном случае, $A$ и $B$ называются **вычислимо неотделимыми**.

## Теорема С3.9.

Существует вычислимо неотделимая пара вычислимо перечислимых множеств.

## Доказательство.

Пусть $\varphi(x, y)$ — чвф, универсальная для семейства всех частично вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$. Положим $A_0 = \{e | \varphi(e, e) \downarrow = 1\}$ и $A_1 = \{e | \varphi(e, e) \downarrow = 0\}$ и докажем (методом от противного), что пара $A_0$ и $A_1$ вычислима неотделима.

# Неотделимая пара

## Доказательство (окончание).

Допустим, что вм $C$ отделяет $A_0$ от $A_1$, а именно, $A_0 \subseteq C \subseteq \overline{A_1}$. Тогда $\chi_C$ — вф, принимающая значения 0 и 1. Значит, $\chi_C = \lambda x.\varphi(e_0, x)$ для подходящего $e_0$, причём $\varphi(e_0, e_0)\downarrow$. Если $\varphi(e_0, e_0) = 1$, то $e_0 \in A_0$ и, следовательно, $e_0 \in C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 0$; если же $\varphi(e_0, e_0) = 0$, то $e_0 \in A_1$ и, следовательно, $e_0 \notin C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 1$; в любом случае приходим к противоречию. $\square$

# Неотделимая пара



## Доказательство (окончание).

Допустим, что вм $C$ отделяет $A_0$ от $A_1$, а именно, $A_0 \subseteq C \subseteq \overline{A_1}$. Тогда $\chi_C$ — вф, принимающая значения 0 и 1. Значит, $\chi_C = \lambda x.\varphi(e_0, x)$ для подходящего $e_0$, причём $\varphi(e_0, e_0)\downarrow$. Если $\varphi(e_0, e_0) = 1$, то $e_0 \in A_0$ и, следовательно, $e_0 \in C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 0$; если же $\varphi(e_0, e_0) = 0$, то $e_0 \in A_1$ и, следовательно, $e_0 \notin C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 1$; в любом случае приходим к противоречию. $\square$

## Следствие С3.4.

Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

# Неотделимая пара

## Доказательство (окончание).

Допустим, что вм $C$ отделяет $A_0$ от $A_1$, а именно, $A_0 \subseteq C \subseteq \overline{A_1}$. Тогда $\chi_C$ — вф, принимающая значения 0 и 1. Значит, $\chi_C = \lambda x.\varphi(e_0, x)$ для подходящего $e_0$, причём $\varphi(e_0, e_0)\downarrow$. Если $\varphi(e_0, e_0) = 1$, то $e_0 \in A_0$ и, следовательно, $e_0 \in C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 0$; если же $\varphi(e_0, e_0) = 0$, то $e_0 \in A_1$ и, следовательно, $e_0 \notin C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 1$; в любом случае приходим к противоречию. □

## Следствие С3.4.

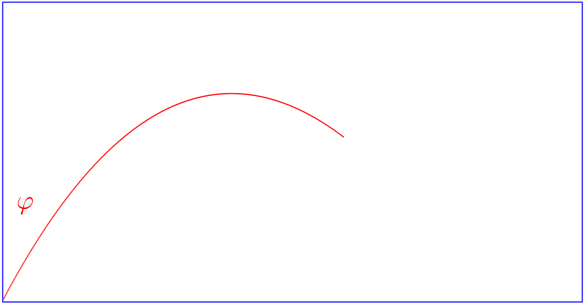
Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

## Доказательство.

Пусть $A_0$ и $A_1$ — вычислимо неотделимая пара непересекающихся впм. Тогда $A_0$ вычислимо перечислимо; докажем (методом от противного), что оно не вычислимо. В самом деле, если бы оно было вычислимым, $A_0$ отделялось бы от $A_1$ вычислимым множеством $A_0$. □

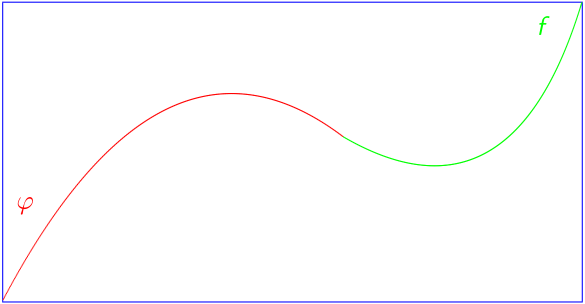
# Основные принципы: Продолжимость





# Основные принципы: Продолжимость





# Продолжение



**Определение С3.10.**

Пусть $\varphi(x)$ — частичная функция. Всюду определенная функция $f(x)$ называется **продолжением функции** $\varphi$, если $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.

# Продолжение



## Определение C3.10.

Пусть $\varphi(x)$ — частичная функция. Всюду определенная функция $f(x)$ называется **продолжением функции** $\varphi$, если $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.

## Теорема C3.10.

Пусть $A$ — впм и пусть $A_s$ — сильная аппроксимация для $A$. Тогда $\psi(x) = \mu s.[x \in A_s]$ имеет вычислимое продолжение, если и только если $A$ вычислимо.

# Продолжение

**Определение C3.10.**

Пусть $\varphi(x)$ — частичная функция. Всюду определенная функция $f(x)$ называется **продолжением функции** $\varphi$, если $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.

**Теорема C3.10.**

Пусть $A$ — впм и пусть $A_s$ — сильная аппроксимация для $A$. Тогда $\psi(x) = \mu s.[x \in A_s]$ имеет вычислимое продолжение, если и только если $A$ вычислимо.

**Доказательство.**

($\Leftarrow$) Пусть $A$ вычислимо; тогда $f(x) \leftrightharpoons \mu s.[(x \notin A) \vee (x \in A_s)]$ вычислима и $\Gamma_\psi \subseteq \Gamma_f$.

($\Rightarrow$) Пусть $f$ — вычислимое продолжение функции $\psi$; тогда $x \in A \Leftrightarrow x \in A_{f(x)}$ и, следовательно, $A$ вычислимо. □

# Продолжение

**Следствие C3.5.**

Существует частично вычислимая функция, не имеющая вычислимого продолжения.

# Продолжение



**Следствие С3.5.**

Существует частично вычислимая функция, не имеющая вычислимого продолжения.

**Доказательство.**

Пусть $A$ — вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество (см., например, следствие С3.4). Возьмём сильную аппроксимацию $A_s$ для множества $A$. По теореме С3.10, частично вычислимая функция $\psi(x) \leftrightharpoons \mu s.[x \in A_s]$ не имеет вычислимого продолжения. $\square$

Спасибо за внимание.