Центральная предельная теорема

Смысл: при выполнении определенных условий распределение суммы произвольных случайных величин сходится к нормальной функции распределения.

Центральная предельная теорема

Смысл: при выполнении определенных условий распределение суммы произвольных случайных величин сходится к нормальной функции распределения.

ЦПТ в форме **локальной** теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 3. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$.

Центральная предельная теорема

Смысл: при выполнении определенных условий распределение суммы произвольных случайных величин сходится к нормальной функции распределения.

ЦПТ в форме **локальной** теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 3. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$.

Обозначим $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Центральная предельная теорема

Смысл: при выполнении определенных условий распределение суммы произвольных случайных величин сходится к нормальной функции распределения.

ЦПТ в форме **локальной** теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 3. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$.

Обозначим $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\boxed{P(X = m) \to \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m)},$$

Центральная предельная теорема

Смысл: при выполнении определенных условий распределение суммы произвольных случайных величин сходится к нормальной функции распределения.

ЦПТ в форме **локальной** теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 3. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$.

Обозначим $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\boxed{P(X = m) \to \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m)},$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - плотность стандартного нормального распределения.

Идея доказательства: по формуле Бернулли

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \ .$$

Идея доказательства: по формуле Бернулли $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. По формуле Стирлинга,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \text{ при } n \to \infty.$$

Идея доказательства: по формуле Бернулли $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. По формуле Стирлинга,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m} \approx$$

Идея доказательства: по формуле Бернулли

$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. По формуле Стирлинга,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \text{ при } n\to\infty.$$

Тогда

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\; m^m e^{-m} \sqrt{2\pi(n-m)}\; (n-m)^{n-m} e^{-(n-m)}}.$$

Идея доказательства: по формуле Бернулли $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. По формуле Стирлинга,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\; m^m e^{-m} \sqrt{2\pi(n-m)}\; (n-m)^{n-m} e^{-(n-m)}}.$$

Из $x_m = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow m = np + x_m\sqrt{npq}$ и $n-m = nq - x_m\sqrt{npq}$.

Идея доказательства: по формуле Бернулли $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. По формуле Стирлинга,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \text{ при } n\to\infty.$$

Тогда

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\; m^m e^{-m} \sqrt{2\pi(n-m)}\; (n-m)^{n-m} e^{-(n-m)}}.$$

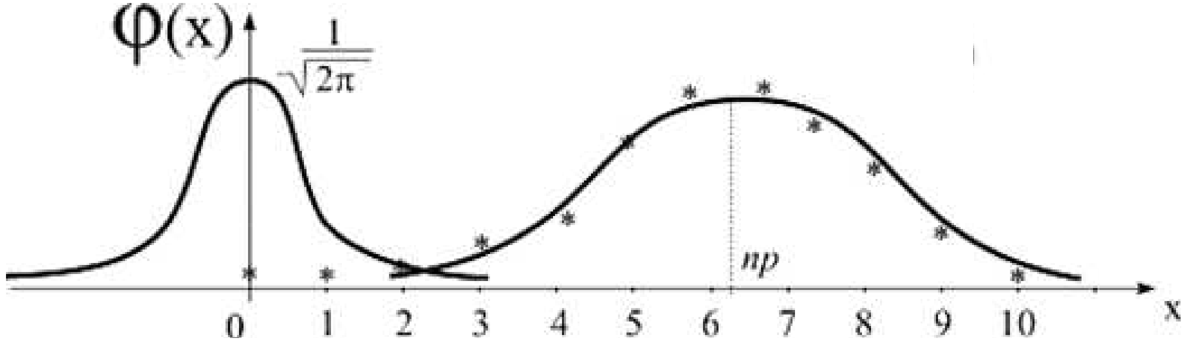
Из $x_m = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow m = np + x_m\sqrt{npq}$ и $n-m = nq - x_m\sqrt{npq}$.

После преобразований и отбрасывания бесконечно малых выше второго порядка:

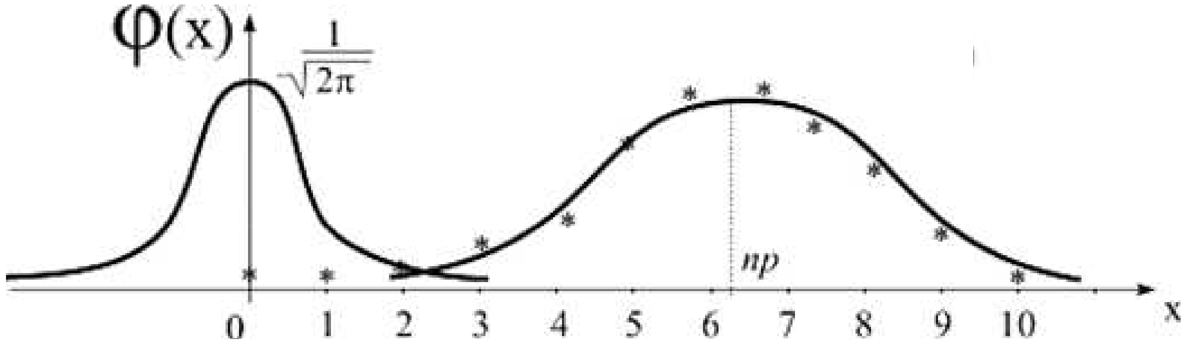
$$C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}}.$$

Таким образом, $\boxed{Bin(n,\ p) \approx N(np,\ \sqrt{npq})}$.

Таким образом, $\boxed{Bin(n,\ p) \approx N(np,\ \sqrt{npq})}$.

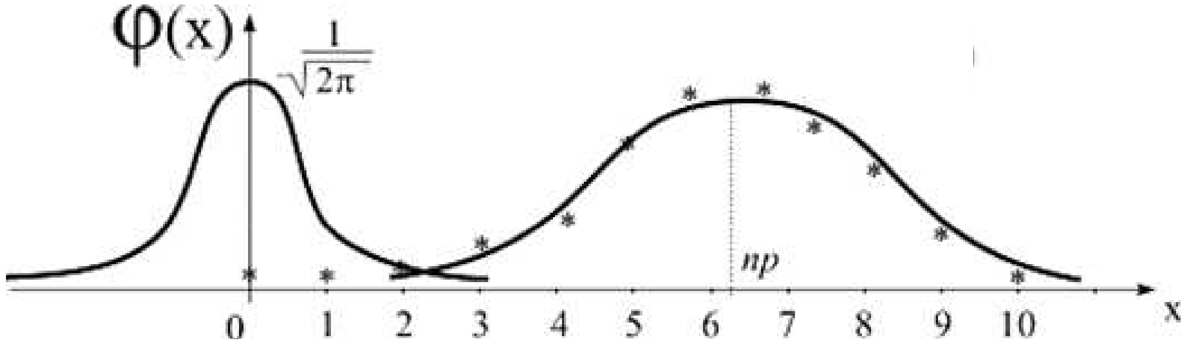


Таким образом, $\boxed{Bin(n,\ p) \approx N(np,\ \sqrt{npq})}$.



Пример. Найти вероятность того, что событие A появится ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность события в каждом испытании равна 0,2.

Таким образом, $\boxed{Bin(n,\ p) \approx N(np,\ \sqrt{npq})}$.

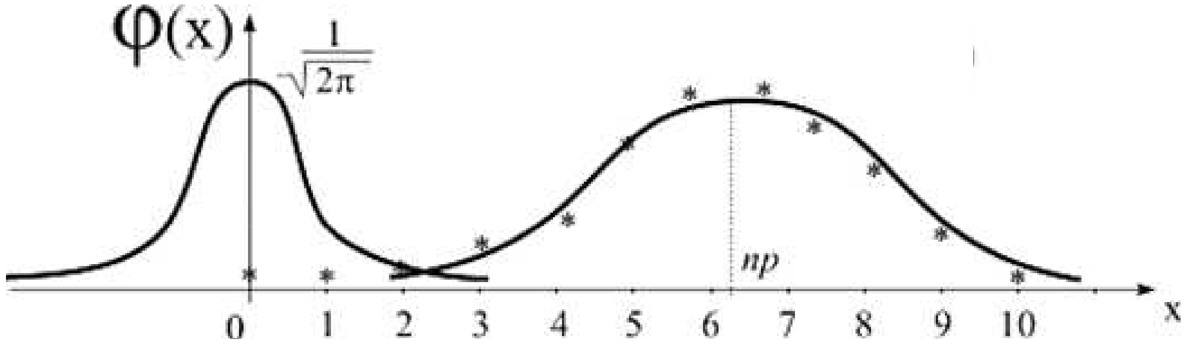


Пример. Найти вероятность того, что событие A появится ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность события в каждом испытании равна 0,2.

Решение.

$$p = 0,2; \quad n = 400; \quad m = 80; \qquad x_m = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0$$

Таким образом, $\boxed{Bin(n,\ p) \approx N(np,\ \sqrt{npq})}$.

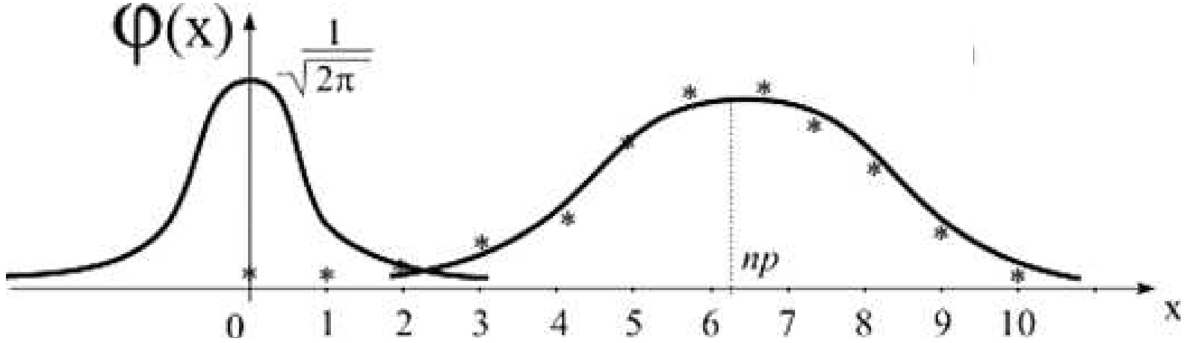


Пример. Найти вероятность того, что событие A появится ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность события в каждом испытании равна 0,2.
Решение.

$$p = 0,2;\ \ n = 400;\ \ m = 80; \quad x_m = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3889$$

Таким образом, $\boxed{Bin(n,\ p) \approx N(np,\ \sqrt{npq})}$.



Пример. Найти вероятность того, что событие A появится ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность события в каждом испытании равна 0,2.

Решение.

$$p = 0,2;\ \ n = 400;\ \ m = 80;\quad x_m = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3889$$

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

ЦПТ в форме **интегральной** теоремы Муавра-Лапласа.

Теорема 4. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q=1-p$.

ЦПТ в форме **интегральной** теоремы Муавра-Лапласа.

Теорема 4. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q=1-p$. Тогда при $n\to\infty$

$$P\left(A\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le B\right)\to\int_A^B\varphi(x)dx=\Phi_0(B)-\Phi_0(A),$$

где Φ_0 - функция Лапласа.

ЦПТ в форме **интегральной** теоремы Муавра-Лапласа.

Теорема 4. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$. Тогда при $n \to \infty$

$$P\left(A \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le B \right) \to \int_A^B \varphi(x)dx = \Phi_0(B) - \Phi_0(A),$$

где Φ_0 - функция Лапласа.

Схема доказательства. $P(A \le \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} \le B) =$

$$= \sum_{m \,:\, A \le x_m \le B} C_n^m p^m q^{n-m}$$

ЦПТ в форме **интегральной** теоремы Муавра-Лапласа.

Теорема 4. Пусть m - число успехов в схеме Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$. Тогда при $n \to \infty$

$$P\left(A \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le B \right) \to \int_A^B \varphi(x)dx = \Phi_0(B) - \Phi_0(A),$$

где Φ_0 - функция Лапласа.

Схема доказательства. $P(A \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le B) =$

$= \sum_{m\,:\,A \le x_m \le B} C_n^m p^m q^{n-m}$; для всех m выполнена локальная теорема Муавра-Лапласа $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P\left(A \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq B \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\,:\,A \leq x_m \leq B} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}},$$

$$\Rightarrow \quad P\left(A \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le B \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\ :\ A \le x_m \le B} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}},$$

причем соседние точки суммирования находятся друг от друга на расстоянии $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = 1 \big/ \sqrt{npq} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P\left(A \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le B \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\ :\ A \le x_m \le B} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}},$$

причем соседние точки суммирования находятся друг от друга на расстоянии $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = {}^{1}\!/\!{}_{\sqrt{npq}} \quad \Rightarrow$

$$P\left(A \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le B \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\ :\ A \le x_m \le B} e^{-\frac{x_m^2}{2}} \Delta x_m \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$\Rightarrow \quad P\left(A \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le B \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\,:\, A \le x_m \le B} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}},$$

причем соседние точки суммирования находятся друг от друга на расстоянии $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = {}^{1}\!/\!{\sqrt{npq}} \quad \Rightarrow$

$$P\left(A \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le B \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\,:\, A \le x_m \le B} e^{-\frac{x_m^2}{2}} \Delta x_m \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Следствие. $P(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \right).$

Пример. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0.2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей окажется от 6 до 8 бракованных.

Пример. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0.2. Определить вероятность того, что среди 50 наугад выбранных деталей окажется от 6 до 8 бракованных.

Решение.

$$P\left(6 \le m \le 8\right) = \Phi_0\left(\frac{8-50\cdot 0,2}{\sqrt{50\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right) - \Phi_0\left(\frac{6-50\cdot 0,2}{\sqrt{50\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right) =$$

$$= 0,1413.$$

Следствие. Теорема 4 позволяет уточнить связь относительной частоты и вероятности:

$$P(|\frac{m}{n}-p|\le\varepsilon)=P(-\varepsilon\le\frac{m}{n}-p\le\varepsilon)$$

Следствие. Теорема 4 позволяет уточнить связь относительной частоты и вероятности:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\leq\frac{m}{n}-p\leq\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\leq\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\leq\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx$$

Следствие. Теорема 4 позволяет уточнить связь относительной частоты и вероятности:

$$P(|\frac{m}{n}-p|\le\varepsilon)=P(-\varepsilon\le\frac{m}{n}-p\le\varepsilon)=P(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})\approx$$

$$\approx\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi_0\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Следствие. Теорема 4 позволяет уточнить связь относительной частоты и вероятности:

$$P(|\frac{m}{n}-p|\le\varepsilon)=P(-\varepsilon\le\frac{m}{n}-p\le\varepsilon)=P(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})\approx$$

$$\approx\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi_0\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример. Монета подбрасывается 10 000 раз. Оценить вероятность того, что частота выпадения герба отличается от вероятности более чем на одну сотую:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|>0,01\right)=1-2\Phi_0(0,01\sqrt{\frac{10000}{1/4}})=1-2\Phi_0(2)=0,0455.$$

Обобщение Теорем 3,4 для случайных величин с произвольным распределением:

Обобщение Теорем 3,4 для случайных величин с произвольным распределением:

Теорема 5. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, причем $EX_1^2 < \infty$. Обозначим $a = EX_1$, $\sigma^2 = DX_1$ $(\sigma^2 \neq 0)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \; S_n^* = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Обобщение Теорем 3,4 для случайных величин с произвольным распределением:

Теорема 5. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, причем $EX_1^2 < \infty$. Обозначим $a = EX_1$, $\sigma^2 = DX_1$ $(\sigma^2 \neq 0)$,

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_n^* = \dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\boxed{P\left(S_n^* < x\right) \to F_{N(0,1)}(x)},$$

где $F_{N(0,1)}$ – функция стандартного нормального распределения.

Обобщение Теорем 3,4 для случайных величин с произвольным распределением:

Теорема 5. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены, причем $EX_1^2 < \infty$. Обозначим $a = EX_1$, $\sigma^2 = DX_1$ $(\sigma^2 \neq 0)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_n^* = \dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\boxed{P\left(S_n^* < x\right) \to F_{N(0,1)}(x)},$$

где $F_{N(0,1)}$ – функция стандартного нормального распределения.

Пример. Случайная величина – ошибка измерения прибора. Так как ошибка возникает из-за действия большого числа независимых факторов (температура, давление, напряжение, …) $\Rightarrow$ ошибка распределена приблизительно нормально.