Лекция А3
Конечные автоматы, эквивалентность

Вадим Пузаренко

18 сентября 2023 г.

НКА: звёздочка Клини

Теорема A3.1.

Если язык L распознаваем некоторым НКА, то и L^* распознаваем некоторым НКА.

НКА: звёздочка Клини

Теорема А3.1.

Если язык L распознаваем некоторым НКА, то и L^* распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть язык L распознаётся НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, \{q_0\}, F)$ (по теореме А2.5 можно предполагать, что автомат $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойству вахтера). По теореме А2.1, достаточно построить ε-НКА $\mathfrak{A}'$, распознающий язык L^*. Определим автомат $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta', \{q_0\}, \{q_0\})$ так, что $\delta' = \delta \cup \{((q, \varepsilon), \{q_0\}) \mid q \in F \setminus \{q_0\}\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \in (Q \setminus F) \cup \{q_0\}\}$; докажем, что $L^* = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: звёздочка Клини

Теорема A3.1.

Если язык L распознаваем некоторым НКА, то и L^* распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть язык L распознаётся НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, \{q_0\}, F)$ (по теореме A2.5 можно предполагать, что автомат $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойству вахтера). По теореме A2.1, достаточно построить ε-НКА $\mathfrak{A}'$, распознающий язык L^*. Определим автомат $\mathfrak{A}' = (Q; \Sigma; \delta', \{q_0\}, \{q_0\})$ так, что $\delta' = \delta \cup \{((q, \varepsilon), \{q_0\}) \mid q \in F \setminus \{q_0\}\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \in (Q \setminus F) \cup \{q_0\}\}$; докажем, что $L^* = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$L^* \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha \in L^*$; если $\alpha = \varepsilon$, то $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, поскольку $q_0 \in \{q_0\}$; перейдём к рассмотрению случая, когда $\alpha = \beta_0\hat{}\beta_1\hat{}\ldots\hat{}\beta_n$, где $\varepsilon \neq \beta_i \in L$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существуют последовательности $r_0^i = q_0,\ r_1^i,\ \ldots,\ r_{k_i}^i \in F$ состояний, подтверждающие $\beta_i \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ $(\mathrm{lh}(\beta_i) = k_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n)$.

НКА: звёздочка Клини

Доказательство (окончание).

Тем самым, последовательность $q_0 = r_0^0,\ r_1^0,\ \ldots,\ r_{k_0}^0,\ r_0^1,\ r_1^1,\ \ldots,\ r_{k_1}^1,\ r_0^2,\ \ldots,\ r_0^n,\ r_1^n,\ \ldots,\ r_{k_n}^n,\ q_0$ свидетельствует о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, поскольку $q_0 \in \delta'(r_{k_i}^i, \varepsilon)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и q_0 — конечное состояние автомата $\mathfrak{A}'$.

НКА: звёздочка Клини

Доказательство (окончание).

Тем самым, последовательность $q_0 = r_0^0,\ r_1^0,\ \ldots,\ r_{k_0}^0,\ r_0^1,\ r_1^1,\ \ldots,\ r_{k_1}^1,\ r_0^2,\ \ldots,\ r_0^n,\ r_1^n,\ \ldots,\ r_{k_n}^n,\ q_0$ свидетельствует о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, поскольку $q_0 \in \delta'(r_{k_i}^i, \varepsilon)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и q_0 — конечное состояние автомата $\mathfrak{A}'$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L^*$. Пусть $\varepsilon \neq \alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существует последовательность $q_0 = s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_m = q_0$ состояний, свидетельствующая о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть также $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{k+1} = m$ — возрастающая последовательность всех номеров состояния q_0. Рассмотрим пару $i_j < i_{j+1}$ ближайших таких номеров. Так как $\mathfrak{A}$ удовлетворяет свойству вахтёра, имеем $i_j < i_j + 1 < i_{j+1}$, и единственный способ попасть из $s_{i_{j+1}-1}$ в q_0 только по ε-переходу; следовательно, $s_{i_{j+1}-1} \in F \setminus \{q_0\}$. Таким образом, $\alpha = \alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k$, где последовательность $s_{i_j} = q_0,\ s_{i_j+1},\ \ldots,\ s_{i_{j+1}-1}$ свидетельствует о том, что $\alpha_j \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$, т. е. $\alpha \in L^*$.

$\square$

НКА: звёздочка Клини

Замечание А3.1.

Трансформация, описанная в теореме А3.1, сначала осуществляет переход от произвольного НКА к НКА, удовлетворяющему свойству вахтёра ($n(Q'') = n(Q) + 1$, $n'' \leqslant 2 \cdot n_1$), а затем уже к НКА, распознающему звёздочку Клини ($n(Q') = n(Q'') = n(Q) + 1$, $n' \leqslant 2 \cdot n_1^2$).

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Теорема А3.2.

Для любого недетерминированного конечного автомата $\mathfrak{A}$ существует детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A}'$, для которого имеет место равенство $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Теорема А3.2.

Для любого недетерминированного конечного автомата $\mathfrak{A}$ существует детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A}'$, для которого имеет место равенство $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ — НКА. Определим ДКА $\mathfrak{A}' = (\mathcal{P}(Q); \Sigma; \tau, Q_0, F')$ так, что $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \varnothing\}$ и $\tau(S, a) = \bigcup\limits_{s \in S} \delta(s, a)$ для всех $a \in \Sigma$ и $S \subseteq Q$; докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Теорема А3.2.

Для любого недетерминированного конечного автомата $\mathfrak{A}$ существует детерминированный конечный автомат $\mathfrak{A}'$, для которого имеет место равенство $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ — НКА. Определим ДКА $\mathfrak{A}' = (\mathcal{P}(Q); \Sigma; \tau, Q_0, F')$ так, что $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \varnothing\}$ и $\tau(S, a) = \bigcup\limits_{s \in S} \delta(s, a)$ для всех $a \in \Sigma$ и $S \subseteq Q$; докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда существует последовательность $q_0 \in Q_0$, q_1, …, $q_n \in F$ состояний из Q такая, что $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1})$ $(0 \leqslant i < n)$. Индукцией по $i < n$ докажем, что $q_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Доказательство (окончание).

В самом деле, имеем $q_0 \in \tau^*(Q_0, \varepsilon) = Q_0$. Далее, предположим, что $q_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_i)$; тогда
$q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) \subseteq \bigcup\limits_{s \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_i)} \delta(s, w_{i+1}) =$
$\tau(\tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_i), w_{i+1}) = \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \dots w_{i+1})$. В конечном итоге, получаем $q_n \in \tau^*(Q_0, \alpha) \cap F$; тем самым, $\tau^*(Q_0, \alpha) \in F'$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Доказательство (окончание).

В самом деле, имеем $q_0 \in \tau^*(Q_0, \varepsilon) = Q_0$. Далее, предположим, что $q_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$; тогда $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) \subseteq \bigcup\limits_{s \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)} \delta(s, w_{i+1}) = \tau(\tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i), w_{i+1}) = \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_{i+1})$. В конечном итоге, получаем $q_n \in \tau^*(Q_0, \alpha) \cap F$; тем самым, $\tau^*(Q_0, \alpha) \in F'$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда $\tau^*(Q_0, \alpha) \in F'$. Состояния r_0, r_1, …, r_n из Q будем находить обратной индукцией по $i \leqslant n$ так, чтобы $r_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)$ и $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$. Возьмём $r_n \in \tau^*(Q_0, \alpha) \cap F$. Предположим, что r_{i+1}, …, r_n уже выбраны. Так как $r_{i+1} \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i w_{i+1}) = \tau(\tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i), w_{i+1}) = \bigcup\limits_{s \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots w_i)} \delta(s, w_{i+1})$, найдётся $r_i \in \tau^*(Q_0, w_1 w_2 \ldots, w_i)$ такое, что $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$. В конечном итоге, $r_0 \in \tau^*(Q_0, \varepsilon) = Q_0$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А3.2.

Трансформация, описанная в теореме А3.2, имеет сложность $2^{n(Q)}$ по количеству состояний и $2^{n(Q)} \cdot n(\Sigma)$ по количеству стрелок. Данная оценка является точной (см. пример ниже). Тем самым, при рассмотрении детерминированных конечных автоматов основным показателем является количество состояний, а количество стрелок задаётся однозначно по числу состояний.

НКА $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А3.2.

Трансформация, описанная в теореме А3.2, имеет сложность $2^{n(Q)}$ по количеству состояний и $2^{n(Q)} \cdot n(\Sigma)$ по количеству стрелок. Данная оценка является точной (см. пример ниже). Тем самым, при рассмотрении детерминированных конечных автоматов основным показателем является количество состояний, а количество стрелок задаётся однозначно по числу состояний.

Пример А3.1.

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы А1.3, А2.1, А3.2, А2.2; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы А1.3, А2.1, А3.2, А2.2; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема А1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.2; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.4; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.2; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.4; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
4. звёздочки Клини $L \mapsto L^*$ (теоремы A1.3, A2.1, A2.5, A3.2, A3.1; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)+1}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.2; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.4; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
4. звёздочки Клини $L \mapsto L^*$ (теоремы A1.3, A2.1, A2.5, A3.2, A3.1; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)+1}$);
5. обращения $L \mapsto L^R$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.3; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)}$);

ДКА: операции

Класс языков, распознаваемых ДКА, замкнут относительно следующих операций:

1. объединения $L_1, L_2 \mapsto L_1 \cup L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.2; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
2. дополнения $L \mapsto \Sigma^* \setminus L$ (теорема A1.1; трансформация имеет сложность $n(Q)$);
3. конкатенации $L_1, L_2 \mapsto L_1 L_2$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.4; трансформация имеет сложность $2^{n(Q_1)+n(Q_2)}$);
4. звёздочки Клини $L \mapsto L^*$ (теоремы A1.3, A2.1, A2.5, A3.2, A3.1; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)+1}$);
5. обращения $L \mapsto L^R$ (теоремы A1.3, A2.1, A3.2, A2.3; трансформация имеет сложность $2^{n(Q)}$);
6. инверсии $L \mapsto \overline{L}$ при $\Sigma = \{0; 1\}$ (теорема A1.2; трансформация имеет сложность $n(Q)$).

ДКА: пересечение

Теорема А3.3.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их пересечение $L_1 \cap L_2$ также распознаваемо некоторым ДКА.

ДКА: пересечение

Теорема А3.3.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их пересечение $L_1 \cap L_2$ также распознаваемо некоторым ДКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из того, что языки, распознаваемые ДКА, замкнуты относительно операций объединения и дополнения, а также тождества де Моргана $L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \setminus ((\Sigma^* \setminus L_1) \cup (\Sigma^* \setminus L_2))$. □

Произведение автоматов

Определение А3.1.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, q_0^2, F_2)$ — ДКА. Определим их **произведение** как автомат $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F) = (Q_1 \times Q_2; \Sigma; \delta_1 \times \delta_2, (q_0^1, q_0^2), F)$, для которого имеют место соотношения $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ для всех $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ и $a \in \Sigma$, а также $F \subseteq Q_1 \times Q_2$.

Произведение автоматов

Определение А3.1.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, q_0^2, F_2)$ — ДКА. Определим их **произведение** как автомат $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F) = (Q_1 \times Q_2; \Sigma; \delta_1 \times \delta_2, (q_0^1, q_0^2), F)$, для которого имеют место соотношения $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ для всех $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ и $a \in \Sigma$, а также $F \subseteq Q_1 \times Q_2$.

Лемма А3.1.

Выполняется равенство $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha) = (\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha))$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

Произведение автоматов

Определение А3.1.

Пусть $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, q_0^2, F_2)$ — ДКА. Определим их **произведение** как автомат $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F) = (Q_1 \times Q_2; \Sigma; \delta_1 \times \delta_2, (q_0^1, q_0^2), F)$, для которого имеют место соотношения $(\delta_1 \times \delta_2)((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ для всех $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$ и $a \in \Sigma$, а также $F \subseteq Q_1 \times Q_2$.

Лемма А3.1.

Выполняется равенство $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha) = (\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha))$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $(q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2$.

Доказательство.

Индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$. В самом деле, $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2) = (\delta_1^*(q_1, \varepsilon), \delta_2^*(q_2, \varepsilon))$; далее, $(\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha\hat{\ }a) = (\delta_1 \times \delta_2)((\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1, q_2), \alpha), a) = (\delta_1 \times \delta_2)((\delta_1^*(q_1, \alpha), \delta_2^*(q_2, \alpha)), a) = (\delta_1(\delta_1^*(q_1, \alpha), a), \delta_2(\delta_2^*(q_2, \alpha), a)) = (\delta_1^*(q_1, \alpha\hat{\ }a), \delta_2^*(q_2, \alpha\hat{\ }a))$. □

Произведение автоматов

Второе доказательство теоремы А3.3.

Воспользовавшись леммой А3.1, приходим к следующей эквивалентности для произведения автоматов $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F_1 \times F_2)$ $(\alpha \in \Sigma^*)$:
$\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) \Leftrightarrow (\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1^0, q_2^0), \alpha) = (\delta_1^*(q_1^0, \alpha), \delta_2^*(q_2^0, \alpha)) \in F_1 \times F_2 \Leftrightarrow [\delta_1^*(q_1^0, \alpha) \in F_1$ и $\delta_2^*(q_2^0, \alpha) \in F_2] \Leftrightarrow [\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)] \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1) \cap \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. □

Произведение автоматов

Второе доказательство теоремы А3.3.

Воспользовавшись леммой А3.1, приходим к следующей эквивалентности для произведения автоматов $(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)(F_1 \times F_2)$ $(\alpha \in \Sigma^*)$:
$\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) \Leftrightarrow (\delta_1 \times \delta_2)^*((q_1^0, q_2^0), \alpha) = (\delta_1^*(q_1^0, \alpha), \delta_2^*(q_2^0, \alpha)) \in F_1 \times F_2 \Leftrightarrow [\delta_1^*(q_1^0, \alpha) \in F_1$ и $\delta_2^*(q_2^0, \alpha) \in F_2] \Leftrightarrow [\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)] \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1) \cap \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. $\square$

Замечание А3.3.

В первом доказательстве трансформация имеет сложность *экспоненциальную* по количеству состояний. Трансформация, изложенная во втором доказательстве, имеет сложность $n(Q_1) \cdot n(Q_2)$, что значительно ниже изложенной в первом доказательстве.

ДКА: объединение

Теорема А3.4.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то $L_1 \cup L_2$ также распознаваем некоторым ДКА.

ДКА: объединение

Теорема А3.4.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то $L_1 \cup L_2$ также распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

Здесь можно применить теоремы А1.1, А3.3 к равенству $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \setminus ((\Sigma^* \setminus L_1) \cap (\Sigma^* \setminus L_2))$, однако мы приведём явную конструкцию, которая соответствует данным рассуждениям. Пусть ДКА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2)$ таковы, что $L_1 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $L_2 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$; докажем, что $L_1 \cup L_2 = \mathrm{L}((\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)((Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2)))$.
В самом деле, $\alpha \in \mathrm{L}((\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)((Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2))) \Leftrightarrow (\delta_1 \times \delta_2)^*((q_0^1, q_0^2), \alpha) \in ((Q_1 \times F_2) \cup (F_1 \times Q_2)) \Leftrightarrow [\delta_1^*(q_0^1, \alpha) \in F_1 \vee \delta_2^*(q_0^2, \alpha) \in F_2] \Leftrightarrow [\alpha \in L_1 \vee \alpha \in L_2] \Leftrightarrow \alpha \in L_1 \cup L_2$ для любого $\alpha \in \Sigma^*$. $\square$

ДКА: разность

Теорема А3.5.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их разность $L_1 \setminus L_2$ также распознаваема некоторым ДКА.

ДКА: разность

Теорема А3.5.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их разность $L_1 \setminus L_2$ также распознаваема некоторым ДКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из того, что языки, распознаваемые ДКА, замкнуты относительно операций пересечения и дополнения, а также тождества $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap (\Sigma^* \setminus L_2)$. □

ДКА: разность

Теорема А3.5.

Если L_1, L_2 распознаваемы некоторыми ДКА, то и их разность $L_1 \setminus L_2$ также распознаваема некоторым ДКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из того, что языки, распознаваемые ДКА, замкнуты относительно операций пересечения и дополнения, а также тождества $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap (\Sigma^* \setminus L_2)$. □

Замечание А3.4.

Трансформации для объединения и разности, использующие НКА, имеют сложность *экспоненциальную* по количеству состояний. Трансформации, изложенные в теоремах А3.4, А3.5, имеет сложность $n(Q_1) \cdot n(Q_2)$, что значительно ниже трансформаций, использующих НКА.

Эквивалентность слов I

Определение А3.2.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** L (и записывать как $\alpha \approx_L \beta$), если справедливо соотношение $\alpha\hat{}\gamma \in L \Leftrightarrow \beta\hat{}\gamma \in L$ для всех $\gamma \in \Sigma^*$.

Эквивалентность слов I

Определение А3.2.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** L (и записывать как $\alpha \approx_L \beta$), если справедливо соотношение $\alpha\hat{}\gamma \in L \Leftrightarrow \beta\hat{}\gamma \in L$ для всех $\gamma \in \Sigma^*$.

Замечание А3.5.

Заметим, что отношение $\approx_L$ на Σ^* действительно будет отношением эквивалентности.

Эквивалентность слов I

Определение А3.2.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** L (и записывать как $\alpha \approx_L \beta$), если справедливо соотношение $\alpha\hat{}\gamma \in L \Leftrightarrow \beta\hat{}\gamma \in L$ для всех $\gamma \in \Sigma^*$.

Замечание А3.5.

Заметим, что отношение $\approx_L$ на Σ^* действительно будет отношением эквивалентности.

Пример А3.2.

Пусть $\Sigma = \{a, b\}$ и $L = (\{ab\} \cup \{ba\})^*$; тогда Σ^* имеет четыре класса относительно $\approx_L$:

$$(1)\ [\varepsilon]_{\approx_L} = L; \qquad (3)\ [b]_{\approx_L} = Lb;$$
$$(2)\ [a]_{\approx_L} = La; \qquad (4)\ [aa]_{\approx_L} = L(\{aa\} \cup \{bb\})\Sigma^*.$$

Эквивалентность слов II

Определение А3.6.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** $\mathfrak{A}$ (и записывать как $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$), если справедливо соотношение $\delta^*(q_0, \alpha) = \delta^*(q_0, \beta)$.

Эквивалентность слов II

Определение A3.6.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** $\mathfrak{A}$ (и записывать как $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$), если справедливо соотношение $\delta^*(q_0, \alpha) = \delta^*(q_0, \beta)$.

Замечание A3.6.

Как и в предыдущем случае, отношение $\sim_{\mathfrak{A}}$ будет отношением эквивалентности.

Эквивалентность слов II

Определение А3.6.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** $\mathfrak{A}$ (и записывать как $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$), если справедливо соотношение $\delta^*(q_0, \alpha) = \delta^*(q_0, \beta)$.

Замечание А3.6.

Как и в предыдущем случае, отношение $\sim_{\mathfrak{A}}$ будет отношением эквивалентности.

Пример А3.3.

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$

Предложение А3.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Если $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$, то $\alpha \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})} \beta$.

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$

Предложение А3.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Если $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$, то $\alpha \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})} \beta$.

Доказательство.

Пусть $\gamma \in \Sigma^*$; тогда выполняется следующее: $\delta^*(q_0, \alpha\hat{\ }\gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \alpha), \gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \beta), \gamma) = \delta^*(q_0, \beta\hat{\ }\gamma)$; тем самым, $\alpha\hat{\ }\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha\hat{\ }\gamma) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \beta\hat{\ }\gamma) \in F \Leftrightarrow \beta\hat{\ }\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$

Предложение А3.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Если $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$, то $\alpha \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})} \beta$.

Доказательство.

Пусть $\gamma \in \Sigma^*$; тогда выполняется следующее: $\delta^*(q_0, \alpha\hat{\ }\gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \alpha), \gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \beta), \gamma) = \delta^*(q_0, \beta\hat{\ }\gamma)$; тем самым, $\alpha\hat{\ }\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha\hat{\ }\gamma) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \beta\hat{\ }\gamma) \in F \Leftrightarrow \beta\hat{\ }\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

Следствие А3.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $n_\sim$, $n_\approx$ — количество классов эквивалентности относительно $\sim_{\mathfrak{A}}$, $\approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$ соответственно. Тогда справедливо неравенство $n_\approx \leqslant n_\sim \leqslant n(Q)$, где $n(Q)$ — число состояний автомата $\mathfrak{A}$.

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$

Доказательство.

Из предложения А3.1 вытекает справедливость неравенства $n_{\approx} \leqslant n_{\sim}$ (в самом деле, каждый класс эквивалентности относительно $\approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$ в общем случае является объединением нескольких классов эквивалентности относительно $\sim_{\mathfrak{A}}$). Далее, непустые множества семейства $\{\{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, \alpha) = q\} \mid q \in Q\}$ служат разбиением множества Σ^* относительно $\sim_{\mathfrak{A}}$, поэтому имеет место $n_{\sim} \leqslant n(Q)$. $\square$

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Теорема А3.6.

Пусть L — язык, распознаваемый некоторым ДКА. Тогда существует ДКА $\mathfrak{A}$, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$, числом состояний которого является количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Теорема А3.6.

Пусть L — язык, распознаваемый некоторым ДКА. Тогда существует ДКА $\mathfrak{A}$, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$, числом состояний которого является количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$.

Доказательство.

Определим ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $Q = \{[\alpha]_{\approx_L} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$;
- $q_0 = [\varepsilon]_{\approx_L}$;
- $F = \{[\alpha]_{\approx_L} \mid \alpha \in L\}$;
- $\delta([\alpha]_{\approx_L}, a) = [\alpha\hat{\ }a]_{\approx_L}$.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (продолжение).

Множество Q непусто, а по следствию А3.1, оно конечно. Соответствие δ действительно является функцией. Для доказательства корректности необходимо проверить соотношение $\alpha \approx_L \alpha' \Rightarrow \alpha\hat{\ }a \approx_L \alpha'\hat{\ }a$ для всех $\alpha, \alpha' \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$. В самом деле, пусть $\alpha \approx_L \alpha'$; тогда
$(\alpha\hat{\ }a)\hat{\ }\gamma = \alpha\hat{\ }(a\hat{\ }\gamma) \in L \Leftrightarrow (\alpha'\hat{\ }a)\hat{\ }\gamma = \alpha'\hat{\ }(a\hat{\ }\gamma) \in L$ и, следовательно, $\alpha\hat{\ }a \approx_L \alpha'\hat{\ }a$.
Докажем индукцией по длине слова β, что для всех $\alpha \in \Sigma^*$ имеет место $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta) = [\alpha\hat{\ }\beta]_{\approx_L}$. Действительно, имеем $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \varepsilon) = [\alpha]_{\approx_L} = [\alpha\hat{\ }\varepsilon]_{\approx_L}$. Далее, предположим, что $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta) = [\alpha\hat{\ }\beta]_{\approx_L}$; тогда выполняется соотношение $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta\hat{\ }b) = \delta(\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta), b) = \delta([\alpha\hat{\ }\beta]_{\approx_L}, b) = [(\alpha\hat{\ }\beta)\hat{\ }b]_{\approx_L} = [\alpha\hat{\ }(\beta\hat{\ }b)]_{\approx_L}$ для всех $b \in \Sigma$.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (окончание).

$L \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{\ }\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L}$; таким образом, $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) \in F$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.
$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq L$. Пусть $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда
$\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{\ }\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L} \in F$ и, следовательно, $\alpha \approx_L \alpha'$ для некоторого $\alpha' \in L$. Так как $\alpha'\hat{\ }\varepsilon = \alpha' \in L$, имеем $\alpha = \alpha\hat{\ }\varepsilon \in L$. $\square$

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (окончание).

$L \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L}$; таким образом, $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) \in F$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.
$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq L$. Пусть $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда
$\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L} \in F$ и, следовательно, $\alpha \approx_L \alpha'$ для некоторого $\alpha' \in L$. Так как $\alpha'\hat{}\varepsilon = \alpha' \in L$, имеем $\alpha = \alpha\hat{}\varepsilon \in L$. $\square$

Следствие А3.2.

Язык L распознаваем некоторым ДКА, если и только если количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$ конечно.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (окончание).

$L \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L}$; таким образом, $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) \in F$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.
$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq L$. Пусть $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L} \in F$ и, следовательно, $\alpha \approx_L \alpha'$ для некоторого $\alpha' \in L$. Так как $\alpha'\hat{}\varepsilon = \alpha' \in L$, имеем $\alpha = \alpha\hat{}\varepsilon \in L$. □

Следствие А3.2.

Язык L распознаваем некоторым ДКА, если и только если количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$ конечно.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Вытекает из следствия А3.1. $(\Leftarrow)$ Следует из доказательства теоремы А3.6 Майхилла-Нероуда. □

Основное понятие

Определение А3.7.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит. Определим **регулярное выражение** как слово алфавита $\Sigma \cup \{(,),\varnothing,+,{}^*,\cdot\}$, которое задаётся индукцией по построению следующим образом:

1. $\varnothing$ и $a \in \Sigma$ является регулярным выражением, для всех $a \in \Sigma$;
2. если α и β — регулярные выражения, то и $(\alpha \cdot \beta)$ также является регулярным выражением;
3. если α и β — регулярные выражения, то и $(\alpha + \beta)$ также является регулярным выражением;
4. если α — регулярное выражение, то и α^* также является регулярным выражением;
5. других регулярных выражений, кроме описанных в (1)–(4), нет.

Регулярное выражение и язык

Определение А3.8.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит. Определим **язык** $\mathcal{L}(\alpha)$, **представимый регулярным выражением** α, как слово алфавита $\Sigma \cup \{(,), \varnothing, +, ^*, \cdot\}$, которое задаётся индукцией по построению следующим образом:

1. $\mathcal{L}(\varnothing) = \varnothing$ и $\mathcal{L}(a) = \{a\}$, для всех $a \in \Sigma$;
2. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha \cdot \beta)) = \mathcal{L}(\alpha)\mathcal{L}(\beta)$;
3. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha + \beta)) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{L}(\beta)$;
4. если α — регулярное выражение, то $\mathcal{L}(\alpha^*) = \mathcal{L}(\alpha)^*$.

Регулярное выражение и язык

Определение A3.8.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит. Определим **язык** $\mathcal{L}(\alpha)$, **представимый регулярным выражением** α, как слово алфавита $\Sigma \cup \{(,), \varnothing, +, {}^*, \cdot\}$, которое задаётся индукцией по построению следующим образом:

1. $\mathcal{L}(\varnothing) = \varnothing$ и $\mathcal{L}(a) = \{a\}$, для всех $a \in \Sigma$;
2. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha \cdot \beta)) = \mathcal{L}(\alpha)\mathcal{L}(\beta)$;
3. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha + \beta)) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{L}(\beta)$;
4. если α — регулярное выражение, то $\mathcal{L}(\alpha^*) = \mathcal{L}(\alpha)^*$.

Определение A3.9.

Язык, задаваемый некоторым регулярным выражением, называется **регулярным**.

Регулярные выражения и языки: примеры

Примеры А3.4.

Регулярные языки $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А3.7.

Заметим, что язык $\{\varepsilon\}$ регулярен, поскольку он представляется регулярным выражением $\varnothing^*$.

Регулярные языки $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А3.7.

Заметим, что язык $\{\varepsilon\}$ регулярен, поскольку он представляется регулярным выражением $\varnothing^*$.

Следствие А3.3.

Любой регулярный язык распознаваем некоторым ДКА.

Регулярные языки $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А3.7.

Заметим, что язык $\{\varepsilon\}$ регулярен, поскольку он представляется регулярным выражением $\varnothing^*$.

Следствие А3.3.

Любой регулярный язык распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

По предложениям А1.1(1) и А1.2(2), пустой язык и $\{a\}$ распознаваемы некоторыми ДКА, для всех $a \in \Sigma$. Кроме того, языки, распознаваемые некоторыми ДКА, замкнуты относительно операций объединения, конкатенации и звёздочки Клини, по теоремам А3.4, А3.2, А2.4 и А3.1. $\square$

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Теорема А3.7.

Любой язык, распознаваемый ДКА, является регулярным.

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Теорема А3.7.

Любой язык, распознаваемый ДКА, является регулярным.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, \ldots, n\}; \Sigma; \delta, 0, F)$ — ДКА; положим $R(i, j, k) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(i, \alpha) = j,\ \delta^*(i, \beta) < k$ для всех $\varepsilon \neq \beta \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha\}$ $(i, j, k \leqslant n+1)$; докажем индукцией по $k \leqslant n+1$, что $R(i, j, k)$ регулярен для всех $i, j, k \leqslant n+1$.

База. Докажем, что $R(i, j, 0)$ регулярен для всех $i, j \leqslant n$.

1) Если $i \neq j$ и $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — все символы из Σ таковы, что $\delta(i, a_p) = j$, $1 \leqslant p \leqslant l$, то $R(i, j, 0) = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_l\}$.

2) Если $i \neq j$ и не существует символа $a \in \Sigma$ из п. 1, то $R(i, j, 0) = \varnothing$.

3) Если $i = j$ и $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — все символы из Σ таковы, что $\delta(i, a_p) = j$, $1 \leqslant p \leqslant l$, то $R(i, j, 0) = \{\varepsilon\} \cup \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_l\}$.

4) Если $i = j$ и не существует символа $a \in \Sigma$ из п. 3, то $R(i, j, 0) = \{\varepsilon\}$.

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Доказательство (продолжение).

ИШ. Предположим, что язык $R(i,j,m)$ регулярный ($i,j \leqslant n$, $m < k+1$). Докажем, что

$$R(i,j,k+1) = R(i,j,k) \cup R(i,k,k)R(k,k,k)^* R(k,j,k). \qquad (1)$$

(Неформально, для того, чтобы попасть из состояния i в состояние j, используя состояния $< k+1$, либо попадаем без использования состояния k (и тогда такие слова учтены в $R(i,j,k)$), либо осуществляется переход с использованием по меньшей мере один раз состояния k (и тогда прочитывается сначала слово из $R(i,k,k)$ (первый раз встретили состояние k), затем слово из $R(k,k,k)^*$ (до тех пор, пока последний раз не встретили состояние k), и, наконец, слово из $R(k,j,k)$ (последний раз встречаем состояние k)).)

ДКА ⇒ Регулярные языки

Доказательство (продолжение).

$\supseteq$. Пусть $\alpha \in R(i,j,k)$; тогда $\alpha \in R(i,j,k+1)$, поскольку $\delta^*(i,\beta) < k < k+1$ для всех $\varepsilon \neq \beta \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha$. Пусть теперь $\alpha \in R(i,k,k)R(k,k,k)^*R(k,j,k)$; тогда найдутся слова $\alpha_1 \in R(i,k,k)$, $\alpha_2 \in R(k,k,k)^*$ и $\alpha_3 \in R(k,j,k)$ такие, что $\alpha = \alpha_1 \hat{}\, \alpha_2 \hat{}\, \alpha_3$. Далее, имеем $\delta^*(i,\alpha) = \delta^*(\delta^*(i,\alpha_1),\alpha_2 \hat{}\, \alpha_3) = \delta^*(k,\alpha_2 \hat{}\, \alpha_3) = \delta^*(\delta^*(k,\alpha_2),\alpha_3) = \delta^*(k,\alpha_3) = j$. Остаётся доказать, что $\delta^*(i,\beta) < k+1$ для всех $\varepsilon \neq \beta \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha$. Пусть $\alpha_2 = \gamma_1 \hat{}\, \gamma_2 \hat{}\, \ldots \hat{}\, \gamma_n$, $\gamma_l \in R(k,k,k)$ $(1 \leqslant l \leqslant n,\ n \in \omega)$. Разберем несколько случаев.

$\beta \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha_1$. Тогда $\delta^*(i,\beta) < k < k+1$, поскольку $\alpha_1 \in R(i,k,k)$.

$\beta = \alpha_1$. Тогда $\delta^*(i,\beta) = \delta^*(i,\alpha_1) = k < k+1$.

$\beta = \alpha_1 \hat{}\, \alpha_2 \hat{}\, \beta_3$, где $\varepsilon \neq \beta_3 \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha_3$. Тогда $\delta^*(i,\alpha_1 \hat{}\, \alpha_2 \hat{}\, \beta_3) = \delta^*(\delta^*(i,\alpha_1),\alpha_2 \hat{}\, \beta_3) = \delta^*(k,\alpha_2 \hat{}\, \beta_3) = \delta^*(\delta^*(k,\alpha_2),\beta_3) = \delta^*(k,\beta_3) < k < k+1$.

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Доказательство (продолжение).

$\beta = \alpha_1\hat{}\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2$, где $\beta_2 \sqsubseteq_{\text{beg}} \gamma_l$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$. Тогда $\delta^*(i,\beta) = \delta^*(i,\alpha_1\hat{}\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(\delta^*(i,\alpha_1),\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(k,\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(\delta^*(k,\gamma_1),\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(k,\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(\delta^*(k,\gamma_2),\gamma_3\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(k,\gamma_3\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \ldots = \delta^*(k,\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(\delta^*(k,\gamma_{l-1}),\beta_2) = \delta^*(k,\beta_2)$. Далее, если $\beta_2 \in \{\varepsilon,\gamma_l\}$, то $\delta^*(k,\beta_2) = k < k+1$; если же $\varepsilon \neq \beta_2 \sqsubset_{\text{beg}} \gamma_l$, то $\delta^*(k,\beta_2) < k < k+1$.

$\subseteq$. Обозначим правую часть равенства (1) через $S_{i,j}$; докажем, что $R(i,j,k+1) \subseteq S_{i,j}$ для всех $i,j \leqslant n$. Пусть $\alpha \in R(i,j,k+1)$; доказывать будем индукцией по количеству $t(\alpha,k)$ слов $\varepsilon \neq \beta \sqsubseteq_{\text{beg}} \alpha$, для которых имеет место $\delta^*(i,\beta) = k$. Если $t(\alpha,k) = 0$, то $\alpha \in R(i,j,k) \subseteq S_{i,j}$. Предположим, что для $t(\alpha,k) = t$ утверждение выполняется; докажем, что оно выполняется и для $t+1$.

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Доказательство (окончание).

Возьмём наименьшее по длине $\varepsilon \neq \alpha_0 \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha$ такое, что $\delta^*(i, \alpha_0) = k$ (пусть $\alpha = \alpha_0\hat{\ }\alpha_1$). Тогда $j = \delta^*(i, \alpha) = \delta^*(\delta^*(i, \alpha_0), \alpha_1) = \delta^*(k, \alpha_1)$ и, следовательно, $\alpha_1 \in R(k, j, k+1)$ и $t(\alpha_1, k) = t$. По индукционному предположению, $\alpha = \alpha_0\hat{\ }\alpha_1 \in R(i, k, k)S_{k,j} = R(i, k, k)(R(k, j, k) \cup R(k, k, k)R(k, k, k)^* R(k, j, k)) \subseteq R(i, k, k)R(k, k, k)^* R(k, j, k) \subseteq S_{i,j}$. $\square$

Спасибо за внимание.