Лекция С7
Относительная вычислимость, I

Вадим Пузаренко

26 февраля 2024 г.

Тьюрингова вычислимость

Пусть $A \subseteq \omega$.

Тьюринговa вычислимость

Пусть $A \subseteq \omega$.

Определение С7.1.

Частичная функция ψ называется **частично вычислимой относительно A** или **частично A-вычислимой (A-чвф)**, если существует последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n = \psi$ частичных функций такая, что каждая из них либо простейшая или χ_A, либо получена из предыдущих с помощью операторов S, R, M.

Тьюрингова вычислимость

Пусть $A \subseteq \omega$.

Определение C7.1.

Частичная функция ψ называется **частично вычислимой относительно A** или **частично A-вычислимой (A-чвф)**, если существует последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n = \psi$ частичных функций такая, что каждая из них либо простейшая или χ_A, либо получена из предыдущих с помощью операторов S, R, M.

Определение C7.2.

Функция ψ называется **вычислимой относительно A** или **A-вычислимой (A-вф)**, если она является частично A-вычислимой и всюду определённой.

Тьюрингова вычислимость

Примеры С7.1.

Следующие функции являются A-чвф:

1. любая чвф;
2. если A — вм, то любая A-чвф будет чвф;
3. $\chi_A(x)$;
4. $\chi_{\overline{A}}(x) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_A(x))$;
5. $\chi_A^*(x) = \mu y[\chi_A(x) = 0]$;
6. $g(x) \leftrightharpoons \begin{cases} f_0(x), & \text{если } x \in A; \\ f_1(x), & \text{если } x \in \overline{A}; \end{cases}$

   где $f_0(x)$ и $f_1(x)$ — чвф.

Тьюринговая вычислимость

Команды.

INC I Как содержимое I-го регистра, так и счётчик команд увеличивает на единицу; содержимое остальных регистров остаётся неизменным.

DEC I, *n* Если содержимое I-го регистра больше нуля, то уменьшает содержимое I-го регистра на единицу и помещает в счётчик команд число n; если же содержимое I-го регистра равняется нулю, то содержимое I-го регистра не меняется, а счётчик команд увеличивается на единицу. Во всех случаях содержимое регистра $\mathrm{J} \neq \mathrm{I}$ остаётся неизменным.

SET I, *n* Если содержимое I-го регистра попадает в A, то помещаем в счётчик команд число n; в противном случае счётчик команд увеличивается на единицу. Содержимое всех регистров остаётся неизменным.

Тьюринговая вычислимость

Программа.

Программа имеет вид

$$\begin{array}{rl} 0: & P_0 \\ 1: & P_1 \\ \ldots & \ldots \\ n: & P_n \end{array}$$

Здесь число k в записи $k:\ldots$ означает значение счётчика команд, а P_k — одна из команд, описанных выше ($0 \leqslant k \leqslant n$).

Тьюрингова вычислимость

Программа.

Программа имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &: \; P_0 \\ 1 &: \; P_1 \\ \ldots & \;\; \ldots \\ n &: \; P_n \end{aligned}$$

Здесь число k в записи $k : \ldots$ означает значение счётчика команд, а P_k — одна из команд, описанных выше ($0 \leqslant k \leqslant n$).

Машина Шёнфилда с оракулом A.

Однозначно задаётся следующими атрибутами:

1) потенциально бесконечным множеством **регистров**, занумерованными натуральными числами. Каждый регистр — это ячейка памяти, способная содержать любое натуральное число.

Тьюрингова вычислимость

Машина Шёнфилда с оракулом A.

Содержимое регистров может меняться в процессе вычислений. Отметим, что каждая фиксированная машина Шёнфилда использует в своих вычислениях только конечное число регистров. Основное назначение регистровой памяти — это хранение входных, промежуточных и выходных данных.

2) **счётчиком команд**, являющимся особой ячейкой памяти, которая в каждый момент времени содержит некоторое натуральное число. Счётчик команд указывает на номер команды, которая исполняется в данный момент. В начальный момент времени счётчик команд равняется нулю.

3) **программой**, содержащейся в выделенной ячейке памяти машины. Программа не меняется в процессе вычисления.

Шаг машины состоит в выполнении команды, на которую указывает счётчик команд. Если команды с таким номером нет, то программа останавливается.

Тьюрингова вычислимость

Определение C7.3.

Частичная числовая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется **вычислимой на машине Шёнфилда с оракулом** A с программой P, если выполняются следующие условия (здесь $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \omega$):

1. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\downarrow$, то машина P, начиная работу с содержимым $[i]$-го регистра n_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ и остальными регистрами, содержащими 0, останавливается, а $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ находится в $[0]$-м регистре;
2. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\uparrow$, то машина P, начиная работу с содержимым $[i]$-го регистра n_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ и остальными регистрами, содержащими 0, не останавливается и работает бесконечно.

Тьюрингова вычислимость

Определение C7.3.

Частичная числовая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется **вычислимой на машине Шёнфилда с оракулом** A с программой P, если выполняются следующие условия (здесь $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \omega$):

1. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\downarrow$, то машина P, начиная работу с содержимым $[i]$-го регистра n_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ и остальными регистрами, содержащими 0, останавливается, а $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ находится в $[0]$-м регистре;
2. если $f(n_1, n_2, \ldots, n_k)\uparrow$, то машина P, начиная работу с содержимым $[i]$-го регистра n_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ и остальными регистрами, содержащими 0, не останавливается и работает бесконечно.

Пример C7.2.

Следующая программа вычисляет $\chi_A(x)$:

$0 : \mathrm{SET}\,1, 5$	$1 : \mathrm{DEC}\,0, 1$	$2 : \mathrm{INC}\,0$
$3 : \mathrm{INC}\,0$	$4 : \mathrm{DEC}\,0, 6$	$5 : \mathrm{DEC}\,0, 5$

A-ЧВФ $\mapsto$ A-МШ

Теорема С7.1.

Любая частично A-вычислимая функция вычислима на некоторой машине Шёнфилда с оракулом A.

A-ЧВФ $\mapsto$ A-МШ

Теорема C7.1.

Любая частично A-вычислимая функция вычислима на некоторой машине Шёнфилда с оракулом A.

Доказательство.

Следует повторить рассуждения из доказательства теоремы C1.2, а также использовать пример C7.2. $\square$

A-ЧВФ $\mapsto$ A-МШ

Теорема C7.1.

Любая частично A-вычислимая функция вычислима на некоторой машине Шёнфилда с оракулом A.

Доказательство.

Следует повторить рассуждения из доказательства теоремы C1.2, а также использовать пример C7.2. $\square$

Коды операторов (команд).

$\mathrm{cd}(\mathrm{INC}\,[i]) = \mathrm{code}(\langle 0, i\rangle)$,
$\mathrm{cd}(\mathrm{DEC}\,[i], j) = \mathrm{code}(\langle 1, i, j\rangle)$,
$\mathrm{cd}(\mathrm{SET}\,[i], j) = \mathrm{code}(\langle 2, i, j\rangle)$.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Код программы.

Пусть программа P имеет вид:

$0 : P_0$

$1 : P_1$

$\ldots$

$k-1 : P_{k-1}$

Тогда положим $\mathrm{code}(P) = \mathrm{code}(\langle \mathrm{cd}(P_0), \mathrm{cd}(P_1), \ldots, \mathrm{cd}(P_{k-1})\rangle)$.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Код программы.

Пусть программа P имеет вид:

$0 : P_0$

$1 : P_1$

$\dots$

$k-1 : P_{k-1}$

Тогда положим $\mathrm{code}(P) = \mathrm{code}(\langle \mathrm{cd}(P_0), \mathrm{cd}(P_1), \dots, \mathrm{cd}(P_{k-1}) \rangle)$.

Лемма C7.1.

Множество $\mathrm{Com}(x)$ кодов команд примитивно рекурсивно.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Код программы.

Пусть программа P имеет вид:
$0 : P_0$
$1 : P_1$
$\dots$
$k-1 : P_{k-1}$
Тогда положим $\mathrm{code}(P) = \mathrm{code}(\langle \mathrm{cd}(P_0), \mathrm{cd}(P_1), \dots, \mathrm{cd}(P_{k-1})\rangle)$.

Лемма C7.1.

Множество $\mathrm{Com}(x)$ кодов команд примитивно рекурсивно.

Лемма C7.2.

Множество $\mathrm{Prog}(x)$ кодов программ примитивно рекурсивно.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Код программы.

Пусть программа P имеет вид:
$0 : P_0$
$1 : P_1$
$\ldots$
$k-1 : P_{k-1}$
Тогда положим $\mathrm{code}(P) = \mathrm{code}(\langle \mathrm{cd}(P_0), \mathrm{cd}(P_1), \ldots, \mathrm{cd}(P_{k-1})\rangle)$.

Лемма С7.1.

Множество $\mathrm{Com}(x)$ кодов команд примитивно рекурсивно.

Лемма С7.2.

Множество $\mathrm{Prog}(x)$ кодов программ примитивно рекурсивно.

Замечание С7.1.

Коды программ машин Шёнфилда с оракулом не зависят от оракула.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

1. $\mathrm{ct}^A(e, x, n)$ выдаёт содержимое счётчика команд после n шагов вычисления с программой с кодом e и содержимых x_1, x_2, …, x_k регистров с 1-го по k-ый, если $x = \mathrm{code}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle)$.
2. $\mathrm{rg}^A(e, x, n)$ выдаёт код последовательности $\langle r_0, r_1, \ldots, r_{e+k-1} \rangle$ содержимых регистров после n шагов вычисления с программой с кодом e и содержимых x_1, x_2, …, x_k регистров с 1-го по k-ый, если $x = \mathrm{code}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle)$.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

1. $\mathrm{ct}^A(e,x,n)$ выдаёт содержимое счётчика команд после n шагов вычисления с программой с кодом e и содержимых x_1, x_2, …, x_k регистров с 1-го по k-ый, если $x = \mathrm{code}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle)$.
2. $\mathrm{rg}^A(e,x,n)$ выдаёт код последовательности $\langle r_0, r_1, \ldots, r_{e+k-1}\rangle$ содержимых регистров после n шагов вычисления с программой с кодом e и содержимых x_1, x_2, …, x_k регистров с 1-го по k-ый, если $x = \mathrm{code}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle)$.

$$\mathrm{ct}^A(e,x,n) = \begin{cases} y, & \text{если выполняется следующее:} \\ & (\imath)\ e \text{ — код программы } P, \\ & (\imath\imath)\ x = \mathrm{code}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle), \\ & (\imath\imath\imath)\ y \text{ — содержимое счётчика команд после} \\ & n \text{ шагов выполнения программы } P, \text{ начатой с} \\ & \text{содержимыми регистров } 0, x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

$$\mathrm{rg}^A(e,x,n) = \begin{cases} \mathrm{code}(\langle r_0,\ldots,r_{e+k-1}\rangle), & \text{если выполняется следующее:} \\ & (\imath)\ e \text{ — код программы } P, \\ & (\imath\imath)\ x = \mathrm{code}(\langle x_1,x_2,\ldots,x_k\rangle), \\ & (\imath\imath\imath)\ r_i \text{ — содержимое } i\text{-го} \\ & \text{регистра после } n \text{ шагов} \\ & \text{выполнения} \\ & \text{программы } P, \text{ начатой с} \\ & \text{содержимыми регистров} \\ & 0,x_1,x_2,\ldots,x_k,0,\ldots,0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

$$\mathrm{rg}^A(e,x,n) = \begin{cases} \mathrm{code}(\langle r_0,\dots,r_{e+k-1}\rangle), & \text{если выполняется следующее:} \\ & (\imath)\ e \text{ — код программы } P, \\ & (\imath\imath)\ x = \mathrm{code}(\langle x_1,x_2,\dots,x_k\rangle), \\ & (\imath\imath\imath)\ r_i \text{ — содержимое } i\text{-го} \\ & \text{регистра после } n \text{ шагов} \\ & \text{выполнения} \\ & \text{программы } P,\ \text{начатой с} \\ & \text{содержимыми регистров} \\ & 0,x_1,x_2,\dots,x_k,0,\dots,0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма C7.3.

Функции $\mathrm{ct}^A(e,x,n)$ и $\mathrm{rg}^A(e,x,n)$ являются A-вычислимыми.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Упражнение C7.1.

Докажите леммы C7.1, C7.2 и C7.3.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Упражнение С7.1.

Докажите леммы С7.1, С7.2 и С7.3.

Определение С7.4.

Предикат $B \subseteq \omega^n$ называется **вычислимым относительно A** или **A-вычислимым** (и обозначается как $B \leqslant_T A$), если функция $\chi_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является A-вычислимой.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Упражнение С7.1.

Докажите леммы С7.1, С7.2 и С7.3.

Определение С7.4.

Предикат $B \subseteq \omega^n$ называется **вычислимым относительно A** или **A-вычислимым** (и обозначается как $B \leqslant_T A$), если функция $\chi_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является A-вычислимой.

Определим предикат $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$ как отношение, удовлетворяющее следующим условиям в точности:

(i) e — код некоторой программы (скажем, P);

(ii) $x = \mathrm{code}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle)$

(iii) программа P, начав работу с содержимым регистров 0, x_1, x_2, …, x_k, 0, 0, …, 0, останавливается к шагу n.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Лемма C7.4.

Отношение $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$ является A-вычислимым.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Лемма C7.4.

Отношение $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$ является A-вычислимым.

Упражнение C7.2.

Докажите лемму C7.4.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Лемма C7.4.

Отношение $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$ является A-вычислимым.

Упражнение C7.2.

Докажите лемму C7.4.

Пусть натуральные числа e, x и n таковы, что $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Лемма С7.4.

Отношение $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$ является A-вычислимым.

Упражнение С7.2.

Докажите лемму С7.4.

Пусть натуральные числа e, x и n таковы, что $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$.

Определение С7.5.

Кодом вычисления на машине Шёнфилда с оракулом A с программой P, имеющей код e, и начальной конфигурацией содержимого регистров $0, (x)_0, (x)_1, \ldots, (x)_{\mathrm{lh}(x)-1}, 0, \ldots, 0$, будем называть $\mathrm{code}(\langle \mathrm{rg}^A(e, x, 0), \mathrm{rg}^A(e, x, 1), \ldots, \mathrm{rg}^A(e, x, n)\rangle)$.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Определение C7.6.

Если y — код вычисления, то результат вычисления содержится в 0-м регистре и, следовательно, вычисляется с помощью прф $U(y) = ((y)_{\mathrm{lh}(y) \dot{-} 1})_0$.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Определение C7.6.

Если y — код вычисления, то результат вычисления содержится в 0-м регистре и, следовательно, вычисляется с помощью прф $U(y) = ((y)_{\mathrm{lh}(y) \dot{-} 1})_0$.

Если $e, x \in \omega$ не удовлетворяют $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$ ни для какого $n \in \omega$, то считаем код вычисления не определённым.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Определение С7.6.

Если y — код вычисления, то результат вычисления содержится в 0-м регистре и, следовательно, вычисляется с помощью прф $U(y) = ((y)_{\mathrm{lh}(y) \dot{-} 1})_0$.

Если $e, x \in \omega$ не удовлетворяют $\mathrm{Stop}^A(e, x, n)$ ни для какого $n \in \omega$, то считаем код вычисления не определённым.

Определение С7.7.

Пусть $k \geqslant 1$; определим $k+2$-арный **предикат Клини** $T_k^A(e, x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$ как отношение, удовлетворяющее в точности следующим условиям:

1. e — код некоторой программы (скажем, P);
2. y — код вычисления программы P с начальной конфигурацией содержимого регистров 0, x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Лемма С7.5.

Для любого $k \geqslant 1$ предикат $T_k^A(e, x_1, \ldots, x_k, y)$ является A-вычислимым.

A-МШ $\mapsto$ A-ЧВФ

Лемма C7.5.

Для любого $k \geqslant 1$ предикат $T_k^A(e, x_1, \ldots, x_k, y)$ является A-вычислимым.

Теорема C7.2.

Любая частичная функция, вычислимая на машине Шёнфилда с оракулом A, частично A-вычислима.

Теорема C7.3(Клини о нормальной форме).

Существует примитивно рекурсивная функция U такая, что для любого $k \geqslant 1$ найдётся A-вычислимое отношение $T_k^A(e, x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$, для которого выполняется следующее: для любой k-местной частично A-вычислимой функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ найдётся e_0, для которого имеет место $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = U(\mu y. T_k^A(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, y))$.

Универсальная A-чвф

Предложение C7.1.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, не существует частично A-вычислимой функции, универсальной для семейства всех k-местных A-вычислимых функций.

Универсальная A-чвф

Предложение С7.1.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, не существует частично A-вычислимой функции, универсальной для семейства всех k-местных A-вычислимых функций.

Предложение С7.2.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, не существует частично A-вычислимой функции, универсальной для семейства всех k-местных вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$.

Универсальная A-чвф

Предложение С7.1.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, не существует частично A-вычислимой функции, универсальной для семейства всех k-местных A-вычислимых функций.

Предложение С7.2.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, не существует частично A-вычислимой функции, универсальной для семейства всех k-местных вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$.

Теорема С7.4.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, существует $k+1$-местная частично A-вычислимая функция, универсальная для семейства всех k-местных частично A-вычислимых функций.

Универсальная A-чвф

Теорема C7.5.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, существует $k+1$-местная частично A-вычислимая функция, универсальная для семейства всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0;1\}$.

Универсальная A-чвф

Теорема C7.5.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, существует $k+1$-местная частично A-вычислимая функция, универсальная для семейства всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$.

Следствие C7.1.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, существует всюду определённая k-местная функция, принимающая значения $\subseteq \{0; 1\}$, не являющаяся A-вычислимой.

Универсальная A-чвф

Теорема C7.5.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, существует $k+1$-местная частично A-вычислимая функция, универсальная для семейства всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$.

Следствие C7.1.

Каковы бы ни были $k \geqslant 1$ и $A \subseteq \omega$, существует всюду определённая k-местная функция, принимающая значения $\subseteq \{0; 1\}$, не являющаяся A-вычислимой.

Упражнение C7.3.

Докажите лемму C7.5, предложения C7.1, C7.2, теоремы C7.2–C7.5 и следствие C7.1.

Унарные vs k-местные

Лемма C7.6.

Пусть $A \subseteq \omega$, ψ — k-местная функция, а $B \subseteq \omega^k$ — множество. Тогда

1. ψ частично A-вычислима, если и только если $\psi(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x))$ частично A-вычислима;
2. ψ — A-вычислимая функция, если и только если $\psi(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x))$ также A-вычислима;
3. B — A-вычислимое множество, если и только если $c^k(B)$ также A-вычислимо.

Унарные vs k-местные

Лемма C7.6.

Пусть $A \subseteq \omega$, ψ — k-местная функция, а $B \subseteq \omega^k$ — множество. Тогда

1. ψ частично A-вычислима, если и только если $\psi(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x))$ частично A-вычислима;
2. ψ — A-вычислимая функция, если и только если $\psi(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x))$ также A-вычислима;
3. B — A-вычислимое множество, если и только если $c^k(B)$ также A-вычислимо.

Лемма C7.7.

Пусть $A \subseteq \omega$, ψ — унарная функция, а $B \subseteq \omega$ — множество. Тогда

1. ψ частично A-вычислима, если и только если $\psi(c^k(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ частично A-вычислима;
2. ψ — A-вычислимая функция, если и только если $\psi(c^k(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ также A-вычислима;
3. B — A-вычислимое множество, если и только если $\{\langle c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x)\rangle | x \in B\}$ также A-вычислимо.

Унарные vs k-местные

Лемма С7.8.

Пусть $A \subseteq \omega$, $\varphi(x_0, x_1)$ — частично A-вычислимая функция, а $k \geqslant 1$. Тогда $\varphi(x_0, x_1)$ универсальна для класса всех унарных частично A-вычислимых функций, если и только если $\varphi(x_0, c^k(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ также универсальна для класса всех k-местных частично A-вычислимых функций.

Унарные vs k-местные

Лемма C7.8.

Пусть $A \subseteq \omega$, $\varphi(x_0, x_1)$ — частично A-вычислимая функция, а $k \geqslant 1$. Тогда $\varphi(x_0, x_1)$ универсальна для класса всех унарных частично A-вычислимых функций, если и только если $\varphi(x_0, c^k(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ также универсальна для класса всех k-местных частично A-вычислимых функций.

Лемма C7.9.

Пусть $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$, а $\varphi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ частично A-вычислима. Тогда $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ универсальна для класса всех k-местных частично A-вычислимых функций, если и только если $\varphi(x_0, c_{k,1}(x_1), c_{k,2}(x_1), \ldots, c_{k,k}(x_1))$ также универсальна для класса всех унарных частично A-вычислимых функций.

Унарные vs k-местные

Лемма C7.8.

Пусть $A \subseteq \omega$, $\varphi(x_0, x_1)$ — частично A-вычислимая функция, а $k \geqslant 1$. Тогда $\varphi(x_0, x_1)$ универсальна для класса всех унарных частично A-вычислимых функций, если и только если $\varphi(x_0, c^k(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ также универсальна для класса всех k-местных частично A-вычислимых функций.

Лемма C7.9.

Пусть $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$, а $\varphi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ частично A-вычислима. Тогда $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ универсальна для класса всех k-местных частично A-вычислимых функций, если и только если $\varphi(x_0, c_{k,1}(x_1), c_{k,2}(x_1), \ldots, c_{k,k}(x_1))$ также универсальна для класса всех унарных частично A-вычислимых функций.

Упражнение C7.4.

Докажите леммы C7.6–C7.9.

Релятивизации

Определение C7.8.

Предикат $B \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым относительно A** или **A-вычислимо перечислимым (A-вп)** и обозначается как $B \leqslant_{\mathrm{CE}} A$, если $B = \delta\varphi$ для некоторой частично A-вычислимой функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Релятивизации

Определение C7.8.

Предикат $B \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым относительно A** или **A-вычислимо перечислимым (A-вп)** и обозначается как $B \leqslant_{\mathrm{CE}} A$, если $B = \delta\varphi$ для некоторой частично A-вычислимой функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение C7.9A.

Последовательность $\{A_n\}_{n \in \omega}$ конечных множеств называется **сильно A-вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m, n) | m \in A_n\}$ — A-вычислимый предикат;
- $n \mapsto |A_n|$ — A-вычислимая функция.

Релятивизации

Определение C7.8.

Предикат $B \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым относительно *A*** или ***A*-вычислимо перечислимым (*A*-вп)** и обозначается как $B \leqslant_{\mathrm{CE}} A$, если $B = \delta\varphi$ для некоторой частично A-вычислимой функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение C7.9A.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно *A*-вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m, n) | m \in A_n\}$ — A-вычислимый предикат;
- $n \mapsto |A_n|$ — A-вычислимая функция.

Определение C7.9D.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно *A*-вычислимой**, если существует A-вычислимая функция f такая, что $A_n = \gamma(f(n))$ для всех $n \in \omega$.

Релятивизации

Определение C7.9B.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно *A*-вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n) | m \in A_n\}$ — A-вычислимый предикат;
- $n \mapsto \max(A_n \cup \{0\})$ — A-вычислимая функция.

Релятивизации

Определение C7.9B.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно A-вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n) | m \in A_n\}$ — A-вычислимый предикат;
- $n \mapsto \max(A_n \cup \{0\})$ — A-вычислимая функция.

Определение C7.9C.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно A-вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n) | m \in A_n\}$ — A-вычислимый предикат;
- существует A-вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m \in A_n) \to (m \leqslant f(n))$, для всех $m, n \in \omega$.

Релятивизации

Определение C7.9B.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно A-вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m \in A_n\}$ — A-вычислимый предикат;
- $n \mapsto \max(A_n \cup \{0\})$ — A-вычислимая функция.

Определение C7.9C.

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно A-вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m \in A_n\}$ — A-вычислимый предикат;
- существует A-вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m \in A_n) \to (m \leqslant f(n))$, для всех $m, n \in \omega$.

Предложение C7.3.

$(C7.9A) \Leftrightarrow (C7.9B) \Leftrightarrow (C7.9C) \Leftrightarrow (C7.9D)$.

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема C7.6.

Для $A, B \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема С7.6.

Для $A, B \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $B = \delta\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
2. χ^*_B — A-ч.в.ф.;

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема C7.6.

Для $A, B \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $B = \delta\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
2. χ^*_B — A-ч.в.ф.;
3. $B = \rho\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема C7.6.

Для $A, B \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $B = \delta\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
2. χ^*_B — A-ч.в.ф.;
3. $B = \rho\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
4. $B = \varnothing$ или $B = \rho f$, f — A-в.ф.;
5. B конечно или $B = \rho f$, f — инъективная A-в.ф.;

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема С7.6.

Для $A, B \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $B = \delta\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
2. χ_B^* — A-ч.в.ф.;
3. $B = \rho\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
4. $B = \varnothing$ или $B = \rho f$, f — A-в.ф.;
5. B конечно или $B = \rho f$, f — инъективная A-в.ф.;
6. $B = \exists y Q(x, y)$, Q — A-вычислимый предикат;

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема С7.6.

Для $A, B \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $B = \delta\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
2. χ_B^* — A-ч.в.ф.;
3. $B = \rho\varphi$, φ — A-ч.в.ф.;
4. $B = \varnothing$ или $B = \rho f$, f — A-в.ф.;
5. B конечно или $B = \rho f$, f — инъективная A-в.ф.;
6. $B = \exists y Q(x, y)$, Q — A-вычислимый предикат;
7. существует сильно A-вычислимая последовательность $\{B_n\}_{n\in\omega}$ такая, что $\varnothing = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_s \subseteq B_{s+1} \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_s B_s = B$;
8. существует сильно A-вычислимая последовательность, удовлетворяющая условию (7) и дополнительно условию $|B_{s+1} - B_s| \leqslant 1$, $s \in \omega$.

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема С7.7.

Пусть $B \subseteq \omega^n$. Тогда B является A-вычислимым, если и только если B и $\overline{B} = \omega^n \setminus B$ являются A-вычислимо перечислимыми.

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема C7.7.

Пусть $B \subseteq \omega^n$. Тогда B является A-вычислимым, если и только если B и $\overline{B} = \omega^n \setminus B$ являются A-вычислимо перечислимыми.

Теорема C7.8.

Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — частичная функция. Тогда ψ частично A-вычислима, если и только если её график $\Gamma_\psi = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, y\rangle | \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y\}$ — A-вычислимо перечислим.

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема С7.7.

Пусть $B \subseteq \omega^n$. Тогда B является A-вычислимым, если и только если B и $\overline{B} = \omega^n \setminus B$ являются A-вычислимо перечислимыми.

Теорема С7.8.

Пусть $\psi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — частичная функция. Тогда ψ частично A-вычислима, если и только если её график $\Gamma_\psi = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_k, y\rangle | \psi(x_1, x_2, \dots, x_k) = y\}$ — A-вычислимо перечислим.

Следствие С7.2.

Существует A-вычислимо перечислимое, но не A-вычислимое множество.

A-вычислимо перечислимые множества

Теорема C7.7.

Пусть $B \subseteq \omega^n$. Тогда B является A-вычислимым, если и только если B и $\overline{B} = \omega^n \setminus B$ являются A-вычислимо перечислимыми.

Теорема C7.8.

Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — частичная функция. Тогда ψ частично A-вычислима, если и только если её график $\Gamma_\psi = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, y\rangle | \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y\}$ — A-вычислимо перечислим.

Следствие C7.2.

Существует A-вычислимо перечислимое, но не A-вычислимое множество.

Упражнение C7.5.

Докажите предложение C7.3, теоремы C7.6–C7.8 и следствие C7.2.

Основные понятия

Определение С7.10.

Нумерация ν называется ***A*-вычислимой**, если Γ^*_ν является A-в.п. Семейство $\mathcal{S}$ называется ***A*-вычислимым**, если оно имеет хотя бы одну A-вычислимую нумерацию.

Основные понятия

Определение С7.10.

Нумерация ν называется ***A*-вычислимой**, если Γ_ν^* является A-в.п. Семейство $\mathcal{S}$ называется ***A*-вычислимым**, если оно имеет хотя бы одну A-вычислимую нумерацию.

Определение С7.11.

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Тогда нумерация ν называется ***A*-вычислимой**, если нумерация $(\Gamma\nu)(x) \leftrightharpoons \Gamma\nu(x)$ является A-вычислимой.

Основные понятия

Определение C7.10.

Нумерация ν называется ***A*-вычислимой**, если Γ^*_ν является A-в.п. Семейство $\mathcal{S}$ называется ***A*-вычислимым**, если оно имеет хотя бы одну A-вычислимую нумерацию.

Определение C7.11.

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Тогда нумерация ν называется ***A*-вычислимой**, если нумерация $(\Gamma\nu)(x) \leftrightharpoons \Gamma\nu(x)$ является A-вычислимой.

Предложение C7.4.

Пусть $\mathcal{S}$ — семейство n-арных частичных функций. Нумерация ν является A-вычислимой, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons \nu(x_0)(x_1, \ldots, x_n)$ частично A-вычислима.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры С7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, A-вычислимо.
4. Семейство всех k-местных A-вычислимо перечислимых множеств A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, A-вычислимо.
4. Семейство всех k-местных A-вычислимо перечислимых множеств A-вычислимо.
5. Семейство всех k-местных A-вычислимых множеств A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, A-вычислимо.
4. Семейство всех k-местных A-вычислимо перечислимых множеств A-вычислимо.
5. Семейство всех k-местных A-вычислимых множеств A-вычислимо.
6. Семейство всех k-местных A-вычислимых функций не A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, A-вычислимо.
4. Семейство всех k-местных A-вычислимо перечислимых множеств A-вычислимо.
5. Семейство всех k-местных A-вычислимых множеств A-вычислимо.
6. Семейство всех k-местных A-вычислимых функций не A-вычислимо.
7. Семейство всех (ко)бесконечных k-местных A-вычислимо перечислимых предикатов не A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры С7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0;1\}$, A-вычислимо.
4. Семейство всех k-местных A-вычислимо перечислимых множеств A-вычислимо.
5. Семейство всех k-местных A-вычислимых множеств A-вычислимо.
6. Семейство всех k-местных A-вычислимых функций не A-вычислимо.
7. Семейство всех (ко)бесконечных k-местных A-вычислимо перечислимых предикатов не A-вычислимо.
8. Семейство всех бесконечных k-местных A-вычислимых предикатов не A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0;1\}$, A-вычислимо.
4. Семейство всех k-местных A-вычислимо перечислимых множеств A-вычислимо.
5. Семейство всех k-местных A-вычислимых множеств A-вычислимо.
6. Семейство всех k-местных A-вычислимых функций не A-вычислимо.
7. Семейство всех (ко)бесконечных k-местных A-вычислимо перечислимых предикатов не A-вычислимо.
8. Семейство всех бесконечных k-местных A-вычислимых предикатов не A-вычислимо.
9. Семейство всех кобесконечных k-местных A-вычислимых предикатов A-вычислимо.

A-вычислимые семейства

Примеры C7.3 (всюду $A \subseteq \omega$, $k \geqslant 1$).

1. Любое вычислимое семейство A-вычислимо.
2. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций A-вычислимо.
3. Семейство всех k-местных частично A-вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, A-вычислимо.
4. Семейство всех k-местных A-вычислимо перечислимых множеств A-вычислимо.
5. Семейство всех k-местных A-вычислимых множеств A-вычислимо.
6. Семейство всех k-местных A-вычислимых функций не A-вычислимо.
7. Семейство всех (ко)бесконечных k-местных A-вычислимо перечислимых предикатов не A-вычислимо.
8. Семейство всех бесконечных k-местных A-вычислимых предикатов не A-вычислимо.
9. Семейство всех кобесконечных k-местных A-вычислимых предикатов A-вычислимо.
10. Семейство всех k-местных A-вычислимых множеств A-вычислимо.

Главные нумерации

Пусть $A \subseteq \omega$.

Главные нумерации

Пусть $A \subseteq \omega$.

Предложение С7.5.

1. Если ν_0 и ν_1 — A-вычислимые нумерации, то $\nu_0 \oplus \nu_1$ также A-вычислима;
2. если ν — A-вычислимая нумерация и $\nu' \leqslant \nu$, то ν' будет также A-вычислимой нумерацией.

Главные нумерации

Пусть $A \subseteq \omega$.

Предложение C7.5.

1. Если ν_0 и ν_1 — A-вычислимые нумерации, то $\nu_0 \oplus \nu_1$ также A-вычислима;
2. если ν — A-вычислимая нумерация и $\nu' \leqslant \nu$, то ν' будет также A-вычислимой нумерацией.

Определение C7.12.

Пусть $k \geqslant 1$ и пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$. Тогда A-вычислимая нумерация ν_0 семейства $\mathcal{S}$ называется **главной**, если $\nu \leqslant \nu_0$ для любой A-вычислимой нумерации ν семейства $\mathcal{S}$.

Главные нумерации

Пусть $A \subseteq \omega$.

Предложение C7.5.

1. Если ν_0 и ν_1 — A-вычислимые нумерации, то $\nu_0 \oplus \nu_1$ также A-вычислима;
2. если ν — A-вычислимая нумерация и $\nu' \leqslant \nu$, то ν' будет также A-вычислимой нумерацией.

Определение C7.12.

Пусть $k \geqslant 1$ и пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$. Тогда A-вычислимая нумерация ν_0 семейства $\mathcal{S}$ называется **главной**, если $\nu \leqslant \nu_0$ для любой A-вычислимой нумерации ν семейства $\mathcal{S}$.

Теорема C7.9.

Семейство PCF_n^A всех n-арных частично A-вычислимых функций имеет главную A-вычислимую нумерацию.

Главные нумерации

Обозначение С7.1.

Как и при доказательстве оригинальной теоремы С6.2, любая A-вычислимая нумерация семейства PCF_n^A сводится к главной нумерации посредством инъективной вычислимой функции.
Через $\varkappa^{A,n}(m)$ будем обозначать главную A-вычислимую нумерацию семейства всех n-арных частично A-вычислимых функций. Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение $\varkappa^A$ вместо $\varkappa^{A,1}$. Зачастую через $\{e\}^A(x)$ будем обозначать $\varkappa_e^A(x)$.
Кроме того, часто вместо $\varkappa^{A,n}(m)$ будем писать $\varkappa_m^{A,n}$.

Главные нумерации

Обозначение C7.1.

Как и при доказательстве оригинальной теоремы C6.2, любая A-вычислимая нумерация семейства PCF_n^A сводится к главной нумерации посредством инъективной вычислимой функции.
Через $\varkappa^{A,n}(m)$ будем обозначать главную A-вычислимую нумерацию семейства всех n-арных частично A-вычислимых функций. Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение $\varkappa^A$ вместо $\varkappa^{A,1}$. Зачастую через $\{e\}^A(x)$ будем обозначать $\varkappa_e^A(x)$.
Кроме того, часто вместо $\varkappa^{A,n}(m)$ будем писать $\varkappa_m^{A,n}$.

s-m-n-Теорема C7.10.

Для любых $n, m \geqslant 1$ существует $m+1$-местная инъективная вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция s_n^m такая, что $\varkappa_e^{A,m+n}(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{s_n^m(e,y_1,y_2,\dots,y_m)}^{A,n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для всех e, x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, $y_m \in \omega$.

Теорема Клини о неподвижной точке

Теорема С7.11.

Для каждой $m+1$-местной частично A-вычислимой функции h найдётся m-местная инъективная вычислимая функция g такая, что $\varkappa^{A,n}_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,g(y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \varkappa^{A,n}_{g(y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ для всех x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, $y_m \in \omega$.

Теорема Клини о неподвижной точке

Теорема С7.11.

Для каждой $m+1$-местной частично A-вычислимой функции h найдётся m-местная инъективная вычислимая функция g такая, что $\varkappa^{A,n}_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,g(y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \varkappa^{A,n}_{g(y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ для всех x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, $y_m \in \omega$.

Следствие С7.3.

Для любой унарной частично A-вычислимой функции h найдётся число a такое, что $\varkappa^{A,n}_{a}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \varkappa^{A,n}_{h(a)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ для всех $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \omega$.

Теорема Клини о неподвижной точке

Теорема C7.11.

Для каждой $m+1$-местной частично A-вычислимой функции h найдётся m-местная инъективная вычислимая функция g такая, что $\varkappa^{A,n}_{h(y_1,y_2,\ldots,y_m,g(y_1,y_2,\ldots,y_m))}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \varkappa^{A,n}_{g(y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ для всех x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, $y_m \in \omega$.

Следствие C7.3.

Для любой унарной частично A-вычислимой функции h найдётся число a такое, что $\varkappa^{A,n}_a(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \varkappa^{A,n}_{h(a)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ для всех $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \omega$.

Замечание C7.2.

Индекс функции g или число a не зависят от оракула A, а только от индекса функции h.

Главные нумерации

Теорема C7.12.

Семейство CEP_n^A всех n-арных A-вычислимо перечислимых предикатов обладает главной A-вычислимой нумерацией для любого $n \geqslant 1$.

Главные нумерации

Теорема С7.12.

Семейство CEP_n^A всех n-арных A-вычислимо перечислимых предикатов обладает главной A-вычислимой нумерацией для любого $n \geqslant 1$.

Обозначение С7.2.

Как и при доказательстве оригинальной теоремы С6.5, любая A-вычислимая нумерация семейства CEP_n^A сводится к главной нумерации посредством инъективной вычислимой функции. Через $\pi^{A,n}(m) \leftrightharpoons \delta\varkappa^{A,n}(m)$ будем обозначать главную A-вычислимую нумерацию семейства всех n-арных A-вычислимо перечислимых предикатов. Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π^A вместо $\pi^{A,1}$. Кроме того, часто вместо $\pi^{A,n}(m)$ будем писать $\pi_m^{A,n}$.

Главные нумерации

Теорема C7.12.

Семейство CEP_n^A всех n-арных A-вычислимо перечислимых предикатов обладает главной A-вычислимой нумерацией для любого $n \geqslant 1$.

Обозначение C7.2.

Как и при доказательстве оригинальной теоремы C6.5, любая A-вычислимая нумерация семейства CEP_n^A сводится к главной нумерации посредством инъективной вычислимой функции. Через $\pi^{A,n}(m) \leftrightharpoons \delta\varkappa^{A,n}(m)$ будем обозначать главную A-вычислимую нумерацию семейства всех n-арных A-вычислимо перечислимых предикатов. Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π^A вместо $\pi^{A,1}$. Кроме того, часто вместо $\pi^{A,n}(m)$ будем писать $\pi_m^{A,n}$.

Упражнение C7.6.

Докажите предложения C7.4, C7.5 и теоремы C7.9–C7.12.

Неподвижные точки и A-ВПМ

Теорема C7.13.

Для каждого A-вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+1}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция h такая, что $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow x \in \pi^A(h(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Неподвижные точки и A-ВПМ

Теорема C7.13.

Для каждого A-вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+1}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция h такая, что $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow x \in \pi^A(h(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Теорема C7.14.

Для каждого A-вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+2}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция g такая, что $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \Leftrightarrow x \in \pi^A(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Неподвижные точки и А-ВПМ

Теорема С7.13.

Для каждого A-вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+1}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция h такая, что $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \Leftrightarrow x \in \pi^A(h(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Теорема С7.14.

Для каждого A-вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+2}$ найдётся m-арная инъективная вычислимая функция g такая, что $P(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m)) \Leftrightarrow x \in \pi^A(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.

Теорема С7.15.

Для любой $m+1$-арной частично A-вычислимой функции h найдётся m-арная инъективная вычислимая функция g такая, что $\pi^A(h(y_1, y_2, \ldots, y_m, g(y_1, y_2, \ldots, y_m))) = \pi^A(g(y_1, y_2, \ldots, y_m))$.
В частности, при $m = 0$ имеем следующее: для любой унарной частично A-вычислимой функции h найдётся число n_0 такое, что $\pi^A_{n_0} = \pi^A_{h(n_0)}$.

Снова полные множества

Обозначение С7.3.

Определим A-вычислимо перечислимые множества так:
$K^A \leftrightharpoons \{x \mid x \in \pi^A(x)\}$, $K_0^A \leftrightharpoons \{c(x, y) \mid y \in \pi^A(x)\}$,
$K_1^A \leftrightharpoons \{x \mid \pi^A(x) \neq \varnothing\}$.

Снова полные множества

Обозначение C7.3.

Определим A-вычислимо перечислимые множества так:
$K^A \leftrightharpoons \{x \mid x \in \pi^A(x)\}$, $K_0^A \leftrightharpoons \{c(x,y) \mid y \in \pi^A(x)\}$,
$K_1^A \leftrightharpoons \{x \mid \pi^A(x) \neq \varnothing\}$.

Определение C7.13.

A-вычислимо перечислимое множество M называется **A-полным**, если $B \leqslant_1 M$ для любого A-вычислимо перечислимого множества B.

Снова полные множества

Обозначение C7.3.

Определим A-вычислимо перечислимые множества так:
$K^A \leftrightharpoons \{x \mid x \in \pi^A(x)\}$, $K_0^A \leftrightharpoons \{c(x,y) \mid y \in \pi^A(x)\}$,
$K_1^A \leftrightharpoons \{x \mid \pi^A(x) \neq \varnothing\}$.

Определение C7.13.

A-вычислимо перечислимое множество M называется **A-полным**, если $B \leqslant_1 M$ для любого A-вычислимо перечислимого множества B.

Теорема C7.16.

Множества K^A, K_0^A и K_1^A являются A-полными.

Снова полные множества

Обозначение С7.3.

Определим A-вычислимо перечислимые множества так:
$K^A \leftrightharpoons \{x \mid x \in \pi^A(x)\}$, $K_0^A \leftrightharpoons \{c(x,y) \mid y \in \pi^A(x)\}$,
$K_1^A \leftrightharpoons \{x \mid \pi^A(x) \neq \varnothing\}$.

Определение С7.13.

A-вычислимо перечислимое множество M называется ***A-полным***, если $B \leqslant_1 M$ для любого A-вычислимо перечислимого множества B.

Теорема С7.16.

Множества K^A, K_0^A и K_1^A являются A-полными.

Упражнение С7.7.

Докажите теоремы С7.13–С7.16.

Строки

Основная информация.

Отметим, что строки $\sigma \in 2^{<\omega}$ могут рассматриваться как конечные начальные сегменты характеристических функций. Будем отождествлять A с его характеристической функцией и пишем $\sigma \sqsubset A$, если $\sigma(x) = \chi_A(x)$ для всех $x \in \delta\sigma$. **Длиной** строки σ (записывается как $\mathrm{Lh}(\sigma)$) называется число $|\delta\sigma|$, т.е. $n_0 \in \omega$ таково, что $\sigma \in 2^{n_0}$. Заметим, что $\mathrm{Lh}(\sigma) = \mu x[\sigma(x)\uparrow]$.

Зафиксируем каноническую нумерацию строк $\sigma \in 2^{<\omega}$ и в дальнейшем будем отождествлять σ с его номером. Положим

$A \restriction x \leftrightharpoons \chi_A \restriction \{y \in \omega \mid y < x\}$ и $\sigma \restriction x$ — строка длины x, являющаяся начальной подстрокой строки σ. Заметим, что $\sigma = \sigma \restriction \mathrm{Lh}(\sigma)$.

Строки

Основная информация.

Отметим, что строки $\sigma \in 2^{<\omega}$ могут рассматриваться как конечные начальные сегменты характеристических функций. Будем отождествлять A с его характеристической функцией и пишем $\sigma \sqsubset A$, если $\sigma(x) = \chi_A(x)$ для всех $x \in \delta\sigma$. **Длиной** строки σ (записывается как $\mathrm{Lh}(\sigma)$) называется число $|\delta\sigma|$, т.е. $n_0 \in \omega$ таково, что $\sigma \in 2^{n_0}$. Заметим, что $\mathrm{Lh}(\sigma) = \mu x[\sigma(x)\uparrow]$. Зафиксируем каноническую нумерацию строк $\sigma \in 2^{<\omega}$ и в дальнейшем будем отождествлять σ с его номером. Положим $A \upharpoonright x \leftrightharpoons \chi_A \upharpoonright \{y \in \omega \mid y < x\}$ и $\sigma \upharpoonright x$ — строка длины x, являющаяся начальной подстрокой строки σ. Заметим, что $\sigma = \sigma \upharpoonright \mathrm{Lh}(\sigma)$.

Зафиксируем машину Шёнфилда P с оракулом A, на которой вычисляется функция $\{e\}^A(x)$. Отметим, что программа P не зависит от выбора оракула.

Строки

Основная информация.

Отметим, что строки $\sigma \in 2^{<\omega}$ могут рассматриваться как конечные начальные сегменты характеристических функций. Будем отождествлять A с его характеристической функцией и пишем $\sigma \sqsubset A$, если $\sigma(x) = \chi_A(x)$ для всех $x \in \delta\sigma$. **Длиной** строки σ (записывается как $\mathrm{Lh}(\sigma)$) называется число $|\delta\sigma|$, т.е. $n_0 \in \omega$ таково, что $\sigma \in 2^{n_0}$. Заметим, что $\mathrm{Lh}(\sigma) = \mu x[\sigma(x)\uparrow]$. Зафиксируем каноническую нумерацию строк $\sigma \in 2^{<\omega}$ и в дальнейшем будем отождествлять σ с его номером. Положим $A \restriction x \leftrightharpoons \chi_A \restriction \{y \in \omega \mid y < x\}$ и $\sigma \restriction x$ — строка длины x, являющаяся начальной подстрокой строки σ. Заметим, что $\sigma = \sigma \restriction \mathrm{Lh}(\sigma)$.

Зафиксируем машину Шёнфилда P с оракулом A, на которой вычисляется функция $\{e\}^A(x)$. Отметим, что программа P не зависит от выбора оракула.

Определение С7.14.

Определяем $\{e\}^A_s(x) = y$, если $x, y, e < s$, $s > 0$, и $\{e\}^A(x) = y$ вычисляется за $< s$ шагов программой P, причём в процессе вычисления используются только числа $z < s$.

Строки

Определение С7.15.

Определим **функцию использования** $u(A; e, x, s)$ как $1+$ наибольшее число, использованное в вычислении $\{e\}_s^A(x)$, если $\{e\}_s^A(x)\downarrow$; и $u(A; e, x, s) = 0$ в противном случае. Определим также **функцию использования**

$$u(A; e, x) = \begin{cases} u(A; e, x, s), & \text{если } \{e\}_s^A(x)\downarrow \text{ для некоторого } s; \\ \uparrow, & \text{если } \{e\}^A(x)\uparrow. \end{cases}$$

Строки

Определение С7.15.

Определим **функцию использования** $u(A; e, x, s)$ как $1+$ наибольшее число, использованное в вычислении $\{e\}_s^A(x)$, если $\{e\}_s^A(x)\downarrow$; и $u(A; e, x, s) = 0$ в противном случае. Определим также **функцию использования**

$$u(A; e, x) = \begin{cases} u(A; e, x, s), & \text{если } \{e\}_s^A(x)\downarrow \text{ для некоторого } s; \\ \uparrow, & \text{если } \{e\}^A(x)\uparrow. \end{cases}$$

Определение С7.16.

Будем писать $\boldsymbol{\{e\}_s^\sigma(x) = y}$, если $\{e\}_s^A(x) = y$ для некоторого $A \sqsupset \sigma$, причём в процессе вычисления используются только числа $z < \mathrm{lh}(\sigma)$. Запись $\boldsymbol{\{e\}^\sigma(x) = y}$ означает, что $\exists s[\{e\}_s^\sigma(x) = y]$.

Строки

Определение C7.15.

Определим **функцию использования** $u(A; e, x, s)$ как 1+ наибольшее число, использованное в вычислении $\{e\}_s^A(x)$, если $\{e\}_s^A(x)\downarrow$; и $u(A; e, x, s) = 0$ в противном случае. Определим также **функцию использования**

$$u(A; e, x) = \begin{cases} u(A; e, x, s), & \text{если } \{e\}_s^A(x)\downarrow \text{ для некоторого } s; \\ \uparrow, & \text{если } \{e\}^A(x)\uparrow. \end{cases}$$

Определение C7.16.

Будем писать $\boldsymbol{\{e\}_s^\sigma(x) = y}$, если $\{e\}_s^A(x) = y$ для некоторого $A \sqsupset \sigma$, причём в процессе вычисления используются только числа $z < \mathrm{lh}(\sigma)$. Запись $\boldsymbol{\{e\}^\sigma(x) = y}$ означает, что $\exists s[\{e\}_s^\sigma(x) = y]$.

Заметим, что если $\{e\}_s^A(x) = y$, то $\{e\}_s^\sigma(x) = y$, где $\sigma = A \upharpoonright u(A; e, x, s)$.

Строки

Определения выше гарантируют, что

$$\{e\}_s^A(x) = y \implies x, y, e < s;\ u(A; e, x, s) \leqslant s, \tag{1}$$

$$\{e\}_s^A(x) = y \implies \forall t \geqslant s[\{e\}_t^A(x) = y \wedge u(A; e, x, t) = u(A; e, x, s)], \tag{2}$$

так что определение $u(A; e, x)$ не зависит от выбора s.
Если A вычислимо, то $u(A; e, x, s)$ является вычислимой функцией, и её индекс может быть найден равномерно по Δ_0-индексу множества A.

Строки

Определения выше гарантируют, что

$$\{e\}^A_s(x) = y \implies x, y, e < s;\ u(A; e, x, s) \leqslant s, \tag{1}$$

$$\{e\}^A_s(x) = y \implies \forall t \geqslant s[\{e\}^A_t(x) = y \wedge u(A; e, x, t) = u(A; e, x, s)], \tag{2}$$

так что определение $u(A; e, x)$ не зависит от выбора s.
Если A вычислимо, то $u(A; e, x, s)$ является вычислимой функцией, и её индекс может быть найден равномерно по Δ_0-индексу множества A.

Главная теорема C7.17 о перечислении.

1. Множество $\{\langle e, \sigma, x, s\rangle : \{e\}^\sigma_s(x)\downarrow\}$ вычислимо.
2. Множество $L = \{\langle e, \sigma, x\rangle : \{e\}^\sigma(x)\downarrow\}$ вычислимо перечислимо.

Строки

Определения выше гарантируют, что

$$\{e\}_s^A(x) = y \implies x, y, e < s;\ u(A; e, x, s) \leqslant s, \tag{1}$$

$$\{e\}_s^A(x) = y \implies \forall t \geqslant s[\{e\}_t^A(x) = y \wedge u(A; e, x, t) = u(A; e, x, s)], \tag{2}$$

так что определение $u(A; e, x)$ не зависит от выбора s.
Если A вычислимо, то $u(A; e, x, s)$ является вычислимой функцией, и её индекс может быть найден равномерно по Δ_0-индексу множества A.

Главная теорема С7.17 о перечислении.

1. Множество $\{\langle e, \sigma, x, s\rangle : \{e\}_s^\sigma(x)\downarrow\}$ вычислимо.
2. Множество $L = \{\langle e, \sigma, x\rangle : \{e\}^\sigma(x)\downarrow\}$ вычислимо перечислимо.

Доказательство.

2) $\langle e, \sigma, x\rangle \in L \Leftrightarrow \{e\}^\sigma(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists s[\{e\}_s^\sigma(x)\downarrow]$ и, следовательно, L в.п.

Аппроксимации

Доказательство (окончание).

1) Сначала отметим, что $\{e\}^{\sigma}_{s}(x)\downarrow\Leftrightarrow \exists y < s[\{e\}^{\sigma}_{s}(x) = y]$, поэтому достаточно доказать, что отношение $\{e\}^{\sigma}_{s}(x) = y$ вычислимо (отметим, что оно даже примитивно рекурсивно). Пусть $e_0 = \mathrm{code}(P)$ и $z = \mathrm{code}(\langle e_0, x\rangle)$; тогда $\{e_0\}^{\sigma}_{s}(x) = y$, если и только если выполняются одновременно следующие условия:

1. $e_0, x, y < s$;
2. $\mathrm{lh}(e_0) < s$;
3. $(\mathrm{rg}^{\sigma}(e_0, z, t))_i < s$ для всех $t < s$ и $i < \mathrm{lh}(\mathrm{rg}^{\sigma}(e_0, z, t))$;
4. если $((e_0)_{\mathrm{ct}^{\sigma}(e_0,z,t)})_0 = 2$, то $(\mathrm{rg}^{\sigma}(e_0, z, t))_{((e_0)_{\mathrm{ct}^{\sigma}(e_0,z,t)})_1} < \mathrm{Lh}(\sigma)$;
5. $\exists t < s[\mathrm{ct}^{\sigma}(e_0, z, t) \geqslant \mathrm{lh}(e_0) \wedge (\mathrm{rg}^{\sigma}(e_0, z, t))_0 = y]$. $\square$

Принцип использования

Теорема C7.18.

1. $\{e\}^A(x) = y \Longrightarrow \exists s(\exists \sigma \sqsubset A)[\{e\}^\sigma_s(x) = y]$;
2. $\{e\}^\sigma_s(x) = y \Longrightarrow (\forall t \geqslant s)(\forall \tau \sqsupseteq \sigma)[\{e\}^\tau_t(x) = y]$;
3. $\{e\}^\sigma(x) = y \Longrightarrow (\forall A \sqsupseteq \sigma)[\{e\}^A(x) = y]$.

Принцип использования

Теорема С7.18.

1. $\{e\}^A(x) = y \Longrightarrow \exists s(\exists \sigma \sqsubset A)[\{e\}^\sigma_s(x) = y]$;
2. $\{e\}^\sigma_s(x) = y \Longrightarrow (\forall t \geqslant s)(\forall \tau \sqsupseteq \sigma)[\{e\}^\tau_t(x) = y]$;
3. $\{e\}^\sigma(x) = y \Longrightarrow (\forall A \sqsupseteq \sigma)[\{e\}^A(x) = y]$.

Доказательство.

Пусть всюду рассматривается машина P с кодом e_0 и входными данными $z = \mathrm{code}(\langle e_0, x\rangle)$.
1) Достаточно положить $s \leftrightharpoons \max\{s_0, s_1\} + 1$, где $\mathrm{Stop}^A(e_0, z, s_0)$ и $s_1 \leftrightharpoons \max\{(\mathrm{rg}^A(e_0, z, t))_i \mid i < \mathrm{lh}(\mathrm{rg}^A(e_0, z, t)),\ t \leqslant s_0\}$; тогда имеем $\{e_0\}^\sigma_s(x) = y$ для $\sigma = A \upharpoonright u(A; e_0, x, s)$.
Условия 2) и 3) следуют непосредственно из определения. □

Принцип использования

Теорема C7.18.

1. $\{e\}^A(x) = y \Longrightarrow \exists s(\exists \sigma \sqsubset A)[\{e\}^\sigma_s(x) = y]$;
2. $\{e\}^\sigma_s(x) = y \Longrightarrow (\forall t \geqslant s)(\forall \tau \sqsupseteq \sigma)[\{e\}^\tau_t(x) = y]$;
3. $\{e\}^\sigma(x) = y \Longrightarrow (\forall A \sqsupseteq \sigma)[\{e\}^A(x) = y]$.

Доказательство.

Пусть всюду рассматривается машина P с кодом e_0 и входными данными $z = \mathrm{code}(\langle e_0, x\rangle)$.

1) Достаточно положить $s \leftrightharpoons \max\{s_0, s_1\} + 1$, где $\mathrm{Stop}^A(e_0, z, s_0)$ и $s_1 \leftrightharpoons \max\{(\mathrm{rg}^A(e_0, z, t))_i \mid i < \mathrm{lh}(\mathrm{rg}^A(e_0, z, t)),\ t \leqslant s_0\}$; тогда имеем $\{e_0\}^\sigma_s(x) = y$ для $\sigma = A \restriction u(A; e_0, x, s)$.

Условия 2) и 3) следуют непосредственно из определения. □

Принцип использования оказывается весьма полезным, поскольку 1 утверждает, что если $\{e\}^A(x) = y$, то $\{e\}^\sigma(x) = y$ для некоторого $\sigma \sqsubset A$, причём можно считать, что $\sigma = A \restriction u(A; e, x)$.

Принцип использования

Более того, 3 утверждает, что $\{e\}^B(x) = y$ для любого $B \sqsupset \sigma$. Из соотношения (1) и теоремы C42 вытекает

$$[\{e\}_s^A(x) = y \wedge A \upharpoonright u = B \upharpoonright u] \Rightarrow \{e\}_s^B(x) = y, \tag{3}$$

где $u = u(A; e, x, s)$, поскольку соотношение (1) утверждает, что в процессе вычисления используются только числа $z < u$.

Принцип использования

Более того, 3 утверждает, что $\{e\}^B(x) = y$ для любого $B \sqsupset \sigma$. Из соотношения (1) и теоремы C42 вытекает

$$[\{e\}_s^A(x) = y \wedge A \upharpoonright u = B \upharpoonright u] \Rightarrow \{e\}_s^B(x) = y, \quad (3)$$

где $u = u(A; e, x, s)$, поскольку соотношение (1) утверждает, что в процессе вычисления используются только числа $z < u$.

Теорема C7.19.

Для любых множеств $A, B \subseteq \omega$ выполняется следующее: $B \leqslant_T A$, если и только если существуют вычислимые функции f и g такие, что
$x \in B \iff \exists\sigma[\sigma \in \pi(f(x)) \wedge \sigma \sqsubset A]$,
$x \in \overline{B} \iff \exists\sigma[\sigma \in \pi(g(x)) \wedge \sigma \sqsubset A]$.

Принцип использования

Более того, 3 утверждает, что $\{e\}^B(x) = y$ для любого $B \sqsupset \sigma$. Из соотношения (1) и теоремы C42 вытекает

$$[\{e\}_s^A(x) = y \wedge A \restriction u = B \restriction u] \Rightarrow \{e\}_s^B(x) = y, \tag{3}$$

где $u = u(A; e, x, s)$, поскольку соотношение (1) утверждает, что в процессе вычисления используются только числа $z < u$.

Теорема C7.19.

Для любых множеств $A, B \subseteq \omega$ выполняется следующее: $B \leqslant_T A$, если и только если существуют вычислимые функции f и g такие, что
$x \in B \iff \exists\sigma[\sigma \in \pi(f(x)) \wedge \sigma \sqsubset A]$,
$x \in \overline{B} \iff \exists\sigma[\sigma \in \pi(g(x)) \wedge \sigma \sqsubset A]$.

Упражнение C7.8.

Докажите теорему C7.19.

Спасибо за внимание.