Показатели средних значений и вариации:

Среднее арифметическое (выборочное среднее) ряда:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;$$

для вариационного ряда

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot w_i\,,$$

где a_i - варианта дискретного ряда или середина интервала непрерывного ряда, w_i - частоты вариант или интервалов.

Структурные средние: Медиана - корень уравнения $F_n(x) = 0.5$. Если длина вариационного ряда нечетная, т. е. $n = 2k+1$, то $Med = x_{(k+1)}$; если $n = 2k$, то $Med = \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$.

Мода – варианта ряда, которой соответствует наибольшая частота.

Показатели вариации:

- *вариационный размах*:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

- *выборочная дисперсия:*

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \overline{x}^2.$$

для вариационного ряда $s^2 = \sum_{i=1}^{m}(a_i - \overline{x})^2 \cdot w_i$.

- *среднее квадратическое* отклонение:

$$s = \sqrt{s^2}.$$

- *коэффициент вариации:*

$$v = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100\% \quad (\overline{x} > 0).$$

Пример. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Варианты:

a_i	1	3	5	9
n_i	3	7	6	4

Объем выборки $n = 20$,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i n_i a_i = \frac{1}{20}(1\cdot 3 + 3\cdot 7 + 5\cdot 6 + 9\cdot 4) = \frac{90}{20} = 4.5,$$

$$s^2 = \frac{1}{20}(1^2\cdot 3 + 3^2\cdot 7 + 5^2\cdot 6 + 9^2\cdot 4) - (4.5)^2 = 6.75,$$

Мода $Mod = 3$, медиана $Med = \dfrac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$,

коэффициент вариации $\nu = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{2,598}{4,5}\cdot 100\% \approx 57,7\%$.

Статистическое оценивание

Оценивание – определение приближенного значения неизвестной характеристики или параметра генеральной совокупности по результатам наблюдений.

Например, требуется по выборке оценить среднее или суммарное значение показателя, описывающего объекты генеральной совокупности.

Оценивание: точечное и итервальное.

Точечное оценивание

Пусть наблюдается случайная величина X, причем ее функция распределения $F(x, \theta)$ известна с точностью до параметра θ (параметр может быть вектором).

Требуется: по n наблюдениям X найти приближенное значение θ.

Статистикой называют произвольную функцию $T\left(x_1,...,x_n\right)$ от результатов наблюдений над случайной величиной X

Предположим, выборка $\left(x_1,...,x_n\right)$ получена в результате случайных независимых испытаний над X. Результат i-го испытания – случайная величина X_i.

Значит, статистика может рассматриваться как *случайная* величина $T\left(X_1,...,X_n\right)$.

Пример: порядковая статистика $X_{(i)}$ - i-й элемент вариационного ряда $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$.

Статистика, с помощью которой судят о значении параметра θ - его оценка: $T(\mathbf{X}_n) = T\left(X_1,...,X_n\right)$.

Для оценивания параметра можно использовать различные статистики и для того, чтобы выбрать лучшую из них надо иметь критерий сравнения качества оценок.

Критерии определяются выбором меры близости к истинному значению оцениваемого параметра.

Таким образом, если определить *класс* рассматриваемых оценок, то выбрана *мера близости оценки к истинному значению параметра*.

Оценка, минимизирующая меру близости, является оптимальной в этом классе.

Несмещенность оценки

Статистика $T(\mathbf{X}_n)$ называется *несмещенной* оценкой параметра θ, если выполняется условие:
$E[T(\mathbf{X}_n)] = \theta, \forall\theta \in \Theta$.

Для смещенных оценок можно найти величину
$b(\theta) = E[T(\mathbf{X}_n)] - \theta$, называемую смещением оценки $T(\mathbf{X}_n)$.

Величину
$E[T(\mathbf{X}_n) - \theta]^2 = D[T(\mathbf{X}_n)] + b^2(\theta)$
называют *среднеквадратической ошибкой* оценки T.
Для несмещенных оценок среднеквадратическая ошибка совпадет с дисперсией оценки (так как $b(\theta) = 0$).

Замечание. Несмещенные оценки могут не существовать, либо не принадлежать Θ.

Статистика $T(\mathbf{X}_n)$ называется *асимптотически несмещенной* оценкой параметра θ, если выполняется условие: $E[T(\mathbf{X}_n)] \to \theta, n \to \infty, \forall \theta \in \Theta$.

Состоятельность оценки

Оценка называется ***состоятельной***, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$T(\mathbf{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta$$

т.е. $\forall\ \varepsilon > 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|T(\mathbf{X}_n) - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1.$

Теорема. (достаточное условие состоятельности).

Пусть оценка $T(\mathbf{X}_n)$ удовлетворяет условиям:

1) асимптотически несмещенная;

2) ее дисперсия $D[T(\mathbf{X}_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Тогда $T(\mathbf{X}_n)$ - состоятельна.

Доказательство.

$$|T(\mathbf{X}_n) - \theta| = |(T(\mathbf{X}_n) - ET(\mathbf{X}_n)) + (ET(\mathbf{X}_n) - \theta)| \le$$
$$\le |T(\mathbf{X}_n) - ET(\mathbf{X}_n)| + |ET(\mathbf{X}_n) - \theta|$$

$$|\, T(\mathbf{X}_n) - \theta \,| \le |\, T(\mathbf{X}_n) - ET(\mathbf{X}_n) \,| + |\, ET(\mathbf{X}_n) - \theta \,|$$

Тогда

$$P\{\left|T(\mathbf{X}_n) - \theta\right| \ge \varepsilon\} \le P\left\{\left|T(\mathbf{X}_n) - ET(\mathbf{X}_n)\right| \ge \varepsilon - \left|ET(\mathbf{X}_n) - \theta\right|\right\}$$

≤ (по неравенству Чебышева)

$$\le \frac{D[T(\mathbf{X}_n)]}{\left(\varepsilon - \left|T(\mathbf{X}_n) - \theta\right|\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Значит $T(\mathbf{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \theta \;\Rightarrow\; T(\mathbf{X}_n)$ состоятельна. ■

Состоятельность – обязательное условие для оценки

Оценивание математического ожидания

Рассмотрим статистику $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - выборочное среднее.

Теорема Выборочное среднее является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания.

Доказательство.

Несмещенность: $E\left[\bar{X}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n} nEX = EX.$$

Состоятельность:

$$D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} DX_i\right) = \frac{nDX}{n^2} = \frac{DX}{n}. \qquad (1)$$

Так как $D\bar{X} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то из предыдущей теоремы $\Rightarrow$ оценка состоятельна, т.е. $\bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{p} EX$.

Оценивание дисперсии

Рассмотрим выборочную дисперсию

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i} X_i^2 - (\overline{X})^2.$$

Теорема 3 Математическое ожидание выборочной дисперсии равно: $ES^2 = \frac{n-1}{n}DX$.

Доказательство.

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(X_i - EX\right) - \left(\bar{X} - EX\right)\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(X_i - EX\right) - \left(\bar{X} - EX\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - 2\left(\bar{X} - EX\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right) + n\left(\bar{X} - EX\right)^2\right] =$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\left(X_i - EX\right) - \left(\bar{X} - EX\right)\Big)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - 2\left(\bar{X} - EX\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right) + n\left(\bar{X} - EX\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - \frac{2}{n}\left(\bar{X} - EX\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)}_{n(\bar{X} - EX)} + \left(\bar{X} - EX\right)^2 =$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\left(X_i - EX\right) - \left(\bar{X} - EX\right)\Big)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - 2\left(\bar{X} - EX\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right) + n\left(\bar{X} - EX\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - \frac{2}{n}\left(\bar{X} - EX\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)}_{n(\bar{X} - EX)} + \left(\bar{X} - EX\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - \left(\bar{X} - EX\right)^2.$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\left(X_i - EX\right) - \left(\bar{X} - EX\right)\Big)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - 2\left(\bar{X} - EX\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right) + n\left(\bar{X} - EX\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - \frac{2}{n}\left(\bar{X} - EX\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)}_{n(\bar{X} - EX)} + \left(\bar{X} - EX\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - EX\right)^2 - \left(\bar{X} - EX\right)^2.$$

Значит

$$ES^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i - EX\right)^2}_{n\,DX} - \underbrace{E(\bar{X} - E\bar{X})^2}_{D\bar{X}} = DX - \frac{DX}{\underbrace{n}_{\text{по (1)}}} = \frac{n-1}{n}DX.$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\big(X_i - EX\big) - \big(\bar{X} - EX\big)\Big)^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - EX\big)^2 - 2\big(\bar{X} - EX\big)\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - EX\big) + n\big(\bar{X} - EX\big)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - EX\big)^2 - \frac{2}{n}\big(\bar{X} - EX\big)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - EX\big)}_{n(\bar{X} - EX)} + \big(\bar{X} - EX\big)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - EX\big)^2 - \big(\bar{X} - EX\big)^2.$$

Значит

$$ES^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\big(X_i - EX\big)^2}_{n\,DX} - \underbrace{E(\bar{X} - E\bar{X})^2}_{D\bar{X}} = DX - \underbrace{\frac{DX}{n}}_{\text{по (1)}} = \frac{n-1}{n}DX.$$

Таким образом, выборочная дисперсия - смещенная оценка (но асимптотически несмещенная).

Следствие. Несмещенная оценка дисперсии равна:

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

- исправленная выборочная дисперсия.

Доказательство.

$$\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 \Rightarrow E\,\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1}ES^2 = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}DX = DX.$$

Теорема. Выборочная дисперсия является состоятельной оценкой.

Доказательство. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_i X_i^2 - (\overline{X})^2$. По закону больших чисел, $\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p} EX^2$. Известно, что для непрерывной функции $\varphi(x)$ из $X \xrightarrow{p} Y$ следует, что $\varphi(X) \xrightarrow{p} \varphi(Y)$.

Значит, $(\overline{X})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p} (EX)^2$.

Отсюда $S^2 \xrightarrow[n\to\infty]{p} EX^2 - (EX)^2 = DX$.

Эффективность оценки

Оценка называется ***эффективной*** в некотором классе оценок, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных оценок параметра θ в данном классе, вычисленных по выборкам одного и того же объема n.

Пусть $T_1(\mathbf{X}_n)$ и $T_2(\mathbf{X}_n)$- несмещенные оценки параметра θ .

Оценка $T_2(\mathbf{X}_n)$ - более эффективная, если $D[T_2(\mathbf{X}_n)] < D[T_1(\mathbf{X}_n)]$.

Теорема (о единственности эффективной несмещенной оценки)

Если существует эффективная несмещенная оценка $T^*(\mathbf{X}_n)$, то она единственная.

Доказательство:

Предположим, что существуют две такие оценки $T_1(\mathbf{X_n})$ и $T_2(\mathbf{X_n})$ для θ: $E[T_1(\mathbf{X}_n)] = E[T_2(\mathbf{X}_n)] = \theta$ и $D[T_1(\mathbf{X}_n)] = D[T_2(\mathbf{X}_n)] = v = v(\theta) = \inf\limits_{T: ET(\mathbf{X}_n) = \theta} D[T(\mathbf{X}_n)]$.

Рассмотрим оценку

$$T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2}, \; M[T_3(\mathbf{X}_n)] = \frac{M[T_1] + M[T_2]}{2} = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

$$D[T_3(\mathbf{X}_n)] = D\left[\frac{T_1 + T_2}{2}\right] = \frac{1}{4}(D[T_1] + D[T_2] + 2\operatorname{cov}(T_1, T_2)) =$$

$$= \frac{v + \operatorname{cov}(T_1, T_2)}{2}$$

Неравенство Коши-Буняковского:
$\forall \eta_1, \eta_2 : |\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)| \leq \sqrt{D\eta_1 D\eta_2}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\eta_1 = k\eta_2 + a$.

$$D[T_3(\mathbf{X}_n)] = \frac{v + \operatorname{cov}(T_1, T_2)}{2} \leq \frac{v + \sqrt{DT_1 \cdot DT_2}}{2} = v$$

Но так как v – минимальное значение дисперсии несмещенной оценки, то T_3 также является эффективной несмещенной оценкой.

Тогда T_1 и T_2 линейно связаны, то есть $T_1 = kT_2 + a$

Из несмещенности оценки следует

$$ET_1(\mathbf{X}_n) = kET_2(\mathbf{X}_n) + a \Rightarrow \theta = k\theta + a \Rightarrow a = \theta(1-k)$$

Тогда $T_1 = kT_2 + \theta(1-k) \Rightarrow T_1 - \theta = k(T_2 - \theta)$

$$v = \operatorname{cov}(T_1, T_2) = E\Big[(T_1 - \theta)(T_2 - \theta)\Big] =$$

$$= kE\Big[(T_2 - \theta)^2\Big] = kDT_2 = kv \quad \Rightarrow \quad k \equiv 1 \Rightarrow T_1 \equiv T_2$$

Функция правдоподобия

Пусть $f(x,\theta)$ - плотность случайной величины ξ в непрерывном случае или вероятность в дискретном случае и $\mathbf{X}_n = (X_1,...,X_n)$ - выборка.

Так как все наблюдения в выборке независимы, то совместная плотность распределения вектора X_n:

$L(\mathbf{X}_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)$,при этом $\int_{R^n} L(x_1,...,x_n,\theta)dx_1...dx_n = 1.$

Функция $L(\mathbf{X}_n,\theta)$, рассматриваемая при фиксированной выборке как функция θ называется функцией *правдоподобия.*

$$\ln L(\mathbf{X}_n,\theta) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i,\theta),$$

Определение. Модель называется регулярной, если выполняются условия:

1) Область определения не зависит от θ;
2) $f(x,\theta)$ дифференцируема по θ.

Для регулярной модели можно менять местами операторы дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_R f(x;\theta)\,dx = \int\limits_R \frac{\partial}{\partial\theta} f(x;\theta)\,dx$$

Функция вклада выборки

Функция $U(\mathbf{X}_n,\theta)=\dfrac{\partial \ln L(\mathbf{X}_n,\theta)}{\partial\theta}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial \ln f(X_i,\theta)}{\partial\theta}$

называется *вкладом выборки.*

Доказем, что $EU(\mathbf{X}_n,\theta)=0.$

$$\int\limits_{R^n} L(x_1,\ldots,x_n;\theta)\,dx_1\ldots dx_n=1$$

$$0=\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{R^n} L(x_1,\ldots,x_n;\theta)\,dx_1\ldots dx_n=\int\limits_{R^n}\frac{\partial}{\partial\theta}L(x_1,\ldots,x_n;\theta)\,dx_1\ldots dx_n$$

$$\int\limits_{R^n}\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial\theta}L(x_1,\ldots,x_n;\theta)\,dx_1\ldots dx_n$$

$$=E\left[\frac{\partial \ln L(\mathbf{X}_n,\theta)}{\partial\theta}\right]=E[U(\mathbb{X}_n,\theta)].$$

Информация Фишера

Информацией Фишера о параметре θ содержащейся в выборке $\mathbf{X}_n$ называется дисперсия вклада выборки:

$$I_n(\theta) = D[U(\mathbb{X}_n, \theta)] = D\left[\frac{\partial \ln L(\mathbb{X}_n, \theta)}{\partial \theta}\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_i, \theta)}{\partial \theta}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{D\frac{\partial \ln f(X_i, \theta)}{\partial \theta}}_{i(\theta)} = ni(\theta)$$

где $i(\theta)$ - называют количество информации Фишера, содержащейся в одном наблюдении.

$$i(\theta) = E\left[\left(U(\mathbf{X}_1, \theta) - \underbrace{EU(\mathbf{X}_1, \theta)}_{=0}\right)^2\right] = \int_R \left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 f(x, \theta) dx.$$

Если продифференцировать выражение $E[U(\mathbf{X}_1, \theta)] = 0$ еще раз, то получим:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \int\limits_R \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} f(x,\theta) dx = \int\limits_R \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} f(x,\theta) \right] dx =$$

$$= \int\limits_R \frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2} f(x,\theta) dx + \underbrace{\int\limits_R \left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x,\theta) dx}_{i(\theta)}$$

$$\Rightarrow i(\theta) = -M \left[\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2} \right].$$

Пример

Найти $i(\theta)$ для модели $N(\theta, \sigma)$.

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\ln f(x,\theta) = -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sqrt{2\pi\sigma^2})$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{x-\theta}{\sigma^2}$$

$$i(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{X_1-\theta}{\sigma^2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^4} E\left[\left(X_1-\theta\right)^2\right] =$$

$$= \frac{DX_1}{\sigma^4} = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2}$$

Пример

Используем вторую формулу

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}};$$

$$\ln f(x,\theta) = -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sqrt{2\pi\sigma^2})$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{x-\theta}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$i(\theta) = -M\left[\frac{\partial^2 \ln f(X_1,\theta)}{\partial\theta^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}$$

Неравенство Рао – Крамера и эффективные оценки

Пусть наблюдается регулярная модель

Теорема (неравенство Рао-Крамера)
Для любой несмещенной оценки $T(X_n)$ параметрической функции $\tau(\theta)$ справедливо неравенство:

$$D[T(\mathbf{X}_n)] \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{ni(\theta)}$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$T(\mathbf{X}_n) = \tau(\theta) + a(\theta)U(\mathbf{X}_n, \theta),$$

где $a(\theta)$ - некоторая функция от θ.

Доказательство.
В силу несмещенности оценки

$$\tau(\theta) = ET(\mathbf{X}_n) = \int_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Найдем производную от левой и правой части и внесем производную под знак интеграла

Доказательство.
В силу несмещенности оценки

$$\tau(\theta) = ET(\mathbf{X}_n) = \int_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Найдем производную от левой и правой части и внесем производную под знак интеграла

$$\tau'(\theta) = \int_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{d}{d\theta} L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

Доказательство.
В силу несмещенности оценки

$$\tau(\theta) = ET(\mathbf{X}_n) = \int\limits_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Найдем производную от левой и правой части и внесем производную под знак интеграла

$$\tau'(\theta) = \int\limits_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{d}{d\theta} L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$\tau'(\theta) = \int\limits_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{d \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}{d\theta} L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Доказательство.
В силу несмещенности оценки

$$\tau(\theta) = ET(\mathbf{X}_n) = \int\limits_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Найдем производную от левой и правой части и внесем производную под знак интеграла

$$\tau'(\theta) = \int\limits_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{d}{d\theta} L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$\tau'(\theta) = \int\limits_{R^n} T(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{d \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}{d\theta} L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

$$\tau'(\theta) = E[T(\mathbf{X}_n) U(\mathbf{X}_n, \theta)] = \operatorname{cov}(T(\mathbf{X}_n), U(\mathbf{X}_n, \theta)),$$

где $U(\mathbf{X}_n, \theta)$ - функция вклада выборки

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского для ковариации:

$$\tau'(\theta) = \mathrm{cov}(T(\mathbf{X}_n), U(\mathbf{X}_n, \theta)) \le \sqrt{D[T(\mathbf{X}_n)]D[U(\mathbf{X}_n, \theta)]} = \sqrt{DT \cdot I_n\left(\theta\right)}$$

$$\Rightarrow [\tau'(\theta)]^2 \le I_n \cdot D[T(\mathbf{X}_n)] \Rightarrow D[T(\mathbf{X}_n)] \ge \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I_n(\theta)} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{ni(\theta)}$$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского для ковариации:

$$\tau'(\theta) = \mathrm{cov}(T(\mathbf{X}_n), U(\mathbf{X}_n, \theta)) \le \sqrt{D[T(\mathbf{X}_n)]D[U(\mathbf{X}_n, \theta)]} = \sqrt{DT \cdot I_n(\theta)}$$

$$\Rightarrow [\tau'(\theta)]^2 \le I_n \cdot D[T(\mathbf{X}_n)] \Rightarrow D[T(\mathbf{X}_n)] \ge \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I_n(\theta)} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{ni(\theta)}$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $T(\mathbf{X}_n)$ и $U(\mathbf{X}_n, \theta)$линейно связаны. ◀

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского для ковариации:

$$\tau'(\theta) = \mathrm{cov}(T(\mathbf{X}_n), U(\mathbf{X}_n, \theta)) \le \sqrt{D[T(\mathbf{X}_n)] D[U(\mathbf{X}_n, \theta)]} = \sqrt{DT \cdot I_n(\theta)}$$

$$\Rightarrow [\tau'(\theta)]^2 \le I_n \cdot D[T(\mathbf{X}_n)] \Rightarrow D[T(\mathbf{X}_n)] \ge \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I_n(\theta)} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{ni(\theta)}$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $T(\mathbf{X}_n)$ и $U(\mathbf{X}_n, \theta)$линейно связаны. ◂

Неравенство Рао – Крамера определяет нижнюю границу дисперсий всех несмещенных оценок заданных параметрической функцией $\tau(\theta)$ для регулярных моделей.

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского для ковариации:

$$\tau'(\theta) = \operatorname{cov}(T(\mathbf{X}_n), U(\mathbf{X}_n, \theta)) \le \sqrt{D[T(\mathbf{X}_n)]D[U(\mathbf{X}_n, \theta)]} = \sqrt{DT \cdot I_n\left(\theta\right)}$$

$$\Rightarrow [\tau'(\theta)]^2 \le I_n \cdot D[T(\mathbf{X}_n)] \Rightarrow D[T(\mathbf{X}_n)] \ge \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I_n(\theta)} = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{ni(\theta)}$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $T(\mathbf{X}_n)$ и $U(\mathbf{X}_n, \theta)$линейно связаны. ◂

Неравенство Рао – Крамера определяет нижнюю границу дисперсий всех несмещенных оценок заданных параметрической функцией $\tau(\theta)$ для регулярных моделей.

Определение. Оценка, при которой достигается нижняя граница неравенства Рао–Крамера называется R-*эффективной.*

Так как R-эффективная оценка является эффективной в классе несмещенных оценок, то она является единственной.

Критерий R-эффективности оценки.

Пусть имеется условие линейной связи между $T(\mathbf{X}_n)$ и $U(\mathbf{X}_n,\theta)=\dfrac{\partial \ln(\mathbf{X}_n,\theta)}{\partial\theta}$, то есть $T(\mathbf{X}_n)=a(\theta)U(\mathbf{X}_n,\theta)+b(\theta)$

Найдем

$$b(\theta): E(T(\mathbf{X}_n))=a(\theta)\underbrace{E(U(\mathbf{X}_n,\theta))}_{=0}+\underbrace{E(b(\theta))}_{=b(\theta)}=\tau(\theta)\Rightarrow$$

$$T(\mathbf{X}_n)-\tau(\theta)=a(\theta)U(\mathbf{X}_n,\theta)$$

- *критерий R-эффективности*, где $a(\theta)$ - некоторая функция от θ.

Пример. Модель называется экспоненциальной, если $f(x,\theta) = \exp\{A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)\}$

Пример. Модель называется экспоненциальной, если $f(x,\theta) = \exp\{A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)\}$

В частности, экспоненциальными являются:
$N(\theta,\sigma), N(\mu,\theta), \Gamma(\theta,\lambda), Bin(X,\theta), P(\theta).$

Пример. Модель называется экспоненциальной, если $f(x,\theta)=\exp\{A(\theta)B(x)+C(\theta)+D(x)\}$

В частности, экспоненциальными являются:
$N(\theta,\sigma), N(\mu,\theta), \Gamma(\theta,\lambda), Bin(X,\theta), P(\theta).$

Вклад выборки для экспоненциальной модели равен

$$U(\mathbb{X}_n,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln(\exp(A(\theta)B(X_i)+C(\theta)+D(X_i)))=$$

Пример. Модель называется экспоненциальной, если $f(x,\theta)=\exp\{A(\theta)B(x)+C(\theta)+D(x)\}$

В частности, экспоненциальными являются:
$N(\theta,\sigma), N(\mu,\theta), \Gamma(\theta,\lambda), Bin(X,\theta), P(\theta).$

Вклад выборки для экспоненциальной модели равен

$$U(\mathbb{X}_n,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln(\exp(A(\theta)B(X_i)+C(\theta)+D(X_i)))=$$

$$=A'(\theta)\sum_{i=1}^{n}B(X_i)+nC'(\theta)=nA'(\theta)\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}B(X_i)}_{T(\mathbb{X}_n)}+\underbrace{\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)}}_{-\tau(\theta)}\right)$$

Обозначим:

Пример. Модель называется экспоненциальной, если $f(x,\theta)=\exp\{A(\theta)B(x)+C(\theta)+D(x)\}$

В частности, экспоненциальными являются: $N(\theta,\sigma), N(\mu,\theta), \Gamma(\theta,\lambda), Bin(X,\theta), P(\theta).$

Вклад выборки для экспоненциальной модели равен

$$U(\mathbb{X}_n,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n}\ln(\exp(A(\theta)B(X_i)+C(\theta)+D(X_i)))=$$

$$=A'(\theta)\sum_{i=1}^{n}B(X_i)+nC'(\theta)=nA'(\theta)\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}B(X_i)}_{T(\mathbb{X}_n)}+\underbrace{\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)}}_{-\tau(\theta)}\right)$$

Обозначим:

$$T(\mathbb{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}B(X_i);\ \tau(\theta)=-\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)};\ a(\theta)=\frac{1}{nA'(\theta)}.$$

Таким образом, для регулярной экспоненциальной модели существует R-эффективная оценка.

Таким образом, для регулярной экспоненциальной модели существует R-эффективная оценка.

Верно и обратное утверждение, если R-эффективная оценка существует, то модель является экспоненциальной.