Лекция А3
Грамматики

Вадим Пузаренко

16 ноября 2022 г.

Содержание

Грамматики: определение

Определение А3.1.

Грамматикой называется структура $\mathfrak{G} = (N, \Sigma, P, S)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. N — конечное множество символов, называемых **нетерминалами**;
2. Σ — конечный алфавит **терминалов** $(\Sigma \cap N = \varnothing)$;
3. $P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ — множество **продукций**;
4. $S \in N$.

Грамматики: определение

Определение А3.1.

Грамматикой называется структура $\mathfrak{G} = (N, \Sigma, P, S)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. N — конечное множество символов, называемых **нетерминалами**;
2. Σ — конечный алфавит **терминалов** ($\Sigma \cap N = \varnothing$);
3. $P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ — множество **продукций**;
4. $S \in N$.

Определение А3.2.

Опишем один такт преобразования слов грамматикой $\mathfrak{G}$. Пусть $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$; будем говорить что слово α **преобразуется** в слово β под действием грамматики $\mathfrak{G}$ (и записывать как $\alpha \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \beta$), если найдутся слова γ_1, γ_2, δ_1, $\delta_2 \in (N \cup \Sigma)^*$ такие, что $\alpha = \gamma_1 \hat{}\, \delta_1 \hat{}\, \gamma_2$, $\beta = \gamma_1 \hat{}\, \delta_2 \hat{}\, \gamma_2$ и $P(\delta_1, \delta_2)$.

Грамматики: определение

Определение А3.3.

Определим отношение $\Rightarrow^*_{\mathfrak{G}}$ на словах из $(N \cup \Sigma)^*$ как рефлексивное и транзитивное замыкания отношения $\Rightarrow_{\mathfrak{G}}$. А именно, $\alpha \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \beta$, если выполняется одно из следующих условий:

1. $\alpha = \beta$;
2. найдётся слово $\alpha' \in (N \cup \Sigma)^*$ такое, что $\alpha \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha'$ и $\alpha' \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \beta$.

Грамматики: определение

Определение А3.3.

Определим отношение $\Rightarrow^*_{\mathfrak{G}}$ на словах из $(N \cup \Sigma)^*$ как рефлексивное и транзитивное замыкания отношения $\Rightarrow_{\mathfrak{G}}$. А именно, $\alpha \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \beta$, если выполняется одно из следующих условий:

1. $\alpha = \beta$;
2. найдётся слово $\alpha' \in (N \cup \Sigma)^*$ такое, что $\alpha \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha'$ и $\alpha' \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \beta$.

Определение А3.4.

Множество слов $\{\alpha \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\}$ называется **языком, порождённым грамматикой** $\mathfrak{G}$, и обозначается как $\mathrm{L}(\mathfrak{G})$.

Грамматики: определение

Определение А3.3.

Определим отношение $\Rightarrow_{\mathfrak{G}}^{*}$ на словах из $(N \cup \Sigma)^*$ как рефлексивное и транзитивное замыкания отношения $\Rightarrow_{\mathfrak{G}}$. А именно, $\alpha \Rightarrow_{\mathfrak{G}}^{*} \beta$, если выполняется одно из следующих условий:

1. $\alpha = \beta$;
2. найдётся слово $\alpha' \in (N \cup \Sigma)^*$ такое, что $\alpha \Rightarrow_{\mathfrak{G}}^{*} \alpha'$ и $\alpha' \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \beta$.

Определение А3.4.

Множество слов $\{\alpha \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_{\mathfrak{G}}^{*} \alpha\}$ называется **языком, порождённым грамматикой** $\mathfrak{G}$, и обозначается как $\mathrm{L}(\mathfrak{G})$.

Основным атрибутом грамматики $\mathfrak{G}$ является язык, порождённый ею, поэтому грамматика однозначно задаётся множеством продукций и начальным нетерминалом.

Пример А3.1.

Пусть $\mathfrak{G} = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, где $P = \{\langle S, aBc\rangle, \langle BA, AB\rangle, \langle aB, ab\rangle, \langle bB, bb\rangle, \langle B, BABc\rangle, \langle aA, aa\rangle, \langle S, \varepsilon\rangle\}$. Покажем, что $\mathrm{L}(\mathfrak{G}) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \omega\}$.

$(\supseteq)$ Доказывать будем индукцией по n. Если $n = 0$, то $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \varepsilon$. Далее, индукцией по k докажем, что $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} aA^k B^{k+1} c^{k+1}$; если $k = 0$, то $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} aBc$. Предположим, что $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} aA^k B^k Bc^{k+1}$; тогда

$$S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} aA^k B^k Bc^{k+1} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} aA^k B^{k+1} ABc^{k+2} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} aA^k B^k ABBc^{k+2} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \\ \Rightarrow_{\mathfrak{G}} aA^k B^{k-1} ABBBc^{k+2} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \ldots \Rightarrow_{\mathfrak{G}} aA^{k+1} B^{k+2} c^{k+2}.$$

Далее, имеем $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} aBc \Rightarrow_{\mathfrak{G}} abc$,

$$S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} aA^n B^{n+1} c^{n+1} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} aaA^{n-1} B^{n+1} c^{n+1} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \ldots \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \\ \Rightarrow_{\mathfrak{G}} a^{n+1} B^{n+1} c^{n+1} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} a^{n+1} bB^n c^{n+1} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \\ \Rightarrow_{\mathfrak{G}} a^{n+1} bbB^{n-1} c^{n+1} \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \ldots \Rightarrow_{\mathfrak{G}} a^{n+1} b^{n+1} c^{n+1}.$$

Пример А3.1 (продолжение).

($\subseteq$) Сначала заметим, что если $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha (\in (N \cup \Sigma)^*)$, то суммарные количества вхождений букв соответственно a, A и b, B совпадают и равны количеству вхождений букв c (продукции $P(S, \varepsilon)$, $P(S, aBc)$ и $P(B, BABc)$ удовлетворяют данному условию; остальные сохраняют суммарные количества соответствующих букв).
Далее, используя продукции $P(S, aBc)$ и $P(aA, aa)$, нетрудно показать, что все вхождения букв 'a' должны находиться в начале слова $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{G})$.
Для завершения рассмотрений следует проверить, что буква 'c' не может находиться слева от буквы 'b' в слове $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{G})$.
Действительно, если это не так, то выберем последнее такое вхождение буквы 'c'. Тогда после этой буквы стоит буква 'b', однако отсутствует продукция в такой ситуации, в которой буква 'B' преобразуется в букву 'b'.

Регулярные грамматики: основные сведения

Соглашение.

Пусть P — продукция некоторой грамматики; тогда вместо $\langle\alpha;\beta\rangle(\in P)$ будем иногда использовать обозначение $\alpha\longrightarrow\beta$.

Регулярные грамматики: основные сведения

Соглашение.

Пусть P — продукция некоторой грамматики; тогда вместо $\langle\alpha;\beta\rangle(\in P)$ будем иногда использовать обозначение $\alpha \longrightarrow \beta$.

Определение А3.5.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N, \Sigma, P, S)$ называется **регулярной** или **праволинейной**, если каждая её продукция имеет один из следующих видов:

$$\begin{array}{ll} \langle A, aB\rangle; & \langle A, a\rangle; \\ \langle A, B\rangle; & \langle A, \varepsilon\rangle; \end{array}$$

где $A, B \in N$ и $a \in \Sigma$.

Регулярные грамматики: основные сведения

Соглашение.

Пусть P — продукция некоторой грамматики; тогда вместо $\langle\alpha;\beta\rangle(\in P)$ будем иногда использовать обозначение $\alpha \longrightarrow \beta$.

Определение А3.5.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N, \Sigma, P, S)$ называется **регулярной** или **праволинейной**, если каждая её продукция имеет один из следующих видов:

$$\begin{array}{ll} \langle A, aB\rangle; & \langle A, a\rangle; \\ \langle A, B\rangle; & \langle A, \varepsilon\rangle; \end{array}$$

где $A, B \in N$ и $a \in \Sigma$.

Основной целью наших дальнейших действий является проверка того, что регулярные языки порождаются регулярными грамматиками, и наоборот.

Регулярные языки и регулярные грамматики

Теорема A3.1.

Язык L регулярный, если и только если он порождается некоторой регулярной грамматикой.

Регулярные языки и регулярные грамматики

Теорема А3.1.

Язык L регулярный, если и только если он порождается некоторой регулярной грамматикой.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть $L = \mathrm{L}(\mathfrak{G})$ для некоторой регулярной грамматики $\mathfrak{G} = (N, \Sigma, P, S)$. Определим ε-НКА $\mathfrak{A} = (N \uplus \{*\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{*\})$ следующим образом ($A \in N$, $a \in \Sigma$):

- $B \in \delta(A, a) \Leftrightarrow P(A, aB)$ $(B \in N)$;
- $B \in \delta(A, \varepsilon) \Leftrightarrow P(A, B)$ $(B \in N)$;
- $* \in \delta(A, a) \Leftrightarrow P(A, a)$;
- $* \in \delta(A, \varepsilon) \Leftrightarrow P(A, \varepsilon)$.

Отметим, что $\delta(*, \varepsilon) = \delta(*, a) = \varnothing$ для любого $a \in \Sigma$. Докажем теперь, что $L = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

Лекция А3 Грамматики

Вадим Пузаренко

Грамматики: общие сведения

Регулярные грамматики

КС грамматики

Автоматы с МП

Доказательство (продолжение).

Докажем сначала следующее соотношение ($\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$, $A \in N$):

$$[S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }A] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [\text{ найдётся последовательность } (S =)A_0^0, A_0^1, \ldots, A_0^{k_0}, A_1^0, A_1^1, \ldots, A_1^{k_1}, \ldots, A_n^0, A_n^1, \ldots, A_n^{k_n}(= A) \in N \text{ такая, что } A_i^{j+1} \in \delta(A_i^j, \varepsilon),\ 0 \leqslant j < k_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ и } A_{i+1}^0 \in \delta(A_i^{k_i}, a_{i+1}), 0 \leqslant i < n]. \quad (1)$$

(1⇒) Доказывать будем индукцией по отношению $\Rightarrow^*_{\mathfrak{G}}$. Если $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} S(= \varepsilon\hat{\ }S)$, то в качестве искомой последовательности возьмём $A_0^0 = S$.

Если $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \beta$ и $\beta \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }A$, где $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_m$, то β может иметь один из следующих видов.

Доказательство (продолжение).

1) **$\beta = \alpha\hat{\ }B$ для некоторого $B \in N$.** Тогда существует последовательность $\Omega = \{(S =)A_0^0, A_0^1, \ldots, A_0^{l_0}, A_1^0, A_1^1, \ldots, A_1^{l_1}, \ldots, A_m^0, A_m^1, \ldots, A_m^{l_m}(= B)\}$, удовлетворяющая условиям $A_i^{j+1} \in \delta(A_i^j, \varepsilon)$ $(0 \leqslant j < l_i,\ 0 \leqslant i \leqslant m)$ и $A_{i+1}^0 \in \delta(A_i^{l_i}, a_{i+1})$ $(0 \leqslant i < m)$; кроме того, $P(B, A)$, а следовательно, $A \in \delta(B, \varepsilon)$; в качестве искомой последовательности следует взять Ω, A.

2) **$\beta = \alpha_1\hat{\ }B$, где $B \in N$ и $\alpha = \alpha_1\hat{\ }a_m$.** Тогда существует последовательность $\Omega = \{(S =)A_0^0, A_0^1, \ldots, A_0^{l_0}, A_1^0, A_1^1, \ldots, A_1^{l_1}, \ldots, A_{m-1}^0, A_{m-1}^1, \ldots, A_{m-1}^{l_{m-1}}(= B)\}$, удовлетворяющая условиям $A_i^{j+1} \in \delta(A_i^j, \varepsilon)$ $(0 \leqslant j < l_i,\ 0 \leqslant i \leqslant m-1)$ и $A_{i+1}^0 \in \delta(A_i^{l_i}, a_{i+1})$ $(0 \leqslant i < m-1)$; кроме того, $P(B, a_m\hat{\ }A)$, а следовательно, $A \in \delta(B, a_m)$; в качестве искомой последовательности следует взять Ω, A.

3) **Других вариантов для β не существует** (почему?)

Доказательство (продолжение).

(1⇐) Доказывать будем индукцией по длине последовательности. Действительно, $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} S(=\varepsilon\hat{\ }S)$, поэтому база индукции выполняется.

Пусть теперь найдётся последовательность $(S =)A_0$, A_1, ..., A_k, $A_{k+1} \in N$, удовлетворяющая соотношению (1). По предположению индукции, $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_k\hat{\ }A_k$ для соответствующего $\alpha_k \in \Sigma^*$. Далее, предположим, что $A_{k+1} \in \delta(A_k, a)$ **используется в соотношении (1), где** $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$**.** Тогда $P(A_k, a\hat{\ }A_{k+1})$ и, следовательно, $\alpha_k\hat{\ }A_k \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \alpha_k\hat{\ }(a\hat{\ }A_{k+1})$; таким образом, имеем $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} (\alpha_k\hat{\ }a)\hat{\ }A_{k+1}$.

Теперь для завершения доказательства (⇐) достаточно проверить справедливость следующего условия $(\alpha = a_1a_2\ldots a_n \in \Sigma^*)$:

Регулярные языки и регулярные грамматики

Доказательство (продолжение).

$$[S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [\text{ найдётся последовательность } (S =)A_0^0, A_0^1, \ldots, A_0^{k_0}, A_1^0, A_1^1, \ldots, A_1^{k_1}, \ldots, A_n^0, A_n^1, \ldots, A_n^{k_n}(= *) \quad (2)$$
$$\text{такая, что } A_i^{j+1} \in \delta(A_i^j, \varepsilon),\ 0 \leqslant j < k_i, 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ и } A_{i+1}^0 \in \delta(A_i^{k_i}, a_{i+1}), 0 \leqslant i < n].$$

(2$\Rightarrow$) Доказывать будем индукцией по построению отношения $\Rightarrow^*_{\mathfrak{G}}$. Если $P(S, \varepsilon)$ (что равносильно тому, что $S \Rightarrow_G \varepsilon$), то $* \in \delta(S, \varepsilon)$ и, следовательно, $\varepsilon \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть теперь $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \beta(\in (N \cup \Sigma)^*)$ и $\beta \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \alpha$. Возможны только два случая.
1) $\beta = \alpha\hat{\ }A$ **для подходящего** $A \in N$ **и** $P(A, \varepsilon)$**.** Из (1) следует существование последовательности $(S =)A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_k(= A)$, подтверждающей, что к этому моменту слово α считывается автоматом $\mathfrak{A}$. Далее, имеем $* \in \delta(A, \varepsilon)$, поэтому $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

Регулярные языки и регулярные грамматики

Доказательство (продолжение).

2) $\alpha = \alpha_1\hat{\ }a$, $\beta = \alpha_1\hat{\ }A$ **для подходящих** $A \in N$, $a \in \Sigma$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$ **и** $P(A, a)$**.** Из (1) следует существование последовательности $(S =)A_0, A_1, \ldots, A_k(= A)$, подтверждающей, что к этому моменту слово α_1 считывается автоматом $\mathfrak{A}$. Далее, имеем $* \in \delta(A, a)$, поэтому $\alpha = \alpha_1\hat{\ }a \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

Доказательство (продолжение).

2) $\alpha = \alpha_1\hat{\ }a$, $\beta = \alpha_1\hat{\ }A$ **для подходящих** $A \in N$, $a \in \Sigma$, $\alpha_1 \in \Sigma^*$ **и** $P(A, a)$. Из (1) следует существование последовательности $(S =)A_0, A_1, \ldots, A_k(= A)$, подтверждающей, что к этому моменту слово α_1 считывается автоматом $\mathfrak{A}$. Далее, имеем $* \in \delta(A, a)$, поэтому $\alpha = \alpha_1\hat{\ }a \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

(2⇐) Пусть последовательность состояний $(S =)A_0, A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}(= *)$ удовлетворяет условию определения $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Так как $\delta(*, a) = \varnothing$ для любого $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, имеем $A_k \in N$ и $* \in \delta(A_k, b)$ для некоторого $b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ такого, что $\alpha = \alpha_1\hat{\ }b$, где α_1 таково, что $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_1\hat{\ }A_k$, что следует из (1). Кроме того, $P(A_k, b)$; таким образом, $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha$.

Доказательство (продолжение).

($\Rightarrow$) Пусть $L = \mathrm{L}(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ — ДКА. Определим регулярную грамматику $\mathfrak{G} = (Q, \Sigma, P, q_0)$ так, что
$P = \{\langle q, aq'\rangle \mid q \in Q,\ a \in \Sigma,\ q' = \delta(q, a)\} \cup \{\langle q, \varepsilon\rangle \mid q \in F\}$.
Докажем, что $L = \mathrm{L}(\mathfrak{G})$. Сначала индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$ докажем следующее соотношение ($q \in Q$):

$$q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }q \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) = q. \tag{3}$$

Если $\alpha = \varepsilon$, то справедливы соотношения $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} q_0 (= \varepsilon\hat{\ }q_0)$ и $\delta^*(q_0, \varepsilon) = q_0$.
Пусть теперь $\alpha = \alpha_1\hat{\ }a$; по индукционному предположению,
$q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_1\hat{\ }q_1 \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha_1) = q_1$. Далее, имеем
$P(q_1, aq) \Leftrightarrow q = \delta(q_1, a)$.
(3$\Leftarrow$) Пусть теперь $q = \delta^*(q_0, \alpha) = \delta(\delta^*(q_0, \alpha_1), a)$; тогда
$q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_1\hat{\ }q_1$ и $P(q_1, aq)$, а следовательно,
$\alpha_1\hat{\ }q_1 \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \alpha_1\hat{\ }aq (= \alpha\hat{\ }q)$; таким образом, $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }q$.

Регулярные языки и регулярные грамматики

Доказательство (продолжение).

(3$\Rightarrow$) В обратную сторону, пусть имеет место $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }q$; тогда выполняются соотношения $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \beta$ и $\beta \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }q$; из определения грамматики $\mathfrak{G}$ вытекает, что $\beta = \alpha_1\hat{\ }q_1$ и $P(q_1, aq)$. Следовательно, $q_1 = \delta^*(q_0, \alpha_1)$ и $q = \delta(q_1, a)$. Таким образом, $q = \delta(q_1, a) = \delta(\delta^*(q_0, \alpha_1), a) = \delta^*(q_0, \alpha_1\hat{\ }a) = \delta^*(q_0, \alpha)$. Тем самым, соотношение (3) выполняется для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $q \in Q$. Для завершения доказательства достаточно проверить следующее ($\alpha \in \Sigma^*$):

$$(\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow)[q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha] \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \in F (\Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})). \tag{4}$$

(4$\Leftarrow$) Пусть $\delta^*(q_0, \alpha) = q \in F$; тогда из (3) следует, что $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }q$, а из определения грамматики $\mathfrak{G}$ — $P(q, \varepsilon)$; следовательно, $\alpha\hat{\ }q \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \alpha (= \alpha\hat{\ }\varepsilon)$; таким образом, $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha$.

Регулярные языки и регулярные грамматики

Доказательство (окончание).

(4⇒) В обратную сторону, пусть $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha$; из определения грамматики $\mathfrak{G}$ следует, что $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }q$ и $P(q, \varepsilon)$ для подходящего $q \in Q$. Следовательно, $q \in F$ и $\delta^*(q_0, \alpha) = q$. $\square$

Доказательство (окончание).

(4$\Rightarrow$) В обратную сторону, пусть $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha$; из определения грамматики $\mathfrak{G}$ следует, что $q_0 \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha\hat{\ }q$ и $P(q,\varepsilon)$ для подходящего $q \in Q$. Следовательно, $q \in F$ и $\delta^*(q_0,\alpha) = q$. $\square$

Замечание А3.1.

Часто в литературе встречается вариант регулярной грамматики, когда продукции имеют вид только $P(A,a)$ и $P(A,a\hat{\ }B)$. В этом случае теорема А2.1 справедлива для языков, не содержащих ε (обосновать).

КС-грамматики: определение

Определение А3.6.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N; \Sigma, P, S)$ называется **контекстно-свободной**, если её продукции (элементы P) имеют вид $\langle A; \alpha \rangle$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

КС-грамматики: определение

Определение А3.6.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N; \Sigma, P, S)$ называется **контекстно-свободной**, если её продукции (элементы P) имеют вид $\langle A; \alpha \rangle$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

Определение А3.7.

Язык L называется **КС-языком**, если $L = \mathrm{L}(\mathfrak{G})$ для некоторой контекстно-свободной грамматики $\mathfrak{G}$.

КС-грамматики: определение

Определение А3.6.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N; \Sigma, P, S)$ называется **контекстно-свободной**, если её продукции (элементы P) имеют вид $\langle A; \alpha \rangle$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

Определение А3.7.

Язык L называется **КС-языком**, если $L = \mathrm{L}(\mathfrak{G})$ для некоторой контекстно-свободной грамматики $\mathfrak{G}$.

Замечание А3.2.

Любой регулярный язык является КС-языком. Обратное неверно.

КЗ-грамматики

Определение А3.8.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N; \Sigma, P, S)$ называется **контекстно-зависимой**, если её продукции (элементы P) имеют вид $\langle \alpha_0; \alpha_1 \rangle$, где $\mathrm{lh}(\alpha_0) \leqslant \mathrm{lh}(\alpha_1)$.

КЗ-грамматики

Определение А3.8.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N; \Sigma, P, S)$ называется **контекстно-зависимой**, если её продукции (элементы P) имеют вид $\langle\alpha_0; \alpha_1\rangle$, где $\mathrm{lh}(\alpha_0) \leqslant \mathrm{lh}(\alpha_1)$.

Определение А3.9.

Язык L называется **КЗ-языком**, если $L = \mathrm{L}(\mathfrak{G})$ для некоторой контекстно-зависимой грамматики $\mathfrak{G}$.

КЗ-грамматики

Определение А3.8.

Грамматика $\mathfrak{G} = (N; \Sigma, P, S)$ называется **контекстно-зависимой**, если её продукции (элементы P) имеют вид $\langle \alpha_0; \alpha_1 \rangle$, где $\mathrm{lh}(\alpha_0) \leqslant \mathrm{lh}(\alpha_1)$.

Определение А3.9.

Язык L называется **КЗ-языком**, если $L = \mathrm{L}(\mathfrak{G})$ для некоторой контекстно-зависимой грамматики $\mathfrak{G}$.

Замечание А3.3.

Любой язык, порождаемый некоторой контекстно-свободной грамматикой, в списке продукций которой отсутствуют продукции вида $\langle A; \varepsilon \rangle$, является КЗ-языком. Обратное неверно.

КС-грамматики: пример

Пример А3.2.

Слово $\alpha \in \Sigma^*$ называется **палиндромом**, если $\alpha = \alpha^R$. Пусть $L_\Sigma = \{\alpha \in \Sigma^* | \alpha = \alpha^R\}$ — язык, состоящий из палиндромов. Если $\mathrm{card}(\Sigma) \geqslant 2$, то L_Σ не является регулярным языком (упражнение!!!)
Однако каков бы ни был конечный алфавит $\Sigma \neq \varnothing$, L_Σ будет КС-языком. Разберём случай, когда $\Sigma = \{0; 1\}$; положим $\mathfrak{G}_{Pal} = (\{S\}; \{0; 1\}, P, S)$, где P состоит из следующих продукций:

- $S \longrightarrow \varepsilon$; $S \longrightarrow 0$; $S \longrightarrow 1$;
- $S \longrightarrow 0S0$;
- $S \longrightarrow 1S1$.

КС-грамматики: пример

Пример А3.2.

Слово $\alpha \in \Sigma^*$ называется **палиндромом**, если $\alpha = \alpha^R$. Пусть $L_\Sigma = \{\alpha \in \Sigma^* | \alpha = \alpha^R\}$ — язык, состоящий из палиндромов. Если $\mathrm{card}(\Sigma) \geqslant 2$, то L_Σ не является регулярным языком (упражнение!!!)
Однако каков бы ни был конечный алфавит $\Sigma \neq \varnothing$, L_Σ будет КС-языком. Разберём случай, когда $\Sigma = \{0; 1\}$; положим $\mathfrak{G}_{Pal} = (\{S\}; \{0; 1\}, P, S)$, где P состоит из следующих продукций:

- $S \longrightarrow \varepsilon$; $S \longrightarrow 0$; $S \longrightarrow 1$;
- $S \longrightarrow 0S0$;
- $S \longrightarrow 1S1$.

Предложение А3.1.

$\mathrm{L}(\mathfrak{G}_{Pal}) = L_{\{0;1\}}$.

КС-грамматики: пример

Доказательство.

($\supseteq$) Пусть $\alpha \in \{0;1\}^*$ — палиндром, т.е. $\alpha = \alpha^R$. Докажем индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$, что $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{G}_{Pal})$. Действительно, если $\alpha \in \{\varepsilon, 0, 1\}$, то $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{G}_{Pal})$, поскольку имеются продукции $S \longrightarrow \varepsilon|0|1$.
Пусть теперь $\mathrm{lh}(\alpha) \geqslant 2$. Так как $\alpha = \alpha^R$, имеем $\alpha = 0\hat{\ }\beta\hat{\ }0$ или $\alpha = 1\hat{\ }\beta\hat{\ }1$, причём $\beta = \beta^R$. Тогда $S \longrightarrow 0S0|1S1$, а по предположению индукции, $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}_{Pal}} \beta$. Следовательно, $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}_{Pal}} \alpha$.
($\subseteq$) Докажем индукцией по числу n шагов в порождении $S \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}_{Pal}} \alpha$, что $\alpha = \alpha^R$. Если $n = 1$, то используется одна из продукций $S \longrightarrow \varepsilon|0|1$, в которой не встречается S в правой части. Так как ε, 0 и 1 — палиндромы, утверждение доказано.

КС-грамматики: пример

Доказательство (окончание).

Предположим, что порождение имеет $n+1$ шагов, и утверждение выполняется для порождений из n шагов. Рассмотрим $n+1$-шаговое порождение, которое должно иметь вид $S \longrightarrow 0S0 \Rightarrow^{*}_{\mathfrak{G}_{Pal}} 0\hat{}\beta\hat{}0$ или $S \longrightarrow 1S1 \Rightarrow^{*}_{\mathfrak{G}_{Pal}} 1\hat{}\beta\hat{}1$, поскольку только использование продукций $S \longrightarrow 0S0|1S1$ позволяет использовать дополнительные шаги порождения. Заметим, что в обоих случаях $S \Rightarrow^{n}_{\mathfrak{G}_{Pal}} \beta$. По предположению индукции, $\beta = \beta^R$. Но тогда и $0\hat{}\beta\hat{}0$, $1\hat{}\beta\hat{}1$ также являются палиндромами. $\square$

Выводимые слова

Левый вывод.

Заменяем каждый раз самый левый нетерминал одним из тел её продукций. Используем символы $\underset{l}{\Rightarrow}^*$ и $\underset{l}{\Rightarrow}$ вместо $\Rightarrow^*$ и $\Rightarrow$ соответственно.

Правый вывод.

Заменяем каждый раз самый правый нетерминал одним из тел её продукций. Используем символы $\underset{r}{\Rightarrow}^*$ и $\underset{r}{\Rightarrow}$ вместо $\Rightarrow^*$ и $\Rightarrow$ соответственно.

Выводимые слова

Пример А3.3.

Пусть $\mathfrak{G} = (\{E, I\}, T, P, E)$, где $T = \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}$, а P состоит из продукций $E \longrightarrow I | E + E | E * E | (E)$, $I \longrightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1$.

1. $E \underset{l}{\Rightarrow} E*E \underset{l}{\Rightarrow} I*E \underset{l}{\Rightarrow} a*E \underset{l}{\Rightarrow} a*(E) \underset{l}{\Rightarrow} a*(E+E) \underset{l}{\Rightarrow} a*(I+E) \underset{l}{\Rightarrow} a*(a+E) \underset{l}{\Rightarrow} a*(a+I) \underset{l}{\Rightarrow} a*(a+I0) \underset{l}{\Rightarrow} a*(a+I00) \underset{l}{\Rightarrow} a*(a+b00)$.
2. $E \underset{r}{\Rightarrow} E*E \underset{r}{\Rightarrow} E*(E) \underset{r}{\Rightarrow} E*(E+E) \underset{r}{\Rightarrow} E*(E+I) \underset{r}{\Rightarrow} E*(E+I0) \underset{r}{\Rightarrow} E*(E+I00) \underset{r}{\Rightarrow} E*(E+b00) \underset{r}{\Rightarrow} E*(I+b00) \underset{r}{\Rightarrow} E*(a+b00) \underset{r}{\Rightarrow} I*(a+b00) \underset{r}{\Rightarrow} a*(a+b00)$.
3. $E \Rightarrow E*E \Rightarrow I*E \Rightarrow I*(E) \Rightarrow a*(E) \Rightarrow a*(E+E) \Rightarrow a*(I+E) \Rightarrow a*(I+I) \Rightarrow a*(a+I) \Rightarrow a*(a+I0) \Rightarrow a*(a+I00) \Rightarrow a*(a+b00)$.

Деревья разбора

Определение A3.10.

Пусть $\mathfrak{G} = (V, T, P, S)$ — КС-грамматика. **Деревья разбора для $\mathfrak{G}$** — это деревья со следующими свойствами.

1. Каждый внутренний узел отмечен нетерминалом (из V).
2. Каждый лист отмечен либо нетерминалом, либо терминалом (из T), либо ε. При этом, если лист отмечен ε, то он должен быть единственным сыном своего родителя.
3. Если внутренний узел отмечен символом A, а его сыновья отмечены символами X_1, X_2, ..., X_k слева направо, то $A \longrightarrow X_1 X_2 \ldots X_k$ является продукцией из P. Отметим, что X может быть ε лишь в том случае, когда он отмечает единственного сына и $A \longrightarrow \varepsilon$ — продукция из P.

Крона дерева разбора

Определение А3.11.

Если выписать листья дерева разбора слева направо, то получим цепочку, называемую **кроной дерева** и выводимую из переменной, которой отмечен корень. Особый интерес представляют деревья разбора со следующими свойствами.

1. Крона является терминальной цепочкой, т.е. все листья отмечены терминальными символами или ε.
2. Корень отмечен стартовым символом.

Рекурсивный вывод

Простейший подход состоит в применении правил "от тела к голове". Берутся цепочки, про которые известно, что они принадлежат языкам каждой из переменных в теле правила (если A — нетерминал, то $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{G}; A) \Leftrightarrow A \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha$ для $\alpha \in T^*$), и убеждаемся, что полученная цепочка принадлежит языку переменной в голове. Другими словами, $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{G}; A)$, если и только если выполняются следующие условия:

1. $A \longrightarrow X_1 X_2 \ldots X_k$;
2. $X_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$;
3. $\alpha = \alpha_1 \hat{}\, \alpha_2 \hat{}\, \ldots \hat{}\, \alpha_k$.

Описание КС-языков

Теорема А3.2.

Пусть $\mathfrak{G} = (V, T, P, S)$ — КС-грамматика и $A \in V$ — нетерминал. Тогда для $\alpha \in T^*$ следующие условия эквивалентны:

1. процедура рекурсивного вывода определяет, что α принадлежит языку переменной A;
2. $A \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha$;
3. $A \underset{l}{\Rightarrow}^* \alpha$;
4. $A \underset{r}{\Rightarrow}^* \alpha$;
5. существует дерево разбора для $\mathfrak{G}$ с корнем, отмеченным A, и кроной α.

Доказательство.

Схема доказательства: $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow \{3, 4\} \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$.

Описание КС-языков

Доказательство (продолжение).

$(3, 4 \Rightarrow 2)$ Следует из того, что любой левый (правый) вывод действительно является выводом.

Описание КС-языков

Доказательство (продолжение).

$(3, 4 \Rightarrow 2)$ Следует из того, что любой левый (правый) вывод действительно является выводом.

$(2 \Rightarrow 1)$ Доказывается индукцией по количеству n шагов в выводе $A \Rightarrow^* \alpha$. Если $n = 1$, то $A \longrightarrow \alpha$ — продукция из P и, следовательно, является рекурсивным выводом.

Предположим теперь, что утверждение выполняется для n; докажем данное утверждение для $n + 1$. Пусть $A \longrightarrow X_1 X_2 \ldots X_k \Rightarrow^n_{\mathfrak{G}} \alpha$. Тогда $X_i \Rightarrow^{\leqslant n}_{\mathfrak{G}} \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $\alpha = \alpha_1 \hat{} \alpha_2 \hat{} \ldots \hat{} \alpha_k$. Непосредственно из определения следует, что $X_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$; тем самым, существует рекурсивный вывод из A цепочки α.

Описание КС-языков

Доказательство (продолжение).

(1 $\Rightarrow$ 5) Доказывать будем индукцией по количеству n переходов в рекурсивном выводе. Если $n = 1$, то $A \longrightarrow \alpha$ является продукцией из P и соответствует дереву высоты 1, корень которого отмечен символом A, а листья — символами цепочки α, расположенными в том же порядке слева направо.
Пусть теперь $n > 1$; тогда имеем $(A \longrightarrow X_1X_2\ldots X_k) \in P$ и $X_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где $\alpha = \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_k$. По индукционному предположению, существует дерево разбора для $\mathfrak{G}$ с корнем X_i и кроной α_i в случае, когда X_i — нетерминал; в остальных случаях имеем $X_i = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Далее, нетрудно построить дерево разбора с корнем, отмеченным A, и кроной, отмеченной α.

Описание КС-языков

Доказательство (продолжение).

$(1 \Rightarrow 5)$ Доказывать будем индукцией по количеству n переходов в рекурсивном выводе. Если $n = 1$, то $A \longrightarrow \alpha$ является продукцией из P и соответствует дереву высоты 1, корень которого отмечен символом A, а листья — символами цепочки α, расположенными в том же порядке слева направо.
Пусть теперь $n > 1$; тогда имеем $(A \longrightarrow X_1X_2\ldots X_k) \in P$ и $X_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, где $\alpha = \alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k$. По индукционному предположению, существует дерево разбора для $\mathfrak{G}$ с корнем X_i и кроной α_i в случае, когда X_i — нетерминал; в остальных случаях имеем $X_i = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Далее, нетрудно построить дерево разбора с корнем, отмеченным A, и кроной, отмеченной α.
$(5 \Rightarrow 3)$ Индукцией по высоте дерева.
Базисом является дерево высоты 1 с корнем, отмеченным A и кроной, образующей α. Так как дерево является деревом разбора, $A \longrightarrow \alpha$ должно быть продукцией. Таким образом, $A \underset{l}{\Rightarrow} \alpha$ является левым порождением α из A.

Описание КС-языков

Доказательство (продолжение).

Индукция. Если высота дерева равна $n > 1$, то существует дерево с корнем, отмеченным A, сыновья которого помечены X_1, X_2, ..., X_k ($k \in \omega$), расположенными в соответствующем порядке. Символы из этого списка могут быть как терминалами, так и нетерминалами.

1. Если X_i — терминал, то положим $\alpha_i = X_i$;
2. если же X_i является нетерминалом, то данным символом должен быть отмечен корень поддерева, крона которого помечена словом α_i. Заметим, что высота этого поддерева меньше n и, по предположению индукции, имеем $X_i \underset{l}{\Rightarrow}^* \alpha_i$.

Отметим, что $\alpha = \alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k$.

Описание КС-языков

Доказательство (продолжение).

Построим левое порождение цепочки α следующим образом. Начнём с шага $A \underset{l}{\Rightarrow} X_1 X_2 \ldots X_k$. Индукцией по i докажем, что $A \underset{l}{\Rightarrow}^* \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_i\hat{\ }X_{i+1}\ldots X_k$. Для базиса $i=0$ имеем $A \underset{l}{\Rightarrow}^* X_1 X_2 \ldots X_k$. Для индукции предположим, что $A \underset{l}{\Rightarrow}^* \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_{i-1}\hat{\ }X_i X_{i+1}\ldots X_k$.

1. Если X_i — терминал, то не делаем ничего, поскольку $X_i = \alpha_i$. Таким образом, приходим к существованию следующего порождения: $A \underset{l}{\Rightarrow}^* \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_{i-1}\hat{\ }\alpha_i\hat{\ }X_{i+1}\ldots X_k$.
2. Если X_i — нетерминал, то $X_i \underset{l}{\Rightarrow} \beta_1 \underset{l}{\Rightarrow} \beta_2 \underset{l}{\Rightarrow} \ldots \underset{l}{\Rightarrow} \alpha_i$ и, следовательно, $\alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_{i-1}\hat{\ }X_i X_{i+1}\ldots X_k \underset{l}{\Rightarrow}$ $\alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_{i-1}\hat{\ }\beta_1\hat{\ }X_{i+1}\ldots X_k \underset{l}{\Rightarrow} \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_{i-1}\hat{\ }\beta_2\hat{\ }X_{i+1}\ldots X_k$ $\underset{l}{\Rightarrow} \ldots \underset{l}{\Rightarrow} \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_{i-1}\hat{\ }\alpha_i\hat{\ }X_{i+1}\ldots X_k$.

Описание КС-языков

Доказательство (окончание).

При $i = k$ приходим к соотношению $A \underset{l}{\Rightarrow}^{*} \alpha$.

Описание КС-языков

Доказательство (окончание).

При $i = k$ приходим к соотношению $A \underset{l}{\Rightarrow}^{*} \alpha$.

(5 $\Rightarrow$ 4) Рассматривается аналогично предыдущему переходу, однако вместо левого обхода дерева необходимо проделать правый обход. $\square$

Неоднозначные грамматики

Пример А3.4.

Рассмотрим грамматику $E \longrightarrow E + E | E * E$. Тогда имеем

1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$;
2. $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$.

Неоднозначные грамматики

Пример А3.4.

Рассмотрим грамматику $E \longrightarrow E + E | E * E$. Тогда имеем

1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$;
2. $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$.

Этим двум последовательностям соответствуют два различных дерева разбора с одной и той же кроной.

Неоднозначные грамматики

Пример А3.4.

Рассмотрим грамматику $E \longrightarrow E + E | E * E$. Тогда имеем

1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$;
2. $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$.

Этим двум последовательностям соответствуют два различных дерева разбора с одной и той же кроной.

Определение А3.12.

Говорят, что грамматика $\mathfrak{G} = (V, \Sigma, P, S)$ **неоднозначная**, если найдётся хотя бы одна цепочка $\alpha \in \Sigma^*$, для которых существуют по меньшей мере два различных дерева разбора, корни которых помечены S, а кроны которых отмечены α.

Неоднозначные грамматики

Пример А3.4.

Рассмотрим грамматику $E \longrightarrow E + E | E * E$. Тогда имеем

1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$;
2. $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$.

Этим двум последовательностям соответствуют два различных дерева разбора с одной и той же кроной.

Определение А3.12.

Говорят, что грамматика $\mathfrak{G} = (V, \Sigma, P, S)$ **неоднозначная**, если найдётся хотя бы одна цепочка $\alpha \in \Sigma^*$, для которых существуют по меньшей мере два различных дерева разбора, корни которых помечены S, а кроны которых отмечены α. Если в грамматике каждая цепочка $\alpha \in \Sigma^*$ имеет не более одного дерева разбора, то грамматика $\mathfrak{G}$ называется **однозначной**.

Неоднозначные грамматики

Теорема А3.3.

Для любых грамматики $\mathfrak{G} = (V, \Sigma, P, S)$, $A \in V$ и $\alpha \in \Sigma^*$ слово α имеет два различных дерева разбора с корнем, помеченным A, если и только если α имеет два различных левых порождения из A.

Неоднозначные грамматики

Теорема А3.3.

Для любых грамматики $\mathfrak{G} = (V, \Sigma, P, S)$, $A \in V$ и $\alpha \in \Sigma^*$ слово α имеет два различных дерева разбора с корнем, помеченным A, если и только если α имеет два различных левых порождения из A.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$Если два дерева разбора различны, то выберем первое различие в их левом обходе. Таким образом, данные деревья разбора индуцируют различные левые порождения.

Неоднозначные грамматики

Теорема А3.3.

Для любых грамматики $\mathfrak{G} = (V, \Sigma, P, S)$, $A \in V$ и $\alpha \in \Sigma^*$ слово α имеет два различных дерева разбора с корнем, помеченным A, если и только если α имеет два различных левых порождения из A.

Доказательство.

($\Rightarrow$)Если два дерева разбора различны, то выберем первое различие в их левом обходе. Таким образом, данные деревья разбора индуцируют различные левые порождения.

($\Leftarrow$)Начнём построение дерева с корня, отмеченного A. На каждом шаге заменяется нетерминал, соответствующий самому левому узлу дерева, не имеющему потомков, отмеченному этим нетерминалом. По продукции, использованной на этом шаге левого порождения, определим, какие сыновья должны быть у этого узла. Если существуют два разных порождения, то на первом шаге, где они различаются, построенные узлы получат разные списки потомков, что гарантирует различие деревьев разбора. $\square$

Существенная неоднозначность

Определение А3.13.

КС-язык L называется **существенно неоднозначным**, если любая грамматика, порождающая L, является неоднозначной. Если хотя бы одна грамматика, порождающая L, однозначна, то язык L называется **однозначным**.

Существенная неоднозначность

Определение А3.13.

КС-язык L называется **существенно неоднозначным**, если любая грамматика, порождающая L, является неоднозначной. Если хотя бы одна грамматика, порождающая L, однозначна, то язык L называется **однозначным**.

Пример А3.5.

Пусть $\mathbf{\Sigma} = \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}$. Тогда следующие грамматики порождают один и тот же язык:

1. $\mathfrak{G}_1 = (\{E, I\}, \Sigma, P_1, E)$, где $P_1 = \{E \longrightarrow I|E + E|E * E|(E), I \longrightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1\}$ (неоднозначная);
2. $\mathfrak{G}_2 = (\{E, I, T, F\}, \Sigma, P_2, E)$, где $P_2 = \{I \longrightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1, F \longrightarrow I|(E), T \longrightarrow F|T * F, E \longrightarrow T|E + T\}$ (однозначная).

Существенная неоднозначность

Пример А3.6.

$$L = \{a^n b^n c^m d^m \mid n \geqslant 1, m \geqslant 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n \mid n \geqslant 1, m \geqslant 1\}$$

является существенно неоднозначным языком.

Автоматы с МП: определение

Определение А3.14.

Определим **автомат с магазинной памятью (МП-автомат)** как многосортную структуру $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, Z_0, F)$, где составляющие её компоненты удовлетворяют следующим условиям:

- $Q \neq \varnothing$ — конечное множество состояний (как у НКА);
- Σ — конечный алфавит (входных символов) (как у НКА);
- Γ — конечный алфавит (стековых символов), содержит множество символов, помещаемых в магазин;
- $s \in Q$ — начальный символ (МП-автомат находится в нём перед началом работы);
- $F \subseteq Q$ — множество конечных состояний;
- $Z_0 \in \Gamma$ — начальный магазинный символ (“маркер дна”); вначале магазин содержит только данный символ;
- Δ, отношение перехода, — конечное подмножество $(Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma^*)$.

Автоматы с МП: определение

Отношение перехода.

Как и у НКА, отношение Δ управляет поведением автомата. Если $\Delta((q, a, X), (p, \gamma))$, то выполняется следующее: находясь в состоянии q, считывая символ a и обозревая символ X на вершине магазина, переходим в состояние p и заменяем символ X на вершине магазина на цепочку γ (помещаем символы в последовательности справа налево).

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат — это, по существу, ε-НКА с одним дополнением — магазином, в котором хранится цепочка “магазинных символов”. Присутствие магазина означает, что в отличие от НКА магазинный автомат может “помнить” бесконечное количество информации. Однако в отличие от универсального компьютера, который также способен запоминать неограниченные объёмы информации, магазинный автомат имеет доступ к информации в магазине только с одного его конца в соответствии с принципом “последним пришёл – первым ушёл”.

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат — это, по существу, ε-НКА с одним дополнением — магазином, в котором хранится цепочка "магазинных символов". Присутствие магазина означает, что в отличие от НКА магазинный автомат может "помнить" бесконечное количество информации. Однако в отличие от универсального компьютера, который также способен запоминать неограниченные объёмы информации, магазинный автомат имеет доступ к информации в магазине только с одного его конца в соответствии с принципом "последним пришёл – первым ушёл".

Вследствие этого существуют языки, распознаваемые некоторой программой компьютера, которые не распознаются ни одним МП-автоматом. В действительности, МП-автоматы распознают в точности КС-языки.

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат может обозревать символ на вершине магазина и совершать переход на основе текущего состояния, входного символа и символа на вершине магазина. Он может также совершить "спонтанный" переход, используя ε в качестве входного символа. За один переход автомат совершает следующие действия (здесь $(p, \gamma) \in \Delta(q, a, X)$).

МП-автомат: принцип работы

Магазинный автомат может обозревать символ на вершине магазина и совершать переход на основе текущего состояния, входного символа и символа на вершине магазина. Он может также совершить "спонтанный" переход, используя ε в качестве входного символа. За один переход автомат совершает следующие действия (здесь $(p, \gamma) \in \Delta(q, a, X)$).

1. Прочитывает и пропускает входной символ $a \in \Sigma$, используемый при переходе. Если $a = \varepsilon$, то входные символы не пропускаются.
2. Переходит в новое состояние p, которое может и не отличаться от предыдущего.
3. Заменяет символ X на вершине магазина некоторой цепочкой γ.

МП-автомат: принцип работы

$\gamma = \varepsilon$. Из магазина удаляется символ X.

$\gamma = X$. Магазин не меняется.

$\gamma = Y_1 Y_2 \ldots Y_{n-1} Y_n$. Удаляем из магазина символ X и вместо него помещаем последовательно Y_n, Y_{n-1}, ..., Y_2, Y_1.

МП-автомат: графическое представление

Введём в рассмотрение **диаграммы переходов** следующим образом.

1. Вершины ориентированного графа соответствуют состояниям МП-автомата.
2. Стрелка определённого вида указывает на начальное состояние, а обведённые двойным кружком состояния являются заключительными.
3. Дуги соответствуют переходам МП-автомата в следующем смысле. Дуга, отмеченная $a, X/\alpha$ и ведущая из состояния q в p, означает, что $(p, \alpha) \in \Delta(q, a, X)$.

МП-автомат: конфигурация

Определение А3.15.

Конфигурация МП-автомата представляется тройкой (p, ζ, γ), где $p \in Q$ (состояние, в котором находится автомат), $\zeta \in \Sigma^*$ (цепочка необработанных входных символов, оставшаяся часть входа), $\gamma \in \Gamma^*$ (содержимое магазина).

МП-автомат: конфигурация

Определение А3.15.

Конфигурация МП-автомата представляется тройкой (p, ζ, γ), где $p \in Q$ (состояние, в котором находится автомат), $\zeta \in \Sigma^*$ (цепочка необработанных входных символов, оставшаяся часть входа), $\gamma \in \Gamma^*$ (содержимое магазина).

Определение А3.16.

Пусть $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат. Определим следующие **переходы**.

- $\vdash_{\mathcal{P}}$. Предположим, что $(p, \alpha) \in \Delta(q, a, X)$. Тогда для всех цепочек $\zeta \in \Sigma^*$ и $\gamma \in \Gamma^*$ полагаем $(q, a\hat{}\zeta, X\hat{}\beta) \vdash_{\mathcal{P}} (p, \zeta, \alpha\hat{}\beta)$.
- $\vdash_{\mathcal{P}}^*$. **Базис**. Полагаем $I \vdash_{\mathcal{P}}^* I$ для любой конфигурации I.
  Индукция. $I \vdash_{\mathcal{P}}^* J$, если существует конфигурация K такая, что $I \vdash_{\mathcal{P}} K$ и $K \vdash_{\mathcal{P}}^* J$.

МП-автомат: конфигурация

Соглашение.

Если ясно из контекста, какой автомат рассматривается, индекс $\mathcal{P}$ будем опускать и записывать просто $\vdash$ или $\vdash^*$ вместо $\vdash_{\mathcal{P}}$ или $\vdash^*_{\mathcal{P}}$ соответственно.

МП-автомат: конфигурация

Соглашение.

Если ясно из контекста, какой автомат рассматривается, индекс $\mathcal{P}$ будем опускать и записывать просто $\vdash$ или $\vdash^*$ вместо $\vdash_{\mathcal{P}}$ или $\vdash^*_{\mathcal{P}}$ соответственно.

Таким образом, $I \vdash^* J$, если существует такая последовательность конфигураций K_1, K_2, …, K_n, у которой $I = K_1$, $J = K_n$, $K_i \vdash K_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

МП-автомат: конфигурация

Предложение А3.2.

Если $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$, то для любых цепочек $\eta \in \Sigma^*$ и $\gamma \in \Gamma^*$ имеем $(q, \zeta_1\hat{}\eta, \alpha\hat{}\gamma) \vdash^* (p, \zeta_2\hat{}\eta, \beta\hat{}\gamma)$.

МП-автомат: конфигурация

Предложение А3.2.

Если $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$, то для любых цепочек $\eta \in \Sigma^*$ и $\gamma \in \Gamma^*$ имеем $(q, \zeta_1\hat{}\eta, \alpha\hat{}\gamma) \vdash^* (p, \zeta_2\hat{}\eta, \beta\hat{}\gamma)$.

Доказательство.

Нетрудно показать индукцией по числу шагов последовательности конфигураций, приводящих $(q, \zeta_1\hat{}\eta, \alpha\hat{}\gamma)$ к $(p, \zeta_2\hat{}\eta, \beta\hat{}\gamma)$. Каждый из переходов в последовательности $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$ обосновывается переходами P без какого-либо использования η и/или γ. Следовательно, каждый переход обоснован и в случае, когда эти цепочки присутствуют на входе и в магазине. $\square$

МП-автомат: конфигурация

Замечание А3.4.

Полное обращение предложения не имеет места. Существуют действия, которые МП-автомат мог бы совершить путём выталкивания символов из стека, т.е. используя некоторые символы γ и заменяя их в магазине, что невозможно без обработки γ.

МП-автомат: конфигурация

Замечание А3.4.

Полное обращение предложения не имеет места. Существуют действия, которые МП-автомат мог бы совершить путём выталкивания символов из стека, т.е. используя некоторые символы γ и заменяя их в магазине, что невозможно без обработки γ.

Предложение А3.3.

Если $(q, \zeta_1\hat{}\eta, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2\hat{}\eta, \beta)$, то $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$.

МП-автомат: конфигурация

Замечание А3.4.

Полное обращение предложения не имеет места. Существуют действия, которые МП-автомат мог бы совершить путём выталкивания символов из стека, т.е. используя некоторые символы γ и заменяя их в магазине, что невозможно без обработки γ.

Предложение А3.3.

Если $(q, \zeta_1\hat{}\eta, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2\hat{}\eta, \beta)$, то $(q, \zeta_1, \alpha) \vdash^* (p, \zeta_2, \beta)$.

Доказательство.

Проводится также индукцией по числу шагов последовательности конфигураций, приводящих (q, ζ_1, α) к (p, ζ_2, β). $\square$

МП-автоматы и языки

Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат.

МП-автоматы и языки

Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат.

Допустимость по конечному состоянию.

$L(\mathcal{M}) = \{\alpha \mid (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$, $\beta \in \Gamma^*\}$.

МП-автоматы и языки

Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат.

Допустимость по конечному состоянию.

$L(\mathcal{M}) = \{\alpha \mid (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$, $\beta \in \Gamma^*\}$.

Допустимость по пустому магазину.

$N(\mathcal{M}) = \{\alpha \mid (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для некоторого $q \in Q\}$.

МП-автомат: пример

Пример А3.7.

Пусть $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \Delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$, где Δ определяется следующими правилами.

1. $\Delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, aZ_0)\}$, $a \in \{0, 1\}$. Правило применяется вначале, когда автомат находится в состоянии q_0 и обозревает символ Z_0 на вершине магазина. Считываемый символ помещается в магазин; Z_0 остаётся в качестве маркера дна.
2. $\Delta(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\}$, $a, b \in \{0, 1\}$. Эти правила позволяют оставаться в состоянии q_0 и читать входные символы, помещая их на вершину магазина над предыдущим верхним символом.
3. $\Delta(q_0, \varepsilon, X) = \{(q_1, X)\}$, $X \in \Gamma$. Правила позволяет автомату спонтанно (без чтения входа) переходить из состояния q_0 в состояние q_1, не изменяя содержимого автомата.

МП-автомат: пример

Пример А3.7 (продолжение).

4. $\Delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$, $a \in \{0, 1\}$. В состоянии q_1 входные символы сравниваются с символами на вершинах магазина. В случае совпадения они выталкиваются.
5. $\Delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$. Если обнаружен маркер дна Z_0, а автомат находится в состоянии q_1, то автомат переходит в состояние q_2.
6. $\Delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$. Обнуляет содержимое магазина.

МП-автомат: пример

Пример А3.7 (продолжение).

4 $\Delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \varepsilon)\}$, $a \in \{0, 1\}$. В состоянии q_1 входные символы сравниваются с символами на вершинах магазина. В случае совпадения они выталкиваются.

5 $\Delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$. Если обнаружен маркер дна Z_0, а автомат находится в состоянии q_1, то автомат переходит в состояние q_2.

6 $\Delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$. Обнуляет содержимое магазина.

Предложение А3.4.

$L(\mathcal{M}) = N(\mathcal{M}) = \{\alpha\hat{}\alpha^R | \alpha \in \Sigma^*\}$.

МП-автомат: пример

Доказательство.

($\supseteq$) Пусть $\alpha \in \{0,1\}^*$; тогда $(q_0, \alpha\hat{}\alpha^R, Z_0) \vdash^* (q_0, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash (q_1, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$. Следовательно, $\alpha\hat{}\alpha^R \in L(\mathcal{M}) \cap N(\mathcal{M})$.

МП-автомат: пример

Доказательство.

($\supseteq$) Пусть $\alpha \in \{0,1\}^*$; тогда $(q_0, \alpha\hat{}\alpha^R, Z_0) \vdash^* (q_0, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash (q_1, \alpha^R, \alpha^R\hat{}Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$. Следовательно, $\alpha\hat{}\alpha^R \in L(\mathcal{M}) \cap N(\mathcal{M})$.

($\subseteq$) Заметим, что единственный путь достижения состояния q_2 состоит в том, чтобы находиться в состоянии q_1 и иметь Z_0 на вершине магазина. Кроме того, любое допускающее вычисление $\mathcal{M}$ начинается в состоянии q_0, совершает один переход в q_1 и никогда не возвращается в q_0. Таким образом, достаточно найти условия налагаемые на α, для которых $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0)$; именно такие цепочки и распознаёт $\mathcal{M}$ по заключительному состоянию. Покажем индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$ следующее несколько более общее утверждение: **если $(q_0, \alpha, \gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)$, то $\alpha = \sigma\hat{}\sigma^R$ для подходящего σ.**

Базис. Если $\alpha = \varepsilon$, то $\alpha = \sigma\hat{}\sigma^R$, где $\sigma = \varepsilon$. Таким образом, заключение верно, и утверждение истинно. Отметим, что нет необходимости доказывать истинность гипотезы $(q_0, \varepsilon, \gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \gamma)$, хотя она и верна.

МП-автомат: пример

Доказательство (продолжение).

Индукция. Пусть $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ для некоторого $n > 0$. Существуют следующие два перехода, которые $\mathcal{M}$ может совершить из конфигурации (q_0, α, γ).

1. $(q_0, \alpha, \gamma) \vdash (q_1, \alpha, \gamma)$. Теперь $\mathcal{M}$ может только выталкивать из магазина, находясь в состоянии q_1. Тем самым, $\mathcal{M}$ должен вытолкнуть символ из магазина с чтением каждого входного символа, и $\mathrm{lh}(\alpha) > 0$. Таким образом, если $(q_1, \alpha, \gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \beta)$, то цепочка β короче, чем цепочка γ, и не может ей равняться, т.е. посылка не выполняется.
2. $(q_0, a_1 a_2 \ldots a_n, \gamma) \vdash (q_0, a_2 \ldots a_n, a_1\hat{\ }\gamma)$. Теперь последовательность переходов может завершиться конфигурацией $(q_1, \varepsilon, \gamma)$, только если последний переход является выталкиванием $(q_1, a_n, a_1\hat{\ }\gamma) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma)$ и, следовательно, должно выполняться $a_n = a_1$. Нам также известно, что $(q_0, a_2 \ldots a_n, a_1\hat{\ }\gamma) \vdash^* (q_1, a_n, a_1\hat{\ }\gamma)$. По предложению А3.3, имеем $(q_0, a_2 \ldots a_{n-1}, a_1\hat{\ }\gamma) \vdash^* (q_1, \varepsilon, a_1\hat{\ }\gamma)$.

МП-автомат: пример

Доказательство (окончание).

Так как $\mathrm{lh}(a_2 \ldots a_{n-1}) < n$, по индукционному предположению, $a_2 \ldots a_{n-1} = \beta_1 \hat{\ } \beta_1^R$ для подходящего β_1. Поскольку $\alpha = a_1 \hat{\ } \beta_1 \hat{\ } \beta_1^R \hat{\ } a_n$ и $a_1 = a_n$, заключаем, что $\alpha = \beta \hat{\ } \beta^R$, где $\beta = a_1 \hat{\ } \beta_1$. □

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Теорема А3.4.

Если $L = N(\mathcal{P}_N)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_N = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$, то существует МП-автомат $\mathcal{P}_F$ такой, что $L = L(\mathcal{P}_F)$.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Теорема А3.4.

Если $L = N(\mathcal{P}_N)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_N = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$, то существует МП-автомат $\mathcal{P}_F$ такой, что $L = L(\mathcal{P}_F)$.

Замечание А3.5.

Отметим, что результат работы МП-автомата $\mathcal{P}_N$ не зависит от множества F заключительных состояний.

Пустой магазин ↦ конечное состояние

Теорема А3.4.

Если $L = N(\mathcal{P}_N)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_N = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$, то существует МП-автомат $\mathcal{P}_F$ такой, что $L = L(\mathcal{P}_F)$.

Замечание А3.5.

Отметим, что результат работы МП-автомата $\mathcal{P}_N$ не зависит от множества F заключительных состояний.

Доказательство.

Используется новый магазинный символ X_0, который не должен быть элементом Γ; он будет как маркером дна автомата $\mathcal{P}_F$, так и символом, позволяющим узнать, что $\mathcal{P}_N$ опустошает магазин. Тем самым, если $\mathcal{P}_F$ обозревает X_0 на вершине магазина, то он знает, что $\mathcal{P}_N$ опустошает свой магазин на том же входе.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (продолжение).

Нам понадобится также новое начальное состояние p_0, единственной функцией которого будет задача затолкнуть Z_0, стартовый символ автомата $\mathcal{P}_N$, на вершину магазина и перейти в состояние q_0, начальное для $\mathcal{P}_N$. Далее $\mathcal{P}_F$ имитирует работу автомата $\mathcal{P}_N$ до тех пор, пока магазин $\mathcal{P}_N$ станет пустым, что $\mathcal{P}_F$ определяет по символу X_0 на вершине своего магазина. И, в конце концов, понадобится ещё одно состояние p_f, единственное заключительное для $\mathcal{P}_F$; данный автомат переходит в него, как только $\mathcal{P}_N$ обнаруживает пустой магазин. Тем самым, $\mathcal{P}_F$ имеет следующий вид: $\mathcal{P}_F = (Q \uplus \{q_0; q_f\}, \Sigma, \Gamma \uplus \{X_0\}; \Delta_F, q_0, X_0, \{p_f\})$, где Δ_F представимо в виде объединения, согласно следующим правилам:

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (продолжение).

1. $\Delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$. В своём начальном состоянии автомат $\mathcal{P}_F$ спонтанно переходит в начальное состояние автомата $\mathcal{P}_N$, заталкивая символ Z_0 в магазин.
2. $\Delta(q, a, Y) = \Delta_F(q, a, Y)$, для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Y \in \Gamma$.
3. $\Delta_F(q, \varepsilon, X_0) = \{(p_f, \varepsilon)\}$, для каждого $q \in Q$.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (продолжение).

1. $\Delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$. В своём начальном состоянии автомат $\mathcal{P}_F$ спонтанно переходит в начальное состояние автомата $\mathcal{P}_N$, заталкивая символ Z_0 в магазин.
2. $\Delta(q, a, Y) = \Delta_F(q, a, Y)$, для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Y \in \Gamma$.
3. $\Delta_F(q, \varepsilon, X_0) = \{(p_f, \varepsilon)\}$, для каждого $q \in Q$.

Докажем, что $\alpha \in L(\mathcal{P}_F) \Leftrightarrow \alpha \in N(\mathcal{P}_N)$.
($\Leftarrow$) Пусть $\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$, а именно, $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для некоторого $q \in Q$. По правилу 2, автомат $\mathcal{P}_F$ содержит все переходы автомата $\mathcal{P}_N$, из предложения A10 заключаем, что $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, X_0)$. Далее, выполняется соотношение

$$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_F} (q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_F} (p_f, \varepsilon, \varepsilon). \tag{5}$$

Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.

Пустой магазин $\mapsto$ конечное состояние

Доказательство (окончание).

($\Rightarrow$) Пусть $\alpha \in L(\mathcal{P}_F)$, а именно, $(p_0, \alpha, X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (p_f, \varepsilon, \gamma)$ для некоторого $\gamma \in (\Gamma \cup \{X_0\})^*$. Отметим, что правило 1 может использоваться лишь однажды и только на первом шаге, а правило 3 — только на последнем шаге и также только один раз. Тем самым, приходим к соотношению (5) и, в частности, $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, X_0)$ для некоторого $q \in Q$. Так как $X_0 \notin \Gamma$, а следовательно, и X_0 не встречается в отношении Δ перехода автомата $\mathcal{P}_N$, согласно правилу 2, заключаем, что $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, X_0)$ и $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \varepsilon)$. Таким образом, $\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$. $\square$

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Теорема А3.5.

Пусть $L = L(\mathcal{P}_F)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_F$. Тогда существует МП-автомат $\mathcal{P}_N$, для которого имеет место $L = N(\mathcal{P}_N)$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Теорема А3.5.

Пусть $L = L(\mathcal{P}_F)$ для некоторого МП-автомата $\mathcal{P}_F$. Тогда существует МП-автомат $\mathcal{P}_N$, для которого имеет место $L = N(\mathcal{P}_N)$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{P}_F = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0, F)$ — МП-автомат из условия. Опишем конструкцию $\mathcal{P}_N$ следующим образом. Добавляется переход по ε в новое состояние p из заключительного состояния автомата $\mathcal{P}_F$. Находясь в состоянии p, автомат $\mathcal{P}_N$ опустошает содержимое магазина и ничего не прочитывает на входе. Таким образом, как только $\mathcal{P}_F$ попадает в заключительное состояние, прочитав α, автомат $\mathcal{P}_N$ опустошает свой магазин, также прочитав α.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Чтобы избежать случаи, когда $\mathcal{P}_F$ опустошает свой магазин, не находясь в конечном состоянии, $\mathcal{P}_N$ должен, как и ранее, также использовать маркер X_0 на дне магазина. Он является стартовым символом $\mathcal{P}_N$, и автомат должен начинать работу в новом состоянии p_0, единственная функция которого — затолкнуть Z_0 в магазин и перейти в начальное состояние $\mathcal{P}_F$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Положим $\mathcal{P}_N = (Q \uplus \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \uplus \{X_0\}; \Delta_N, p_0, X_0, F)$, где Δ_N определяется следующим образом:

1. $\Delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$. Работа начинается с заталкивания символа Z_0 автомата $\mathcal{P}_F$ в магазин и перехода в начальное состояние $\mathcal{P}_F$.
2. $\Delta_N(q, a, Y) \supseteq \Delta(q, a, Y)$ для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Y \in \Gamma$, т.е. $\mathcal{P}_N$ имитирует работу $\mathcal{P}_F$.
3. $\Delta_N(q, \varepsilon, Y) \supseteq \{(p, \varepsilon)\}$ для всех $q \in F$ и $Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$. Как только $\mathcal{P}_F$ распознаёт слово, $\mathcal{P}_N$ может начать опустошение магазина и перейти в состояние p.
4. $\Delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\}$ для всех $Y \in \Gamma \cup \{X_0\}$. Попав в состояние p, автомат $\mathcal{P}_N$ выталкивает символы из магазина до его опустошения. При этом входные символы не читаются.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Теперь необходимо доказать, что $\alpha \in N(\mathcal{P}_N) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Теперь необходимо доказать, что $\alpha \in N(\mathcal{P}_N) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.
($\Leftarrow$) Пусть $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$ и $\beta \in \Gamma^*$. Вспомним, что каждый переход автомата $\mathcal{P}_F$ имеется и у $\mathcal{P}_N$, по правилу 2, а по предложению А3.2, $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0)$. Следовательно,
$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_N} (q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (p, \varepsilon, \varepsilon)$.
(Первый переход может осуществляться согласно правилу 1, а последний — согласно правилам 3 и 4). Таким образом, $\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (продолжение).

Теперь необходимо доказать, что $\alpha \in N(\mathcal{P}_N) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathcal{P}_F)$.
($\Leftarrow$) Пусть $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, \beta)$ для некоторых $q \in F$ и $\beta \in \Gamma^*$. Вспомним, что каждый переход автомата $\mathcal{P}_F$ имеется и у $\mathcal{P}_N$, по правилу 2, а по предложению А3.2, $(q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0)$. Следовательно,
$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_N} (q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (p, \varepsilon, \varepsilon)$.
(Первый переход может осуществляться согласно правилу 1, а последний — согласно правилам 3 и 4). Таким образом,
$\alpha \in N(\mathcal{P}_N)$.
($\Rightarrow$) Пусть теперь $(p_0, \alpha, X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для некоторого $q \in Q \cup \{p_0, p\}$. Единственный путь, по которому $\mathcal{P}_N$ может опустошить свой магазин, состоит в достижении состояния p, так как X_0 находится в магазине и является символом, для которого у $\mathcal{P}_F$ переходы не определены. Поэтому $q = p$. Автомат $\mathcal{P}_N$ может достичь состояния p только тогда, когда $\mathcal{P}_F$ приходит в конечное состояние.

Конечное состояние $\mapsto$ пустой магазин

Доказательство (окончание).

Первым переходом автомата $\mathcal{P}_N$ может быть только переход, заданный правилом 1. Таким образом, каждое вычисление $\mathcal{P}_N$, подтверждающее распознаваемость слова α, выглядит следующим образом (здесь q — конечное состояние автомата $\mathcal{P}_F$).

$(p_0, \alpha, X_0) \vdash_{\mathcal{P}_N} (q_0, \alpha, Z_0X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_N} (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

Кроме того, все переходы между (q_0, α, Z_0X_0) и $(q, \varepsilon, \beta\hat{\ }X_0)$ осуществляются переходами автомата $\mathcal{P}_F$. Так как X_0 не участвует в переходах автомата $\mathcal{P}_F$, имеем $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^*_{\mathcal{P}_F} (q, \varepsilon, \beta)$. Таким образом, $\alpha \in L(\mathcal{P}_F)$. $\square$

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

По данной грамматике $\mathfrak{G}$ строится МП-автомат, имитирующий её левые порождения. Любую левовыводимую цепочку можно записать в виде $\alpha\hat{\ }A\hat{\ }\beta$, где α — цепочка терминалов, а A — нетерминал, β — цепочка нетерминалов и терминалов справа от A. Цепочка $A\hat{\ }\beta$ называется **остатком** этой левовыводимой цепочки. У терминальной левовыводимой цепочки остатком является ε. Идея построения МП-автомата по грамматике состоит в том, чтобы МП-автомат имитировал последовательность левовыводимых цепочек, используемых в грамматике для порождения искомой терминальной цепочки $\tilde{\alpha}$. Остаток каждой цепочки $A\hat{\ }\beta$ появляется в магазине с переменной A на вершине, а цепочка α является префиксом не считанных к данному моменту символов цепочки $\tilde{\alpha}$, причём сразу после появления соответствующей конфигурации цепочка α будет считана автоматом.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Предположим, что МП-автомат находится в конфигурации $(q, \alpha', A\hat{\ }\beta)$, представляющей цепочку $\alpha\hat{\ }A\hat{\ }\beta$. Он угадывает продукцию с посылкой A (скажем, $A \longrightarrow \beta'$). Переход автомата состоит в том, что A на вершине магазина заменяется на цепочку β', и достигается конфигурация $(q, \alpha', \beta'\hat{\ }\beta)$. Заметим, что у этого МП-автомата имеется только одно состояние, а именно, q. Все терминалы в начале цепочки $\beta'\hat{\ }\beta$ необходимо удалить до появления нетерминала на вершине магазина. Эти терминалы сравниваются с символами входной цепочки для того, чтобы убедиться в правильности предположения о левом порождении входной цепочки $\tilde{\alpha}$; в противном случае вычисление данной ветви МП-автомата обрывается.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Если таким образом нам удаётся угадать левое порождение $\tilde{\alpha}$, то, в конечном итоге, мы дойдём до распознавания $\tilde{\alpha}$. В этот момент ко всем символам магазина применены продукции (в случае нетерминалов) или правило удаления в результате сравнения (в случае терминалов). Магазин пуст, и, тем самым, слово распознаётся по пустому магазину.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Если таким образом нам удаётся угадать левое порождение $\tilde{\alpha}$, то, в конечном итоге, мы дойдём до распознавания $\tilde{\alpha}$. В этот момент ко всем символам магазина применены продукции (в случае нетерминалов) или правило удаления в результате сравнения (в случае терминалов). Магазин пуст, и, тем самым, слово распознаётся по пустому магазину.

Конструкция.

Пусть $\mathfrak{G} = (V, \Sigma, P, S)$ — КС-грамматика. Построим МП-автомат $\mathcal{P} = (\{q\}, \Sigma, V \cup \Sigma; \Delta, q, S, \varnothing)$, распознающий $L(\mathfrak{G})$ по пустому магазину. Отношение Δ переходов определяется следующим образом:

1. $\Delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) | P(A, \beta)\}$ для каждого $A \in V$.
2. $\Delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$ для любого $a \in \Sigma$.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Теорема А3.6.

Если МП-автомат $\mathcal{P}$ строится по грамматике $\mathfrak{G}$ согласно конструкции, описанной выше, то $N(\mathcal{P}) = L(\mathfrak{G})$.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Теорема А3.6.

Если МП-автомат $\mathcal{P}$ строится по грамматике $\mathfrak{G}$ согласно конструкции, описанной выше, то $N(\mathcal{P}) = L(\mathfrak{G})$.

Доказательство.

Докажем, что $\alpha \in N(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \alpha \in L(\mathfrak{G})$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha \in L(\mathfrak{G})$; тогда α имеет левое порождение в $\mathfrak{G}$:
$S = \delta_1 \underset{l}{\Rightarrow} \delta_2 \underset{l}{\Rightarrow} \ldots \underset{l}{\Rightarrow} \delta_n = \alpha$.

Покажем индукцией по $i \leqslant n$, что $(q, \alpha, S) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q, \xi_i, \beta_i)$, где ξ_i и β_i представляют левовыводимую цепочку δ_i (более точно, если β_i — остаток δ_i, причём $\delta_i = \gamma_i \hat{\ } \beta_i$, то цепочка ξ_i такова, что $\alpha = \gamma_i \hat{\ } \xi_i$).

Базис. Имеем $\delta_1 = S$ и, тем самым, $\gamma_1 = \varepsilon$, $\xi_1 = \alpha$. Так как $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \alpha, S)$, базис доказан.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (продолжение).

Индукция. Предположим, что имеет место $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \xi_i, \beta_i)$, и докажем, что $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \xi_{i+1}, \beta_{i+1})$. Так как слово β_i является остатком, оно начинается с некоторого нетерминала (скажем, A). Кроме того, шаг порождения $\delta_i \underset{l}{\Rightarrow} \delta_{i+1}$ включает замену нетерминала A заключительным словом одной из продукций с посылкой A (скажем, β). Правило 1 построения $\mathcal{P}$ позволяет нам заменить A на вершине магазина словом β, а правило 2 — сравнить любые терминалы на вершине магазина со входными символами. В результате достигается конфигурация $(q, \xi_{i+1}, \beta_{i+1})$, которая представляет следующую левовыводимую цепочку δ_{i+1}.

Для завершения доказательства заметим, что $\beta_n = \varepsilon$, поскольку остаток цепочки $\delta_n = \alpha$ пуст. Таким образом, $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$, и автомат $\mathcal{P}$ распознаёт α по пустому магазину.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (продолжение).

($\Rightarrow$) Докажем более общее утверждение, а именно, если $(q, \alpha, A) \vdash_{\mathcal{P}}^{*} (q, \varepsilon, \varepsilon)$, то $A \Rightarrow_{\mathfrak{G}}^{*} \alpha$ (индукцией по числу переходов автомата $\mathcal{P}$).

Базис. Один переход. Единственным вариантом является то, что $A \longrightarrow \varepsilon$ — продукция $\mathfrak{G}$, использованная в правиле типа 1 МП-автоматом $\mathcal{P}$. В этом случае $\alpha = \varepsilon$ и $A \Rightarrow_{\mathfrak{G}} \varepsilon$.

Индукция. Предположим, что $\mathcal{P}$ совершает n переходов, $n > 1$. Первый переход должен быть типа 1, где нетерминал A на вершине магазина заменяется одним из тел продукции грамматики (поскольку правило типа 2 используется только в том случае, когда на вершине магазина находится терминал). Пусть использована продукция $A \longrightarrow Y_1 Y_2 \ldots Y_k$, где $Y_i \in V \cup \Sigma$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (продолжение).

В процессе следующих $n-1$ переходов автомат $\mathcal{P}$ должен прочитать α на входе и вытолкнуть Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_k из магазина по очереди. Цепочку α можно представить в виде $\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k$ так, что после прочтения α_1 в магазине содержится $Y_2 Y_3 \ldots Y_k$, затем после прочтения α_2 — $Y_3 \ldots Y_k$, $\ldots$, после прочтения α_{k-1} — Y_k, а в конечном итоге после прочтения α_k магазин окажется пустым.

Формально можем заключить, что $(q, \alpha_i\hat{}\alpha_{i+1}\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_i) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q, \alpha_{i+1}\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, \varepsilon)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. По предложению А3.3, $(q, \alpha_i, Y_i) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ для всех i. Так как длины всех переходов не превосходят $n-1$, по индукционному предположению, заключаем, что $Y_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$, если Y_i — нетерминал.

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Доказательство (окончание).

Если же Y_i — терминал, то должен совершиться только один переход, в котором осуществляется проверка на равенство α_i и Y_i. Тем самым, $Y_i \Rightarrow^*_{\mathfrak{G}} \alpha_i$.
Теперь имеется порождение $A \Rightarrow Y_1 Y_2 \ldots Y_k \Rightarrow^* \alpha_1 \hat{}\, Y_2 \ldots Y_k \Rightarrow^* \alpha_1 \hat{}\, \alpha_2 \hat{}\, Y_3 \ldots Y_k \Rightarrow^* \ldots \Rightarrow^* \alpha_1 \hat{}\, \alpha_2 \hat{}\, \ldots \hat{}\, \alpha_{k-1} \hat{}\, Y_k \Rightarrow^* \alpha$.
Для завершения доказательства положим $A = S$. Так как $\alpha \in N(\mathcal{P})$, имеем $(q, \alpha, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$. По доказанному, $S \Rightarrow^* \alpha$ и $\alpha \in L(\mathfrak{G})$. $\square$

КС-грамматики $\mapsto$ МП-автоматы

Пример А3.8.

Преобразуем грамматику выражений в МП-автомат.

Продукции: $I \longrightarrow a|b|Ia|Ib|I0|I1,\ E \longrightarrow I|E+E|E*E|(E)$.

Переходы автомата:

1. $\Delta(q,\varepsilon,I) = \{(q,a),(q,b),(q,Ia),(q,Ib),(q,I0),(q,I1)\}$;
2. $\Delta(q,\varepsilon,E) = \{(q,I),(q,E+E),(q,E*E),(q,(E))\}$;
3. $\Delta(q,a,a) = \Delta(q,b,b) = \Delta(q,(,() = \Delta(q,),)) = \Delta(q,+,+) = \Delta(q,*,*) = \Delta(q,0,0) = \Delta(q,1,1) = \{(q,\varepsilon)\}$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Теорема А3.7.

Пусть $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0)$ — МП-автомат. Тогда существует КС-грамматика $\mathfrak{G}$ такая, что $L(\mathfrak{G}) = N(\mathcal{P})$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Теорема А3.7.

Пусть $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma; \Delta, q_0, Z_0)$ — МП-автомат. Тогда существует КС-грамматика $\mathfrak{G}$ такая, что $L(\mathfrak{G}) = N(\mathcal{P})$.

Доказательство.

Определим грамматику $\mathfrak{G} = (V, \Sigma; R, S)$ следующим образом:
Переменные (V):

1. специальный стартовый символ S;
2. все символы вида $[pXq]$, где $p, q \in Q$, $X \in \Gamma$ ($[pXq]$ — это один символ, а не слово, состоящее из 5 символов!!!)

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Продукции (R):

1. $S \to [q_0 Z_0 p]$, для всех $p \in Q$. Интуитивно символ $[q_0 Z_0 p]$ предназначен для порождения цепочек α, которые приводят к выталкиванию Z_0 в процессе перехода из q_0 в p. Таким образом, $(q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$. Эти продукции гласят, что S порождает все цепочки, приводящие к опустошению магазина после старта в начальной конфигурации;
2. пусть $\Delta((q, a, X), (r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k))$, где $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, а $k \in \omega$; при $k = 0$ заключительная пара имеет вид (r, ε). Тогда для всех списков состояний $r_1, r_2, \ldots, r_k$ в грамматике $\mathfrak{G}$ имеется продукция $[qXr_k] \longrightarrow a\hat{}[rY_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \ldots [r_{k-1} Y_k r_k]$.
   Она гласит, что один из путей выталкивания X из магазина и перехода из состояния q в r_k заключается в том, чтобы прочитать a, затем использовать некоторый вход для выталкивания Y_1 и перехода из r в r_1, далее прочитать вход, вытолкнуть Y_2 и перейти из r_1 в r_2, и т.д.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Докажем, что $[qXp] \Rightarrow^* \alpha \Leftrightarrow (q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.
$(\Leftarrow)$ Пусть $(q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$; докажем, что $[qXp] \Rightarrow^* \alpha$ (индукцией по числу переходов МП-автомата).
Базис. Один шаг. Тогда $(p, \varepsilon) \in \Delta(q, \alpha, X)$ и $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Из построения $\mathfrak{G}$ следует, что $R([qXp], \alpha)$, поэтому $[qXp] \Rightarrow \alpha$.
Индукция. Предположим, что последовательность $(q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ содержит $n > 1$ переходов. Первый переход должен иметь вид $(q, \alpha, X) \vdash (r_0, \beta, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, где $\alpha = a \hat{} \beta$ для некоторого $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$; затем будет выполняться переход $(r_0, \beta, Y_1 Y_2 \ldots Y_k) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$. Отсюда следует, что $(r_0, Y_1 Y_2 \ldots Y_k) \in \Delta(q, a, X)$. По построению $\mathfrak{G}$, найдётся продукция $[qXr_k] \longrightarrow a[r_0 Y_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \ldots [r_{k-1} Y_k r_k]$, у которой $r_k = p$ и $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ — некоторые состояния из Q.
Символы Y_1, Y_2, ..., Y_k удаляются из магазина по очереди; для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ можно выбрать состояние r_i, в котором на вершине магазина оказывается Y_{i+1}.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Пусть $\beta = \beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\ldots\hat{}\beta_k$, где β_i — входная цепочка, которая прочитывается до удаления символа Y_i из магазина. Тогда $(r_{i-1}, \beta_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon)$. Поскольку ни одна из этих последовательностей не содержит более $n-1$ переходов, к ним применимо индукционное предположение. Приходим к выводу, что $[r_{i-1}Y_ir_i] \Rightarrow^* \beta_i$. Соберём все порождения вместе: $[qXr_k] \Rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\ldots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1[r_1Y_2r_2]\ldots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2[r_2Y_3r_3]\ldots[r_{k-1_{Y_kr_k}}] \Rightarrow^* \ldots \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\ldots\hat{}\beta_k = \alpha$. Здесь $r_k = p$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Пусть $\beta = \beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\dots\hat{}\beta_k$, где β_i — входная цепочка, которая прочитывается до удаления символа Y_i из магазина. Тогда $(r_{i-1}, \beta_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon)$. Поскольку ни одна из этих последовательностей не содержит более $n-1$ переходов, к ним применимо индукционное предположение. Приходим к выводу, что $[r_{i-1}Y_ir_i] \Rightarrow^* \beta_i$. Соберём все порождения вместе: $[qXr_k] \Rightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\dots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1[r_1Y_2r_2]\dots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2[r_2Y_3r_3]\dots[r_{k-1}{}_{Y_kr_k}] \Rightarrow^* \dots \Rightarrow^* a\hat{}\beta_1\hat{}\beta_2\hat{}\dots\hat{}\beta_k = \alpha$. Здесь $r_k = p$.

$(\Rightarrow)$ Индукцией по числу шагов в порождении.

Базис. Один шаг. Тогда $R([qXp], \alpha)$. Единственная возможность существования такой продукции — $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, а $\mathcal{P}$ содержит переход, в котором X выталкивается из магазина, при этом состояние q меняется на p. Таким образом, $(p, \varepsilon) \in \Delta(q, \alpha, X)$ и $(q, \alpha, X) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (продолжение).

Индукция. Предположим, что $[qXp] \Rightarrow^* \alpha$ содержит $n > 1$ шагов. Рассмотрим первую выводимую цепочку в данной последовательности:
$[qXr_k] \longrightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\ldots[r_{k-1}Y_kr_k] \Rightarrow^* \alpha$ (здесь $r_k = p$).
Соответствующая выводимой цепочке продукция должна присутствовать в грамматике, поскольку
$(r_0, Y_1Y_2\ldots Y_k) \in \Delta(q, a, X)$.
Цепочку α можно представить в виде $\alpha = a\hat{\ }\alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_k$ так, что $[r_{i-1}Y_ir_i] \Rightarrow^* \alpha_i$. По индукционному предположению, для всех i выполняется отношение $(r_{i-1}, \alpha_i, Y_i) \vdash^* (r_i, \varepsilon, \varepsilon)$. По предложению А3.2, $(r_{i-1}, \alpha_i\hat{\ }\alpha_{i+1}\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_k, Y_iY_{i+1}\ldots Y_k) \vdash^*$
$(r_i, \alpha_{i+1}\hat{\ }\ldots\hat{\ }\alpha_k, Y_{i+1}\ldots Y_k)$.

МП-автомат $\mapsto$ КС-грамматики

Доказательство (окончание).

Соберём все эти последовательности вместе и получим следующее порождение.
$(q, a\hat{}\alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, X) \vdash (r_0, \alpha_1\hat{}\alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_1Y_2\ldots Y_k) \vdash^*$
$(r_1, \alpha_2\hat{}\ldots\hat{}\alpha_k, Y_2\ldots Y_k) \vdash^* \ldots \vdash^* (r_{k-1}, \alpha_k, Y_k) \vdash^* (r_k, \varepsilon, \varepsilon)$.
Поскольку $r_k = p$, доказано, что $(q, \alpha, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$.
Завершим доказательство. $S \Rightarrow^* \alpha \Leftrightarrow [q_0 Z_0 p] \Rightarrow^* \alpha$ для некоторого $p \in Q$. Выше уже доказано, что $[q_0 Z_0 p] \Rightarrow^* \alpha \Leftrightarrow (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$, т.е. $\mathcal{P}$ распознаёт α по пустому магазину. Таким образом, $L(\mathfrak{G}) = N(\mathcal{P})$ $\square$

Спасибо за внимание.