Глава 9. Случайные процессы

Глава 9. Случайные процессы

Пусть имеется вероятностное пространство $< \Omega, F, P >$, на котором задана случайная величина $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega$.

Глава 9. Случайные процессы

Пусть имеется вероятностное пространство $<\Omega, F, P>$, на котором задана случайная величина $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega$.
Рассмотрим функцию $X(t) = X\ (\omega, t),$ где $t \in [0, \infty)$ - параметр (время).

Глава 9. Случайные процессы

Пусть имеется вероятностное пространство $<\Omega, F, P>$, на котором задана случайная величина $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega$.

Рассмотрим функцию $X(t) = X\ (\omega, t)$, где $t \in [0, \infty)$ - параметр (время).

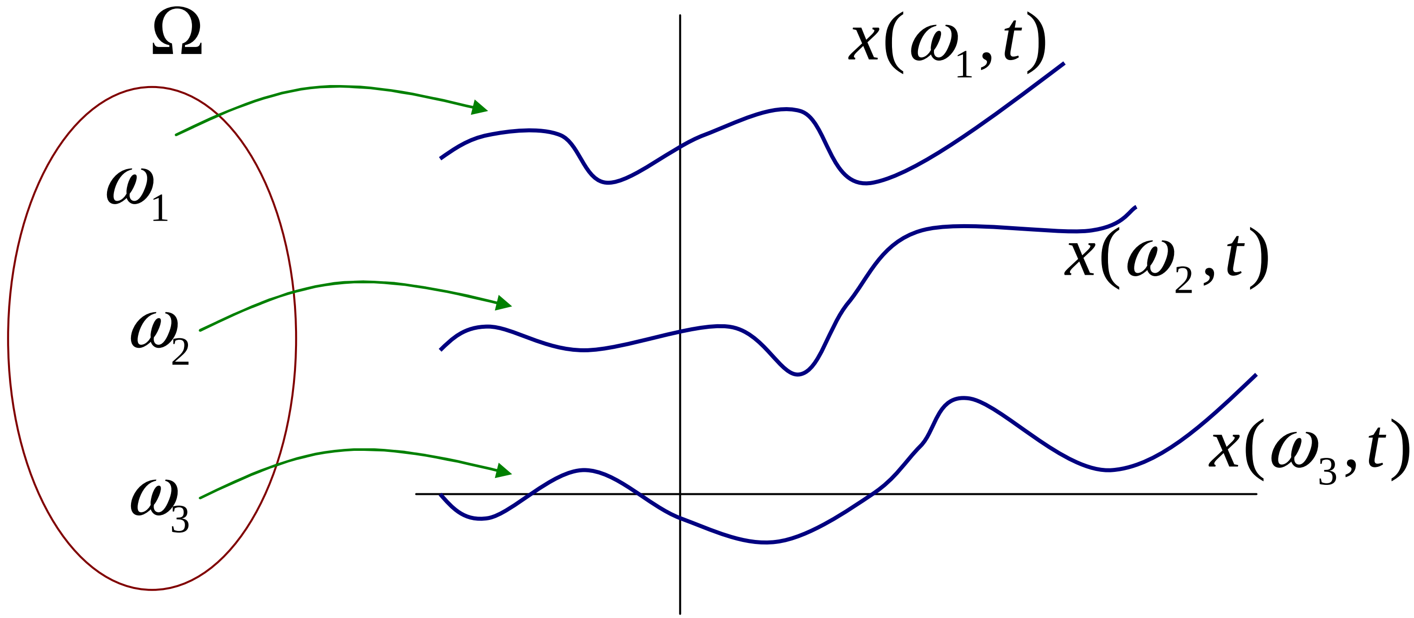
Определение. Семейство случайных величин $X(t)$, заданных на одном вероятностном пространстве, называется **случайным процессом**.

Глава 9. Случайные процессы

Пусть имеется вероятностное пространство $<\Omega, F, P>$, на котором задана случайная величина $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega$.
Рассмотрим функцию $X(t) = X\ (\omega, t),$ где $t \in [0, \infty)$ - параметр (время).

Определение. Семейство случайных величин $X(t)$, заданных на одном вероятностном пространстве, называется **случайным процессом**.

Отличительной особенностью случайного процесса является зависимость случайных величин в различные моменты времени.


Ω
ω_1
ω_2
ω_3
$x(\omega_1, t)$
$x(\omega_2, t)$
$x(\omega_3, t)$

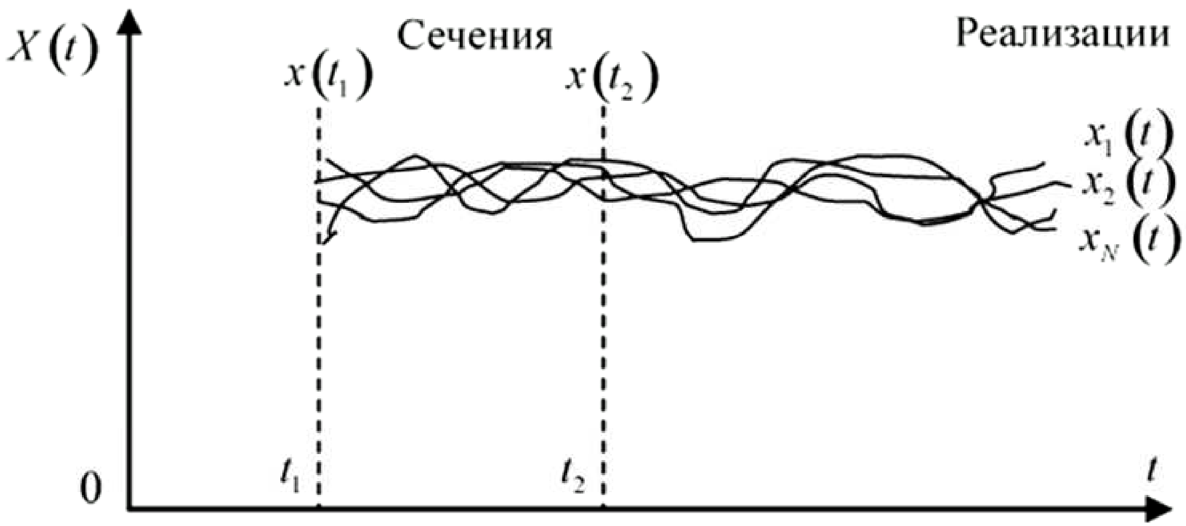
При фиксированном моменте времени t случайный процесс - случайная величина $X(t,\omega)$ (сечение случайного процесса).

При фиксированном моменте времени t случайный процесс - случайная величина $X(t,\omega)$ (сечение случайного процесса).

При фиксированном событии $\omega^* \in \Omega$ получим реализацию (траекторию) случайного процесса, то есть неслучайную функцию $x(t) = X(\omega^*, t)$, являющуюся функцией параметра t.

При фиксированном моменте времени t случайный процесс - случайная величина $X(t,\omega)$ (сечение случайного процесса).

При фиксированном событии $\omega^* \in \Omega$ получим реализацию (траекторию) случайного процесса, то есть неслучайную функцию $x(t) = X(\omega^*, t)$, являющуюся функцией параметра t.



Пример 1. Последовательно считывается текст в алфавите, состоящем из набора букв и знаков препинания. Появлению каждого символа соответствует случайная величина $X(t) \in \{1, \ldots, S_{\max}\}$.

Пример 1. Последовательно считывается текст в алфавите, состоящем из набора букв и знаков препинания. Появлению каждого символа соответствует случайная величина $X(t) \in \{1, ..., S_{\max}\}$. Последовательность $X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(n),\ \ldots$ образует случайный процесс с **дискретным временем** и **дискретными состояниями**.

Пример 1. Последовательно считывается текст в алфавите, состоящем из набора букв и знаков препинания. Появлению каждого символа соответствует случайная величина $X\left(t\right)\in\{1,...,S_{\max}\}$. Последовательность $X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(n),\ \ldots$ образует случайный процесс с **дискретным временем** и **дискретными состояниями**.

Пример 2. Работа фильтра очистки воды описывается случайным процессом $X(t)$ со временем $t\in[0,T_1]$, где X - процент содержания примесей, T_1 – срок службы фильтра;

Пример 1. Последовательно считывается текст в алфавите, состоящем из набора букв и знаков препинания. Появлению каждого символа соответствует случайная величина $X(t) \in \{1, ..., S_{\max}\}$. Последовательность $X(1),\ X(2),\ \ldots,\ X(n),\ \ldots$ образует случайный процесс с **дискретным временем** и **дискретными состояниями**.

Пример 2. Работа фильтра очистки воды описывается случайным процессом $X(t)$ со временем $t \in [0, T_1]$, где X - процент содержания примесей, T_1 – срок службы фильтра;

- пример случайного процесса с непрерывным временем и непрерывными состояниями.

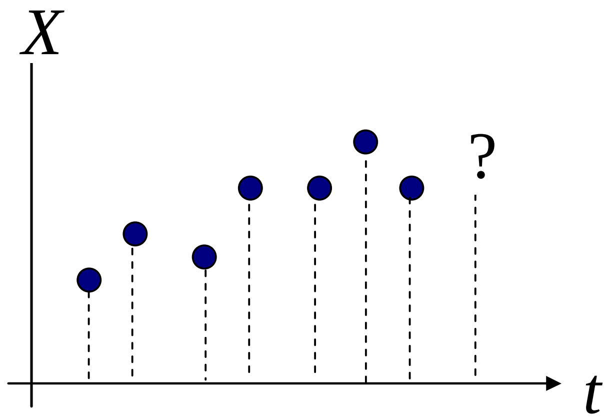
Пусть в некоторые моменты времени $t_1, t_2, ..., t_N$ измерены значения реализаций случайного процесса:

$$x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n).$$

Пусть в некоторые моменты времени $t_1, t_2, ..., t_N$ измерены значения реализаций случайного процесса:

$$x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n).$$

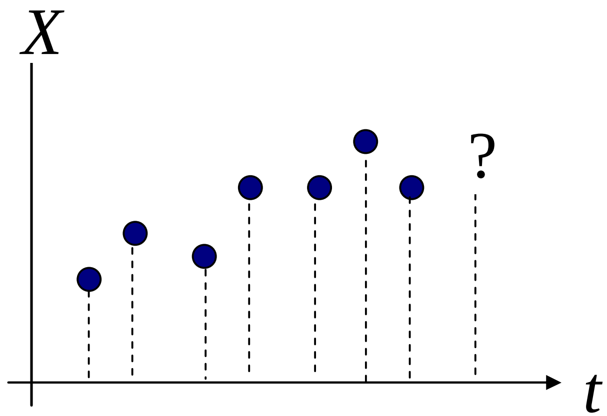
Полученный набор называют временным рядом.



Пусть в некоторые моменты времени $t_1, t_2, ..., t_N$ измерены значения реализаций случайного процесса:

$$x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n).$$

Полученный набор называют временным рядом.



Задача анализа временных рядов – построение модели ряда и прогнозирование в будущие моменты времени.

Характеристики случайных процессов

В каждый момент времени t можно определить характеристики случайной величины – неслучайные функции времени:

Характеристики случайных процессов

В каждый момент времени t можно определить характеристики случайной величины – неслучайные функции времени:

- функция распределения вероятностей:

$$F_X(x;t) = P(X(t) < x);$$

Характеристики случайных процессов

В каждый момент времени t можно определить характеристики случайной величины – неслучайные функции времени:

- функция распределения вероятностей:

$$F_X(x;t) = P\big(X(t) < x\big);$$

- плотность распределения вероятностей:

$$f_X(x;t) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x;t);$$

Характеристики случайных процессов

В каждый момент времени t можно определить характеристики случайной величины – неслучайные функции времени:

- функция распределения вероятностей:

$$F_X(x;t) = P\left(X(t) < x\right);$$

- плотность распределения вероятностей:

$$f_X(x;t) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x;t);$$

- математическое ожидание случайного процесса:

$$m_X(t) \overset{\text{def}}{=} EX(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x;t)\, dx;$$

Характеристики случайных процессов

В каждый момент времени t можно определить характеристики случайной величины – неслучайные функции времени:

- функция распределения вероятностей:

$$F_X\left(x;t\right)=P\left(X\left(t\right)<x\right);$$

- плотность распределения вероятностей:

$$f_X\left(x;t\right)=\frac{\partial}{\partial x}F_X\left(x;t\right);$$

- математическое ожидание случайного процесса:

$$m_X\left(t\right)\overset{\text{def}}{=}EX\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_X\left(x;t\right)dx;$$

- дисперсия случайного процесса:

$$\sigma_X^2\left(t\right)\overset{\text{def}}{=}DX\left(t\right)=E\left(X\left(t\right)-EX\left(t\right)\right)^2;$$

Характеристики случайных процессов

В каждый момент времени t можно определить характеристики случайной величины – неслучайные функции времени:

- функция распределения вероятностей:

$$F_X(x;t) = P\left(X(t) < x\right);$$

- плотность распределения вероятностей:

$$f_X(x;t) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x;t);$$

- математическое ожидание случайного процесса:

$$m_X(t) \overset{\text{def}}{=} EX(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x;t)\, dx;$$

- дисперсия случайного процесса:

$$\sigma_X^2(t) \overset{\text{def}}{=} DX(t) = E\left(X(t) - EX(t)\right)^2;$$

Аналогично можно определить моменты случайного процесса более высокого порядка $E[X(t)]^k$.

- среднеквадратическое уклонение:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{DX(t)}$$

(амплитудная мера разброса значений случайного процесса относительно его математического ожидания);

- среднеквадратическое уклонение:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{DX(t)}$$

(амплитудная мера разброса значений случайного процесса относительно его математического ожидания);

- двумерная функция распределения вероятностей в моменты времени t_1 и t_2 (характеризует взаимосвязь сечений случайного процесса в различные моменты времени):

$$F_X\left(x_1,\ x_2; t_1, t_2\right) = P(X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2);$$

- среднеквадратическое уклонение:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{DX(t)}$$

(амплитудная мера разброса значений случайного процесса относительно его математического ожидания);

- двумерная функция распределения вероятностей в моменты времени t_1 и t_2 (характеризует взаимосвязь сечений случайного процесса в различные моменты времени):

$$F_X(x_1,\ x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) < x_1,\ X(t_2) < x_2);$$

- двумерная плотность распределения вероятностей в моменты времени t_1 и t_2:

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_X(x_1, x_2; t_1, t_2).$$

Корреляционные характеристики процессов

1. Ковариационная функция случайного процесса:

$$\operatorname{cov}(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1) - EX(t_1)][X(t_2) - EX(t_2)]$$

Корреляционные характеристики процессов

1. Ковариационная функция случайного процесса:

$$\operatorname{cov}(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1) - EX(t_1)][X(t_2) - EX(t_2)]$$

Функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t.

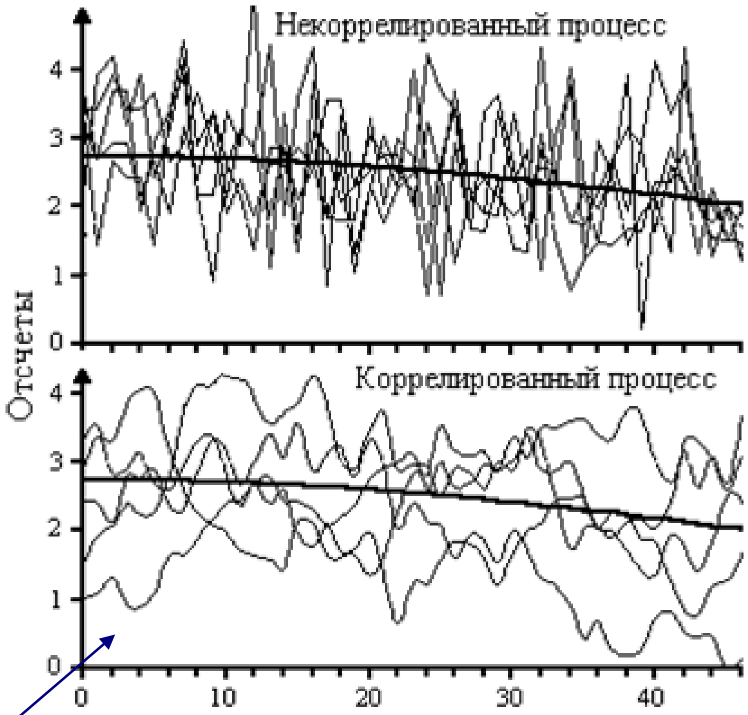
Корреляционные характеристики процессов

1. Ковариационная функция случайного процесса:

$$\operatorname{cov}(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1) - EX(t_1)][X(t_2) - EX(t_2)]$$

Функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t.

Пример графиков реализаций двух случайных процессов (одна и та же функция математического ожидания и дисперсии).



более плавная динамика

2. Автоковариационная функция случайного процесса

$$K_X(t,\tau) = \mathrm{cov}(X(t), X(t+\tau)),$$

где τ - сдвиг по времени.

2. Автоковариационная функция случайного процесса

$$K_X(t,\tau) = \operatorname{cov}(X(t), X(t+\tau)),$$

где τ - сдвиг по времени.

Замечание. При $\tau = 0$ выполняется:

$$K_X(t,0) = \sigma_X^2(t).$$

2. Автоковариационная функция случайного процесса

$$K_X(t,\tau) = \mathrm{cov}(X(t), X(t+\tau)),$$

где τ - сдвиг по времени.

Замечание. При $\tau = 0$ выполняется:

$$K_X(t,0) = \sigma_X^2(t).$$

Аналогично определяются корреляционные характеристики процесса:

3. Корреляционная функция случайного процесса:

$$\rho_{X(t_1),X(t_2)} = \frac{\mathrm{cov}(X(t_1), X(t_2))}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)};$$

2. Автоковариационная функция случайного процесса

$$K_X(t,\tau) = \operatorname{cov}(X(t), X(t+\tau)),$$

где τ - сдвиг по времени.

Замечание. При $\tau = 0$ выполняется:

$$K_X(t,0) = \sigma_X^2(t).$$

Аналогично определяются корреляционные характеристики процесса:

3. Корреляционная функция случайного процесса:

$$\rho_{X(t_1),X(t_2)} = \frac{\operatorname{cov}(X(t_1), X(t_2))}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)};$$

4. Автокорреляционная функция случайного процесса:

$$R_X(t,\tau) = \rho_{X(t),X(t+\tau)}.$$

Свойства характеристик случайного процесса

1.Пусть $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t) = m_X(t) + \varphi(t)$,

б) $K_Y(t,\tau) = K_X(t,\tau)$.

Свойства характеристик случайного процесса

1.Пусть $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t) = m_X(t) + \varphi(t)$,

б) $K_Y(t,\tau) = K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

Свойства характеристик случайного процесса

1.Пусть $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t) = m_X(t) + \varphi(t)$,

б) $K_Y(t,\tau) = K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

б) $t' = t + \tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau) =$

Свойства характеристик случайного процесса

1.Пусть $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t)=m_X(t)+\varphi(t)$,

б) $K_Y(t,\tau)=K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

б) $t'=t+\tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau)=$

$$=E[\underbrace{X(t)+\varphi(t)}_{Y(t)}-\underbrace{m_X(t)-\varphi(t)}_{EY(t)}][\underbrace{X(t')+\varphi(t')}_{Y(t')}-\underbrace{m_X(t')-\varphi(t')}_{EY(t')}]=$$

Свойства характеристик случайного процесса

1.Пусть $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t) = m_X(t) + \varphi(t)$,

б) $K_Y(t,\tau) = K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

б) $t' = t + \tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau) =$

$$= E[\underbrace{X(t) + \varphi(t)}_{Y(t)} - \underbrace{m_X(t) - \varphi(t)}_{EY(t)}][\underbrace{X(t') + \varphi(t')}_{Y(t')} - \underbrace{m_X(t') - \varphi(t')}_{EY(t')}] =$$

$$= E[X(t) - m_X(t)][X(t') - m_X(t')] = K_X(t,\tau).$$

Свойства характеристик случайного процесса

1.Пусть $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

$$\text{а) } m_Y(t) = m_X(t) + \varphi(t),$$

$$\text{б) } K_Y(t,\tau) = K_X(t,\tau).$$

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

б) $t' = t + \tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau) =$

$$= E[\underbrace{X(t) + \varphi(t)}_{Y(t)} - \underbrace{m_X(t) - \varphi(t)}_{EY(t)}][\underbrace{X(t') + \varphi(t')}_{Y(t')} - \underbrace{m_X(t') - \varphi(t')}_{EY(t')}] =$$

$$= E[X(t) - m_X(t)][X(t') - m_X(t')] = K_X(t,\tau).$$

Замечание. Из б) $\Rightarrow\; \sigma_Y^2(t) = K_X(t,0) = \sigma_X^2(t).$

2.Пусть $Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция.

2.Пусть $Y(t)=\varphi(t)\cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t)=\varphi(t)\cdot m_X(t)$,

2.Пусть $Y(t)=\varphi(t)\cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t)=\varphi(t)\cdot m_X(t)$,

б) $K_Y(t,\tau)=\varphi(t)\cdot\varphi(t+\tau)\cdot K_X(t,\tau)$.

2.Пусть $Y(t)=\varphi(t)\cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t)=\varphi(t)\cdot m_X(t)$,

б) $K_Y(t,\tau)=\varphi(t)\cdot\varphi(t+\tau)\cdot K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

2.Пусть $Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

$$\text{а) } m_Y(t) = \varphi(t) \cdot m_X(t),$$

$$\text{б) } K_Y(t,\tau) = \varphi(t) \cdot \varphi(t+\tau) \cdot K_X(t,\tau).$$

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

б) $t' = t + \tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau) = E[\, Y(t) \,-\, m_Y(t)\,][\, Y(t') \,-\, m_Y(t')\,] =$

2.Пусть $Y(t)=\varphi(t)\cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t)=\varphi(t)\cdot m_X(t)$,

б) $K_Y(t,\tau)=\varphi(t)\cdot\varphi(t+\tau)\cdot K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

б) $t'=t+\tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau)=E[\underbrace{Y(t)}_{\varphi(t)X(t)}-\underbrace{m_Y(t)}_{\varphi(t)m_X(t)}][\underbrace{Y(t')}_{\varphi(t')X(t')}-\underbrace{m_Y(t')}_{\varphi(t')m_X(t')}]=$

2.Пусть $Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t) = \varphi(t) \cdot m_X(t)$,

б) $K_Y(t,\tau) = \varphi(t) \cdot \varphi(t+\tau) \cdot K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

б) $t' = t + \tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau) = E[\underbrace{Y(t)}_{\varphi(t)X(t)} - \underbrace{m_Y(t)}_{\varphi(t)m_X(t)}][\underbrace{Y(t')}_{\varphi(t')X(t')} - \underbrace{m_Y(t')}_{\varphi(t')m_X(t')}] =$

$$= E[\varphi(t) \cdot \varphi(t')] \cdot [X(t) - m_X(t)][X(t') - m_X(t')] =$$

2.Пусть $Y(t)=\varphi(t)\cdot X(t)$, где $\varphi(t)$ -детерминированная функция. Тогда

а) $m_Y(t)=\varphi(t)\cdot m_X(t)$,

б) $K_Y(t,\tau)=\varphi(t)\cdot\varphi(t+\tau)\cdot K_X(t,\tau)$.

Доказательство. а) - из свойств матем. ожидания.

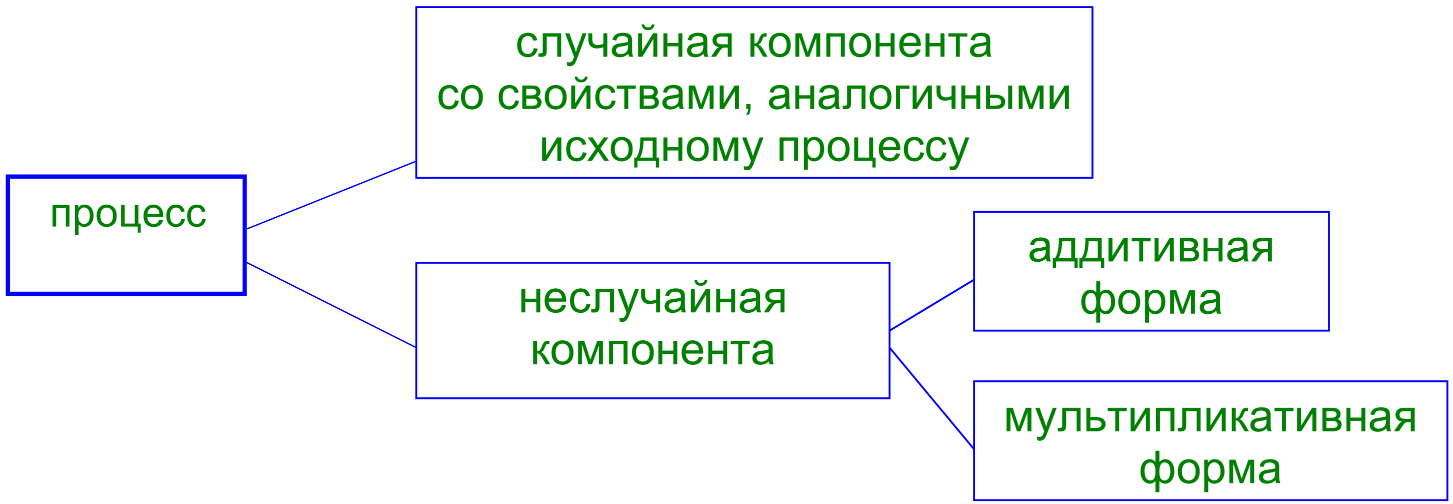
б) $t'=t+\tau \;\Rightarrow\; K_Y(t,\tau)=E[\underbrace{Y(t)}_{\varphi(t)X(t)}-\underbrace{m_Y(t)}_{\varphi(t)m_X(t)}][\underbrace{Y(t')}_{\varphi(t')X(t')}-\underbrace{m_Y(t')}_{\varphi(t')m_X(t')}]=$

$$=E[\varphi(t)\cdot\varphi(t')]\cdot[X(t)-m_X(t)][X(t')-m_X(t')]=$$

$$=\varphi(t)\cdot\varphi(t+\tau)\cdot K_X(t,\tau).$$

Разложение случайного процесса на компоненты

Разложение случайного процесса на компоненты



Стационарные процессы

Случайный процесс называется стационарным, если для любых $\tau, t_1, t_2, ..., t_n \geq 0$ выполняется:

$$F_X(x_1,...,x_n; t_1+\tau,...,t_n+\tau) = F_X(x_1,...,x_n; t_1,...,t_n),$$

т.е. законы распределения не меняются при сдвиге по времени.

Стационарные процессы

Случайный процесс называется стационарным, если для любых $\tau, t_1, t_2, ..., t_n \geq 0$ выполняется:

$$F_X(x_1, ..., x_n; t_1 + \tau, ..., t_n + \tau) = F_X(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n),$$

т.е. законы распределения не меняются при сдвиге по времени.

Если процесс стационарный, то его математическое ожидание и дисперсия постоянны, а функции автоковариации и автокорреляции зависят только от разности моментов времени: $K_X(t, \tau) = K_X(\tau)$, $R_X(t, \tau) = R_X(\tau)$.

Стационарные процессы

Случайный процесс называется стационарным, если для любых $\tau, t_1, t_2, ..., t_n \geq 0$ выполняется:

$$F_X(x_1,...,x_n; t_1+\tau,...,t_n+\tau) = F_X(x_1,...,x_n; t_1,...,t_n),$$

т.е. законы распределения не меняются при сдвиге по времени.

Если процесс стационарный, то его математическое ожидание и дисперсия постоянны, а функции автоковариации и автокорреляции зависят только от разности моментов времени: $K_X(t,\tau) = K_X(\tau)$, $R_X(t,\tau) = R_X(\tau)$. Обратное не всегда верно.

Стационарные процессы называют также стационарными в узком смысле, а процессы, для которых

$$m_X(t) = m_X, \ \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2, \ K_X(t,\tau) = K_X(\tau), \ R_X(t,\tau) = R_X(\tau)$$

называют стационарными в широком смысле.

Стационарные процессы называют также стационарными в узком смысле, а процессы, для которых

$$m_X(t) = m_X,\ \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2,\ \ K_X(t,\tau) = K_X(\tau),\ R_X(t,\tau) = R_X(\tau)$$

называют стационарными в широком смысле.

Пример стационарного процесса:

белый гауссовский шум с плотностью распределения:

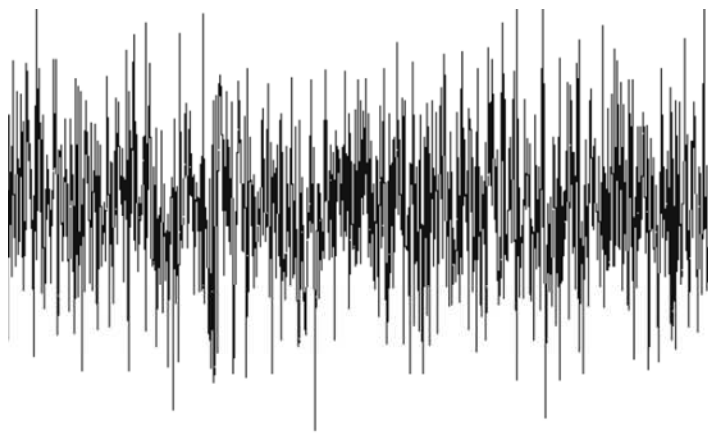
$$f_X(x;t) \sim N(m_X, \sigma_X),$$

Стационарные процессы называют также стационарными в узком смысле, а процессы, для которых

$$m_X(t) = m_X,\ \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2,\ \ K_X(t,\tau) = K_X(\tau),\ R_X(t,\tau) = R_X(\tau)$$

называют стационарными в широком смысле.

Пример стационарного процесса:



белый гауссовский шум с плотностью распределения:

$$f_X(x;t) \sim N(m_X, \sigma_X),$$

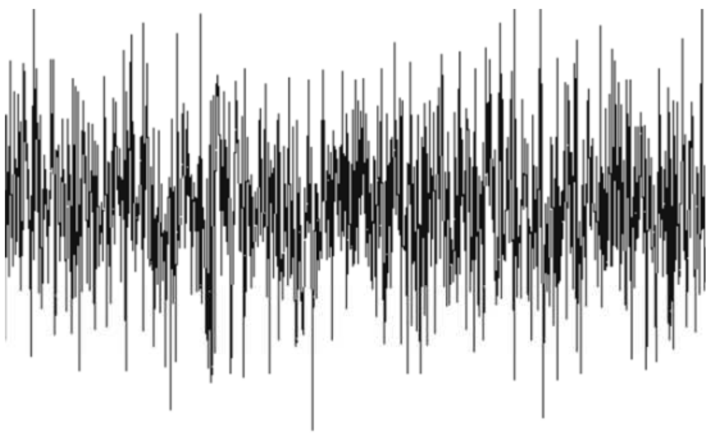
причем $K_X(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$.

Стационарные процессы называют также стационарными в узком смысле, а процессы, для которых

$$m_X(t) = m_X, \ \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2, \ K_X(t,\tau) = K_X(\tau), \ R_X(t,\tau) = R_X(\tau)$$

называют стационарными в широком смысле.

Пример стационарного процесса:



белый гауссовский шум с плотностью распределения:

$$f_X(x;t) \sim N(m_X, \sigma_X),$$

причем $K_X(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$.

Пример нестационарного процесса ($m(t)$ и $\sigma^2(t)$ непостоянны)