Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии наступления событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу.

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии наступления событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу. События H_k, $k = 1, ..., n$ называют **гипотезами**.

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии наступления событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу. События $H_k,\ k = 1, ..., n$ называют **гипотезами**. Пусть известны вероятности этих событий (**априорные вероятности**) $P(H_k),\ k = 1, ..., n$ и условные вероятности $P(A / H_k),\ k = 1, ..., n.$

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии наступления событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу. События H_k, $k = 1, ..., n$ называют **гипотезами**. Пусть известны вероятности этих событий (**априорные вероятности**) $P(H_k)$, $k = 1, ..., n$ и условные вероятности $P(A / H_k)$, $k = 1, ..., n$. Допустим, что произведено испытание, в результате которого событие A наступило.

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии наступления событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу. События H_k, $k = 1,...,n$ называют **гипотезами**. Пусть известны вероятности этих событий (**априорные вероятности**) $P(H_k)$, $k = 1,...,n$ и условные вероятности $P(A/H_k)$, $k = 1,...,n$. Допустим, что произведено испытание, в результате которого событие A наступило. Тогда **апостериорная вероятность** любого события H_k

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Доказательство.

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{P(A)}.$$

Доказательство.

$$P\left(H_k \mid A\right) = \frac{P\left(H_k \cdot A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(H_k\right) P\left(A \mid H_k\right)}{P\left(A\right)}.$$

По формуле полной вероятности $P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) P\left(A \mid H_i\right)$

Доказательство.

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{P(A)}.$$

По формуле полной вероятности $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)$

$\Rightarrow$ формула Байеса.

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0.6, а ко второму – 0.4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0.94, а вторым – 0.98. Годная деталь при проверке была признана стандартной - событие А. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0.6, а ко второму – 0.4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0.94, а вторым – 0.98. Годная деталь при проверке была признана стандартной - событие А. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер – событие H_1;

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0.6, а ко второму – 0.4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0.94, а вторым – 0.98. Годная деталь при проверке была признана стандартной - событие А. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер – событие H_1;

2) деталь проверил второй контролер – событие H_2.

I

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0.6, а ко второму – 0.4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0.94, а вторым – 0.98. Годная деталь при проверке была признана стандартной - событие А. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер – событие H_1;

2) деталь проверил второй контролер – событие H_2.

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}.$$

По условию задачи имеем:

$$P\left(H_1\right) = 0.6$$

- вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру;

По условию задачи имеем:

$$P\left(H_1\right) = 0.6$$

- вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру;

$$P\left(H_2\right) = 0.4$$

- вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру;

По условию задачи имеем:

$$P\left(H_1\right)=0.6$$

- вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру;

$$P\left(H_2\right)=0.4$$

- вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру; $P\left(A|H_1\right)=0.94$ - вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером;

По условию задачи имеем:

$$P\left(H_1\right)=0.6$$

- вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру;

$$P\left(H_2\right)=0.4$$

- вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру; $P\left(A|H_1\right)=0.94$ - вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером; $P\left(A|H_2\right)=0.98$ - вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной вторым контролером.

По условию задачи имеем:

$$P\left(H_1\right)=0.6$$

- вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру;

$$P\left(H_2\right)=0.4$$

- вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру; $P\left(A|H_1\right)=0.94$ - вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером; $P\left(A|H_2\right)=0.98$ - вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной вторым контролером. Тогда

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)}{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)+P\left(H_2\right)P\left(A/H_2\right)}$$

$$=\frac{0.6\cdot 0.94}{0.6\cdot 0.94+0.4\cdot 0.98}\approx 0.59.$$

Схема испытаний Бернулли

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний) называют эксперимент, удовлетворяющий условиям:

Схема испытаний Бернулли

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний) называют эксперимент, удовлетворяющий условиям:

1) за основу берется эксперимент, имеющий 2 исхода. Это может быть , например, появление некоторого события B - один исход, и не появление этого события $\bar{B}$ – другой исход:

Схема испытаний Бернулли

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний) называют эксперимент, удовлетворяющий условиям:

1) за основу берется эксперимент, имеющий 2 исхода. Это может быть , например, появление некоторого события B - один исход, и не появление этого события B – другой исход:

2) этот исходный эксперимент повторяется независимо n раз. «Независимо» - т.е. исходы эксперимента при очередном повторении не зависят от исходов эксперимента на предыдущих шагах;

Схема испытаний Бернулли

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний) называют эксперимент, удовлетворяющий условиям:

1) за основу берется эксперимент, имеющий 2 исхода. Это может быть , например, появление некоторого события B - один исход, и не появление этого события $\bar{B}$ – другой исход:

2) этот исходный эксперимент повторяется независимо n раз. «Независимо» - т.е. исходы эксперимента при очередном повторении не зависят от исходов эксперимента на предыдущих шагах;

3) вероятности двух исходов при каждом повторении исходного эксперимента одни и те же.

Пусть в случайном испытании событие B появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $1 - p = q$.

Пусть в случайном испытании событие B появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $1-p = q$. Проводится серия таких независимых испытаний.

Пусть в случайном испытании событие B появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $1-p = q$. Проводится серия таких независимых испытаний. Необходимо вычислить вероятность $P(n,m)$ того, что при n испытаниях событие B осуществится ровно m раз и, следовательно, не осуществится ровно $n-m$ раз.

Пусть в случайном испытании событие B появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $1-p = q$. Проводится серия таких независимых испытаний. Необходимо вычислить вероятность $P(n,m)$ того, что при n испытаниях событие B осуществится ровно m раз и, следовательно, не осуществится ровно $n-m$ раз.

Формула Бернулли

$$\boxed{P(n,m)=C_n^m p^m q^{n-m}}\ .$$

Пусть в случайном испытании событие B появляется с вероятностью p и не появляется с вероятностью $1-p = q$. Проводится серия таких независимых испытаний. Необходимо вычислить вероятность $P(n,m)$ того, что при n испытаниях событие B осуществится ровно m раз и, следовательно, не осуществится ровно $n-m$ раз.

Формула Бернулли

$$\boxed{P(n,m)=C_n^m p^m q^{n-m}}\ .$$

Доказательство. Вероятность события «в n независимых испытаниях событие B наступило m раз и не наступило $n-m$ раз» равна $p^m q^{n-m}$; число таких элементарных исходов совпадает с числом сочетаний из n элементов по m и равно C_n^m.

Пример. Частица пролетает последовательно мимо 6 счетчиков, каждый из которых независимо от остальных отмечает ее пролет с вероятностью p=0,8. Частица считается зарегистрированной (событие A), если она отмечена не менее чем двумя счетчиками. Найти вероятность $P(A)$.

Пример. Частица пролетает последовательно мимо 6 счетчиков, каждый из которых независимо от остальных отмечает ее пролет с вероятностью p=0,8. Частица считается зарегистрированной (событие А), если она отмечена не менее чем двумя счетчиками. Найти вероятность $P(A)$.

Решение. Вычислим сначала P($\overline{A}$): событие $\overline{A}$ осуществится, если частица или не будет зарегистрирована ни одним счетчиком – событие A_0, или будет зарегистрирована только одним счетчиком – событие A_1.

Пример. Частица пролетает последовательно мимо 6 счетчиков, каждый из которых независимо от остальных отмечает ее пролет с вероятностью p=0,8. Частица считается зарегистрированной (событие А), если она отмечена не менее чем двумя счетчиками. Найти вероятность $P(A)$.

Решение. Вычислим сначала Р($\overline{A}$): событие $\overline{A}$ осуществится, если частица или не будет зарегистрирована ни одним счетчиком – событие A_0, или будет зарегистрирована только одним счетчиком – событие A_1. Вероятности $P\left(A_0\right)$, $P\left(A_1\right)$ вычисляем по формуле Бернулли:

Пример. Частица пролетает последовательно мимо 6 счетчиков, каждый из которых независимо от остальных отмечает ее пролет с вероятностью p=0,8. Частица считается зарегистрированной (событие А), если она отмечена не менее чем двумя счетчиками. Найти вероятность $P(A)$.

Решение. Вычислим сначала P($\overline{A}$): событие $\overline{A}$ осуществится, если частица или не будет зарегистрирована ни одним счетчиком – событие A_0, или будет зарегистрирована только одним счетчиком – событие A_1. Вероятности $P\left(A_0\right)$, $P\left(A_1\right)$ вычисляем по формуле Бернулли:

$$P\left(A_0\right)=C_6^0 p^0 q^6=\left(0.2\right)^6, \quad P\left(A_1\right)=C_6^1 pq^5=6\cdot 0.8\cdot\left(0.2\right)^5.$$

Пример. Частица пролетает последовательно мимо 6 счетчиков, каждый из которых независимо от остальных отмечает ее пролет с вероятностью p=0,8. Частица считается зарегистрированной (событие A), если она отмечена не менее чем двумя счетчиками. Найти вероятность $P(A)$.

Решение. Вычислим сначала P($\overline{A}$): событие $\overline{A}$ осуществится, если частица или не будет зарегистрирована ни одним счетчиком – событие A_0, или будет зарегистрирована только одним счетчиком – событие A_1. Вероятности $P\left(A_0\right)$, $P\left(A_1\right)$ вычисляем по формуле Бернулли:

$P\left(A_0\right)=C_6^0 p^0 q^6=\left(0.2\right)^6$, $P\left(A_1\right)=C_6^1 pq^5=6\cdot 0.8\cdot\left(0.2\right)^5$. Тогда

$$P(\overline{A})=C_6^0 p^0 q^6+C_6^1 pq^5=0.2^6+6\cdot 0.8\cdot 0.2^5=0.2^6(1+2.4)=5\cdot 0.2^5.$$

Пример. Частица пролетает последовательно мимо 6 счетчиков, каждый из которых независимо от остальных отмечает ее пролет с вероятностью p=0,8. Частица считается зарегистрированной (событие А), если она отмечена не менее чем двумя счетчиками. Найти вероятность $P(A)$.

Решение. Вычислим сначала P($\overline{A}$): событие $\overline{A}$ осуществится, если частица или не будет зарегистрирована ни одним счетчиком – событие A_0, или будет зарегистрирована только одним счетчиком – событие A_1. Вероятности $P\left(A_0\right)$, $P\left(A_1\right)$ вычисляем по формуле Бернулли:

$P\left(A_0\right) = C_6^0 p^0 q^6 = \left(0.2\right)^6$, $P\left(A_1\right) = C_6^1 pq^5 = 6 \cdot 0.8 \cdot \left(0.2\right)^5$. Тогда

$P(\overline{A}) = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 pq^5 = 0.2^6 + 6 \cdot 0.8 \cdot 0.2^5 = 0.2^6(1 + 2.4) = 5 \cdot 0.2^5$.

Отсюда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 5 \cdot 0.2^5 = 1 - 0.0016 = 0.9984$.

Замечание. События B_m при различных m в схеме Бернулли несовместны. Значит, вероятность успеха в n испытаниях не менее чем m_1 раз, но не более чем m_2 раз равна:

Замечание. События B_m при различных m в схеме Бернулли несовместны. Значит, вероятность успеха в n испытаниях не менее чем m_1 раз, но не более чем m_2 раз равна:

$$P(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Если в схеме Бернулли проводится большое число испытаний (например, $n > 1000$), то пользоваться формулой Бернулли становится затруднительно.

Если в схеме Бернулли проводится большое число испытаний (например, $n > 1000$), то пользоваться формулой Бернулли становится затруднительно.

Формула Пуассона

- применяется тогда, когда наряду с **большим** числом испытаний n **мала** вероятность успеха в каждом отдельном испытании.

Если в схеме Бернулли проводится большое число испытаний (например, $n > 1000$), то пользоваться формулой Бернулли становится затруднительно.

Формула Пуассона

- применяется тогда, когда наряду с **большим** числом испытаний n **мала** вероятность успеха в каждом отдельном испытании.

Теорема Пуассона. Если число испытаний в схеме Бернулли n велико, вероятность успеха в одном испытании p_n мала, и мало число $\lambda = np_n$, тогда

Если в схеме Бернулли проводится большое число испытаний (например, $n > 1000$), то пользоваться формулой Бернулли становится затруднительно.

Формула Пуассона

- применяется тогда, когда наряду с **большим** числом испытаний n **мала** вероятность успеха в каждом отдельном испытании.

Теорема Пуассона. Если число испытаний в схеме Бернулли n велико, вероятность успеха в одном испытании p_n мала, и мало число $\lambda = np_n$, тогда

$$P(n,m) = C_n^m p^m q^{n-m} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad m = 0,1,2...$$

Доказательство. Так как $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$, λ = *const*, то по формуле Бернулли

$$P(n,m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = C_n^m \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

-

Доказательство. Так как $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$, $\lambda = const$, то по формуле Бернулли

$$P(n,m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = C_n^m \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^m} =$$

Доказательство. Так как $p_n = \frac{\lambda}{n}$, λ = *const*, то по формуле Бернулли

$$P(n,m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = C_n^m \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \left[\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{n^m}\right] \cdot \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^m}$$

Доказательство. Так как $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$, λ = *const*, то по формуле Бернулли

$$P(n,m) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = C_n^m \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \underbrace{\left[\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{n^m}\right]}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot \frac{\overbrace{(1 - \dfrac{\lambda}{n})^n}^{\substack{e^{-\lambda} \\ \uparrow}}}{\underbrace{(1 - \dfrac{\lambda}{n})^m}_{\substack{\downarrow \\ 1}}} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad \text{при } n \to \infty,$$

$$P\left(n,m\right)=C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = C_n^m \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{\lambda^{m}}{n^m}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m}=$$

$$=\frac{\lambda^{m}}{m!}\underbrace{\left[\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{n^m}\right]}_{\substack{\downarrow \\ 1}}\cdot\frac{\overbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}^{\substack{e^{-\lambda} \\ \uparrow}}}{\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m}_{\substack{\downarrow \\ 1}}}\to\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda} \quad \text{при } n\to\infty,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ *(второй замечательный предел)*

Таким образом, при достаточно большом n (по сравнению с np) выполняется приближенное равенство

$$P(n,m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Пример. По каналу связи передано 100 символов. Вероятность искажения одного символа помехами $p=0.04$. Найти вероятность того, что будет искажено 2 символа.

Пример. По каналу связи передано 100 символов. Вероятность искажения одного символа помехами p=0.04. Найти вероятность того, что будет искажено 2 символа.

Решение. Требуется найти $P(100,2)$. Применим формулу Пуассона, так как np=4 можно считать достаточно малой величиной.

$$P(100,2) \approx \frac{4^2}{2!} e^{-4} \approx 0.1465.$$

Пример. По каналу связи передано 100 символов. Вероятность искажения одного символа помехами p=0.04. Найти вероятность того, что будет искажено 2 символа.

Решение. Требуется найти $P(100,2)$. Применим формулу Пуассона, так как np=4 можно считать достаточно малой величиной.

$$P(100,2) \approx \frac{4^2}{2!}e^{-4} \approx 0.1465.$$

Вычисления по точной формуле дают $P(100,2) = 0.1450$.

Глава 3. Случайные величины

Случайной величиной называется функция X, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ число $X = X(\omega)$.

Глава 3. Случайные величины

Случайной величиной называется функция X, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ число $X = X(\omega)$.

Будем обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z и т.д., а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z.

Глава 3. Случайные величины

Случайной величиной называется функция X, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ число $X = X(\omega)$.

Будем обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z и т.д., а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z.

Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Глава 3. Случайные величины

Случайной величиной называется функция X, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ число $X = X(\omega)$.

Будем обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z и т.д., а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z.

Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Случайные величины используются для того, чтобы выразить числовые характеристики случайных событий.

Функцией распределения называют функцию $F\left(x\right)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F\left(x\right)=P(X<x)$.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F(x)=P(X<x)$.

Свойства функции распределения.

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$: $0\le F(x)\le 1.$

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения.

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ есть неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

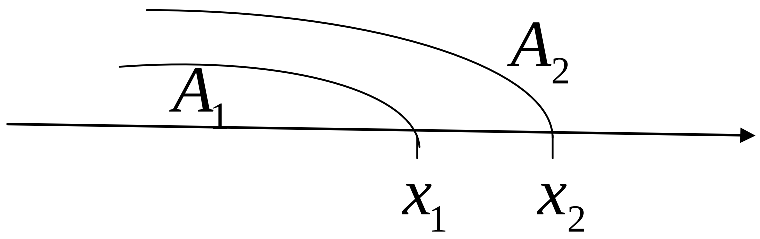
Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения.

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ есть неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Доказательство. Введем события $A_1 = \{X < x_1\}$, $A_2 = \{X < x_2\}$. Тогда $A_1 \subset A_2$, поэтому $P(A_1) \le P(A_2)$, значит $F(x_1) \le F(x_2)$.



3. Вероятность того, что случайная величина примет значение из промежутка $[a,b)$ равна

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

то есть приращению функции распределения на этом интервале.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение из промежутка $[a,b)$ равна

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

то есть приращению функции распределения на этом интервале.

Доказательство. Так как событие

$$\{X < b\}$$

эквивалентно событию

$$\{X < a\} \bigcup \{a \le X < b\},$$

то

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b).$$

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение из промежутка $[a,b)$ равна

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

то есть приращению функции распределения на этом интервале.

Доказательство. Так как событие

$$\{X < b\}$$

эквивалентно событию

$$\{X < a\} \bigcup \{a \le X < b\},$$

то

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b).$$

Поэтому

$$P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a).$$

4. Существуют пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

4. Существуют пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} F\left(x\right)=0; \quad \lim\limits_{x\to\infty} F\left(x\right)=1.$

Доказательство. Существование и единственность пределов следует из монотонности и ограниченности $F(x)$ Найдем значение пределов.

4. Существуют пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Доказательство. Существование и единственность пределов следует из монотонности и ограниченности $F(x)$
Найдем значение пределов.
Так как неравенство $X < +\infty$ достоверно, то $P(X < +\infty) = 1$.

4. Существуют пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Доказательство. Существование и единственность пределов следует из монотонности и ограниченности $F(x)$
Найдем значение пределов.
Так как неравенство $X < +\infty$ достоверно, то $P(X < +\infty) = 1$.
Пусть событие

$$Q_k = \{k - 1 \le X < k\}.$$

4. Существуют пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Доказательство. Существование и единственность пределов следует из монотонности и ограниченности $F(x)$
Найдем значение пределов.
Так как неравенство $X < +\infty$ достоверно, то $P(X < +\infty) = 1$.
Пусть событие

$$Q_k = \{k - 1 \le X < k\}.$$

Так как событие $\{X < +\infty\} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_k$, то по аксиоме счетной аддитивности $P(X < +\infty) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} P(Q_k)$.

4. Существуют пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} F\left(x\right)=0; \quad \lim\limits_{x\to\infty} F\left(x\right)=1.$

Доказательство. Существование и единственность пределов следует из монотонности и ограниченности $F(x)$
Найдем значение пределов.
Так как неравенство $X<+\infty$ достоверно, то $P(X<+\infty)=1$.
Пусть событие

$$Q_k=\{k-1\le X<k\}.$$

Так как событие $\{X<+\infty\}=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_k$, то по аксиоме счетной аддитивности $P(X<+\infty)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} P(Q_k)$.

Следовательно, при $n\to\infty$

$$\sum_{k=1-n}^{n} P(Q_k)=\sum_{k=1-n}^{n}\left(F(k)-F(k-1)\right)=F(n)-F(-n)\to 1.$$

4. Существуют пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Доказательство. Существование и единственность пределов следует из монотонности и ограниченности $F(x)$ Найдем значение пределов.

Так как неравенство $X < +\infty$ достоверно, то $P(X < +\infty) = 1.$

Пусть событие

$$Q_k = \{k - 1 \le X < k\}.$$

Так как событие $\{X < +\infty\} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_k$, то по аксиоме счетной аддитивности $P(X < +\infty) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} P(Q_k)$.

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1-n}^{n} P(Q_k) = \sum_{k=1-n}^{n} \big(F(k) - F(k-1)\big) = F(n) - F(-n) \to 1.$$

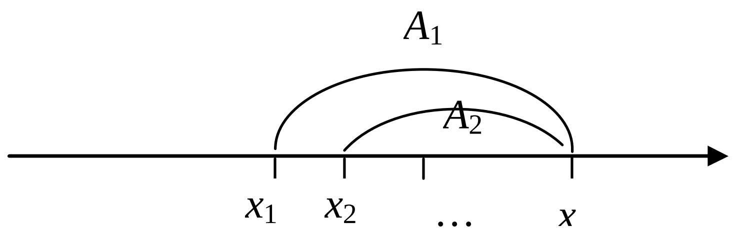
Так как $0 \le F(x) \le 1$, то $F(-n) \to 0$, $F(+n) \to 1$.

5. Функция распределения непрерывна слева, т.е. для возрастающей последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, где $x_n \to x$ выполняется: $F(x_n) \to F(x-0) = F(x)$.

5. Функция распределения непрерывна слева, т.е. для возрастающей последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, где $x_n \to x$ выполняется: $F(x_n) \to F(x-0) = F(x)$.

Доказательство. Обозначим через A_n событие $\{x_n \le X < x\}$.

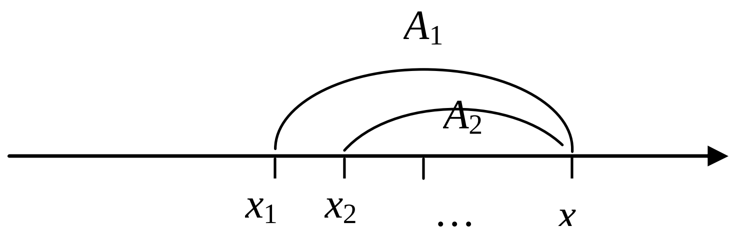
Тогда $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$.



5. Функция распределения непрерывна слева, т.е. для возрастающей последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, где $x_n \to x$ выполняется: $F(x_n) \to F(x-0) = F(x)$.

Доказательство. Обозначим через A_n событие $\{x_n \le X < x\}$.

Тогда $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$.



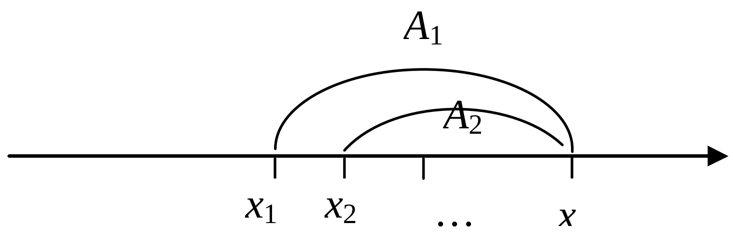
По свойству непрерывности вероятности существует предел

$$\lim_{n \to \infty} P\left(A_n\right) = 0.$$

5. Функция распределения непрерывна слева, т.е. для возрастающей последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, где $x_n \to x$ выполняется: $F(x_n) \to F(x-0) = F(x)$.

Доказательство. Обозначим через A_n событие $\{x_n \le X < x\}$.

Тогда $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$.



По свойству непрерывности вероятности существует предел

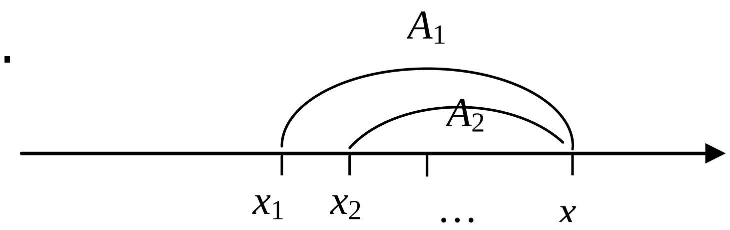
$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right) = 0.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[F(x) - F(x_n)\right] = F(x) - \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) =$

5. Функция распределения непрерывна слева, т.е. для возрастающей последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, где $x_n \to x$ выполняется: $F(x_n) \to F(x-0) = F(x)$.

Доказательство. Обозначим через A_n событие $\{x_n \le X < x\}$.

Тогда $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$.

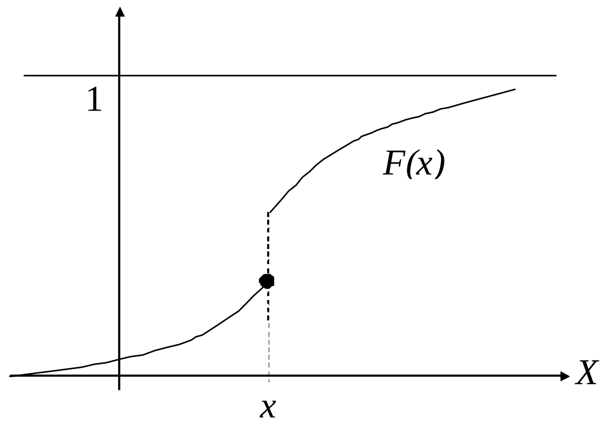


По свойству непрерывности вероятности существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right) = 0.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[F(x) - F(x_n)\right] = F(x) - \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) =$

$= F(x) - F(x-0) = 0$, значит $F(x-0) = F(x)$.



Случайная величина X называется **дискретной**, если существует конечная или счетная последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots,$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = 1.$$

Случайная величина X называется **дискретной**, если существует конечная или счетная последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots,$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = 1.$$

Дискретную случайную величину удобно задавать в виде таблицы или графика (полигона распределения):

Значения	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
Вероятности	p_1	p_2	p_3	$\ldots$

Случайная величина X называется **дискретной**, если существует конечная или счетная последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = 1.$$

Дискретную случайную величину удобно задавать в виде таблицы или графика (полигона распределения):

Значения	x_1	x_2	x_3	…
Вероятности	p_1	p_2	p_3	…

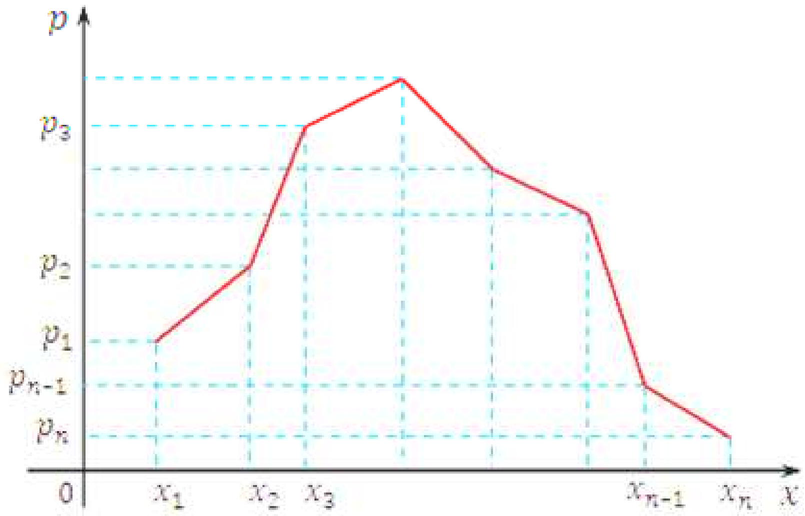
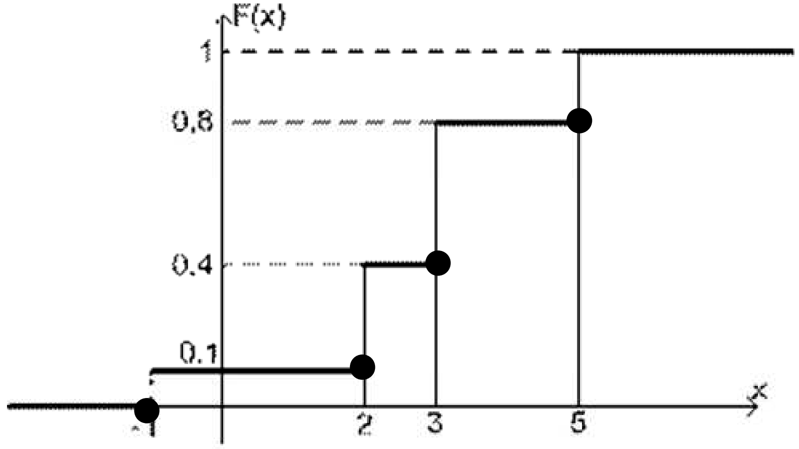


График функции распределения для дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид:



x_i	-1	2	3	5
p_i	0.1	0.3	0.4	0.2

Биномиальное распределение

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

Биномиальное распределение

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим X - число появлений события A в этих испытаниях.

Биномиальное распределение

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим X - число появлений события A в этих испытаниях. Тогда

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

(формула Бернулли).

$$\boxed{X \sim Bin(n, p)}$$

Биномиальное распределение

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим X - число появлений события A в этих испытаниях. Тогда

$$P\left(X = k\right) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

(формула Бернулли).

$$\boxed{X \sim Bin\left(n, p\right)}$$

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

Биномиальное распределение

Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q=1-p$. Обозначим X - число появлений события A в этих испытаниях. Тогда

$$P\left(X=k\right)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

(формула Бернулли).

$$\boxed{X \sim Bin\left(n, p\right)}$$

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть формулы можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$\left(p+q\right)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Пример. Монета подброшена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

Пример. Монета подброшена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.
Решение. Вероятность появления герба равна 0.5, вероятность же не появления герба равна также 0.5.

Пример. Монета подброшена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.
Решение. Вероятность появления герба равна 0.5, вероятность же не появления герба равна также 0.5. При двух бросаниях монеты герб может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться.

Пример. Монета подброшена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

Решение. Вероятность появления герба равна 0.5, вероятность же не появления герба равна также 0.5. При двух бросаниях монеты герб может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы:

$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$

Пример. Монета подброшена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

Решение. Вероятность появления герба равна 0.5, вероятность же не появления герба равна также 0.5. При двух бросаниях монеты герб может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 2,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 0$. По формуле Бернулли

$$P(2,2) = C_2^2 p^2 = (0.5)^2 = 0.25;$$

Пример. Монета подброшена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

Решение. Вероятность появления герба равна 0.5, вероятность же не появления герба равна также 0.5. При двух бросаниях монеты герб может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 2, \ \ x_2 = 1, \ \ x_3 = 0$. По формуле Бернулли

$$P\left(2,2\right) = C_2^2 p^2 = \left(0.5\right)^2 = 0.25;$$

$$P\left(2,1\right) = C_2^1 p \ q = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5;$$

Пример. Монета подброшена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

Решение. Вероятность появления герба равна 0.5, вероятность же не появления герба равна также 0.5. При двух бросаниях монеты герб может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 0$. По формуле Бернулли

$$P(2,2) = C_2^2 p^2 = (0.5)^2 = 0.25;$$

$$P(2,1) = C_2^1 p \; q = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5;$$

$$P(2,0) = C_2^0 p^0 q^2 = (0.5)^2 = 0.25.$$

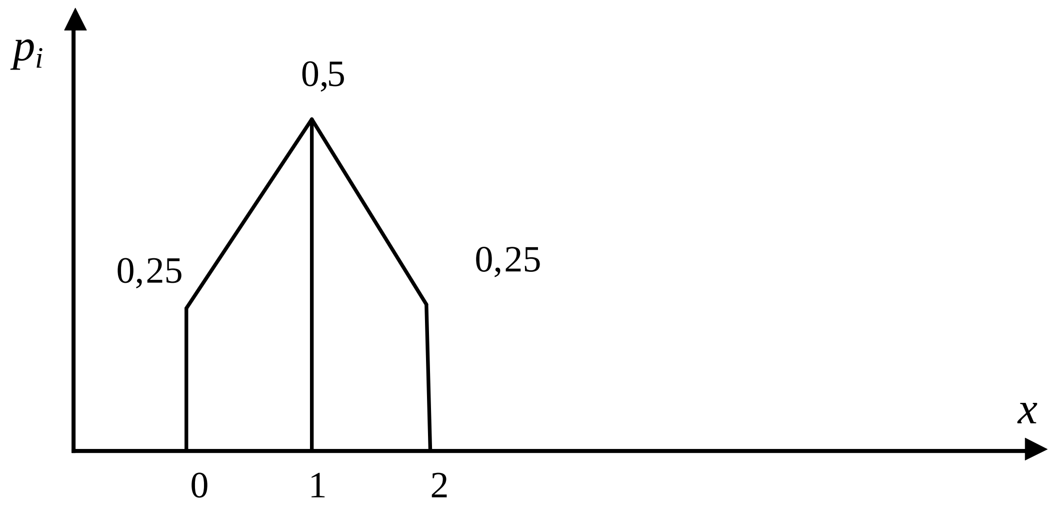
Искомый ряд распределения:

X	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

Искомый ряд распределения:

X	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

График:



Перед применением биномиального закона необходимо убедиться, что выполняются условия биномиального эксперимента:

Перед применением биномиального закона необходимо убедиться, что выполняются условия биномиального эксперимента:

1. Каждое испытание имеет два исхода: успех и неуспех – взаимно несовместные и противоположные события.

Перед применением биномиального закона необходимо убедиться, что выполняются условия биномиального эксперимента:

1. Каждое испытание имеет два исхода: успех и неуспех – взаимно несовместные и противоположные события.

2 Вероятность успеха p остается постоянной от испытания к испытанию.

Перед применением биномиального закона необходимо убедиться, что выполняются условия биномиального эксперимента:

1. Каждое испытание имеет два исхода: успех и неуспех – взаимно несовместные и противоположные события.

2 Вероятность успеха p остается постоянной от испытания к испытанию.

3. Все n испытаний – независимы. Вероятность наступления события в любом из испытаний не зависит от результатов других испытаний.

Распределение Бернулли

Если в схеме испытаний Бернулли число опытов $n = 1$, соответствующее распределение носит название распределения Бернулли.

Распределение Бернулли

Если в схеме испытаний Бернулли число опытов $n=1$, соответствующее распределение носит название распределения Бернулли.

$X=1$ с вероятностью p, либо

$X=0$ с вероятностью $q=1-p$.

Распределением Пуассона называют распределение вероятностей, определяемое формулой:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения, k=0,1,2,3,…

Распределением Пуассона называют распределение вероятностей, определяемое формулой:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения, k=0,1,2,3,…

$$\boxed{X \sim P(\lambda)}.$$

Распределением Пуассона называют распределение вероятностей, определяемое формулой:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения, k=0,1,2,3,…

$$\boxed{X \sim P(\lambda)}.$$

Распределение служит для моделирования редких событий.

Поток событий - последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Поток событий - последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Примеры: радиоактивный распад;
поступление вызовов на АТС; прибытие самолетов в аэропорт; приход клиентов на обслуживание и т.п.

Поток событий - последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Примеры: радиоактивный распад;
поступление вызовов на АТС; прибытие самолетов в аэропорт; приход клиентов на обслуживание и т.п.

Интенсивность потока λ - среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Поток событий - последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Примеры: радиоактивный распад; поступление вызовов на АТС; прибытие самолетов в аэропорт; приход клиентов на обслуживание и т.п.

Интенсивность потока λ - среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Если $\lambda = const$ и вероятность появления κ событий за время длительности t определяется формулой Пуассона

$$p_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

то поток событий называется *простейшим*.

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 5 мин. поступит 2 вызова. Поток вызовов предполагается простейшим.

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 5 мин. поступит 2 вызова. Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию λ=2, t=5, κ=2. По формуле Пуассона $p_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ получим:

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 5 мин. поступит 2 вызова. Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию $\lambda=2$, $t=5$, $\kappa=2$. По формуле Пуассона $p_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ получим:

$$p_2 = \frac{(2 \cdot 5)^2}{2!} e^{-10} \approx 0.00225.$$

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A.

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A.

Пусть X – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A: $X \in \{1, 2, \ldots\}$.

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q=1-p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A.

Пусть X – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A: $X \in \{1, 2, ...\}$.

Вероятность события: «A в первых $k-1$ испытаниях не наступило, а в k –м испытании появилось» :

$$p_k = P\left(X = k\right) = pq^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

- геометрическое распределение $\boxed{X \sim Geom(p)}$.

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p или не появиться с вероятностью $q=1-p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A.

Пусть X – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A: $X\in\{1,2,...\}$.

Вероятность события: «A в первых $k-1$ испытаниях не наступило, а в k –м испытании появилось» :

$$p_k=P\left(X=k\right)=pq^{k-1},\ k=1,2,3,\dots\ .$$

- геометрическое распределение $\boxed{X\sim Geom(p)}$.

Сумма $p,\ pq,\ pq^2,\ pq^3,...$ равна 1 (геометрическая прогрессия): $$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}=p\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1.$$

Пример. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0.6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Пример. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p=0.6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию $p=0.6,\ \ q=0.4,\ \ k=3.$
Искомая вероятность $p_3=P\left(X=3\right)=0.6\cdot 0.4^{3-1}=0.096.$