Лекция А7
МП-автоматы, II

Вадим Пузаренко

24 октября 2023 г.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

По данной грамматике $\mathfrak{G}$ строится МП-автомат, имитирующий её левые порождения. Любую левовыводимую цепочку можно записать в виде $\alpha\hat{}A\hat{}\beta$, где α — цепочка терминалов, а A — нетерминал, β — цепочка нетерминалов и терминалов справа от A. Цепочка $A\hat{}\beta$ называется **остатком** этой левовыводимой цепочки. У терминальной левовыводимой цепочки остатком является ε. Идея построения МП-автомата по грамматике состоит в том, чтобы МП-автомат имитировал последовательность левовыводимых цепочек, используемых в грамматике для порождения искомой терминальной цепочки $\tilde{\alpha}$. Остаток каждой цепочки $A\hat{}\beta$ появляется в магазине с переменной A на вершине, а цепочка α является префиксом не считанных к данному моменту символов цепочки $\tilde{\alpha}$, причём сразу после появления соответствующей конфигурации цепочка α будет считана автоматом.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Предположим, что МП-автомат находится в конфигурации $(q, \alpha', A\hat{}\beta)$, представляющей цепочку $\alpha\hat{}A\hat{}\beta$. Он угадывает продукцию с посылкой A (скажем, $A \longrightarrow \beta'$). Переход автомата состоит в том, что A на вершине магазина заменяется на цепочку β', и достигается конфигурация $(q, \alpha', \beta'\hat{}\beta)$. Заметим, что у этого МП-автомата имеется только одно состояние, а именно, q. Все терминалы в начале цепочки $\beta'\hat{}\beta$ необходимо удалить до появления нетерминала на вершине магазина. Эти терминалы сравниваются с символами входной цепочки для того, чтобы убедиться в правильности предположения о левом порождении входной цепочки $\tilde{\alpha}$; в противном случае вычисление данной ветви МП-автомата обрывается.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Если таким образом нам удаётся угадать левое порождение $\tilde{\alpha}$, то, в конечном итоге, мы дойдём до распознавания $\tilde{\alpha}$. В этот момент ко всем символам магазина применены продукции (в случае нетерминалов) или правило удаления в результате сравнения (в случае терминалов). Магазин пуст, и, тем самым, слово распознаётся по пустому магазину.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Если таким образом нам удаётся угадать левое порождение $\tilde{\alpha}$, то, в конечном итоге, мы дойдём до распознавания $\tilde{\alpha}$. В этот момент ко всем символам магазина применены продукции (в случае нетерминалов) или правило удаления в результате сравнения (в случае терминалов). Магазин пуст, и, тем самым, слово распознаётся по пустому магазину.

Конструкция.

Пусть $\mathfrak{G} = (V, \Sigma, P, S)$ — КС-грамматика. Построим МП-автомат $\mathcal{P} = (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma; \Delta, q, S, \varnothing)$, распознающий $L(\mathfrak{G})$ по пустому магазину. Отношение Δ переходов определяется следующим образом:

1. $\Delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) | P(A, \beta)\}$ для каждого $A \in V$.
2. $\Delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$ для любого $a \in \Sigma$.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Теорема A7.1.

Если МП-автомат $\mathcal{P}$ строится по грамматике $\mathfrak{G}$ согласно конструкции, описанной выше, то $N(\mathcal{P}) = L(\mathfrak{G})$.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Теорема А7.1.

Если МП-автомат $\mathcal{P}$ строится по грамматике $\mathfrak{G}$ согласно конструкции, описанной выше, то $N(\mathcal{P}) = L(\mathfrak{G})$.

Доказательство.

Докажем, что $\alpha \in N(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathfrak{G})$.
($\Leftarrow$) Пусть $\alpha \in L(\mathfrak{G})$; тогда α имеет левое порождение в $\mathfrak{G}$:
$S = \delta_1 \underset{l}{\Rightarrow} \delta_2 \underset{l}{\Rightarrow} \ldots \underset{l}{\Rightarrow} \delta_n = \alpha$.
Покажем индукцией по $i \leqslant n$, что $(q, \alpha, S) \vdash_{\mathcal{P}}^{*} (q, \xi_i, \beta_i)$, где ξ_i и β_i представляют левовыводимую цепочку δ_i (более точно, если β_i — остаток δ_i, причём $\delta_i = \gamma_i \hat{\ } \beta_i$, то цепочка ξ_i такова, что $\alpha = \gamma_i \hat{\ } \xi_i$).
Базис. Имеем $\delta_1 = S$ и, тем самым, $\gamma_1 = \varepsilon$, $\xi_1 = \alpha$. Так как $(q, \alpha, S) \vdash^{*} (q, \alpha, S)$, базис доказан.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (продолжение).

Индукция. Предположим, что имеет место $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \xi_i, \beta_i)$, и докажем, что $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \xi_{i+1}, \beta_{i+1})$. Так как слово β_i является остатком, оно начинается с некоторого нетерминала (скажем, A). Кроме того, шаг порождения $\delta_i \underset{l}{\Rightarrow} \delta_{i+1}$ включает замену нетерминала A заключительным словом одной из продукций с посылкой A (скажем, β). Правило 1 построения $\mathcal{P}$ позволяет нам заменить A на вершине магазина словом β, а правило 2 — сравнить любые терминалы на вершине магазина со входными символами. В результате достигается конфигурация $(q, \xi_{i+1}, \beta_{i+1})$, которая представляет следующую левовыводимую цепочку δ_{i+1}.
Для завершения доказательства заметим, что $\beta_n = \varepsilon$, поскольку остаток цепочки $\delta_n = \alpha$ пуст. Таким образом, $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, и автомат $\mathcal{P}$ распознаёт α по пустому магазину.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (продолжение).

($\Rightarrow$) Докажем более общее утверждение, а именно, если $(q, \alpha, A) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$, то $A \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha$ (индукцией по числу переходов автомата $\mathcal{P}$).

Базис. Один переход. Единственным вариантом является то, что $A \longrightarrow \varepsilon$ — продукция $\mathfrak{G}$, использованная в правиле типа 1 МП-автоматом $\mathcal{P}$. В этом случае $\alpha = \varepsilon$ и $A \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \varepsilon$.

Индукция. Предположим, что $\mathcal{P}$ совершает n переходов, $n > 1$. Первый переход должен быть типа 1, где нетерминал A на вершине магазина заменяется одним из тел продукции грамматики (поскольку правило типа 2 используется только в том случае, когда на вершине магазина находится терминал). Пусть использована продукция $A \longrightarrow Y_1 Y_2 \ldots Y_k$, где $Y_i \in V \cup \Sigma$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (продолжение).

В процессе следующих $n-1$ переходов автомат $\mathcal{P}$ должен прочитать α на входе и вытолкнуть Y_1, Y_2, ..., Y_k из магазина по очереди. Цепочку α можно представить в виде $\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k$ так, что после прочтения α_1 в магазине содержится $Y_2Y_3\ldots Y_k$, затем после прочтения α_2 — $Y_3\ldots Y_k$, ..., после прочтения α_{k-1} — Y_k, а в конечном итоге после прочтения α_k магазин окажется пустым.

Формально можем заключить, что $(q, \alpha_i\hat{}\alpha_{i+1}\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_i) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q, \alpha_{i+1}\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, \varepsilon)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. По предложению A3.3, $(q, \alpha_i, Y_i) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для всех i. Так как длины всех переходов не превосходят $n-1$, по индукционному предположению, заключаем, что $Y_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$, если Y_i — нетерминал.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (окончание).

Если же Y_i — терминал, то должен совершиться только один переход, в котором осуществляется проверка на равенство α_i и Y_i. Тем самым, $Y_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$.

Теперь имеется порождение $A \Rightarrow Y_1 Y_2 \ldots Y_k \Rightarrow^* \alpha_1 \hat{} Y_2 \ldots Y_k \Rightarrow^* \alpha_1 \hat{} \alpha_2 \hat{} Y_3 \ldots Y_k \Rightarrow^* \ldots \Rightarrow^* \alpha_1 \hat{} \alpha_2 \hat{} \ldots \hat{} \alpha_{k-1} \hat{} Y_k \Rightarrow^* \alpha$.

Для завершения доказательства положим $A = S$. Так как $\alpha \in N(\mathcal{P})$, имеем $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$. По доказанному, $S \Rightarrow^* \alpha$ и $\alpha \in L(\mathfrak{G})$. $\square$

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Пример А7.1.

Преобразуем грамматику выражений в МП-автомат.
Продукции: $I \longrightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$, $E \longrightarrow I|E+E|E*E|(E)$.
Переходы автомата:

1. $\Delta(q,\varepsilon,I) = \{(q,a),(q,b),(q,Ia),(q,Ib),(q,I0),(q,I1)\}$;
2. $\Delta(q,\varepsilon,E) = \{(q,I),(q,E+E),(q,E*E),(q,(E))\}$;
3. $\Delta(q,a,a) = \Delta(q,b,b) = \Delta(q,(,() = \Delta(q,),)) = \Delta(q,+,+) = \Delta(q,*,*) = \Delta(q,0,0) = \Delta(q,1,1) = \{(q,\varepsilon)\}$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Теорема А7.2.

Пусть $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0)$ — МП-автомат. Тогда существует КС-грамматика $\mathfrak{G}$ такая, что $L(\mathfrak{G}) = N(\mathcal{P})$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Теорема А7.2.

Пусть $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0)$ — МП-автомат. Тогда существует КС-грамматика $\mathfrak{G}$ такая, что $L(\mathfrak{G}) = N(\mathcal{P})$.

Доказательство.

Определим грамматику $\mathfrak{G} = (V, \Sigma; R, S)$ следующим образом:

Переменные (V):

1. специальный стартовый символ S;
2. все символы вида $[pXq]$, где $p, q \in Q$, $X \in \Gamma$ ($[pXq]$ — это один символ, а не слово, состоящее из 5 символов!!!)

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Продукции (R):

1. $S \to [q_0 Z_0 p]$, для всех $p \in Q$. Интуитивно символ $[q_0 Z_0 p]$ предназначен для порождения цепочек α, которые приводят к выталкиванию Z_0 в процессе перехода из q_0 в p. Таким образом, $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$. Эти продукции гласят, что S порождает все цепочки, приводящие к опустошению магазина после старта в начальной конфигурации;
2. пусть $\Delta((q, a, X), (r, Y_1 Y_2 \dots Y_k))$, где $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, а $k \in \omega$; при $k = 0$ заключительная пара имеет вид (r, ε). Тогда для всех списков состояний r_1, r_2, …, r_k в грамматике $\mathfrak{G}$ имеется продукция $[qXr_k] \longrightarrow a\hat{}[rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\dots[r_{k-1}Y_kr_k]$.

   Она гласит, что один из путей выталкивания X из магазина и перехода из состояния q в r_k заключается в том, чтобы прочитать a, затем использовать некоторый вход для выталкивания Y_1 и перехода из r в r_1, далее прочитать вход, вытолкнуть Y_2 и перейти из r_1 в r_2, и т.д.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Докажем, что $[qXp] \Rightarrow^* \alpha \Leftrightarrow (q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.
$(\Leftarrow)$ Пусть $(q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$; докажем, что $[qXp] \Rightarrow^* \alpha$ (индукцией по числу переходов МП-автомата).
Базис. Один шаг. Тогда $(p, \varepsilon) \in \Delta(q, \alpha, X)$ и $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Из построения $\mathfrak{G}$ следует, что $R([qXp], \alpha)$, поэтому $[qXp] \Rightarrow \alpha$.
Индукция. Предположим, что последовательность $(q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ содержит $n > 1$ переходов. Первый переход должен иметь вид $(q, \alpha, X) \vdash (r_0, \beta, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, где $\alpha = a\hat{}\beta$ для некоторого $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$; затем будет выполняться переход $(r_0, \beta, Y_1 Y_2 \dots Y_k) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$. Отсюда следует, что $(r_0, Y_1 Y_2 \dots Y_k) \in \Delta(q, a, X)$. По построению $\mathfrak{G}$, найдётся продукция $[qXr_k] \longrightarrow a[r_0 Y_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$, у которой $r_k = p$ и $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$ — некоторые состояния из Q.
Символы Y_1, Y_2, …, Y_k удаляются из магазина по очереди; для каждого $i = 1, 2, \dots, k-1$ можно выбрать состояние r_i, в котором на вершине магазина оказывается Y_{i+1}.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Пусть $\beta = \beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\ldots\hat{}\beta_k$, где β_i — входная цепочка, которая прочитывается до удаления символа Y_i из магазина. Тогда $(r_{i-1}, \beta_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon)$. Поскольку ни одна из этих последовательностей не содержит более $n-1$ переходов, к ним применимо индукционное предположение. Приходим к выводу, что $[r_{i-1} Y_i r_i] \Rightarrow^* \beta_i$. Соберём все порождения вместе: $[qXr_k] \Rightarrow a[r_0 Y_1 r_1][r_1 Y_2 r_2]\ldots[r_{k-1} Y_k r_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1[r_1 Y_2 r_2]\ldots[r_{k-1} Y_k r_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2[r_2 Y_3 r_3]\ldots[r_{k-1_{Y_k r_k}}] \Rightarrow^* \ldots \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\ldots\hat{}\beta_k = \alpha$. Здесь $r_k = p$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Пусть $\beta = \beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\ldots\hat{}\beta_k$, где β_i — входная цепочка, которая прочитывается до удаления символа Y_i из магазина. Тогда $(r_{i-1}, \beta_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon)$. Поскольку ни одна из этих последовательностей не содержит более $n-1$ переходов, к ним применимо индукционное предположение. Приходим к выводу, что $[r_{i-1}Y_ir_i] \Rightarrow^* \beta_i$. Соберём все порождения вместе: $[qXr_k] \Rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\ldots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1[r_1Y_2r_2]\ldots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2[r_2Y_3r_3]\ldots[r_{k-1 Y_k r_k}] \Rightarrow^* \ldots \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\ldots\hat{}\beta_k = \alpha$. Здесь $r_k = p$.

$(\Rightarrow)$ Индукцией по числу шагов в порождении.

Базис. Один шаг. Тогда $R([qXp], \alpha)$. Единственная возможность существования такой продукции — $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, а $\mathcal{P}$ содержит переход, в котором X выталкивается из магазина, при этом состояние q меняется на p. Таким образом, $(p, \varepsilon) \in \Delta(q, \alpha, X)$ и $(q, \alpha, X) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Индукция. Предположим, что $[qXp] \Rightarrow^* \alpha$ содержит $n > 1$ шагов. Рассмотрим первую выводимую цепочку в данной последовательности:
$[qXr_k] \longrightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\ldots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* \alpha$ (здесь $r_k = p$).
Соответствующая выводимой цепочке продукция должна присутствовать в грамматике, поскольку $(r_0, Y_1Y_2\ldots Y_k) \in \Delta(q, a, X)$.
Цепочку α можно представить в виде $\alpha = a\hat{}\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k$ так, что $[r_{i-1}Y_ir_i] \Rightarrow^* \alpha_i$. По индукционному предположению, для всех i выполняется отношение $(r_{i-1}, \alpha_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon)$. По предложению А3.2, $(r_{i-1}, \alpha_i\hat{}\alpha_{i+1}\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_iY_{i+1}\ldots Y_k) \vdash^* (r_i, \alpha_{i+1}\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_{i+1}\ldots Y_k)$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (окончание).

Соберём все эти последовательности вместе и получим следующее порождение.
$(q, a\hat{}\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, X) \vdash (r_0, \alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_1Y_2\ldots Y_k) \vdash^* (r_1, \alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_2\ldots Y_k) \vdash^* \ldots \vdash^* (r_{k-1}, \alpha_k, Y_k) \vdash^* (r_k, \varepsilon, \varepsilon)$.
Поскольку $r_k = p$, доказано, что $(q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.
Завершим доказательство. $S \Rightarrow^* \alpha \Leftrightarrow [q_0Z_0p] \Rightarrow^* \alpha$ для некоторого $p \in Q$. Выше уже доказано, что $[q_0Z_0p] \Rightarrow^* \alpha \Leftrightarrow (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$, т.е. $\mathcal{P}$ распознаёт α по пустому магазину. Таким образом, $L(\mathfrak{G}) = N(\mathcal{P})$ $\square$

ДМП-автоматы: определение

Хотя МП-автоматы по определению не детерминированы, их детерминированный случай чрезвычайно важен. В частности, синтаксические анализаторы в целом ведут себя как детерминированные МП-автоматы, поэтому класс языков, допускаемых этими автоматами, углубляет понимание конструкций, пригодных для языков программирования. Интуитивно МП-автомат является детерминированным, если в любой ситуации у него нет возможности выборов перехода. Эти выборы имеют два вида. Если $\Delta(q, a, X)$ содержит более одной пары, то МП-автомат безусловно не является детерминированным, поскольку можно выбирать из этих двух пар. Однако если $\Delta(q, a, X)$ всегда одноэлементно, все равно остаётся возможность выбора между чтением входного символа и совершением ε-перехода.

ДМП-автоматы: определение

Определение А7.1.

МП-автомат $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$ называется **детерминированным (ДМП-автоматом)**, если выполняются следующие условия:

1. $|\Delta(q, a, X)| \leqslant 1$ для каждых $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $X \in \Gamma$;
2. если $\Delta(q, a, X) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in \Sigma$, то $\Delta(q, \varepsilon, X)$ должно быть пустым.

ДМП-автоматы: определение

Определение А7.1.

МП-автомат $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$ называется **детерминированным (ДМП-автоматом)**, если выполняются следующие условия:

1. $|\Delta(q, a, X)| \leqslant 1$ для каждых $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $X \in \Gamma$;
2. если $\Delta(q, a, X) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in \Sigma$, то $\Delta(q, \varepsilon, X)$ должно быть пустым.

Примеры А7.2.

1. КС-язык $\{\alpha\hat{\ }\alpha^R | \alpha \in \{0; 1\}^*\}$ не распознаётся никаким ДМП-автоматом.
2. КС-язык $\{\alpha\hat{\ }c\hat{\ }\alpha^R | \alpha \in \{0; 1\}^*\}$ распознаётся некоторым ДМП-автоматом (здесь $c \notin \{0; 1\}$).

ДМП-автоматы: определение

Определение А7.1.

МП-автомат $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$ называется **детерминированным (ДМП-автоматом)**, если выполняются следующие условия:

1. $|\Delta(q, a, X)| \leqslant 1$ для каждых $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $X \in \Gamma$;
2. если $\Delta(q, a, X) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in \Sigma$, то $\Delta(q, \varepsilon, X)$ должно быть пустым.

Примеры А7.2.

1. КС-язык $\{\alpha\hat{}\alpha^R | \alpha \in \{0;1\}^*\}$ не распознаётся никаким ДМП-автоматом.
2. КС-язык $\{\alpha\hat{}c\hat{}\alpha^R | \alpha \in \{0;1\}^*\}$ распознаётся некоторым ДМП-автоматом (здесь $c \notin \{0;1\}$).

Упражнение А7.1.

Обосновать примеры А7.2.

Регулярные языки и ДМП-автоматы

Теорема А7.3.

Если L — регулярный язык, то $L = L(\mathcal{P})$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}$.

Регулярные языки и ДМП-автоматы

Теорема А7.3.

Если L — регулярный язык, то $L = L(\mathcal{P})$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A} = (Q, \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА такой, что $L = L(\mathcal{A})$. Положим ДМП-автомат $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \{Z_0\}; \Delta, q_0, Z_0, F)$, определив $\Delta(q, a, Z_0) = \{(\delta(q, a), Z_0)\}$ для всех $q \in Q$ и $a \in \Sigma$.
Утверждается, что $(q, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}} (p, \varepsilon, Z_0) \Leftrightarrow \delta^*(q, \alpha) = p$.
Доказывается в обе стороны индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$. Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \in F \Leftrightarrow (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}} (p, \varepsilon, Z_0)$ для некоторого $p \in F \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{P})$. $\square$

ДМП-автомат и пустой магазин

Определение А7.2.

Говорят, что язык L имеет **префиксное свойство**, если в L нет двух различных цепочек α и β, где $\alpha \sqsubset_{beg} \beta$.

ДМП-автомат и пустой магазин

Определение A7.2.

Говорят, что язык L имеет **префиксное свойство**, если в L нет двух различных цепочек α и β, где $\alpha \sqsubset_{beg} \beta$.

Примеры A7.3.

1) $\{\alpha\hat{\ }c\hat{\ }\alpha^R | \alpha \in \{0;1\}^*\}$ имеет префиксное свойство.

2) $\{0\}^*$ не имеет префиксного свойства, однако является регулярным языком.

ДМП-автомат и пустой магазин

Определение А7.2.

Говорят, что язык L имеет **префиксное свойство**, если в L нет двух различных цепочек α и β, где $\alpha \sqsubset_{beg} \beta$.

Примеры А7.3.

1) $\{\alpha\hat{\ }c\hat{\ }\alpha^R | \alpha \in \{0;1\}^*\}$ имеет префиксное свойство.
2) $\{0\}^*$ не имеет префиксного свойства, однако является регулярным языком.

Теорема А7.4.

$L = N(\mathcal{P})$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}$, если и только если L имеет префиксное свойство и $L = L(\mathcal{P}')$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}'$.

ДМП-автомат и пустой магазин

Определение A7.2.

Говорят, что язык L имеет **префиксное свойство**, если в L нет двух различных цепочек α и β, где $\alpha \sqsubset_{beg} \beta$.

Примеры A7.3.

1) $\{\alpha\hat{}c\hat{}\alpha^R | \alpha \in \{0;1\}^*\}$ имеет префиксное свойство.
2) $\{0\}^*$ не имеет префиксного свойства, однако является регулярным языком.

Теорема A7.4.

$L = N(\mathcal{P})$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}$, если и только если L имеет префиксное свойство и $L = L(\mathcal{P}')$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}'$.

Упражнение A7.2.

Доказать теорему A7.4 и обосновать примеры A7.3.

ДМП-автоматы и неоднозначность

Замечание А7.1.

Языки, распознаваемые ДМП-автоматами, имеют однозначную КС-грамматику. Однако класс языков, распознаваемых ДМП-автоматами, не совпадает с классом КС-языков, не являющихся существенно неоднозначными. Например, язык $\{\alpha\hat{\ }\alpha^R | \alpha \in \{0;1\}^*\}$ имеет однозначную КС-грамматику $S \longrightarrow \varepsilon | 0S0 | 1S1$, хотя и не распознаётся никаким ДМП-автоматом.

ДМП-автоматы и неоднозначность

Замечание А7.1.

Языки, распознаваемые ДМП-автоматами, имеют однозначную КС-грамматику. Однако класс языков, распознаваемых ДМП-автоматами, не совпадает с классом КС-языков, не являющихся существенно неоднозначными. Например, язык $\{\alpha\hat{\ }\alpha^R \mid \alpha \in \{0;1\}^*\}$ имеет однозначную КС-грамматику $S \longrightarrow \varepsilon|0S0|1S1$, хотя и не распознаётся никаким ДМП-автоматом.

Теорема А7.5.

Если $L = N(\mathcal{P})$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}$, то L имеет однозначную КС-грамматику.

ДМП-автоматы и неоднозначность

Доказательство.

Докажем, что конструкция теоремы А7.2 по ДМП-автомату задаёт однозначную КС-грамматику. По теореме А5.1, достаточно доказать, что каждое $\alpha \in L$ имеет уникальное левое порождение. Предположим, что $\mathcal{P}$ распознаёт α по пустому магазину. Тогда он это делает с помощью единственной последовательности переходов, поскольку он детерминирован и прекращает работу, когда опустошается магазин.

Правило автомата $\mathcal{P}$, на основании которого применяется продукция, всегда одно. Но правило, скажем, $\Delta(q, a, X) = \{(r, Y_1Y_2 \dots Y_k)\}$, может порождать много продукций грамматики $\mathfrak{G}$, с различными состояниями в позициях, отражающих состояния $\mathcal{P}$ после удаления каждого из Y_1, Y_2, ..., Y_k. Однако, в силу детерминированности $\mathcal{P}$, осуществляется только одна из этих последовательностей переходов, поэтому только одна из этих продукций в действительности ведет к порождению α. $\square$

ДМП-автоматы и неоднозначность

Теорема А7.6.

Если $L = L(\mathcal{P})$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}$, то L имеет однозначную КС-грамматику.

ДМП-автоматы и неоднозначность

Теорема А7.6.

Если $L = L(\mathcal{P})$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}$, то L имеет однозначную КС-грамматику.

Доказательство.

Пусть \$ — “концевой маркер”, отсутствующий в цепочках языка L и пусть $L' = L\hat{\ }\$$. Тогда L' имеет префиксное свойство, а по теореме А4.2, $L' = N(\mathcal{P}')$ для некоторого ДМП-автомата $\mathcal{P}'$. По теореме А4.3, L' имеет однозначную КС-грамматику (скажем, $\mathfrak{G}' = (V, \Sigma, P, S)$). Теперь по грамматике $\mathfrak{G}'$ построим грамматику $\mathfrak{G} = (V \cup \{\$\}, \Sigma \setminus \{\$\}, P', S)$, для которой $L = L(\mathfrak{G})$. Для этого определим $P' = P \cup \{\$ \longrightarrow \varepsilon\}$. Так как $L(\mathfrak{G}') = L'$, имеем $L(\mathfrak{G}) = L$. Докажем, что $\mathfrak{G}$ однозначна. В самом деле, левые порождения в $\mathfrak{G}$ совпадают с левыми порождениями в грамматике $\mathfrak{G}'$, за исключением последнего шага в $\mathfrak{G}$ — замены \$ на ε. Таким образом, если бы слово α имело бы два различных левых порождения в $\mathfrak{G}$, то $\alpha\hat{\ }\$$ имело бы два различных левых порождения в $\mathfrak{G}'$, противоречие. $\square$

Спасибо за внимание.