Марковские процессы

Случайный процесс называется марковским процессом (или процессом без последействия), если его поведение в будущем зависит только от фиксированного настоящего и не зависит от прошлого.

Пример. Пусть рассматриваются состояния погоды: {солнечно; пасмурно; дождь, шторм}, причем

$$P(\text{солнечно})=0.4,\ P(\text{пасмурно})=0.3,$$
$$P(\text{дождь})=0.25,\ P(\text{шторм})=0.05.$$

Если предположить, что погода завтрашнего дня зависит только от состояния погоды сегодня, то получим марковский процесс.

Определение. Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}$, $n = 0,1,\ldots$ образует цепь Маркова с начальными условиями $P(X_0 = i) = \pi_i^{(0)}$, $i = 1,\ldots,k$, $\sum_i \pi_i^{(0)} = 1$,

если выполняется:

$$P\left(X_n = j \mid X_0 = i_0,\ \mathrm{X}_1 = i_1,\ \ldots,\ \mathrm{X}_{n-1} = i\right) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{i\,j\,n}.$$

Вероятности $p_{i\,j\,n}$ - называются вероятностями перехода системы из состояния i в состояние j в момент n.

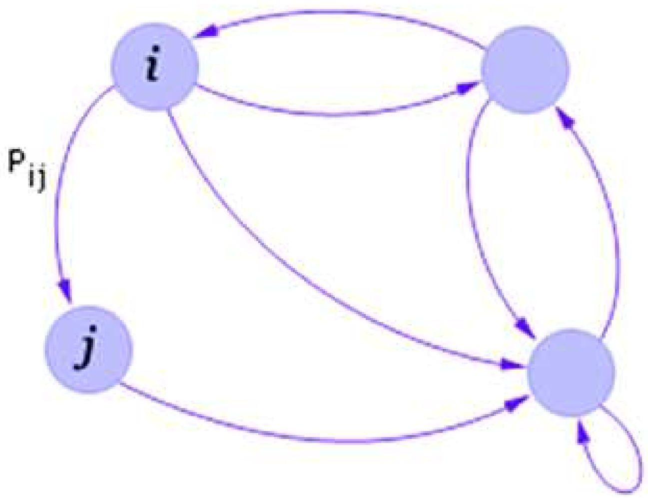
Например, можно задать вероятности для некоторого дня n:

P(солнечно | вчера солнечно)=0.6,
P(пасмурно | вчера солнечно)=0.25,
P(дождь | вчера солнечно)=0.1,
P(шторм | вчера солнечно)=0.05.

Определение. Цепь Маркова называется однородной, если вероятности перехода не зависят от времени:

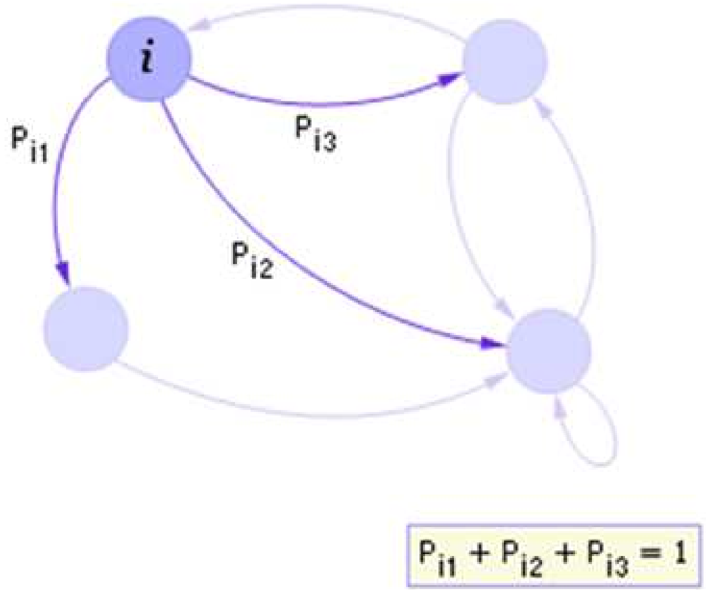
$$\forall n,\ p_{i\,j\,n} = p_{i\,j}.$$

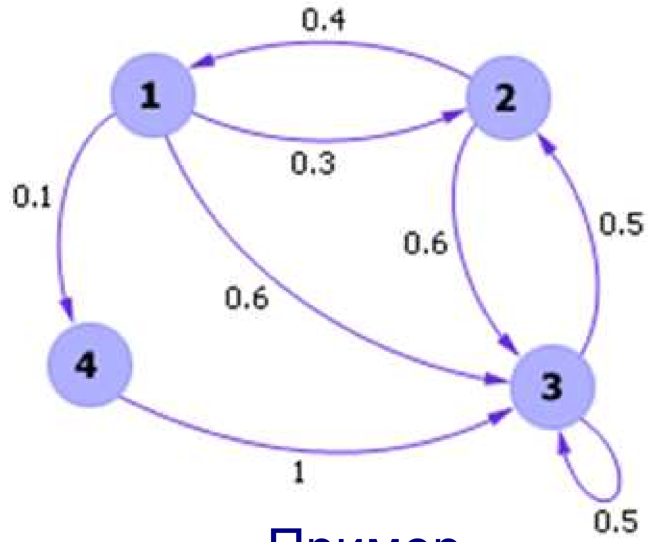
Пусть x_i соответствует i-му состоянию, тогда цепь Маркова можно представить в виде графа:



Очевидно, должно выполняться:

$$\sum_j p_{i\,j} = 1.$$





Пример

Матрица переходов:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix},\ 0 \le p_{i\,j} \le 1.$$

1 задача: найти вероятности состояний цепи через n переходов, зная вероятности начальных состояний и матрицу переходов.

Пусть

$$\pi_j^{(n)} = P\left(X_n = j\right)$$

- вероятность j-го состояния после n переходов;

$$\pi^{(n)} = \left(\pi_1^{(n)},\ldots,\pi_k^{(n)}\right)$$

- вектор-строка вероятностей.

При $n = 1$ по формуле полной вероятности получим:

$$P\left(X_1 = j\right) = \sum_i P\left(X_0 = i\right) P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

или

$$\pi_j^{(1)} = \sum_i \pi_i^{(0)} p_{i\,j} \;\Rightarrow\; \pi^{(1)} = \pi^{(0)}\mathbf{P}.$$

В общем случае

$$\pi_j^{(n)} = \sum_i \pi_i^{(n-1)} p_{i\,j} \;\Rightarrow$$

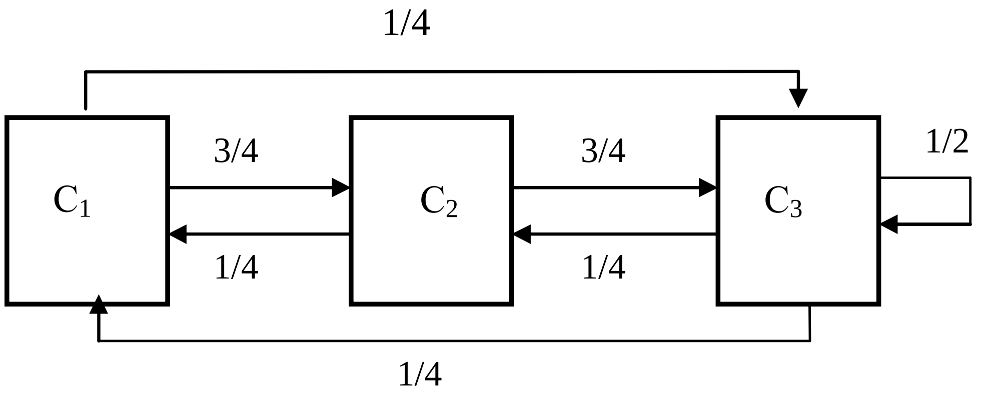
$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}\mathbf{P} = \pi^{(n-2)}\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \ldots = \pi^{(0)}\mathbf{P}^n.$$

Обозначим через $p_{i\,j}(n)$ вероятность перейти из начального состояния i в состояние j после n переходов.

Из $\pi^{(n)} = \pi^{(0)}\mathbf{P}^n \Rightarrow$

числа $p_{i\,j}(n)$ являются элементами $\mathbf{P}^n$.

Пример. Дан граф состояний:



$$\Rightarrow \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Пусть $\pi^{(0)} = (1,0,0)$, тогда

$$\pi^{(1)} = (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} = (0, 0.75, 0.25),$$

$$\pi^{(2)} = (0, 0.75, 0.25) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.25, 0.0625, 0.6875).$$

Можно проверить, что $\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.0625 & 0.6875 \\ 0.1875 & 0.375 & 0.4375 \\ 0.1875 & 0.3125 & 0.5 \end{pmatrix}.$

2 задача: изучить предельное поведение цепи при увеличении числа переходов.

Если существуют пределы

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)},\ j = 1,\dots,k,$$

то соответствующее состояние системы назовем стационарным.

Теорема (эргодическая). Если при некотором n_0 все элементы матрицы $\mathbf{P}^{n_0}$ положительны, то существуют такие постоянные числа $\pi_j,\ j = 1,\dots,k$, что независимо от индекса i имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j,\quad \sum_j \pi_j = 1,$$

причем эти числа являются единственным решением системы уравнений

$$\sum_i \pi_i \cdot p_{ij} = \pi_j,\ j = 1,\dots,k.$$

Замечание1. Из теоремы следует, что

$$\pi_j^{(n)} = \sum_i \pi_i^{(0)} p_{ij}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_i \pi_i^{(0)} \pi_j = \pi_j \cdot \sum_i \pi_i^{(0)} = \pi_j \,,$$

значит вектор $(\pi_1, \ldots, \pi_k)$ определяет стационарное распределение цепи.

Замечание 2. Если положить $\pi_j^{(0)} = \pi_j, \quad j = 1, \ldots, k$, то выполняется:

$$\pi_j^{(1)} = \sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j \,, \ \pi_j^{(2)} = \sum_i \pi_i^{(1)} p_{ij} = \sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

и т.д., то есть цепь постоянно находится в стационарном состоянии.

Пример (продолжение).

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.0625 & 0.6875 \\ 0.1875 & 0.375 & 0.4375 \\ 0.1875 & 0.3125 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Так как элементы $\mathbf{P}^2$ положительны, то можем применять эргодическую теорему. Для нахождения стационарных вероятностей нужно решить систему:

$$\begin{cases} \pi_1 = 0\cdot\pi_1 + 0.25\cdot\pi_2 + 0.25\cdot(1-\pi_1-\pi_2), \\ \pi_2 = 0.75\cdot\pi_1 + 0\cdot\pi_2 + 0.25\cdot(1-\pi_1-\pi_2) \end{cases}$$

Решение: $\vec{\pi} = \left(0,2;\ 0,28;\ 0,52\right)$.

Для иллюстрации скорости сходимости рассмотрим разные начальные состояния. Для $\pi^{(0)} = (1,0,0)$ получим

n	0	1	2	3	4	…	∞
$\pi_1^{(n)}$	1	0	0,250	0,178	0,203	…	0,2
$\pi_2^{(n)}$	0	0,75	0,062	0,359	0,254	…	0,28
$\pi_3^{(n)}$	0	0,25	0,688	0,454	0,543	…	0,52

для $\pi^{(0)} = (0,1,0)$:

n	0	1	2	3	4	…	∞
$\pi_1^{(n)}$	0	0	0,187	0,203	0,199	…	0,2
$\pi_2^{(n)}$	1	0,75	0,375	0,250	0,289	…	0,28
$\pi_3^{(n)}$	0	0,25	0,438	0,547	0,512	…	0,52