

Лекция С4 Нумерации и вычислимость, I

Вадим Пузаренко

19 декабря 2023 г.

Нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.1.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Любое отображение $\nu : \omega \rightarrow S$ из множества ω натуральных чисел на множество S (сюръекция) называется **нумерацией** множества S . Множество всех нумераций множества S будем обозначать как $N(S)$.

Нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.1.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Любое отображение $\nu : \omega \rightarrow S$ из множества ω натуральных чисел на множество S (сюръекция) называется **нумерацией** множества S . Множество всех нумераций множества S будем обозначать как $N(S)$.

Пусть $\nu_0 \in N(S_0)$, $\nu_1 \in N(S_1)$.

Определение С4.2.

Будем говорить, что ν_0 **сводится к ν_1** (и использовать обозначение $\nu_0 \leq \nu_1$), если существует вычислимая функция f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.1.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Любое отображение $\nu : \omega \rightarrow S$ из множества ω натуральных чисел на множество S (сюръекция) называется **нумерацией** множества S . Множество всех нумераций множества S будем обозначать как $N(S)$.

Пусть $\nu_0 \in N(S_0)$, $\nu_1 \in N(S_1)$.

Определение С4.2.

Будем говорить, что ν_0 **сводится к ν_1** (и использовать обозначение $\nu_0 \leq \nu_1$), если существует вычислимая функция f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Лемма С4.1.

Отношение \leq сводимости на $N(S)$ является предпорядком (а именно, рефлексивным и транзитивным), для любого непустого не более, чем счётного множества (**упражнение!!!**)

Нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.3.

Будем говорить, что ν_0 и ν_1 **эквивалентны** (и использовать обозначение $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leq \nu_1$ и $\nu_1 \leq \nu_0$.

Нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.3.

Будем говорить, что ν_0 и ν_1 **эквивалентны** (и использовать обозначение $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leq \nu_1$ и $\nu_1 \leq \nu_0$.

Обозначение С4.1.

Отношение \equiv действительно является отношением эквивалентности на $N(S)$. Положим $L(S) = N(S)/\equiv$ и $\mathbf{L}(S) = \langle L(S), \leq \rangle$, где

$$[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv} \Leftrightarrow (\nu_0 \leq \nu_1)$$

для любых $\nu_0, \nu_1 \in N(S)$ (здесь S — непустое не более, чем счётное множество).

Нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Обозначение С4.2.

Положим $L^*(S) = \{[o]_{\equiv}\} \cup \bigcup_{\emptyset \neq S_0 \subseteq S} L(S_0)$ и $\mathbf{L}^*(S) = \langle L^*(S), \leq \rangle$, где

$$[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv} \Leftrightarrow (\nu_0 = o) \vee (\nu_0 \leq \nu_1)$$

для любых $\nu_0 \in N(S_0)$, $\nu_1 \in N(S_1)$ (здесь $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S$, а S — непустое не более, чем счётное множество). В этом случае o играет роль “пустой нумерации” (будем считать, что $\delta o = \emptyset$).

Упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть $\langle A_0, \leq_0 \rangle, \langle A_1, \leq_0 \rangle$ — частично упорядоченные множества.

Упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации
Полурешётки

Пусть $\langle A_0, \leq_0 \rangle$, $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ — частично упорядоченные множества.

Определение С4.4.

Будем говорить, что $f : A_0 \rightarrow A_1$ — **изоморфизм** между $\langle A_0, \leq_0 \rangle$ и $\langle A_1, \leq_1 \rangle$, если выполняются следующие условия:

- 1 f — биекция;
- 2 $a \leq_0 c \Leftrightarrow f(a) \leq_1 f(c)$ для всех $a, c \in A_0$.

Упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть $\langle A_0, \leq_0 \rangle$, $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ — частично упорядоченные множества.

Определение С4.4.

Будем говорить, что $f : A_0 \rightarrow A_1$ — **изоморфизм** между $\langle A_0, \leq_0 \rangle$ и $\langle A_1, \leq_1 \rangle$, если выполняются следующие условия:

- 1 f — биекция;
- 2 $a \leq_0 c \Leftrightarrow f(a) \leq_1 f(c)$ для всех $a, c \in A_0$.

Определение С4.5.

Будем говорить, что $\langle A_0, \leq_0 \rangle$ и $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ **изоморфны**, если существует хотя бы один изоморфизм между $\langle A_0, \leq_0 \rangle$ и $\langle A_1, \leq_1 \rangle$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.1.

Пусть непустые не более, чем счётные множества S_0 и S_1 таковы, что $|S_0| = |S_1|$. Тогда $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$ и $\mathbf{L}(S_0) \simeq \mathbf{L}(S_1)$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.1.

Пусть непустые не более, чем счётные множества S_0 и S_1 таковы, что $|S_0| = |S_1|$. Тогда $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$ и $\mathbf{L}(S_0) \simeq \mathbf{L}(S_1)$.

Доказательство.

Пусть $\psi : S_0 \xrightarrow{1:1} S_1$ — биекция и пусть $\Psi : \mathbf{L}^*(S_0) \rightarrow \mathbf{L}^*(S_1)$ — трансформация, для которой выполняются следующие условия:

- $\Psi([o]_{\equiv}) = [o]_{\equiv}$;
- $\Psi([\nu]_{\equiv}) = [\psi\nu]_{\equiv}$ для любой нумерации $\nu \in \bigcup_{\emptyset \neq S'_0 \subseteq S_0} N(S'_0)$.

Докажем, что данная трансформация осуществляет изоморфизм между $\mathbf{L}^*(S_0)$ и $\mathbf{L}^*(S_1)$. Зафиксируем также отображение φ , обратное к функции ψ . Сначала докажем, что $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv} \Leftrightarrow \Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$ для всех $\nu_0 \in N(S'_0) \cup \{o\}$, $\nu_1 \in N(S'_1) \cup \{o\}$ и $\emptyset \neq S'_0 \subseteq S'_1 \subseteq S_0$.

Пусть $\nu_0 \in N(S'_0) \cup \{o\}$, $\nu_1 \in N(S'_1) \cup \{o\}$, $\emptyset \neq S'_0 \subseteq S'_1 \subseteq S_0$ таковы, что $(\Rightarrow) \nu_0 \leq \nu_1$. Если $\nu_0 = o$, то $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [o]_{\equiv} \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.
Следовательно, $\psi \nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi \nu_1) f$ и, тем самым,
 $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Следовательно, $\psi \nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi \nu_1) f$ и, тем самым,

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Далее, пусть $(\Leftarrow) \Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Если

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [o]_{\equiv}$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$; если же $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \neq [o]_{\equiv}$, то существует вф f такая, что $\psi \nu_0 = (\psi \nu_1) f$.

Следовательно,

$\nu_0 = (\varphi \psi) \nu_0 = \varphi(\psi \nu_0) = \varphi((\psi \nu_1) f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi \psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$.

Таким образом, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Следовательно, $\psi \nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi \nu_1) f$ и, тем самым,

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Далее, пусть $(\Leftarrow) \Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Если

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [o]_{\equiv}$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$; если же $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \neq [o]_{\equiv}$, то существует вф f такая, что $\psi \nu_0 = (\psi \nu_1) f$.

Следовательно,

$\nu_0 = (\varphi \psi) \nu_0 = \varphi(\psi \nu_0) = \varphi((\psi \nu_1) f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi \psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$.

Таким образом, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$.

Ψ — функция. Пусть $[\nu_0]_{\equiv} = [\nu_1]_{\equiv}$; тогда $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$ и $[\nu_1]_{\equiv} \leq [\nu_0]_{\equiv}$, а по доказанному, $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$ и $\Psi([\nu_1]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_0]_{\equiv})$. Таким образом, $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = \Psi([\nu_1]_{\equiv})$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Следовательно, $\psi \nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi \nu_1) f$ и, тем самым,

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Далее, пусть $(\Leftarrow) \Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Если

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [o]_{\equiv}$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$; если же $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \neq [o]_{\equiv}$, то существует вф f такая, что $\psi \nu_0 = (\psi \nu_1) f$.

Следовательно,

$\nu_0 = (\varphi \psi) \nu_0 = \varphi(\psi \nu_0) = \varphi((\psi \nu_1) f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi \psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$.

Таким образом, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$.

Ψ — функция. Пусть $[\nu_0]_{\equiv} = [\nu_1]_{\equiv}$; тогда $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$ и $[\nu_1]_{\equiv} \leq [\nu_0]_{\equiv}$, а по доказанному, $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$ и $\Psi([\nu_1]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_0]_{\equiv})$. Таким образом, $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = \Psi([\nu_1]_{\equiv})$.

Ψ — инъекция. Пусть $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = \Psi([\nu_1]_{\equiv})$; тогда $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$ и $\Psi([\nu_1]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_0]_{\equiv})$, а по доказанному, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$ и $[\nu_1]_{\equiv} \leq [\nu_0]_{\equiv}$.

Таким образом, $[\nu_0]_{\equiv} = [\nu_1]_{\equiv}$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Следовательно, $\psi \nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi \nu_1) f$ и, тем самым,

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Далее, пусть $(\Leftarrow) \Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$. Если

$\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [o]_{\equiv}$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$; если же $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \neq [o]_{\equiv}$, то существует вф f такая, что $\psi \nu_0 = (\psi \nu_1) f$.

Следовательно,

$\nu_0 = (\varphi \psi) \nu_0 = \varphi(\psi \nu_0) = \varphi((\psi \nu_1) f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi \psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$.

Таким образом, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$.

Ψ — функция. Пусть $[\nu_0]_{\equiv} = [\nu_1]_{\equiv}$; тогда $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$ и $[\nu_1]_{\equiv} \leq [\nu_0]_{\equiv}$, а по доказанному, $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$ и $\Psi([\nu_1]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_0]_{\equiv})$. Таким образом, $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = \Psi([\nu_1]_{\equiv})$.

Ψ — инъекция. Пусть $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = \Psi([\nu_1]_{\equiv})$; тогда $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_1]_{\equiv})$ и $\Psi([\nu_1]_{\equiv}) \leq \Psi([\nu_0]_{\equiv})$, а по доказанному, $[\nu_0]_{\equiv} \leq [\nu_1]_{\equiv}$ и $[\nu_1]_{\equiv} \leq [\nu_0]_{\equiv}$.

Таким образом, $[\nu_0]_{\equiv} = [\nu_1]_{\equiv}$.

Ψ — сюръекция. Пусть $\mu \in N(S') \cup \{o\}$, $S' \subseteq S_1$. Если $\mu = o$, то $\Psi([o]_{\equiv}) = [o]_{\equiv}$; если же $\mu \neq o$, то

$\Psi([\varphi \mu]_{\equiv}) = [\psi(\varphi \mu)]_{\equiv} = [(\psi \varphi) \mu]_{\equiv} = [\mu]_{\equiv}$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

$\Psi \upharpoonright \mathbf{L}(S_0) : \mathbf{L}(S_0) \rightarrow \mathbf{L}(S_1)$. Если $\nu_0 \in N(S_0)$, то $\psi\nu_0 \in N(S_1)$ и $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [\psi\nu_0]_{\equiv}$; если же $\mu_0 \in N(S_1)$, то $\varphi\mu_0 \in N(S_0)$ и $\psi(\varphi\mu_0) = (\psi\varphi)\mu_0 = \mu_0$. Таким образом, $\Psi([\varphi\mu_0]_{\equiv}) = [\mu_0]_{\equiv}$. □

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

$\Psi \upharpoonright \mathbf{L}(S_0) : \mathbf{L}(S_0) \rightarrow \mathbf{L}(S_1)$. Если $\nu_0 \in N(S_0)$, то $\psi\nu_0 \in N(S_1)$ и $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [\psi\nu_0]_{\equiv}$; если же $\mu_0 \in N(S_1)$, то $\varphi\mu_0 \in N(S_0)$ и $\psi(\varphi\mu_0) = (\psi\varphi)\mu_0 = \mu_0$. Таким образом, $\Psi([\varphi\mu_0]_{\equiv}) = [\mu_0]_{\equiv}$. □

Замечание С4.1.

Отметим, что $[o]_{\equiv}$ — наименьший элемент $\mathbf{L}^*(S)$, где S — непустое не более, чем счётное множество. Если $|S| = 1$, то $|N(S)| = 1$ и, следовательно, $|L(S)| = 1$, $|L^*(S)| = 2$. В самом деле, если S одноэлементно, то существует только одна нумерация множества S , а именно, $\lambda n.s$, где $S = \{s\}$. В этом случае $L^*(S) = \{\{o\}, \{\lambda n.s\}\}$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

$\Psi \upharpoonright \mathbf{L}(S_0) : \mathbf{L}(S_0) \rightarrow \mathbf{L}(S_1)$. Если $\nu_0 \in N(S_0)$, то $\psi\nu_0 \in N(S_1)$ и $\Psi([\nu_0]_{\equiv}) = [\psi\nu_0]_{\equiv}$; если же $\mu_0 \in N(S_1)$, то $\varphi\mu_0 \in N(S_0)$ и $\psi(\varphi\mu_0) = (\psi\varphi)\mu_0 = \mu_0$. Таким образом, $\Psi([\varphi\mu_0]_{\equiv}) = [\mu_0]_{\equiv}$. \square

Замечание С4.1.

Отметим, что $[o]_{\equiv}$ — наименьший элемент $\mathbf{L}^*(S)$, где S — непустое не более, чем счётное множество. Если $|S| = 1$, то $|N(S)| = 1$ и, следовательно, $|L(S)| = 1$, $|L^*(S)| = 2$. В самом деле, если S одноэлементно, то существует только одна нумерация множества S , а именно, $\lambda n.s$, где $S = \{s\}$. В этом случае $L^*(S) = \{\{o\}, \{\lambda n.s\}\}$.

Определение С4.6.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Элемент $\mathbf{a} \in L^*(S)$ называется **минимальным**, если $\mathbf{a} \neq [o]_{\equiv}$ и $\forall \mathbf{b}[\mathbf{b} \leq \mathbf{a} \rightarrow ((\mathbf{b} = \mathbf{a}) \vee (\mathbf{b} = [o]_{\equiv}))]$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.2.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Тогда $L^*(S)$ имеет в точности $|S|$ минимальных элементов.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.2.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Тогда $\mathbf{L}^*(S)$ имеет в точности $|S|$ минимальных элементов.

Доказательство.

Пусть $s \in S$; докажем сначала, что $[\lambda n.s]_{\equiv}$ является минимальным элементом $\mathbf{L}^*(S)$. В самом деле, пусть $\mathbf{b} \leq [\lambda n.s]_{\equiv}$ таково, что $\mathbf{b} \neq [o]_{\equiv}$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu(n) = (\lambda n.s \circ f)(n) = s$ для всех $n \in \omega$ (здесь $\nu \in \mathbf{b}$). Следовательно, $\mathbf{b} = [\lambda n.s]_{\equiv}$. Кроме того, если $s_1 \neq s_2$, то $[\lambda n.s_1]_{\equiv} \neq [\lambda n.s_2]_{\equiv}$. В самом деле, если $(\lambda n.s_1 \circ f_1)(n) = (\lambda n.s_2 \circ f_2)(n)$, то $s_1 = (\lambda n.s_1 \circ f_1)(1) = (\lambda n.s_2 \circ f_2)(1) = s_2$. Тем самым, количество минимальных элементов $\mathbf{L}^*(S)$ не меньше $|S|$.

Докажем теперь, что других минимальных элементов структура $\mathbf{L}^*(S)$ не имеет. Пусть $\mathbf{b} \in L(S_0)$, $S_0 \subseteq S$, $|S_0| \geq 2$. Пусть $\nu \in N(S_0)$ таково, что $\mathbf{b} = [\nu]_{\equiv}$; тогда $\nu(0) = s_0 \in S_0$ и $\lambda n.s_0 = \nu(0) = \nu 0(n)$. Таким образом, $[\lambda n.s_0]_{\equiv} \leq [\nu]_{\equiv}$ и $[\lambda n.s_0]_{\equiv} \neq [\nu]_{\equiv}$ (последнее вытекает из того, что $\rho\nu \neq \{s_0\} = \rho(\lambda n.s_0)$).



Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.1.

Пусть S_0, S_1 — непустые не более, чем счётные множества. Тогда $|S_0| = |S_1|$, если и только если $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.1.

Пусть S_0, S_1 — непустые не более, чем счётные множества. Тогда $|S_0| = |S_1|$, если и только если $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$.

- 1 Если $|S| = 1$, то $|L(S)| = 1$.
- 2 Если $|S| > 1$, то $|L(S)| = \mathfrak{c}$.
- 3 Если $|S| = \omega$, то $\mathbf{L}(S)$ имеет \mathfrak{c} минимальных элементов.

Нумерации и упорядоченные множества

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.1.

Пусть S_0, S_1 — непустые не более, чем счётные множества. Тогда $|S_0| = |S_1|$, если и только если $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$.

- 1 Если $|S| = 1$, то $|L(S)| = 1$.
- 2 Если $|S| > 1$, то $|L(S)| = \mathfrak{c}$.
- 3 Если $|S| = \omega$, то $\mathbf{L}(S)$ имеет \mathfrak{c} минимальных элементов.
- 4 Если $1 < |S| < \omega$, то $\mathbf{L}(S)$ имеет наименьший элемент.
- 5 Если $1 < |S_0| < \omega$ и $1 < |S_1| < \omega$, то $\mathbf{L}(S_0) \simeq \mathbf{L}(S_1)$ (Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.; доказательство данного утверждения громоздкое, поэтому здесь не приводится).

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m \rangle \mid \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m \rangle \mid \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение С4.7.

Нумерация ν называется

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m \rangle \mid \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение С4.7.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \iota_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m \rangle \mid \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение С4.7.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \iota_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);
- **разрешимой**, если η_ν вычислимо;

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m \rangle \mid \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение С4.7.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \iota_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);
- **разрешимой**, если η_ν вычислимо;
- **позитивной**, если η_ν вычислимо перечислимо;

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m \rangle \mid \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение С4.7.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \iota_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);
- **разрешимой**, если η_ν вычислимо;
- **позитивной**, если η_ν вычислимо перечислимо;
- **негативной**, если $\omega^2 \setminus \eta_\nu$ вычислимо перечислимо.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Основные свойства.

- 1 Любая однозначная нумерация является разрешимой.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Основные свойства.

- 1 Любая однозначная нумерация является разрешимой.
- 2 Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Основные свойства.

- 1 Любая однозначная нумерация является разрешимой.
- 2 Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.
- 3 Если нумерация является позитивной и негативной одновременно, то она разрешима (следствие теоремы С3.2 Поста).

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Основные свойства.

- 1 Любая однозначная нумерация является разрешимой.
- 2 Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.
- 3 Если нумерация является позитивной и негативной одновременно, то она разрешима (следствие теоремы С3.2 Поста).

Определение С4.8.

Нумерация ν называется **минимальной**, если выполняется соотношение $\mu \leq \nu \rightarrow \mu \equiv \nu$ для всех $\mu \in N(S)$.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Основные свойства.

- 1 Любая однозначная нумерация является разрешимой.
- 2 Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.
- 3 Если нумерация является позитивной и негативной одновременно, то она разрешима (следствие теоремы С3.2 Поста).

Определение С4.8.

Нумерация ν называется **минимальной**, если выполняется соотношение $\mu \leq \nu \rightarrow \mu \equiv \nu$ для всех $\mu \in N(S)$.

Предложение С4.3.

Любая позитивная нумерация минимальна.

Позитивные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leq \nu$. Возьмём вф f , для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:

$$R \Leftrightarrow \{\langle n, m \rangle \mid \exists t[(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)]\}.$$

Позитивные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leq \nu$. Возьмём вф f , для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:

$$R \triangleq \{ \langle n, m \rangle \mid \exists t [(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)] \}.$$

Сначала докажем, что $\text{Pr}_1(R) = \omega$. В самом деле, пусть $n \in \omega$; тогда $\nu(n) = s \in S$ и, следовательно, найдётся $m_0 \in \omega$, для которого имеет место $\mu(m_0) = s$. Далее, $s = \mu(m_0) = \nu(f(m_0))$ и $\eta_\nu(n, f(m_0))$; таким образом, $R(n, f(m_0))$ и $n \in \text{Pr}_1(R)$.

Позитивные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузыренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leq \nu$. Возьмём вф f , для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:

$$R \Leftrightarrow \{\langle n, m \rangle \mid \exists t[(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)]\}.$$

Сначала докажем, что $\text{Pr}_1(R) = \omega$. В самом деле, пусть $n \in \omega$; тогда $\nu(n) = s \in S$ и, следовательно, найдётся $m_0 \in \omega$, для которого имеет место $\mu(m_0) = s$. Далее, $s = \mu(m_0) = \nu(f(m_0))$ и $\eta_\nu(n, f(m_0))$; таким образом, $R(n, f(m_0))$ и $n \in \text{Pr}_1(R)$.

По теореме об униформизации (С3.3), существует вф g такая, что $\Gamma_g \subseteq R$. Покажем, что $\nu = \mu g$. В самом деле, $R(n, g(n))$, поэтому найдётся $t_0 \in \omega$, для которого выполняется $\eta_\nu(n, t_0)$ и $f(g(n)) = t_0$. Отсюда заключаем, что $\nu(n) = \nu(t_0) = \nu(f(g(n))) = \mu(g(n))$. □

Позитивные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leq \nu$. Возьмём вф f , для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:

$$R \triangleq \{ \langle n, m \rangle \mid \exists t [(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)] \}.$$

Сначала докажем, что $\text{Pr}_1(R) = \omega$. В самом деле, пусть $n \in \omega$; тогда $\nu(n) = s \in S$ и, следовательно, найдётся $m_0 \in \omega$, для которого имеет место $\mu(m_0) = s$. Далее, $s = \mu(m_0) = \nu(f(m_0))$ и $\eta_\nu(n, f(m_0))$; таким образом, $R(n, f(m_0))$ и $n \in \text{Pr}_1(R)$.

По теореме об униформизации (С3.3), существует вф g такая, что $\Gamma_g \subseteq R$. Покажем, что $\nu = \mu g$. В самом деле, $R(n, g(n))$, поэтому найдётся $t_0 \in \omega$, для которого выполняется $\eta_\nu(n, t_0)$ и $f(g(n)) = t_0$. Отсюда заключаем, что $\nu(n) = \nu(t_0) = \nu(f(g(n))) = \mu(g(n))$. □

Следствие С4.2.

Любая однозначная (разрешимая, позитивная) нумерация минимальна.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leq \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leq \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
 $\eta_{\nu_0}(n, m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_{\nu}(f(n), f(m)).$

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.2.

Пусть ν — разрешимая (положительная, отрицательная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leq \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (положительной, отрицательной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
 $\eta_{\nu_0}(n, m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_\nu(f(n), f(m))$.
Pos Пусть ν — положительная нумерация, т.е. η_ν вп. Следовательно, $\eta_{\nu_0} = \{\langle n, m \rangle \mid \eta_\nu(f(n), f(m))\}$ и, по лемме С3.9, η_{ν_0} — впм. Таким образом, ν_0 положительна.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leq \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
 $\eta_{\nu_0}(n, m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_\nu(f(n), f(m))$.

Pos Пусть ν — позитивная нумерация, т.е. η_ν вп. Следовательно, $\eta_{\nu_0} = \{\langle n, m \rangle \mid \eta_\nu(f(n), f(m))\}$ и, по лемме С3.9, η_{ν_0} — впм. Таким образом, ν_0 позитивна.

Neg Пусть ν — негативная нумерация, т.е. $\omega^2 \setminus \eta_\nu$ вп. Следовательно, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0} = \{\langle n, m \rangle \mid \langle f(n), f(m) \rangle \notin \eta_\nu\}$ и, по лемме С3.9, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0}$ — впм. Таким образом, ν_0 негативна.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leq \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
 $\eta_{\nu_0}(n, m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_\nu(f(n), f(m))$.

Pos Пусть ν — позитивная нумерация, т.е. η_ν вп. Следовательно, $\eta_{\nu_0} = \{\langle n, m \rangle \mid \eta_\nu(f(n), f(m))\}$ и, по лемме С3.9, η_{ν_0} — впм. Таким образом, ν_0 позитивна.

Neg Пусть ν — негативная нумерация, т.е. $\omega^2 \setminus \eta_\nu$ вп. Следовательно, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0} = \{\langle n, m \rangle \mid \langle f(n), f(m) \rangle \notin \eta_\nu\}$ и, по лемме С3.9, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0}$ — впм. Таким образом, ν_0 негативна.

Dec Пусть ν — разрешимая нумерация, а значит, позитивна и негативна одновременно. По доказанному, ν_0 также является позитивной и негативной одновременно. По теореме С3.2 Поста, ν_0 разрешима. \square

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.3.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация множества S и пусть $s \in S$. Тогда $\nu^{-1}(s)$ вычислимо (вычислимо перечислимо, ко-вычислимо перечислимо).

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.3.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация множества S и пусть $s \in S$. Тогда $\nu^{-1}(s)$ вычислимо (вычислимо перечислимо, ко-вычислимо перечислимо).

Доказательство.

Пусть n_0 таково, что $\nu(n_0) = s$. Тогда (Dec, Pos)
 $n \in \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) = s) \Leftrightarrow (\nu(n) = \nu(n_0)) \Leftrightarrow \eta_\nu(n, n_0)$ и (Neg)
 $n \notin \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq \nu(n_0)) \Leftrightarrow \neg \eta_\nu(n, n_0).$ □

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.3.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация множества S и пусть $s \in S$. Тогда $\nu^{-1}(s)$ вычислимо (вычислимо перечислимо, ко-вычислимо перечислимо).

Доказательство.

Пусть n_0 таково, что $\nu(n_0) = s$. Тогда (**Dec**, **Pos**)
 $n \in \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) = s) \Leftrightarrow (\nu(n) = \nu(n_0)) \Leftrightarrow \eta_\nu(n, n_0)$ и (**Neg**)
 $n \notin \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq \nu(n_0)) \Leftrightarrow \neg \eta_\nu(n, n_0).$ □

Лемма С4.4.

Пусть $S \neq \emptyset$ — конечное множество. Тогда ν разрешима, если и только если $\nu^{-1}(s)$ вычислимо для всех $s \in S$.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

(\Rightarrow) Непосредственно следует из леммы С4.3. (\Leftarrow) Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$; тогда $\eta_\nu(n, m) \Leftrightarrow [((n \in \nu^{-1}(s_1)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_1))) \vee ((n \in \nu^{-1}(s_2)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_2))) \vee \dots \vee ((n \in \nu^{-1}(s_k)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_k)))]$. □

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

(\Rightarrow) Непосредственно следует из леммы С4.3. (\Leftarrow) Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$; тогда $\eta_\nu(n, m) \Leftrightarrow [((n \in \nu^{-1}(s_1)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_1))) \vee ((n \in \nu^{-1}(s_2)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_2))) \vee \dots \vee ((n \in \nu^{-1}(s_k)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_k)))]$. □

Пример С4.1.

Пусть $\eta = \iota_\omega \cup \{\langle 2n, 2n+1 \rangle, \langle 2n+1, 2n \rangle \mid n \in A\}$, где A — вп, но не вычислимо. Определим нумерацию ν множества ${}^\omega/\eta$ как $\nu(n) = [n]_\eta$; тогда $\eta_\nu = \eta$, причём каждый класс эквивалентности содержит не более двух элементов и, в частности, вычислимы. Однако нумерация ν позитивна, но не является разрешимой, поскольку имеет место $n \in A \Leftrightarrow (\nu(2n) = \nu(2n+1))$.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.5.

Пусть $S \neq \emptyset$ — конечное множество. Тогда любая позитивная нумерация разрешима.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.5.

Пусть $S \neq \emptyset$ — конечное множество. Тогда любая позитивная нумерация разрешима.

Доказательство.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k > 1$. Тогда $\nu^{-1}(s_i)$ и $\omega \setminus \nu^{-1}(s_i) = \bigcup_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^k \nu^{-1}(s_j)$ в.п., по лемме С4.3, а по теореме Поста (С3.2), $\nu^{-1}(s_i)$ вычислимо ($1 \leq i \leq k$). По лемме С4.4, ν разрешима. □

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.6.

Пусть $S \neq \emptyset$ — конечное множество. Тогда любая негативная нумерация разрешима.

Разрешимые нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.6.

Пусть $S \neq \emptyset$ — конечное множество. Тогда любая негативная нумерация разрешима.

Доказательство.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k > 1$. Тогда $\omega \setminus \nu^{-1}(s_i)$ и $\nu^{-1}(s_i) = \bigcap_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^k \omega \setminus \nu^{-1}(s_j)$ вп, по лемме С4.3, а по теореме Поста (С3.2), $\nu^{-1}(s_i)$ вычислимо ($1 \leq i \leq k$). По лемме С4.4, ν разрешима. □

Однозначные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.4.

Пусть ν — нумерация бесконечного множества S . Тогда ν разрешима, если и только если она эквивалентна некоторой однозначной.

Однозначные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.4.

Пусть ν — нумерация бесконечного множества S . Тогда ν разрешима, если и только если она эквивалентна некоторой однозначной.

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть однозначная нумерация ν_0 такова, что $\nu \equiv \nu_0$. Тогда $\nu \leq \nu_0$ и, по лемме С4.2, ν разрешима.

Однозначные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.4.

Пусть ν — нумерация бесконечного множества S . Тогда ν разрешима, если и только если она эквивалентна некоторой однозначной.

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть однозначная нумерация ν_0 такова, что $\nu \equiv \nu_0$. Тогда $\nu \leq \nu_0$ и, по лемме С4.2, ν разрешима.

(\Rightarrow) Пусть ν — разрешимая нумерация. Тогда η_ν вычислимо. Покажем, что функция g , перечисляющая в порядке строгого возрастания наименьшие числа из классов, вычислима:

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ g(n+1) = \mu t. [(t > g(n)) \wedge \forall i < t \neg \eta_\nu(i, t)]. \end{cases}$$

Положим $\nu_0(n) \Leftarrow \nu g(n)$ для всех $n \in \omega$ (g всюду определена, поскольку S бесконечно). Нумерация ν_0 однозначна, поскольку каждый класс η_ν -эквивалентности присутствует в точности один раз; кроме того, $\nu_0 \leq \nu$, что вытекает непосредственно из определения.

Условие $\nu \equiv \nu_0$ вытекает из следствия С4.2. □

Негативные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.5.

Пусть ν — негативная нумерация бесконечного множества S . Тогда существует однозначная нумерация ν_0 множества S такая, что $\nu_0 \leq \nu$.

Негативные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.5.

Пусть ν — негативная нумерация бесконечного множества S . Тогда существует однозначная нумерация ν_0 множества S такая, что $\nu_0 \leq \nu$.

Доказательство.

Пусть $A = c(\omega^2 \setminus \eta_\nu)$; возьмём сильную аппроксимацию $\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_s \subseteq \dots \subseteq \bigcup_s A_s = A$ для A , дополнительно удовлетворяющим условию $|A_{s+1} - A_s| \leq 1$ для всех $s \in \omega$. Определим функцию f следующим образом:

$$\begin{cases} f(0) \Leftarrow 0, \\ f(n+1) \Leftarrow I(\mu k. [(I(k) \notin \{f(0), \dots, f(n)\}) \wedge \\ \wedge \forall u < I(k) (c(u, I(k)) \in A_{r(k)})]). \end{cases}$$

Негативные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.5.

Пусть ν — негативная нумерация бесконечного множества S . Тогда существует однозначная нумерация ν_0 множества S такая, что $\nu_0 \leq \nu$.

Доказательство.

Пусть $A = c(\omega^2 \setminus \eta_\nu)$; возьмём сильную аппроксимацию $\emptyset = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_s \subseteq \dots \subseteq \bigcup_s A_s = A$ для A , дополнительно удовлетворяющим условию $|A_{s+1} - A_s| \leq 1$ для всех $s \in \omega$. Определим функцию f следующим образом:

$$\begin{cases} f(0) \Leftarrow 0, \\ f(n+1) \Leftarrow I(\mu k. [(I(k) \notin \{f(0), \dots, f(n)\}) \wedge \\ \wedge \forall u < I(k) (c(u, I(k)) \in A_{r(k)})]). \end{cases}$$

Докажем сначала, что **функция $f(n)$ частично вычислима**. Возьмём вспомогательную функцию $g(n) = p_0^{f(0)+1} \cdot p_1^{f(1)+1} \cdot \dots \cdot p_n^{f(n)+1}$ и докажем, что $g(n)$ частично вычислима; тогда $f(n) = \text{ex}(n, g(n)) \dot{-} 1$ и, в частности, $f(n)$ будет чвф.

Негативные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

В самом деле,

$$\left[\begin{array}{l} g(0) \Leftarrow 2, \\ g(n+1) \Leftarrow g(n) \times \\ \quad p_{n+1}^{s(l(\mu k. [\forall i \leq n (l(k) \neq \text{ex}(i, g(n)) \dot{-} 1) \wedge \forall u < l(k) (c(u, l(k)) \in A_{r(k)}))])}. \end{array} \right.$$

Негативные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

В самом деле,

$$\left[\begin{array}{l} g(0) \Leftarrow 2, \\ g(n+1) \Leftarrow g(n) \times \\ \quad p_{n+1}^{s(l(\mu k. [\forall i \leq n(l(k) \neq \text{ex}(i, g(n)) \dot{-} 1) \wedge \forall u < l(k) (c(u, l(k)) \in A_{r(k)}))])}. \end{array} \right.$$

Покажем теперь, что для каждого наименьшего ν -номера n_0 найдётся шаг s_{n_0} такой, что $\forall u < n_0 [c(u, n_0) \in A_{s_{n_0}}]$. В самом деле, для каждого $u < n_0$ выберем шаг s_u , для которого выполняется $c(u, n_0) \in A_{s_u}$; в силу монотонности аппроксимации, все числа попадут в A_s , где $s \Leftarrow \max\{s_u | u < n_0\}$. Отсюда вытекает, что **функция f всюду определена**, поскольку S бесконечно.

Негативные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Наконец, **любой наименьший ν -номер попадёт в ρf** . Возьмём любой наименьший ν -номер m_0 ; по доказанному, найдётся шаг s_{m_0} , для которого выполняется $c(u, m_0) \in A_{s_{m_0}}$ для всех $u < m_0$. Заметим, что существует лишь конечное число пар вида $\langle p, s_p \rangle$, для которых имеет место $c(p, s_p) < c(m_0, s_{m_0})$. Следовательно, среди чисел $f(0), f(1), \dots, f(m_0 + s_{m_0} + 1)$ обязательно будет присутствовать число m_0 , поскольку $m_0 + s_{m_0}$ — количество диагоналей, меньших данной.

Негативные нумерации

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Наконец, **любой наименьший ν -номер попадёт в ρf** . Возьмём любой наименьший ν -номер m_0 ; по доказанному, найдётся шаг s_{m_0} , для которого выполняется $c(u, m_0) \in A_{s_{m_0}}$ для всех $u < m_0$. Заметим, что существует лишь конечное число пар вида $\langle p, s_p \rangle$, для которых имеет место $c(p, s_p) < c(m_0, s_{m_0})$. Следовательно, среди чисел $f(0), f(1), \dots, f(m_0 + s_{m_0} + 1)$ обязательно будет присутствовать число m_0 , поскольку $m_0 + s_{m_0}$ — количество диагоналей, меньших данной.

Положим $\nu_0 \Leftarrow \nu f$. Из определения следует, что $\nu_0 \leq \nu$, а из вышеприведённых свойств вытекает, что ν_0 — однозначная нумерация множества S . □

Типы изоморфизма $L(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.7.

Если S счётно, то $L(S)$ имеет \aleph_1 минимальных элементов.

Типы изоморфизма $L(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Лемма С4.7.

Если S счётно, то $L(S)$ имеет \aleph_1 минимальных элементов.

Доказательство.

Воспользуемся здесь тем, что группа \mathfrak{S} перестановок множества ω континуальна (**доказать !!!**) Возьмём однозначную нумерацию ν множества S . Зафиксируем также отображение ν^* , обратное к ν . Тогда $\nu\psi$, $\psi \in \mathfrak{S}$, также будет однозначной нумерацией, как композиция двух биекций. Более того, трансформация $\psi \in \mathfrak{S} \mapsto \nu\psi \in N(S)$ осуществляет биективное соответствие между перестановками на натуральных числах и однозначными нумерациями множества S .

Ψ — инъекция. Пусть $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{S}$; тогда $(\nu\psi_1 = \nu\psi_2) \Rightarrow (\psi_1 = (\nu^*\nu)\psi_1 = \nu^*(\nu\psi_1) = \nu^*(\nu\psi_2) = (\nu^*\nu)\psi_2 = \psi_2)$.

Ψ — сюръекция. Пусть ν_0 — однозначная нумерация множества S . Тогда $\nu^*\nu_0 \in \mathfrak{S}$ и $\nu_0 = (\nu\nu^*)\nu_0 = \nu(\nu^*\nu_0)$.

Типы изоморфизма $L(S)$

Доказательство (окончание).

Так как множество однозначных нумераций континуально, множество их классов эквивалентности не более, чем континуально. Заметим, что каждый класс не более, чем счётен (на самом деле, в точности счётен): $\nu_0 f \in [\nu_0]_{\equiv}$ для подходящей вф f , а множество всех вычислимых функций счётно. Далее, множество различных классов однозначных нумераций континуально, поскольку в противном случае $\mathfrak{c} > |\bigcup_{\psi \in \mathfrak{G}} [\nu\psi]_{\equiv}| \geq |\{\mu \in N(S) \mid \mu - \text{однозначная}\}|$. Остаётся вспомнить, что любая однозначная нумерация минимальна (см. следствие С4.2). □

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Так как множество однозначных нумераций континуально, множество их классов эквивалентности не более, чем континуально. Заметим, что каждый класс не более, чем счётен (на самом деле, в точности счётен): $\nu_0 f \in [\nu_0]_{\equiv}$ для подходящей вф f , а множество всех вычислимых функций счётно. Далее, множество различных классов однозначных нумераций континуально, поскольку в противном случае $\mathfrak{c} > |\bigcup_{\psi \in \mathfrak{G}} [\nu\psi]_{\equiv}| \geq |\{\mu \in N(S) \mid \mu \text{ — однозначная}\}|$. Остаётся вспомнить, что любая однозначная нумерация минимальна (см. следствие С4.2). □

Лемма С4.8.

Если S конечно, то $\mathbf{L}(S)$ имеет наименьший элемент.

Типы изоморфизма $L(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

Пусть $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k \geq 1$. Положим

$$\nu_0(n) \Leftarrow \begin{cases} s_0, & \text{если } n = 0; \\ s_1, & \text{если } n = 1; \\ \dots & \dots \\ s_k, & \text{если } n \geq k. \end{cases}$$

Типы изоморфизма $L(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

Пусть $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k \geq 1$. Положим

$$\nu_0(n) \Leftarrow \begin{cases} s_0, & \text{если } n = 0; \\ s_1, & \text{если } n = 1; \\ \dots & \dots \\ s_k, & \text{если } n \geq k. \end{cases}$$

Докажем, что $\nu_0 \leq \nu$ для любой нумерации $\nu \in N(S)$. Возьмём числа n_i такие, что $\nu(n_i) = s_i$ ($0 \leq i \leq k$). Определим функцию f_0 следующим образом:

$$f_0(x) \Leftarrow \begin{cases} n_0, & \text{если } x = 0; \\ n_1, & \text{если } x = 1; \\ \dots & \dots \\ n_k, & \text{если } x \geq k. \end{cases}$$

Данная функция вычислима (даже примитивно рекурсивна) и, к тому же $\nu_0(x) = \nu f_0(x)$ для всех $x \in \omega$. □

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.3.

Пусть $S_0 \neq \emptyset$ — конечное множество и пусть S_1 счётно. Тогда $\mathbf{L}(S_0) \not\cong \mathbf{L}(S_1)$.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.3.

Пусть $S_0 \neq \emptyset$ — конечное множество и пусть S_1 счётно. Тогда $\mathbf{L}(S_0) \not\cong \mathbf{L}(S_1)$.

Доказательство.

В самом деле, $\mathbf{L}(S_0)$ имеет наименьший элемент, по лемме С4.8, а $\mathbf{L}(S_1)$ не может иметь наименьшего элемента, по лемме С4.7. □

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.3.

Пусть $S_0 \neq \emptyset$ — конечное множество и пусть S_1 счётно. Тогда $\mathbf{L}(S_0) \not\cong \mathbf{L}(S_1)$.

Доказательство.

В самом деле, $\mathbf{L}(S_0)$ имеет наименьший элемент, по лемме С4.8, а $\mathbf{L}(S_1)$ не может иметь наименьшего элемента, по лемме С4.7. □

Перейдём к описанию алгебраических свойств частично упорядоченных множеств вида $\mathbf{L}(S)$, где $S \neq \emptyset$. Кроме того, дадим без доказательства описание типа изоморфизма $\mathbf{L}(S)$, где $1 < |S| < \omega$.

Прямая сумма

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.9.

Пусть ν_0, ν_1 — нумерации; их **прямой суммой** называется

$$\nu_0 \oplus \nu_1(x) = \begin{cases} \nu_0\left(\frac{x}{2}\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\ \nu_1\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{если } x \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Прямая сумма

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.9.

Пусть ν_0, ν_1 — нумерации; их **прямой суммой** называется

$$\nu_0 \oplus \nu_1(x) = \begin{cases} \nu_0\left(\frac{x}{2}\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\ \nu_1\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{если } x \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Предложение С4.6.

Пусть ν, ν_0 и ν_1 — нумерации. Тогда $\nu_0 \oplus \nu_1 \leq \nu$, если и только если $\nu_0 \leq \nu$ и $\nu_1 \leq \nu$.

Прямая сумма

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.9.

Пусть ν_0, ν_1 — нумерации; их **прямой суммой** называется

$$\nu_0 \oplus \nu_1(x) = \begin{cases} \nu_0\left(\frac{x}{2}\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\ \nu_1\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{если } x \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Предложение С4.6.

Пусть ν, ν_0 и ν_1 — нумерации. Тогда $\nu_0 \oplus \nu_1 \leq \nu$, если и только если $\nu_0 \leq \nu$ и $\nu_1 \leq \nu$.

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $\nu_0 \oplus \nu_1 \leq \nu$ с помощью вф g , а именно, $(\nu_0 \oplus \nu_1)(n) = \nu(g(n))$ для всех $n \in \omega$. Возьмём $g_0(x) \Leftarrow \lambda x. g(2x)$; тогда $\nu g_0(x) = \nu g(2x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(2x) = \nu_0(x)$ для всех $x \in \omega$ и, следовательно, $\nu_0 \leq \nu$.

Прямая сумма

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Возьмём $g_1(x) \Leftarrow \lambda x. g(2x + 1)$; тогда
 $\nu g_1(x) = \nu g(2x + 1) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(2x + 1) = \nu_1(x)$ для всех $x \in \omega$ и,
следовательно, $\nu_1 \leq \nu$.

Прямая сумма

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Возьмём $g_1(x) \Leftarrow \lambda x.g(2x+1)$; тогда

$\nu g_1(x) = \nu g(2x+1) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(2x+1) = \nu_1(x)$ для всех $x \in \omega$ и, следовательно, $\nu_1 \leq \nu$.

(\Leftarrow) Пусть теперь $\nu_0 \leq \nu$ и $\nu_1 \leq \nu$; тогда найдутся вф f_0 и f_1 , для которых выполняются $\nu_0 = \nu f_0$ и $\nu_1 = \nu f_1$. Тогда функция

$$f(x) \Leftarrow \begin{cases} f_0\left(\left[\frac{x}{2}\right]\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\ f_1\left(\left[\frac{x-1}{2}\right]\right), & \text{если } x \text{ нечётно;} \end{cases}$$

вычислима; кроме того, $\nu f(x) = \nu f_0\left(\frac{x}{2}\right) = \nu_0\left(\frac{x}{2}\right) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(x)$,

если x чётно; $\nu f(x) = \nu f_1\left(\frac{x-1}{2}\right) = \nu_1\left(\frac{x-1}{2}\right) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(x)$,

если x нечётно. В любом случае, имеем $\nu_0 \oplus \nu_1 = \nu f$; таким образом, $\nu_0 \oplus \nu_1 \leq \nu$. □

Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

x_0



x_1



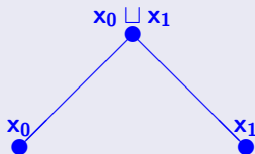
Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки



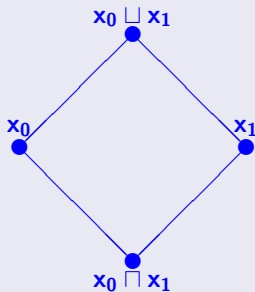
Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки



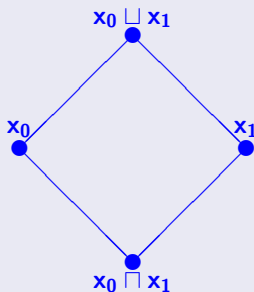
Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки



Определение С4.10.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **верхней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная верхняя грань $x_0 \sqcup x_1 \Leftarrow \sup\{x_0, x_1\}$.

Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.11.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \Leftarrow \inf\{x_0, x_1\}$.

Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.11.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \Leftarrow \inf\{x_0, x_1\}$.

Определение С4.12.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **решёткой**, если оно одновременно является и нижней, и верхней полурешетками.

Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.11.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \Leftarrow \inf\{x_0, x_1\}$.

Определение С4.12.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **решёткой**, если оно одновременно является и нижней, и верхней полурешетками.

Пример С4.2.

Любое линейно упорядоченное множество является решёткой.

Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.11.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \Leftarrow \inf\{x_0, x_1\}$.

Определение С4.12.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leq \rangle$ называется **решёткой**, если оно одновременно является и нижней, и верхней полурешетками.

Пример С4.2.

Любое линейно упорядоченное множество является решёткой.

Следствие С4.4.

Структуры $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ являются верхними полурешётками для любого не более, чем счётного множества S . Если, к тому же, S счётно, то $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ не являются нижними полурешётками.

Верхняя полурешётка

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство.

То, что данные структуры являются верхними полурешётками, непосредственно следует из предложения С4.6. Докажем теперь, что в случае, когда S счётно, $L(S)$ и $L^*(S)$ не являются нижними полурешётками. Возьмём два различных минимальных элемента $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \in L(S)$ (см. лемму С4.7); тогда не существует $\mathbf{a}_0 \sqcap_{L(S)} \mathbf{a}_1 \in L(S)$ (если бы этот элемент существовал (обозначим его через \mathbf{c}), то $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}_0 \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}_1 \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a}_1$; следовательно, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{c} = \mathbf{a}_1$, однако $\mathbf{a}_0 \neq \mathbf{a}_1$, противоречие). Допустим, что существует $\mathbf{a}_0 \sqcap_{L^*(S)} \mathbf{a}_1 \in L^*(S)$; если $\mathbf{a}_0 \sqcap_{L^*(S)} \mathbf{a}_1 \in L(S)$, то $\mathbf{a}_0 \sqcap_{L^*(S)} \mathbf{a}_1$ — точная нижняя грань элементов \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 в $L(S)$. Поэтому $\mathbf{a}_0 \sqcap_{L^*(S)} \mathbf{a}_1 \in L(S_0)$ для некоторого $S_0 \subset S$. Возьмём $s_0 \in S \setminus S_0$; тогда $[\lambda n. s_0]_{\equiv} \leq \mathbf{a}_0$, $[\lambda n. s_0]_{\equiv} \leq \mathbf{a}_1$, но $[\lambda n. s_0]_{\equiv} \not\leq \mathbf{a}_0 \sqcap_{L^*(S)} \mathbf{a}_1$, противоречие. □

Верхние полурешётки

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S . Тем самым, верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Верхние полурешётки

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S . Тем самым, верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Лемма С4.9.

Любая конечная верхняя полурешётка с наименьшим элементом является решёткой.

Верхние полурешётки

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S . Тем самым, верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Лемма С4.9.

Любая конечная верхняя полурешётка с наименьшим элементом является решёткой.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{L} = \langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — конечная верхняя полурешётка и пусть $\mathbf{0} \in L$ — наименьший элемент. Докажем, что \mathcal{L} — решётка. Пусть $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 \in L$, тогда положим $X \Leftarrow \{\mathbf{c} \in L \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{c}_0, \mathbf{c} \leq \mathbf{c}_1\}$. Множество X не пусто, поскольку $\mathbf{0} \in X$; кроме того, X конечно, как подмножество конечного множества L . Докажем, что $\mathbf{c}_0 \sqcap \mathbf{c}_1 = \bigsqcup X$.

Верхние полурешётки

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S . Тем самым, верхние полурешётки $L(S)$ и $L^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Лемма С4.9.

Любая конечная верхняя полурешётка с наименьшим элементом является решёткой.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{L} = \langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — конечная верхняя полурешётка и пусть $\mathbf{0} \in L$ — наименьший элемент. Докажем, что \mathcal{L} — решётка. Пусть $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 \in L$, тогда положим $X \Leftarrow \{\mathbf{c} \in L \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{c}_0, \mathbf{c} \leq \mathbf{c}_1\}$. Множество X не пусто, поскольку $\mathbf{0} \in X$; кроме того, X конечно, как подмножество конечного множества L . Докажем, что $\mathbf{c}_0 \sqcap \mathbf{c}_1 = \bigsqcup X$.

$\bigsqcup X_0$ — нижняя грань \mathbf{c}_0 и \mathbf{c}_1 для любого $X_0 \subseteq X$. Доказывается индукцией по $|X_0|$. Если $n = 1$, то $X_0 = \{\mathbf{a}\}$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}_0, \mathbf{a} \leq \mathbf{c}_1$.

Верхние полурешётки

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Если $n = k + 1$, то $X_0 = X_1 \cup \{a\}$ и $|X_1| = k$; по предположению индукции, $\sqcup X_1 \leq c_0$ и $\sqcup X_1 \leq c_1$; кроме того, $a \leq c_0$, $a \leq c_1$.
Далее, $\sqcup X_0 = \sqcup (X_1 \cup \{a\}) = \sqcup X_1 \sqcup a \leq c_i$, $i = 0, 1$.

Верхние полурешётки

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Если $n = k + 1$, то $X_0 = X_1 \cup \{a\}$ и $|X_1| = k$; по предположению индукции, $\sqcup X_1 \leq c_0$ и $\sqcup X_1 \leq c_1$; кроме того, $a \leq c_0$, $a \leq c_1$. Далее, $\sqcup X_0 = \sqcup (X_1 \cup \{a\}) = \sqcup X_1 \sqcup a \leq c_i$, $i = 0, 1$. $a \leq c_0$, $a \leq c_1 \Rightarrow a \leq \sqcup X$. Пусть справедлива посылка (т.е. $a \leq c_0$, $a \leq c_1$), тогда $a \in X$ и, следовательно, $a \leq \sqcup X$. □

Верхние полурешётки

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

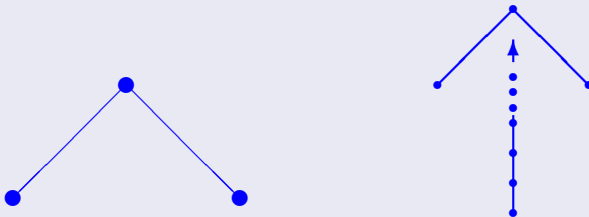
Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

Если $n = k + 1$, то $X_0 = X_1 \cup \{a\}$ и $|X_1| = k$; по предположению индукции, $\sqcup X_1 \leq c_0$ и $\sqcup X_1 \leq c_1$; кроме того, $a \leq c_0$, $a \leq c_1$. Далее, $\sqcup X_0 = \sqcup(X_1 \cup \{a\}) = \sqcup X_1 \sqcup a \leq c_i$, $i = 0, 1$. $a \leq c_0$, $a \leq c_1 \Rightarrow a \leq \sqcup X$. Пусть справедлива посылка (т.е. $a \leq c_0$, $a \leq c_1$), тогда $a \in X$ и, следовательно, $a \leq \sqcup X$. □

Верхняя полурешётка, но не решётка



Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полуреšetки

Предложение С4.7.

Пусть нумерации ν_0, ν_1, ν, μ таковы, что $\nu \leq \nu_0 \oplus \nu_1$ и $\mu \leq \nu_0, \mu \leq \nu_1, \mu \leq \nu$. Тогда найдутся нумерации ν'_0 и ν'_1 , для которых выполняется следующее: $\nu \equiv \nu'_0 \oplus \nu'_1, \mu \leq \nu'_0 \leq \nu_0, \mu \leq \nu'_1 \leq \nu_1$.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.7.

Пусть нумерации ν_0, ν_1, ν, μ таковы, что $\nu \leq \nu_0 \oplus \nu_1$ и $\mu \leq \nu_0, \mu \leq \nu_1, \mu \leq \nu$. Тогда найдутся нумерации ν'_0 и ν'_1 , для которых выполняется следующее: $\nu \equiv \nu'_0 \oplus \nu'_1, \mu \leq \nu'_0 \leq \nu_0, \mu \leq \nu'_1 \leq \nu_1$.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu = (\nu_0 \oplus \nu_1)f$. Положим $R_0 \Leftarrow \{n | f(n) \text{ чётно}\}$ и $R_1 \Leftarrow \{n | f(n) \text{ нечётно}\}$. Определим нумерацию $\nu'_i, i = 0, 1$, следующим образом:

если $R_i = \emptyset$, то $\nu'_i \Leftarrow \mu$; если же $R_i \neq \emptyset$, то возьмём вф g_i так, что $\rho g_i = R_i$, и положим $\nu'_i \Leftarrow \mu \oplus \nu g_i$.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полуреšetки

Предложение С4.7.

Пусть нумерации ν_0, ν_1, ν, μ таковы, что $\nu \leq \nu_0 \oplus \nu_1$ и $\mu \leq \nu_0, \mu \leq \nu_1, \mu \leq \nu$. Тогда найдутся нумерации ν'_0 и ν'_1 , для которых выполняется следующее: $\nu \equiv \nu'_0 \oplus \nu'_1, \mu \leq \nu'_0 \leq \nu_0, \mu \leq \nu'_1 \leq \nu_1$.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu = (\nu_0 \oplus \nu_1)f$. Положим $R_0 \Leftarrow \{n | f(n) \text{ чётно}\}$ и $R_1 \Leftarrow \{n | f(n) \text{ нечётно}\}$. Определим нумерацию $\nu'_i, i = 0, 1$, следующим образом:

если $R_i = \emptyset$, то $\nu'_i \Leftarrow \mu$; если же $R_i \neq \emptyset$, то возьмём вф g_i так, что $\rho g_i = R_i$, и положим $\nu'_i \Leftarrow \mu \oplus \nu g_i$.

Проверим, что $\nu'_i \leq \nu_i$. Если $R_i = \emptyset$, то $\nu'_i = \mu \leq \nu_i$. Если $R_i \neq \emptyset$, то достаточно показать, что $\nu g_i \leq \nu_i$. Пусть $i = 0$ и $F \Leftarrow \lambda x \left[\frac{fg_0(x)}{2} \right]$,

тогда $\nu g_0(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)fg_0(x) = \nu_0 \left[\frac{fg_0(x)}{2} \right] = \nu_0 F(x)$;

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

пусть $i = 1$ и $G \Leftrightarrow \lambda x \left[\frac{fg_1(x) - 1}{2} \right]$, тогда

$\nu g_1(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)fg_1(x) = \nu_1 \left[\frac{fg_1(x) - 1}{2} \right] = \nu_1 G(x)$. Итак, $\nu'_i \leq \nu_i$.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

пусть $i = 1$ и $G \Leftrightarrow \lambda x \left[\frac{fg_1(x) - 1}{2} \right]$, тогда

$$\nu g_1(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)fg_1(x) = \nu_1 \left[\frac{fg_1(x) - 1}{2} \right] = \nu_1 G(x). \text{ Итак, } \nu'_i \leq \nu_i.$$

Так как $\mu \leq \nu$ и $\nu g_i \leq \nu$, имеем $\nu'_i \leq \nu$ и $\nu'_0 \oplus \nu'_1 \leq \nu$, по предложению С4.6.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (продолжение).

пусть $i = 1$ и $G \Leftarrow \lambda x \left[\frac{fg_1(x) - 1}{2} \right]$, тогда

$$\nu g_1(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)fg_1(x) = \nu_1 \left[\frac{fg_1(x) - 1}{2} \right] = \nu_1 G(x). \text{ Итак, } \nu'_i \leq \nu_i.$$

Так как $\mu \leq \nu$ и $\nu g_i \leq \nu$, имеем $\nu'_i \leq \nu$ и $\nu'_0 \oplus \nu'_1 \leq \nu$, по предложению С4.6.

Покажем, что $\nu \leq \nu'_0 \oplus \nu'_1$. Рассмотрим случай $R_0 \neq \emptyset$ и $R_1 \neq \emptyset$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть функция H определяется так:

$$H \Leftarrow \lambda x [\mu y ((g_0(y) = x) \vee (g_1(y) = x))],$$

а функция h — следующим образом:

$$h(x) \Leftarrow \begin{cases} 2(2H(x) + 1), & \text{если } g_0(H(x)) = x \text{ (т.е. } x \in R_0); \\ 2(2H(x) + 1) + 1, & \text{если } g_1(H(x)) = x \text{ (т.е. } x \in R_1). \end{cases}$$

Проверим, что $\nu = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)h$. Пусть $x \in R_0$, тогда

$$\begin{aligned} \nu x &= \nu g_0(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_0)(2H(x) + 1) = \nu'_0(2H(x) + 1) = \\ &= (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(2(2H(x) + 1)) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(h(x)); \end{aligned}$$

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

если $x \in R_1$, то $\nu x = \nu g_1(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_1)(2H(x) + 1) = \nu'_1(2H(x) + 1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(2(2H(x) + 1) + 1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(h(x))$.

Так как $R_0 \cap R_1 = \emptyset$ и $R_0 \cup R_1 = \omega$, имеем $\nu x = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)h(x)$ для всех $x \in \omega$; таким образом, $\nu \leq \nu'_0 \oplus \nu'_1$. □

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

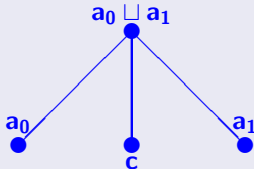
Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Доказательство (окончание).

если $x \in R_1$, то $\nu x = \nu g_1(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_1)(2H(x) + 1) = \nu'_1(2H(x) + 1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(2(2H(x) + 1) + 1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(h(x))$.

Так как $R_0 \cap R_1 = \emptyset$ и $R_0 \cup R_1 = \omega$, имеем $\nu x = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)h(x)$ для всех $x \in \omega$; таким образом, $\nu \leq \nu'_0 \oplus \nu'_1$. □

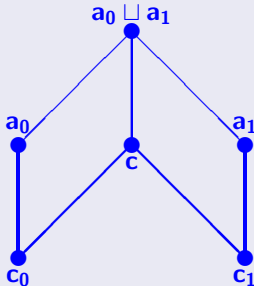


Свойство дистрибутивности

Доказательство (окончание).

если $x \in R_1$, то $\nu x = \nu g_1(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_1)(2H(x) + 1) = \nu'_1(2H(x) + 1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(2(2H(x) + 1) + 1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(h(x))$.

Так как $R_0 \cap R_1 = \emptyset$ и $R_0 \cup R_1 = \omega$, имеем $\nu x = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)h(x)$ для всех $x \in \omega$; таким образом, $\nu \leq \nu'_0 \oplus \nu'_1$. □



Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.13.

Верхняя полурешётка $\langle L, \leq, \sqcup \rangle$ называется **дистрибутивной**, если выполняется следующее: для всех $a_0, a_1, c \in L$ таких, что $c \leq a_0 \sqcup a_1$, найдутся $c_0 \leq a_0$ и $c_1 \leq a_1$, для которых имеет место $c = c_0 \sqcup c_1$.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.13.

Верхняя полурешётка $\langle L, \leq, \sqcup \rangle$ называется **дистрибутивной**, если выполняется следующее: для всех $a_0, a_1, c \in L$ таких, что $c \leq a_0 \sqcup a_1$, найдутся $c_0 \leq a_0$ и $c_1 \leq a_1$, для которых имеет место $c = c_0 \sqcup c_1$.

Определение С4.14.

Решётка $\langle L, \leq, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется **дистрибутивной**, если для всех $a_0, a_1, c \in L$ выполняется тождество $(a_0 \sqcup a_1) \sqcap c = (a_0 \sqcap c) \sqcup (a_1 \sqcap c)$.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Определение С4.13.

Верхняя полурешётка $\langle L, \leq, \sqcup \rangle$ называется **дистрибутивной**, если выполняется следующее: для всех $a_0, a_1, c \in L$ таких, что $c \leq a_0 \sqcup a_1$, найдутся $c_0 \leq a_0$ и $c_1 \leq a_1$, для которых имеет место $c = c_0 \sqcup c_1$.

Определение С4.14.

Решётка $\langle L, \leq, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется **дистрибутивной**, если для всех $a_0, a_1, c \in L$ выполняется тождество $(a_0 \sqcup a_1) \sqcap c = (a_0 \sqcap c) \sqcup (a_1 \sqcap c)$.

Определение С4.15.

Пусть $\langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка и пусть $a \in L$. **Верхним конусом** будем называть множество $a \uparrow L \triangleq \{c \in L \mid a \leq c\}$.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.5.

Пусть $S \neq \emptyset$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^*(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}^*(S)$ дистрибутивна.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.5.

Пусть $S \neq \emptyset$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^*(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}^*(S)$ дистрибутивна.

Следствие С4.6.

Пусть $S \neq \emptyset$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}(S)$ дистрибутивна.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Следствие С4.5.

Пусть $S \neq \emptyset$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^*(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}^*(S)$ дистрибутивна.

Следствие С4.6.

Пусть $S \neq \emptyset$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}(S)$ дистрибутивна.

Следствие С4.7.

Пусть $S \neq \emptyset$ — конечное множество. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{L}(S)$ дистрибутивна.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.8.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Тогда \mathfrak{L} дистрибутивна как решётка, если и только если она дистрибутивна как верхняя полурешётка.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.8.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Тогда \mathfrak{L} дистрибутивна как решётка, если и только если она дистрибутивна как верхняя полурешётка.

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $a_0, a_1, c \in L$ таковы, что $c \leq a_0 \sqcup a_1$; тогда положим $c_0 \Leftarrow c \sqcap a_0$ и $c_1 \Leftarrow c \sqcap a_1$. Следовательно, $c_i = c \sqcap a_i \leq a_i$, $i = 0, 1$, и $c = c \sqcap (a_0 \sqcup a_1) = (c \sqcap a_0) \sqcup (c \sqcap a_1) = c_0 \sqcup c_1$.

Свойство дистрибутивности

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Предложение С4.8.

Пусть $\mathcal{L} = \langle L, \leq, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Тогда \mathcal{L} дистрибутивна как решётка, если и только если она дистрибутивна как верхняя полурешётка.

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть $a_0, a_1, c \in L$ таковы, что $c \leq a_0 \sqcup a_1$; тогда положим $c_0 \Leftarrow c \sqcap a_0$ и $c_1 \Leftarrow c \sqcap a_1$. Следовательно, $c_i = c \sqcap a_i \leq a_i$, $i = 0, 1$, и $c = c \sqcap (a_0 \sqcup a_1) = (c \sqcap a_0) \sqcup (c \sqcap a_1) = c_0 \sqcup c_1$.

(\Leftarrow) Пусть \mathcal{L} дистрибутивна как верхняя полурешётка; докажем, что выполняется соотношение $c \sqcap (a_0 \sqcup a_1) = (c \sqcap a_0) \sqcup (c \sqcap a_1)$.

(\geq) В самом деле, $c \sqcap a_i \leq c \sqcap (a_0 \sqcup a_1)$, $i = 0, 1$, поскольку $[b \leq c, b \leq a_i] \Rightarrow [b \leq c, b \leq a_0 \sqcup a_1]$; следовательно, $(c \sqcap a_0) \sqcup (c \sqcap a_1) \leq c \sqcap (a_0 \sqcup a_1)$.

(\leq) Так как $c \sqcap (a_0 \sqcup a_1) \leq a_0 \sqcup a_1$, найдутся элементы $c_0 \leq a_0$ и $c_1 \leq a_1$ такие, что $c \sqcap (a_0 \sqcup a_1) = c_0 \sqcup c_1$. Следовательно, $c_0 \leq c$, $c_1 \leq c$ и $c_0 \leq c \sqcap a_0$, $c_1 \leq c \sqcap a_1$. Таким образом, $c \sqcap (a_0 \sqcup a_1) = c_0 \sqcup c_1 \leq (c \sqcap a_0) \sqcup (c \sqcap a_1)$. □

Идеалы полурешёток

Лекция С4
Нумерации и
вычисли-
мость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Идеалы полурешёток

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение С4.16.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки \mathfrak{L} (и обозначается как $\mathcal{I} \triangleleft \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1 $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{I}, \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \sqcup \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I};$
- 2 $\mathbf{b} \in \mathcal{I}, \mathbf{a} \in L, \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathcal{I}.$

Идеалы полурешёток

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение С4.16.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки \mathfrak{L} (и обозначается как $\mathcal{I} \triangleleft \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1 $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{I}, \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \sqcup \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I};$
- 2 $\mathbf{b} \in \mathcal{I}, \mathbf{a} \in L, \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathcal{I}.$

Определение С4.17.

Идеал $\mathcal{I} \triangleleft \mathfrak{L}$ полурешётки \mathfrak{L} называется **главным**, если он имеет наибольший элемент. В противном случае он называется **неглавным**.

Идеалы полурешёток

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение С4.16.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки \mathfrak{L} (и обозначается как $\mathcal{I} \triangleleft \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1 $a_1 \in \mathcal{I}, a_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow a_1 \sqcup a_2 \in \mathcal{I}$;
- 2 $b \in \mathcal{I}, a \in L, a \leq b \Rightarrow a \in \mathcal{I}$.

Определение С4.17.

Идеал $\mathcal{I} \triangleleft \mathfrak{L}$ полурешётки \mathfrak{L} называется **главным**, если он имеет наибольший элемент. В противном случае он называется **неглавным**.

Примеры С4.3.

- 1 Пусть $a \in L$, тогда $a \downarrow \mathfrak{L} \triangleq \{c \in L \mid c \leq a\}$ — главный идеал.

Идеалы полурешёток

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение C4.16.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки \mathfrak{L} (и обозначается как $\mathcal{I} \triangleleft \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1 $a_1 \in \mathcal{I}, a_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow a_1 \sqcup a_2 \in \mathcal{I}$;
- 2 $b \in \mathcal{I}, a \in L, a \leq b \Rightarrow a \in \mathcal{I}$.

Определение C4.17.

Идеал $\mathcal{I} \triangleleft \mathfrak{L}$ полурешётки \mathfrak{L} называется **главным**, если он имеет наибольший элемент. В противном случае он называется **неглавным**.

Примеры C4.3.

- 1 Пусть $a \in L$, тогда $a \downarrow \mathfrak{L} \Leftrightarrow \{c \in L \mid c \leq a\}$ — главный идеал.
- 2 Пусть не более, чем счётное множество S таково, что $|S| > 1$; тогда $L(S) \triangleleft L(S)$ — неглавный идеал.

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

c-универсальность

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

Определение С4.18.

Дистрибутивную полурешётку $\mathcal{L} = \langle L, \leq, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ с нулём (наименьшим элементом) будем называть **допустимой**, если любой главный её идеал не более, чем счётен.

\mathfrak{c} -универсальность

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

Определение С4.18.

Дистрибутивную полурешётку $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ с нулём (наименьшим элементом) будем называть **допустимой**, если любой главный её идеал не более, чем счётен. Допустимую полурешётку \mathfrak{L} назовём **\mathfrak{c} -универсальной**, если она удовлетворяет следующему условию:

если \mathfrak{L}' — допустимая полурешётка мощности $< \mathfrak{c}$, φ — изоморфизм собственного идеала $S' \triangleleft \mathfrak{L}'$ на идеал \mathfrak{L} , то существует изоморфизм φ' полурешётки \mathfrak{L}' на идеал \mathfrak{L} , продолжающий φ , т.е. $\varphi' \upharpoonright S' = \varphi$.

\mathfrak{c} -универсальность

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

Определение С4.18.

Дистрибутивную полурешётку $\mathfrak{L} = \langle L, \leq, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ с нулём (наименьшим элементом) будем называть **допустимой**, если любой главный её идеал не более, чем счётен. Допустимую полурешётку \mathfrak{L} назовём **\mathfrak{c} -универсальной**, если она удовлетворяет следующему условию:

если \mathfrak{L}' — допустимая полурешётка мощности $< \mathfrak{c}$, φ — изоморфизм собственного идеала $S' \triangleleft \mathfrak{L}'$ на идеал \mathfrak{L} , то существует изоморфизм φ' полурешётки \mathfrak{L}' на идеал \mathfrak{L} , продолжающий φ , т.е. $\varphi' \upharpoonright S' = \varphi$.

Следствие С4.8.

Любые две \mathfrak{c} -универсальные полурешётки изоморфны.

ς -универсальность

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Теорема С4.1.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $L(S)$ является ς -универсальной полурешёткой.

\mathfrak{s} -универсальность

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Теорема С4.1.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $\mathbf{L}(S)$ является \mathfrak{s} -универсальной полурешёткой.

Следствие С4.9.

Если конечные множества S_1, S_2 содержат по меньшей мере два элемента, то $\mathbf{L}(S_1) \simeq \mathbf{L}(S_2)$.

\mathfrak{s} -универсальность

Лекция С4
Нумерации и
вычислимость, I

Вадим
Пузаренко

Разрешимые
нумерации

Полурешётки

Теорема С4.1.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $\mathbf{L}(S)$ является \mathfrak{s} -универсальной полурешёткой.

Следствие С4.9.

Если конечные множества S_1, S_2 содержат по меньшей мере два элемента, то $\mathbf{L}(S_1) \simeq \mathbf{L}(S_2)$.

Следствие С4.10.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $\mathbf{L}(S)$ — дистрибутивная верхняя полурешётка, не являющаяся решёткой.

Спасибо за внимание.