Лекция A2
Конечные автоматы

Вадим Пузаренко

18 сентября 2024 г.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Формально любой ε-переход не увеличивает временную сложность, поскольку для “считывания” пустого слова не требуется дополнительных усилий. В связи с этим возникает вопрос: имеется ли возможность построить недетерминированный конечный автомат, не использующий ε-переходов? Если да, то какие усилия для этого потребуются и чем придётся пожертвовать?

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Теорема А2.1.

Для любого ε-НКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$, не содержащий ε-переходов, для которого имеет место $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Теорема А2.1.

Для любого ε-НКА $\mathfrak{A}$ существует ε-НКА $\mathfrak{A}'$, не содержащий ε-переходов, для которого имеет место $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

Доказательство.

Пусть задан ε-НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$. На множестве Q определим отношение предпорядка следующим образом: $q_0 \trianglelefteq q_1$, если и только если найдётся последовательность $q_0 = r_0$, $r_1, \ldots, r_n = q_1$ состояний такая, что $r_{i+1} \in \delta(r_i, \varepsilon)$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$, для некоторого $n \in \omega$.
Далее, определим автомат $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \delta', Q_0, F')$ так, что $\delta'(q, a) \leftrightharpoons \bigcup\{\delta(q', a) \mid q \trianglelefteq q'\}$, $\delta'(q, \varepsilon) \leftrightharpoons \varnothing$ для всех $q \in Q$ и $a \in \Sigma$ и $F' \leftrightharpoons \{q \mid q \trianglelefteq q'$ для некоторого $q' \in F\}$.
Покажем теперь, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Доказательство (продолжение).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда найдётся последовательность r_0, r_1, ..., r_n состояний, для которой выполняется следующее: $r_0 \in Q_0$, $r_n \in F'$ и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta'(r_i, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$, где $n \in \omega$. Так как $r_{i+1} \in \delta'(r_i, w_{i+1})$, существует последовательность $r_i = s_i^0$, s_i^1, ..., $s_i^{k_i}$ состояний такая, что $s_i^{j+1} \in \delta(s_i^j, \varepsilon)$, где $j \in \omega$, $0 \leqslant j < k_i$ (это означает, что $r_i \trianglelefteq s_i^{k_i}$), и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta(s_i^{k_i}, w_{i+1})$, где $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$. Так как $r_n \in F'$, существует последовательность $r_n = s_n^0$, s_n^1, ..., $s_n^{k_n}$ состояний такая, что $s_n^{i+1} \in \delta(s_n^i, \varepsilon)$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < k_n$ (снова это означает, что $r_n \trianglelefteq s_n^{k_n}$), и, к тому же, $s_n^{k_n} \in F$. Тем самым, последовательность s_0^0, s_0^1, ..., $s_0^{k_0}$, s_1^0, s_1^1, ..., $s_1^{k_1}$, ..., s_n^0, s_n^1, ..., $s_n^{k_n}$ состояний свидетельствует, что $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ таково, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$, и пусть $r_0^0,\ r_0^1,\ \ldots,\ r_0^{k_0},\ r_1^0,\ r_1^1,\ \ldots,\ r_1^{k_1},\ \ldots,\ r_n^0,\ r_n^1,\ \ldots,\ r_n^{k_n}$ — последовательность состояний из определения распознавания слова α на ε-НКА $\mathfrak{A}$. Далее, из определения отношения $\trianglelefteq$ на словах вытекает, что $r_i^0 \trianglelefteq r_i^{k_i}$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, $r_{i+1}^0 \in \delta'(r_i^0, w_{i+1})$ и $r_n^0 \in F'$, где $i, n \in \omega$ таковы, что $0 \leqslant i < n$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, о чём свидетельствует последовательность $r_0^0,\ r_1^0,\ \ldots,\ r_n^0$ состояний автомата $\mathfrak{A}'$. $\square$

ε-НКА $\Rightarrow$ НКА

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ таково, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$, и пусть r_0^0, r_0^1, …, $r_0^{k_0}$, r_1^0, r_1^1, …, $r_1^{k_1}$, …, r_n^0, r_n^1, …, $r_n^{k_n}$ — последовательность состояний из определения распознавания слова α на ε-НКА $\mathfrak{A}$. Далее, из определения отношения $\trianglelefteq$ на словах вытекает, что $r_i^0 \trianglelefteq r_i^{k_i}$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, $r_{i+1}^0 \in \delta'(r_i^0, w_{i+1})$ и $r_n^0 \in F'$, где $i, n \in \omega$ таковы, что $0 \leqslant i < n$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, о чём свидетельствует последовательность r_0^0, r_1^0, …, r_n^0 состояний автомата $\mathfrak{A}'$. □

Замечание A2.1.

Трансформация, описанная в теореме A2.1, имеет следующую сложность: количество состояний сохраняется (обозначим его через $n(Q)$); если в $\mathfrak{A}$ количество стрелок в переходах, соответствующих буквам из Σ, равнялось n, то количество стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ можно оценить числом $n' \leqslant n(Q) \cdot n$, причём данная оценка является точной (почему?)

НКА: определение

Обычно в литературе под недетерминированным конечным автоматом понимается конечный автомат с единственным начальным состоянием, не содержащий ε-переходов. Здесь будут рассматриваться конечные автоматы, имеющие любое непустое множество начальных состояний.

НКА: определение

Обычно в литературе под недетерминированным конечным автоматом понимается конечный автомат с единственным начальным состоянием, не содержащий ε-переходов. Здесь будут рассматриваться конечные автоматы, имеющие любое непустое множество начальных состояний.

Определение А2.1.

Двухосновная структура $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ называется **недетерминированным конечным автоматом (НКА)**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний;
- $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит;
- $Q \cap \Sigma = \varnothing$;
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ — функция перехода;
- $\varnothing \neq Q_0 \subseteq Q$ — множество начальных состояний;
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний.

Способы задания НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного мультиграфа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из Σ, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого мультиграфа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие от ДКА — их может быть несколько!!!), а также конечные состояния от остальных.

Способы задания НКА

Графический.

Самый наглядный, но не всегда удобный для практических целей. Любой НКА может быть представлен в виде конечного ориентированного помеченного мультиграфа, возможно, с петлями, в котором из вершины, обозначающей состояние, исходит стрелка, помеченная буквой алфавита Σ, согласно его функции перехода. В отличие от ДКА, количество стрелок, помеченных буквой из Σ, не обязано равняться единице (оно может равняться и нулю). При этом помечаются также и вершины этого мультиграфа для того, чтобы можно было отличить начальные (ещё одно отличие от ДКА — их может быть несколько!!!), а также конечные состояния от остальных.

Табличный.

Любой НКА однозначно задаётся таблицей, описывающей функцию перехода, в которой определённым образом выделяются начальные, а также конечные состояния.

НКА: пример

Пример А2.1.

	0	1
$\triangleright q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\varnothing$
$q_2 *$	$\varnothing$	$\varnothing$

Как работает НКА?

Пусть заданы недетерминированный конечный автомат $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ и слово $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$, где $n \in \omega$. Для того, чтобы переработать данное слово заданным автоматом, необходимо проделать следующую процедуру:

$t = 0$: в момент $t = 0$ находимся в одном из состояний из Q_0 и перерабатываем слово ε (в частности, при $\alpha = \varepsilon$ там же и завершаем работу);

$t \mapsto t + 1$: предположим, что в момент времени t находимся в состоянии $q(t)$; при этом переработано слово $a_1 a_2 \dots a_t$; тогда в момент $t + 1$ мы попадаем в состояние $q(t + 1) \in \delta(q(t), a_{t+1})$ и перерабатываем слово $a_1 a_2 \dots a_t a_{t+1}$;

Завершение. Если после полной переработки слова α мы попадаем в конечное состояние, а именно, $q(n) \in F$, то слово α распознается автоматом $\mathfrak{A}$; если никакая последовательность не приводит в конечное состояние, то слово α им не распознается.

НКА: распознаваемые слова

Определение A2.2.

Пусть заданы НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$, а также слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что $\boldsymbol{\alpha}$ **распознаётся НКА** $\mathfrak{A}$, если найдутся состояния r_0, r_1, $\ldots$, $r_n \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0 \in Q_0$;
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$, где $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n \in F$.

НКА: распознаваемые слова

Определение A2.2.

Пусть заданы НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$, а также слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$. Будем говорить, что **α распознаётся НКА $\mathfrak{A}$**, если найдутся состояния r_0, r_1, $\ldots$, $r_n \in Q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $r_0 \in Q_0$;
- $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1})$, где $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$;
- $r_n \in F$.

Определение A2.3.

Язык, распознаваемый НКА $\mathfrak{A}$, — это $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha$ распознаётся НКА $\mathfrak{A}\}$.

НКА: основные примеры

Предложение А2.1.

Для любого $\alpha \in \Sigma^*$ язык $\{\alpha\}$ распознаваем некоторым НКА.

НКА: основные примеры

Предложение A2.1.

Для любого $\alpha \in \Sigma^*$ язык $\{\alpha\}$ распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть задано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ $(n \in \omega)$; определим автомат $\mathfrak{A} \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \delta, \{q_0\}, F)$ следующим образом:

- $Q \leftrightharpoons \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$;
- $F \leftrightharpoons \{q_n\}$;
- $\delta \leftrightharpoons \{((q_i, w_{i+1}), \{q_{i+1}\}) \mid i \in \omega,\ 0 \leqslant i < n\} \cup \{((q_i, a), \varnothing) \mid a \in \Sigma \setminus \{w_{i+1}\},\ i \in \omega,\ 0 \leqslant i < n\} \cup \{((q_n, a), \varnothing) \mid a \in \Sigma\}$.

Так как последовательность q_0, q_1, $\ldots$, q_n состояний удовлетворяет условиям определения распознавания слова α в автомате $\mathfrak{A}$, имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

НКА: основные примеры

Доказательство (окончание).

Остаётся теперь только показать, что $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ при $\beta \in \Sigma^* \setminus \{\alpha\}$. Разберем несколько случаев.

НКА: основные примеры

Доказательство (окончание).

Остаётся теперь только показать, что $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ при $\beta \in \Sigma^* \setminus \{\alpha\}$. Разберем несколько случаев.

$\beta \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$. В этом случае единственной последовательностью состояний для считывания слова β будет q_0, q_1, $\ldots$, $q_{\mathrm{lh}(\beta)}$, причём $\mathrm{lh}(\beta) < n$; в частности, $q_{\mathrm{lh}(\beta)} \notin \{q_n\} = F$. Таким образом, $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

НКА: основные примеры

Доказательство (окончание).

Остаётся теперь только показать, что $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$ при $\beta \in \Sigma^* \setminus \{\alpha\}$. Разберем несколько случаев.

- $\beta \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$. В этом случае единственной последовательностью состояний для считывания слова β будет q_0, q_1, $\ldots$, $q_{\mathrm{lh}(\beta)}$, причём $\mathrm{lh}(\beta) < n$; в частности, $q_{\mathrm{lh}(\beta)} \notin \{q_n\} = F$. Таким образом, $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.
- $\beta \not\sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$. Пусть γ — слово наибольшей длины, для которого выполняются соотношения $\gamma \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$ и $\gamma \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \beta$. Тогда $\beta = \gamma\hat{\ }\beta_1$ для некоторого $\beta_1 \neq \varepsilon$ (скажем, $\beta_1 = a\hat{\ }\beta_2$). Как и ранее, единственной считывающей последовательностью состояний слова γ будет q_0, q_1, $\ldots$, $q_{\mathrm{lh}(\gamma)}$. Из того, что $\beta \not\sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$, вытекает, что $\gamma\hat{\ }a \not\sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$; следовательно, $\delta(q_{\mathrm{lh}(\gamma)}, a) = \varnothing$. Таким образом, $\beta \notin \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. □

НКА: объединение языков

Теорема A2.2.

Если языки L_1 и L_2 конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаются некоторыми НКА, то язык $L_1 \cup L_2$ также распознаётся некоторым НКА.

НКА: объединение языков

Теорема А2.2.

Если языки L_1 и L_2 конечного алфавита $\Sigma \neq \varnothing$ распознаются некоторыми НКА, то язык $L_1 \cup L_2$ также распознаётся некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть недетерминированные конечные автоматы $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, Q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, Q_0^2, F_2)$ таковы, что $L_1 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $L_2 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. Без ограничения общности, можно считать, что $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Положим $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q_1 \cup Q_2; \Sigma; \delta_1 \cup \delta_2, Q_0^1 \cup Q_0^2, F_1 \cup F_2)$ и докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = L_1 \cup L_2$.

НКА: объединение языков

Доказательство (окончание).

$L_1 \cup L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in L_1 \cup L_2$; разберём только случай, когда $\alpha \in L_1$, — случай, когда $\alpha \in L_2$, рассматривается аналогично. Пусть последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний свидетельствует о том, что $\alpha \in L_1$ в автомате $\mathfrak{A}_1$. Тогда $q_0 \in Q_0^1 \subseteq Q_0^1 \cup Q_0^2$,
$q_{i+1} \in \delta_1(q_i, w_{i+1}) = (\delta_1 \cup \delta_2)(q_i, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$, и, к тому же, $q_n \in F_1 \subseteq F_1 \cup F_2$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: объединение языков

Доказательство (окончание).

$L_1 \cup L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in L_1 \cup L_2$; разберём только случай, когда $\alpha \in L_1$, — случай, когда $\alpha \in L_2$, рассматривается аналогично. Пусть последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний свидетельствует о том, что $\alpha \in L_1$ в автомате $\mathfrak{A}_1$. Тогда $q_0 \in Q_0^1 \subseteq Q_0^1 \cup Q_0^2$, $q_{i+1} \in \delta_1(q_i, w_{i+1}) = (\delta_1 \cup \delta_2)(q_i, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$, и, к тому же, $q_n \in F_1 \subseteq F_1 \cup F_2$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L_1 \cup L_2$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда найдётся последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний из $Q_1 \cup Q_2$ такая, что $q_0 \in Q_0^1 \cup Q_0^2$, $q_{i+1} \in (\delta_1 \cup \delta_2)(q_i, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$, и, к тому же, $q_n \in F_1 \cup F_2$. Пусть для определённости $q_0 \in Q_0^2$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ и $(\delta_1 \cup \delta_2) \restriction (Q_2 \times \Sigma) = \delta_2$, приходим к тому, что $q_i \in Q_2$, $q_{i+1} \in \delta_2(q_i, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$, и, к тому же, $q_n \in F_2$. Таким образом, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2) \subseteq L_1 \cup L_2$. $\square$

НКА: объединение языков

Замечание A2.2.

Трансформация, описанная в теореме A2.2, имеет следующую сложность: количество состояний и стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ есть сумма соответственно количеств состояний и количеств стрелок из автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

НКА: объединение языков

Замечание А2.2.

Трансформация, описанная в теореме А2.2, имеет следующую сложность: количество состояний и стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ есть сумма соответственно количеств состояний и количеств стрелок из автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Следствие А2.1.

Объединение конечного числа языков, распознаваемых недетерминированными конечными автоматами, является языком, распознаваемым некоторым НКА.

НКА: объединение языков

Замечание А2.2.

Трансформация, описанная в теореме А2.2, имеет следующую сложность: количество состояний и стрелок в автомате $\mathfrak{A}'$ есть сумма соответственно количеств состояний и количеств стрелок из автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Следствие А2.1.

Объединение конечного числа языков, распознаваемых недетерминированными конечными автоматами, является языком, распознаваемым некоторым НКА.

Доказательство.

Проводится индукцией по количеству *n* языков, распознаваемых недетерминированными конечными автоматами, причём база индукции описывается в предложении А1.2(1), теоремах А1.3, А2.1, а индукционный шаг — в теореме А2.2. $\square$

НКА: конечные языки

Следствие А2.2.

Любой конечный язык распознаваем некоторым НКА.

НКА: конечные языки

Следствие А2.2.

Любой конечный язык распознаваем некоторым НКА.

Доказательство.

Непосредственно следует из следствия А2.1 и предложения А2.1. $\square$

НКА: обращение

Теорема А2.3.

Язык L распознаваем некоторым НКА, если и только если его обращение L^R также распознаваемо некоторым НКА.

НКА: обращение

Теорема A2.3.

Язык L распознаваем некоторым НКА, если и только если его обращение L^R также распознаваемо некоторым НКА.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Разберём только случай, когда $L \neq \varnothing$: случай, когда $L = \varnothing$, очевиден, поскольку L^R также пуст. Пусть НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ таков, что $L = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что $L^R = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ для автомата $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \delta', F, Q_0)$, где $q \in \delta'(q', a) \Leftrightarrow q' \in \delta(q, a)$ для всех $q, q' \in Q$ и $a \in \Sigma$. (Другими словами, в автомате все стрелки меняем на противоположные, начальные состояния — на конечные, а конечные состояния — на начальные.)

НКА: обращение

Теорема A2.3.

Язык L распознаваем некоторым НКА, если и только если его обращение L^R также распознаваемо некоторым НКА.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Разберём только случай, когда $L \neq \varnothing$: случай, когда $L = \varnothing$, очевиден, поскольку L^R также пуст. Пусть НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ таков, что $L = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Покажем, что $L^R = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ для автомата $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q; \Sigma; \delta', F, Q_0)$, где $q \in \delta'(q', a) \Leftrightarrow q' \in \delta(q, a)$ для всех $q, q' \in Q$ и $a \in \Sigma$. (Другими словами, в автомате все стрелки меняем на противоположные, начальные состояния — на конечные, а конечные состояния — на начальные.)

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L^R$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существует последовательность $q_0, q_1, \ldots, q_n$ состояний такая, что $q_0 \in F$, $q_n \in Q_0$ и $q_{i+1} \in \delta'(q_i, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$.

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \ldots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \dots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.

$L^R \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in L^R$, т. е. $w_n \dots w_2 w_1 \in L$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{n-i})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$. Из определения следует, что $q_i \in \delta'(q_{i+1}, w_{n-i})$ и, следовательно, $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \dots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.

$L^R \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in L^R$, т. е. $w_n \dots w_2 w_1 \in L$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{n-i})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$. Из определения следует, что $q_i \in \delta'(q_{i+1}, w_{n-i})$ и, следовательно, $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$(\Leftarrow)$ Если L^R распознаваем некоторым НКА, то, по доказанному, $(L^R)^R = L$ также распознаваем некоторым НКА. $\square$

НКА: обращение

Доказательство (окончание).

Из определения следует, что $q_i \in \delta(q_{i+1}, w_{i+1})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$ и, следовательно, $\alpha^R = w_n \dots w_2 w_1 \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$; таким образом, $\alpha = (\alpha^R)^R \in L^R$.

$L^R \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in L^R$, т. е. $w_n \dots w_2 w_1 \in L$; тогда существует последовательность q_0, q_1, ..., q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{n-i})$ для всех $i \in \omega$, $0 \leqslant i < n$. Из определения следует, что $q_i \in \delta'(q_{i+1}, w_{n-i})$ и, следовательно, $\alpha = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

$(\Leftarrow)$ Если L^R распознаваем некоторым НКА, то, по доказанному, $(L^R)^R = L$ также распознаваем некоторым НКА. □

Замечание A2.3.

Трансформация, описанная в теореме A2.3, сохраняет как количество состояний, так и количество стрелок.

НКА: конкатенация

Теорема А2.4.

Если языки L_1 и L_2 распознаваемы некоторыми НКА, то их конкатенация $L_1 L_2$ также распознаваема некоторым НКА.

НКА: конкатенация

Теорема A2.4.

Если языки L_1 и L_2 распознаваемы некоторыми НКА, то их конкатенация L_1L_2 также распознаваема некоторым НКА.

Доказательство.

Пусть НКА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1; \Sigma; \delta_1, Q_0^1, F_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2; \Sigma; \delta_2, Q_0^2, F_2)$ таковы, что $L_1 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1)$ и $L_2 = \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2)$. Будем считать, что $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. По теореме A2.1, достаточно построить ε-НКА, распознающий язык L_1L_2. Определим
$\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q_1 \cup Q_2; \Sigma; \delta', Q_0^1, F_2)$ так, что
$\delta' \leftrightharpoons \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{((q,\varepsilon), Q_0^2) \mid q \in F_1\} \cup \{((q,\varepsilon), \varnothing) \mid q \notin F_1\}$;
докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}') = L_1L_2$.

НКА: конкатенация

Доказательство (продолжение).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq L_1 L_2$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существуют последовательности $q_0, q_1, \ldots, q_m$ $(m \geqslant n)$ и $0 \leqslant i_0 < i_1 < \ldots < i_{n-1} < m$, удовлетворяющие следующим условиям: $q_0 \in Q_0^1$, $q_m \in F_2$ и $q_{i_j+1} \in \delta'(q_{i_j}, w_{j+1})$ $(j \in \omega$, $0 \leqslant j < n)$, а также $q_{k+1} \in \delta'(q_k, \varepsilon)$ $(k, j \in \omega$, $0 \leqslant k < m$, $k \neq i_j$, $0 \leqslant j < n)$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, должно выполняться $m > n$. Из того, что $\delta'(q, \varepsilon) \subseteq Q_2$ $(q \in Q_1 \cup Q_2)$ и $\delta'(q', \varepsilon) = \varnothing$ $(q' \in Q_2)$, вытекает условие $m \leqslant n + 1$. Пусть $k_0 \in \omega$ таково, что $q_{k_0+1} \in \delta'(q_{k_0}, \varepsilon)$; тогда $q_{k_0} \in F_1$ и $q_j \in Q_1$ $(j \in \omega$, $0 \leqslant j \leqslant k_0)$; следовательно, $\alpha_1 = w_1 w_2 \ldots w_{k_0} \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_1) = L_1$. Кроме того, $q_{k_0+1} \in Q_0^2$ и $q_j \in Q_2$ $(j \in \omega$, $k_0 + 1 \leqslant j \leqslant n + 1)$; следовательно, $\alpha_2 = w_{k_0+1} \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}_2) = L_2$. Таким образом, $\alpha = \alpha_1 \hat{\ } \alpha_2 \in L_1 L_2$.

НКА: конкатенация

Доказательство (окончание).

$L_1L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть даны слова $u_1u_2\ldots u_m \in L_1$ и $v_1v_2\ldots v_n \in L_2$; тогда существуют последовательности $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q_1$ и $s_0, s_1, \ldots, s_n \in Q_2$, удовлетворяющие следующим условиям: $r_0 \in Q_0^1$, $s_0 \in Q_0^2$, $r_m \in F_1$, $s_n \in F_2$ и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta_1(r_i, u_{i+1})$ $(i \in \omega$, $0 \leqslant i < m)$, $s_{j+1} \in \delta_2(s_j, v_{j+1})$ $(j \in \omega$, $0 \leqslant j < n)$. Далее, имеем $s_0 \in \delta'(r_m, \varepsilon)$ и, тем самым, заключаем, что $u_1u_2\ldots u_mv_1v_2\ldots v_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. $\square$

НКА: конкатенация

Доказательство (окончание).

$L_1 L_2 \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть даны слова $u_1 u_2 \ldots u_m \in L_1$ и $v_1 v_2 \ldots v_n \in L_2$; тогда существуют последовательности $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q_1$ и $s_0, s_1, \ldots, s_n \in Q_2$, удовлетворяющие следующим условиям: $r_0 \in Q_0^1$, $s_0 \in Q_0^2$, $r_m \in F_1$, $s_n \in F_2$ и, к тому же, $r_{i+1} \in \delta_1(r_i, u_{i+1})$ $(i \in \omega,$ $0 \leqslant i < m)$, $s_{j+1} \in \delta_2(s_j, v_{j+1})$ $(j \in \omega,\ 0 \leqslant j < n)$. Далее, имеем $s_0 \in \delta'(r_m, \varepsilon)$ и, тем самым, заключаем, что $u_1 u_2 \ldots u_m v_1 v_2 \ldots v_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. □

Замечание A2.4.

Трансформация построения НКА без ε-переходов, описанная в теореме A2.4, имеет следующую сложность: количество состояний равняется $n(Q_1) + n(Q_2)$, а количество стрелок — $n' \leqslant n_1 + n_2 + n(Q_1) \cdot n_2$, причём данная оценка является точной. (см. теорему A2.1).

НКА: свойство вахтера

Зачастую на практике необходимо, чтобы конечный автомат имел единственное начальное состояние. Следующая трансформация позволяет не только предполагать данное условие, но и при этом считать, что в начальное состояние вернуться уже не удастся.

НКА: свойство вахтера

Зачастую на практике необходимо, чтобы конечный автомат имел единственное начальное состояние. Следующая трансформация позволяет не только предполагать данное условие, но и при этом считать, что в начальное состояние вернуться уже не удастся.

Теорема А2.5.

Для любого НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ существует НКА $\mathfrak{A}' = (Q'; \Sigma; \delta', \{\overline{q}\}, F')$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, удовлетворяющий, к тому же, условию $\overline{q} \notin \delta'(q, a)$ для всех $q \in Q'$ и $a \in \Sigma$.

НКА: свойство вахтера

Зачастую на практике необходимо, чтобы конечный автомат имел единственное начальное состояние. Следующая трансформация позволяет не только предполагать данное условие, но и при этом считать, что в начальное состояние вернуться уже не удастся.

Теорема A2.5.

Для любого НКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, Q_0, F)$ существует НКА $\mathfrak{A}' = (Q'; \Sigma; \delta', \{\overline{q}\}, F')$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$, удовлетворяющий, к тому же, условию $\overline{q} \notin \delta'(q, a)$ для всех $q \in Q'$ и $a \in \Sigma$.

Доказательство.

По теореме A2.1, достаточно построить ε-НКА $\mathfrak{A}'$, удовлетворяющий заключению теоремы. Определим $\mathfrak{A}' \leftrightharpoons (Q \cup \{\overline{q}\}; \Sigma; \delta', \{\overline{q}\}, F)$ так, что $\overline{q} \notin Q$ и $\delta' \leftrightharpoons \delta \cup \{((\overline{q}, \varepsilon), Q_0)\} \cup \{((q, \varepsilon), \varnothing) \mid q \in Q\}$; докажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$.

НКА: свойство вахтера

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и, к тому же, $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) = \delta'(q_i, w_{i+1})$ $(i \in \omega,\ 0 \leqslant i < n)$. Так как $q_0 \in Q_0 = \delta'(\overline{q}, \varepsilon)$, имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ (следует рассмотреть последовательность $\overline{q}$, q_0, q_1, …, q_n).

НКА: свойство вахтера

Доказательство (окончание).

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда существует последовательность q_0, q_1, …, q_n состояний такая, что $q_0 \in Q_0$, $q_n \in F$ и, к тому же, $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1}) = \delta'(q_i, w_{i+1})$ $(i \in \omega,\ 0 \leqslant i < n)$. Так как $q_0 \in Q_0 = \delta'(\overline{q}, \varepsilon)$, имеем $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$ (следует рассмотреть последовательность $\overline{q}$, q_0, q_1, …, q_n).
$\mathrm{L}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть дано слово $\alpha = w_1 w_2 \ldots w_n \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}')$; тогда существуют последовательности r_0, r_1, …, r_m $(m > n)$ и $0 \leqslant j_0 < j_1 < \ldots < j_n \leqslant m$ состояний и натуральных чисел соответственно такие, что $r_0 = \overline{q}$, $r_m \in F$ и, к тому же, $r_{j_i+1} \in \delta'(r_{j_i}, w_{i+1}) = \delta(r_{j_i}, w_{i+1})$ $(i \in \omega,\ 0 \leqslant i < n)$, $r_{k+1} \in \delta'(r_k, \varepsilon)$ $(k, i \in \omega,\ 0 \leqslant k < m,\ k \neq j_i,\ 0 \leqslant i < n)$. Из определения функции δ' перехода, а также из того, что $\mathfrak{A}$ не содержит ε-переходов, следует, что $r_1 \in Q_0 (= \delta'(r_0, \varepsilon))$ и $m = n + 1$. Тем самым, последовательность r_1, r_2, …, r_{n+1} свидетельствует о том, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

НКА: свойство вахтера

Замечание А2.5.

Трансформация, описанная в теореме А2.5, имеет сложность $n(Q)+1$ для количества состояний и $n' \leqslant 2 \cdot n_1$ для количества стрелок, причём последняя оценка является точной (здесь n_1 — количество стрелок в автомате $\mathfrak{A}$).

Спасибо за внимание.