Лекция А6
МП-автоматы

Вадим Пузаренко

15 октября 2023 г.

Автоматы с МП: определение

Определение А6.1.

Определим **автомат с магазинной памятью (МП-автомат)** как многосортную структуру $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, Z_0, F)$, где составляющие её компоненты удовлетворяют следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний (как у НКА);
- Σ — конечный алфавит (входных символов) (как у НКА);
- Γ — конечный алфавит (стековых символов), содержит множество символов, помещаемых в магазин;
- $s \in Q$ — начальный символ (МП-автомат находится в нём перед началом работы);
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний;
- $Z_0 \in \Gamma$ — начальный магазинный символ ("маркер дна"); вначале магазин содержит только данный символ;
- Δ, отношение перехода, — конечное подмножество $(Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^*)$.

Автоматы с МП: определение

Отношение перехода.

Как и у НКА, отношение Δ управляет поведением автомата. Если $\Delta((q, a, X), (p, \gamma))$, то выполняется следующее: находясь в состоянии q, считывая символ a и обозревая символ X на вершине магазина, переходим в состояние p и заменяем символ X на вершине магазина на цепочку γ (помещаем символы в последовательности справа налево).

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат — это, по существу, ε-НКА с одним дополнением — магазином, в котором хранится цепочка "магазинных символов". Присутствие магазина означает, что в отличие от НКА магазинный автомат может "помнить" бесконечное количество информации. Однако в отличие от универсального компьютера, который также способен запоминать неограниченные объёмы информации, магазинный автомат имеет доступ к информации в магазине только с одного его конца в соответствии с принципом "последним пришёл – первым ушёл".

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат — это, по существу, ε-НКА с одним дополнением — магазином, в котором хранится цепочка “магазинных символов”. Присутствие магазина означает, что в отличие от НКА магазинный автомат может “помнить” бесконечное количество информации. Однако в отличие от универсального компьютера, который также способен запоминать неограниченные объёмы информации, магазинный автомат имеет доступ к информации в магазине только с одного его конца в соответствии с принципом “последним пришёл – первым ушёл”.

Вследствие этого существуют языки, распознаваемые некоторой программой компьютера, которые не распознаются ни одним МП-автоматом. В действительности, МП-автоматы распознают в точности КС-языки.

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат может обозревать символ на вершине магазина и совершать переход на основе текущего состояния, входного символа и символа на вершине магазина. Он может также совершить “спонтанный” переход, используя ε в качестве входного символа. За один переход автомат совершает следующие действия (здесь $(p, \gamma) \in \Delta(q, a, X)$).

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат может обозревать символ на вершине магазина и совершать переход на основе текущего состояния, входного символа и символа на вершине магазина. Он может также совершить "спонтанный" переход, используя ε в качестве входного символа. За один переход автомат совершает следующие действия (здесь $(p, \gamma) \in \Delta(q, a, X)$).

1. Прочитывает и пропускает входной символ $a \in \Sigma$, используемый при переходе. Если $a = \varepsilon$, то входные символы не пропускаются.
2. Переходит в новое состояние p, которое может и не отличаться от предыдущего.
3. Заменяет символ X на вершине магазина некоторой цепочкой γ.

МП-автомат: принцип работы

$\gamma = \varepsilon$. Из магазина удаляется символ X.

$\gamma = X$. Магазин не меняется.

$\gamma = Y_1 Y_2 \dots Y_{n-1} Y_n$. Удаляем из магазина символ X и вместо него помещаем последовательно Y_n, Y_{n-1}, ..., Y_2, Y_1.

МП-автомат: графическое представление

Введём в рассмотрение **диаграммы переходов** следующим образом.

1. Вершины ориентированного графа соответствуют состояниям МП-автомата.
2. Стрелка определённого вида указывает на начальное состояние, а обведённые двойным кружком состояния являются заключительными.
3. Дуги соответствуют переходам МП-автомата в следующем смысле. Дуга, отмеченная $a, X/\alpha$ и ведущая из состояния q в p, означает, что $(p, \alpha) \in \Delta(q, a, X)$.

МП-автомат: конфигурация

Определение А6.2.

Конфигурация МП-автомата представляется тройкой (p, ζ, γ), где $p \in Q$ (состояние, в котором находится автомат), $\zeta \in \Sigma^*$ (цепочка необработанных входных символов, оставшаяся часть входа), $\gamma \in \Gamma^*$ (содержимое магазина).

МП-автомат: конфигурация

Определение A6.2.

Конфигурация МП-автомата представляется тройкой (p, ζ, γ), где $p \in Q$ (состояние, в котором находится автомат), $\zeta \in \Sigma^*$ (цепочка необработанных входных символов, оставшаяся часть входа), $\gamma \in \Gamma^*$ (содержимое магазина).

Определение A6.3.

Пусть $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат. Определим следующие **переходы**.

- $\vdash_{\mathcal{P}}$. Предположим, что $(p, \alpha) \in \Delta(q, a, X)$. Тогда для всех цепочек $\zeta \in \Sigma^*$ и $\gamma \in \Gamma^*$ полагаем $(q, a\hat{\ }\zeta, X\hat{\ }\beta) \vdash_{\mathcal{P}} (p, \zeta, \alpha\hat{\ }\beta)$.
- $\vdash^*_{\mathcal{P}}$. **Базис**. Полагаем $I \vdash^*_{\mathcal{P}} I$ для любой конфигурации I.
  Индукция. $I \vdash^*_{\mathcal{P}} J$, если существует конфигурация K такая, что $I \vdash_{\mathcal{P}} K$ и $K \vdash^*_{\mathcal{P}} J$.

МП-автомат: конфигурация

Соглашение.

Если ясно из контекста, какой автомат рассматривается, индекс $\mathcal{P}$ будем опускать и записывать просто $\vdash$ или $\vdash^*$ вместо $\vdash_{\mathcal{P}}$ или $\vdash^*_{\mathcal{P}}$ соответственно.

МП-автомат: конфигурация

Соглашение.

Если ясно из контекста, какой автомат рассматривается, индекс $\mathcal{P}$ будем опускать и записывать просто $\vdash$ или $\vdash^*$ вместо $\vdash_\mathcal{P}$ или $\vdash^*_\mathcal{P}$ соответственно.

Таким образом, $I \vdash^* J$, если существует такая последовательность конфигураций K_1, K_2, ..., K_n, у которой $I = K_1$, $J = K_n$, $K_i \vdash K_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ $(n \in \omega)$.

МП-автомат: конфигурация

Предложение А6.1.

Если $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$, то для любых цепочек $\eta \in \Sigma^*$ и $\gamma \in \Gamma^*$ имеем $(q, \zeta_1 \hat{} \eta, \alpha \hat{} \gamma) \vdash^* (p, \zeta_2 \hat{} \eta, \beta \hat{} \gamma)$.

МП-автомат: конфигурация

Предложение А6.1.

Если $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$, то для любых цепочек $\eta \in \Sigma^*$ и $\gamma \in \Gamma^*$ имеем $(q, \zeta_1\hat{\ }\eta, \alpha\hat{\ }\gamma) \vdash^* (p, \zeta_2\hat{\ }\eta, \beta\hat{\ }\gamma)$.

Доказательство.

Нетрудно показать индукцией по числу шагов последовательности конфигураций, приводящих $(q, \zeta_1\hat{\ }\eta, \alpha\hat{\ }\gamma)$ к $(p, \zeta_2\hat{\ }\eta, \beta\hat{\ }\gamma)$. Каждый из переходов в последовательности $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$ обосновывается переходами P без какого-либо использования η и/или γ. Следовательно, каждый переход обоснован и в случае, когда эти цепочки присутствуют на входе и в магазине. □

МП-автомат: конфигурация

Замечание А6.1.

Полное обращение предложения не имеет места. Существуют действия, которые МП-автомат мог бы совершить путём выталкивания символов из стека, т.е. используя некоторые символы γ и заменяя их в магазине, что невозможно без обработки γ.

МП-автомат: конфигурация

Замечание А6.1.

Полное обращение предложения не имеет места. Существуют действия, которые МП-автомат мог бы совершить путём выталкивания символов из стека, т.е. используя некоторые символы γ и заменяя их в магазине, что невозможно без обработки γ.

Предложение А6.2.

Если $(q, \zeta_1\hat{}\eta, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2\hat{}\eta, \beta)$, то $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$.

МП-автомат: конфигурация

Замечание А6.1.

Полное обращение предложения не имеет места. Существуют действия, которые МП-автомат мог бы совершить путём выталкивания символов из стека, т.е. используя некоторые символы γ и заменяя их в магазине, что невозможно без обработки γ.

Предложение А6.2.

Если $(q, \zeta_1\hat{\ }\eta, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2\hat{\ }\eta, \beta)$, то $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$.

Доказательство.

Проводится также индукцией по числу шагов последовательности конфигураций, приводящих (q, ζ_1, α) к (p, ζ_2, β). $\square$

МП-автоматы и языки

Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат.

МП-автоматы и языки

Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат.

Допустимость по конечному состоянию.

$L(\mathcal{M}) = \{\alpha \mid (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$, $\beta \in \Gamma^*\}$.

МП-автоматы и языки

Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат.

Допустимость по конечному состоянию.

$L(\mathcal{M}) = \{\alpha \mid (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$, $\beta \in \Gamma^*\}$.

Допустимость по пустому магазину.

$N(\mathcal{M}) = \{\alpha \mid (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для некоторого $q \in Q\}$.

МП-автомат: пример

Пример А6.1.

Пусть $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \Delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$, где Δ определяется следующими правилами.

1. $\Delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$, $a \in \{0, 1\}$. Правило применяется вначале, когда автомат находится в состоянии q_0 и обозревает символ Z_0 на вершине магазина. Считываемый символ помещается в магазин; Z_0 остаётся в качестве маркера дна.
2. $\Delta(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$, $a, b \in \{0, 1\}$. Эти правила позволяют оставаться в состоянии q_0 и читать входные символы, помещая их на вершину магазина над предыдущим верхним символом.
3. $\Delta(q_0, \varepsilon, X) = \{(q_1, X)\}$, $X \in \Gamma$. Правила позволяет автомату спонтанно (без чтения входа) переходить из состояния q_0 в состояние q_1, не изменяя содержимого автомата.

МП-автомат: пример

Пример А6.1 (продолжение).

4 $\Delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$, $a \in \{0, 1\}$. В состоянии q_1 входные символы сравниваются с символами на вершинах магазина. В случае совпадения они выталкиваются.

5 $\Delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$. Если обнаружен маркер дна Z_0, а автомат находится в состоянии q_1, то автомат переходит в состояние q_2.

6 $\Delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$. Обнуляет содержимое магазина.

МП-автомат: пример

Пример А6.1 (продолжение).

4 $\Delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$, $a \in \{0, 1\}$. В состоянии q_1 входные символы сравниваются с символами на вершинах магазина. В случае совпадения они выталкиваются.

5 $\Delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$. Если обнаружен маркер дна Z_0, а автомат находится в состоянии q_1, то автомат переходит в состояние q_2.

6 $\Delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$. Обнуляет содержимое магазина.

Предложение А6.3.

$L(\mathcal{M}) = N(\mathcal{M}) = \{\alpha\hat{}\alpha^R | \alpha \in \Sigma^*\}$.

МП-автомат: пример

Доказательство.

($\supseteq$) Пусть $\alpha \in \{0,1\}^*$; тогда $(q_0, \alpha\hat{}\alpha^R, Z_0) \vdash^* (q_0, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash (q_1, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$. Следовательно, $\alpha\hat{}\alpha^R \in L(\mathcal{M}) \cap N(\mathcal{M})$.

МП-автомат: пример

Доказательство.

($\supseteq$) Пусть $\alpha \in \{0,1\}^*$; тогда $(q_0, \alpha\hat{}\alpha^R, Z_0) \vdash^* (q_0, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash (q_1, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$. Следовательно, $\alpha\hat{}\alpha^R \in L(\mathcal{M}) \cap N(\mathcal{M})$.

($\subseteq$) Заметим, что единственный путь достижения состояния q_2 состоит в том, чтобы находиться в состоянии q_1 и иметь Z_0 на вершине магазина. Кроме того, любое допускающее вычисление $\mathcal{M}$ начинается в состоянии q_0, совершает один переход в q_1 и никогда не возвращается в q_0. Таким образом, достаточно найти условия налагаемые на α, для которых $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0)$; именно такие цепочки и распознаёт $\mathcal{M}$ по заключительному состоянию. Покажем индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$ следующее несколько более общее утверждение: **если $(q_0, \alpha, \gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)$, то $\alpha = \sigma\hat{}\sigma^R$ для подходящего σ.**

Базис. Если $\alpha = \varepsilon$, то $\alpha = \sigma\hat{}\sigma^R$, где $\sigma = \varepsilon$. Таким образом, заключение верно, и утверждение истинно. Отметим, что нет необходимости доказывать истинность гипотезы $(q_0, \varepsilon, \gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)$, хотя она и верна.

МП-автомат: пример

Доказательство (продолжение).

Индукция. Пусть $\alpha = a_1a_2\ldots a_n$ для некоторого $n > 0$. Существуют следующие два перехода, которые $\mathcal{M}$ может совершить из конфигурации (q_0, α, γ).

1. $(q_0, \alpha, \gamma) \vdash (q_1, \alpha, \gamma)$. Теперь $\mathcal{M}$ может только выталкивать из магазина, находясь в состоянии q_1. Тем самым, $\mathcal{M}$ должен вытолкнуть символ из магазина с чтением каждого входного символа, и $\mathrm{lh}(\alpha) > 0$. Таким образом, если $(q_1, \alpha, \gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \beta)$, то цепочка β короче, чем цепочка γ, и не может ей равняться, т.е. посылка не выполняется.
2. $(q_0, a_1a_2\ldots a_n, \gamma) \vdash (q_0, a_2\ldots a_n, a_1\hat{}\gamma)$. Теперь последовательность переходов может завершиться конфигурацией $(q_1, \varepsilon, \gamma)$, только если последний переход является выталкиванием $(q_1, a_n, a_1\hat{}\gamma) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma)$ и, следовательно, должно выполняться $a_n = a_1$. Нам также известно, что $(q_0, a_2\ldots a_n, a_1\hat{}\gamma) \vdash^* (q_1, a_n, a_1\hat{}\gamma)$. По предложению А6.2, имеем $(q_0, a_2\ldots a_{n-1}, a_1\hat{}\gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, a_1\hat{}\gamma)$.

МП-автомат: пример

Доказательство (окончание).

Так как $\mathrm{lh}(a_2 \dots a_{n-1}) < n$, по индукционному предположению, $a_2 \dots a_{n-1} = \beta_1\hat{\ }\beta_1^R$ для подходящего β_1. Поскольку $\alpha = a_1\hat{\ }\beta_1\hat{\ }\beta_1^R\hat{\ }a_n$ и $a_1 = a_n$, заключаем, что $\alpha = \beta\hat{\ }\beta^R$, где $\beta = a_1\hat{\ }\beta_1$. $\square$

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Теорема А6.1.

Если $L = N(\mathcal{P}_N)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_N = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$, то существует МП-автомат $\mathcal{P}_F$ такой, что $L = L(\mathcal{P}_F)$.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Теорема А6.1.

Если $L = N(\mathcal{P}_N)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_N = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$, то существует МП-автомат $\mathcal{P}_F$ такой, что $L = L(\mathcal{P}_F)$.

Замечание А6.2.

Отметим, что результат работы МП-автомата $\mathcal{P}_N$ не зависит от множества F заключительных состояний.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Теорема А6.1.

Если $L = N(\mathcal{P}_N)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_N = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$, то существует МП-автомат $\mathcal{P}_F$ такой, что $L = L(\mathcal{P}_F)$.

Замечание А6.2.

Отметим, что результат работы МП-автомата $\mathcal{P}_N$ не зависит от множества F заключительных состояний.

Доказательство.

Используется новый магазинный символ X_0, который не должен быть элементом Γ; он будет как маркером дна автомата $\mathcal{P}_F$, так и символом, позволяющим узнать, что $\mathcal{P}_N$ опустошает магазин. Тем самым, если $\mathcal{P}_F$ обозревает X_0 на вершине магазина, то он знает, что $\mathcal{P}_N$ опустошает свой магазин на том же входе.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (продолжение).

Нам понадобится также новое начальное состояние p_0, единственной функцией которого будет задача затолкнуть Z_0, стартовый символ автомата $\mathcal{P}_N$, на вершину магазина и перейти в состояние q_0, начальное для $\mathcal{P}_N$. Далее $\mathcal{P}_F$ имитирует работу автомата $\mathcal{P}_N$ до тех пор, пока магазин $\mathcal{P}_N$ станет пустым, что $\mathcal{P}_F$ определяет по символу X_0 на вершине своего магазина. И, в конце концов, понадобится ещё одно состояние p_f, единственное заключительное для $\mathcal{P}_F$; данный автомат переходит в него, как только $\mathcal{P}_N$ обнаруживает пустой магазин. Тем самым, $\mathcal{P}_F$ имеет следующий вид: $\mathcal{P}_F = (Q \uplus \{p_0; p_f\}, \Sigma, \Gamma \uplus \{X_0\}; \Delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$, где Δ_F представимо в виде объединения, согласно следующим правилам:

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (продолжение).

1. $\Delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$. В своём начальном состоянии автомат $\mathcal{P}_F$ спонтанно переходит в начальное состояние автомата $\mathcal{P}_N$, заталкивая символ Z_0 в магазин.
2. $\Delta(q, a, Y) = \Delta_F(q, a, Y)$, для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Y \in \Gamma$.
3. $\Delta_F(q, \varepsilon, X_0) = \{(p_f, \varepsilon)\}$, для каждого $q \in Q$.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (продолжение).

1. $\Delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$. В своём начальном состоянии автомат $\mathcal{P}_F$ спонтанно переходит в начальное состояние автомата $\mathcal{P}_N$, заталкивая символ Z_0 в магазин.
2. $\Delta(q, a, Y) = \Delta_F(q, a, Y)$, для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Y \in \Gamma$.
3. $\Delta_F(q, \varepsilon, X_0) = \{(p_f, \varepsilon)\}$, для каждого $q \in Q$.

Докажем, что $\alpha \in L(\mathcal{P}_F) \Leftrightarrow \alpha \in N(\mathcal{P}_N)$.
$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$, а именно, $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для некоторого $q \in Q$. По правилу 2, автомат $\mathcal{P}_F$ содержит все переходы автомата $\mathcal{P}_N$, из предложения А6.1 заключаем, что $(q_0, \alpha, Z_0 X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, X_0)$. Далее, выполняется соотношение

$$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_F} (q_0, \alpha, Z_0 X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon). \qquad (1)$$

Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (окончание).

($\Rightarrow$) Пусть $\alpha \in L(\mathcal{P}_F)$, а именно, $(p_0, \alpha, X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (p_f, \varepsilon, \gamma)$ для некоторого $\gamma \in (\Gamma \cup \{X_0\})^*$. Отметим, что правило 1 может использоваться лишь однажды и только на первом шаге, а правило 3 — только на последнем шаге и также только один раз. Тем самым, приходим к соотношению (1) и, в частности, $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, X_0)$ для некоторого $q \in Q$. Так как $X_0 \notin \Gamma$, а следовательно, и X_0 не встречается в отношении Δ перехода автомата $\mathcal{P}_N$, согласно правилу 2, заключаем, что $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, X_0)$ и $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \varepsilon)$. Таким образом, $\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$. $\square$

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Теорема А6.2.

Пусть $L = L(\mathcal{P}_F)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_F$. Тогда существует МП-автомат $\mathcal{P}_N$, для которого имеет место $L = N(\mathcal{P}_N)$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Теорема А6.2.

Пусть $L = L(\mathcal{P}_F)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_F$. Тогда существует МП-автомат $\mathcal{P}_N$, для которого имеет место $L = N(\mathcal{P}_N)$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{P}_F = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат из условия. Опишем конструкцию $\mathcal{P}_N$ следующим образом. Добавляется переход по ε в новое состояние p из заключительного состояния автомата $\mathcal{P}_F$. Находясь в состоянии p, автомат $\mathcal{P}_N$ опустошает содержимое магазина и ничего не прочитывает на входе. Таким образом, как только $\mathcal{P}_F$ попадает в заключительное состояние, прочитав α, автомат $\mathcal{P}_N$ опустошает свой магазин, также прочитав α.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Чтобы избежать случаи, когда $\mathcal{P}_F$ опустошает свой магазин, не находясь в конечном состоянии, $\mathcal{P}_N$ должен, как и ранее, также использовать маркер X_0 на дне магазина. Он является стартовым символом $\mathcal{P}_N$, и автомат должен начинать работу в новом состоянии p_0, единственная функция которого — затолкнуть Z_0 в магазин и перейти в начальное состояние $\mathcal{P}_F$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Положим $\mathcal{P}_N = (Q \uplus \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \uplus \{X_0\}; \Delta_N, p_0, X_0, F)$, где Δ_N определяется следующим образом:

1. $\Delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$. Работа начинается с заталкивания символа Z_0 автомата $\mathcal{P}_F$ в магазин и перехода в начальное состояние $\mathcal{P}_F$.
2. $\Delta_N(q, a, Y) \supseteq \Delta(q, a, Y)$ для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Y \in \Gamma$, т.е. $\mathcal{P}_N$ имитирует работу $\mathcal{P}_F$.
3. $\Delta_N(q, \varepsilon, Y) \supseteq \{(p, \varepsilon)\}$ для всех $q \in F$ и $Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$. Как только $\mathcal{P}_F$ распознаёт слово, $\mathcal{P}_N$ может начать опустошение магазина и перейти в состояние p.
4. $\Delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\}$ для всех $Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$. Попав в состояние p, автомат $\mathcal{P}_N$ выталкивает символы из магазина до его опустошения. При этом входные символы не читаются.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Теперь необходимо доказать, что $\alpha \in N(\mathcal{P}_N) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Теперь необходимо доказать, что $\alpha \in N(\mathcal{P}_N) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.

($\Leftarrow$) Пусть $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$ и $\beta \in \Gamma^*$. Вспомним, что каждый переход автомата $\mathcal{P}_F$ имеется и у $\mathcal{P}_N$, по правилу 2, а по предложению А6.1, $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0)$. Следовательно,

$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_N} (q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

(Первый переход может осуществляться согласно правилу 1, а последний — согласно правилам 3 и 4). Таким образом, $\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Теперь необходимо доказать, что $\alpha \in N(\mathcal{P}_N) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.
$(\Leftarrow)$ Пусть $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$ и $\beta \in \Gamma^*$. Вспомним, что каждый переход автомата $\mathcal{P}_F$ имеется и у $\mathcal{P}_N$, по правилу 2, а по предложению А6.1, $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0)$. Следовательно,
$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_N} (q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (p, \varepsilon, \varepsilon)$.
(Первый переход может осуществляться согласно правилу 1, а последний — согласно правилам 3 и 4). Таким образом, $\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$.
$(\Rightarrow)$ Пусть теперь $(p_0, \alpha, X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для некоторого $q \in Q \cup \{p_0, p\}$. Единственный путь, по которому $\mathcal{P}_N$ может опустошить свой магазин, состоит в достижении состояния p, так как X_0 находится в магазине и является символом, для которого у $\mathcal{P}_F$ переходы не определены. Поэтому $q = p$. Автомат $\mathcal{P}_N$ может достичь состояния p только тогда, когда $\mathcal{P}_F$ приходит в конечное состояние.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (окончание).

Первым переходом автомата $\mathcal{P}_N$ может быть только переход, заданный правилом 1. Таким образом, каждое вычисление $\mathcal{P}_N$, подтверждающее распознаваемость слова α, выглядит следующим образом (здесь q — конечное состояние автомата $\mathcal{P}_F$).

$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_N} (q_0, \alpha, Z_0 X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

Кроме того, все переходы между $(q_0, \alpha, Z_0 X_0)$ и $(q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0)$ осуществляются переходами автомата $\mathcal{P}_F$. Так как X_0 не участвует в переходах автомата $\mathcal{P}_F$, имеем $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, \beta)$. Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{P}_F)$. $\square$

Спасибо за внимание.