Функции от случайных величин (продолжение)

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$.

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$.

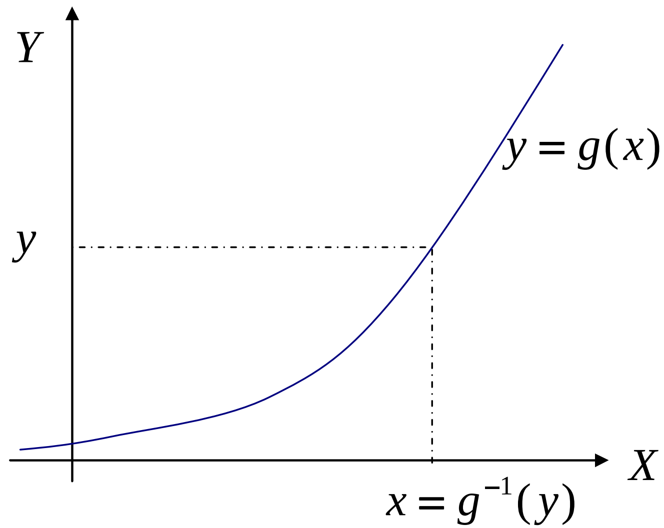
Утверждение. Пусть функция $y = g(x)$ - дифференцируемая, строго возрастающая, с обратной функцией $x = g^{-1}(y)$. Тогда плотность распределения Y

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}(y)\right)'.$$

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$.

Утверждение. Пусть функция $y = g(x)$ - дифференцируемая, строго возрастающая, с обратной функцией $x = g^{-1}(y)$. Тогда плотность распределения Y

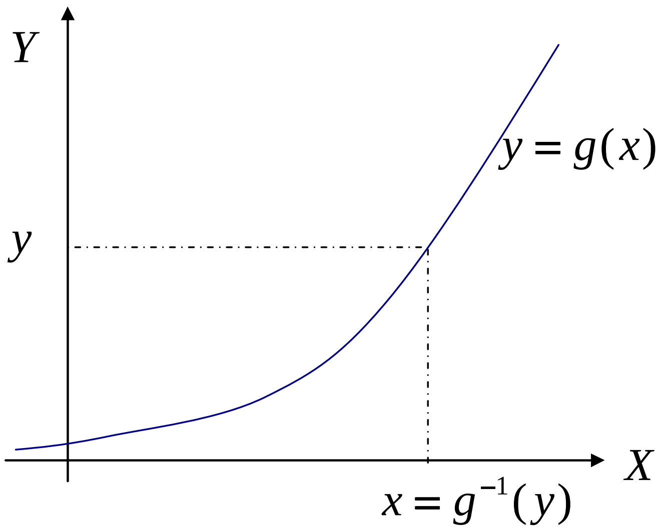
$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}(y)\right)'.$$



Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$.

Утверждение. Пусть функция $y = g(x)$ - дифференцируемая, строго возрастающая, с обратной функцией $x = g^{-1}(y)$. Тогда плотность распределения Y

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left(g^{-1}(y)\right)'.$$



Доказательство. Функция распределения Y

$$H(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P\left(X < g^{-1}(y)\right) = F(g^{-1}(y))$$

где $F(x)$ - функция распределения величины X.

Возьмем производную по y, получим:

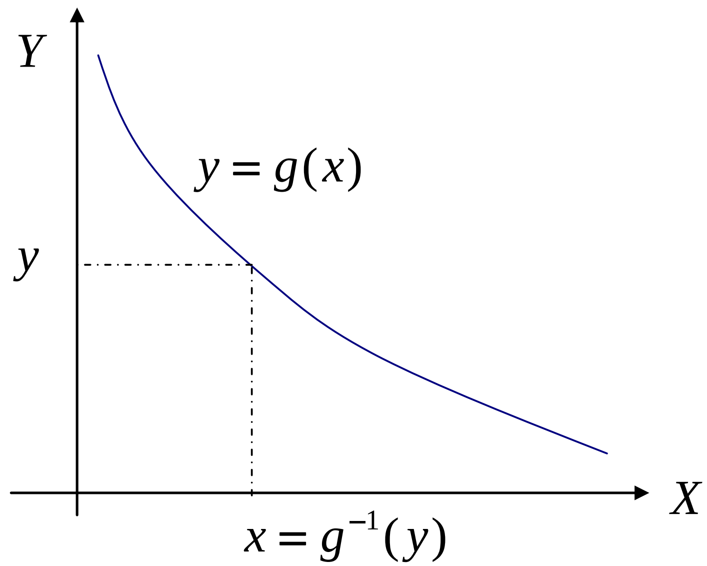
$$h(y) = f(g^{-1}(y))\left(g^{-1}(y)\right)'.$$

Возьмем производную по y, получим:

$h(y) = f(g^{-1}(y))\left(g^{-1}(y)\right)'$.

Замечание. Если функция $g(x)$ строго убывающая, то

$H(y) = P\left(g(X) < y\right)$

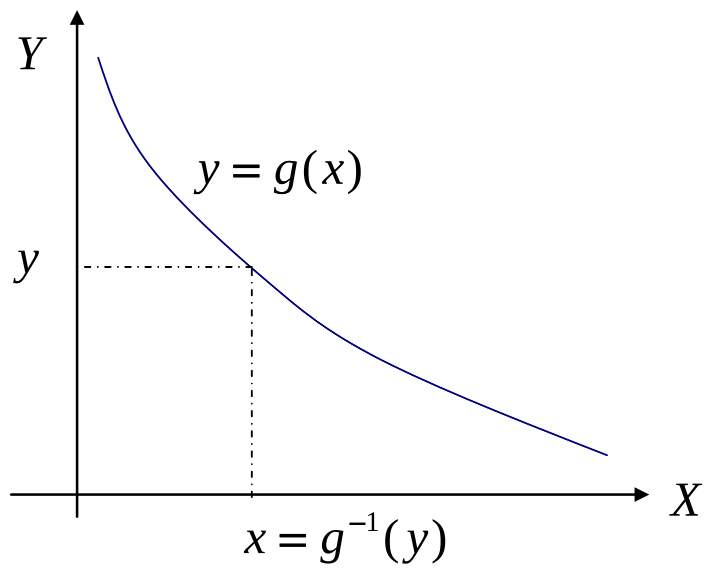


Возьмем производную по y, получим:

$h(y) = f(g^{-1}(y))\left(g^{-1}(y)\right)'$.

Замечание. Если функция $g(x)$ строго убывающая, то

$$H(y) = P\left(g(X) < y\right) = P\left(X > g^{-1}(y)\right) = 1 - F(g^{-1}(y))$$



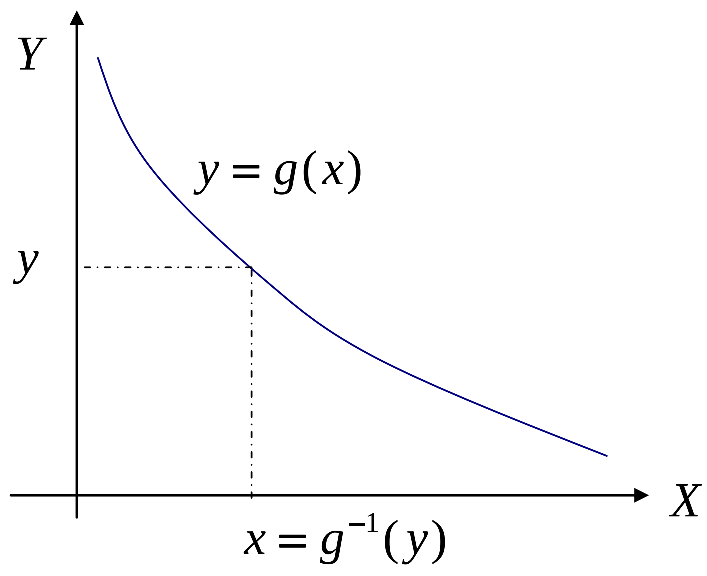
Возьмем производную по y, получим:

$$h(y) = f(g^{-1}(y))\left(g^{-1}(y)\right)'.$$

Замечание. Если функция $g(x)$ строго убывающая, то

$$H(y) = P\left(g(X) < y\right) = P\left(X > g^{-1}(y)\right) = 1 - F(g^{-1}(y))$$

$$\Rightarrow h(y) = -f(g^{-1}(y))\left(g^{-1}(y)\right)'.$$



Следствие. Если случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$, то $Y = AX + B$ также имеет нормальное распределение с параметрами $Aa + B,\ |A|\sigma$.

Следствие. Если случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$, то $Y = AX + B$ также имеет нормальное распределение с параметрами $Aa + B,\ |A|\sigma$.

Доказательство. Пусть $A > 0 \Rightarrow$ функция $Y = AX + B$ строго возрастает; обратная функция $g^{-1}(y) = x = \dfrac{y - B}{A}$, ее производная $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{A}$.

Следствие. Если случайная величина $X \sim N(a,\sigma)$, то $Y = AX + B$ также имеет нормальное распределение с параметрами $Aa + B,\ |A|\sigma$.

Доказательство. Пусть $A > 0 \Rightarrow$ функция $Y = AX + B$ строго возрастает; обратная функция $g^{-1}(y) = x = \dfrac{y-B}{A}$, ее производная $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{A}$. По условию $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

Следствие. Если случайная величина $X \sim N(a,\sigma)$, то $Y = AX + B$ также имеет нормальное распределение с параметрами $Aa + B,\ |A|\sigma$.

Доказательство. Пусть $A > 0 \Rightarrow$ функция $Y = AX + B$ строго возрастает; обратная функция $g^{-1}(y) = x = \dfrac{y - B}{A}$, ее производная $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{A}$. По условию $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, поэтому

$$f\left(g^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{y - B}{A}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-B}{A} - a\right)^2}{2\sigma^2}} =$$

Следствие. Если случайная величина $X \sim N(a,\sigma)$, то $Y = AX + B$ также имеет нормальное распределение с параметрами $Aa + B,\ |A|\sigma$.

Доказательство. Пусть $A > 0 \Rightarrow$ функция $Y = AX + B$ строго возрастает; обратная функция $g^{-1}(y) = x = \dfrac{y-B}{A}$, ее производная $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{A}$. По условию $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, поэтому

$$f\left(g^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{y-B}{A}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-B}{A}-a\right)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-B-Aa)^2}{2A^2\sigma^2}}.$$

Следствие. Если случайная величина $X \sim N(a,\sigma)$, то $Y = AX + B$ также имеет нормальное распределение с параметрами $Aa + B,\ |A|\sigma$.

Доказательство. Пусть $A > 0 \Rightarrow$ функция $Y = AX + B$ строго возрастает; обратная функция $g^{-1}(y) = x = \dfrac{y-B}{A}$, ее производная $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{A}$. По условию $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, поэтому

$$f\left(g^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{y-B}{A}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-B}{A}-a\right)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-B-Aa)^2}{2A^2\sigma^2}}.$$ Значит $$h(y) = \frac{1}{A\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-Aa-B)^2}{2A^2\sigma^2}}.$$

Следствие. Если случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$, то $Y = AX + B$ также имеет нормальное распределение с параметрами $Aa + B,\ |A|\sigma$.

Доказательство. Пусть $A > 0 \Rightarrow$ функция $Y = AX + B$ строго возрастает; обратная функция $g^{-1}(y) = x = \dfrac{y - B}{A}$, ее производная $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{A}$. По условию $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, поэтому

$$f\left(g^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{y-B}{A}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-B}{A}-a\right)^2}{2\sigma^2}} =$$

$= \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-B-Aa)^2}{2A^2\sigma^2}}$. Значит $h(y) = \dfrac{1}{A\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-Aa-B)^2}{2A^2\sigma^2}}$.

Для $A < 0$ - аналогично.

Математическое ожидание функции от случайной величины

Пусть $Y = g(X)$, X - дискретная со значениями $x_1, x_2, ..., x_k, ...$

Математическое ожидание функции от случайной величины

Пусть $Y = g(X)$, X - дискретная со значениями $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$.

Тогда Y - также дискретная со значениями $g(x_1), g(x_2), \ldots$ и

$$
\begin{tikzcd}
x_1, \arrow[d] & x_2, \arrow[d] & \ldots, & x_k, \arrow[dll] & \ldots \\
y_1, & y_2, & \ldots, & y_l, & \ldots
\end{tikzcd}
$$

$$P(g(X) = g(x_k)) = \sum_{i:g(x_i)=g(x_k)} P(X = x_i).$$

Математическое ожидание функции от случайной величины

Пусть $Y = g(X)$, X - дискретная со значениями $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$.

Тогда Y - также дискретная со значениями $g(x_1), g(x_2), \dots$ и

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[d] & x_2 \arrow[d] & \dots & x_k \arrow[dll] & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_l & \dots \end{tikzcd}$$

$$P(g(X) = g(x_k)) = \sum_{i: g(x_i) = g(x_k)} P(X = x_i).$$

Поэтому

$$Eg(X) = \sum_{g(x_k)} g(x_k) P\big(g(X) = g(x_k)\big) = \boxed{\sum_i g(x_i) P\big(X = x_i\big)}.$$

Математическое ожидание функции от случайной величины

Пусть $Y = g(X)$, X - дискретная со значениями $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$.

Тогда Y - также дискретная со значениями $g(x_1), g(x_2), \ldots$ и

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] x_1, \arrow[d] & x_2, \arrow[d] & \ldots, & x_k, \arrow[dll] & \ldots \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_l, & \ldots \end{tikzcd}$$

$$P(g(X) = g(x_k)) = \sum_{i: g(x_i) = g(x_k)} P(X = x_i).$$

Поэтому

$$Eg(X) = \sum_{g(x_k)} g(x_k) P\big(g(X) = g(x_k)\big) = \boxed{\sum_i g(x_i) P\big(X = x_i\big)}.$$

Если X непрерывная с плотностью $f(x)$, то аналогично

$$\boxed{Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx}.$$

Пример. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	3	5
p	0.2	0.5	0.3

Найти математическое ожидание функции $Y = g(X) = X^2 + 1$.

Пример. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	3	5
p	0.2	0.5	0.3

Найти математическое ожидание функции $Y = g(X) = X^2 + 1$.

Решение. Возможные значения Y:

$$y_1 = x_1^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$$
$$y_2 = x_2^2 + 1 = 9 + 1 = 10,$$
$$y_3 = x_3^2 + 1 = 25 + 1 = 26.$$

Пример. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	3	5
p	0.2	0.5	0.3

Найти математическое ожидание функции $Y = g\left(X\right) = X^2 + 1$.

Решение. Возможные значения Y:

$$y_1 = x_1^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$$
$$y_2 = x_2^2 + 1 = 9 + 1 = 10,$$
$$y_3 = x_3^2 + 1 = 25 + 1 = 26.$$

Значит $E\left(X^2 + 1\right) = 2 \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.5 + 26 \cdot 0.3 = 13.2$

Независимость функций от случайных величин

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Пусть $g(X)$ и $h(Y)$ - функции от этих случайных величин.

-

Независимость функций от случайных величин

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Пусть $g(X)$ и $h(Y)$ - функции от этих случайных величин.

Утверждение. Если X и Y независимы, то $g(X)$ и $h(Y)$ также независимы.

-

Независимость функций от случайных величин

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Пусть $g(X)$ и $h(Y)$ - функции от этих случайных величин.

Утверждение. Если X и Y независимы, то $g(X)$ и $h(Y)$ также независимы.

Доказательство. Для любых событий $A, B \subset \mathbf{R}$ определим

$$g^{-1}(A) = \{x : g(x) \in A\},$$
$$h^{-1}(B) = \{y : h(y) \in B\}.$$

-

Независимость функций от случайных величин

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Пусть $g(X)$ и $h(Y)$ - функции от этих случайных величин.

Утверждение. Если X и Y независимы, то $g(X)$ и $h(Y)$ также независимы.

Доказательство. Для любых событий $A, B \subset \mathbf{R}$ определим

$$g^{-1}(A) = \{x : g(x) \in A\},$$
$$h^{-1}(B) = \{y : h(y) \in B\}.$$

Тогда

$$P\big(g(X) \in A, h(Y) \in B\big) = P\big(X \in g^{-1}(A), Y \in h^{-1}(B)\big) =$$

-

Независимость функций от случайных величин

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Пусть $g(X)$ и $h(Y)$ - функции от этих случайных величин.

Утверждение. Если X и Y независимы, то $g(X)$ и $h(Y)$ также независимы.

Доказательство. Для любых событий $A, B \subset \mathbf{R}$ определим

$$g^{-1}(A) = \{x : g(x) \in A\},$$
$$h^{-1}(B) = \{y : h(y) \in B\}.$$

Тогда

$$P\big(g(X) \in A, h(Y) \in B\big) = P\big(X \in g^{-1}(A), Y \in h^{-1}(B)\big) =$$
$$P\big(X \in g^{-1}(A)\big) \cdot P\big(Y \in h^{-1}(B)\big) = \underbrace{P\big(g(X) \in A\big) \cdot P\big(h(Y) \in B\big)}_{\Downarrow}$$

независимость h и g

-

Математическое ожидание функции от двух случайных величин.

Предположим, задана функция $g(X,Y)$.

Математическое ожидание функции от двух случайных величин.

Предположим, задана функция $g(X,Y)$.

Пусть X,Y - дискретные. Тогда

$$\boxed{Eg(X,Y)=\sum_{x_i,y_j} g(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j)}.$$

Математическое ожидание функции от двух случайных величин.

Предположим, задана функция $g(X,Y)$.

Пусть X,Y - дискретные. Тогда

$$\boxed{Eg(X,Y) = \sum_{x_i,y_j} g(x_i,y_j)P(X = x_i, Y = y_j)}.$$

Если X,Y - непрерывные, то

$$\boxed{Eg(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy},$$

где $f(x,y)$ - плотность распределения X,Y.