Лекция С6
Нумерации и вычислимость, III

Вадим Пузаренко

26 мая 2020 г.

Вычислимые нумерации

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Вычислимые нумерации

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Обозначение.

$\Gamma^*_\nu \leftrightharpoons \{\langle n, m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle \mid \langle m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle \in \nu(n)\}$.

Вычислимые нумерации

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Обозначение.

$\Gamma^*_\nu \leftrightharpoons \{\langle n, m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle \mid \langle m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle \in \nu(n)\}$.

Определение.

Нумерация ν называется **вычислимой**, если Γ^*_ν в.п. Семейство $\mathcal{S}$ называется **вычислимым**, если оно имеет хотя бы одну вычислимую нумерацию.

Вычислимые нумерации

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Обозначение.

$\Gamma^*_\nu \leftrightharpoons \{\langle n, m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle \mid \langle m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle \in \nu(n)\}$.

Определение.

Нумерация ν называется **вычислимой**, если Γ^*_ν в.п. Семейство $\mathcal{S}$ называется **вычислимым**, если оно имеет хотя бы одну вычислимую нумерацию.

Определение.

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Тогда нумерация ν называется **вычислимой**, если нумерация $(\Gamma\nu)(x) \leftrightharpoons \Gamma\nu(x)$ вычислима.

Вычислимые нумерации

Предложение C23

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \nu(x_0)(x_1, \ldots, x_n)$ частично вычислима.

Вычислимые нумерации

Предложение C23

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \nu(x_0)(x_1, \ldots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma^*_\nu = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему C11 о графике. $\square$

Вычислимые нумерации

Предложение C23

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \nu(x_0)(x_1, \ldots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma^*_\nu = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему C11 о графике. □

Примеры.

1. Семейство CE вычислимо.

Вычислимые нумерации

Предложение C23

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \nu(x_0)(x_1, \ldots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma^*_\nu = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему C11 о графике. $\square$

Примеры.

1. Семейство CE вычислимо.
2. Семейство всех конечных множеств вычислимо.

Вычислимые нумерации

Предложение С23

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \nu(x_0)(x_1, \ldots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma^*_\nu = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему С11 о графике. □

Примеры.

1. Семейство CE вычислимо.
2. Семейство всех конечных множеств вычислимо.
3. Семейство всех вычислимых множеств вычислимо.

Вычислимые нумерации

Предложение С23

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \nu(x_0)(x_1, \ldots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma^*_\nu = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему С11 о графике. $\square$

Примеры.

1. Семейство CE вычислимо.
2. Семейство всех конечных множеств вычислимо.
3. Семейство всех вычислимых множеств вычислимо.
4. Семейство всех унарных частично вычислимых функций вычислимо.

Не-вычислимые семейства

Следствие C22

Семейство всех унарных вычислимых функций не вычислимо.

Не-вычислимые семейства

Следствие С22

Семейство всех унарных вычислимых функций не вычислимо.

Теорема С23

Семейство всех бесконечных вычислимо перечислимых (вычислимых) множеств не вычислимо.

Не-вычислимые семейства

Следствие С22

Семейство всех унарных вычислимых функций не вычислимо.

Теорема С23

Семейство всех бесконечных вычислимо перечислимых (вычислимых) множеств не вычислимо.

Доказательство.

Докажем следующее: если ν — вычислимая нумерация некоторого подсемейства $\mathcal{S}$ бесконечных впм, то существует бесконечное вычислимое множество $A \notin \mathcal{S}$. Используя сильную аппроксимацию Γ^*_ν, будем строить строго возрастающую вф f, для которой будет выполняться $\rho f \neq \nu(n)$ для всех $n \in \omega$. Пусть $\{B_{n,s}\}_{n,s\in\omega}$ — сильно вычислимая последовательность такая, что $\varnothing = B_{n,0} \subseteq B_{n,1} \subseteq \ldots \subseteq B_{n,s} \subseteq \ldots \subseteq \cup_s B_{n,s} = \nu(n)$ для всех $n \in \omega$.

Не-вычислимые семейства

Доказательство (продолжение)

Кроме того, дополнительно будем предполагать, что $|B_{n,s+1} - B_{n,s}| \leqslant 1$, где $n, s \in \omega$.

КОНСТРУКЦИЯ.

Шаг 0. Находим шаг $t_0 = \mu t[B_{0,t} \neq \varnothing]$; возьмём m_0, для которого $B_{0,t_0} = \{m_0\}$; тогда положим $f(0) = m_0 + 1$.

Шаг $n+1$. Считаем, что $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(n)$ уже определены. Находим шаг $t_{n+1} = \mu t(\exists m[(m \in B_{n+1,t}) \wedge (m > f(n))])$; возьмём m_{n+1}, для которого $B_{n+1,t_{n+1}} \setminus B_{n+1,t_{n+1}-1} = \{m_{n+1}\}$; тогда положим $f(n+1) = m_{n+1} + 1$.

ЗАВЕРШЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ.

Из эффективности конструкции заключаем, что f вычислима. Так как f строго монотонная, приходим к выводу, что ρf — бесконечное вм.

Далее, непосредственно из определения следует, что $f(n) - 1 \in B_{n,t_n} \subseteq \nu(n)$, но $f(n) - 1 \notin \rho f$, поэтому $\rho f \neq \nu(n)$. □

Не-вычислимые семейства

Следствие С23

Семейство всех бесконечных вычислимых множеств невычислимо.

Не-вычислимые семейства

Следствие С23

Семейство всех бесконечных вычислимых множеств невычислимо.

Упражнения.

1. Докажите, что семейство всех кобесконечных впм не является вычислимым.
2. Докажите, что семейство всех унарных частичных вычислимых функций, имеющих тотальное вычислимое продолжение, вычислимо.
3. Докажите, что пара впм $\{n|\varphi_n(0)\downarrow=0\}$ и $\{n|\varphi_n(0)\downarrow=1\}$ неотделима, где φ — универсальная чвф.

Идеал

Предложение С24

1. Если ν_0 и ν_1 — вычислимые нумерации, то $\nu_0 \oplus \nu_1$ также вычислима;
2. если ν — вычислимая нумерация и $\nu' \leqslant \nu$, то ν' будет также вычислимой нумерацией.

Доказательство.

1) Пусть $\Gamma^*_{\nu_0}$ и $\Gamma^*_{\nu_1}$ — впм, тогда $\Gamma^*_{\nu_0 \oplus \nu_1} = \{\langle 2k, m\rangle | m \in \nu_0(k)\} \cup \{\langle 2k+1, m\rangle | m \in \nu_1(k)\}$ также будет впм.
2) Пусть Γ^*_{ν} — впм и пусть вф f такова, что $\nu' = \nu f$. Тогда $\Gamma^*_{\nu'} = \{\langle n, m\rangle | m \in \nu'(n)\} = \{\langle n, m\rangle | m \in \nu f(n)\} = \{\langle n, m\rangle | \Gamma^*_{\nu}(f(n), m)\}$ и, следовательно, $\Gamma^*_{\nu'}$ также будет впм. $\square$

Идеал

Обозначения.

Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимое семейство. Тогда через $N^0(\mathcal{S})$ обозначим множество всех вычислимых нумераций и, в свою очередь, через $\mathrm{L}^0(\mathcal{S})$ — множество всех классов эквивалентности вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$.

Идеал

Обозначения.

Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимое семейство. Тогда через $N^0(\mathcal{S})$ обозначим множество всех вычислимых нумераций и, в свою очередь, через $\mathrm{L}^0(\mathcal{S})$ — множество всех классов эквивалентности вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$.

Следствие C24

Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимое семейство, тогда $\mathrm{L}^0(\mathcal{S}) \lhd \mathbf{L}(\mathcal{S})$.

Идеал

Обозначения.

Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимое семейство. Тогда через $N^0(\mathcal{S})$ обозначим множество всех вычислимых нумераций и, в свою очередь, через $\mathrm{L}^0(\mathcal{S})$ — множество всех классов эквивалентности вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$.

Следствие C24

Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимое семейство, тогда $\mathrm{L}^0(\mathcal{S}) \lhd \mathbf{L}(\mathcal{S})$.

Определение.

Вычислимая нумерация ν семейства $\mathcal{S}$ называется **главной**, если любая вычислимая нумерация ν_0 семейства $\mathcal{S}$ сводится к ν.

Идеал

Обозначения.

Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимое семейство. Тогда через $N^0(\mathcal{S})$ обозначим множество всех вычислимых нумераций и, в свою очередь, через $\mathrm{L}^0(\mathcal{S})$ — множество всех классов эквивалентности вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$.

Следствие C24

Пусть $\mathcal{S}$ — вычислимое семейство, тогда $\mathrm{L}^0(\mathcal{S}) \lhd \mathbf{L}(\mathcal{S})$.

Определение.

Вычислимая нумерация ν семейства $\mathcal{S}$ называется **главной**, если любая вычислимая нумерация ν_0 семейства $\mathcal{S}$ сводится к ν.

Лемма C39

Если ν — главная вычислимая нумерация $\mathcal{S}$ и ν_0 — вычислимая нумерация $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, то $\nu_0 \leqslant \nu$.

Главные нумерации

Доказательство.

Пусть ν_0 — вычислимая нумерация $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, тогда $\nu_0 \oplus \nu$ будет вычислимой нумерацией $\mathcal{S}$. Следовательно, $\nu_0 \oplus \nu = \nu f$ для некоторой вф f. Положим $g(n) \leftrightharpoons f(2n)$; далее, имеем $\nu_0(n) = (\nu_0 \oplus \nu)(2n) = = \nu(f(2n)) = \nu g(n)$. Таким образом, вф g сводит ν_0 к ν. $\square$

Главные нумерации

Доказательство.

Пусть ν_0 — вычислимая нумерация $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, тогда $\nu_0 \oplus \nu$ будет вычислимой нумерацией $\mathcal{S}$. Следовательно, $\nu_0 \oplus \nu = \nu f$ для некоторой вф f. Положим $g(n) \leftrightharpoons f(2n)$; далее, имеем $\nu_0(n) = (\nu_0 \oplus \nu)(2n) = \nu(f(2n)) = \nu g(n)$. Таким образом, вф g сводит ν_0 к ν. □

Теорема С24

Семейство PCF_n всех n-арных частично вычислимых функций имеет главную вычислимую нумерацию.

Главные нумерации

Доказательство.

Пусть ν_0 — вычислимая нумерация $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, тогда $\nu_0 \oplus \nu$ будет вычислимой нумерацией $\mathcal{S}$. Следовательно, $\nu_0 \oplus \nu = \nu f$ для некоторой вф f. Положим $g(n) \leftrightharpoons f(2n)$; далее, имеем $\nu_0(n) = (\nu_0 \oplus \nu)(2n) = = \nu(f(2n)) = \nu g(n)$. Таким образом, вф g сводит ν_0 к ν. $\square$

Теорема C24

Семейство PCF_n всех n-арных частично вычислимых функций имеет главную вычислимую нумерацию.

Скобки Мальцева

Ведём бинарную функцию $[\bullet, \bullet]$ следующим образом (здесь $x, y \in \omega$): $[x, y] \leftrightharpoons c(lx, c(rx, y))$.
Эта функция примитивно рекурсивна и осуществляет взаимно однозначное соответствие между парами натуральных чисел и натуральными числами.

Главные нумерации

Скобки Мальцева

Функции c и $[\bullet, \bullet]$ связаны следующим тождеством:

$$[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2)). \tag{1}$$

Для любого $n > 2$ определим функцию $\lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ следующим образом:
$\lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n [x_1, x_2, \ldots, x_n] \leftrightharpoons \lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n [\ldots [[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_n]$.
Нетрудно проверить, что эти функции определяются индукцией по $n > 2$ следующим образом:
$\lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n \lambda x_{n+1} [x_1, x_2, \ldots, x_n] \leftrightharpoons$
$\leftrightharpoons \lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n \lambda x_{n+1} [[x_1, x_2 \ldots, x_n], x_{n+1}]$.
Существует n унарных примитивно рекурсивных функций $[\bullet]_{n,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для которых имеют место

$$[[x]_{n,1}, [x]_{n,2}, \ldots, [x]_{n,n}] = x; \; [[x_1, x_2, \ldots, x_n]]_{n,i} = x_i$$

для всех x, x_1, x_2, …, $x_n \in \omega$.

Главные нумерации

Доказательство теоремы С24.

Пусть $T^2(x, y)$ — произвольная бинарная универсальная чвф; положим
$K^2 \leftrightharpoons \lambda x_0 \lambda x_1 T^2(lx_0, c(rx_0, x_1))$;
$K^{n+1} \leftrightharpoons \lambda x_0 \lambda x_1 \ldots \lambda x_n K^n([x_0, x_1], x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$.
Функции K^2, K^3, ..., K^n, ... называются **клиниевскими универсальными функциями**. Для них справедливо следующее утверждение:
Для любого $n > 0$ частично вычислимая функция K^{n+1} универсальна.
Для проверки данного утверждения определим функции T^{n+1}, $n > 1$, следующим соотношением:
$T^{n+1} \leftrightharpoons \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n T^2(x_0, c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.
По лемме С16, чвф T^{n+1} универсальна. Заметим, что справедливо следующее соотношение:
$T^{k+n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}) =$
$T^{n+2}(x_0, c^k(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}, \ldots, x_{k+n})$.
Проверим, что справедливо следующее соотношение (индукцией по n): $K^{n+1}(c(x_0, x_1), x_2, \ldots, x_{n+1}) = T^{n+2}(x_0, x_1, , x_2, \ldots, x_{n+1})$, $n \geqslant 1$.

Главные нумерации

Доказательство теоремы C24 (продолжение)

Действительно,
$K^2(c(x_0,x_1),x_2) = T^2(x_0,c(x_1,x_2)) = T^3(x_0,x_1,x_2)$;
$K^{n+1}(c(x_0,x_1),x_2,\ldots,x_{n+1}) = K^n([c(x_0,x_1),x_2],x_3,\ldots,x_{n+1}) =$
$K^n(c(x_0,c(x_1,x_2)),x_3,\ldots,x_{n+1}) =$
$T^{n+1}(x_0,c(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_{n+1}) = T^{n+2}(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$.
Теперь перейдём к доказательству того, что K^{n+1} универсальна.
Пусть $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — чвф и пусть $m\in\omega$ таково, что
$\lambda x_0\lambda x_1\lambda x_2\ldots\lambda x_n g(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$
$\lambda x_0\lambda x_1\lambda x_2\ldots\lambda x_n T^{n+2}(m,x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)$.
Тогда $K^{n+1}(c(m,m),x_1,\ldots,x_n) = T^{n+2}(m,m,x_1,x_2,\ldots,x_n) =$
$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, т.е. $g = \lambda x_1\lambda x_2\ldots\lambda x_n K^{n+1}(c(m,m),x_1,\ldots,x_n)$.
Клиниевская универсальная функция K^{n+1} определяет вычислимую нумерацию $\varkappa^n:\omega\to\mathrm{PCF}_n$ (в смысле $K^{n+1}=F_{\varkappa^n}$), которую также будем называть **клиниевской** ($n\geqslant 1$). Покажем, что эта нумерация главная.

Главные нумерации

Доказательство теоремы C24 (продолжение)

Пусть ν — произвольная вычислимая нумерация семейства PCF_n и пусть $F_\nu(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — соответствующая ей универсальная чвф. Пусть $m \in \omega$ таково, что $F_\nu(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = T^{n+2}(m, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда, положив $h \risingdotseq \lambda x c(m, x)$, получаем, что $\nu(x)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varkappa^n(h(x))(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; таким образом, $\nu x = \varkappa^n h(x)$ или $\nu = \varkappa^n h$. $\square$

Главные нумерации

Доказательство теоремы С24 (продолжение)

Пусть ν — произвольная вычислимая нумерация семейства PCF_n и пусть $F_\nu(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — соответствующая ей универсальная чвф. Пусть $m \in \omega$ таково, что $F_\nu(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = T^{n+2}(m, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда, положив $h \leftrightharpoons \lambda x c(m, x)$, получаем, что $\nu(x)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = F_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varkappa^n(h(x))(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; таким образом, $\nu x = \varkappa^n h(x)$ или $\nu = \varkappa^n h$. $\square$

Замечание.

Функция $h(x) = \lambda x c(m, x)$ в доказательстве теоремы не только примитивно рекурсивна, но и инъективна, поэтому $\nu \leqslant_1 \varkappa^n$.

Главные нумерации

Соглашение.

Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение $\varkappa$ вместо $\varkappa^1$. Кроме того, часто вместо $\varkappa^n(m)$ будем писать $\varkappa^n_m$.

Главные нумерации

Соглашение.

Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение $\varkappa$ вместо $\varkappa^1$. Кроме того, часто вместо $\varkappa^n(m)$ будем писать $\varkappa^n_m$.

$s - m - n$-Теорема C25

Для любых $n, m \geqslant 1$ существует $m+1$-местная инъективная вычислимая функция s^m_n такая, что
$\varkappa^{m+n}_e(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{s^m_n(e, y_1, y_2, \ldots, y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
для всех e, x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., $y_m \in \omega$.

Главные нумерации

Соглашение.

Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение $\varkappa$ вместо $\varkappa^1$. Кроме того, часто вместо $\varkappa^n(m)$ будем писать $\varkappa^n_m$.

$s - m - n$-Теорема С25

Для любых $n, m \geqslant 1$ существует $m+1$-местная инъективная вычислимая функция s^m_n такая, что
$\varkappa^{m+n}_e(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{s^m_n(e, y_1, y_2, \ldots, y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
для всех e, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, y_1, y_2, $\ldots$, $y_m \in \omega$.

Доказательство.

Определим $\nu : \omega \to \mathrm{PCF}_n$ следующим образом:
$\nu(x) \leftrightharpoons \varkappa^{m+n}_{c_{m+1,1}(x)}(c_{m+1,2}(x), c_{m+1,3}(x), \ldots, c_{m+1,m+1}(x), x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Тогда существует инъективная вф $h(x)$ такая, что $\nu(x) = \varkappa^n_{h(x)}$ для всех $x \in \omega$.

Теорема Клини о неподвижной точке

Доказательство (продолжение)

Положив, что $x = c^{m+1}(e, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $s_n^m(e, y_1, y_2, \ldots, y_m) = h(c^{m+1}(e, y_1, y_2, \ldots, y_m))$, получим, что $\varkappa_e^{m+n}(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\varkappa^{m+n}_{c_{m+1,1}(x)}(c_{m+1,2}(x), c_{m+1,3}(x), \ldots, c_{m+1,m+1}(x), x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\nu(x)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{h(x)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\varkappa^n_{h(c^{m+1}(e,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{s_n^m(e,y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\square$

Теорема Клини о неподвижной точке

Доказательство (продолжение)

Положив, что $x = c^{m+1}(e, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $s_n^m(e, y_1, y_2, \ldots, y_m) = h(c^{m+1}(e, y_1, y_2, \ldots, y_m))$, получим, что $\varkappa_e^{m+n}(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\varkappa^{m+n}_{c_{m+1,1}(x)}(c_{m+1,2}(x), c_{m+1,3}(x), \ldots, c_{m+1,m+1}(x), x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\nu(x)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{h(x)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\varkappa^n_{h(c^{m+1}(e,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{s_n^m(e,y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
□

Теорема C26

Для каждой $m+1$-местной частично вычислимой функции h найдётся m-местная инъективная вычислимая функция g такая, что

$$\varkappa^n_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,g(y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{g(y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

для всех x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, $y_m \in \omega$.

Теорема Клини о неподвижной точке

Доказательство.

Применяя к чвф $\varkappa_e^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $s - m - n$-теорему, получим равную ей чвф $\varkappa^n_{s_n^{m+1}(e,z,y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим теперь вспомогательную чвф $\varkappa^n_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,s_n^{m+1}(z,z,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эта функция имеет $m + n + 1$ аргументов, поэтому найдётся $a \in \omega$ такое, что $\varkappa_a^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\varkappa^n_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,s_n^{m+1}(z,z,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда $\varkappa^n_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,s_n^{m+1}(a,a,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ $\varkappa_a^{m+n+1}(a, y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{s_n^{m+1}(a,a,y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Остаётся положить $g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \ldots, y_m)$. $\square$

Теорема Клини о неподвижной точке

Доказательство.

Применяя к чвф $\varkappa_e^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $s - m - n$-теорему, получим равную ей чвф $\varkappa^n_{s_n^{m+1}(e,z,y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим теперь вспомогательную чвф $\varkappa^n_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,s_n^{m+1}(z,z,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эта функция имеет $m + n + 1$ аргументов, поэтому найдётся $a \in \omega$ такое, что $\varkappa_a^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,s_n^{m+1}(z,z,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда $\varkappa^n_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,s_n^{m+1}(a,a,y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa_a^{m+n+1}(a, y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{s_n^{m+1}(a,a,y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Остаётся положить $g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \ldots, y_m)$. □

Следствие C25

Для любой унарной частично вычислимой функции h найдётся число a такое, что $\varkappa_a^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varkappa^n_{h(a)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \omega$.

Снова главные нумерации

Теорема С27

Семейство CE_n обладает главной вычислимой нумерацией для любого $n \geqslant 1$.

Снова главные нумерации

Теорема C27

Семейство CE_n обладает главной вычислимой нумерацией для любого $n \geqslant 1$.

Доказательство.

Определим нумерацию π^n семейства CEP_n следующим образом: $\pi^n(x) \leftrightharpoons \delta\varkappa^n(x)$ для всех $x \in \omega$. Отношение $\langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle \in \pi^n(x) \Leftrightarrow \exists z[K^{n+1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = z]$ вп, поэтому π^n — вычислимая нумерация семейства CEP_n. Пусть $\nu : \omega \to \mathrm{CEP}_n$ — произвольная вычислимая нумерация. Определим $n+1$-арную частичную функцию g следующим образом:

$$g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle \in \nu(x); \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

График $\Gamma_g = \{\langle x, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0 \rangle \mid \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle \in \nu(x)\}$ вп и, по теореме о графике, g частично вычислима.

Снова главные нумерации

Доказательство (продолжение)

Пусть $m \in \omega$ таково, что $g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ для всех x, y_1, y_2, …, $y_n \in \omega$; тогда для $h \leftrightharpoons \lambda x c(m, x)$ имеем: $[\varkappa^n h(x)](y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $\pi^n h(x) = \delta\varkappa^n h(x) = \delta(\lambda y_1, y_2, \ldots, y_n . g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n))$ для всех $x \in \omega$. Заметив, что $\delta(\lambda y_1, y_2, \ldots, y_n . g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \nu(x)$, получаем $\nu = \pi^n h$. Таким образом, $\nu \leqslant \pi^n$ и π^n — главная нумерация семейства CE_n. □

Снова главные нумерации

Доказательство (продолжение)

Пусть $m \in \omega$ таково, что $g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ для всех x, y_1, y_2, …, $y_n \in \omega$; тогда для $h \leftrightharpoons \lambda x c(m, x)$ имеем: $[\varkappa^n h(x)](y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \ldots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $\pi^n h(x) = \delta\varkappa^n h(x) = \delta(\lambda y_1, y_2, \ldots, y_n . g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n))$ для всех $x \in \omega$. Заметив, что $\delta(\lambda y_1, y_2, \ldots, y_n . g(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \nu(x)$, получаем $\nu = \pi^n h$. Таким образом, $\nu \leqslant \pi^n$ и π^n — главная нумерация семейства CE_n. $\square$

Замечание.

Функция $h(x) = \lambda x c(m, x)$ в доказательстве теоремы не только примитивно рекурсивна, но и инъективна, поэтому $\nu \leqslant_1 \pi^n$. Нумерацию π^n будем называть **постовской**.

Свойство полноты

Соглашение.

Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π вместо π^1. Кроме того, часто вместо $\pi^n(m)$ будем писать π^n_m.

Свойство полноты

Соглашение.

Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π вместо π^1. Кроме того, часто вместо $\pi^n(m)$ будем писать π^n_m.

Предложение C25

Пусть $\psi(x)$ — частично вычислимая функция. Тогда существует вычислимая функция $f(x)$, для которой выполняются следующее:

$$[\varkappa(f(x))](y) = \begin{cases} [\varkappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \lambda y.\uparrow, & \text{если } \psi(x)\uparrow; \end{cases}$$

$$\pi(f(x)) = \begin{cases} \pi(\psi(x)), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \varnothing, & \text{если } \psi(x)\uparrow. \end{cases}$$

Свойство полноты

Соглашение.

Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π вместо π^1. Кроме того, часто вместо $\pi^n(m)$ будем писать π^n_m.

Предложение С25

Пусть $\psi(x)$ — частично вычислимая функция. Тогда существует вычислимая функция $f(x)$, для которой выполняются следующее:

$$[\varkappa(f(x))](y) = \begin{cases} [\varkappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \lambda y.\uparrow, & \text{если } \psi(x)\uparrow; \end{cases}$$

$$\pi(f(x)) = \begin{cases} \pi(\psi(x)), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \varnothing, & \text{если } \psi(x)\uparrow. \end{cases}$$

Доказательство.

Достаточно построить вф f для $\varkappa$, поскольку $\pi(x) = \delta\varkappa(x)$ для всех $x \in \omega$.

Свойство полноты

Доказательство (продолжение)

Определим нумерацию ν частичных функций, удовлетворяющую следующим условиям:

$$[\nu(x)](y) \leftrightharpoons \begin{cases} [\varkappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \lambda y.\uparrow, & \text{если } \psi(x)\uparrow. \end{cases}$$

Нумерация ν является вычислимой, поскольку $F_\nu(x,y) = K^2(\psi(x),y)$ — чвф. Так как $\varkappa$ — главная нумерация, существует вф $f(x)$ такая, что $\nu(x) = \varkappa(f(x))$. Отсюда вытекает утверждение. $\square$

Свойство полноты

Доказательство (продолжение)

Определим нумерацию ν частичных функций, удовлетворяющую следующим условиям:

$$[\nu(x)](y) \leftrightharpoons \begin{cases} [\varkappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \lambda y.\uparrow, & \text{если } \psi(x)\uparrow. \end{cases}$$

Нумерация ν является вычислимой, поскольку $F_\nu(x,y) = K^2(\psi(x),y)$ — чвф. Так как $\varkappa$ — главная нумерация, существует вф $f(x)$ такая, что $\nu(x) = \varkappa(f(x))$. Отсюда вытекает утверждение. □

Замечание.

Нигде не определённая функция и пустое множество играют роль особых элементов нумераций $\varkappa$ и π. При этом они являются полными нумерациями. Нумерация ν семейства $\mathcal{S} \cup \{\bot\}$ называется **полной**, если для любой чвф $\psi(x)$ существует вф f такая, что

$$\nu(f(x)) = \begin{cases} \nu(\psi(x)), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \bot, & \text{если } \psi(x)\uparrow. \end{cases}$$

Счётчики

Обозначение.

Пусть $M \subseteq \omega$ и $x \in \omega$. Положим $M \restriction x \leftrightharpoons M \cap \{0, 1, \ldots, x\}$.

Счётчики

Обозначение.

Пусть $M \subseteq \omega$ и $x \in \omega$. Положим $M \upharpoonright x \leftrightharpoons M \cap \{0, 1, \ldots, x\}$.

Пусть ν и μ — две вычислимые нумерации семейств $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \subseteq \mathrm{CE}$, а $\{H_{x,s} | x, s \in \omega\}$ и $\{M_{x,s} | x, s \in \omega\}$ — двойные сильные последовательности конечных множеств такие, что $\{H_{x_0,s} | s \in \omega\}$ и $\{M_{x_0,s} | s \in \omega\}$ — сильные аппроксимации $\nu(x_0)$ и $\mu(x_0)$ соответственно, $x_0 \in \omega$. Пусть g — унарная частично вычислимая функция, а $\{G_s\}_{s \in \omega}$ — сильная аппроксимация Γ_g. Через g_s будем обозначать функцию, графиком которой является G_s, $s \in \omega$. Определим теперь одноместную функцию F, которую назовём **счётчиком**. Полагаем
$f(s) \leftrightharpoons \sup\{x \leqslant s \mid \forall y \leqslant x[(y \in \delta g_s) \wedge (H_{y,s} \upharpoonright x = M_{g(y),s} \upharpoonright x)]\}$
(полагая $\sup \varnothing \leftrightharpoons 0$); $F(0) \leftrightharpoons 0$, $F(s+1) \leftrightharpoons \max\{F(s), f(s+1)\}$.
Из определения функции F легко видеть, что F — монотонная (т.е. $F(x) \leqslant F(x+1)$ для $x \in \omega$) вычислимая функция.

Счётчики

Предложение С26

$\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = \infty$ (т.е. функция F не ограничена), если и только если g вычислима и $\nu = \mu g$.

Счётчики

Предложение C26

$\lim_{s\to\infty} F(s) = \infty$ (т.е. функция F не ограничена), если и только если g вычислима и $\nu = \mu g$.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть вф g такова, что $\nu = \mu g$, и $x \in \omega$. Так как g всюду определена и $\Gamma_g = \cup_{s\in\omega} G_s$, имеем $\{0, 1, \ldots, x\} \subseteq \delta g_{s_0}$ для некоторого s_0. Пусть s_1 таково, что $H_{y,s_1} \upharpoonright x = \nu(y) \upharpoonright x$ для всех $y \leqslant x$, а s_2 таково, что $M_{g(y),s_2} \upharpoonright x = \mu(g(y)) \upharpoonright x$ для всех $y \leqslant x$. Тогда для $s \leftrightharpoons \max\{s_0, s_1, s_2\} + 1$ имеем $f(s) \geqslant x$ и, тем более, $F(s) \geqslant x$. Так как x произвольно, F не ограничена.

Счётчики

Доказательство (продолжение)

($\Rightarrow$) Пусть g — чвф, но не вф, или g — вф, но $\nu \neq \mu g$. Если g не всюду определена, то $x \notin \delta g$ для некоторого x, поэтому $f(s) \leqslant x$ для всех s; тогда $F(s) \leqslant x$ для всех x, т.е. F ограничена. Пусть теперь вф g такова, что $\nu \neq \mu g$. Тогда $\nu(x_0) \neq \mu(g(x_0))$ для некоторого x_0. Тогда найдётся $x_1 \in (\nu(x_0) \cup \mu(g(x_0))) \setminus (\nu(x_0) \cap \mu(g(x_0)))$. Пусть s_0 таково, что $x_1 \in H_{x_0,s_0} \cup M_{g(x_0),s_0}$. Тогда для $s \geqslant s_1 \leftrightharpoons \max\{s_0, x_0, x_1\}$ имеем $f(s) \leqslant \max\{x_0, x_1\}$ и $F(s) = F(s_1)$. Таким образом, F ограничена. $\square$

В дальнейшем будут использоваться и счётчики с параметрами, когда вместо одной нумерации ν, одной нумерации μ и одной функции g будут вычислимые последовательности нумераций и функций. Однако в основе использования счётчиков будут лежать идеи, использованные в доказательстве предложения.

Главные семейства

Определение.

Семейство $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ называется **главным**, если оно обладает главной вычислимой нумерацией.

Главные семейства

Определение.

Семейство $S \subseteq \mathrm{CEP}$ называется **главным**, если оно обладает главной вычислимой нумерацией.

Укажем одно из наиболее общих и полезных необходимых условий.

Главные семейства

Определение.

Семейство $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ называется **главным**, если оно обладает главной вычислимой нумерацией.

Укажем одно из наиболее общих и полезных необходимых условий.

Теорема С28

Если $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ — главное семейство, $\nu : \omega \to \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства $\mathcal{S}'$ такая, что $\nu(0) \subseteq \nu(1) \subseteq \ldots \subseteq \nu(n) \subseteq \nu(n+1) \subseteq \ldots$, то множество $R \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} \nu(n)$ принадлежит $\mathcal{S}$. Другими словами, главное семейство замкнуто относительно объединения возрастающих вычислимых последовательностей своих элементов.

Главные семейства

Доказательство.

Предположим противное. Пусть ν — такая вычислимая нумерация $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, что $\nu(0) \subseteq \nu(1) \subseteq \ldots \subseteq \nu(n) \subseteq \nu(n+1) \subseteq \ldots$ и $R \leftrightharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} \nu(n) \notin \mathcal{S}$. Пусть μ — произвольная вычислимая нумерация $\mathcal{S}$.

Построим некоторую вычислимую нумерацию θ подсемейства $\mathcal{S}'$ такую, что для всякой вф f будет выполняться $\theta \neq \mu f$. Отсюда по лемме С39 нумерация μ не может быть главной. Пусть $\{M_{n,t}\}_{n,t\in\omega}$ и $\{H_{n,t}\}_{n,t\in\omega}$ — двойные сильные последовательности конечных множеств такие, что $\{M_{n_0,t}\}_{t\in\omega}$ и $\{H_{n_0,t}\}_{t\in\omega}$ — сильные аппроксимации $\mu(n_0)$ и $\nu(n_0)$ соответственно, $n_0 \in \omega$. Пусть $\{\Gamma_{n,t}\}_{n,t\in\omega}$ — двойная сильная последовательность конечных множеств такая, что $\{\Gamma_{n_0,t}\}_{t\in\omega}$ — сильная аппроксимация $\Gamma_{\varkappa_{n_0}}$, $n_0 \in \omega$. Функцию, графиком которой является $\Gamma_{n,t}$, будем обозначать через $\varkappa_{n,t}$.

Нумерация θ будет определена с помощью построения некоторой двойной сильной последовательности $\{R_{n,t}\}_{n,t\in\omega}$ такой, что $\{R_{n_0,t}\}_{t\in\omega}$ будет сильной аппроксимацией множества $\theta(n_0)$.

Главные семейства

Доказательство (продолжение)

Для построения $R_{n,t}$ определим счётчик F следующим образом: $f(s,k) \leftrightharpoons \sup\{x \leqslant s \mid \forall y \leqslant x((y \in \delta\varkappa_{k,s}) \wedge (R_{y,s} \restriction x = M_{\varkappa_k(y),s} \restriction x))\}$; $F(0,k) \leftrightharpoons 0$, $F(s+1,k) \leftrightharpoons \max\{F(s,k), f(s+1,k)\}$.
Заметим, что для вычисления $F(s,k)$ необходимо только знание множеств $R_{n,t}$ для $t \leqslant s$.
Полагаем $R_{n,0} \leftrightharpoons \varnothing$, $R_{n,s+1} \leftrightharpoons \bigcup\limits_{k \leqslant F(s,n)} H_{k,s+1}$ для всех n, $s \in \omega$.
Из монотонности F по s и свойства $H_{k,s} \subseteq H_{k,s+1}$ следует, что $R_{n,s} \subseteq R_{n,s+1}$ для всех $n,k \in \omega$. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} F(t,n) < \infty$ для любого $n \in \omega$. Действительно, в противном случае по предложению C26 имеет место, что $\varkappa_n$ — вф и $\theta = \mu\varkappa_n$; в частности, $\theta(n) = R_n = \mu\varkappa_n(n) \in \mathcal{S}$, но из определения R_n видно, что в этом случае $R_n = \bigcup\limits_{t,k\in\omega} H_{k,t} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \nu(k) \notin \mathcal{S}$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t,n) < \infty$ для любого $n \in \omega$; обозначим этот предел через $f(n)$.

Главные семейства

Доказательство (продолжение)

Из определения $R_{n,t}$ видно, что $R_{n,t} \subseteq \bigcup\limits_{k \leqslant f(n)} H_k = H_{f(n)}$ для всех t. С другой стороны, если $t_0 > 0$ таково, что $F(t_0, n) = f(n)$, то $H_{f(n),t} \subseteq R_{n,t}$ для всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, $R_n = \nu(f(n)) \in \mathcal{S}'$ для любого $n \in \omega$. Итак, θ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства $\mathcal{S}'$, а по предложению C26, $\theta \neq \mu f$ для любой вф f, т.е. $\theta \nleqslant \mu$. $\square$

Главные семейства

Доказательство (продолжение)

Из определения $R_{n,t}$ видно, что $R_{n,t} \subseteq \bigcup\limits_{k \leqslant f(n)} H_k = H_{f(n)}$ для всех t. С другой стороны, если $t_0 > 0$ таково, что $F(t_0, n) = f(n)$, то $H_{f(n),t} \subseteq R_{n,t}$ для всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, $R_n = \nu(f(n)) \in \mathcal{S}'$ для любого $n \in \omega$. Итак, θ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства $\mathcal{S}'$, а по предложению С26, $\theta \neq \mu f$ для любой вф f, т.е. $\theta \nleqslant \mu$. $\square$

Следствие С26

1. Семейство всех конечных множеств не является главным.
2. Семейство $\mathrm{CEP} \setminus \{\omega\}$ не является главным.

Главные семейства

Доказательство.

Нумерация γ является вычислимой нумерацией семейства всех конечных множеств, поэтому данное семейство вычислимо. Далее, функция $f(n) = 2^n - 1$ вычислима и $\gamma(f(n)) = \{x \mid x < n\}$. Кроме того, $\omega = \bigcup\limits_{n \in \omega} \gamma(f(n))$ не является конечным множеством, поэтому семейство всех конечных множеств не является главным, по теореме C28. $\square$

Упражнение.

1. Докажите следствие C26(2).
2. Докажите, что семейство $\mathrm{CF} \cup \{\omega\}$ не является вычислимым, где CF — семейство всех графиков вычислимых функций.

Индексные множества

Определение.

Множество $A \subseteq \omega$ называется $\varkappa$-**индексным**, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Индексные множества

Определение.

Множество $A \subseteq \omega$ называется $\varkappa$-**индексным**, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Обозначение.

$K = \{x \mid \varkappa_x(x)\downarrow\} = \{x \mid x \in \pi_x\}$.
$K_0 = \{c(x,y) \mid \varkappa_x(y)\downarrow\} = \{c(x,y) \mid y \in \pi_x\}$.

Индексные множества

Определение.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **$\varkappa$-индексным**, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Обозначение.

$K = \{x \mid \varkappa_x(x)\downarrow\} = \{x \mid x \in \pi_x\}$.
$K_0 = \{c(x,y) \mid \varkappa_x(y)\downarrow\} = \{c(x,y) \mid y \in \pi_x\}$.

Теорема С29

Если A — нетривиальное индексное множество, т.е. $A \neq \varnothing, \omega$, то $K \leqslant_1 A$ или $K \leqslant_1 \overline{A}$.

Индексные множества

Определение.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **$\varkappa$-индексным**, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Обозначение.

$K = \{x \mid \varkappa_x(x)\downarrow\} = \{x \mid x \in \pi_x\}$.

$K_0 = \{c(x,y) \mid \varkappa_x(y)\downarrow\} = \{c(x,y) \mid y \in \pi_x\}$.

Теорема С29

Если A — нетривиальное индексное множество, т.е. $A \neq \varnothing, \omega$, то $K \leqslant_1 A$ или $K \leqslant_1 \overline{A}$.

Доказательство.

Выберем e_0 такое, что $\varkappa_{e_0} = \lambda y.\uparrow$. Докажем, что если $e_0 \in \overline{A}$, то $K \leqslant_1 A$ (если $e_0 \in A$, то $K \leqslant_1 \overline{A}$ доказывается аналогично). Так как $A \neq \varnothing$, найдётся $e_1 \in A$.

Индексные множества

Доказательство (продолжение)

Далее, $\varkappa_{e_1} \neq \varkappa_{e_0}$, поскольку A является индексным. По $s - m - n$-теореме C25, существует инъективная вф f такая, что

$$\varkappa_{f(x)}(y) = \begin{cases} \varkappa_{e_1}(y), & \text{если } x \in K; \\ \uparrow, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Теперь

$x \in K \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_1} \Rightarrow f(x) \in A$,

$x \in \overline{K} \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_0} \Rightarrow f(x) \in \overline{A}$.

Последняя импликация в каждой строке выполняется, поскольку A — индексное множество. □

Индексные множества

Доказательство (продолжение)

Далее, $\varkappa_{e_1} \neq \varkappa_{e_0}$, поскольку A является индексным. По $s-m-n$-теореме C25, существует инъективная вф f такая, что

$$\varkappa_{f(x)}(y) = \begin{cases} \varkappa_{e_1}(y), & \text{если } x \in K; \\ \uparrow, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Теперь

$x \in K \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_1} \Rightarrow f(x) \in A$,

$x \in \overline{K} \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_0} \Rightarrow f(x) \in \overline{A}$.

Последняя импликация в каждой строке выполняется, поскольку A — индексное множество. □

Теорема C30 Райса

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс частично вычислимых функций. Тогда множество $\{n : \varkappa_n \in \mathcal{C}\}$ вычислимо, если и только если либо $\mathcal{C} = \varnothing$, либо $\mathcal{C}$ — класс всех частично вычислимых функций.

Индексные множества

Примеры.

1. $K_1 = \{x : \pi_x \neq \varnothing\}$;
2. $\mathrm{Fin} = \{x : \pi_x$ конечно$\}$;
3. $\mathrm{Inf} = \omega - \mathrm{Fin} = \{x : \pi_x$ бесконечно$\}$;
4. $\mathrm{Tot} = \{x : \varkappa_x$ вычислима$\}$;
5. $\mathrm{Con} = \{x : \varkappa_x$ вычислима и постоянна$\}$;
6. $\mathrm{Cof} = \{x : \pi_x$ коконечно$\}$;
7. $\mathrm{Comp} = \{x : \pi_x$ вычислимо$\}$;
8. $\mathrm{Ext} = \{x : \varkappa_x$ имеет тотальное продолжение$\}$.

Индексные множества

Примеры.

1. $K_1 = \{x : \pi_x \neq \varnothing\}$;
2. $\mathrm{Fin} = \{x : \pi_x$ конечно$\}$;
3. $\mathrm{Inf} = \omega - \mathrm{Fin} = \{x : \pi_x$ бесконечно$\}$;
4. $\mathrm{Tot} = \{x : \varkappa_x$ вычислима$\}$;
5. $\mathrm{Con} = \{x : \varkappa_x$ вычислима и постоянна$\}$;
6. $\mathrm{Cof} = \{x : \pi_x$ коконечно$\}$;
7. $\mathrm{Comp} = \{x : \pi_x$ вычислимо$\}$;
8. $\mathrm{Ext} = \{x : \varkappa_x$ имеет тотальное продолжение$\}$.

Пример.

$K \leqslant_1 \mathrm{Fin}$ и $K \leqslant_1 \overline{\mathrm{Fin}}$. Действительно, если $\varkappa_{e_0} = \lambda y. \uparrow$, то $e_0 \in \mathrm{Fin}$, поэтому $K \leqslant_1 \overline{\mathrm{Fin}}$ (см. доказательство теоремы C29).

Индексные множества

Пример (продолжение)

Докажем теперь, что $K \leqslant_1 \mathrm{Fin}$. Пусть K_s — сильная аппроксимация множества K. Определим функцию $\psi(x, y)$ так:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin K_y; \\ \uparrow, & \text{если } x \in K_y. \end{cases}$$

По $s - m - n$-теореме C29, существует инъективная вф f такая, что $\varkappa_{f(x)} = \lambda y.\psi(x, y)$.

Теперь

$x \notin K \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \lambda y.0 \Rightarrow \pi_{f(x)} = \omega \Rightarrow f(x) \in \overline{\mathrm{Fin}}$.

Пусть $x \in K$; тогда находим наименьшее y_x такое, что $x \in K_{y_x}$. В этом случае функция $\psi(x, y)$ определяется как

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < y_x; \\ \uparrow, & \text{если } y \geqslant y_x. \end{cases}$$

Далее,

$x \in K \Rightarrow \pi_{f(x)} = \delta\varkappa_{f(x)} = \{z : z < y_x\} \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Fin}$.

Индексы и равномерность

Определение.

1. Говорят, что e является **слабым, вычислимо перечислимым (в.п.)** или **Σ_1-индексом** вычислимо перечислимого множества A, если $A = \pi_e$.
2. Говорят, что $c(e, i)$ является **вычислимым (в.)** или **Δ_1-индексом** вычислимого множества A, если $A = \pi_e$ и $\overline{A} = \pi_i$.
3. Говорят, что e является **характеристическим** или **Δ_0-индексом** вычислимого множества A, если $\chi_A = \varkappa_e$.
4. Говорят, что e является **сильным** или **γ-индексом** конечного множества A, если $A = \gamma_e$.

Индексы и равномерность

Определение.

1. Говорят, что e является **слабым, вычислимо перечислимым (в.п.)** или Σ_1**-индексом** вычислимо перечислимого множества A, если $A = \pi_e$.
2. Говорят, что $c(e, i)$ является **вычислимым (в.)** или Δ_1**-индексом** вычислимого множества A, если $A = \pi_e$ и $\overline{A} = \pi_i$.
3. Говорят, что e является **характеристическим** или Δ_0**-индексом** вычислимого множества A, если $\chi_A = \varkappa_e$.
4. Говорят, что e является **сильным** или γ**-индексом** конечного множества A, если $A = \gamma_e$.

Теперь перейдём к обсуждению проблемы существования эффективного перехода от одних индексов к другим.

Индексы и равномерность

Определение.

1. Говорят, что e является **слабым, вычислимо перечислимым (в.п.)** или **Σ_1-индексом** вычислимо перечислимого множества A, если $A = \pi_e$.
2. Говорят, что $c(e, i)$ является **вычислимым (в.)** или **Δ_1-индексом** вычислимого множества A, если $A = \pi_e$ и $\overline{A} = \pi_i$.
3. Говорят, что e является **характеристическим** или **Δ_0-индексом** вычислимого множества A, если $\chi_A = \varkappa_e$.
4. Говорят, что e является **сильным** или **γ-индексом** конечного множества A, если $A = \gamma_e$.

Теперь перейдём к обсуждению проблемы существования эффективного перехода от одних индексов к другим.

Предложение С27

$$\gamma \overset{(1)}{\Longrightarrow} \Delta_0 \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}} \Delta_1 \overset{(4)}{\Longrightarrow} \Sigma_1.$$

Индексы и равномерность

Доказательство.

(1) Так как $\gamma(n)$ — сильно вычислимая последовательность, множество $B = \{\langle n, m\rangle | m \in \gamma(n)\}$ вычислимо. Поэтому существует m_0 такое, что $[\varkappa^2_{m_0}](x, y) = \chi_B(x, y)$. По $s - m - n$-теореме найдётся инъективная вф f такая, что $\varkappa_{f(e)}(y) = \chi_B(e, y)$. Тем самым, если e — сильный индекс конечного множества A, то $f(e)$ — Δ_0-индекс данного множества.

Индексы и равномерность

Доказательство.

(1) Так как $\gamma(n)$ — сильно вычислимая последовательность, множество $B = \{\langle n, m\rangle | m \in \gamma(n)\}$ вычислимо. Поэтому существует m_0 такое, что $[\varkappa^2_{m_0}](x, y) = \chi_B(x, y)$. По $s - m - n$-теореме найдётся инъективная вф f такая, что $\varkappa_{f(e)}(y) = \chi_B(e, y)$. Тем самым, если e — сильный индекс конечного множества A, то $f(e)$ — Δ_0-индекс данного множества.
(2) Определим две частично вычислимые функции $\psi_0(e, x) = \mu y[\varkappa_e(x) = 0]$ и $\psi_1(e, x) = \mu y[\varkappa_e(x) = 1]$. По $s - m - n$-теореме, найдутся инъективные вф g_0 и g_1 такие, что $\varkappa_{g_i(e)}(x) = \psi_i(e, x)$, $i = 0, 1$. Далее, если e — Δ_0-индекс вычислимого множества A, то $\pi(g_0(e)) = \delta\varkappa_{g_0(e)} = A$ и $\pi(g_1(e)) = \delta\varkappa_{g_1(e)} = \overline{A}$, а следовательно, $f(e) \leftrightharpoons c(g_0(e), g_1(e))$ — его Δ_1-индекс.

Индексы и равномерность

Доказательство.

(1) Так как $\gamma(n)$ — сильно вычислимая последовательность, множество $B = \{\langle n, m\rangle | m \in \gamma(n)\}$ вычислимо. Поэтому существует m_0 такое, что $[\varkappa^2_{m_0}](x, y) = \chi_B(x, y)$. По $s - m - n$-теореме найдётся инъективная вф f такая, что $\varkappa_{f(e)}(y) = \chi_B(e, y)$. Тем самым, если e — сильный индекс конечного множества A, то $f(e)$ — Δ_0-индекс данного множества.
(2) Определим две частично вычислимые функции $\psi_0(e, x) = \mu y[\varkappa_e(x) = 0]$ и $\psi_1(e, x) = \mu y[\varkappa_e(x) = 1]$. По $s - m - n$-теореме, найдутся инъективные вф g_0 и g_1 такие, что $\varkappa_{g_i(e)}(x) = \psi_i(e, x)$, $i = 0, 1$. Далее, если e — Δ_0-индекс вычислимого множества A, то $\pi(g_0(e)) = \delta\varkappa_{g_0(e)} = A$ и $\pi(g_1(e)) = \delta\varkappa_{g_1(e)} = \overline{A}$, а следовательно, $f(e) \leftrightharpoons c(g_0(e), g_1(e))$ — его Δ_1-индекс.
(4) Пусть $c(e, i)$ — Δ_1-индекс вычислимого множества A, тогда $e = lc(e, i)$ — Σ_1-индекс множества A.

Индексы и равномерность

Доказательство (продолжение)

(3) Пусть $\{W_{n,s}\}_{n,s\in\omega}$ — двойная сильно вычислимая последовательность такая, что $\{W_{n_0,s}\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация множества $\pi(n_0)$, $n_0\in\omega$; положим $B \leftrightharpoons \{\langle n,s,k\rangle | k\in W_{n,s}\}$. Определим чвф $\psi(n,m,x) \leftrightharpoons \mu s[(x\in W_{n,s})\vee(x\in W_{m,s})]$ и $\varphi(n,m,x) \leftrightharpoons \chi_B(n,\psi(n,m,x),x)$. По $s-m-n$-теореме, существует вф f такая, что $\varkappa_{f(n,m)}(x)=\varphi(n,m,x)$. Далее, пусть $c(e,i)$ — Δ_1-индекс вычислимого множества A; покажем, что $f(e,i)$ — Δ_0-индекс данного множества. Действительно, функция $\lambda x.\psi(e,i,x)$ вычислима и, следовательно, вф $\varphi(e,i,x)=\chi_B(e,\psi(e,i,x),x)$ является характеристической функцией множества A. Таким образом, $f(e,i)$ — Δ_0-индекс множества A. □

Индексы и равномерность

Доказательство (продолжение)

(3) Пусть $\{W_{n,s}\}_{n,s\in\omega}$ — двойная сильно вычислимая последовательность такая, что $\{W_{n_0,s}\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация множества $\pi(n_0)$, $n_0 \in \omega$; положим $B \leftrightharpoons \{\langle n, s, k\rangle | k \in W_{n,s}\}$. Определим чвф $\psi(n, m, x) \leftrightharpoons \mu s[(x \in W_{n,s}) \vee (x \in W_{m,s})]$ и $\varphi(n, m, x) \leftrightharpoons \chi_B(n, \psi(n, m, x), x)$. По $s-m-n$-теореме, существует вф f такая, что $\varkappa_{f(n,m)}(x) = \varphi(n, m, x)$. Далее, пусть $c(e, i)$ — Δ_1-индекс вычислимого множества A; покажем, что $f(e, i)$ — Δ_0-индекс данного множества. Действительно, функция $\lambda x.\psi(e, i, x)$ вычислима и, следовательно, вф $\varphi(e, i, x) = \chi_B(e, \psi(e, i, x), x)$ является характеристической функцией множества A. Таким образом, $f(e, i)$ — Δ_0-индекс множества A. $\square$

Предложение С28

Не существует частично вычислимой функции $\psi(x)$ такой, что если A — конечное множество и $\chi_A = \varkappa_e$, то $\psi(e)\downarrow$ и $\gamma(\psi(e)) = A$.

Индексы и равномерность

Доказательство.

Допустим, что такая функция $\psi(x)$ существует. Пусть K — множество, определённое выше и пусть $\{K_s\}_{s\in\omega}$ — сильная аппроксимация множества K. Так как $\{K_s\}_{s\in\omega}$ — сильно вычислимая последовательность, множество $\{\langle x, s\rangle \mid x \in K_s\}$ вычислимо.
Определим нумерацию ν следующим образом:

$$\nu(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \{s_0\}, & \text{если } x \in K \wedge s_0 = \mu s[x \in K_s]; \\ \varnothing, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Тогда $y \in \nu(x) \Leftrightarrow (x \in K_y) \wedge (x \notin K_{y \dot{-} 1})$; в частности, Γ^*_ν — вм. Далее, пусть m_0 таково, что $\varkappa^2_{m_0}(x, y) = \chi_{\Gamma^*_\nu}(x, y)$. По $s - m - n$-теореме, существует вф $f(x)$, для которой имеет место $\varkappa_{f(x)}(y) = \varkappa^2_{m_0}(x, y)$.
Теперь

$x \in K \Rightarrow [\gamma(\psi(f(x))) = \{\mu s[x \in K_s]\}] \Rightarrow \psi(f(x)) > 0 \Rightarrow \mathrm{sg}(\psi(f(x))) = 1$,
$x \notin K \Rightarrow [\gamma(\psi(f(x))) = \varnothing] \Rightarrow \mathrm{sg}(\psi(f(x))) = \psi(f(x)) = 0$.

Справедливость последних импликаций противоречит тому, что K не является вм. $\square$

Индексы и равномерность

Предложение С29

Не существует частично вычислимой функции $\psi(x)$ такой, что если $A = \pi_e$ — вычислимое множество, то $\psi(e)\downarrow$ и $\pi_{\psi(e)} = \overline{A}$.

Индексы и равномерность

Предложение С29

Не существует частично вычислимой функции $\psi(x)$ такой, что если $A = \pi_e$ — вычислимое множество, то $\psi(e)\downarrow$ и $\pi_{\psi(e)} = \overline{A}$.

Доказательство.

Определим сначала чвф $\varphi(x, y) = 0(K^2(x, x))$. По $s - m - n$-теореме, существует вф f такая, что $\varkappa_{f(x)}(y) = \varphi(x, y)$. Тогда

$$\pi_{f(x)} = \begin{cases} \omega, & \text{если } x \in K; \\ \varnothing, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Допустим теперь, что функция $\psi(x)$ из условия существует. В этом случае имеем

$x \in K \Rightarrow \pi_{f(x)} = \omega \Rightarrow \pi_{\psi(f(x))} = \varnothing$,

$x \notin K \Rightarrow \pi_{f(x)} = \varnothing \Rightarrow \pi_{\psi(f(x))} = \omega$.

Тем самым, $x \in \overline{K} \Leftrightarrow \pi_{\psi(f(x))} \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y[y \in \pi_{\psi(f(x))}]$, поэтому $\overline{K}$ в.п., по леммам С24 и С26, противоречие. $\square$

Индексы и равномерность

Предложение C30

Существуют инъективные вычислимые функции $f_0(x, y)$ и $f_1(x, y)$ такие, что справедливо следующее:

$i)$ $\pi_{f_0(x,y)} = \pi_x \cup \pi_y$;

$ii)$ $\pi_{f_1(x,y)} = \pi_x \cap \pi_y$.

Индексы и равномерность

Предложение C30

Существуют инъективные вычислимые функции $f_0(x, y)$ и $f_1(x, y)$ такие, что справедливо следующее:

$$\imath)\quad \pi_{f_0(x,y)} = \pi_x \cup \pi_y;$$

$$\imath\imath)\quad \pi_{f_1(x,y)} = \pi_x \cap \pi_y.$$

Доказательство.

$\imath$) Пусть $Q_0(x, z, t)$ и $Q_1(y, z, t)$ — вычислимые предикаты такие, что $z \in \pi_x \Leftrightarrow \exists t Q_0(x, z, t)$ и $z \in \pi_y \Leftrightarrow \exists t Q_1(y, z, t)$. Тогда $z \in \pi_x \cup \pi_y \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists t(Q_0(x, z, t) \vee Q_1(y, z, t))$ и, следовательно, $\pi_x \cup \pi_y = = \delta\lambda z.\psi(x, y, z)$, где $\psi(x, y, z) = \mu t(Q_0(x, z, t) \vee Q_1(y, z, t))$. По s-m-n-теореме, существует инъективная вф $f_0(x, y)$ такая, что $\varkappa_{f_0(x,y)}(z) = \psi(x, y, z)$. В конечном итоге, $\pi_x \cup \pi_y = \delta\varkappa_{f_0(x,y)} = \pi_{f_0(x,y)}$.
$\imath\imath$) Определим функцию $\psi(x, y, z) \leftrightharpoons \varkappa_x(z) + \varkappa_y(z)$. По s-m-n-теореме, найдётся инъективная вф $f_1(x, y)$ такая, что $\varkappa_{f_1(x,y)}(z) = \psi(x, y, z)$. Далее, $\pi_{f_1(x,y)} = \delta\varkappa_{f_1(x,y)} = \delta(\lambda z.\psi(x, y, z)) = \delta\varkappa_x \cap \delta\varkappa_y = \pi_x \cap \pi_y$. $\square$

Индексы и равномерность

Следствие C27

Класс вычислимых множеств замкнут относительно операций объединения, пересечения и дополнения. Более того, все операции, приведённые выше, равномерны относительно Δ_1-индексов.

Индексы и равномерность

Следствие С27

Класс вычислимых множеств замкнут относительно операций объединения, пересечения и дополнения. Более того, все операции, приведённые выше, равномерны относительно Δ_1-индексов.

Доказательство.

Пусть f_0 и f_1 — вычислимые функции из предложения С30. Пусть также e_0 и e_1 — Δ_1-индексы вычислимых множеств A_0 и A_1.

- $\cup$ Тогда $c(f_0(l(e_0), l(e_1)), f_1(r(e_0), r(e_1)))$ — Δ_1-индекс вм $A_0 \cup A_1$.
- $\cap$ Тогда $c(f_1(l(e_0), l(e_1)), f_0(r(e_0), r(e_1)))$ — Δ_1-индекс вм $A_0 \cap A_1$.
- $\overline{\bullet}$ Тогда $c(r(e_0), l(e_0))$ — Δ_1-индекс вм $\overline{A_0}$.

$\square$

Неподвижная точка и впм

Теорема C31

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+1}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция h такая, что $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow x \in \pi(h(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Неподвижная точка и впм

Теорема C31

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+1}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция h такая, что $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow x \in \pi(h(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Доказательство.

Так как предикат P вычислимо перечислим, имеем $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow [\varkappa^{m+1}(a)](y_1, y_2, \ldots, y_m, x) \downarrow$ для подходящего $a \in \omega$. По $s - m - n$-теореме, существует инъективная вф $h(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ такая, что выполняется $[\varkappa^{m+1}(a)](y_1, y_2, \ldots, y_m, x) = \varkappa_{h(y_1, y_2, \ldots, y_m)}(x)$. Далее, $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow \langle y_1, y_2, \ldots, y_m, x\rangle \in \delta\varkappa_a^{m+1} = \pi_a^{m+1} \Leftrightarrow x \in \delta\varkappa_{h(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \pi_{h(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$. □

Неподвижная точка и впм

Теорема С32

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+2}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция g такая, что
$P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \Leftrightarrow x \in \pi(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Неподвижная точка и впм

Теорема С32

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+2}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция g такая, что
$P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \Leftrightarrow x \in \pi(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Доказательство.

По теореме С31, имеем
$P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, z) \Leftrightarrow x \in \pi(h(y_1, y_2, \ldots, y_m, z))$ для подходящей инъективной вф h. По теореме С26,
$\varkappa_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,g(y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x) = \varkappa_{g(y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x)$ для подходящей инъективной вф g. Далее, имеет место
$P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \Leftrightarrow x \in$
$\pi(h(y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m))) =$
$\delta\varkappa(h(y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m))) = \delta\varkappa(g(y_1, y_2, \ldots, y_m)) =$
$\pi(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$. $\square$

Неподвижная точка и впм

Теорема С33

Для любой $m+1$-арной частично вычислимой функции h найдётся m-арная инъективная вычислимая функция g такая, что $\pi(h(y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m))) = \pi(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.
В частности, при $m = 0$ имеем следующее: для любой унарной частично вычислимой функции h найдётся число n_0 такое, что $\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$.

Неподвижная точка и впм

Теорема С33

Для любой $m+1$-арной частично вычислимой функции h найдётся m-арная инъективная вычислимая функция g такая, что
$\pi(h(y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m))) = \pi(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.
В частности, при $m = 0$ имеем следующее: для любой унарной частично вычислимой функции h найдётся число n_0 такое, что
$\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$.

Определение.

Множество $A \subseteq \omega$ называется π-**индексным**, если
$[(x \in A) \wedge (\pi_x = \pi_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Теорема С34 Райса

Пусть $\mathcal{C}$ — класс вычислимо перечислимых множеств. Тогда множество $I = \{n : \pi_n \in \mathcal{C}\}$ вычислимо, если и только если $\mathcal{C} \in \{\varnothing, \mathrm{CEP}\}$.

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

Допустим противное, т.е. I вычислимо и $I \neq \varnothing, \omega$. Пусть

$$\nu(n) \leftrightharpoons \begin{cases} \pi_a, & \text{если } n \in I; \\ \pi_b, & \text{если } n \notin I; \end{cases}$$

где $a \in \omega \setminus I$ и $b \in I$. Поскольку ν — вычислимая нумерация, а π — главная вычислимая нумерация семейства CEP, существует вф h такая, что $\nu(x) = \pi(h(x))$ для всех $x \in \omega$. По теореме о неподвижной точке (теорема C33), найдётся $n_0 \in \omega$, для которого $\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$. Далее, $n_0 \in I \Leftrightarrow \pi_{h(n_0)} \notin \mathcal{C} \Leftrightarrow \pi_{n_0} \notin \mathcal{C} \Leftrightarrow n_0 \notin I$, противоречие. $\square$

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

Допустим противное, т.е. I вычислимо и $I \neq \varnothing, \omega$. Пусть
$$\nu(n) \leftrightharpoons \begin{cases} \pi_a, & \text{если } n \in I; \\ \pi_b, & \text{если } n \notin I; \end{cases}$$
где $a \in \omega \setminus I$ и $b \in I$. Поскольку ν — вычислимая нумерация, а π — главная вычислимая нумерация семейства CEP, существует вф h такая, что $\nu(x) = \pi(h(x))$ для всех $x \in \omega$. По теореме о неподвижной точке (теорема C33), найдётся $n_0 \in \omega$, для которого $\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$. Далее, $n_0 \in I \Leftrightarrow \pi_{h(n_0)} \notin \mathcal{C} \Leftrightarrow \pi_{n_0} \notin \mathcal{C} \Leftrightarrow n_0 \notin I$, противоречие. □

Лемма C40

Пусть h — частично вычислимая функция. Тогда

1. существует вычислимая фунция g_0 такая, что $\pi(g_0(x)) = h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$;
2. существует вычислимая фунция g_1 такая, что $\pi(g_1(x)) = h(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$.

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

1) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \leftrightharpoons h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y\rangle \in \Gamma^*_\nu (\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow [h(y) \in \pi(x)]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_0(x))$ для подходящей вф g_0, поскольку вычислимая нумерация π главная.

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

1) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \leftrightharpoons h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y\rangle \in \Gamma^*_\nu (\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow [h(y) \in \pi(x)]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_0(x))$ для подходящей вф g_0, поскольку вычислимая нумерация π главная.

2) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \leftrightharpoons h(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y\rangle \in \Gamma^*_\nu (\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow \exists z[(y = h(z)) \wedge (z \in \pi(x))]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_1(x))$ для подходящей вф g_1, поскольку вычислимая нумерация π главная. □

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

1) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \leftrightharpoons h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y\rangle \in \Gamma^*_\nu (\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow [h(y) \in \pi(x)]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_0(x))$ для подходящей вф g_0, поскольку вычислимая нумерация π главная.

2) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \leftrightharpoons h(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y\rangle \in \Gamma^*_\nu (\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow \exists z[(y = h(z)) \wedge (z \in \pi(x))]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{CEP}$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_1(x))$ для подходящей вф g_1, поскольку вычислимая нумерация π главная. $\square$

Лемма C41

Существует вычислимая функция f такая, что $\gamma(x) = \pi(f(x))$ для всех $x \in \omega$.

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

Нумерация γ вычислима, поскольку $\Gamma_\gamma^* = \{\langle x, y\rangle : y \in \gamma(x)\}$ вп (даже в; см. предложение C13). Следовательно, $\nu(x) = \pi(f(x))$ для подходящей вф f, поскольку вычислимая нумерация π главная. $\square$

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

Нумерация γ вычислима, поскольку $\Gamma^*_\gamma = \{\langle x, y\rangle : y \in \gamma(x)\}$ вп (даже в; см. предложение С13). Следовательно, $\nu(x) = \pi(f(x))$ для подходящей вф f, поскольку вычислимая нумерация π главная. $\square$

Лемма С42

Для любых вычислимо перечислимого множества M и частично вычислимой функции f найдётся инъективная вычислимая функция g такая, что

$$\pi(g(x)) = \begin{cases} \{fg(x)\}, & \text{если } x \in M; \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Неподвижная точка и впм

Доказательство.

Нумерация γ вычислима, поскольку $\Gamma^*_\gamma = \{\langle x, y\rangle : y \in \gamma(x)\}$ вп (даже в; см. предложение С13). Следовательно, $\nu(x) = \pi(f(x))$ для подходящей вф f, поскольку вычислимая нумерация π главная. $\square$

Лемма С42

Для любых вычислимо перечислимого множества M и частично вычислимой функции f найдётся инъективная вычислимая функция g такая, что

$$\pi(g(x)) = \begin{cases} \{fg(x)\}, & \text{если } x \in M; \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть вп предикат $P \subseteq \omega^3$ определён так: $P(z, x, y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x \in M) \wedge (z = f(y))]$. По теореме С33 имеем $P(z, x, g(x)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [z \in \pi(g(x))] \Leftrightarrow [(x \in M) \wedge (z = fg(x))]$ для подходящей вф g. $\square$

Теорема Райса-Шапиро

Теорема C35

Индексное множество I семейства $\mathcal{A}$ вычислимо перечислимых множеств вычислимо перечислимо, если и только если существует вычислимо перечислимое множество A, для которого имеет место $\pi(x) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists y[(y \in A) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi(x))]$.

Теорема Райса-Шапиро

Теорема C35

Индексное множество I семейства $\mathcal{A}$ вычислимо перечислимых множеств вычислимо перечислимо, если и только если существует вычислимо перечислимое множество A, для которого имеет место $\pi(x) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists y[(y \in A) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi(x))]$.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для того, чтобы доказать, что I вп, достаточно доказать, что $\{\langle x, y\rangle : \gamma(y) \subseteq \pi(x)\}$ является вп. Действительно, $\gamma(y) \subseteq \pi(x) \Leftrightarrow \forall i[(i \in \gamma(y)) \rightarrow (i \in \pi(x))] \Leftrightarrow \forall i < y[(i \in \gamma(y)) \rightarrow (i \in \pi(x))]$.

($\Rightarrow$) Пусть индексное множество I семейства $\mathcal{A}$ вычислимо перечислимо.

Теорема Райса-Шапиро

Теорема C35

Индексное множество I семейства $\mathcal{A}$ вычислимо перечислимых множеств вычислимо перечислимо, если и только если существует вычислимо перечислимое множество A, для которого имеет место $\pi(x) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists y[(y \in A) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi(x))]$.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Для того, чтобы доказать, что I вп, достаточно доказать, что $\{\langle x, y\rangle : \gamma(y) \subseteq \pi(x)\}$ является вп. Действительно, $\gamma(y) \subseteq \pi(x) \Leftrightarrow \forall i[(i \in \gamma(y)) \rightarrow (i \in \pi(x))] \Leftrightarrow \forall i < y[(i \in \gamma(y)) \rightarrow (i \in \pi(x))]$.

($\Rightarrow$) Пусть индексное множество I семейства $\mathcal{A}$ вычислимо перечислимо.

Лемма C35A

Если B вычислимо перечислимо и $A \subseteq B$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$, то $B \in \mathcal{A}$.

Теорема Райса-Шапиро

Доказательство леммы C35A

Определим нумерацию ν так:

$$\nu(x) \leftrightharpoons \begin{cases} A, & \text{если } x \notin I; \\ B, & \text{если } x \in I. \end{cases}$$

Так как $\Gamma^*_\nu(x, y) \Leftrightarrow [(y \in A) \vee ((x \in I) \wedge (y \in B))]$, предикат Γ^*_ν вп, поэтому ν — вычислимая нумерация. Следовательно, существует вф g такая, что $\nu(x) = \pi(g(x))$ для всех $x \in \omega$, поскольку π — главная нумерация.

По теореме C33 о неподвижной точке для впм найдётся $n_0 \in \omega$ такое, что $\pi(g(n_0)) = \pi n_0$. Так как

$n_0 \notin I \Rightarrow \pi(g(n_0)) \in \mathcal{A} \Rightarrow g(n_0) \in I \Rightarrow n_0 \in I$,

заключаем, что $n_0 \in I$. Значит, и $g(n_0) \in I$. Но $n_0 \in I$ влечёт $\pi(g(n_0)) = B = \pi n_0$. Таким образом, $B \in \mathcal{A}$. $\square$

Теорема Райса-Шапиро

Доказательство леммы С35А

Определим нумерацию ν так:

$$\nu(x) \leftleftharpoons \begin{cases} A, & \text{если } x \notin I; \\ B, & \text{если } x \in I. \end{cases}$$

Так как $\Gamma^*_\nu(x,y) \Leftrightarrow [(y \in A) \vee ((x \in I) \wedge (y \in B))]$, предикат Γ^*_ν вп, поэтому ν — вычислимая нумерация. Следовательно, существует вф g такая, что $\nu(x) = \pi(g(x))$ для всех $x \in \omega$, поскольку π — главная нумерация.

По теореме С33 о неподвижной точке для впм найдётся $n_0 \in \omega$ такое, что $\pi(g(n_0)) = \pi n_0$. Так как

$n_0 \notin I \Rightarrow \pi(g(n_0)) \in \mathcal{A} \Rightarrow g(n_0) \in I \Rightarrow n_0 \in I$,

заключаем, что $n_0 \in I$. Значит, и $g(n_0) \in I$. Но $n_0 \in I$ влечёт $\pi(g(n_0)) = B = \pi n_0$. Таким образом, $B \in \mathcal{A}$. □

Лемма С35В

Если $A \in \mathcal{A}$, то и некоторое конечное подмножество A также принадлежит $\mathcal{A}$.

Теорема Райса-Шапиро

Доказательство леммы С35В

Пусть $\{I_t\}_{t\in\omega}$ и $\{A_t\}_{t\in\omega}$ — сильные аппроксимации множеств I и A соответственно. Определим нумерацию ν так:

$$\nu(x) \leftrightharpoons \begin{cases} A, & \text{если } x \notin I; \\ A_{t_x}, & \text{если } x \in I; \end{cases}$$

где t_x — наименьший шаг в перечислении I такой, что $x \in I_t$. В частности, A_{t_x} есть конечное множество элементов A, перечисленных в A к шагу t_x.

Далее, $\Gamma^*_\nu(x,y) \Leftrightarrow \exists t[(x \notin I_t) \wedge (y \in A_{t+1})]$ и предикат Γ^*_ν вп, поэтому ν — вычислимая нумерация. Следовательно, существует вф g такая, что $\nu(x) = \pi(g(x))$ для всех $x \in \omega$, поскольку π — главная нумерация. По теореме С33 о неподвижной точке для впм найдётся $a \in \omega$ такое, что $\pi(g(a)) = \pi a$. Так как

$a \notin I \Rightarrow \pi(g(a)) \in \mathcal{A} \Rightarrow g(a) \in I \Rightarrow a \in I$,

заключаем, что $a \in I$. Значит, и $g(a) \in I$. Но $a \in I$ влечёт $\pi(g(a)) = A_{t_a} = \pi a$. Таким образом, $A_t \in \mathcal{A}$ для подходящего $t \in \omega$. $\square$

Теорема Райса-Шапиро

Доказательство теоремы C35 (продолжение)

Пусть вф h такова, что $\gamma(x) = \pi(h(x))$ для всех $x \in \omega$ (см. лемму C42); положим $D \leftrightharpoons h^{-1}(I)$. Множество D вп как прообраз впм относительно чвф h (см. лемму C26). Покажем, что семейство $\mathcal{B} \leftrightharpoons \{\pi_x : \exists y[(y \in D) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi_x)]\}$ совпадает с $\mathcal{A}$.

($\subseteq$) Имеем $\pi_x \in \mathcal{B} \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \exists y[(y \in D) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi_x)] \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} h(y_0) \in I \stackrel{(3)}{\Longrightarrow} \gamma(y_0) = \pi(h(y_0)) \in \mathcal{A}$ (здесь (1) следует из определения $\mathcal{B}$; (2) y_0 — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $[(y_0 \in D) \wedge (\gamma(y_0) \subseteq \pi_x)]$; (3) следует из определения D). Далее, $\gamma(y_0) \subseteq \pi_x$, поэтому $\pi_x \in \mathcal{B}$, по лемме C34A. Значит, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

($\supseteq$) Пусть теперь $\pi_x \in \mathcal{A}$; по лемме C34B некоторое конечное подмножество π_x, скажем $\gamma(n)$, принадлежит $\mathcal{A}$. Следовательно, $h(n) \in I$ и $n \in D$. Так как $\gamma(n) \subseteq \pi_x$, имеем $\pi_x \in \mathcal{B}$. Таким образом, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. □

Снова полные множества

Теорема C36

Множества K, K_0 и K_1 являются 1-полными.

Снова полные множества

Теорема C36

Множества K, K_0 и K_1 являются 1-полными.

Доказательство.

Каждое из этих множеств вп. Более того, множество K_0 является 1-полным (см. пример C1). Пусть W — произвольное вп множество. Определим нумерацию ν так:

$$\nu(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \omega, & \text{если } x \in W; \\ \varnothing & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $\Gamma^*_\nu(x,y) \Leftrightarrow x \in W$, нумерация ν вычислима, поэтому существует инъективная вф f такая, что $\nu(x) = \pi(f(x))$ для всех $x \in \omega$ (последнее вытекает из того, что π — главная вычислимая нумерация).

Теперь, если $x \in W$, то $\pi(f(x)) = \omega$ и $f(x) \in K \cap K_1$; если же $x \in \overline{W}$, то $\pi(f(x)) = \varnothing$ и $f(x) \notin K \cup K_1$. Таким образом, $W \leqslant_1 K$ и $W \leqslant_1 K_1$ посредством функции f. $\square$

Продуктивные множества

Определение.

Множество P называется **продуктивным**, если существует такая частично вычислимая функция $\psi(x)$, называемая **продуктивной функцией** для P, что
$\forall x[(\pi_x \subseteq P) \Rightarrow (\psi(x)\downarrow \wedge(\psi(x) \in P - \pi_x))]$.

Продуктивные множества

Определение.

Множество P называется **продуктивным**, если существует такая частично вычислимая функция $\psi(x)$, называемая **продуктивной функцией** для P, что
$\forall x[(\pi_x \subseteq P) \Rightarrow (\psi(x)\downarrow \wedge (\psi(x) \in P - \pi_x))]$.

Определение.

Вычислимо перечислимое множество C называется **творческим**, если $\overline{C}$ продуктивно.

Продуктивные множества

Определение.

Множество P называется **продуктивным**, если существует такая частично вычислимая функция $\psi(x)$, называемая **продуктивной функцией** для P, что
$\forall x[(\pi_x \subseteq P) \Rightarrow (\psi(x)\downarrow \wedge (\psi(x) \in P - \pi_x))]$.

Определение.

Вычислимо перечислимое множество C называется **творческим**, если $\overline{C}$ продуктивно.

Пример.

Множество K творческое, поскольку $\overline{K}$ — продуктивное множество с тождественной продуктивной функцией $\psi(x) = x$:
$x \in \overline{K} \Rightarrow x \notin \pi_x \Rightarrow x \in \overline{K} \wedge x \notin \pi_x$.

Продуктивные множества

Теорема C37

Для любого продуктивного множества P существует инъективная вычислимая функция p, продуктивная для P.

Продуктивные множества

Теорема C37

Для любого продуктивного множества P существует инъективная вычислимая функция p, продуктивная для P.

Доказательство.

Пусть множество P продуктивно с продуктивной функцией ψ. Сначала определим вф q, продуктивную для P. По предложению C25, существует вф g такая, что

$$\pi(g(x)) = \begin{cases} \pi(x), & \text{если } \psi(x)\downarrow; \\ \varnothing, & \text{если } \psi(x)\uparrow. \end{cases}$$

В качестве функции $q(x)$ возьмём чвф, униформизующую вп предикат $\Gamma_\psi \cup \Gamma_{\psi\circ g}$. Далее, если $\psi(x)\downarrow$, то и $q(x)\downarrow$; если же $\psi(x)\uparrow$, то $\pi(g(x)) = \varnothing \subseteq P$ и, следовательно, $\psi(g(x))\downarrow \Rightarrow q(x)\downarrow$. Тем самым, $q(x)$ всюду определена. Имеем

$\pi_x \subseteq P \Rightarrow \psi(x)\downarrow \wedge [\pi(x) = \pi(g(x))] \Rightarrow \{\psi(x), \psi(g(x))\} \subseteq P - \pi(x) \Rightarrow q(x) \in P - \pi(x)$.

Продуктивные множества

Доказательство (продолжение)

Теперь преобразуем продуктивную функцию q в инъективную вф p, продуктивную для P. По предложению C30(1), возьмём инъективную вф h так, чтобы $\pi(h(x)) = \pi_x \cup \{q(x)\}$. Заметим, что справедливо

$$\pi_x \subseteq P \Longrightarrow \pi(h(x)) \subseteq P \wedge (\pi(x) \subsetneq \pi(h(x))). \qquad (*)$$

Определим вспомогательные функции $F(x,y)$ и $G(x,y,z)$ так:

$$\left[\begin{array}{ll} F(x,0) \leftrightharpoons & x, \\ F(x,y+1) \leftrightharpoons & hF(x,y); \end{array}\right.$$

$$G(x,y) \leftrightharpoons \mu t[\exists u < t(F(x,u) = F(x,t)) \vee (F(x,t) > y)].$$

Перейдём теперь к заданию функции $p(x)$ так:

$$\left[\begin{array}{l} p(0) \leftrightharpoons q(0), \\ p(x+1) \leftrightharpoons \begin{cases} qF(s(x), G(s(x), p(x))), \\ \text{если } qF(s(x), G(s(x), p(x))) > p(x); \\ s(p(x)), \ \text{иначе}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Докажем, что строго возрастающая вф $p(x)$ продуктивна для P. Действительно, $\pi_0 \subseteq P \Rightarrow p(0) = q(0) \in P - \pi_0$.

Продуктивные множества

Доказательство (продолжение)

Далее, пусть $\pi_{x+1} \subseteq P$; тогда не может выполняться $qF(s(x), G(s(x), p(x))) \leqslant p(x)$, поскольку в противном случае $F(s(x), G(s(x), p(x))) = F(s(x), u)$ для некоторого $u < G(s(x), p(x))$; противоречие с $(*)$. Следовательно, $qF(s(x), G(s(x), p(x))) > p(x)$ и $p(x+1) = qF(x+1, G(x+1, p(x))) \in P - \pi(x)$, по $(*)$. $\square$

Продуктивные множества

Доказательство (продолжение)

Далее, пусть $\pi_{x+1} \subseteq P$; тогда не может выполняться $qF(s(x), G(s(x), p(x))) \leqslant p(x)$, поскольку в противном случае $F(s(x), G(s(x), p(x))) = F(s(x), u)$ для некоторого $u < G(s(x), p(x))$; противоречие с $(*)$. Следовательно, $qF(s(x), G(s(x), p(x))) > p(x)$ и $p(x+1) = qF(x+1, G(x+1, p(x))) \in P - \pi(x)$, по $(*)$. □

Теорема C38

Пусть P — продуктивное множество. Тогда

1. P не вычислимо перечислимо;
2. P содержит в качестве подмножества бесконечное вычислимо перечислимое множество;
3. если $P \leqslant_m A$, то A также продуктивно.

Продуктивные множества

Доказательство.

Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P.
1) Допустим, что P вп; тогда $P = \pi(n_0)$ и, следовательно, $\pi(n_0) \subseteq P \Rightarrow p(n_0) \in P - \pi(n_0) = \varnothing$, противоречие.

Продуктивные множества

Доказательство.

Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P.
1) Допустим, что P вп; тогда $P = \pi(n_0)$ и, следовательно, $\pi(n_0) \subseteq P \Rightarrow p(n_0) \in P - \pi(n_0) = \varnothing$, противоречие.
2) Пусть число n_1 и вф h таковы, что $\pi(n_1) = \varnothing$ и $\pi(h(x)) = \pi(x) \cup \{p(x)\}$ (по предложению С30(1)). Справедлива импликация

$$\pi(x) \subseteq P \Rightarrow \pi(h(x)) \subseteq P. \qquad (**)$$

Определим $W = \rho(p \circ F)$, где F — сплинтер функции h в точке n_1:

$$\left[\begin{array}{l} F(0) = n_1, \\ F(t+1) = hF(t). \end{array}\right.$$

Индукцией по t доказывается, что $p(F(t)) \in P$:

$$\pi(n_1) = \varnothing \subseteq P \Rightarrow p(F(0)) = p(n_1) \subseteq P - \pi(n_1) = P,$$

$$\pi(n_1) \subseteq P \xRightarrow{(**)} \pi(F(t)) \subseteq P \Rightarrow p(F(t)) \in P - \pi(F(t)) \subseteq P.$$

Продуктивные множества

Доказательство.

Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P.
1) Допустим, что P вп; тогда $P = \pi(n_0)$ и, следовательно, $\pi(n_0) \subseteq P \Rightarrow p(n_0) \in P - \pi(n_0) = \varnothing$, противоречие.
2) Пусть число n_1 и вф h таковы, что $\pi(n_1) = \varnothing$ и $\pi(h(x)) = \pi(x) \cup \{p(x)\}$ (по предложению С30(1)). Справедлива импликация

$$\pi(x) \subseteq P \Rightarrow \pi(h(x)) \subseteq P. \qquad (**)$$

Определим $W = \rho(p \circ F)$, где F — сплинтер функции h в точке n_1:

$$\left[\begin{array}{l} F(0) = n_1, \\ F(t+1) = hF(t). \end{array}\right.$$

Индукцией по t доказывается, что $p(F(t)) \in P$:
$\pi(n_1) = \varnothing \subseteq P \Rightarrow p(F(0)) = p(n_1) \subseteq P - \pi(n_1) = P$,
$\pi(n_1) \subseteq P \overset{(**)}{\Longrightarrow} \pi(F(t)) \subseteq P \Rightarrow p(F(t)) \in P - \pi(F(t)) \subseteq P$.
3) Пусть $P \leqslant_m A$ посредством вф f, а вф h такова, что $\pi(h(x)) = f^{-1}(\pi(x))$. Тогда fph — продуктивная функция для A: $\pi_x \subseteq A \Rightarrow \pi(h(x)) = f^{-1}(\pi(x)) \subseteq f^{-1}(A) = P \Rightarrow ph(x) \in P - \pi(h(x)) \Rightarrow fph(x) \in f(P) \subseteq A \wedge fph(x) \notin f(\pi(h(x))) = f(f^{-1}(\pi_x)) = \pi_x \cap \rho f \Rightarrow fph(x) \in A - \pi(x)$. $\square$

1-полнота

Теорема C39

1. Если множество P продуктивно, то $\overline{K} \leqslant_1 P$.
2. Если множество C творческое, то C 1-полно и, в частности, $C \approx K$.

1-полнота

Теорема C39

1. Если множество P продуктивно, то $\overline{K} \leqslant_1 P$.
2. Если множество C творческое, то C 1-полно и, в частности, $C \approx K$.

Доказательство.

1) Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P. По лемме C42, существует инъективная вф g такая, что

$$\pi(g(y)) = \begin{cases} \{p(g(y))\}, & \text{если } y \in K; \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее, имеем

$$y \in K \Rightarrow \pi(g(y)) = \{p(g(y))\} \xRightarrow{(1)} \pi(g(y)) \nsubseteq P \Rightarrow p(g(y)) \in \overline{P},$$
$$y \in \overline{K} \Rightarrow \pi(g(y)) = \varnothing \Rightarrow \pi(g(y)) \subseteq P \Rightarrow p(g(y)) \in P.$$

(1) Действительно, если бы $\pi(g(y)) \subseteq P$, то $p(g(y)) \in P - \pi(g(y)) = P - \{p(g(y))\}$, противоречие.

2) Следует из первого утверждения и теоремы C20 Майхилла. $\square$

1-полнота

Следствие C28

Для множества $P \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. P продуктивно;
2. $\overline{K} \leqslant_1 P$;
3. $\overline{K} \leqslant_m P$.

1-полнота

Следствие C28

Для множества $P \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. P продуктивно;
2. $\overline{K} \leqslant_1 P$;
3. $\overline{K} \leqslant_m P$.

Следствие C29

Для множества $C \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. C творческое;
2. C 1-полно;
3. C m-полно.

1-полнота

Следствие C28

Для множества $P \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. P продуктивно;
2. $\overline{K} \leqslant_1 P$;
3. $\overline{K} \leqslant_m P$.

Следствие C29

Для множества $C \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. C творческое;
2. C 1-полно;
3. C m-полно.

Упражнение.

Пусть $A \neq \omega$ — впм. Докажите, что A творческое, если и только если $\forall$ вп $B[A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \approx A \cup B]$.

Спасибо за внимание.