Лекция L8
Язык программирования для вычислимых функционалов, II

Вадим Пузаренко

6 апреля 2020 г.

Мотивация

Применяем результаты лекции L7 к PCF.

Константы и непрерывные функции

По результатам лекции L7, функционал $\mathbb{Y}_D$ непрерывен.

Константы и непрерывные функции

По результатам лекции L7, функционал $\mathbb{Y}_D$ непрерывен.

Упражнение.

Проверить, что функции succ, pred, isnull и cond_σ непрерывны.

Термы и непрерывные функции

Пусть M^σ — PCF-терм и $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, …, $x_n^{\sigma_n}$ — список всех попарно различных переменных, входящих в M. Значение $[\![M]\!]$ будет зависеть только от означивания ϱ переменных x_1, x_2, …, x_n. Будем писать $[\![M]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вместо $[\![M]\!]_\varrho$ в случае, когда $\varrho(x_1) = a_1$, $\varrho(x_2) = a_2$, …, $\varrho(x_n) = a_n$. Можно также воспринимать $[\![M]\!]$ как функцию
$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto [\![M]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n) : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \ldots \times D_{\sigma_n} \to D_\sigma$.
Покажем индукцией по построению терма, что эта функция непрерывна.

Термы и непрерывные функции

Пусть M^σ — PCF-терм и $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, $\ldots$, $x_n^{\sigma_n}$ — список всех попарно различных переменных, входящих в M. Значение $[\![M]\!]$ будет зависеть только от означивания ϱ переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Будем писать $[\![M]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вместо $[\![M]\!]_\varrho$ в случае, когда $\varrho(x_1) = a_1$, $\varrho(x_2) = a_2$, $\ldots$, $\varrho(x_n) = a_n$. Можно также воспринимать $[\![M]\!]$ как функцию
$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto [\![M]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n) : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \ldots \times D_{\sigma_n} \to D_\sigma$.
Покажем индукцией по построению терма, что эта функция непрерывна.

(1) $M \equiv x_i^{\sigma_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $[\![x_i^{\sigma_i}]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto a_i : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \ldots \times D_{\sigma_n} \to D_{\sigma_i}$ непрерывна, как проекция на i-ую координату.
Для констант доказывать нечего, поскольку любая постоянная функция непрерывна.

Термы и непрерывные функции

(2) $M^\tau \equiv (N^{(\sigma\to\tau)} P^\sigma)$. По индукционному предположению,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto [\![N]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n) : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \ldots \times D_{\sigma_n} \to D_{(\sigma\to\tau)},$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto [\![P]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n) : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \ldots \times D_{\sigma_n} \to D_\sigma$$

непрерывны. Таким образом, функция

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto$$

$$\mapsto [\![N]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n)([\![P]\!](a_1, a_2, \ldots, a_n)) : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \ldots \times D_{\sigma_n} \to D_\tau$$

непрерывна, поскольку $\mathrm{app} : [D_\sigma \to D_\tau] \times D_\sigma \to D_\tau$, $(f, x) \mapsto f(x)$ непрерывна.

Термы и непрерывные функции

(3) $M \equiv \lambda x^\sigma . N^\tau$. Пусть $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, …, $x_n^{\sigma_n}$ — переменные, входящие свободно в M. Переменные, входящие свободно в N — это $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, …, $x_n^{\sigma_n}$, x^σ. По индукционному предположению, функция

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, a) \mapsto$$
$$\mapsto [\![N]\!](a_1, a_2, \dots, a_n, a) : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \dots \times D_{\sigma_n} \times D_\sigma \to D_\tau$$

непрерывна. Используя преобразование Карри, приходим к непрерывному отображению

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto$$
$$\mapsto (a \mapsto [\![N]\!](a_1, a_2, \dots, a_n, a)) : D_{\sigma_1} \times D_{\sigma_2} \times \dots \times D_{\sigma_n} \to [D_\sigma \to D_\tau];$$

в частности,

$$[\![\lambda x^\sigma . N^\tau]\!](a_1, a_2, \dots, a_n) = (a \mapsto [\![N]\!](a_1, a_2, \dots, a_n, a) : D_\sigma \to D_\tau).$$

Корректность

Семантика корректна в том смысле, что интерпретации термов остаются неизменными в процессе редукции. А именно,

Теорема о корректности (L17)

Если $M \to^* N$, то $[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$ для всех ϱ.

Корректность

Семантика корректна в том смысле, что интерпретации термов остаются неизменными в процессе редукции. А именно,

Теорема о корректности (L17)

Если $M \to^* N$, то $[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$ для всех ϱ.

Доказательство.

Необходимо доказать данное условие отдельно для всех правил вывода. Для большинства этих правил условие очевидно. Проверим, к примеру, аксиому $(\mathrm{Y}M) \to (M(\mathrm{Y}M))$: $[\![(\mathrm{Y}M)]\!]_\varrho = [\![\mathrm{Y}]\!]_\varrho([\![M]\!]_\varrho) = \mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho)$. По теореме L16, $\mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho)$ — наименьшая неподвижная точка $[\![M]\!]_\varrho$. В частности, $\mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho) = [\![M]\!]_\varrho(\mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho))$. $\square$

Корректность

Семантика корректна в том смысле, что интерпретации термов остаются неизменными в процессе редукции. А именно,

Теорема о корректности (L17)

Если $M \to^* N$, то $[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$ для всех ϱ.

Доказательство.

Необходимо доказать данное условие отдельно для всех правил вывода. Для большинства этих правил условие очевидно. Проверим, к примеру, аксиому $(\mathrm{Y}M) \to (M(\mathrm{Y}M))$: $[\![(\mathrm{Y}M)]\!]_\varrho = [\![\mathrm{Y}]\!]_\varrho([\![M]\!]_\varrho) = \mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho)$. По теореме L16, $\mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho)$ — наименьшая неподвижная точка $[\![M]\!]_\varrho$. В частности, $\mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho) = [\![M]\!]_\varrho(\mathbb{Y}([\![M]\!]_\varrho))$. $\square$

Упражнение.

Дать детальное доказательство теоремы L17.

Корректность

Утверждение, обратное теореме L17, не имеет места, что вытекает из того, что посылка симметрична, чего нельзя сказать о заключении.

Корректность

Утверждение, обратное теореме L17, не имеет места, что вытекает из того, что посылка симметрична, чего нельзя сказать о заключении.

Что можно сказать в случае, когда теорему о корректности переформулировать следующим образом: *Если $[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$, то существует P такое, что $M \to^* P$ и $N \to^* P$*?

Корректность

Утверждение, обратное теореме L17, не имеет места, что вытекает из того, что посылка симметрична, чего нельзя сказать о заключении.

Что можно сказать в случае, когда теорему о корректности переформулировать следующим образом: *Если* $[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$, *то существует* P *такое, что* $M \to^* P$ *и* $N \to^* P$?

Такая переформулировка не приводит к цели.

Корректность

Утверждение, обратное теореме L17, не имеет места, что вытекает из того, что посылка симметрична, чего нельзя сказать о заключении.

Что можно сказать в случае, когда теорему о корректности переформулировать следующим образом: *Если* $[\![M]\!]_\varrho = [\![N]\!]_\varrho$, *то существует* P *такое, что* $M \to^* P$ *и* $N \to^* P$?

Такая переформулировка не приводит к цели.

Однако покажем, что обращение теоремы о корректности выполняется, если ограничиться рассмотрением PCF-термов специального вида.

Программа

Определение.

Замкнутый PCF-терм типа ω или β назовём **программой**.

Программа

Определение.

Замкнутый PCF-терм типа ω или β назовём **программой**.

Конечно, можно было бы любой PCF-терм назвать программой, однако данное ограничение оправдано вследствие того, что только такие термы могут быть редуцированы к термам конкретного вида.

Программа

Определение.

Замкнутый PCF-терм типа ω или β назовём **программой**.

Конечно, можно было бы любой PCF-терм назвать программой, однако данное ограничение оправдано вследствие того, что только такие термы могут быть редуцированы к термам конкретного вида.

Замечание.

Для каждого замкнутого PCF-терма может выполняться одно из следующих условий:

- $M \to M_1 \to M_2 \to \ldots$, т. е. цепочка редукций не обрывается;
- $M \to^* k_n$, $M \to^* TRUE$ или $M \to^* FALSE$.

Программа

Определение.

Замкнутый PCF-терм типа ω или β назовём **программой**.

Конечно, можно было бы любой PCF-терм назвать программой, однако данное ограничение оправдано вследствие того, что только такие термы могут быть редуцированы к термам конкретного вида.

Замечание.

Для каждого замкнутого PCF-терма может выполняться одно из следующих условий:

- $M \to M_1 \to M_2 \to \ldots$, т. е. цепочка редукций не обрывается;
- $M \to^* k_n$, $M \to^* TRUE$ или $M \to^* FALSE$.

Исключениями, например, служат $M \to^* PRED\ k_0$ и похожие последовательности, к примеру, $M \to^* (SUCC(PRED\ k_0))$, $M \to^* PRED(PRED\ k_0)$ и т. д.

Адекватность

Возьмём в качестве **C** одну из констант k_n, *TRUE* или *FALSE*. Пусть также M — программа. Из теоремы о корректности следует, что справедлива импликация $M \to^* \mathbf{C} \Longrightarrow [\![M]\!] = [\![\mathbf{C}]\!]$.

Адекватность

Возьмём в качестве $\mathbf{C}$ одну из констант k_n, $TRUE$ или $FALSE$. Пусть также M — программа. Из теоремы о корректности следует, что справедлива импликация $M \to^* \mathbf{C} \Longrightarrow [\![M]\!] = [\![\mathbf{C}]\!]$.

Теорема об адекватности (L18)

Для программы M имеет место следующая эквивалентность: $M \to^* \mathbf{C} \Longleftrightarrow [\![M]\!] = [\![\mathbf{C}]\!]$.

Адекватность

Возьмём в качестве **C** одну из констант k_n, $TRUE$ или $FALSE$. Пусть также M — программа. Из теоремы о корректности следует, что справедлива импликация $M \to^* \mathbf{C} \Longrightarrow [\![M]\!] = [\![\mathbf{C}]\!]$.

Теорема об адекватности (L18)

Для программы M имеет место следующая эквивалентность: $M \to^* \mathbf{C} \Longleftrightarrow [\![M]\!] = [\![\mathbf{C}]\!]$.

Следствие L5

Для программы M имеет место следующая эквивалентность: $[\![M]\!] = \perp \Longleftrightarrow$ цепочка редукций M не обрывается или $M \to^* PRED\ k_0, \ldots$ (аварийная остановка).

Адекватность

Пусть D_σ — семантический домен и пусть PCF_σ — множество всех замкнутых термов типа σ. Далее, пусть ι — один из атомарных PCF-типов ω и β. Определим бинарное отношение $\lhd_\sigma \subseteq D_\sigma \times \mathrm{PCF}_\sigma$ индукцией по построению типа σ:

$\sigma \equiv \iota$: для $d \in D_\iota$ и $M \in \mathrm{PCF}_\iota$ положим $d \lhd_\iota M \Longleftrightarrow [M \to^* \mathbf{C} \& d = [\![\mathbf{C}]\!]] \vee [d = \bot \& M$ — любое$]$;

$\sigma \equiv (\pi \to \tau)$: для $f \in D_{(\pi\to\tau)} = [D_\pi \to D_\tau]$ и $M \in \mathrm{PCF}_{(\pi\to\tau)}$ положим
$f \lhd_{(\pi\to\tau)} M \Longleftrightarrow f(a) \lhd_\tau (MN)$ для всех $a \in D_\pi$, $N \in \mathrm{PCF}_\pi$ таких, что $a \lhd_\pi N$.

Адекватность

Замечание.

Пусть σ — произвольный тип; тогда он имеет вид $\sigma \equiv (\tau_1 \to (\tau_2 \to (\ldots(\tau_k \to \iota)\ldots)))$. Нетрудно проверить, что для всех $f \in D_\sigma$ и $M \in \mathrm{PCF}_\sigma$ выполняется следующее:

$$f \lhd_\sigma M \iff [\text{ для всех } a_i \in D_{\tau_i} \text{ и } N_i \in \mathrm{PCF}_{\tau_i},$$
$$\text{удовлетворяющих условию } a_i \lhd_{\tau_i} N_i \ (1 \leqslant i \leqslant k),$$
$$\text{имеем } f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \lhd_\iota ((\ldots((MN_1)N_2)\ldots)N_k).]$$

Адекватность

Замечание.

Пусть σ — произвольный тип; тогда он имеет вид $\sigma \equiv (\tau_1 \to (\tau_2 \to (\ldots(\tau_k \to \iota)\ldots)))$. Нетрудно проверить, что для всех $f \in D_\sigma$ и $M \in \mathrm{PCF}_\sigma$ выполняется следующее:

$$f \lhd_\sigma M \iff [\text{ для всех } a_i \in D_{\tau_i} \text{ и } N_i \in \mathrm{PCF}_{\tau_i}, \text{ удовлетворяющих условию } a_i \lhd_{\tau_i} N_i \ (1 \leqslant i \leqslant k), \text{ имеем } f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \lhd_\iota ((\ldots((MN_1)N_2)\ldots)N_k).]$$

Предложение L13

Пусть заданы тип σ и терм $M \in \mathrm{PCF}_\sigma$. Тогда множество $\{d \in D_\sigma | d \lhd_\sigma M\}$ непусто и замкнуто по Скотту, т. е.

(1) $\bot \lhd_\sigma M$;

(2) $d' \sqsubseteq d$, $d \lhd_\sigma M \implies d' \lhd_\sigma M$;

(3) для всякой ω-цепи $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq \ldots$, удовлетворяющей условию $d_i \lhd_\sigma M$ для всех $i \in \omega$, имеем $\bigsqcup\limits_{i \in \omega} d_i \lhd_\sigma M$.

Адекватность

Доказательство.

Индукцией по построению типа σ.

$\sigma \equiv \iota$. Утверждение непосредственно вытекает из определения отношения $\lhd_\iota$.

$\sigma \equiv (\eta \to \tau)$. Предположим, что утверждение выполняется для η и τ; докажем, что оно выполняется и для $(\eta \to \tau)$. Пусть $M \in \mathrm{PCF}_{(\eta\to\tau)}$.

(1) Наименьшим элементом $D_{(\eta\to\tau)}$ является постоянная функция $\mathrm{const}_\perp$, принимающая значение $\perp$. По предположению индукции, $\mathrm{const}_\perp(a) = \perp \lhd_\tau (MN)$ для всех $a \in D_\eta$ и $N \in \mathrm{PCF}_\eta$, а следовательно, $\mathrm{const}_\perp \lhd_\tau M$;

(2) Пусть $g \sqsupseteq f \in D_{(\eta\to\tau)}$ и $f \lhd_{(\eta\to\tau)} M$. Тогда для всех $a \in D_\eta$ и $N \in \mathrm{PCF}_\eta$ имеем $f(a) \lhd_\tau (MN)$. Так как $f \sqsubseteq g$, имеем $f(a) \sqsubseteq g(a)$, а по предположению индукции, $g(a) \lhd_\tau (MN)$. Следовательно, $g \lhd_{(\eta\to\tau)} M$.

Адекватность

Доказательство (продолжение).

(3) Пусть $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \ldots$ — ω-цепь, удовлетворяющая условию $f_i \lhd_{(\eta\to\tau)} M$ для всех $i \in \omega$. Тогда из определения вытекает, что $f_i(a) \lhd_\tau (MN)$ для всех $a \in D_\eta$, $N \in \mathrm{PCF}_\eta$, удовлетворяющих условию $a \lhd_\eta N$ $(i \in \omega)$. Так как $f_0(a) \sqsubseteq f_1(a) \sqsubseteq f_2(a) \sqsubseteq \ldots$ — ω-цепь, имеем $\bigsqcup\limits_{i\in\omega} f_i(a) \lhd_\tau (MN)$ $(a \in D_\eta,\ N \in \mathrm{PCF}_\eta)$. Следовательно, $\bigsqcup\limits_{i\in\omega} f_i \lhd_{(\eta\to\tau)} M$. $\square$

Адекватность

Доказательство (продолжение).

(3) Пусть $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \ldots$ — ω-цепь, удовлетворяющая условию $f_i \lhd_{(\eta\to\tau)} M$ для всех $i \in \omega$. Тогда из определения вытекает, что $f_i(a) \lhd_\tau (MN)$ для всех $a \in D_\eta$, $N \in \mathrm{PCF}_\eta$, удовлетворяющих условию $a \lhd_\eta N$ $(i \in \omega)$. Так как $f_0(a) \sqsubseteq f_1(a) \sqsubseteq f_2(a) \sqsubseteq \ldots$ — ω-цепь, имеем $\bigsqcup\limits_{i\in\omega} f_i(a) \lhd_\tau (MN)$ $(a \in D_\eta,\ N \in \mathrm{PCF}_\eta)$. Следовательно, $\bigsqcup\limits_{i\in\omega} f_i \lhd_{(\eta\to\tau)} M$. □

Предложение L14

Пусть M — замкнутый λ-терм типа σ и $M \to^* M'$. Тогда справедливо соотношение $d \lhd_\sigma M \iff d \lhd_\sigma M'$ для любого $d \in D_\sigma$.

Адекватность

Доказательство.

Индукцией по построению типа σ.

$\sigma \equiv \iota$. Если $d = \perp$, то $d \lhd_\sigma M$ и $d \lhd_\sigma M'$. Пусть теперь $d \neq \perp$.

($\Rightarrow$) Пусть $d \lhd_\iota M$; тогда $d = [\![\mathbf{C}]\!]$ и $M \to^* \mathbf{C}$, согласно определению отношения $\lhd_\iota$. Так как $M \to^* M'$, терм M' должен присутствовать в цепи редукций $M \to^* \mathbf{C}$, в силу детерминированности цепи редукций. Следовательно, $M' \to^* \mathbf{C}$ и, в свою очередь, $d \lhd_\iota M'$.

($\Leftarrow$) Пусть $d \lhd_\iota M$; тогда $d = [\![\mathbf{C}]\!]$ и $M' \to^* \mathbf{C}$, согласно определению отношения $\lhd_\iota$. Так как $M \to^* M'$, имеем $M \to^* M' \to^* \mathbf{C}$ и, в свою очередь, $d \lhd_\iota M$.

Адекватность

Доказательство (продолжение).

$\sigma \equiv (\tau_1 \to (\tau_2 \to \ldots \to (\tau_k \to \iota)\ldots))$. Согласно замечанию, имеем

$$f \lhd_\sigma M \Longleftrightarrow \forall (a_i \lhd_{\tau_i} N_i).[f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \lhd_\iota ((\ldots((MN_1)N_2)\ldots)N_k]);$$

$$f \lhd_\sigma M' \Longleftrightarrow \forall (a_i \lhd_{\tau_i} N_i).[f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \lhd_\iota ((\ldots((M'N_1)N_2)\ldots)N_k]).$$

Так как $M \to^* M'$, имеем $((\ldots((MN_1)N_2)\ldots)N_k) \to ((\ldots((M'N_1)N_2)\ldots)N_k)$, согласно правилам PCF-редукций. Далее, по доказанному выше, $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \lhd_\iota ((\ldots((MN_1)N_2)\ldots)N_k) \Longleftrightarrow$ $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) \lhd_\iota ((\ldots((M'N_1)N_2)\ldots)N_k)$ для всех $a_i \lhd_{\tau_i} N_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Таким образом, $f \lhd_\sigma M \Longleftrightarrow f \lhd_\sigma M'$. $\square$

Адекватность

Предложение L15

Для любой PCF-константы $\mathbf{C}$ выполняется соотношение $[\![\mathbf{C}]\!] \lhd_\sigma \mathbf{C}$.

Адекватность

Предложение L15

Для любой PCF-константы $\mathbf{C}$ выполняется соотношение $[\![\mathbf{C}]\!] \lhd_\sigma \mathbf{C}$.

Доказательство.

- Утверждение очевидно для PCF-констант атомарных типов: $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, TRUE и FALSE.
- Для того, чтобы показать соотношение $\mathrm{succ} \lhd_{(\omega\to\omega)} \mathrm{SUCC}$, необходимо проверить, что выполняется соотношение $d \lhd_\omega M \Longrightarrow \mathrm{succ}(d) \lhd_\omega (\mathrm{SUCC}M)$.

  $d = \bot$. $\mathrm{succ}(\bot) = \bot \lhd_\omega (\mathrm{SUCC}M)$, по предложению L13(1).

  $d = n \in \mathbb{N}$. Если $n \lhd_\omega M$, то $M \to^* k_n$, согласно определению отношения $\lhd_\omega$; далее, $(\mathrm{SUCC}M) \to^* (\mathrm{SUCC}k_n) \to k_{n+1}$, согласно правилам PCF-редукции. Таким образом, $\mathrm{succ}(n) = n+1 \lhd_\omega (\mathrm{SUCC}M)$.

Адекватность

Доказательство (продолжение).

- Случаи $\mathrm{pred} \lhd_\omega \mathrm{PRED}$ и $\mathrm{isnull} \lhd_\omega \mathrm{ISNULL}$ рассматриваются аналогично (упражнение!!!)
- Для того, чтобы показать соотношение $\mathrm{cond}_\sigma \lhd_{(\beta\to(\sigma\to(\sigma\to\sigma)))} \mathrm{COND}_\sigma$, необходимо проверить, что выполняется следующее соотношение

$d \lhd_\beta M,\ a \lhd_\sigma P,\ b \lhd_\sigma Q \Longrightarrow \mathrm{cond}_\sigma(d,a,b) \lhd_\sigma (((\mathrm{COND}_\sigma M)P)Q)$.

$d = \bot$. $\mathrm{cond}_\sigma(\bot,a,b) = \bot \lhd_\sigma (((\mathrm{COND}_\sigma M)P)Q)$, по предложению L13(1).

$d = \mathrm{true}$. Если $\mathrm{true} \lhd_\beta M$, то $M \to^* \mathrm{TRUE}$ и, следовательно, $(((\mathrm{COND}_\sigma M)P)Q) \to^* (((\mathrm{COND}_\sigma \mathrm{TRUE})P)Q) \to P$, согласно правилам PCF-редукций. Так как $\mathrm{cond}_\sigma(\mathrm{true},a,b) = a \lhd_\sigma P$, получаем $\mathrm{cond}_\sigma(\mathrm{true},a,b) \lhd_\sigma (((\mathrm{COND}_\sigma M)P)Q)$.

$d = \mathrm{false}$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему (упражнение !!!)

Адекватность

Доказательство (продолжение).

- Для того, чтобы доказать соотношение $\mathbb{Y}_\sigma \lhd_{((\sigma\to\sigma)\to\sigma)} \mathrm{Y}_\sigma$, необходимо проверить справедливость следующего соотношения

$$f \lhd_{(\sigma\to\sigma)} M \Longrightarrow \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\bot) = \mathbb{Y}_\sigma(f) \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M).$$

Пусть $f \lhd_{(\sigma\to\sigma)} M$; по предложению L13(1), $\bot \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M)$. Следовательно, $f(\bot) \lhd_\sigma (M(\mathrm{Y}_\sigma M))$; так как $(\mathrm{Y}_\sigma M) \to (M(\mathrm{Y}_\sigma M))$, имеем $f(\bot) \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M)$. Используя данный аргумент, можно доказать индукцией доказать, что $f^n(\bot) \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из предложения L13(3) получаем требуемое. $\square$

Адекватность

Доказательство (продолжение).

- Для того, чтобы доказать соотношение $\mathbb{Y}_\sigma \lhd_{((\sigma\to\sigma)\to\sigma)} \mathrm{Y}_\sigma$, необходимо проверить справедливость следующего соотношения
$$f \lhd_{(\sigma\to\sigma)} M \Longrightarrow \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\bot) = \mathbb{Y}_\sigma(f) \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M).$$
Пусть $f \lhd_{(\sigma\to\sigma)} M$; по предложению L13(1), $\bot \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M)$. Следовательно, $f(\bot) \lhd_\sigma (M(\mathrm{Y}_\sigma M))$; так как $(\mathrm{Y}_\sigma M) \to (M(\mathrm{Y}_\sigma M))$, имеем $f(\bot) \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M)$. Используя данный аргумент, можно доказать индукцией доказать, что $f^n(\bot) \lhd_\sigma (\mathrm{Y}_\sigma M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из предложения L13(3) получаем требуемое. $\square$

Основная теорема о логических отношениях (L19)

Для каждого замкнутого PCF-терма M типа σ выполняется соотношение $[\![M]\!] \lhd_\sigma M$.

Адекватность

Сформулируем и докажем более общую форму основной теоремы.

Адекватность

Сформулируем и докажем более общую форму основной теоремы.

Теорема L20

Пусть M — произвольный PCF-терм типа σ со свободными переменными $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, …, $x_n^{\sigma_n}$. Тогда для всех $a_1 \lhd_{\sigma_1} N_1$, $a_2 \lhd_{\sigma_2} N_2$, …, $a_n \lhd_{\sigma_n} N_n$ выполняется следующее:

$$[\![M]\!]_{[x_1^{\sigma_1} \mapsto a_1, x_2^{\sigma_2} \mapsto a_2, \ldots, x_n^{\sigma_n} \mapsto a_n]} \lhd_\sigma [M]^{x_1^{\sigma_1}\, x_2^{\sigma_2}\, \ldots\, x_n^{\sigma_n}}_{N_1\; N_2\; \ldots\, N_n}.$$

Адекватность

Сформулируем и докажем более общую форму основной теоремы.

Теорема L20

Пусть M — произвольный PCF-терм типа σ со свободными переменными $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, …, $x_n^{\sigma_n}$. Тогда для всех $a_1 \lhd_{\sigma_1} N_1$, $a_2 \lhd_{\sigma_2} N_2$, …, $a_n \lhd_{\sigma_n} N_n$ выполняется следующее:

$$[\![M]\!]_{[x_1^{\sigma_1} \mapsto a_1, x_2^{\sigma_2} \mapsto a_2, \ldots, x_n^{\sigma_n} \mapsto a_n]} \lhd_\sigma [M]^{x_1^{\sigma_1}\, x_2^{\sigma_2}\, \ldots\, x_n^{\sigma_n}}_{N_1\ \, N_2\ \, \ldots\, N_n}.$$

Доказательство.

Индукцией по построению PCF-терма.

- Если M — константа, то утверждение вытекает из предложения L15.
- Пусть $M \equiv x^\sigma$ и пусть также $a \lhd_\sigma N$; тогда $[\![x^\sigma]\!]_{[x^\sigma \mapsto a]} = a \lhd_\sigma N = [x^\sigma]^{x^\sigma}_N$.

Адекватность

Доказательство (продолжение).

- Пусть $M \equiv (P^{(\tau\to\sigma)}Q^{\tau})$; по предположению индукции, считаем, что утверждение выполняется для P и Q. Далее, пусть $x_1^{\sigma 1}$, $x_2^{\sigma 2}$, …, $x_n^{\sigma n}$ — свободные переменные терма M; заметим, что эти переменные свободно входят в P и Q. Возьмём $a_1 \lhd_{\sigma_1} N_1$, $a_2 \lhd_{\sigma_2} N_2$, …, $a_n \lhd_{\sigma_n} N_n$; по предположению индукции,

$$[\![P]\!]_{[x_1^{\sigma 1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma 2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma n}\mapsto a_n]} \lhd_{(\tau\to\sigma)} [P]^{x_1^{\sigma 1}\ x_2^{\sigma 2}\ \ldots x_n^{\sigma n}}_{N_1\ N_2\ \ldots N_n};$$

$$[\![Q]\!]_{[x_1^{\sigma 1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma 2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma n}\mapsto a_n]} \lhd_{\tau} [Q]^{x_1^{\sigma 1}\ x_2^{\sigma 2}\ \ldots x_n^{\sigma n}}_{N_1\ N_2\ \ldots N_n}.$$

Следовательно,

$$[\![(PQ)]\!]_{[x_1^{\sigma 1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma 2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma n}\mapsto a_n]} =$$

$$= [\![P]\!]_{[x_1^{\sigma 1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma 2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma n}\mapsto a_n]}([\![Q]\!]_{[x_1^{\sigma 1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma 2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma n}\mapsto a_n]}) \lhd_{\sigma}$$

$$\lhd_{\sigma}([P]^{x_1^{\sigma 1}\ x_2^{\sigma 2}\ \ldots x_n^{\sigma n}}_{N_1\ N_2\ \ldots N_n} [Q]^{x_1^{\sigma 1}\ x_2^{\sigma 2}\ \ldots x_n^{\sigma n}}_{N_1\ N_2\ \ldots N_n}) = [(PQ)]^{x_1^{\sigma 1}\ x_2^{\sigma 2}\ \ldots x_n^{\sigma n}}_{N_1\ N_2\ \ldots N_n}.$$

Адекватность

Доказательство (продолжение).

- Пусть $M \equiv \lambda x^{\tau_1}.Q^{\tau_2}$; по предположению индукции, считаем, что утверждение выполняется для Q. Далее, пусть $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, ..., $x_n^{\sigma_n}$ — свободные переменные терма M; заметим, что $x_1^{\sigma_1}$, $x_2^{\sigma_2}$, ..., $x_n^{\sigma_n}$, x^{τ_1} свободно входят в Q. Возьмём $a_1 \lhd_{\sigma_1} N_1$, $a_2 \lhd_{\sigma_2} N_2$, ..., $a_n \lhd_{\sigma_n} N_n$; нам необходимо показать, что выполняется соотношение

$$[\![\lambda x^{\tau_1}.Q]\!]_{[x_1^{\sigma_1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma_2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma_n}\mapsto a_n]} \lhd_{(\tau_1\to\tau_2)} [\lambda x^{\tau_1}.Q]^{x_1^{\sigma_1}\ x_2^{\sigma_2}\ \ldots\ x_n^{\sigma_n}}_{N_1\ \ N_2\ \ \ldots\ N_n}.$$

Согласно определению отношения $\lhd_{(\tau_1\to\tau_2)}$, заключаем, что для любого $a \lhd_{\tau_1} N$ должно выполняться следующее соотношение:

$$[\![\lambda x^{\tau_1}.Q]\!]_{[x_1^{\sigma_1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma_2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma_n}\mapsto a_n]}(a) = [\![Q]\!]_{[x_1^{\sigma_1}\mapsto a_1, x_2^{\sigma_2}\mapsto a_2,\ldots,x_n^{\sigma_n}\mapsto a_n, x^{\tau_1}=a]} \lhd_{\tau_2}$$

$$\lhd_{\tau_2} ([\lambda x^{\tau_1}.Q]^{x_1^{\sigma_1}\ x_2^{\sigma_2}\ \ldots\ x_n^{\sigma_n}}_{N_1\ \ N_2\ \ \ldots\ N_n} N) \equiv (\lambda x^{\tau_1}.[Q]^{x_1^{\sigma_1}\ x_2^{\sigma_2}\ \ldots\ x_n^{\sigma_n}}_{N_1\ \ N_2\ \ \ldots\ N_n} N) \to$$

$$\to [[Q]^{x_1^{\sigma_1}\ x_2^{\sigma_2}\ \ldots\ x_n^{\sigma_n}}_{N_1\ \ N_2\ \ \ldots\ N_n}]^{x^{\tau_1}}_{N} \equiv [Q]^{x_1^{\sigma_1}\ x_2^{\sigma_2}\ \ldots\ x_n^{\sigma_n}\ x^{\tau_1}}_{N_1\ \ N_2\ \ \ldots\ N_n\ N},$$

однако справедливость данного соотношения следует из индукционного предположения. $\square$

Адекватность

Доказательство теоремы L18 (об адекватности).

Пусть M — замкнутый PCF-терм типа $\iota \in \{\omega, \beta\}$. По теореме L19, имеем $[\![M]\!] \lhd_\iota M$, а именно, $[\![M]\!] = \perp$ или $([\![M]\!] = [\![\mathbf{C}]\!]$ и $M \to^* \mathbf{C})$. В случае, когда $[\![M]\!] \in \mathbb{N} \cup \mathbb{B}$ (в частности, $[\![M]\!] \neq \perp$), должно выполняться соотношение $\to^* \mathbf{C}$. В обратную сторону, утверждение следует из теоремы корректности (L17). $\square$

Спасибо за внимание.