Лекция L1
Бестиповое λ-исчисление

Вадим Пузаренко

16 октября 2021 г.

Содержание курса

1. λ-исчисление
2. Конструктивная математика
3. Автоматы
4. Грамматики
5. Элементы теории вычислимости

Содержание

Мотивация

В теории множеств функция интерпретируется как график. Здесь мы рассмотрим противоположную ситуацию, когда все рассматриваемые объекты являются функциями, а не множествами.

Мотивация

В теории множеств функция интерпретируется как график. Здесь мы рассмотрим противоположную ситуацию, когда все рассматриваемые объекты являются функциями, а не множествами.
Представим себе воображаемый мир, состоящий только из функций, которые понимаются не как графики, а как преобразования, правила действия, перерабатывающие одни такие функции – преобразования – в другие. Иначе говоря, в нашем распоряжении имеются объекты, которые являются одновременно и функциями, и объектами, к которым эти функции применяются, причём не накладываются никакие ограничения, т. е. любая функция может быть применена к любой функции, включая и саму себя. Последнее невозможно при теоретико–множественной интерпретации.

Мотивация

Такими объектами могут быть некоторые тексты программ и процедур; одна программа может быть применена к другой (к примеру, программа–компилятор применяется к программе, написанной на алгоритмическом языке с получением в результате текста, являющегося программой в машинном коде). Другим примером является использование в ряде языков программирования процедур и функций в качестве аргументов процедур и функций (в том числе и самих себя).

Мотивация

Такими объектами могут быть некоторые тексты программ и процедур; одна программа может быть применена к другой (к примеру, программа–компилятор применяется к программе, написанной на алгоритмическом языке с получением в результате текста, являющегося программой в машинном коде). Другим примером является использование в ряде языков программирования процедур и функций в качестве аргументов процедур и функций (в том числе и самих себя).
Квантор функциональности $\lambda x.t(x)$, где $t(x)$ — терм, образует выражение, интерпретируемое как функция, аргументом которой является x, а результатом — значение $t(x)$. С точки зрения λ–языка утверждение, что производная функции e^x в точке 0 равно 1, записывается как $\mathbf{D}(\lambda x.e^x)(0) = 1$, где $\mathbf{D}$ — оператор дифференцирования, а 0 и 1 — константы с естественной интерпретацией.

Мотивация

Более сложным примером служит формула производной произведения:
$\mathbf{D}\lambda x.(f(x)\cdot g(x)) = \lambda x.((\mathbf{D}\lambda x.f(x))(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot(\mathbf{D}\lambda x.g(x))(x))$.

Мотивация

Более сложным примером служит формула производной произведения:
$\mathbf{D}\lambda x.(f(x)\cdot g(x)) = \lambda x.((\mathbf{D}\lambda x.f(x))(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot(\mathbf{D}\lambda x.g(x))(x)).$
Идеи λ-исчисления и его модели широко применяются в теоретической информатике, в основном, в функциональном программировании. Сам язык этого исчисления может рассматриваться как язык программирования. Идеи λ-исчисления находят применение в математической логике, в частности, в вычислимости.

Мотивация

Для описания функций многих переменных хочется ввести многоместный квантор типа $\lambda x_1 \ldots x_n.t(x_1, \ldots, x_n)$. Х.Б. Карри подметил важное преобразование (называемое **преобразованием Карри**), базирующееся на том, что функции систематически трактуются как значения. Вместо $f(x, y)$ был рассмотрен функционал g_f, сопоставляющий аргументу x функцию, зависящую от y: $g_f(x)(y) = f(x, y)$. Таким образом, без ограничения общности достаточно рассматривать функции и функционалы только от одного аргумента.

Мотивация

Для описания функций многих переменных хочется ввести многоместный квантор типа $\lambda x_1 \ldots x_n.t(x_1, \ldots, x_n)$. Х.Б. Карри подметил важное преобразование (называемое **преобразованием Карри**), базирующееся на том, что функции систематически трактуются как значения. Вместо $f(x, y)$ был рассмотрен функционал g_f, сопоставляющий аргументу x функцию, зависящую от y: $g_f(x)(y) = f(x, y)$. Таким образом, без ограничения общности достаточно рассматривать функции и функционалы только от одного аргумента.

Преобразование Карри имеет важные аналогии в программировании. Оно соответствует **частичной параметризации** процедур. Если имеется процедура $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а известно лишь значение $x_1 = a$, можно, тем не менее, проделать внутри P вычисления, зависящие лишь от x_1, и получить **частичную процедуру** $P_1(x_2, \ldots, x_n) = P(a, x_2, \ldots, x_n)$.

λ–Термы

Алфавит λ–языка

λ–сигнатура. Множество σ константных символов.

Переменные. $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$

Точка. .

Скобки. (,)

λ–Знак. λ

λ–Термы

Алфавит λ–языка

λ–сигнатура. Множество σ константных символов.

Переменные. $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$

Точка. .

Скобки. (,)

λ–Знак. λ

Определение

Определим **λ–термы** λ–сигнатуры σ индукцией по построению.

λ–Термы

Алфавит λ–языка

λ–сигнатура.	Множество σ константных символов.
Переменные.	$v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$
Точка.	.
Скобки.	(,)
λ–Знак.	λ

Определение

Определим λ**–термы** λ–сигнатуры σ индукцией по построению.

- Переменная есть λ–терм;

λ–Термы

Алфавит λ–языка

λ–сигнатура. Множество σ константных символов.

Переменные. $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$

Точка. .

Скобки. (,)

λ–Знак. λ

Определение

Определим λ–**термы** λ–сигнатуры σ индукцией по построению.

- Переменная есть λ–терм;
- константа сигнатуры σ есть λ–терм;

λ–Термы

Алфавит λ–языка

λ–сигнатура.	Множество σ константных символов.
Переменные.	$v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$
Точка.	.
Скобки.	(,)
λ–Знак.	λ

Определение

Определим λ**–термы** λ–сигнатуры σ индукцией по построению.

- Переменная есть λ–терм;
- константа сигнатуры σ есть λ–терм;
- если A и B — λ–термы, то (AB) есть λ–терм (соответствующий оператор называется **аппликацией**);

λ–Термы

Алфавит λ–языка

λ–сигнатура. Множество σ константных символов.

Переменные. $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$

Точка. .

Скобки. (,)

λ–Знак. λ

Определение

Определим λ–**термы** λ–сигнатуры σ индукцией по построению.

- Переменная есть λ–терм;
- константа сигнатуры σ есть λ–терм;
- если A и B — λ–термы, то (AB) есть λ–терм (соответствующий оператор называется **аппликацией**);
- если A — λ–терм и x — переменная, то $\lambda x.A$ есть λ–терм (соответствующий оператор называется λ–**абстракцией**);

λ–Термы

Алфавит λ–языка

λ–сигнатура. Множество σ константных символов.

Переменные. v_0, v_1, $\ldots$, v_n, $\ldots$

Точка. .

Скобки. (,)

λ–Знак. λ

Определение

Определим λ–**термы** λ–сигнатуры σ индукцией по построению.

- Переменная есть λ–терм;
- константа сигнатуры σ есть λ–терм;
- если A и B — λ–термы, то (AB) есть λ–терм (соответствующий оператор называется **аппликацией**);
- если A — λ–терм и x — переменная, то $\lambda x.A$ есть λ–терм (соответствующий оператор называется **λ–абстракцией**);
- других λ–термов нет.

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$
2. $\lambda y.\lambda x.(xy)$

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$
2. $\lambda y.\lambda x.(xy)$
3. $((y(xy))(xz))$

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$
2. $\lambda y.\lambda x.(xy)$
3. $((y(xy))(xz))$

Примеры

Следующие слова не являются λ–термами:

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$
2. $\lambda y.\lambda x.(xy)$
3. $((y(xy))(xz))$

Примеры

Следующие слова не являются λ–термами:

1. $(\lambda x.x)$

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$
2. $\lambda y.\lambda x.(xy)$
3. $((y(xy))(xz))$

Примеры

Следующие слова не являются λ–термами:

1. $(\lambda x.x)$
2. λxx

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$
2. $\lambda y.\lambda x.(xy)$
3. $((y(xy))(xz))$

Примеры

Следующие слова не являются λ–термами:

1. $(\lambda x.x)$
2. λxx
3. $\lambda y.\lambda x.xy$

λ–Термы

Примеры

Следующие слова являются λ–термами:

1. $\lambda x.x$
2. $\lambda y.\lambda x.(xy)$
3. $((y(xy))(xz))$

Примеры

Следующие слова не являются λ–термами:

1. $(\lambda x.x)$
2. λxx
3. $\lambda y.\lambda x.xy$
4. $(y(xy))(xz)$

λ–Термы

Предложение L1 (об однозначности λ–терма)

Для каждого λ–терма T выполнено одно и только одно из следующих условий:

λ–Термы

Предложение L1 (об однозначности λ–терма)

Для каждого λ–терма T выполнено одно и только одно из следующих условий:

1. существует единственная константа $\mathbf{c} \in \sigma$ такая, что $T = \mathbf{c}$;

λ–Термы

Предложение L1 (об однозначности λ–терма)

Для каждого λ–терма T выполнено одно и только одно из следующих условий:

1. существует единственная константа $\mathbf{c} \in \sigma$ такая, что $T = \mathbf{c}$;
2. существует единственная переменная x такая, что $T = x$;

λ–Термы

Предложение L1 (об однозначности λ–терма)

Для каждого λ–терма T выполнено одно и только одно из следующих условий:

1. существует единственная константа $\mathbf{c} \in \sigma$ такая, что $T = \mathbf{c}$;
2. существует единственная переменная x такая, что $T = x$;
3. найдутся и притом единственные λ–термы A и B такие, что $T = (AB)$;

λ–Термы

Предложение L1 (об однозначности λ–терма)

Для каждого λ–терма T выполнено одно и только одно из следующих условий:

1. существует единственная константа $\mathbf{c} \in \sigma$ такая, что $T = \mathbf{c}$;
2. существует единственная переменная x такая, что $T = x$;
3. найдутся и притом единственные λ–термы A и B такие, что $T = (AB)$;
4. найдутся и притом единственные переменная x и λ–терм A такие, что $T = \lambda x.A$.

λ–Термы

Определение

Определим множество $ST(T)$ **подтермов** λ–терма T индукцией по построению:

λ–Термы

Определение

Определим множество $ST(T)$ **подтермов** λ–терма T индукцией по построению:

- если T — переменная или константа, то $ST(T) = \{T\}$;

λ–Термы

Определение

Определим множество $ST(T)$ **подтермов** λ–терма T индукцией по построению:

- если T — переменная или константа, то $ST(T) = \{T\}$;
- если T имеет вид (AB), то
  $ST(T) = \{(AB)\} \cup ST(A) \cup ST(B)$, где A и B — λ–термы;

λ–Термы

Определение

Определим множество $ST(T)$ **подтермов** λ–терма T индукцией по построению:

- если T — переменная или константа, то $ST(T) = \{T\}$;
- если T имеет вид (AB), то $ST(T) = \{(AB)\} \cup ST(A) \cup ST(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $ST(T) = \{\lambda x.A\} \cup ST(A)$, где A — λ–терм и x — переменная.

λ–Термы

Определение

Определим множество $ST(T)$ **подтермов** λ–терма T индукцией по построению:

- если T — переменная или константа, то $ST(T) = \{T\}$;
- если T имеет вид (AB), то
  $ST(T) = \{(AB)\} \cup ST(A) \cup ST(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $ST(T) = \{\lambda x.A\} \cup ST(A)$, где A — λ–терм и x — переменная.

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $ST(T) = \{x, \lambda x.x\}$.

λ–Термы

Определение

Определим множество $ST(T)$ **подтермов** λ–терма T индукцией по построению:

- если T — переменная или константа, то $ST(T) = \{T\}$;
- если T имеет вид (AB), то $ST(T) = \{(AB)\} \cup ST(A) \cup ST(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $ST(T) = \{\lambda x.A\} \cup ST(A)$, где A — λ–терм и x — переменная.

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $ST(T) = \{x, \lambda x.x\}$.
2. Если $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$, то $ST(T) = \{x, y, (xy), \lambda x.(xy), \lambda y.\lambda x.(xy)\}$.

λ–Термы

Определение

Определим множество $ST(T)$ **подтермов** λ–терма T индукцией по построению:

- если T — переменная или константа, то $ST(T) = \{T\}$;
- если T имеет вид (AB), то $ST(T) = \{(AB)\} \cup ST(A) \cup ST(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $ST(T) = \{\lambda x.A\} \cup ST(A)$, где A — λ–терм и x — переменная.

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $ST(T) = \{x, \lambda x.x\}$.
2. Если $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$, то $ST(T) = \{x, y, (xy), \lambda x.(xy), \lambda y.\lambda x.(xy)\}$.
3. Если $T = ((y(xy))(xz))$, то $ST(T) = \{x, y, z, (xy), (xz), (y(xy)), ((y(xy))(xz))\}$.

λ–Термы

Как и для формул и термов ИП, λ–термам можно сопоставить дерево построения, причём построение подтерма будет соответствовать его поддереву с корнем, отмеченным данным подтермом.

λ–Термы

Как и для формул и термов ИП, λ–термам можно сопоставить дерево построения, причём построение подтерма будет соответствовать его поддереву с корнем, отмеченным данным подтермом.

Определение

Определим **дерево** $T(A)$ индукцией по построению λ–терма A.

- Если A есть переменная или константный символ, то $T(A)$ состоит из единственной вершины, отмеченной A.
- Если A есть $(A_0 A_1)$, где A_0 и A_1 — λ–термы, для которых деревья $T(A_0)$ и $T(A_1)$ уже заданы, то $T(A)$ является деревом, корень которого отмечен A и имеет ровно двух потомков, отмеченных A_0 и A_1, являющихся корнями поддеревьев $T(A_0)$ и $T(A_1)$.
- Если A есть $\lambda x.A_0$, где x — переменная, а A_0 — λ–терм, для которого дерево $T(A_0)$ уже задано, то $T(A)$ является деревом, корень которого отмечен A и имеет ровно одного потомка, отмеченного A_0, являющегося корнем поддерева $T(A_0)$.

λ–Термы

Лемма L1 (о подтермах)

Если R — вхождение подтерма в λ–терм T, то дерево порождения R является поддеревом дерева для T.

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$;

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$;
- если $T = x$ — переменная, то $\mathrm{FV}(T) = \{x\}$;

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$;
- если $T = x$ — переменная, то $\mathrm{FV}(T) = \{x\}$;
- если T имеет вид (AB), то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B)$, где A и B — λ–термы;

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$;
- если $T = x$ — переменная, то $\mathrm{FV}(T) = \{x\}$;
- если T имеет вид (AB), то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \setminus \{x\}$, где A — λ–терм и x — переменная.

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$;
- если $T = x$ — переменная, то $\mathrm{FV}(T) = \{x\}$;
- если T имеет вид (AB), то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \setminus \{x\}$, где A — λ–терм и x — переменная.

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$;
- если $T = x$ — переменная, то $\mathrm{FV}(T) = \{x\}$;
- если T имеет вид (AB), то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \setminus \{x\}$, где A — λ–терм и x — переменная.

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.
2. Если $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.

λ–Термы

Определение

Определим множество $\mathrm{FV}(T)$ **свободных переменных** λ–терма T индукцией по построению:

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$;
- если $T = x$ — переменная, то $\mathrm{FV}(T) = \{x\}$;
- если T имеет вид (AB), то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $\mathrm{FV}(T) = \mathrm{FV}(A) \setminus \{x\}$, где A — λ–терм и x — переменная.

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.
2. Если $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$, то $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.
3. Если $T = ((y(xy))(xz))$, то $\mathrm{FV}(T) = \{x, y, z\}$.

λ–Термы

Определение

λ–Терм T называется **замкнутым** или **комбинатором**, если $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.

λ–Термы

Определение

λ–Терм T называется **замкнутым** или **комбинатором**, если $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.

Определение

1. Вхождение η переменной x в λ–терм T называется **свободным**, если оно не находится под действием λ–квантора, а именно, не существует подтерма T' вида $\lambda x.R$ λ–терма T, содержащего вхождение η.

λ–Термы

Определение

λ–Терм T называется **замкнутым** или **комбинатором**, если $\mathrm{FV}(T) = \varnothing$.

Определение

1. Вхождение η переменной x в λ–терм T называется **свободным**, если оно не находится под действием λ–квантора, а именно, не существует подтерма T' вида $\lambda x.R$ λ–терма T, содержащего вхождение η.
2. λ–Терм R называется **свободным** для переменной x в λ–терме T, если не существует свободного вхождения переменной x в λ–терме T, находящегося под действием квантора $\lambda y.$, где $y \in \mathrm{FV}(R)$.

λ–Термы

Примеры

1. $T = \lambda x.x$ — комбинатор.

λ–Термы

Примеры

1. $T = \lambda x.x$ — комбинатор.
2. $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$ — комбинатор.

λ–Термы

Примеры

1. $T = \lambda x.x$ — комбинатор.
2. $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$ — комбинатор.
3. $T = ((y(xy))(xz))$ не является замкнутым λ–термом.

λ–Термы

Примеры

1. $T = \lambda x.x$ — комбинатор.
2. $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$ — комбинатор.
3. $T = ((y(xy))(xz))$ не является замкнутым λ–термом.

Примеры

- $T = \lambda x.(yx)$, $R = y$; λ–терм R свободен для x в T.

λ–Термы

Примеры

1. $T = \lambda x.x$ — комбинатор.
2. $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$ — комбинатор.
3. $T = ((y(xy))(xz))$ не является замкнутым λ–термом.

Примеры

- $T = \lambda x.(yx)$, $R = y$; λ–терм R свободен для x в T.
- $T = \lambda y.(yx)$, $R = \lambda y.y$; λ–терм R свободен для x в T.

λ–Термы

Примеры

1. $T = \lambda x.x$ — комбинатор.
2. $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$ — комбинатор.
3. $T = ((y(xy))(xz))$ не является замкнутым λ–термом.

Примеры

- $T = \lambda x.(yx)$, $R = y$; λ–терм R свободен для x в T.
- $T = \lambda y.(yx)$, $R = \lambda y.y$; λ–терм R свободен для x в T.
- $T = \lambda y.(yx)$, $R = y$; λ–терм R связан для x в T.

λ–Термы

Определение

Пусть x — переменная, T и R — λ–термы, причём R свободен для x в T. Определим **подстановку** $[T]_R^x$ λ–терма R вместо переменной x в λ–терме T (индукцией по построению λ–терма T):

λ–Термы

Определение

Пусть x — переменная, T и R — λ–термы, причём R свободен для x в T. Определим **подстановку** $[T]^x_R$ λ–терма R вместо переменной x в λ–терме T (индукцией по построению λ–терма T):

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $[T]^x_R = T$;

λ–Термы

Определение

Пусть x — переменная, T и R — λ–термы, причём R свободен для x в T. Определим **подстановку** $[T]^x_R$ λ–терма R вместо переменной x в λ–терме T (индукцией по построению λ–терма T):

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $[T]^x_R = T$;
- если $T = x$, то $[T]^x_R = R$;

λ–Термы

Определение

Пусть x — переменная, T и R — λ–термы, причём R свободен для x в T. Определим **подстановку** $[T]^x_R$ λ–терма R вместо переменной x в λ–терме T (индукцией по построению λ–терма T):

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $[T]^x_R = T$;
- если $T = x$, то $[T]^x_R = R$;
- если $T = y$ — переменная, $y \neq x$, то $[T]^x_R = T$;

λ–Термы

Определение

Пусть x — переменная, T и R — λ–термы, причём R свободен для x в T. Определим **подстановку** $[T]^x_R$ λ–терма R вместо переменной x в λ–терме T (индукцией по построению λ–терма T):

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $[T]^x_R = T$;
- если $T = x$, то $[T]^x_R = R$;
- если $T = y$ — переменная, $y \neq x$, то $[T]^x_R = T$;
- если T имеет вид (AB), то $[T]^x_R = ([A]^x_R[B]^x_R)$, где A и B — λ–термы;

λ–Термы

Определение

Пусть x — переменная, T и R — λ–термы, причём R свободен для x в T. Определим **подстановку** $[T]^x_R$ λ–терма R вместо переменной x в λ–терме T (индукцией по построению λ–терма T):

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $[T]^x_R = T$;
- если $T = x$, то $[T]^x_R = R$;
- если $T = y$ — переменная, $y \neq x$, то $[T]^x_R = T$;
- если T имеет вид (AB), то $[T]^x_R = ([A]^x_R[B]^x_R)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $[T]^x_R = T$, где A — λ–терм;

λ–Термы

Определение

Пусть x — переменная, T и R — λ–термы, причём R свободен для x в T. Определим **подстановку** $[T]_R^x$ λ–терма R вместо переменной x в λ–терме T (индукцией по построению λ–терма T):

- если $T = \mathbf{c}$ — константа, то $[T]_R^x = T$;
- если $T = x$, то $[T]_R^x = R$;
- если $T = y$ — переменная, $y \neq x$, то $[T]_R^x = T$;
- если T имеет вид (AB), то $[T]_R^x = ([A]_R^x[B]_R^x)$, где A и B — λ–термы;
- если T имеет вид $\lambda x.A$, то $[T]_R^x = T$, где A — λ–терм;
- если T имеет вид $\lambda y.A$, то $[T]_R^x = \lambda y.[A]_R^x$, где A — λ–терм, $y \neq x$ — переменная.

λ–Термы

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $[T]^x_R = T$.

λ–Термы

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $[T]_R^x = T$.
2. Если $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$, то $[T]_R^x = T$.

λ–Термы

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $[T]^x_R = T$.
2. Если $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$, то $[T]^x_R = T$.
3. Если $T = \lambda y.(xy)$, то $[T]^x_R = \lambda y.(Ry)$, если $y \notin FV(R)$;

λ–Термы

Примеры

1. Если $T = \lambda x.x$, то $[T]^x_R = T$.
2. Если $T = \lambda y.\lambda x.(xy)$, то $[T]^x_R = T$.
3. Если $T = \lambda y.(xy)$, то $[T]^x_R = \lambda y.(Ry)$, если $y \notin FV(R)$;
4. Если $T = ((y(xy))(xz))$, то $[T]^x_R = ((y(Ry))(Rz))$.

α–конверсия

Преобразование α–**конверсии** состоит в том, что функция не зависит от выбора переменной, которая находится под действием квантора функциональности. Стрелка $\to$ читается как “за один шаг переходит в”, а стрелка $\Rightarrow$ — как “преобразуется в” (транзитивное и рефлексивное замыкания отношения $\to$).
Преобразование

$$\lambda x.T \to \lambda y.[T]_y^x \tag{1}$$

называется α–конверсией (здесь y свободна для x в T).

β–конверсия

Преобразование β**–конверсии** состоит в символьном вычислении результата вызова функции $\lambda x.T(x)$ в “точке” R. Как и выше, стрелка $\to$ читается как “за один шаг переходит в”, а стрелка $\Rightarrow$ — как “преобразуется в” (транзитивное и рефлексивное замыкания отношения $\to$). Преобразование

$$(\lambda x.TR) \to [T]_R^x \tag{2}$$

называется β–конверсией (здесь R свободен для x в T).

β–конверсия

Преобразование β**–конверсии** состоит в символьном вычислении результата вызова функции $\lambda x.T(x)$ в "точке" R. Как и выше, стрелка $\rightarrow$ читается как "за один шаг переходит в", а стрелка $\Rightarrow$ — как "преобразуется в" (транзитивное и рефлексивное замыкания отношения $\rightarrow$). Преобразование

$$(\lambda x.TR) \rightarrow [T]^x_R \tag{2}$$

называется β–конверсией (здесь R свободен для x в T).

Пример.

$\lambda x.x$ есть тождественная функция. В самом деле, $(\lambda x.xT) \Rightarrow T$ для любого T. Обозначив λ–терм $\lambda x.x$ через $\mathbf{I}$, можно записать это выражение как $(\mathbf{I}T) \Rightarrow T$. В частности, $(\mathbf{II}) \Rightarrow \mathbf{I}$.

Исчисление λ–конверсий

Аксиомы

- $\lambda x.T \Rightarrow \lambda y.[T]^x_y$, где y свободна для x в T (α–конверсия)
- $(\lambda x.TR) \Rightarrow [T]^x_R$, где R свободен для x в T (β–конверсия)
- $T \Rightarrow T$ (рефлексивность)

Исчисление λ–конверсий

Аксиомы

- $\lambda x.T \Rightarrow \lambda y.[T]^x_y$, где y свободна для x в T (α–конверсия)
- $(\lambda x.TR) \Rightarrow [T]^x_R$, где R свободен для x в T (β–конверсия)
- $T \Rightarrow T$ (рефлексивность)

Правила вывода

- $\dfrac{T \Rightarrow U;\ U \Rightarrow R}{T \Rightarrow R}$ (транзитивность)
- $\dfrac{T \Rightarrow U}{(TR) \Rightarrow (UR)}$ (преобразование функции)
- $\dfrac{T \Rightarrow U}{(RT) \Rightarrow (RU)}$ (преобразование аргумента)
- $\dfrac{T \Rightarrow U}{\lambda x.T \Rightarrow \lambda x.U}$ (преобразование ξ)

Исчисление λ–конверсий

Пример

Рассмотрим λ–термы

$$\Psi = \lambda x.(xx); \ \ \Omega = (\Psi\Psi) = (\lambda x.(xx)\lambda x.(xx)).$$

По аксиоме β–конверсии, Ω преобразуется в $[(xx)]^x_\Psi = (\Psi\Psi) = \Omega$. Итак, Ω конвертируется в себя.

Исчисление λ–конверсий

Пример

Рассмотрим λ–термы

$$\Psi = \lambda x.(xx); \;\; \Omega = (\Psi\Psi) = (\lambda x.(xx)\lambda x.(xx)).$$

По аксиоме β–конверсии, Ω преобразуется в $[(xx)]_{\Psi}^{x} = (\Psi\Psi) = \Omega$. Итак, Ω конвертируется в себя.

Ω и парадокс Рассела

Рассмотрим множество всех множеств, являющихся собственными элементами: $Z = \{x \mid x \in x\}$. Тогда $Z \in Z \Leftrightarrow Z \in \{x \mid x \in x\} \Leftrightarrow Z \in Z$. Хотя здесь мы и не получили грубого противоречия, мы высветили логическую основу парадокса Рассела и многих других парадоксов: ударяясь в абстракции, слишком легко определить понятия, не содержащие ничего, кроме самих себя.

Исчисление λ–конверсий

Определение

1. λ–Терм T называется **нормальным**, если к его подтермам или результатам использования к ним α–конверсий не применима β–конверсия.

Исчисление λ–конверсий

Определение

1. λ–Терм T называется **нормальным**, если к его подтермам или результатам использования к ним α–конверсий не применима β–конверсия.
2. λ–Терм T называется **нормализуемым**, если существует нормальный λ–терм S такой, что $T \Rightarrow S$.

Исчисление λ–конверсий

Определение

1. λ–Терм T называется **нормальным**, если к его подтермам или результатам использования к ним α–конверсий не применима β–конверсия.
2. λ–Терм T называется **нормализуемым**, если существует нормальный λ–терм S такой, что $T \Rightarrow S$.

Примеры

1. (xy), $\lambda x.x$, $\lambda x.(xy)$ — нормальные.

Исчисление λ–конверсий

Определение

1. λ–Терм T называется **нормальным**, если к его подтермам или результатам использования к ним α–конверсий не применима β–конверсия.
2. λ–Терм T называется **нормализуемым**, если существует нормальный λ–терм S такой, что $T \Rightarrow S$.

Примеры

1. (xy), $\lambda x.x$, $\lambda x.(xy)$ — нормальные.
2. $(\lambda x.(xx)\lambda x.(xx))$ не нормализуем.

Исчисление λ–конверсий

Определение

1. λ–Терм T называется **нормальным**, если к его подтермам или результатам использования к ним α–конверсий не применима β–конверсия.
2. λ–Терм T называется **нормализуемым**, если существует нормальный λ–терм S такой, что $T \Rightarrow S$.

Примеры

1. (xy), $\lambda x.x$, $\lambda x.(xy)$ — нормальные.
2. $(\lambda x.(xx)\lambda x.(xx))$ не нормализуем.
3. $(\lambda x.xx)$ нормализуем, но не является нормальным.

Исчисление λ–конверсий

Определение

1. λ–Терм T называется **нормальным**, если к его подтермам или результатам использования к ним α–конверсий не применима β–конверсия.
2. λ–Терм T называется **нормализуемым**, если существует нормальный λ–терм S такой, что $T \Rightarrow S$.

Примеры

1. (xy), $\lambda x.x$, $\lambda x.(xy)$ — нормальные.
2. $(\lambda x.(xx)\lambda x.(xx))$ не нормализуем.
3. $(\lambda x.xx)$ нормализуем, но не является нормальным.
4. $(\lambda x.z(\lambda x.((xx)y)\lambda x.((xx)y)))$ нормализуем, но... (что будет его нормальной формой?)

λ–Термы с дырой

Определение

Определим λ**–терм с дырой** индукцией по построению. Пусть символ $\Box$ обозначает дыру.

λ–Термы с дырой

Определение

Определим λ**–терм с дырой** индукцией по построению. Пусть символ $\square$ обозначает дыру.

1. $\square$ — λ–терм с дырой;

λ–Термы с дырой

Определение

Определим **λ–терм с дырой** индукцией по построению. Пусть символ $\square$ обозначает дыру.

1. $\square$ — λ–терм с дырой;
2. если T — λ–терм, а R — λ–терм с дырой, то (TR) и (RT) — λ–термы с дырой;

λ–Термы с дырой

Определение

Определим **λ–терм с дырой** индукцией по построению. Пусть символ $\Box$ обозначает дыру.

1. $\Box$ — λ–терм с дырой;
2. если T — λ–терм, а R — λ–терм с дырой, то (TR) и (RT) — λ–термы с дырой;
3. если x — переменная, R — λ–терм с дырой, то $\lambda x.R$ — λ–терм с дырой.

λ–Термы с дырой

Определение

Определим λ**–терм с дырой** индукцией по построению. Пусть символ $\Box$ обозначает дыру.

1. $\Box$ — λ–терм с дырой;
2. если T — λ–терм, а R — λ–терм с дырой, то (TR) и (RT) — λ–термы с дырой;
3. если x — переменная, R — λ–терм с дырой, то $\lambda x.R$ — λ–терм с дырой.

Через $T[R]$ обозначим результат замены дыры в λ–терме с дырой T на λ–терм R.

λ–Термы с дырой

Предложение L1

1. В λ–терме с дырой имеется ровно одна дыра.

λ–Термы с дырой

Предложение L1

1. В λ–терме с дырой имеется ровно одна дыра.
2. Если T — λ–терм с дырой, R — λ–терм, то $T[R]$ — λ–терм.

λ–Термы с дырой

Предложение L1

1. В λ–терме с дырой имеется ровно одна дыра.
2. Если T — λ–терм с дырой, R — λ–терм, то $T[R]$ — λ–терм.
3. Если R — подтерм λ–терма S, то найдётся λ–терм с дырой T, для которого имеет место $S = T[R]$.

λ–Термы с дырой

Предложение L1

1. В λ–терме с дырой имеется ровно одна дыра.
2. Если T — λ–терм с дырой, R — λ–терм, то $T[R]$ — λ–терм.
3. Если R — подтерм λ–терма S, то найдётся λ–терм с дырой T, для которого имеет место $S = T[R]$.
4. Если T — λ–терм с дырой, R и S — λ–термы, $R \Rightarrow S$, то $T[R] \Rightarrow T[S]$.

λ–Термы с дырой

Предложение L1

1. В λ–терме с дырой имеется ровно одна дыра.
2. Если T — λ–терм с дырой, R — λ–терм, то $T[R]$ — λ–терм.
3. Если R — подтерм λ–терма S, то найдётся λ–терм с дырой T, для которого имеет место $S = T[R]$.
4. Если T — λ–терм с дырой, R и S — λ–термы, $R \Rightarrow S$, то $T[R] \Rightarrow T[S]$.

Доказательство.

(1,2) Непосредственно доказываются индукцией по построению λ–терма с дырой. (3) Опирается на единственность дерева построения λ–терма (см. лемму L1). (4) Доказывается индукцией по построению λ–терма с дырой T. Если $T = \Box$, то $R = T[R] \Rightarrow T[S] = S$; если T_1 — λ–терм с дырой, T_2 — λ–терм и $T = (T_1 T_2)$, то $T[R] = (T_1[R] T_2)$, $T[S] = (T_1[S] T_2)$ и $T[R] = (T_1[R] T_2) \Rightarrow (T_1[S] T_2) = T[S]$;

λ–Термы с дырой

Доказательство (продолжение)

если же, при тех же условиях, $T = (T_2 T_1)$, то $T[R] = (T_2 T_1[R])$, $T[S] = (T_2 T_1[S])$ и $T[R] = (T_2 T_1[R]) \Rightarrow (T_2 T_1[S]) = T[S]$. И, наконец, если $T = \lambda x.T_1$, то $T_1[R] \Rightarrow T_1[S]$, по предположению индукции, а следовательно, $T[R] = \lambda x.T_1[R] \Rightarrow \lambda x.T_1[S] = T[S]$.

$\square$

Конструкции λ–языка

Пусть f и g — функции. Тогда $(f(gx))$ применяет f к результату вычисления g в “точке” x, а λ–терм $\lambda x.(f(gx))$ выражает функцию, являющуюся композицией f и g. С другой стороны, принимая во внимание преобразование Карри, $((fx)y)$ выражает применение функции f к двум аргументам, а, соответственно, $((fg)y)$ — применение функционала f к функции g и аргументу y.

Теорема Чёрча–Россера

Теорема L1 (Чёрча–Россера)

Если $T \Rightarrow R$, $T \Rightarrow S$, то найдётся такой Q, что $R \Rightarrow Q$ и $S \Rightarrow Q$.

Свойство, указанное в теореме, носит название **конфлюэнтности**.

Теорема Чёрча–Россера

Теорема L1 (Чёрча–Россера)

Если $T \Rightarrow R$, $T \Rightarrow S$, то найдётся такой Q, что $R \Rightarrow Q$ и $S \Rightarrow Q$.

Свойство, указанное в теореме, носит название **конфлюэнтности**.

Доказательство.

Пользуясь идеей Мартин-Лёфа, определим вспомогательное отношение конверсии $\rightarrow_1$, в котором β-конверсия к каждому подтерму применяется не более одного раза.

$T \rightarrow_1 T$	$\dfrac{T \rightarrow_1 R}{\lambda x.T \rightarrow_1 \lambda x.R}$
$\dfrac{T \rightarrow_1 R;\ \ S \rightarrow_1 Q}{(TS) \rightarrow_1 (RQ)}$	$\dfrac{T \rightarrow_1 R;\ \ S \rightarrow_1 Q}{(\lambda x.TS) \rightarrow_1 [R]^x_Q}$

(в последнем случае Q свободен для x в R.) Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Теорема Черча–Россера

Лемма L1A

Если $T \to_1 R$, то $T \Rightarrow R$.

Лемма L1B

$\Rightarrow$ — транзитивное замыкание $\to_1$ и преобразования α–конверсии.

Лемма L1C

Если $\lambda x.T \to_1 R$, то R имеет вид $\lambda x.R_0$ для подходящего λ–терма R_0.

Лемма L1D

Если $(TR) \to_1 S$, то либо S есть (QV), где $T \to_1 Q$, $R \to_1 V$, либо T есть $\lambda x.Q$, S есть $[Q_1]^x_{R_1}$, где $Q \to_1 Q_1$, $R \to_1 R_1$ и, к тому же, R_1 свободен для x в Q_1.

Все леммы непосредственно следуют из определений.

Теорема Черча–Россера

Лемма L1E

Если $T \to_1 R$, $S \to_1 Q$, то $[T]^x_S \to_1 [R]^x_Q$ в случаях, когда S свободен для x в T и Q свободен для x в R соответственно.

Доказательство леммы L1E.

Индукцией по построению λ-терма T.

$T \in \{y, \mathbf{c}\}$. Тогда $R = T$ и, следовательно, $[T]^x_S = T \to_1 T = [R]^x_Q$, если $T \in \{y, \mathbf{c}\}$, где $\mathbf{c}$ — константа, а $y \neq x$ — переменная; $[T]^x_S = S \to_1 Q = [R]^x_Q$, если $T = x$.

$T = \lambda y.T_1$. По лемме L1C, $R = \lambda y.R_1$. Далее, если $y = x$, то $T = \lambda x.T_1 = [T]^x_S \to_1 [R]^x_S = \lambda x.R_1 = R$; если же $y \neq x$, по предположению индукции, $[T_1]^x_S \to_1 [R_1]^x_Q$, а по правилу ξ, $[T]^x_R = \lambda y.[T_1]^x_R \to \lambda y.[R_1]^x_Q = [R]^x_Q$.

Теорема Черча–Россера

Доказательство леммы L1E (продолжение).

$T = (T_1 T_2)$. По лемме L1D, возможны следующие два случая.

1. $R = (R_1 R_2)$, где $T_1 \to_1 R_1$, $T_2 \to_1 R_2$. Тогда по предположению индукции, $[T_1]^x_S \to_1 [R_1]^x_Q$ и $[T_2]^x_S \to_1 [R_2]^x_Q$; таким образом, $[T]^x_S = ([T_1]^x_S [T_2]^x_S) \to_1 ([R_1]^x_Q [R_2]^x_Q) = [R]^x_Q$.
2. $T_1 = \lambda y.U_1$, $R = [V_1]^y_{V_2}$, где $U_1 \to_1 V_1$ и $T_2 \to_1 V_2$. Снова разбираем два подслучая.

   $y = x$. Тогда $[T]^x_S = (\lambda x.U_1[T_2]^x_S)$. По предположению индукции, $[T_2]^x_S \to_1 [V_2]^x_Q$ и, следовательно, $[T]^x_S \to_1 [R]^x_Q = [[V_1]^x_{V_2}]^x_Q = [V_1]^x_{[V_2]^x_Q}$.

   $y \neq x$. Тогда $[T]^x_S = (\lambda y.[U_1]^x_S[T_2]^x_S)$. По предположению индукции, $[T_2]^x_S \to_1 [V_2]^x_Q$, $[U_1]^x_S \to_1 [V_1]^x_Q$ и, следовательно, $[T]^x_S \to_1 [R]^x_Q = [[V_1]^x_{V_2}]^x_Q = [V_1]^x_{[V_2]^x_Q}$. □

Теорема Черча–Россера

Лемма L1F

Отношение $\to_1$ обладает свойством конфлюэнтности.

Теорема Черча–Россера

Лемма L1F

Отношение $\to_1$ обладает свойством конфлюэнтности.

Доказательство леммы L1F.

Индукцией по длине преобразования T в R.

- Если T есть R, то достаточно взять S в качестве Q.
- Если T есть $(\lambda x.T_1T_2)$, а R есть $[R_1]^x_{R_2}$, где $T_1 \to_1 R_1$, $T_2 \to_1 R_2$, то S есть одно из двух:
  1. $(\lambda x.S_1S_2)$, где $T_1 \to_1 S_1$, $T_2 \to_1 S_2$. По предположению индукции, можно найти Q_1 и Q_2 такие, что $R_1 \to_1 Q_1$, $S_1 \to_1 Q_1$ и $R_2 \to_1 Q_2$, $S_2 \to_1 Q_2$. По лемме L1E, в качестве Q можно взять $[Q_1]^x_{Q_2}$.
  2. $[S_1]^x_{S_2}$. Непосредственно применяем предположение индукции и лемму L1E.

Теорема Черча–Россера

Доказательство леммы L1F (продолжение)

- Если $T = (T_1 T_2)$, а $R = (R_1 R_2)$, то снова возникают два случая.
  1. $S = (S_1 S_2)$. Непосредственно применяем предположение индукции.
  2. $T = (\lambda x.U_1 T_2)$, $S = [S_1]^x_{S_2}$, где $U_1 \to_1 S_1$, $T_2 \to_1 S_2$. По лемме L1C, найдётся V_1 такой, что $R_1 = \lambda x.V_1$ и $U_1 \to_1 V_1$; по предположению индукции, найдутся Q_1 и Q_2, для которых выполнено $S_1 \to_1 Q_1$, $V_1 \to_1 Q_1$ и $S_2 \to_1 Q_2$, $R_2 \to_1 Q_2$. Далее, $R \to_1 [Q_1]^x_{Q_2}$ и, по лемме L1E, $S \to_1 [Q_1]^x_{Q_2}$. □

Доказательство теоремы L1 (окончание)

Поскольку β-конверсия — транзитивное замыкание $\to_1$, а $\to_1$ конфлюэнтно, отношение $\Rightarrow$ также конфлюэнтно. □

Бестиповое λ–исчисление

$t = t$	(аксиома равенства)
$\lambda x.t = \lambda y.[t]_y^x$	(аксиома α–конверсии)
$(\lambda x.tr) = [t]_r^x$	(аксиома β–конверсии)
$\dfrac{t = u}{u = t}$	$\dfrac{t = u;\ \ u = r}{t = r}$
$\dfrac{t = u}{(tr) = (ur)}$	$\dfrac{t = u}{(rt) = (ru)}$
$\dfrac{t = u}{\lambda x.t = \lambda x.u}$	(правило ξ)

Исчислению λ–конверсий соответствует исчисление равенств λ–термов, конвертируемых в одно и то же выражение, которое обычно называется λ**–исчислением** или **комбинаторной логикой**.

Бестиповое λ–исчисление

$t = t$	(аксиома равенства)
$\lambda x.t = \lambda y.[t]^x_y$	(аксиома α–конверсии)
$(\lambda x.tr) = [t]^x_r$	(аксиома β–конверсии)
$\dfrac{t = u}{u = t}$	$\dfrac{t = u;\ u = r}{t = r}$
$\dfrac{t = u}{(tr) = (ur)}$	$\dfrac{t = u}{(rt) = (ru)}$
$\dfrac{t = u}{\lambda x.t = \lambda x.u}$	(правило ξ)

Исчислению λ–конверсий соответствует исчисление равенств λ–термов, конвертируемых в одно и то же выражение, которое обычно называется λ–**исчислением** или **комбинаторной логикой**.

Теорема L2

Формула $t = u$ выводима в комбинаторной логике, если и только если существует λ–терм v такой, что $t \Rightarrow v$, $u \Rightarrow v$.

Бестиповое λ–исчисление

Теорема L3 (о неподвижной точке)

Для любого λ–терма t найдётся такой λ–терм u, что $u = (tu)$.

Бестиповое λ–исчисление

Теорема L3 (о неподвижной точке)

Для любого λ–терма t найдётся такой λ–терм u, что $u = (tu)$.

Доказательство.

Определим w как $\lambda x.(t(xx))$; пусть u есть (ww). Тогда $(ww) \Rightarrow [(t(xx))]^x_{\lambda x.(t(xx))} = (t(ww)) = (tu)$. $\square$

Далее в программе

1. Проблема нормализуемости λ–термов неразрешима.
2. Взаимосвязь λ–исчисления с классической вычислимостью.
3. Семантика Ершова-Скотта (денотационная).

Спасибо за внимание.