

Лекция С6 Нумерации и вычислимость, III

Вадим Пузаренко

26 февраля 2024 г.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

**Вычислимые
семейства**

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Обозначение С6.1.

$$\Gamma_{\nu}^* \Leftarrow \{ \langle n, m_1, m_2, \dots, m_k \rangle \mid \langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle \in \nu(n) \}.$$

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Обозначение С6.1.

$$\Gamma_{\nu}^* \Leftarrow \{ \langle n, m_1, m_2, \dots, m_k \rangle \mid \langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle \in \nu(n) \}.$$

Определение С6.1.

Нумерация ν называется **вычислимой**, если Γ_{ν}^* в.п. Семейство \mathcal{S} называется **вычислимым**, если оно имеет хотя бы одну вычислимую нумерацию.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Пусть ν — нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^k)$.

Обозначение С6.1.

$$\Gamma_{\nu}^* \rightleftharpoons \{ \langle n, m_1, m_2, \dots, m_k \rangle \mid \langle m_1, m_2, \dots, m_k \rangle \in \nu(n) \}.$$

Определение С6.1.

Нумерация ν называется **вычислимой**, если Γ_{ν}^* в.п. Семейство \mathcal{S} называется **вычислимым**, если оно имеет хотя бы одну вычислимую нумерацию.

Определение С6.2.

Пусть \mathcal{S} — семейство n -арных частичных функций. Тогда нумерация ν называется **вычислимой**, если нумерация $(\Gamma\nu)(x) \rightleftharpoons \Gamma\nu(x)$ вычислима.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.1.

Пусть \mathcal{S} — семейство n -арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция

$F_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \nu(x_0)(x_1, \dots, x_n)$ частично вычислима.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.1.

Пусть \mathcal{S} — семейство n -арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \nu(x_0)(x_1, \dots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma_\nu^* = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему С3.5 о графике. □

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.1.

Пусть \mathcal{S} — семейство n -арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \nu(x_0)(x_1, \dots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma_\nu^* = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему С3.5 о графике. □

Примеры С6.1.

- 1 Семейство CEP_1 вычислимо.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.1.

Пусть \mathcal{S} — семейство n -арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \nu(x_0)(x_1, \dots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma_\nu^* = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему С3.5 о графике. □

Примеры С6.1.

- ❶ Семейство СЕР_1 вычислимо.
- ❷ Семейство всех конечных множеств вычислимо.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.1.

Пусть \mathcal{S} — семейство n -арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \nu(x_0)(x_1, \dots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma_\nu^* = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему С3.5 о графике. □

Примеры С6.1.

- ❶ Семейство СЕР_1 вычислимо.
- ❷ Семейство всех конечных множеств вычислимо.
- ❸ Семейство всех вычислимых множеств вычислимо.

Вычислимые нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.1.

Пусть \mathcal{S} — семейство n -арных частичных функций. Нумерация ν вычислима, если и только если функция $F_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \nu(x_0)(x_1, \dots, x_n)$ частично вычислима.

Доказательство.

Действительно, $\Gamma_\nu^* = \Gamma_{F_\nu}$. Остаётся применить теорему С3.5 о графике. □

Примеры С6.1.

- ❶ Семейство СЕР_1 вычислимо.
- ❷ Семейство всех конечных множеств вычислимо.
- ❸ Семейство всех вычислимых множеств вычислимо.
- ❹ Семейство всех унарных частично вычислимых функций вычислимо.

Не-вычислимые семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Следствие С6.1.

Семейство всех унарных вычислимых функций не вычислимо.

Не-вычислимые семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Следствие С6.1.

Семейство всех унарных вычислимых функций не вычислимо.

Теорема С6.1.

Семейство всех бесконечных вычислимо перечислимых (вычислимых) множеств не вычислимо.

Не-вычислимые семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Следствие С6.1.

Семейство всех унарных вычислимых функций не вычислимо.

Теорема С6.1.

Семейство всех бесконечных вычислимо перечислимых (вычислимых) множеств не вычислимо.

Доказательство.

Докажем следующее: если ν — вычислимая нумерация некоторого подсемейства \mathcal{S} бесконечных впм, то существует бесконечное вычислимое множество $A \notin \mathcal{S}$. Используя сильную аппроксимацию Γ_ν^* , будем строить строго возрастающую вф f , для которой будет выполняться $\rho f \neq \nu(n)$ для всех $n \in \omega$. Пусть $\{B_{n,s}\}_{n,s \in \omega}$ — сильно вычислимая последовательность такая, что $\emptyset = B_{n,0} \subseteq B_{n,1} \subseteq \dots \subseteq B_{n,s} \subseteq \dots \subseteq \bigcup_s B_{n,s} = \nu(n)$ для всех $n \in \omega$.

Не-вычислимые семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (продолжение)

Кроме того, дополнительно будем предполагать, что $|B_{n,s+1} - B_{n,s}| \leq 1$, где $n, s \in \omega$.

КОНСТРУКЦИЯ.

ШАГ 0. Находим шаг $t_0 = \mu t[B_{0,t} \neq \emptyset]$; возьмём m_0 , для которого $B_{0,t_0} = \{m_0\}$; тогда положим $f(0) = m_0 + 1$.

ШАГ $n + 1$. Считаем, что $f(0), f(1), \dots, f(n)$ уже определены. Находим шаг $t_{n+1} = \mu t[(\exists m)(m \in B_{n+1,t} \wedge (m > f(n)))]$; возьмём m_{n+1} , для которого $B_{n+1,t_{n+1}} \setminus B_{n+1,t_{n+1}-1} = \{m_{n+1}\}$; тогда положим $f(n+1) = m_{n+1} + 1$.

ЗАВЕРШЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ.

Из эффективности конструкции заключаем, что f вычислима. Так как f строго монотонная, приходим к выводу (см. предложение С3.2(1)), что ρf — бесконечное в.м. Далее, непосредственно из определения следует, что $f(n) - 1 \in B_{n,t_n} \subseteq \nu(n)$, но $f(n) - 1 \notin \rho f$, поэтому $\rho f \neq \nu(n)$. □

Не-вычислимые семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Упражнения С6.1.

- 1 Докажите, что семейство всех кобесконечных вpm не является вычислимым.
- 2 Докажите, что семейство всех унарных частичных вычислимых функций, имеющих тотальное вычислимое продолжение, вычислимо.
- 3 Докажите, что пара вpm $\{n \mid \varphi_n(0) \downarrow = 0\}$ и $\{n \mid \varphi_n(0) \downarrow = 1\}$ неотделима, где φ — универсальная чвф.

Не-вычислимые семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Упражнения С6.1.

- 1 Докажите, что семейство всех кобесконечных впм не является вычислимым.
- 2 Докажите, что семейство всех унарных частичных вычислимых функций, имеющих тотальное вычислимое продолжение, вычислимо.
- 3 Докажите, что пара впм $\{n \mid \varphi_n(0) \downarrow = 0\}$ и $\{n \mid \varphi_n(0) \downarrow = 1\}$ неотделима, где φ — универсальная чвф.

Упражнение С6.2.

Докажите, что семейство всех кобесконечных вычислимых множеств вычислимо.

Идеал

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.2.

- 1 Если ν_0 и ν_1 — вычислимые нумерации, то $\nu_0 \oplus \nu_1$ также вычислима;
- 2 если ν — вычислимая нумерация и $\nu' \leq \nu$, то ν' будет также вычислимой нумерацией.

Доказательство.

- 1) Пусть $\Gamma_{\nu_0}^*$ и $\Gamma_{\nu_1}^*$ — впм, тогда $\Gamma_{\nu_0 \oplus \nu_1}^* = \{\langle 2k, m \rangle \mid m \in \nu_0(k)\} \cup \{\langle 2k+1, m \rangle \mid m \in \nu_1(k)\}$ также будет впм.
- 2) Пусть Γ_ν^* — впм и пусть вф f такова, что $\nu' = \nu f$. Тогда $\Gamma_{\nu'}^* = \{\langle n, m \rangle \mid m \in \nu'(n)\} = \{\langle n, m \rangle \mid m \in \nu f(n)\} = \{\langle n, m \rangle \mid \Gamma_\nu^*(f(n), m)\}$ и, следовательно, $\Gamma_{\nu'}^*$ также будет впм. □

Обозначения С6.2.

Пусть \mathcal{S} — вычислимое семейство. Тогда через $N^0(\mathcal{S})$ обозначим множество всех вычислимых нумераций и, в свою очередь, через $L^0(\mathcal{S})$ — множество всех классов эквивалентности вычислимых нумераций семейства \mathcal{S} .

Идеал

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Обозначения С6.2.

Пусть \mathcal{S} — вычислимое семейство. Тогда через $N^0(\mathcal{S})$ обозначим множество всех вычислимых нумераций и, в свою очередь, через $L^0(\mathcal{S})$ — множество всех классов эквивалентности вычислимых нумераций семейства \mathcal{S} .

Следствие С6.2.

Пусть \mathcal{S} — вычислимое семейство; тогда $L^0(\mathcal{S}) \triangleleft \mathbf{L}(\mathcal{S})$.

Главные нумерации: основное понятие

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Определение С6.3.

Вычислимая нумерация ν семейства \mathcal{S} называется **главной**, если любая вычислимая нумерация ν_0 семейства \mathcal{S} сводится к ν .

Главные нумерации: основное понятие

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.3.

Вычислимая нумерация ν семейства \mathcal{S} называется **главной**, если любая вычислимая нумерация ν_0 семейства \mathcal{S} сводится к ν .

Лемма С6.1.

Если ν — главная вычислимая нумерация \mathcal{S} и ν_0 — вычислимая нумерация $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, то $\nu_0 \leq \nu$.

Главные нумерации: основное понятие

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.3.

Вычислимая нумерация ν семейства \mathcal{S} называется **главной**, если любая вычислимая нумерация ν_0 семейства \mathcal{S} сводится к ν .

Лемма С6.1.

Если ν — главная вычислимая нумерация \mathcal{S} и ν_0 — вычислимая нумерация $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$, то $\nu_0 \leq \nu$.

Доказательство.

Пусть ν_0 — вычислимая нумерация $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$; тогда $\nu_0 \oplus \nu$ будет вычислимой нумерацией \mathcal{S} . Следовательно, $\nu_0 \oplus \nu = \nu f$ для некоторой вф f . Положим $g(n) \Leftarrow f(2n)$; далее, имеем $\nu_0(n) = (\nu_0 \oplus \nu)(2n) = \nu(f(2n)) = \nu g(n)$. Таким образом, вф g сводит ν_0 к ν . □

Главные нумерации для чвф

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.2.

Семейство PCF_n всех n -арных частично вычислимых функций имеет главную вычислимую нумерацию.

Главные нумерации для чвф

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.2.

Семейство PCF_n всех n -арных частично вычислимых функций имеет главную вычислимую нумерацию.

Скобки Мальцева.

Введём бинарную функцию $[\bullet, \bullet]$ следующим образом (здесь $x, y \in \omega$):
 $[x, y] \Leftrightarrow c(lx, c(rx, y))$.

Эта функция примитивно рекурсивна и осуществляет взаимно однозначное соответствие между парами натуральных чисел и натуральными числами.

Главные нумерации для чвф

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Скобки Мальцева.

Функции c и $[\bullet, \bullet]$ связаны следующим тождеством:

$$[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2)). \quad (1)$$

Для любого $n > 2$ определим функцию $\lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n [x_1, x_2, \dots, x_n]$ следующим образом:

$$\lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n [x_1, x_2, \dots, x_n] \equiv \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n [\dots [[x_1, x_2], x_3], \dots, x_n].$$

Нетрудно проверить, что эти функции определяются индукцией по $n > 2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n \lambda x_{n+1} [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] &\equiv \\ &\equiv \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n \lambda x_{n+1} [[x_1, x_2 \dots, x_n], x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Существует n унарных примитивно рекурсивных функций $[\bullet]_{n,i}$, $1 \leq i \leq n$, для которых имеют место

$$[[x]_{n,1}, [x]_{n,2}, \dots, [x]_{n,n}] = x; \quad [[x_1, x_2, \dots, x_n]]_{n,i} = x_i$$

для всех $x, x_1, x_2, \dots, x_n \in \omega$.

Главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство теоремы С6.2.

Пусть $T^2(x, y)$ — произвольная бинарная универсальная чвф; положим $K^2 \Leftarrow \lambda x_0 \lambda x_1 T^2(x_0, c(rx_0, x_1))$;

$K^{n+1} \Leftarrow \lambda x_0 \lambda x_1 \dots \lambda x_n K^n([x_0, x_1], x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$.

Функции $K^2, K^3, \dots, K^n, \dots$ называются **клиниевскими универсальными функциями**. Для них справедливо следующее утверждение:

Для любого $n > 0$ частично вычислимая функция K^{n+1} универсальна.

Для проверки данного утверждения определим функции T^{n+1} , $n > 1$, следующим соотношением:

$T^{n+1} \Leftarrow \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n T^2(x_0, c^n(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

По лемме С2.11, чвф T^{n+1} универсальна. Заметим, что справедливо следующее соотношение:

$T^{k+n+1}(x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}) =$
 $T^{n+2}(x_0, c^k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_{k+n})$.

Проверим, что справедливо следующее соотношение (индукцией по n): $K^{n+1}(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_{n+1}) = T^{n+2}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, $n \geq 1$.

Главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство теоремы С6.2 (продолжение).

В самом деле,

$$K^2(c(x_0, x_1), x_2) = T^2(x_0, c(x_1, x_2)) = T^3(x_0, x_1, x_2);$$

$$K^{n+1}(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_{n+1}) = K^n([c(x_0, x_1), x_2], x_3, \dots, x_{n+1}) =$$

$$K^n(c(x_0, c(x_1, x_2)), x_3, \dots, x_{n+1}) =$$

$$T^{n+1}(x_0, c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}) = T^{n+2}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}).$$

Теперь перейдём к доказательству того, что K^{n+1} универсальна.

Пусть $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — чвф и пусть $m \in \omega$ таково, что

$$\lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n g(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n T^{n+2}(m, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тогда $K^{n+1}(c(m, m), x_1, \dots, x_n) = T^{n+2}(m, m, x_1, x_2, \dots, x_n) =$
 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. $g = \lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n K^{n+1}(c(m, m), x_1, \dots, x_n)$.

Клиниевская универсальная функция K^{n+1} определяет
вычислимую нумерацию $\varkappa^n : \omega \rightarrow \text{PCF}_n$ (в смысле $K^{n+1} = F_{\varkappa^n}$),
которую также будем называть **клиниевской** ($n \geq 1$). Покажем,
что эта нумерация главная.

Главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство теоремы С6.2 (окончание).

Пусть ν — произвольная вычислимая нумерация семейства PCF_n и пусть $F_\nu(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — соответствующая ей универсальная чвф.

Пусть также $m \in \omega$ таково, что

$F_\nu(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = T^{n+2}(m, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда, положив $h \Leftarrow \lambda x c(m, x)$, получаем, что

$\nu(x)(y_1, y_2, \dots, y_n) = F_\nu(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \dots, y_n) =$
 $K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \dots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \dots, y_n) =$
 $\varkappa^n(h(x))(y_1, y_2, \dots, y_n)$; таким образом, $\nu x = \varkappa^n h(x)$ или $\nu = \varkappa^n h$. \square

Главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство теоремы С6.2 (окончание).

Пусть ν — произвольная вычислимая нумерация семейства PCF_n и пусть $F_\nu(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ — соответствующая ей универсальная чвф.

Пусть также $m \in \omega$ таково, что

$F_\nu(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = T^{n+2}(m, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда, положив $h \Leftarrow \lambda x c(m, x)$, получаем, что

$\nu(x)(y_1, y_2, \dots, y_n) = F_\nu(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \dots, y_n) =$
 $K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \dots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \dots, y_n) =$
 $\varkappa^n(h(x))(y_1, y_2, \dots, y_n)$; таким образом, $\nu x = \varkappa^n h(x)$ или $\nu = \varkappa^n h$. \square

Замечание С6.1.

Функция $h(x) = \lambda x c(m, x)$ в доказательстве теоремы не только примитивно рекурсивна, но и инъективна, поэтому $\nu \leq_1 \varkappa^n$.

Главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Соглашение С6.1.

Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение \varkappa вместо \varkappa^1 . Кроме того, часто вместо $\varkappa^n(m)$ будем писать \varkappa_m^n .

Главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Соглашение С6.1.

Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение \varkappa вместо \varkappa^1 . Кроме того, часто вместо $\varkappa^n(m)$ будем писать \varkappa_m^n .

$s - m - n$ -Теорема С6.3.

Для любых $n, m \geq 1$ существует $m + 1$ -местная инъективная вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция s_n^m такая, что $\varkappa_e^{m+n}(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{s_n^m(e, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для всех $e, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in \omega$.

Главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Соглашение С6.1.

Если $n = 1$, то верхний символ клиниевской нумерации будем опускать и использовать обозначение \varkappa вместо \varkappa^1 . Кроме того, часто вместо $\varkappa^n(m)$ будем писать \varkappa_m^n .

$s - m - n$ -Теорема С6.3.

Для любых $n, m \geq 1$ существует $m + 1$ -местная инъективная вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция s_n^m такая, что $\varkappa_e^{m+n}(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{s_n^m(e, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для всех $e, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in \omega$.

Доказательство.

Определим $\nu : \omega \rightarrow \text{PCF}_n$ следующим образом:

$$\nu(x) \Leftarrow \varkappa_{c_{m+1,1}(x)}^{m+n}(c_{m+1,2}(x), c_{m+1,3}(x), \dots, c_{m+1,m+1}(x), x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тогда существует инъективная вф $h(x)$ такая, что $\nu(x) = \varkappa_{h(x)}^n$ для всех $x \in \omega$.

Теорема Клини о неподвижной точке

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Положив, что $x = c^{m+1}(e, y_1, y_2, \dots, y_m)$ и $s_n^m(e, y_1, y_2, \dots, y_m) = h(c^{m+1}(e, y_1, y_2, \dots, y_m))$, получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_e^{m+n}(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ \mathcal{K}_{c_{m+1,1}(x)}^{m+n}(c_{m+1,2}(x), c_{m+1,3}(x), \dots, c_{m+1,m+1}(x), x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ \nu(x)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{K}_{h(x)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ \mathcal{K}_{h(c^{m+1}(e, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{K}_{s_n^m(e, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$


Теорема Клини о неподвижной точке

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Положив, что $x = c^{m+1}(e, y_1, y_2, \dots, y_m)$ и $s_n^m(e, y_1, y_2, \dots, y_m) = h(c^{m+1}(e, y_1, y_2, \dots, y_m))$, получим, что $\varkappa_e^{m+n}(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{c_{m+1,1}(x)}^{m+n}(c_{m+1,2}(x), c_{m+1,3}(x), \dots, c_{m+1,m+1}(x), x_1, x_2, \dots, x_n) = \nu(x)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{h(x)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{h(c^{m+1}(e, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{s_n^m(e, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Теорема С6.4.

Для каждой $m + 1$ -местной частично вычислимой функции h найдётся m -местная инъективная вычислимая функция g , для которой выполняется равенство

$\varkappa_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varkappa_{g(y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$
для всех $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \in \omega$.

Теорема Клини о неподвижной точке

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Применяя к чвф $\mathcal{K}_e^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$

$s - m - n$ -теорему, получим равную ей чвф

$\mathcal{K}_{s_n^{m+1}(e, z, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим теперь вспомогательную чвф $\mathcal{K}_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, s_n^{m+1}(z, z, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Эта функция имеет $m + n + 1$ аргументов, поэтому найдётся $a \in \omega$ такое, что

$$\mathcal{K}_a^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\mathcal{K}_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, s_n^{m+1}(z, z, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n). \text{ Тогда}$$

$$\mathcal{K}_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\mathcal{K}_a^{m+n+1}(a, y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{K}_{s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Остаётся положить $g(y_1, y_2, \dots, y_m) = s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \dots, y_m)$. □

Теорема Клини о неподвижной точке

Доказательство.

Применяя к чвф $\mathcal{K}_e^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$

$s - m - n$ -теорему, получим равную ей чвф

$\mathcal{K}_{s_n^{m+1}(e, z, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим теперь вспомогательную чвф $\mathcal{K}_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, s_n^{m+1}(z, z, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Эта функция имеет $m + n + 1$ аргументов, поэтому найдётся $a \in \omega$ такое, что

$$\mathcal{K}_a^{m+n+1}(z, y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\mathcal{K}_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, s_n^{m+1}(z, z, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n). \text{ Тогда}$$

$$\mathcal{K}_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \dots, y_m))}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$\mathcal{K}_a^{m+n+1}(a, y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{K}_{s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \dots, y_m)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Остаётся положить $g(y_1, y_2, \dots, y_m) = s_n^{m+1}(a, a, y_1, y_2, \dots, y_m)$. □

Следствие С6.3.

Для любой унарной частично вычислимой функции h найдётся число a такое, что $\mathcal{K}_a^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{K}_{h(a)}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in \omega$.

Снова главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.5.

Семейство CEP_n обладает главной вычислимой нумерацией для любого $n \geq 1$.

Снова главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.5.

Семейство СЕР_n обладает главной вычислимой нумерацией для любого $n \geq 1$.

Доказательство.

Определим нумерацию π^n семейства СЕР_n следующим образом: $\pi^n(x) \Leftarrow \delta \mathcal{K}^n(x)$ для всех $x \in \omega$. Отношение

$\langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \in \pi^n(x) \Leftrightarrow \exists z[K^{n+1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = z]$ вл.,
поэтому π^n — вычислимая нумерация семейства СЕР_n . Пусть $\nu : \omega \rightarrow \text{СЕР}_n$ — произвольная вычислимая нумерация.

Определим $n + 1$ -арную частичную функцию g следующим образом:

$$g(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftarrow \begin{cases} 0, & \text{если } \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \in \nu(x); \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

График $\Gamma_g = \{\langle x, y_1, y_2, \dots, y_n, 0 \rangle \mid \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \in \nu(x)\}$ вл и, по теореме С3.5 о графике, g частично вычислима.

Снова главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Пусть $m \in \omega$ таково, что $g(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ для всех $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in \omega$; тогда для $h \Leftarrow \lambda x c(m, x)$ имеем:

$$[\pi^n h(x)](y_1, y_2, \dots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \dots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$g(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ и}$$
$$\pi^n h(x) = \delta \pi^n h(x) = \delta(\lambda y_1, y_2, \dots, y_n. g(x, y_1, y_2, \dots, y_n)) \text{ для всех } x \in \omega.$$

Заметив, что $\delta(\lambda y_1, y_2, \dots, y_n. g(x, y_1, y_2, \dots, y_n)) = \nu(x)$, получаем $\nu = \pi^n h$. Таким образом, $\nu \leq \pi^n$ и π^n — главная нумерация семейства CEP_n . □

Снова главные нумерации

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Пусть $m \in \omega$ таково, что $g(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ для всех $x, y_1, y_2, \dots, y_n \in \omega$; тогда для $h \Leftarrow \lambda x c(m, x)$ имеем:

$$[\pi^n h(x)](y_1, y_2, \dots, y_n) = K^{n+1}(h(x), y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$K^{n+1}(c(m, x), y_1, y_2, \dots, y_n) = T^{n+2}(m, x, y_1, y_2, \dots, y_n) =$$
$$g(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ и}$$
$$\pi^n h(x) = \delta \pi^n h(x) = \delta(\lambda y_1, y_2, \dots, y_n. g(x, y_1, y_2, \dots, y_n)) \text{ для всех } x \in \omega.$$

Заметив, что $\delta(\lambda y_1, y_2, \dots, y_n. g(x, y_1, y_2, \dots, y_n)) = \nu(x)$, получаем $\nu = \pi^n h$. Таким образом, $\nu \leq \pi^n$ и π^n — главная нумерация семейства CER_n . □

Замечание С6.2.

Функция $h(x) = \lambda x c(m, x)$ в доказательстве теоремы не только примитивно рекурсивна, но и инъективна, поэтому $\nu \leq_1 \pi^n$. Нумерацию π^n будем называть **постовской**.

Свойство полноты

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Соглашение С6.2.

Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π вместо π^1 . Кроме того, часто вместо $\pi^n(m)$ будем писать π_m^n .

Свойство полноты

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Соглашение С6.2.

Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π вместо π^1 . Кроме того, часто вместо $\pi^n(m)$ будем писать π_m^n .

Предложение С6.3.

Пусть $\psi(x)$ — частично вычислимая функция. Тогда существует вычислимая функция $f(x)$, для которой выполняется следующее:

$$[\kappa(f(x))](y) = \begin{cases} [\kappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \lambda y. \uparrow, & \text{если } \psi(x) \uparrow; \end{cases}$$

$$\pi(f(x)) = \begin{cases} \pi(\psi(x)), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \emptyset, & \text{если } \psi(x) \uparrow. \end{cases}$$

Свойство полноты

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Соглашение С6.2.

Если $n = 1$, то верхний символ постовской нумерации будем опускать и использовать обозначение π вместо π^1 . Кроме того, часто вместо $\pi^n(m)$ будем писать π_m^n .

Предложение С6.3.

Пусть $\psi(x)$ — частично вычислимая функция. Тогда существует вычислимая функция $f(x)$, для которой выполняется следующее:

$$[\varkappa(f(x))](y) = \begin{cases} [\varkappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \lambda y. \uparrow, & \text{если } \psi(x) \uparrow; \end{cases}$$

$$\pi(f(x)) = \begin{cases} \pi(\psi(x)), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \emptyset, & \text{если } \psi(x) \uparrow. \end{cases}$$

Доказательство.

Достаточно построить вф f для \varkappa , поскольку $\pi(x) = \delta \varkappa(x)$ для всех $x \in \omega$.

Свойство полноты

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Определим нумерацию ν частичных функций, удовлетворяющую следующим условиям:

$$[\nu(x)](y) \Leftarrow \begin{cases} [\kappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \lambda y. \uparrow, & \text{если } \psi(x) \uparrow. \end{cases}$$

Нумерация ν является вычислимой, поскольку $F_\nu(x, y) = K^2(\psi(x), y)$ — чвф. Так как κ — главная нумерация, существует вф $f(x)$ такая, что $\nu(x) = \kappa(f(x))$. Отсюда вытекает утверждение. \square

Свойство полноты

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Определим нумерацию ν частичных функций, удовлетворяющую следующим условиям:

$$[\nu(x)](y) = \begin{cases} [\kappa(\psi(x))](y), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \lambda y. \uparrow, & \text{если } \psi(x) \uparrow. \end{cases}$$

Нумерация ν является вычислимой, поскольку $F_\nu(x, y) = K^2(\psi(x), y)$ — чвф. Так как κ — главная нумерация, существует вф $f(x)$ такая, что $\nu(x) = \kappa(f(x))$. Отсюда вытекает утверждение. \square

Замечание С6.3.

Нигде не определённая функция и пустое множество играют роль особых элементов нумераций κ и π . При этом они являются полными нумерациями. Нумерация ν семейства $\mathcal{S} \cup \{\perp\}$ называется **полной**, если для любой чвф $\psi(x)$ существует вф f такая, что

$$\nu(f(x)) = \begin{cases} \nu(\psi(x)), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \perp, & \text{если } \psi(x) \uparrow. \end{cases}$$

Счётчики

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Обозначение С6.2.

Пусть $M \subseteq \omega$ и $x \in \omega$. Положим $M \upharpoonright x \Leftrightarrow M \cap \{0, 1, \dots, x\}$.

Счётчики

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Обозначение С6.2.

Пусть $M \subseteq \omega$ и $x \in \omega$. Положим $M \upharpoonright x \Leftrightarrow M \cap \{0, 1, \dots, x\}$.

Пусть ν и μ — две вычислимые нумерации семейств \mathcal{S} , $\mathcal{S}' \subseteq \text{CER}_1$, а $\{H_{x,s} | x, s \in \omega\}$ и $\{M_{x,s} | x, s \in \omega\}$ — двойные сильные последовательности конечных множеств такие, что $\{H_{x_0,s} | s \in \omega\}$ и $\{M_{x_0,s} | s \in \omega\}$ — сильные аппроксимации $\nu(x_0)$ и $\mu(x_0)$ соответственно, $x_0 \in \omega$. Пусть g — унарная частично вычислимая функция, а $\{G_s\}_{s \in \omega}$ — сильная аппроксимация Γ_g . Через g_s будем обозначать функцию, графиком которой является G_s , $s \in \omega$. Определим теперь одноместную функцию F , которую назовём **счётчиком**. Полагаем

$$f(s) \Leftrightarrow \sup\{x \leq s \mid \forall y \leq x [(y \in \delta g_s) \wedge (H_{y,s} \upharpoonright x = M_{g(y),s} \upharpoonright x)]\}$$

(полагая $\sup \emptyset \Leftrightarrow 0$); $F(0) \Leftrightarrow 0$, $F(s+1) \Leftrightarrow \max\{F(s), f(s+1)\}$.

Из определения функции F легко видеть, что F — монотонная (т.е. $F(x) \leq F(x+1)$ для $x \in \omega$) вычислимая функция.

Предложение С6.4.

$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \infty$ (т.е. функция F не ограничена), если и только если g вычислима и $\nu = \mu g$.

Счётчики

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Предложение С6.4.

$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \infty$ (т.е. функция F не ограничена), если и только если g вычислима и $\nu = \mu g$.

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть вф g такова, что $\nu = \mu g$, и $x \in \omega$. Так как g всюду определена и $\Gamma_g = \bigcup_{s \in \omega} G_s$, имеем $\{0, 1, \dots, x\} \subseteq \delta g_{s_0}$ для некоторого s_0 . Пусть s_1 таково, что $H_{y, s_1} \upharpoonright x = \nu(y) \upharpoonright x$ для всех $y \leq x$, а s_2 таково, что $M_{g(y), s_2} \upharpoonright x = \mu(g(y)) \upharpoonright x$ для всех $y \leq x$. Тогда для $s \Leftarrow \max\{s_0, s_1, s_2\} + 1$ имеем $f(s) \geq x$ и, тем более, $F(s) \geq x$. Так как x произвольно, F не ограничена.

Счётчики

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

(\Rightarrow) Пусть g — чвф, но не вф, или g — вф, но $\nu \neq \mu g$. Если g не всюду определена, то $x \notin \delta g$ для некоторого x , поэтому $f(s) \leq x$ для всех s ; тогда $F(s) \leq x$ для всех s , т.е. F ограничена. Пусть теперь вф g такова, что $\nu \neq \mu g$. Тогда $\nu(x_0) \neq \mu(g(x_0))$ для некоторого x_0 . Тогда найдётся $x_1 \in (\nu(x_0) \cup \mu(g(x_0))) \setminus (\nu(x_0) \cap \mu(g(x_0)))$. Пусть s_0 таково, что $x_1 \in H_{x_0, s_0} \cup M_{g(x_0), s_0}$. Тогда для $s \geq s_1 \Leftrightarrow \max\{s_0, x_0, x_1\}$ имеем $f(s) \leq \max\{x_0, x_1\}$ и $F(s) = F(s_1)$. Таким образом, F ограничена.

□

В дальнейшем будут использоваться и счётчики с параметрами, когда вместо одной нумерации ν , одной нумерации μ и одной функции g будут вычислимые последовательности нумераций и функций. Однако в основе использования счётчиков будут лежать идеи, использованные в доказательстве предложения.

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Определение С6.4.

Семейство $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ называется **главным**, если оно обладает главной вычислимой нумерацией.

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Определение С6.4.

Семейство $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ называется **главным**, если оно обладает главной вычислимой нумерацией.

Укажем одно из наиболее общих и полезных необходимых условий.

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Определение С6.4.

Семейство $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ называется **главным**, если оно обладает главной вычислимой нумерацией.

Укажем одно из наиболее общих и полезных необходимых условий.

Теорема С6.6.

Если $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ — главное семейство, $\nu : \omega \rightarrow \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства \mathcal{S}' такая, что $\nu(0) \subseteq \nu(1) \subseteq \dots \subseteq \nu(n) \subseteq \nu(n+1) \subseteq \dots$, то множество $R \Leftarrow \bigcup_{n \in \omega} \nu(n)$ принадлежит \mathcal{S} . Другими словами, главное семейство замкнуто относительно объединения возрастающих вычислимых последовательностей своих элементов.

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Предположим противное. Пусть ν — такая вычислимая нумерация $S' \subseteq S$, что $\nu(0) \subseteq \nu(1) \subseteq \dots \subseteq \nu(n) \subseteq \nu(n+1) \subseteq \dots$ и $R \not\subseteq \bigcup_{n \in \omega} \nu(n) \notin S$. Пусть μ — произвольная вычислимая нумерация S .

Построим некоторую вычислимую нумерацию θ подсемейства S' такую, что для всякой вф f будет выполняться $\theta \neq \mu f$. Отсюда по лемме С6.1, нумерация μ не может быть главной. Пусть $\{M_{n,t}\}_{n,t \in \omega}$ и $\{H_{n,t}\}_{n,t \in \omega}$ — двойные сильные последовательности конечных множеств такие, что $\{M_{n_0,t}\}_{t \in \omega}$ и $\{H_{n_0,t}\}_{t \in \omega}$ — сильные аппроксимации $\mu(n_0)$ и $\nu(n_0)$ соответственно, $n_0 \in \omega$. Пусть $\{\Gamma_{n,t}\}_{n,t \in \omega}$ — двойная сильная последовательность конечных множеств такая, что $\{\Gamma_{n_0,t}\}_{t \in \omega}$ — сильная аппроксимация $\Gamma_{\neq n_0}$, $n_0 \in \omega$. Функцию, графиком которой является $\Gamma_{n,t}$, будем обозначать через $\chi_{n,t}$.

Нумерация θ будет определена с помощью построения некоторой двойной сильной последовательности $\{R_{n,t}\}_{n,t \in \omega}$ такой, что $\{R_{n_0,t}\}_{t \in \omega}$ будет сильной аппроксимацией множества $\theta(n_0)$.

Главные семейства

Доказательство (продолжение).

Для построения $R_{n,t}$ определим счётчик F следующим образом:
 $f(s, k) \Leftrightarrow \sup\{x \leq s \mid \forall y \leq x ((y \in \delta \varkappa_{k,s}) \wedge (R_{y,s} \upharpoonright x = M_{\varkappa_k(y),s} \upharpoonright x))\}$;
 $F(0, k) \Leftrightarrow 0$, $F(s+1, k) \Leftrightarrow \max\{F(s, k), f(s+1, k)\}$.

Заметим, что для вычисления $F(s, k)$ необходимо только знание множеств $R_{n,t}$ для $t \leq s$.

Полагаем $R_{n,0} \Leftrightarrow \emptyset$, $R_{n,s+1} \Leftrightarrow \bigcup_{k \leq F(s,n)} H_{k,s+1}$ для всех $n, s \in \omega$.

Из монотонности F по s и свойства $H_{k,s} \subseteq H_{k,s+1}$ следует, что $R_{n,s} \subseteq R_{n,s+1}$ для всех $n, k \in \omega$. Покажем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, n) < \infty$

для любого $n \in \omega$. Действительно, в противном случае по предложению С6.4, имеет место, что \varkappa_n — вф и $\theta = \mu \varkappa_n$; в частности, $\theta(n) = R_n = \mu \varkappa_n(n) \in \mathcal{S}$, но из определения R_n видно, что в этом случае $R_n = \bigcup_{t,k \in \omega} H_{k,t} = \bigcup_{k \in \omega} \nu(k) \notin \mathcal{S}$. Следовательно,

$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, n) < \infty$ для любого $n \in \omega$; обозначим этот предел через $f(n)$.

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Из определения $R_{n,t}$ видно, что $R_{n,t} \subseteq \bigcup_{k \leq f(n)} H_k = H_{f(n)}$ для всех t . С другой стороны, если $t_0 > 0$ таково, что $F(t_0, n) = f(n)$, то $H_{f(n),t} \subseteq R_{n,t}$ для всех $t \geq t_0$. Следовательно, $R_n = \nu(f(n)) \in S'$ для любого $n \in \omega$. Итак, θ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства S' , а по предложению С6.4, $\theta \neq \mu f$ для любой вф f , т.е. $\theta \not\leq \mu$. □

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Из определения $R_{n,t}$ видно, что $R_{n,t} \subseteq \bigcup_{k \leq f(n)} H_k = H_{f(n)}$ для всех t . С другой стороны, если $t_0 > 0$ таково, что $F(t_0, n) = f(n)$, то $H_{f(n),t} \subseteq R_{n,t}$ для всех $t \geq t_0$. Следовательно, $R_n = \nu(f(n)) \in S'$ для любого $n \in \omega$. Итак, θ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства S' , а по предложению С6.4, $\theta \neq \mu f$ для любой вф f , т.е. $\theta \not\leq \mu$. □

Следствие С6.4.

- ① Семейство всех конечных множеств не является главным.
- ② Семейство $\text{CER}_1 \setminus \{\omega\}$ не является главным.

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Доказательство.

Нумерация γ является вычислимой нумерацией семейства всех конечных множеств, поэтому данное семейство вычислимо.

Далее, функция $f(n) = 2^n - 1$ вычислима и

$\gamma(f(n)) = \{x \mid x < n\}$. Кроме того, $\omega = \bigcup_{n \in \omega} \gamma(f(n))$ не является

конечным множеством, поэтому семейство всех конечных множеств не является главным, по теореме С6.6. □

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Упражнение С6.3.

Докажите следствие С6.4(2).

Главные семейства

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Упражнение С6.3.

Докажите следствие С6.4(2).

Упражнение С6.4.

- 1 Докажите, что семейство $CF \cup \{\omega\}$ не является вычислимым, где CF — семейство всех графиков вычислимых функций.
- 2 Докажите, что любое вычислимое семейство $\mathcal{S} \subseteq CF$, имеющее предельную точку (функция $g \in \mathcal{S}$ называется **предельной** для \mathcal{S} , если для любого $n \in \omega$ существует функция $f_n \in \mathcal{S}$ такая, что $g \neq f_n$ и $g \upharpoonright \{0, 1, \dots, n\} = f_n \upharpoonright \{0, 1, \dots, n\}$), то семейство \mathcal{S} не является главным.

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Определение С6.5.

Множество $A \subseteq \omega$ называется \varkappa -индексным, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.5.

Множество $A \subseteq \omega$ называется \varkappa -индексным, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Обозначение С6.3.

$$K = \{x \mid \varkappa_x(x) \downarrow\} = \{x \mid x \in \pi_x\}.$$

$$K_0 = \{c(x, y) \mid \varkappa_x(y) \downarrow\} = \{c(x, y) \mid y \in \pi_x\}.$$

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.5.

Множество $A \subseteq \omega$ называется \varkappa -индексным, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Обозначение С6.3.

$$K = \{x \mid \varkappa_x(x) \downarrow\} = \{x \mid x \in \pi_x\}.$$

$$K_0 = \{c(x, y) \mid \varkappa_x(y) \downarrow\} = \{c(x, y) \mid y \in \pi_x\}.$$

Теорема С6.7.

Если A — нетривиальное индексное множество, т.е. $A \neq \emptyset, \omega$, то $K \leq_1 A$ или $K \leq_1 \bar{A}$.

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.5.

Множество $A \subseteq \omega$ называется \varkappa -индексным, если $[(x \in A) \wedge (\varkappa_x = \varkappa_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Обозначение С6.3.

$$K = \{x \mid \varkappa_x(x) \downarrow\} = \{x \mid x \in \pi_x\}.$$

$$K_0 = \{c(x, y) \mid \varkappa_x(y) \downarrow\} = \{c(x, y) \mid y \in \pi_x\}.$$

Теорема С6.7.

Если A — нетривиальное индексное множество, т.е. $A \neq \emptyset, \omega$, то $K \leq_1 A$ или $K \leq_1 \bar{A}$.

Доказательство.

Выберем e_0 такое, что $\varkappa_{e_0} = \lambda y. \uparrow$. Докажем, что если $e_0 \in \bar{A}$, то $K \leq_1 A$ (если $e_0 \in A$, то $K \leq_1 \bar{A}$ доказывается аналогично). Так как $A \neq \emptyset$, найдётся $e_1 \in A$.

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Далее, $\varkappa_{e_1} \neq \varkappa_{e_0}$, поскольку A является индексным. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, существует инъективная вф f такая, что

$$\varkappa_{f(x)}(y) = \begin{cases} \varkappa_{e_1}(y), & \text{если } x \in K; \\ \uparrow, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Теперь

$$x \in K \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_1} \Rightarrow f(x) \in A,$$

$$x \in \overline{K} \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_0} \Rightarrow f(x) \in \overline{A}.$$

Последняя импликация в каждой строке выполняется, поскольку A — индексное множество. □

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Далее, $\varkappa_{e_1} \neq \varkappa_{e_0}$, поскольку A является индексным. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, существует инъективная вф f такая, что

$$\varkappa_{f(x)}(y) = \begin{cases} \varkappa_{e_1}(y), & \text{если } x \in K; \\ \uparrow, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Теперь

$$x \in K \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_1} \Rightarrow f(x) \in A,$$

$$x \in \overline{K} \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \varkappa_{e_0} \Rightarrow f(x) \in \overline{A}.$$

Последняя импликация в каждой строке выполняется, поскольку A — индексное множество. □

Теорема Сб.8 Райса

Пусть \mathcal{C} — произвольный класс частично вычислимых функций. Тогда множество $\{n : \varkappa_n \in \mathcal{C}\}$ вычислимо, если и только если либо $\mathcal{C} = \emptyset$, либо \mathcal{C} — класс всех частично вычислимых функций.

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Примеры С6.2.

- 1 $K_1 = \{x : \pi_x \neq \emptyset\};$
- 2 $\text{Fin} = \{x : \pi_x \text{ конечно}\};$
- 3 $\text{Inf} = \omega - \text{Fin} = \{x : \pi_x \text{ бесконечно}\};$
- 4 $\text{Tot} = \{x : \pi_x \text{ вычислима}\};$
- 5 $\text{Con} = \{x : \pi_x \text{ вычислима и постоянна}\};$
- 6 $\text{Cof} = \{x : \pi_x \text{ коконечно}\};$
- 7 $\text{Comp} = \{x : \pi_x \text{ вычислимо}\};$
- 8 $\text{Ext} = \{x : \pi_x \text{ имеет тотальное продолжение}\}.$

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Примеры С6.2.

- 1 $K_1 = \{x : \pi_x \neq \emptyset\};$
- 2 $\text{Fin} = \{x : \pi_x \text{ конечно}\};$
- 3 $\text{Inf} = \omega - \text{Fin} = \{x : \pi_x \text{ бесконечно}\};$
- 4 $\text{Tot} = \{x : \varkappa_x \text{ вычислима}\};$
- 5 $\text{Con} = \{x : \varkappa_x \text{ вычислима и постоянна}\};$
- 6 $\text{Cof} = \{x : \pi_x \text{ коконечно}\};$
- 7 $\text{Comp} = \{x : \pi_x \text{ вычислимо}\};$
- 8 $\text{Ext} = \{x : \varkappa_x \text{ имеет тотальное продолжение}\}.$

Пример С6.3.

$K \leq_1 \text{Fin}$ и $K \leq_1 \overline{\text{Fin}}$. Действительно, если $\varkappa_{e_0} = \lambda y. \uparrow$, то $e_0 \in \text{Fin}$, поэтому $K \leq_1 \overline{\text{Fin}}$ (см. доказательство теоремы С6.7).

Индексные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Пример С6.3 (продолжение).

Докажем теперь, что $K \leq_1 \text{Fin}$. Пусть K_s — сильная аппроксимация множества K . Определим функцию $\psi(x, y)$ так:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin K_y; \\ \uparrow, & \text{если } x \in K_y. \end{cases}$$

По $s - m - n$ -теореме С6.3, существует инъективная вф f такая, что $\varkappa_{f(x)} = \lambda y. \psi(x, y)$.

Теперь

$$x \notin K \Rightarrow \varkappa_{f(x)} = \lambda y. 0 \Rightarrow \pi_{f(x)} = \omega \Rightarrow f(x) \in \overline{\text{Fin}}.$$

Пусть $x \in K$; тогда находим наименьшее y_x такое, что $x \in K_{y_x}$. В этом случае функция $\psi(x, y)$ определяется как

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < y_x; \\ \uparrow, & \text{если } y \geq y_x. \end{cases}$$

Далее,

$$x \in K \Rightarrow \pi_{f(x)} = \delta \varkappa_{f(x)} = \{z : z < y_x\} \Rightarrow f(x) \in \text{Fin}.$$

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.6.

- 1 Говорят, что e является **слабым, вычислимо перечислимым (в.п.)** или Σ_1 -индексом вычислимо перечислимого множества A , если $A = \pi_e$.
- 2 Говорят, что $s(e, i)$ является **вычислимым (в.)** или Δ_1 -индексом вычислимого множества A , если $A = \pi_e$ и $\bar{A} = \pi_i$.
- 3 Говорят, что e является **характеристическим** или Δ_0 -индексом вычислимого множества A , если $\chi_A = \mathcal{K}_e$.
- 4 Говорят, что e является **сильным** или γ -индексом конечного множества A , если $A = \gamma_e$.

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.6.

- 1 Говорят, что e является **слабым, вычислимо перечислимым (в.п.)** или Σ_1 -индексом вычислимо перечислимого множества A , если $A = \pi_e$.
- 2 Говорят, что $s(e, i)$ является **вычислимым (в.)** или Δ_1 -индексом вычислимого множества A , если $A = \pi_e$ и $\bar{A} = \pi_i$.
- 3 Говорят, что e является **характеристическим** или Δ_0 -индексом вычислимого множества A , если $\chi_A = \mathcal{K}_e$.
- 4 Говорят, что e является **сильным** или γ -индексом конечного множества A , если $A = \gamma_e$.

Теперь перейдём к обсуждению проблемы существования эффективного перехода от одних индексов к другим.

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.6.

- 1 Говорят, что e является **слабым, вычислимо перечислимым (в.п.)** или Σ_1 -индексом вычислимо перечислимого множества A , если $A = \pi_e$.
- 2 Говорят, что $s(e, i)$ является **вычислимым (в.)** или Δ_1 -индексом вычислимого множества A , если $A = \pi_e$ и $\bar{A} = \pi_i$.
- 3 Говорят, что e является **характеристическим** или Δ_0 -индексом вычислимого множества A , если $\chi_A = \mathcal{K}_e$.
- 4 Говорят, что e является **сильным** или γ -индексом конечного множества A , если $A = \gamma_e$.

Теперь перейдём к обсуждению проблемы существования эффективного перехода от одних индексов к другим.

Предложение С6.5.

$$\gamma \xrightarrow{(1)} \Delta_0 \xrightleftharpoons[(3)]{(2)} \Delta_1 \xrightarrow{(4)} \Sigma_1.$$

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

(1) Так как $\gamma(n)$ — сильно вычислимая последовательность, множество $B = \{\langle n, m \rangle \mid m \in \gamma(n)\}$ вычислимо. Поэтому существует m_0 такое, что $[\chi_{m_0}^2](x, y) = \chi_B(x, y)$. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, найдётся инъективная вф f такая, что $\chi_{f(e)}(y) = \chi_B(e, y)$. Тем самым, если e — сильный индекс конечного множества A , то $f(e)$ — Δ_0 -индекс данного множества.

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

- (1) Так как $\gamma(n)$ — сильно вычислимая последовательность, множество $B = \{\langle n, m \rangle \mid m \in \gamma(n)\}$ вычислимо. Поэтому существует m_0 такое, что $[\chi_{m_0}^2](x, y) = \chi_B(x, y)$. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, найдётся инъективная вф f такая, что $\chi_{f(e)}(y) = \chi_B(e, y)$. Тем самым, если e — сильный индекс конечного множества A , то $f(e)$ — Δ_0 -индекс данного множества.
- (2) Определим две частично вычислимые функции $\psi_0(e, x) = \mu y [\chi_e(x) = 0]$ и $\psi_1(e, x) = \mu y [\chi_e(x) = 1]$. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, найдутся инъективные вф g_0 и g_1 такие, что $\chi_{g_i(e)}(x) = \psi_i(e, x)$, $i = 0, 1$. Далее, если e — Δ_0 -индекс вычислимого множества A , то $\pi(g_0(e)) = \delta \chi_{g_0(e)} = A$ и $\pi(g_1(e)) = \delta \chi_{g_1(e)} = \bar{A}$, а следовательно, $f(e) \leq c(g_0(e), g_1(e))$ — его Δ_1 -индекс.

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

(1) Так как $\gamma(n)$ — сильно вычислимая последовательность, множество $B = \{\langle n, m \rangle \mid m \in \gamma(n)\}$ вычислимо. Поэтому существует m_0 такое, что $[\chi_{m_0}^2](x, y) = \chi_B(x, y)$. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, найдётся инъективная вф f такая, что $\chi_{f(e)}(y) = \chi_B(e, y)$. Тем самым, если e — сильный индекс конечного множества A , то $f(e)$ — Δ_0 -индекс данного множества.

(2) Определим две частично вычислимые функции $\psi_0(e, x) = \mu y[\chi_e(x) = 0]$ и $\psi_1(e, x) = \mu y[\chi_e(x) = 1]$. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, найдутся инъективные вф g_0 и g_1 такие, что $\chi_{g_i(e)}(x) = \psi_i(e, x)$, $i = 0, 1$. Далее, если e — Δ_0 -индекс вычислимого множества A , то $\pi(g_0(e)) = \delta\chi_{g_0(e)} = A$ и $\pi(g_1(e)) = \delta\chi_{g_1(e)} = \bar{A}$, а следовательно, $f(e) \Leftarrow c(g_0(e), g_1(e))$ — его Δ_1 -индекс.

(4) Пусть $c(e, i)$ — Δ_1 -индекс вычислимого множества A ; тогда $e = lc(e, i)$ — Σ_1 -индекс множества A .

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (продолжение)

(3) Пусть $\{W_{n,s}\}_{n,s \in \omega}$ — двойная сильно вычислимая последовательность такая, что $\{W_{n_0,s}\}_{s \in \omega}$ — сильная аппроксимация множества $\pi(n_0)$, $n_0 \in \omega$; положим $B \Leftarrow \{\langle n, s, k \rangle \mid k \in W_{n,s}\}$. Определим чвф $\psi(n, m, x) \Leftarrow \mu s[(x \in W_{n,s}) \vee (x \in W_{m,s})]$ и $\varphi(n, m, x) \Leftarrow \chi_B(n, \psi(n, m, x), x)$. По $s - m - n$ -теореме С6.3, существует вф f такая, что $\varkappa_{f(n,m)}(x) = \varphi(n, m, x)$. Далее, пусть $c(e, i)$ — Δ_1 -индекс вычислимого множества A ; покажем, что $f(e, i)$ — Δ_0 -индекс данного множества. Действительно, функция $\lambda x. \psi(e, i, x)$ вычислима и, следовательно, вф $\varphi(e, i, x) = \chi_B(e, \psi(e, i, x), x)$ является характеристической функцией множества A . Таким образом, $f(e, i)$ — Δ_0 -индекс множества A . □

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (продолжение)

(3) Пусть $\{W_{n,s}\}_{n,s \in \omega}$ — двойная сильно вычислимая последовательность такая, что $\{W_{n_0,s}\}_{s \in \omega}$ — сильная аппроксимация множества $\pi(n_0)$, $n_0 \in \omega$; положим $B \Leftarrow \{\langle n, s, k \rangle \mid k \in W_{n,s}\}$. Определим чвф $\psi(n, m, x) \Leftarrow \mu s[(x \in W_{n,s}) \vee (x \in W_{m,s})]$ и $\varphi(n, m, x) \Leftarrow \chi_B(n, \psi(n, m, x), x)$. По $s - m - n$ -теореме С6.3, существует вф f такая, что $\varkappa_{f(n,m)}(x) = \varphi(n, m, x)$. Далее, пусть $c(e, i)$ — Δ_1 -индекс вычислимого множества A ; покажем, что $f(e, i)$ — Δ_0 -индекс данного множества. Действительно, функция $\lambda x. \psi(e, i, x)$ вычислима и, следовательно, вф $\varphi(e, i, x) = \chi_B(e, \psi(e, i, x), x)$ является характеристической функцией множества A . Таким образом, $f(e, i)$ — Δ_0 -индекс множества A . □

Предложение С6.6.

Не существует частично вычислимой функции $\psi(x)$ такой, что если A — конечное множество и $\chi_A = \varkappa_e$, то $\psi(e) \downarrow$ и $\gamma(\psi(e)) = A$.

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Допустим, что такая функция $\psi(x)$ существует. Пусть K — множество, определённое выше, и пусть $\{K_s\}_{s \in \omega}$ — сильная аппроксимация множества K . Так как $\{K_s\}_{s \in \omega}$ — сильно вычислимая последовательность, множество $\{\langle x, s \rangle \mid x \in K_s\}$ вычислимо.

Определим нумерацию ν следующим образом:

$$\nu(x) \Leftarrow \begin{cases} \{s_0\}, & \text{если } x \in K \wedge s_0 = \mu s[x \in K_s]; \\ \emptyset, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Тогда $y \in \nu(x) \Leftrightarrow (x \in K_y) \wedge (x \notin K_{y-1})$; в частности, Γ_ν^* — в.м. Далее, пусть m_0 таково, что $\varkappa_{m_0}^2(x, y) = \chi_{\Gamma_\nu^*}(x, y)$. По $s - m - n$ -теореме Сб.3, существует в.ф. $f(x)$, для которой имеет место $\varkappa_{f(x)}(y) = \varkappa_{m_0}^2(x, y)$.

Теперь

$$\begin{aligned} x \in K &\Rightarrow [\gamma(\psi(f(x))) = \{\mu s[x \in K_s]\}] \Rightarrow \psi(f(x)) > 0 \Rightarrow \text{sg}(\psi(f(x))) = 1, \\ x \notin K &\Rightarrow [\gamma(\psi(f(x))) = \emptyset] \Rightarrow \text{sg}(\psi(f(x))) = \psi(f(x)) = 0. \end{aligned}$$

Справедливость последних импликаций противоречит тому, что K не является в.м. □

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равно-
мерность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.7.

Не существует частично вычислимой функции $\psi(x)$ такой, что если $A = \pi_e$ — вычислимое множество, то $\psi(e) \downarrow$ и $\pi_{\psi(e)} = \overline{A}$.

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Предложение С6.7.

Не существует частично вычислимой функции $\psi(x)$ такой, что если $A = \pi_e$ — вычислимое множество, то $\psi(e) \downarrow$ и $\pi_{\psi(e)} = \bar{A}$.

Доказательство.

Определим сначала чвф $\varphi(x, y) = 0(K^2(x, x))$. По *s-m-n*-теореме С6.3, существует вф f такая, что $\varkappa_{f(x)}(y) = \varphi(x, y)$. Тогда

$$\pi_{f(x)} = \begin{cases} \omega, & \text{если } x \in K; \\ \emptyset, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Допустим теперь, что функция $\psi(x)$ из условия существует. В этом случае имеем

$$x \in K \Rightarrow \pi_{f(x)} = \omega \Rightarrow \pi_{\psi(f(x))} = \emptyset,$$

$$x \notin K \Rightarrow \pi_{f(x)} = \emptyset \Rightarrow \pi_{\psi(f(x))} = \omega.$$

Тем самым, $x \in \bar{K} \Leftrightarrow \pi_{\psi(f(x))} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists y[y \in \pi_{\psi(f(x))}]$, поэтому \bar{K} в.п., по теореме С6.5, леммам С3.7 и С3.9, противоречие. □

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Предложение С6.8

Существуют инъективные вычислимые функции $f_0(x, y)$ и $f_1(x, y)$ такие, что справедливо следующее:

$$i) \pi_{f_0(x, y)} = \pi_x \cup \pi_y;$$

$$ii) \pi_{f_1(x, y)} = \pi_x \cap \pi_y.$$

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Предложение С6.8

Существуют инъективные вычислимые функции $f_0(x, y)$ и $f_1(x, y)$ такие, что справедливо следующее:

$$i) \pi_{f_0(x, y)} = \pi_x \cup \pi_y;$$

$$ii) \pi_{f_1(x, y)} = \pi_x \cap \pi_y.$$

Доказательство.

i) Пусть $Q(x, z, t)$ — вычислимый предикат такой, что $z \in \pi_x \Leftrightarrow \exists t Q(x, z, t)$. Тогда $z \in \pi_x \cup \pi_y \Leftrightarrow \exists t (Q(x, z, t) \vee Q(y, z, t))$ и, следовательно, $\pi_x \cup \pi_y = \delta \lambda z. \psi(x, y, z)$, где $\psi(x, y, z) = \mu t (Q(x, z, t) \vee Q(y, z, t))$. По *s-m-n*-теореме С6.3, существует инъективная вф $f_0(x, y)$ такая, что $\varkappa_{f_0(x, y)}(z) = \psi(x, y, z)$. В конечном итоге, $\pi_x \cup \pi_y = \delta \varkappa_{f_0(x, y)} = \pi_{f_0(x, y)}$.

ii) Определим функцию $\psi(x, y, z) \Leftarrow \varkappa_x(z) + \varkappa_y(z)$. По *s-m-n*-теореме, найдётся инъективная вф $f_1(x, y)$ такая, что $\varkappa_{f_1(x, y)}(z) = \psi(x, y, z)$.

Далее, $\pi_{f_1(x, y)} = \delta \varkappa_{f_1(x, y)} = \delta (\lambda z. \psi(x, y, z)) = \delta \varkappa_x \cap \delta \varkappa_y = \pi_x \cap \pi_y$. □

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Следствие С6.5.

Класс вычислимых множеств замкнут относительно операций объединения, пересечения и дополнения. Более того, все операции, приведённые выше, равномерны относительно Δ_1 -индексов.

Индексы и равномерность

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Следствие С6.5.

Класс вычислимых множеств замкнут относительно операций объединения, пересечения и дополнения. Более того, все операции, приведённые выше, равномерны относительно Δ_1 -индексов.

Доказательство.

Пусть f_0 и f_1 — вычислимые функции из предложения С6.8. Пусть также e_0 и e_1 — Δ_1 -индексы вычислимых множеств A_0 и A_1 .

⊃ Тогда $c(f_0(l(e_0), l(e_1)), f_1(r(e_0), r(e_1)))$ — Δ_1 -индекс в $A_0 \cup A_1$.

⊂ Тогда $c(f_1(l(e_0), l(e_1)), f_0(r(e_0), r(e_1)))$ — Δ_1 -индекс в $A_0 \cap A_1$.

• Тогда $c(r(e_0), l(e_0))$ — Δ_1 -индекс в $\overline{A_0}$.



Неподвижная точка и вpm

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.9.

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+1}$ найдётся m -арная инъективная вычислимая функция h такая, что $P(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \Leftrightarrow x \in \pi(h(y_1, y_2, \dots, y_m))$.

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.9.

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+1}$ найдётся m -арная инъективная вычислимая функция h такая, что $P(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \Leftrightarrow x \in \pi(h(y_1, y_2, \dots, y_m))$.

Доказательство.

Так как предикат P вычислимо перечислим, имеем $P(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \Leftrightarrow [\varkappa^{m+1}(a)](y_1, y_2, \dots, y_m, x) \downarrow$ для подходящего $a \in \omega$. По s - m - n -теореме С6.3, существует инъективная вф $h(y_1, y_2, \dots, y_m)$ такая, что выполняется $[\varkappa^{m+1}(a)](y_1, y_2, \dots, y_m, x) = \varkappa_{h(y_1, y_2, \dots, y_m)}(x)$. Далее, $P(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \Leftrightarrow \langle y_1, y_2, \dots, y_m, x \rangle \in \delta \varkappa_a^{m+1} = \pi_a^{m+1} \Leftrightarrow x \in \delta \varkappa_{h(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \pi_{h(y_1, y_2, \dots, y_m)}$. □

Неподвижная точка и вpm

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.10.

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+2}$ найдётся m -арная инъективная вычислимая функция g такая, что

$$P(x, y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m)) \Leftrightarrow x \in \pi(g(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.10.

Для каждого вычислимо перечислимого предиката $P \subseteq \omega^{m+2}$ найдётся m -арная инъективная вычислимая функция g такая, что

$$P(x, y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m)) \Leftrightarrow x \in \pi(g(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Доказательство.

По теореме С6.9, имеем

$P(x, y_1, y_2, \dots, y_m, z) \Leftrightarrow x \in \pi(h(y_1, y_2, \dots, y_m, z))$ для подходящей инъективной вф h . По теореме С6.4,

$\varkappa_{h(y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m))}(x) = \varkappa_{g(y_1, y_2, \dots, y_m)}(x)$ для подходящей инъективной вф g . Далее, имеет место

$$\begin{aligned} P(x, y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m)) &\Leftrightarrow x \in \\ \pi(h(y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m))) &= \\ \delta \varkappa(h(y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m))) &= \delta \varkappa(g(y_1, y_2, \dots, y_m)) = \\ \pi(g(y_1, y_2, \dots, y_m)). \end{aligned}$$



Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.11.

Для любой $m + 1$ -арной частично вычислимой функции h найдётся m -арная инъективная вычислимая функция g такая, что $\pi(h(y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m))) = \pi(g(y_1, y_2, \dots, y_m))$.

В частности, при $m = 0$ имеем следующее: для любой унарной частично вычислимой функции h найдётся число n_0 такое, что $\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$.

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.11.

Для любой $m + 1$ -арной частично вычислимой функции h найдётся m -арная инъективная вычислимая функция g такая, что $\pi(h(y_1, y_2, \dots, y_m, g(y_1, y_2, \dots, y_m))) = \pi(g(y_1, y_2, \dots, y_m))$.

В частности, при $m = 0$ имеем следующее: для любой унарной частично вычислимой функции h найдётся число n_0 такое, что $\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$.

Определение С6.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **π -индексным**, если $[(x \in A) \wedge (\pi_x = \pi_y)] \Rightarrow (y \in A)$, для всех $x, y \in \omega$.

Теорема С6.12 Райса.

Пусть \mathcal{C} — класс вычислимо перечислимых множеств. Тогда множество $I = \{n : \pi_n \in \mathcal{C}\}$ вычислимо, если и только если $\mathcal{C} \in \{\emptyset, \text{СЕР}_1\}$.

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Допустим противное, т.е. I вычислимо и $I \neq \emptyset, \omega$. Пусть

$$\nu(n) \Leftarrow \begin{cases} \pi_a, & \text{если } n \in I; \\ \pi_b, & \text{если } n \notin I; \end{cases}$$

где $a \in \omega \setminus I$ и $b \in I$. Поскольку ν — вычислимая нумерация, а π — главная вычислимая нумерация семейства CEP_1 , существует вф h такая, что $\nu(x) = \pi(h(x))$ для всех $x \in \omega$. По теореме о неподвижной точке (теорема С6.11), найдётся $n_0 \in \omega$, для которого $\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$.

Далее, $n_0 \in I \Leftrightarrow \pi_{h(n_0)} \notin C \Leftrightarrow \pi_{n_0} \notin C \Leftrightarrow n_0 \notin I$, противоречие. □

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Допустим противное, т.е. I вычислимо и $I \neq \emptyset, \omega$. Пусть

$$\nu(n) \Leftarrow \begin{cases} \pi_a, & \text{если } n \in I; \\ \pi_b, & \text{если } n \notin I; \end{cases}$$

где $a \in \omega \setminus I$ и $b \in I$. Поскольку ν — вычислимая нумерация, а π — главная вычислимая нумерация семейства CER_1 , существует вф h такая, что $\nu(x) = \pi(h(x))$ для всех $x \in \omega$. По теореме о неподвижной точке (теорема С6.11), найдётся $n_0 \in \omega$, для которого $\pi_{n_0} = \pi_{h(n_0)}$.

Далее, $n_0 \in I \Leftrightarrow \pi_{h(n_0)} \notin C \Leftrightarrow \pi_{n_0} \notin C \Leftrightarrow n_0 \notin I$, противоречие. \square

Лемма С6.2.

Пусть h — частично вычислимая функция. Тогда

- 1 существует вычислимая функция g_0 такая, что $\pi(g_0(x)) = h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$;
- 2 существует вычислимая функция g_1 такая, что $\pi(g_1(x)) = h(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$.

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Доказательство.

1) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \Leftarrow h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\nu}^*(\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow [h(y) \in \pi(x)]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_0(x))$ для подходящей вф g_0 , поскольку вычислимая нумерация π главная.

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

1) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \Leftrightarrow h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\nu}^*(\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow [h(y) \in \pi(x)]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_0(x))$ для подходящей вф g_0 , поскольку вычислимая нумерация π главная.

2) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \Leftrightarrow h(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\nu}^*(\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow \exists z[(y = h(z)) \wedge (z \in \pi(x))]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_1(x))$ для подходящей вф g_1 , поскольку вычислимая нумерация π главная. □

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

1) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \Leftrightarrow h^{-1}(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\nu}^*(\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow [h(y) \in \pi(x)]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_0(x))$ для подходящей вф g_0 , поскольку вычислимая нумерация π главная.

2) Определим нумерацию ν так: $\nu(x) \Leftrightarrow h(\pi(x))$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\langle x, y \rangle \in \Gamma_{\nu}^*(\Leftrightarrow y \in \nu(x)) \Leftrightarrow \exists z[(y = h(z)) \wedge (z \in \pi(x))]$, поэтому ν — вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S} \subseteq \text{CEP}_1$ и, следовательно, $\nu(x) = \pi(g_1(x))$ для подходящей вф g_1 , поскольку вычислимая нумерация π главная. □

Лемма С6.3.

Существует вычислимая функция f такая, что $\gamma(x) = \pi(f(x))$ для всех $x \in \omega$.

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Доказательство.

Нумерация γ вычислима, поскольку $\Gamma_\gamma^* = \{\langle x, y \rangle : y \in \gamma(x)\}$ вп (даже в; см. предложение С3.1($4 \Rightarrow 1$)). Следовательно, $\gamma(x) = \pi(f(x))$ для подходящей вф f , поскольку вычислимая нумерация π главная. \square

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Нумерация γ вычислима, поскольку $\Gamma_\gamma^* = \{\langle x, y \rangle : y \in \gamma(x)\}$ вп (даже в; см. предложение С3.1($4 \Rightarrow 1$)). Следовательно, $\gamma(x) = \pi(f(x))$ для подходящей вф f , поскольку вычислимая нумерация π главная. \square

Лемма С6.4.

Для любых вычислимо перечислимого множества M и частично вычислимой функции f найдётся инъективная вычислимая функция g такая, что

$$\pi(g(x)) = \begin{cases} \{fg(x)\}, & \text{если } x \in M; \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Неподвижная точка и впм

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Нумерация γ вычислима, поскольку $\Gamma_\gamma^* = \{\langle x, y \rangle : y \in \gamma(x)\}$ вп (даже в; см. предложение С3.1($4 \Rightarrow 1$)). Следовательно, $\gamma(x) = \pi(f(x))$ для подходящей вф f , поскольку вычислимая нумерация π главная. \square

Лемма С6.4.

Для любых вычислимо перечислимого множества M и частично вычислимой функции f найдётся инъективная вычислимая функция g такая, что

$$\pi(g(x)) = \begin{cases} \{fg(x)\}, & \text{если } x \in M; \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть вп предикат $P \subseteq \omega^3$ определён так: $P(z, x, y) \Leftrightarrow \Leftrightarrow [(x \in M) \wedge (z = f(y))]$. По теореме С6.11, имеем $P(z, x, g(x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow [z \in \pi(g(x))] \Leftrightarrow [(x \in M) \wedge (z = fg(x))]$ для подходящей вф g . \square

Теорема Райса-Шапиро

Лекция С6
Нумерации и
вычисли-
мость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.13.

Индексное множество I семейства \mathcal{A} вычислимо перечислимых множеств вычислимо перечислимо, если и только если существует вычислимо перечислимое множество W , для которого имеет место $\pi(x) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists y[(y \in W) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi(x))]$.

Теорема Райса-Шапиро

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.13.

Индексное множество I семейства \mathcal{A} вычислимо перечислимым множеств вычислимо перечислимо, если и только если существует вычислимо перечислимое множество W , для которого имеет место $\pi(x) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists y[(y \in W) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi(x))]$.

Доказательство.

(\Leftarrow) Для того, чтобы доказать, что I вп, достаточно доказать, что $\{\langle x, y \rangle : \gamma(y) \subseteq \pi(x)\}$ является вп (см. леммы С3.4, С3.7). В самом деле,
$$\gamma(y) \subseteq \pi(x) \Leftrightarrow \forall i[(i \in \gamma(y)) \rightarrow (i \in \pi(x))] \Leftrightarrow \forall i < y[(i \in \gamma(y)) \rightarrow (i \in \pi(x))].$$

(\Rightarrow) Пусть индексное множество I семейства \mathcal{A} вычислимо перечислимо.

Теорема Райса-Шапиро

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Лемма C6.13A.

Если B вычислимо перечислимо и $A \subseteq B$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$, то $B \in \mathcal{A}$.

Теорема Райса-Шапиро

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Лемма С6.13А.

Если B вычислимо перечислимо и $A \subseteq B$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$, то $B \in \mathcal{A}$.

Доказательство леммы С6.13А.

Определим нумерацию ν так:

$$\nu(x) \Leftarrow \begin{cases} A, & \text{если } x \notin I; \\ B, & \text{если } x \in I. \end{cases}$$

Так как $\Gamma_{\nu}^*(x, y) \Leftrightarrow [(y \in A) \vee ((x \in I) \wedge (y \in B))]$, предикат Γ_{ν}^* вп, поэтому ν — вычислимая нумерация. Следовательно, существует вф g такая, что $\nu(x) = \pi(g(x))$ для всех $x \in \omega$, поскольку π — главная нумерация.

По теореме С6.11 о неподвижной точке для впм, найдётся $n_0 \in \omega$ такое, что $\pi(g(n_0)) = \pi n_0$. Так как $n_0 \notin I \Rightarrow \pi(g(n_0)) \in \mathcal{A} \Rightarrow g(n_0) \in I \Rightarrow n_0 \in I$, заключаем, что $n_0 \in I$. Значит, и $g(n_0) \in I$. Но $n_0 \in I$ влечёт $\pi(g(n_0)) = B = \pi n_0$. Таким образом, $B \in \mathcal{A}$. □

Теорема Райса-Шапиро

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Лемма С6.13В.

Если $A \in \mathcal{A}$, то и некоторое конечное подмножество A также принадлежит \mathcal{A} .

Теорема Райса-Шапиро

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Лемма С6.13В.

Если $A \in \mathcal{A}$, то и некоторое конечное подмножество A также принадлежит \mathcal{A} .

Доказательство леммы С6.13В.

Пусть $\{I_t\}_{t \in \omega}$ и $\{A_t\}_{t \in \omega}$ — сильные аппроксимации множеств I и A соответственно. Определим нумерацию ν так:

$$\nu(x) \Leftarrow \begin{cases} A, & \text{если } x \notin I; \\ A_{t_x}, & \text{если } x \in I; \end{cases}$$

где t_x — наименьший шаг в перечислении I такой, что $x \in I_t$. В частности, A_{t_x} есть конечное множество элементов A , перечисленных в A к шагу t_x .

Далее, $\Gamma_\nu^*(x, y) \Leftrightarrow \exists t[(x \notin I_t) \wedge (y \in A_{t+1})]$ и предикат Γ_ν^* вп, поэтому ν — вычислимая нумерация. Следовательно, существует вф g такая, что $\nu(x) = \pi(g(x))$ для всех $x \in \omega$, поскольку π — главная нумерация.

По теореме С6.11 о неподвижной точке для впм, найдётся $a \in \omega$ такое, что $\pi(g(a)) = \pi a$. Так как

$$a \notin I \Rightarrow \pi(g(a)) \in \mathcal{A} \Rightarrow g(a) \in I \Rightarrow a \in I,$$

заключаем, что $a \in I$. Значит, и $g(a) \in I$. Но $a \in I$ влечёт $\pi(g(a)) = A_{t_a} = \pi a$. Таким образом, $A_t \in \mathcal{A}$ для подходящего $t \in \omega$. □

Теорема Райса-Шапиро

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство теоремы С6.13 (окончание).

Пусть вф h такова, что $\gamma(x) = \pi(h(x))$ для всех $x \in \omega$ (см. лемму С6.3); положим $D \Leftarrow h^{-1}(I)$. Множество D вп как прообраз впм относительно чвф h (см. лемму С3.9). Покажем, что семейство $\mathcal{B} \Leftarrow \{\pi_x : \exists y[(y \in D) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi_x)]\}$ совпадает с \mathcal{A} .

(\subseteq) Имеем $\pi_x \in \mathcal{B} \xRightarrow{(1)} \exists y[(y \in D) \wedge (\gamma(y) \subseteq \pi_x)] \xRightarrow{(2)} h(y_0) \in I \xRightarrow{(3)} \gamma(y_0) = \pi(h(y_0)) \in \mathcal{A}$ (здесь (1) следует из определения \mathcal{B} ; (2) y_0 — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $[(y_0 \in D) \wedge (\gamma(y_0) \subseteq \pi_x)]$; (3) следует из определения D). Далее, $\gamma(y_0) \subseteq \pi_x$, поэтому $\pi_x \in \mathcal{A}$, по лемме С6.13А. Значит, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

(\supseteq) Пусть теперь $\pi_x \in \mathcal{A}$; по лемме С6.13В некоторое конечное подмножество π_x , скажем $\gamma(n)$, принадлежит \mathcal{A} . Следовательно, $h(n) \in I$ и $n \in D$. Так как $\gamma(n) \subseteq \pi_x$, имеем $\pi_x \in \mathcal{B}$. Таким образом, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. □

Снова полные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.14.

Множества K , K_0 и K_1 являются 1-полными.

Снова полные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.14.

Множества K , K_0 и K_1 являются 1-полными.

Доказательство.

Каждое из этих множеств вп. Более того, множество K_0 является 1-полным (см. пример С5.2). Пусть W — произвольное вп множество. Определим нумерацию ν так:

$$\nu(x) \Leftarrow \begin{cases} \omega, & \text{если } x \in W; \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $\Gamma_{\nu}^*(x, y) \Leftrightarrow x \in W$, нумерация ν вычислима, поэтому существует инъективная вф f такая, что $\nu(x) = \pi(f(x))$ для всех $x \in \omega$ (последнее вытекает из того, что π — главная вычислимая нумерация).

Теперь, если $x \in W$, то $\pi(f(x)) = \omega$ и $f(x) \in K \cap K_1$; если же $x \in \overline{W}$, то $\pi(f(x)) = \emptyset$ и $f(x) \notin K \cup K_1$. Таким образом, $W \leq_1 K$ и $W \leq_1 K_1$ посредством функции f . □

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.7.

Множество P называется **продуктивным**, если существует такая частично вычислимая функция $\psi(x)$, называемая **продуктивной функцией** для P , что

$$\forall x[(\pi_x \subseteq P) \Rightarrow (\psi(x) \downarrow \wedge (\psi(x) \in P - \pi_x))].$$

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.7.

Множество P называется **продуктивным**, если существует такая частично вычислимая функция $\psi(x)$, называемая **продуктивной функцией** для P , что

$$\forall x[(\pi_x \subseteq P) \Rightarrow (\psi(x) \downarrow \wedge (\psi(x) \in P - \pi_x))].$$

Определение С6.8.

Вычислимо перечислимое множество C называется **творческим**, если \overline{C} продуктивно.

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Определение С6.7.

Множество P называется **продуктивным**, если существует такая частично вычислимая функция $\psi(x)$, называемая **продуктивной функцией** для P , что

$$\forall x[(\pi_x \subseteq P) \Rightarrow (\psi(x) \downarrow \wedge (\psi(x) \in P - \pi_x))].$$

Определение С6.8.

Вычислимо перечислимое множество C называется **творческим**, если \overline{C} продуктивно.

Пример С6.4.

Множество K творческое, поскольку \overline{K} — продуктивное множество с тождественной продуктивной функцией $\psi(x) = x$:
 $x \in \overline{K} \Rightarrow x \notin \pi_x \Rightarrow x \in \overline{K} \wedge x \notin \pi_x$.

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.15.

Для любого продуктивного множества P существует инъективная вычислимая функция p , продуктивная для P .

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.15.

Для любого продуктивного множества P существует инъективная вычислимая функция p , продуктивная для P .

Доказательство.

Пусть множество P продуктивно с продуктивной функцией ψ . Сначала определим вф q , продуктивную для P . По предложению С6.3, существует вф g такая, что

$$\pi(g(x)) = \begin{cases} \pi(x), & \text{если } \psi(x) \downarrow; \\ \emptyset, & \text{если } \psi(x) \uparrow. \end{cases}$$

В качестве функции $q(x)$ возьмём чвф, униформизирующую вп предикат $\Gamma_\psi \cup \Gamma_{\psi \circ g}$ (см. теорему С3.3). Далее, если $\psi(x) \downarrow$, то и $q(x) \downarrow$; если же $\psi(x) \uparrow$, то $\pi(g(x)) = \emptyset \subseteq P$ и, следовательно, $\psi(g(x)) \downarrow \Rightarrow q(x) \downarrow$. Тем самым, $q(x)$ всюду определена. Имеем $\pi_x \subseteq P \Rightarrow \psi(x) \downarrow \wedge [\pi(x) = \pi(g(x))] \Rightarrow \{\psi(x), \psi(g(x))\} \subseteq P - \pi(x) \Rightarrow q(x) \in P - \pi(x)$.

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (продолжение).

Теперь преобразуем продуктивную функцию q в инъективную вф p , продуктивную для P . По предложению С6.8(i) и теореме С6.9, возьмём инъективную вф h так, чтобы $\pi(h(x)) = \pi_x \cup \{q(x)\}$. Заметим, что справедливо

$$\pi_x \subseteq P \implies \pi(h(x)) \subseteq P \wedge (\pi(x) \subsetneq \pi(h(x))). \quad (2)$$

Определим вспомогательные функции $F(x, y)$ и $G(x, y, z)$ так:

$$\begin{cases} F(x, 0) \Leftarrow x, \\ F(x, y + 1) \Leftarrow hF(x, y); \\ G(x, y) \Leftarrow \mu t [\exists u < t (F(x, u) = F(x, t)) \vee (F(x, t) > y)]. \end{cases}$$

Перейдём теперь к заданию функции $p(x)$ так:

$$\begin{cases} p(0) \Leftarrow q(0), \\ p(x + 1) \Leftarrow \begin{cases} qF(s(x), G(s(x), p(x))), \\ \text{если } qF(s(x), G(s(x), p(x))) > p(x); \\ s(p(x)), \text{ иначе.} \end{cases} \end{cases}$$

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Докажем, что строго возрастающая вф $p(x)$ продуктивна для P . В самом деле, $\pi_0 \subseteq P \Rightarrow p(0) = q(0) \in P - \pi_0$.

Далее, пусть $\pi_{x+1} \subseteq P$; тогда не может выполняться

$qF(s(x), G(s(x), p(x))) \leq p(x)$, поскольку в противном случае $F(s(x), G(s(x), p(x))) = F(s(x), u)$ для некоторого $u < G(s(x), p(x))$; противоречие с (2). Следовательно, $qF(s(x), G(s(x), p(x))) > p(x)$ и $p(x+1) = qF(x+1, G(x+1, p(x))) \in P - \pi(x+1)$, по (2). □

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство (окончание).

Докажем, что строго возрастающая вф $p(x)$ продуктивна для P . В самом деле, $\pi_0 \subseteq P \Rightarrow p(0) = q(0) \in P - \pi_0$.

Далее, пусть $\pi_{x+1} \subseteq P$; тогда не может выполняться

$qF(s(x), G(s(x), p(x))) \leq p(x)$, поскольку в противном случае $F(s(x), G(s(x), p(x))) = F(s(x), u)$ для некоторого $u < G(s(x), p(x))$; противоречие с (2). Следовательно, $qF(s(x), G(s(x), p(x))) > p(x)$ и $p(x+1) = qF(x+1, G(x+1, p(x))) \in P - \pi(x+1)$, по (2). \square

Теорема С6.16.

Пусть P — продуктивное множество. Тогда

- 1 P не вычислимо перечислимо;
- 2 P содержит в качестве подмножества бесконечное вычислимо перечислимое множество;
- 3 если $P \leq_m A$, то A также продуктивно.

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P .

1) Допустим, что P вп; тогда $P = \pi(n_0)$ и, следовательно,
 $\pi(n_0) \subseteq P \Rightarrow p(n_0) \in P - \pi(n_0) = \emptyset$, противоречие.

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P .

1) Допустим, что P вп; тогда $P = \pi(n_0)$ и, следовательно,
 $\pi(n_0) \subseteq P \Rightarrow p(n_0) \in P - \pi(n_0) = \emptyset$, противоречие.

2) Пусть число n_1 и вф h таковы, что $\pi(n_1) = \emptyset$ и $\pi(h(x)) = \pi(x) \cup \{p(x)\}$ (по предложению С6.8(г) и теореме С6.9). Справедлива импликация
 $\pi(x) \subseteq P \Rightarrow \pi(h(x)) \subseteq P.$ (**)

Определим $W = p(p \circ F)$, где F — сплинтер функции h в точке n_1 :

$$\begin{cases} F(0) = n_1, \\ F(t+1) = h(F(t)). \end{cases}$$

Индукцией по t доказывается, что $p(F(t)) \in P$:

$$\pi(n_1) = \emptyset \subseteq P \Rightarrow p(F(0)) = p(n_1) \in P - \pi(n_1) = P,$$

$$\pi(n_1) \subseteq P \xrightarrow{(**)} \pi(F(t)) \subseteq P \Rightarrow p(F(t)) \in P - \pi(F(t)) \subseteq P.$$

Продуктивные множества

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Доказательство.

Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P .

1) Допустим, что P вп; тогда $P = \pi(n_0)$ и, следовательно,
 $\pi(n_0) \subseteq P \Rightarrow p(n_0) \in P - \pi(n_0) = \emptyset$, противоречие.

2) Пусть число n_1 и вф h таковы, что $\pi(n_1) = \emptyset$ и $\pi(h(x)) = \pi(x) \cup \{p(x)\}$ (по предложению С6.8(г) и теореме С6.9). Справедлива импликация
 $\pi(x) \subseteq P \Rightarrow \pi(h(x)) \subseteq P.$ (**)

Определим $W = \rho(p \circ F)$, где F — сплинтер функции h в точке n_1 :

$$\begin{cases} F(0) = n_1, \\ F(t+1) = h(F(t)). \end{cases}$$

Индукцией по t доказывается, что $p(F(t)) \in P$:

$$\pi(n_1) = \emptyset \subseteq P \Rightarrow p(F(0)) = p(n_1) \in P - \pi(n_1) = P,$$

$$\pi(n_1) \subseteq P \xrightarrow{(**)} \pi(F(t)) \subseteq P \Rightarrow p(F(t)) \in P - \pi(F(t)) \subseteq P.$$

3) Пусть $P \leq_m A$ посредством вф f , а вф h такова, что $\pi(h(x)) = f^{-1}(\pi(x))$. Тогда fph — продуктивная функция для A : $\pi_x \subseteq A \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \pi(h(x)) = f^{-1}(\pi(x)) \subseteq f^{-1}(A) = P &\Rightarrow ph(x) \in P - \pi(h(x)) \Rightarrow fph(x) \in f(P) \subseteq A \wedge fph(x) \notin \\ f(\pi(h(x))) = f(f^{-1}(\pi_x)) = \pi_x \cap \rho f &\Rightarrow fph(x) \in A - \pi(x). \end{aligned}$$



1-полнота

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Теорема С6.17.

- 1 Если множество P продуктивно, то $\overline{K} \leq_1 P$.
- 2 Если множество C творческое, то C 1-полно и, в частности, $C \approx K$.

1-полнота

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномерность

Продуктивные
множества

Теорема С6.17.

- 1 Если множество P продуктивно, то $\overline{K} \leqslant_1 P$.
- 2 Если множество C творческое, то C 1-полно и, в частности, $C \approx K$.

Доказательство.

1) Пусть p — инъективная вф, продуктивная для P . По лемме С6.4, существует инъективная вф g такая, что

$$\pi(g(y)) = \begin{cases} \{p(g(y))\}, & \text{если } y \in K; \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} y \in K &\Rightarrow \pi(g(y)) = \{p(g(y))\} \xrightarrow{(1)} \pi(g(y)) \not\subseteq P \Rightarrow p(g(y)) \in \overline{P}, \\ y \in \overline{K} &\Rightarrow \pi(g(y)) = \emptyset \Rightarrow \pi(g(y)) \subseteq P \Rightarrow p(g(y)) \in P. \end{aligned}$$

(1) Действительно, если бы $\pi(g(y)) \subseteq P$, то $p(g(y)) \in P - \pi(g(y)) = P - \{p(g(y))\}$, противоречие.

2) Следует из первого утверждения и теоремы С5.3 Майхилла. □

1-полнота

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Следствие С6.5.

Для множества $P \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1 P продуктивно;
- 2 $\overline{K} \leq_1 P$;
- 3 $\overline{K} \leq_m P$.

1-полнота

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Следствие С6.5.

Для множества $P \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1 P продуктивно;
- 2 $\overline{K} \leq_1 P$;
- 3 $\overline{K} \leq_m P$.

Следствие С6.6.

Для множества $C \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1 C творческое;
- 2 C 1-полно;
- 3 C m -полно.

1-полнота

Лекция С6
Нумерации и
вычислимость, III

Вадим
Пузаренко

Вычислимые
семейства

Главные
нумерации

Равномер-
ность

Продуктив-
ные
множества

Следствие С6.5.

Для множества $P \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1 P продуктивно;
- 2 $\overline{K} \leq_1 P$;
- 3 $\overline{K} \leq_m P$.

Следствие С6.6.

Для множества $C \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1 C творческое;
- 2 C 1-полно;
- 3 C m -полно.

Упражнение С6.5.

Пусть $A \neq \omega$ — впм. Докажите, что A творческое, если и только если \forall вп $B[A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \approx A \cup B]$.

Спасибо за внимание.