Базовые упражнения
Языки, автоматы, грамматики

Вадим Пузаренко

31 октября 2019 г.

Слова

Упражнение 1.1

Дать индуктивные определения **конкатенации**, **инверсии** и **обращения** слов.

Слова

Упражнение 1.1

Дать индуктивные определения **конкатенации**, **инверсии** и **обращения** слов.

Упражнение 1.2

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит и пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*$, а ε — пустое слово. Тогда выполняются следующие условия:

1. $\alpha\hat{}\varepsilon = \varepsilon\hat{}\alpha = \alpha$;
2. $\alpha\hat{}(\beta\hat{}\gamma) = (\alpha\hat{}\beta)\hat{}\gamma$;
3. $a^R = a$ при $a \in \Sigma$;
4. $(\alpha\hat{}\beta)^R = \beta^R\hat{}\alpha^R$;
5. $(\alpha^R)^R = \alpha$;
6. $\alpha^R = \alpha$ для всех $\alpha \in \{0\}^*$;
7. $\alpha\hat{}\beta = \beta\hat{}\alpha$ для всех $\alpha, \beta \in \{0\}^*$.

Слова, языки

Упражнение 1.3

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит и пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*$, а ε — пустое слово. Тогда выполняются следующие условия:

1. $\overline{\alpha\hat{}\beta} = \overline{\alpha}\hat{}\overline{\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^*$;
2. $\overline{\alpha^R} = \overline{\alpha}^R$ для всех $\alpha \in \{0; 1\}^*$;
3. $\alpha\hat{}\beta \neq \beta\hat{}\alpha$ для некоторых $\alpha, \beta \in \{0; 1\}^*$.

Слова, языки

Упражнение 1.3

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит и пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*$, а ε — пустое слово. Тогда выполняются следующие условия:

1. $\overline{\alpha\hat{}\beta} = \overline{\alpha}\hat{}\overline{\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^*$;
2. $\overline{\alpha^R} = \overline{\alpha}^R$ для всех $\alpha \in \{0; 1\}^*$;
3. $\alpha\hat{}\beta \neq \beta\hat{}\alpha$ для некоторых $\alpha, \beta \in \{0; 1\}^*$.

Упражнение 1.4

Пусть $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_{26}\}$ — латинский алфавит. Дайте определение бинарного отношения $<$ на Σ^*, для которого выполняется следующее: $\alpha < \beta$, если и только если α предшествует β в стандартном словаре.

Языки

Упражнение 1.5

Докажите, что выполняется следующее:

1. $\varnothing^* = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^*$;
2. для любых алфавита Σ и языка $L \subseteq \Sigma^*$ выполняется соотношение $(L^R)^R = L$;
3. для любых алфавита Σ и языка $L \subseteq \Sigma^*$ выполняется соотношение $(L^*)^* = L^*$;
4. если Σ — произвольный алфавит, $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \Sigma^*$, то $L_1^* \subseteq L_2^*$;
5. если Σ — произвольный алфавит, $L_1 \subseteq \Sigma^*$ и $L_2 \subseteq \Sigma^*$, то $(L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R$;
6. если Σ — произвольный алфавит, $\varepsilon \in L_1 \subseteq \Sigma^*$ и $\varepsilon \in L_2 \subseteq \Sigma^*$, то $(L_1 \Sigma^* L_2)^* = \Sigma^*$;
7. для любых алфавита Σ и языка L выполняется соотношение $\varnothing L = L \varnothing = \varnothing$.

Языки

Упражнение 1.6

При каких условиях $L^{+} = L \setminus \{\varepsilon\}$?

Языки

Упражнение 1.6

При каких условиях $L^+ = L \setminus \{\varepsilon\}$?

Упражнение 1.7

Предложить конечное число операций, замыканием которых является операция звёздочка Клини (операция L^+).

Языки

Упражнение 1.6

При каких условиях $L^+ = L \setminus \{\varepsilon\}$?

Упражнение 1.7

Предложить конечное число операций, замыканием которых является операция звёздочка Клини (операция L^+).

Упражнение 1.8

Привести примеры слов, принадлежащих и не принадлежащих языкам алфавита $\Sigma = \{0; 1\}$:

1. $\{\alpha \mid \alpha = \beta\hat{}\beta^R\hat{}\beta$ для некоторого $\beta \in \Sigma^2\}$;
2. $\{\alpha \mid \alpha\hat{}\alpha = \alpha\hat{}\alpha\hat{}\alpha\}$;
3. $\{\alpha \mid \alpha = \alpha^R\}$;
4. $\{\beta\hat{}\gamma \mid \overline{\beta\hat{}\gamma} = \gamma\hat{}\beta\}$.

Языки

Упражнение 1.9

Привести примеры слов, принадлежащих и не принадлежащих языкам алфавита $\Sigma = \{0; 1\}$:

1. $\{\alpha \mid \beta\hat{\ }\gamma\hat{\ }\alpha = \alpha\hat{\ }\beta\hat{\ }\gamma$ для некоторых $\beta, \gamma \in \Sigma^*\}$;
2. $\{\alpha \mid \alpha\hat{\ }\alpha\hat{\ }\alpha = \beta\hat{\ }\beta$ для некоторого $\beta \in \Sigma^*\}$;
3. $\{\alpha \mid \alpha^R = \overline{\alpha}\}$.

Регулярные выражения

Упражнение 3.1

Какие языки представляются следующими регулярными выражениями ($\Sigma = \{a; b; c\}$):

1. $((a + b)^* \circ a)$;
2. $(c^* \circ (a + (b \circ c^*)^*))$;
3. $(((a^* \circ a) \circ b) + b)$?

Регулярные выражения

Упражнение 3.1

Какие языки представляются следующими регулярными выражениями ($\Sigma = \{a; b; c\}$):

1. $((a+b)^* \circ a)$;
2. $(c^* \circ (a + (b \circ c^*)^*))$;
3. $(((a^* \circ a) \circ b) + b)$?

Упражнение 3.2

Упростить регулярные выражения, представляющие те же языки:

1. $(\varnothing^* + (a^* + (b^* + (a+b)^*)))$;
2. $((a^* \circ b^*)^* \circ (b^* \circ a^*)^*)$;
3. $((a^* \circ b)^* + (b^* \circ a)^*)$;
4. $((a+b)^* \circ a) \circ (a+b)^*)$.

Регулярные выражения

Упражнение 3.3

Пусть $\Sigma = \{a; b\}$. Постройте регулярные выражения, представляющие следующие языки:

1. все слова алфавита Σ^*, содержашие не более трёх букв a;
2. все слова алфавита Σ^*, количество содержашихся букв a в которых делится на 3;
3. все слова алфавита Σ^*, содержаших в точности одно подслово aaa.

Регулярные выражения

Упражнение 3.3

Пусть $\Sigma = \{a; b\}$. Постройте регулярные выражения, представляющие следующие языки:

1. все слова алфавита Σ^*, содержашие не более трёх букв a;
2. все слова алфавита Σ^*, количество содержашихся букв a в которых делится на 3;
3. все слова алфавита Σ^*, содержаших в точности одно подслово aaa.

Упражнение 3.4

Докажите, что если L — регулярный язык, то и $L' = \{\alpha \mid \beta\hat{\ }\alpha \in L$ для некоторого $\beta\}$ также является регулярным.

Регулярные выражения

Упражнение 3.5

Регулярное выражение α находится в **дизъюнктивной нормальной форме** (сокращенно, д.н.ф.), если оно имеет вид $(\alpha_1 + (\alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\ldots))$, где α_i не имеет вхождений буквы $+$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Докажите, что каждый регулярный язык представляется некоторым регулярным выражением, находящимся в д.н.ф.

Регулярные выражения

Упражнение 3.5

Регулярное выражение α находится в **дизъюнктивной нормальной форме** (сокращенно, д.н.ф.), если оно имеет вид $(\alpha_1 + (\alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\ldots))$, где α_i не имеет вхождений буквы $+$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Докажите, что каждый регулярный язык представляется некоторым регулярным выражением, находящимся в д.н.ф.

Упражнение 3.6

Какие из следующих соотношений выполняются? Ответ пояснить.

1. $baa \in \mathcal{L}(((a^* \circ b^*) \circ (b^* \circ a^*)))$.
2. $\mathcal{L}((b^* \circ a^*)) \cap \mathcal{L}((a^* \circ b^*)) = \mathcal{L}((a^* + b^*))$.
3. $\mathcal{L}((a^* \circ b^*)) \cap \mathcal{L}((b^* \circ c^*)) = \varnothing$.