Глава 2. Вероятность событий

Глава 2. Вероятность событий

количественная мера возможности появления случайного события

Основные подходы к определению вероятности

1. Субъективная вероятность (степень уверенности в своем мнении);

Основные подходы к определению вероятности

1. Субъективная вероятность (степень уверенности в своем мнении);
2. Логическая вероятность (степень подтверждения данного утверждения доводами или фактами);

Основные подходы к определению вероятности

1. Субъективная вероятность (степень уверенности в своем мнении);
2. Логическая вероятность (степень подтверждения данного утверждения доводами или фактами);
3. Частотная вероятность (частота появления данного события в длинной серии испытаний);

Основные подходы к определению вероятности

1. Субъективная вероятность (степень уверенности в своем мнении);
2. Логическая вероятность (степень подтверждения данного утверждения доводами или фактами);
3. Частотная вероятность (частота появления данного события в длинной серии испытаний);
4. «Классическое» определение вероятности (отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов);

Основные подходы к определению вероятности

1. Субъективная вероятность (степень уверенности в своем мнении);
2. Логическая вероятность (степень подтверждения данного утверждения доводами или фактами);
3. Частотная вероятность (частота появления данного события в длинной серии испытаний);
4. «Классическое» определение вероятности (отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов);
5. «Геометрическое» определение вероятности для континуального пространства элементарных событий;

Основные подходы к определению вероятности

1. Субъективная вероятность (степень уверенности в своем мнении);
2. Логическая вероятность (степень подтверждения данного утверждения доводами или фактами);
3. Частотная вероятность (частота появления данного события в длинной серии испытаний);
4. «Классическое» определение вероятности (отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов);
5. «Геометрическое» определение вероятности для континуального пространства элементарных событий;
6. Для общего случая - аксиомы А.Н.Колмогорова.

Частотная интерпретация вероятности

Пусть проводится серия из N опытов. Фиксируется число M появлений события A.

Частотная интерпретация вероятности

Пусть проводится серия из N опытов. Фиксируется число M появлений события A.

Относительная частота события A – это отношение числа появлений события A к общему числу проведенных опытов:

$$W(A) = \frac{M}{N}.$$

Частотная интерпретация вероятности

Пусть проводится серия из N опытов. Фиксируется число M появлений события A.

Относительная частота события A – это отношение числа появлений события A к общему числу проведенных опытов:

$$W(A) = \frac{M}{N}.$$

Свойства частоты:

1. Очевидно, что $0 \le W(A) \le 1$.

Частотная интерпретация вероятности

Пусть проводится серия из N опытов. Фиксируется число M появлений события A.

Относительная частота события A – это отношение числа появлений события A к общему числу проведенных опытов:

$$W(A) = \frac{M}{N}.$$

Свойства частоты:

1. Очевидно, что $0 \le W(A) \le 1$.

2. Для достоверного события Ω выполняется $M = N$ и поэтому $\mathrm{W}(\Omega) = 1$.

Частотная интерпретация вероятности

Пусть проводится серия из N опытов. Фиксируется число M появлений события A.

Относительная частота события A – это отношение числа появлений события A к общему числу проведенных опытов:

$$W(A) = \frac{M}{N}.$$

Свойства частоты:

1. Очевидно, что $0 \le W(A) \le 1$.

2. Для достоверного события Ω выполняется $M = N$ и поэтому $\mathrm{W}(\Omega) = 1$.

3. Невозможное событие $\varnothing$ ни в одном опыте не появляется, $M = 0$ и поэтому $\mathrm{W}(\varnothing)=0$.

Статистической вероятностью события A называется число, к которому приближается относительная частота $\mathrm{W(A)}$ при увеличении числа опытов N.

$$\mathrm{P}^{*}(\mathrm{A}) = \lim_{N \to \infty} \mathrm{W(A)}.$$

|

Статистической вероятностью события A называется число, к которому приближается относительная частота $\mathrm{W}(\mathrm{A})$ при увеличении числа опытов N.

$$\mathrm{P}^{*}(\mathrm{A}) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{W}(\mathrm{A}).$$

Например, статистические данные за многие годы позволяют найти вероятности рождения мальчиков и девочек: $\mathrm{P}^{*}(\textit{мальчик}) \approx 0,52.$

Статистической вероятностью события A называется число, к которому приближается относительная частота $\mathrm{W(A)}$ при увеличении числа опытов N.

$$\mathrm{P^*(A)} = \lim_{N\to\infty} \mathrm{W(A)}.$$

Например, статистические данные за многие годы позволяют найти вероятности рождения мальчиков и девочек: $\mathrm{P}^*(\text{мальчик}) \approx 0{,}52.$

Недостатки частотного подхода:

- вероятность определена только для серии опытов;
- экспериментальное определение вероятности требует больших затрат.

Классическое определение вероятности

Пусть Ω состоит из конечного числа элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ и все элементарные исходы равновозможны.

Классическое определение вероятности

Пусть Ω состоит из конечного числа элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ и все элементарные исходы равновозможны.

Определение. Вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m - число элементарных исходов, которые благоприятствуют событию A.

Классическое определение вероятности

Пусть Ω состоит из конечного числа элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ и все элементарные исходы равновозможны.

Определение. Вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m - число элементарных исходов, которые благоприятствуют событию A.

Замечание. Вероятность любого элементарного события принимается равной $1/n$. Это основывается на какой-либо симметрии в эксперименте (симметричная монета, хорошо перемешанная колода карт, правильная кость).

Пример. Рассмотрим опыт с двукратным подбрасыванием монеты. Событие

A={герб выпал хотя бы один раз}

означает, что герб появился в опыте один или два раза.

Пример. Рассмотрим опыт с двукратным подбрасыванием монеты. Событие

A={герб выпал хотя бы один раз}

означает, что герб появился в опыте один или два раза.

Среди элементарных исходов этому условию удовлетворяют:

$$\omega_1 = ГГ,\ \omega_2 = ГР,\ \omega_3 = РГ.$$

Пример. Рассмотрим опыт с двукратным подбрасыванием монеты. Событие

A={герб выпал хотя бы один раз}

означает, что герб появился в опыте один или два раза.

Среди элементарных исходов этому условию удовлетворяют:

$$\omega_1 = ГГ,\ \omega_2 = ГР,\ \omega_3 = РГ.$$

Значит $m = 3$. Общее число элементарных исходов $n = 4$, следовательно, $P(A) = \frac{3}{4}$.

Для вычисления вероятностей событий нужно уметь вычислять числа m и n. Для этого используются комбинаторные правила.

Для вычисления вероятностей событий нужно уметь вычислять числа m и n. Для этого используются комбинаторные правила.

Пусть имеется совокупность k объектов (г**енеральная совокупность)**. Из генеральной совокупности наудачу отбираем l объектов (**выборку)**.

Для вычисления вероятностей событий нужно уметь вычислять числа m и n. Для этого используются комбинаторные правила.

Пусть имеется совокупность k объектов (**генеральная совокупность**). Из генеральной совокупности наудачу отбираем l объектов (**выборку**).

Существуют следующие виды выборки:

а) **упорядоченная (учитывается порядок объектов)** и **неупорядоченная (важен только состав выборки, порядок не играет роли).**

Для вычисления вероятностей событий нужно уметь вычислять числа m и n. Для этого используются комбинаторные правила.

Пусть имеется совокупность k объектов (**генеральная совокупность**). Из генеральной совокупности наудачу отбираем l объектов (**выборку**).

Существуют следующие виды выборки:

а) **упорядоченная (учитывается порядок объектов)** и **неупорядоченная (важен только состав выборки, порядок не играет роли).**

б) **без повторений (объект может выбираться только один раз)** и **с повторениями (объект может возвращаться в совокупность и выбираться повторно)**.

Для вычисления вероятностей событий нужно уметь вычислять числа m и n. Для этого используются комбинаторные правила.

Пусть имеется совокупность k объектов (**генеральная совокупность**). Из генеральной совокупности наудачу отбираем l объектов (**выборку**).

Существуют следующие виды выборки:

а) **упорядоченная (учитывается порядок объектов)** и **неупорядоченная (важен только состав выборки, порядок не играет роли).**
б) **без повторений (объект может выбираться только один раз)** и **с повторениями (объект может возвращаться в совокупность и выбираться повторно)**.
в) $k=l$ **(состав выборки постоянный) и** $k>l$ **(состав изменяется).**

Элементы комбинаторики

Определение. Комбинаторной конфигурацией называется подмножество элементов исходного множества, удовлетворяющее некоторому условию.

Элементы комбинаторики

Определение. Комбинаторной конфигурацией называется подмножество элементов исходного множества, удовлетворяющее некоторому условию.

Например, $X = \{a, b, c, d\}$; конфигурация – подмножество из двух различных элементов X:
$\{a, c\}$, $\{b, d\}$ и т.п.

Элементы комбинаторики

Определение. Комбинаторной конфигурацией называется подмножество элементов исходного множества, удовлетворяющее некоторому условию.

Например, $X = \{a, b, c, d\}$; конфигурация – подмножество из двух различных элементов X:
$\{a, c\}$, $\{b, d\}$ и т.п.

Основными комбинаторными конфигурациями являются размещения, перестановки, сочетания.

Элементы комбинаторики

Определение. Комбинаторной конфигурацией называется подмножество элементов исходного множества, удовлетворяющее некоторому условию.

Например, $X = \{a, b, c, d\}$; конфигурация – подмножество из двух различных элементов X: $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ и т.п.

Основными комбинаторными конфигурациями являются размещения, перестановки, сочетания.

Основная задача комбинаторики – нахождение числа разного вида конфигураций.

Правило суммы:

Пусть $|A|, |B|$ - число элементов в непересекающихся конечных множествах A и B, тогда выполняется:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Правило суммы:

Пусть $|A|, |B|$ - число элементов в непересекающихся конечных множествах A и B, тогда выполняется:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать k способами, то выбор одного элемента из A **или** B можно осуществить $m + k$ способами.

Правило суммы:

Пусть $|A|, |B|$ - число элементов в непересекающихся конечных множествах A и B, тогда выполняется:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать k способами, то выбор одного элемента из A **или** B можно осуществить $m + k$ способами.

Правило справедливо для любого конечного числа непересекающихся множеств.

Правило включений-исключений:

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - конечные пересекающиеся множества.

Правило включений-исключений:

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ - конечные пересекающиеся множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i<j<l} \left|A_i \cap A_j \cap A_l\right| - \dots$$

$$+(-1)^{n-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\right|.$$

Правило включений-исключений:

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - конечные пересекающиеся множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i<j<l} \left|A_i \cap A_j \cap A_l\right| - \ldots$$

$$+(-1)^{n-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|.$$

Нахождение количества элементов в объединении:

включение всех,

затем исключение «лишнего»,

Правило включений-исключений:

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - конечные пересекающиеся множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i<j<l} \left|A_i \cap A_j \cap A_l\right| - ...$$

$$+(-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n\right|.$$

Нахождение количества элементов в объединении:

включение всех,

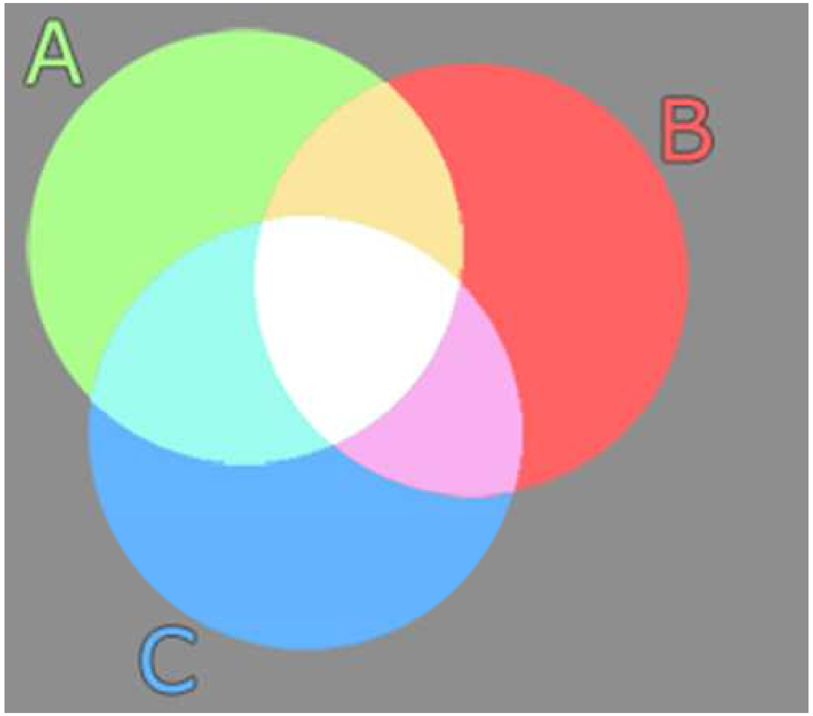
затем исключение «лишнего»,

затем включение ошибочно исключенного

и так далее, то есть в попеременное включение и исключение.

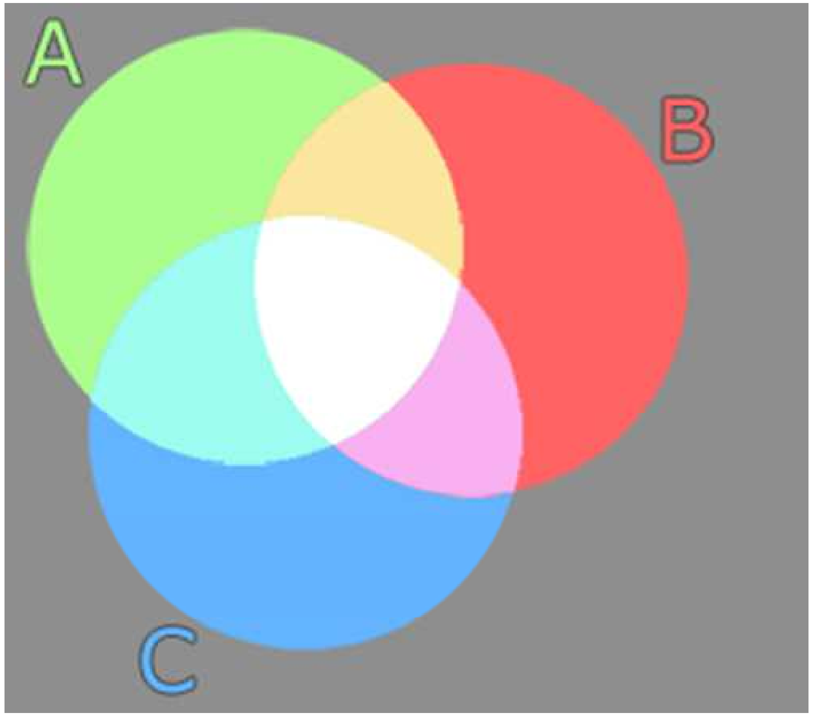
Случай трех множеств:

$$\left| A+B+C \right| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|$$



Случай трех множеств:

$$\left|A+B+C\right|=|A|+|B|+|C|-|AB|-|AC|-|BC|+|ABC|$$



Для двух множеств A, B получим:

$$|A+B|=|A|+|B|-|AB|.$$

Правило произведения:

Пусть $\boldsymbol{A \times B}$ - ***декартово произведение*** множеств **$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$**, т.е. множество упорядоченных пар (a,b), где $a \in A$, $b \in B$. Тогда

$$|\boldsymbol{A \times B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|.$$

Правило произведения:

Пусть $\boldsymbol{A \times B}$ **- *декартово произведение*** множеств **$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$**, т.е. множество упорядоченных пар (a,b), где $a \in A$, $b \in B$. Тогда

$$|\boldsymbol{A \times B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|.$$

Упорядоченная пара элементов (a,b) - кортеж.

Правило произведения:

Пусть $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ - ***декартово произведение*** множеств **A, B**, т.е. множество упорядоченных пар (a,b), где $a \in A$, $b \in B$. Тогда

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|.$$

Упорядоченная пара элементов (a,b) - кортеж.

Если элемент a можно выбрать m способами, а после каждого выбора элемента a элемент b можно выбрать k способами, тогда кортеж (a, b) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Правило произведения:

Пусть $\boldsymbol{A\times B}$ - ***декартово произведение*** множеств $\boldsymbol{A, B}$, т.е. множество упорядоченных пар (a,b), где $a\in A$, $b\in B$. Тогда

$$|\boldsymbol{A\times B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$$

Упорядоченная пара элементов (a,b) - кортеж.

Если элемент a можно выбрать m способами, а после каждого выбора элемента a элемент b можно выбрать k способами, тогда кортеж (a, b) можно выбрать $m\cdot k$ способами.

Следствие. $|A|=\dfrac{|A\times B|}{|B|}$.

Правило произведения:

Пусть $\boldsymbol{A}\times \boldsymbol{B}$ - ***декартово произведение*** множеств **A, B**, т.е. множество упорядоченных пар (a,b), где $a\in A$, $b\in B$. Тогда

$$|\boldsymbol{A}\times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$$

Упорядоченная пара элементов (a,b) - кортеж.

Если элемент a можно выбрать m способами, а после каждого выбора элемента a элемент b можно выбрать k способами, тогда кортеж (a, b) можно выбрать $m\cdot k$ способами.

Следствие. $|A|=\dfrac{|A\times B|}{|B|}$.

Правило справедливо для любого числа конечных множеств.

Размещения

Определение. Упорядоченное множество, состоящее из l неповторяющихся элементов, выбранных из данного множества содержащего k элементов, назовём **размещением**.

Размещения

Определение. Упорядоченное множество, состоящее из l неповторяющихся элементов, выбранных из данного множества содержащего k элементов, назовём **размещением**.

Число таких размещений обозначим A_k^l.

Размещения

Определение. Упорядоченное множество, состоящее из l неповторяющихся элементов, выбранных из данного множества содержащего k элементов, назовём **размещением**.

Число таких размещений обозначим A_k^l.

Пусть произвольное размещение длины l имеет вид:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_l).$$

Элемент x_1 можно выбрать k способами. После каждого выбора x_1 элемент x_2 можно выбрать $(k - 1)$ способами, и т.д. После каждого выбора элементов x_1 , $x_2, \ldots, x_{l-1}$ элемент x_l можно выбрать $\left(k - (l - 1)\right) = (k - l + 1)$ способами.

Размещения

Определение. Упорядоченное множество, состоящее из l неповторяющихся элементов, выбранных из данного множества содержащего k элементов, назовём **размещением**.

Число таких размещений обозначим A_k^l.

Пусть произвольное размещение длины l имеет вид:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_l).$$

Элемент x_1 можно выбрать k способами. После каждого выбора x_1 элемент x_2 можно выбрать $(k - 1)$ способами, и т.д. После каждого выбора элементов x_1 , $x_2, \ldots, x_{l-1}$ элемент x_l можно выбрать $\left(k - (l - 1)\right) = (k - l + 1)$ способами.

По правилу произведения, последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ можно выбрать числом способов, равным

$$k(k-1)(k-2)\ldots(k-l+1) = \frac{k!}{(k-l)!} = A_k^l,$$

где $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

Размещения называются также упорядоченной выборкой.

Например, из букв a,b,c можно составить такие размещения по два элемента:

ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Их число $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Перестановки

Если в размещениях из k элементов по l элементов положить $l=k$, то такие размещения называются **перестановками**.

Перестановки

Если в размещениях из k элементов по l элементов положить $l=k$, то такие размещения называются **перестановками**.

Перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов в них, число перестановок из k элементов обозначается P_k:

$$P_k = k!$$

Например, из букв a,b,c возможны $3!=6$ перестановок:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Сочетания

Неупорядоченная выборка, содержащая l элементов, выбранных из k без повторений, называется **сочетанием**.

Сочетания

Неупорядоченная выборка, содержащая l элементов, выбранных из k без повторений, называется **сочетанием.**

Число сочетаний из k элементов по l обозначим C_k^l.

Сочетания

Неупорядоченная выборка, содержащая l элементов, выбранных из k без повторений, называется **сочетанием**.

Число сочетаний из k элементов по l обозначим C_k^l.

Если каждое сочетание упорядочить всеми возможными способами, то получим все множества из l элементов, выбранных из k элементов без повторений, то есть все размещения длины l:

$$C_k^l \cdot l! = A_k^l \quad \Rightarrow \quad C_k^l = \frac{A_k^l}{l!} = \frac{k!}{l!(k-l)!}$$

Сочетания

Неупорядоченная выборка, содержащая l элементов, выбранных из k без повторений, называется **сочетанием.**

Число сочетаний из k элементов по l обозначим C_k^l.

Если каждое сочетание упорядочить всеми возможными способами, то получим все множества из l элементов, выбранных из k элементов без повторений, то есть все размещения длины l:

$$C_k^l \cdot l! = A_k^l \quad \Rightarrow \quad C_k^l = \frac{A_k^l}{l!} = \frac{k!}{l!(k-l)!}$$

Например, из трех букв a,b,c можно составить такие сочетания по два элемента: ab, ac, bc.

Сочетания

Неупорядоченная выборка, содержащая l элементов, выбранных из k без повторений, называется **сочетанием.**

Число сочетаний из k элементов по l обозначим C_k^l.

Если каждое сочетание упорядочить всеми возможными способами, то получим все множества из l элементов, выбранных из k элементов без повторений,
то есть все размещения длины l:

$$C_k^l \cdot l! = A_k^l \quad \Rightarrow \quad C_k^l = \frac{A_k^l}{l!} = \frac{k!}{l!(k-l)!}$$

Например, из трех букв a,b,c можно составить такие сочетания по два элемента: ab, ac, bc.

Число сочетаний $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$.

Основные свойства сочетаний

1. $$C_k^0 = \frac{k!}{0!k!} = 1;$$

Основные свойства сочетаний

1. $C_k^0 = \dfrac{k!}{0!k!} = 1;$

2. $C_k^1 = \dfrac{k!}{1!(k-1)!} = k;$

Основные свойства сочетаний

1. $C_k^0 = \dfrac{k!}{0!k!} = 1;$

2. $C_k^1 = \dfrac{k!}{1!(k-1)!} = k;$

3. $C_k^l = \dfrac{k!}{l!(k-l)!} = \dfrac{k!}{(k-l)!l!} = C_k^{k-l};$

Основные свойства сочетаний

1. $C_k^0 = \dfrac{k!}{0!k!} = 1;$
2. $C_k^1 = \dfrac{k!}{1!(k-1)!} = k;$
3. $C_k^l = \dfrac{k!}{l!(k-l)!} = \dfrac{k!}{(k-l)!l!} = C_k^{k-l};$
4. $C_k^l = C_{k-1}^{l-1} + C_{k-1}^l$

Основные свойства сочетаний

1. $$C_k^0 = \frac{k!}{0!k!} = 1;$$

2. $$C_k^1 = \frac{k!}{1!(k-1)!} = k;$$

3. $$C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{k!}{(k-l)!l!} = C_k^{k-l};$$

4. $$C_k^l = C_{k-1}^{l-1} + C_{k-1}^l$$

$$\frac{(k-1)!}{(l-1)!(k-l)!} + \frac{(k-1)!}{l!(k-l-1)!} =$$

Основные свойства сочетаний

1. $$C_k^0 = \frac{k!}{0!k!} = 1;$$

2. $$C_k^1 = \frac{k!}{1!(k-1)!} = k;$$

3. $$C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{k!}{(k-l)!l!} = C_k^{k-l};$$

4. $$C_k^l = C_{k-1}^{l-1} + C_{k-1}^l$$

$$\frac{(k-1)!}{(l-1)!(k-l)!} + \frac{(k-1)!}{l!(k-l-1)!} =$$

$$= \frac{l(k-1)! + (k-1)!(k-l)}{l!(k-l)!} = \frac{k!}{l!(k-l)!}$$

5. Сочетания C_k^l являются биномиальными коэффициентами в разложении бинома

$$(1+x)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \, x^i ;$$

5. Сочетания C_k^l являются биномиальными коэффициентами в разложении бинома

$$\left(1+x\right)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \, x^i \,;$$

6. (следует из 5): $\sum_{i=0}^{k} C_k^i = 2^k$.

Размещения с повторениями

Если в размещениях из k элементов по l элементов возможны повторения элементов, то такие размещения называются **размещениями с повторениями:**

$$\tilde{A}_k^l = k^l.$$

Размещения с повторениями

Если в размещениях из k элементов по l элементов возможны повторения элементов, то такие размещения называются **размещениями с повторениями:**

$$\tilde{A}_k^l = k^l.$$

Например, из букв a,b,c возможны такие размещения с повторениями по две буквы:

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;

их число равно $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$

Размещения с повторениями

Если в размещениях из k элементов по l элементов возможны повторения элементов, то такие размещения называются **размещениями с повторениями:**

$$\tilde{A}_k^l = k^l.$$

Например, из букв a,b,c возможны такие размещения с повторениями по две буквы:

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;

их число равно $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$

Может выполняться: $l > k$.

Размещения с повторениями

Если в размещениях из k элементов по l элементов возможны повторения элементов, то такие размещения называются **размещениями с повторениями:**

$$\tilde{A}_k^l = k^l.$$

Например, из букв a,b,c возможны такие размещения с повторениями по две буквы:

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;

их число равно $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$

Может выполняться: $l > k$.

Размещения с повторениями называют также **упорядоченной выборкой с возвращением**.

Перестановки с повторениями

- выборки, в которых среди k элементов находятся k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …, k_s элементов s-го типа,

Перестановки с повторениями

- выборки, в которых среди k элементов находятся k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …, k_s элементов s-го типа,

причем $k_1 + k_2 + ... + k_s = k$. Числа $k_1, k_2, ..., k_s$ называют числами повторений (кратностью) элементов в выборке.

$$\underbrace{aa...a}_{k_1}\underbrace{bb...b}_{k_2}...\underbrace{cc...c}_{k_s}$$

Перестановки с повторениями

- выборки, в которых среди k элементов находятся

k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …,

k_s элементов s-го типа,

причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = k$. Числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ называют числами повторений (кратностью) элементов в выборке.

$$\underbrace{aa\ldots a}_{k_1}\underbrace{bb\ldots b}_{k_2}\ldots\underbrace{cc\ldots c}_{k_s}$$

Число перестановок из k элементов с заданной кратностью повторений равно

$$P_k\left(k_1, k_2, \ldots, k_s\right) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}.$$

Перестановки с повторениями

- выборки, в которых среди k элементов находятся k_1 элементов 1-го типа, k_2 элементов 2-го типа, …, k_s элементов s-го типа,

причем $k_1+k_2+...+k_s=k$. Числа $k_1,k_2,...,k_s$ называют числами повторений (кратностью) элементов в выборке.

$$\underbrace{aa...a}_{k_1}\underbrace{bb...b}_{k_2}...\underbrace{cc...c}_{k_s}$$

Число перестановок из k элементов с заданной кратностью повторений равно

$$P_k\left(k_1,k_2,...,k_s\right)=\frac{k!}{k_1!k_2!...k_s!}.$$

Например, из n = 4 букв а,а,м,м, каждая из которых повторяется по 2 раза возможно получить

$P_4(2,2)=\dfrac{4!}{2!2!}=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=6$ перестановок с повторениями:

мама, амма, маам, аамм, ммаа, амам.

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Например, для букв a,b,c сочетания с повторениями по 2 имеют вид:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Например, для букв a,b,c сочетания с повторениями по 2 имеют вид:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Обозначим $\tilde{C}_k^l$ - число сочетаний с повторениями из k по l.

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Например, для букв a,b,c сочетания с повторениями по 2 имеют вид:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Обозначим $\tilde{C}_k^l$ - число сочетаний с повторениями из k по l.

Построение конфигурации: пусть имеется $k-1+l$ позиций, на которых расставляются $k-1$ разделителей (0) и l единиц.

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Например, для букв a,b,c сочетания с повторениями по 2 имеют вид:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Обозначим $\tilde{C}_k^l$ - число сочетаний с повторениями из k по l.

Построение конфигурации: пусть имеется $k-1+l$ позиций, на которых расставляются $k-1$ разделителей (0) и l единиц.

Разделитель означает, что кандидатом для отбора является следующий по порядку элемент из числа исходных;

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Например, для букв a,b,c сочетания с повторениями по 2 имеют вид:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Обозначим $\tilde{C}_k^l$ - число сочетаний с повторениями из k по l.

Построение конфигурации: пусть имеется $k-1+l$ позиций, на которых расставляются $k-1$ разделителей (0) и l единиц.

Разделитель означает, что кандидатом для отбора является следующий по порядку элемент из числа исходных;

1 соответствует выбору этого элемента.

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Например, для букв a,b,c сочетания с повторениями по 2 имеют вид:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Обозначим $\tilde{C}_k^l$ - число сочетаний с повторениями из k по l.

Построение конфигурации: пусть имеется $k-1+l$ позиций, на которых расставляются $k-1$ разделителей (0) и l единиц.

Разделитель означает, что кандидатом для отбора является следующий по порядку элемент из числа исходных;

1 соответствует выбору этого элемента.

Варианты конфигураций в примере:

$$\underset{a\,a}{1100}\quad \underset{a\quad b}{1010}\quad \underset{a\qquad c}{1001}\quad \underset{b\,b}{0110}\quad \underset{b\quad c}{0101}\quad \underset{c\,c}{0011}$$

Сочетания с повторениями

Пусть в неупорядоченных наборах, состоящих из l элементов выбираемых из k элементов, возможны повторения до l раз включительно.

Например, для букв a,b,c сочетания с повторениями по 2 имеют вид:

aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Обозначим $\tilde{C}_k^l$ - число сочетаний с повторениями из k по l.

Построение конфигурации: пусть имеется $k-1+l$ позиций, на которых расставляются $k-1$ разделителей (0) и l единиц.

Разделитель означает, что кандидатом для отбора является следующий по порядку элемент из числа исходных;

1 соответствует выбору этого элемента.

Варианты конфигураций в примере:

$$\underset{a}{1}\underset{a}{1}00 \quad \underset{a}{1}0\underset{b}{1}0 \quad \underset{a}{1}00\underset{c}{1} \quad 0\underset{b}{1}\underset{b}{1}0 \quad 0\underset{b}{1}0\underset{c}{1} \quad 00\underset{c}{1}\underset{c}{1}$$

$$\tilde{C}_4^2 = P_4(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

В общем случае получим $k-1$ разделитель (0) и l единиц, которые образуют перестановки с повторениями кратности $k-1$ и l.

$$\underbrace{01101...0011}_{k-1+l}$$

В общем случае получим $k-1$ разделитель (0) и l единиц, которые образуют перестановки с повторениями кратности $k-1$ и l.

$$\underbrace{01101...0011}_{k-1+l}$$

Значит

$$\tilde{C}_k^l = P_{k-1+l}(k-1,l) = \frac{(k-1+l)!}{(k-1)!\,l!} = C_{k-1+l}^l.$$

В общем случае получим $k-1$ разделитель (0) и l единиц, которые образуют перестановки с повторениями кратности $k-1$ и l.

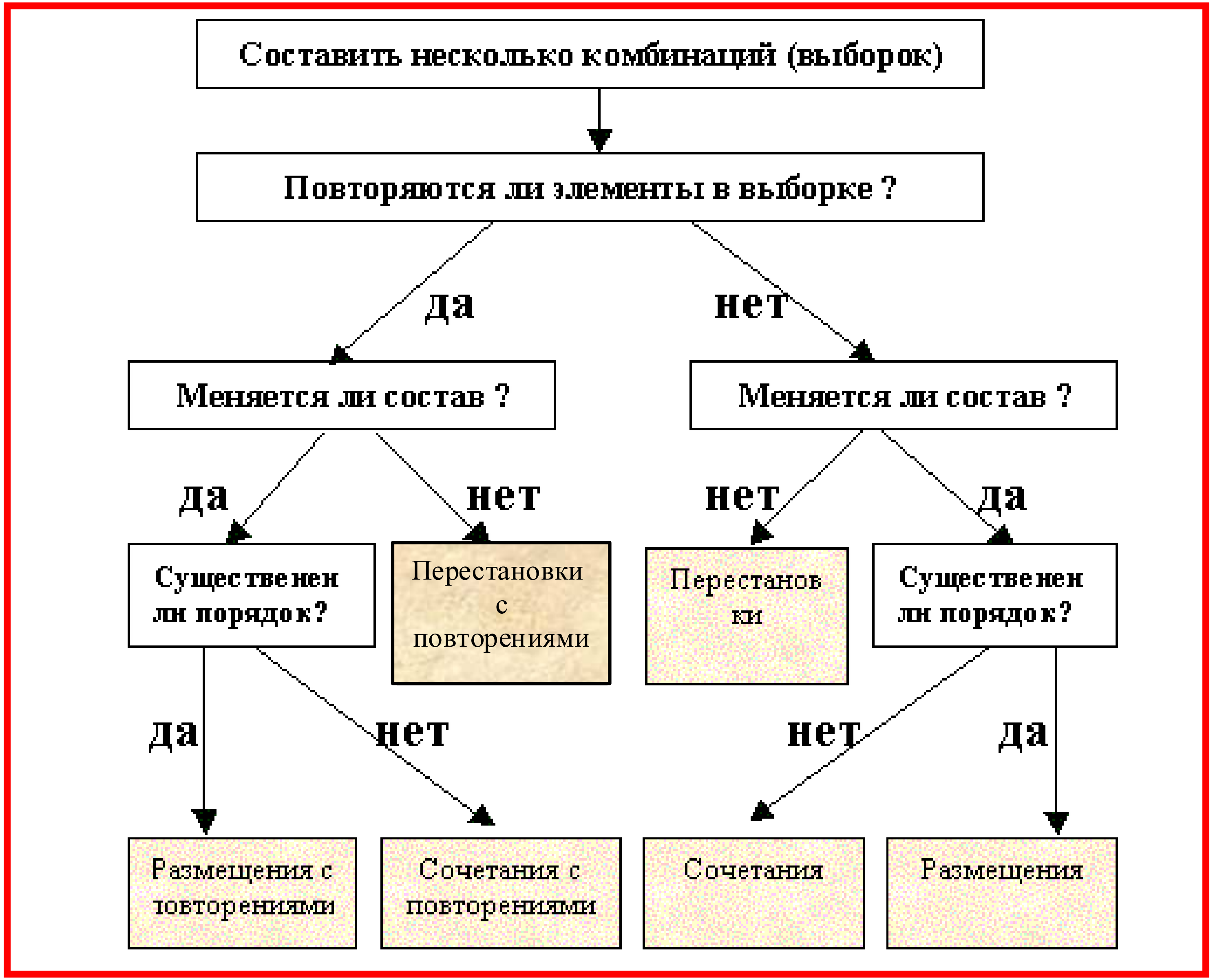
$$\underbrace{01101\ldots0011}_{k-1+l}$$

Значит

$$\tilde{C}_k^l = P_{k-1+l}(k-1,l) = \frac{(k-1+l)!}{(k-1)!\,l!} = C_{k-1+l}^l.$$

Сочетания с повторениями называют также **неупорядоченной выборкой с возвращением**.

Алгоритм определения типа комбинаторной конфигурации



Пример задачи

В урне находятся 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Вынимаются наудачу 2 шара. Какова вероятность, что они окажутся разного цвета – событие А.

Пример задачи

В урне находятся 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Вынимаются наудачу 2 шара. Какова вероятность, что они окажутся разного цвета – событие А.

Решение. Эксперимент состоит в вынимании из урны 2-х шаров из 5 без возвращения. Не важно, в каком порядке шары вынимаются из урны. Поэтому число равновозможных элементарных исходов определяется числом сочетаний

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Пример задачи

В урне находятся 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Вынимаются наудачу 2 шара. Какова вероятность, что они окажутся разного цвета – событие А.

Решение. Эксперимент состоит в вынимании из урны 2-х шаров из 5 без возвращения. Не важно, в каком порядке шары вынимаются из урны. Поэтому число равновозможных элементарных исходов определяется числом сочетаний

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Число элементарных исходов, благоприятствующих событию А: $m = C_3^1 C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6.$

Пример задачи

В урне находятся 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Вынимаются наудачу 2 шара. Какова вероятность, что они окажутся разного цвета – событие А.

Решение. Эксперимент состоит в вынимании из урны 2-х шаров из 5 без возвращения. Не важно, в каком порядке шары вынимаются из урны. Поэтому число равновозможных элементарных исходов определяется числом сочетаний

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Число элементарных исходов, благоприятствующих событию А: $m = C_3^1 C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6.$

Следовательно, $P\left(A\right) = \frac{m}{n} = 0.6$

Недостаток классического определения вероятности состоит в том, что число элементарных исходов опыта должно быть конечным. В случае бесконечного (континуального) числа исходов прибегают к геометрическому определению вероятности.