Лекция А2
Автоматы (доп.)

Вадим Пузаренко

16 ноября 2022 г.

Содержание

1. ДКА: минимизация.
2. Регулярные выражения.
3. ДКА: алфавит $\subseteq \{0;1\}$.
4. Вероятностные автоматы.

Эквивалентность слов I

Определение А2.1.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** L (и записывать как $\alpha \approx_L \beta$), если справедливо соотношение $\alpha\hat{\ }\gamma \in L \Leftrightarrow \beta\hat{\ }\gamma \in L$ для всех $\gamma \in \Sigma^*$.

Эквивалентность слов I

Определение A2.1.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** L (и записывать как $\alpha \approx_L \beta$), если справедливо соотношение $\alpha\hat{\ }\gamma \in L \Leftrightarrow \beta\hat{\ }\gamma \in L$ для всех $\gamma \in \Sigma^*$.

Замечание A2.1.

Заметим, что отношение $\approx_L$ на Σ^* действительно будет отношением эквивалентности.

Эквивалентность слов I

Определение A2.1.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** L (и записывать как $\alpha \approx_L \beta$), если справедливо соотношение $\alpha\hat{\ }\gamma \in L \Leftrightarrow \beta\hat{\ }\gamma \in L$ для всех $\gamma \in \Sigma^*$.

Замечание A2.1.

Заметим, что отношение $\approx_L$ на Σ^* действительно будет отношением эквивалентности.

Пример A2.1.

Пусть $\Sigma = \{a, b\}$ и $L = (\{ab\} \cup \{ba\})^*$; тогда Σ^* имеет четыре класса относительно $\approx_L$:

$$\begin{array}{ll} (1)\ [\varepsilon]_{\approx_L} = L; & (3)\ [b]_{\approx_L} = Lb; \\ (2)\ [a]_{\approx_L} = La; & (4)\ [aa]_{\approx_L} = L(\{aa\} \cup \{bb\})\Sigma^*. \end{array}$$

Эквивалентность слов II

Определение А2.2.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q;\Sigma;\delta,q_0,F)$ — ДКА и пусть также $\alpha,\beta\in\Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** $\mathfrak{A}$ (и записывать как $\alpha\sim_{\mathfrak{A}}\beta$), если справедливо соотношение $\delta^*(q_0,\alpha)=\delta^*(q_0,\beta)$.

Эквивалентность слов II

Определение А2.2.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** $\mathfrak{A}$ (и записывать как $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$), если справедливо соотношение $\delta^*(q_0, \alpha) = \delta^*(q_0, \beta)$.

Замечание А2.2.

Как и в предыдущем случае, отношение $\sim_{\mathfrak{A}}$ будет отношением эквивалентности.

Эквивалентность слов II

Определение A2.2.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть также $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Будем говорить, что α и β **эквивалентны относительно** $\mathfrak{A}$ (и записывать как $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$), если справедливо соотношение $\delta^*(q_0, \alpha) = \delta^*(q_0, \beta)$.

Замечание A2.2.

Как и в предыдущем случае, отношение $\sim_{\mathfrak{A}}$ будет отношением эквивалентности.

Пример A2.2.

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{L(\mathfrak{A})}$

Предложение A2.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Если $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$, то $\alpha \approx_{L(\mathfrak{A})} \beta$.

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$

Предложение A2.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Если $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$, то $\alpha \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})} \beta$.

Доказательство.

Пусть $\gamma \in \Sigma^*$; тогда выполняется следующее: $\delta^*(q_0, \alpha\hat{}\gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \alpha), \gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \beta), \gamma) = \delta^*(q_0, \beta\hat{}\gamma)$; тем самым, $\alpha\hat{}\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha\hat{}\gamma) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \beta\hat{}\gamma) \in F \Leftrightarrow \beta\hat{}\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$

Предложение A2.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Если $\alpha \sim_{\mathfrak{A}} \beta$, то $\alpha \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})} \beta$.

Доказательство.

Пусть $\gamma \in \Sigma^*$; тогда выполняется следующее: $\delta^*(q_0, \alpha\hat{\ }\gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \alpha), \gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \beta), \gamma) = \delta^*(q_0, \beta\hat{\ }\gamma)$; тем самым, $\alpha\hat{\ }\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha\hat{\ }\gamma) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \beta\hat{\ }\gamma) \in F \Leftrightarrow \beta\hat{\ }\gamma \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. $\square$

Следствие A2.1.

Пусть $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ — ДКА и пусть $n_\sim$, $n_\approx$ — количество классов эквивалентности относительно $\sim_{\mathfrak{A}}$, $\approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$ соответственно. Тогда справедливо неравенство $n_\approx \leqslant n_\sim \leqslant n(Q)$, где $n(Q)$ — число состояний автомата $\mathfrak{A}$.

$\sim_{\mathfrak{A}} \subseteq \approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$

Доказательство.

Из предложения A2.1 вытекает справедливость неравенства $n_{\approx} \leqslant n_{\sim}$ (в самом деле, каждый класс эквивалентности относительно $\approx_{\mathrm{L}(\mathfrak{A})}$ в общем случае является объединением нескольких классов эквивалентности относительно $\sim_{\mathfrak{A}}$). Далее, непустые множества семейства $\{\{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, \alpha) = q\} \mid q \in Q\}$ служат разбиением множества Σ^* относительно $\sim_{\mathfrak{A}}$, поэтому имеет место $n_{\sim} \leqslant n(Q)$. $\square$

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Теорема А2.1.

Пусть L — язык, распознаваемый некоторым ДКА. Тогда существует ДКА $\mathfrak{A}$, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$, числом состояний которого является количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Теорема A2.1.

Пусть L — язык, распознаваемый некоторым ДКА. Тогда существует ДКА $\mathfrak{A}$, $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$, числом состояний которого является количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$.

Доказательство.

Определим ДКА $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $Q = \{[\alpha]_{\approx_L} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$;
- $q_0 = [\varepsilon]_{\approx_L}$;
- $F = \{[\alpha]_{\approx_L} \mid \alpha \in L\}$;
- $\delta([\alpha]_{\approx_L}, a) = [\alpha\hat{\ }a]_{\approx_L}$.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (продолжение).

Множество Q непусто, а по следствию А2.1, оно конечно. Соответствие δ действительно является функцией. Для доказательства корректности необходимо проверить соотношение $\alpha \approx_L \alpha' \Rightarrow \alpha\hat{\ }a \approx_L \alpha'\hat{\ }a$ для всех $\alpha, \alpha' \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$. В самом деле, пусть $\alpha \approx_L \alpha'$; тогда
$(\alpha\hat{\ }a)\hat{\ }\gamma = \alpha\hat{\ }(a\hat{\ }\gamma) \in L \Leftrightarrow (\alpha'\hat{\ }a)\hat{\ }\gamma = \alpha'\hat{\ }(a\hat{\ }\gamma) \in L$ и, следовательно, $\alpha\hat{\ }a \approx_L \alpha'\hat{\ }a$.
Докажем индукцией по длине слова β, что для всех $\alpha \in \Sigma^*$ имеет место $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta) = [\alpha\hat{\ }\beta]_{\approx_L}$. Действительно, имеем $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \varepsilon) = [\alpha]_{\approx_L} = [\alpha\hat{\ }\varepsilon]_{\approx_L}$. Далее, предположим, что $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta) = [\alpha\hat{\ }\beta]_{\approx_L}$; тогда выполняется соотношение $\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta\hat{\ }b) = \delta(\delta^*([\alpha]_{\approx_L}, \beta), b) = \delta([\alpha\hat{\ }\beta]_{\approx_L}, b) = [(\alpha\hat{\ }\beta)\hat{\ }b]_{\approx_L} = [\alpha\hat{\ }(\beta\hat{\ }b)]_{\approx_L}$ для всех $b \in \Sigma$.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (окончание).

$L \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L}$; таким образом, $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) \in F$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq L$. Пусть $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L} \in F$ и, следовательно, $\alpha \approx_L \alpha'$ для некоторого $\alpha' \in L$. Так как $\alpha'\hat{}\varepsilon = \alpha' \in L$, имеем $\alpha = \alpha\hat{}\varepsilon \in L$. $\square$

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (окончание).

$L \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L}$; таким образом, $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) \in F$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.

$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq L$. Пусть $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L} \in F$ и, следовательно, $\alpha \approx_L \alpha'$ для некоторого $\alpha' \in L$. Так как $\alpha'\hat{}\varepsilon = \alpha' \in L$, имеем $\alpha = \alpha\hat{}\varepsilon \in L$. $\square$

Следствие А2.2.

Язык L распознаваем некоторым ДКА, если и только если количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$ конечно.

ДКА: теорема Майхилла-Нероуда

Доказательство (окончание).

$L \subseteq \mathrm{L}(\mathfrak{A})$. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L}$; таким образом, $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) \in F$ и $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$.
$\mathrm{L}(\mathfrak{A}) \subseteq L$. Пусть $\alpha \in \mathrm{L}(\mathfrak{A})$; тогда $\delta^*([\varepsilon]_{\approx_L}, \alpha) = [\varepsilon\hat{}\alpha]_{\approx_L} = [\alpha]_{\approx_L} \in F$ и, следовательно, $\alpha \approx_L \alpha'$ для некоторого $\alpha' \in L$. Так как $\alpha'\hat{}\varepsilon = \alpha' \in L$, имеем $\alpha = \alpha\hat{}\varepsilon \in L$. $\square$

Следствие А2.2.

Язык L распознаваем некоторым ДКА, если и только если количество классов эквивалентности относительно $\approx_L$ конечно.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Вытекает из следствия А2.1. $(\Leftarrow)$ Следует из доказательства теоремы Майхилла-Нероуда. $\square$

Основное понятие

Определение А2.3.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит. Определим **регулярное выражение** как слово алфавита $\Sigma \cup \{(,), \varnothing, +, {}^*, \cdot\}$, которое задаётся индукцией по построению следующим образом:

1. $\varnothing$ и $a \in \Sigma$ является регулярным выражением, для всех $a \in \Sigma$;
2. если α и β — регулярные выражения, то и $(\alpha \cdot \beta)$ также является регулярным выражением;
3. если α и β — регулярные выражения, то и $(\alpha + \beta)$ также является регулярным выражением;
4. если α — регулярное выражение, то и α^* также является регулярным выражением;
5. других регулярных выражений, кроме описанных в (1)–(4), нет.

Регулярное выражение и язык

Определение А2.4.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит. Определим **язык** $\mathcal{L}(\alpha)$, **представимый регулярным выражением** α, как слово алфавита $\Sigma \cup \{(,),\varnothing,+,^*,\cdot\}$, которое задаётся индукцией по построению следующим образом:

1. $\mathcal{L}(\varnothing) = \varnothing$ и $\mathcal{L}(a) = \{a\}$, для всех $a \in \Sigma$;
2. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha \cdot \beta)) = \mathcal{L}(\alpha)\mathcal{L}(\beta)$;
3. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha + \beta)) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{L}(\beta)$;
4. если α — регулярное выражение, то $\mathcal{L}(\alpha^*) = \mathcal{L}(\alpha)^*$.

Регулярное выражение и язык

Определение А2.4.

Пусть $\Sigma \neq \varnothing$ — конечный алфавит. Определим **язык** $\mathcal{L}(\alpha)$, **представимый регулярным выражением** α, как слово алфавита $\Sigma \cup \{(,),\varnothing,+,{}^*,\cdot\}$, которое задаётся индукцией по построению следующим образом:

1. $\mathcal{L}(\varnothing) = \varnothing$ и $\mathcal{L}(a) = \{a\}$, для всех $a \in \Sigma$;
2. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha \cdot \beta)) = \mathcal{L}(\alpha)\mathcal{L}(\beta)$;
3. если α и β — регулярные выражения, то $\mathcal{L}((\alpha + \beta)) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{L}(\beta)$;
4. если α — регулярное выражение, то $\mathcal{L}(\alpha^*) = \mathcal{L}(\alpha)^*$.

Определение А2.5.

Язык, задаваемый некоторым регулярным выражением, называется **регулярным**.

Регулярные выражения и языки: примеры

Примеры A2.3.

Регулярные языки $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А2.3.

Заметим, что язык $\{\varepsilon\}$ регулярен, поскольку он представляется регулярным выражением $\varnothing^*$.

Регулярные языки $\Rightarrow$ ДКА

Замечание A2.3.

Заметим, что язык $\{\varepsilon\}$ регулярен, поскольку он представляется регулярным выражением $\varnothing^*$.

Следствие A2.3.

Любой регулярный язык распознаваем некоторым ДКА.

Регулярные языки $\Rightarrow$ ДКА

Замечание А2.3.

Заметим, что язык $\{\varepsilon\}$ регулярен, поскольку он представляется регулярным выражением $\varnothing^*$.

Следствие А2.3.

Любой регулярный язык распознаваем некоторым ДКА.

Доказательство.

По предложениям А1.1(1) и А1.2(2), пустой язык и $\{a\}$ распознаваемы некоторыми ДКА, для всех $a \in \Sigma$. Кроме того, языки, распознаваемые некоторыми ДКА, замкнуты относительно операций объединения, конкатенации и звёздочки Клини, по теоремам А1.12, А1.10, А1.7 и А1.9. $\square$

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Теорема А2.2.

Любой язык, распознаваемый ДКА, является регулярным.

ДКА ⇒ Регулярные языки

Теорема A2.2.

Любой язык, распознаваемый ДКА, является регулярным.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{A} = (\{0,1,2,\ldots,n\};\Sigma;\delta,0,F)$ — ДКА; положим $R(i,j,k) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(i,\alpha) = j,\ \delta^*(i,\beta) < k$ для всех $\varepsilon \neq \beta \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha\}$ $(i,j,k \leqslant n+1)$; докажем индукцией по $k \leqslant n+1$, что $R(i,j,k)$ регулярен для всех $i,j,k \leqslant n+1$.

База. Докажем, что $R(i,j,0)$ регулярен для всех $i,j \leqslant n$.

1) Если $i \neq j$ и $a_1,a_2,\ldots,a_l$ — все символы из Σ таковы, что $\delta(i,a_p) = j$, $1 \leqslant p \leqslant l$, то $R(i,j,0) = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_l\}$.

2) Если $i \neq j$ и не существует символа $a \in \Sigma$ из п. 1, то $R(i,j,0) = \varnothing$.

3) Если $i = j$ и $a_1,a_2,\ldots,a_l$ — все символы из Σ таковы, что $\delta(i,a_p) = j$, $1 \leqslant p \leqslant l$, то $R(i,j,0) = \{\varepsilon\} \cup \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_l\}$.

4) Если $i = j$ и не существует символа $a \in \Sigma$ из п. 3, то $R(i,j,0) = \{\varepsilon\}$.

ДКА ⇒ Регулярные языки

Доказательство (продолжение).

ИШ. Предположим, что язык $R(i,j,m)$ регулярный ($i,j \leqslant n$, $m < k+1$). Докажем, что

$$R(i,j,k+1) = R(i,j,k) \cup R(i,k,k)R(k,k,k)^* R(k,j,k). \qquad (1)$$

(Неформально, для того, чтобы попасть из состояния i в состояние j, используя состояния $< k+1$, либо попадаем без использования состояния k (и тогда такие слова учтены в $R(i,j,k)$), либо осуществляется переход с использованием по меньшей мере один раз состояния k (и тогда прочитывается сначала слово из $R(i,k,k)$ (первый раз встретили состояние k), затем слово из $R(k,k,k)^*$ (до тех пор, пока последний раз не встретили состояние k), и, наконец, слово из $R(k,j,k)$ (последний раз встречаем состояние k)).)

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Доказательство (продолжение).

$\supseteq$. Пусть $\alpha \in R(i,j,k)$; тогда $\alpha \in R(i,j,k+1)$, поскольку $\delta^*(i,\beta) < k < k+1$ для всех $\varepsilon \neq \beta \sqsubset_{\text{beg}} \alpha$. Пусть теперь $\alpha \in R(i,k,k)R(k,k,k)^*R(k,j,k)$; тогда найдутся слова $\alpha_1 \in R(i,k,k)$, $\alpha_2 \in R(k,k,k)^*$ и $\alpha_3 \in R(k,j,k)$ такие, что $\alpha = \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\alpha_3$. Далее, имеем $\delta^*(i,\alpha) = \delta^*(\delta^*(i,\alpha_1),\alpha_2\hat{\ }\alpha_3) = \delta^*(k,\alpha_2\hat{\ }\alpha_3) = \delta^*(\delta^*(k,\alpha_2),\alpha_3) = \delta^*(k,\alpha_3) = j$. Остаётся доказать, что $\delta^*(i,\beta) < k+1$ для всех $\varepsilon \neq \beta \sqsubset_{\text{beg}} \alpha$. Пусть $\alpha_2 = \gamma_1\hat{\ }\gamma_2\hat{\ }\ldots\hat{\ }\gamma_n$, $\gamma_l \in R(k,k,k)$ $(1 \leqslant l \leqslant n,\ n \in \omega)$. Разберем несколько случаев.

$\beta \sqsubset_{\text{beg}} \alpha_1$. Тогда $\delta^*(i,\beta) < k < k+1$, поскольку $\alpha_1 \in R(i,k,k)$.

$\beta = \alpha_1$. Тогда $\delta^*(i,\beta) = \delta^*(i,\alpha_1) = k < k+1$.

$\beta = \alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\beta_3$, где $\varepsilon \neq \beta_3 \sqsubset_{\text{beg}} \alpha_3$. Тогда $\delta^*(i,\alpha_1\hat{\ }\alpha_2\hat{\ }\beta_3) = \delta^*(\delta^*(i,\alpha_1),\alpha_2\hat{\ }\beta_3) = \delta^*(k,\alpha_2\hat{\ }\beta_3) = \delta^*(\delta^*(k,\alpha_2),\beta_3) = \delta^*(k,\beta_3) < k < k+1$.

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Доказательство (продолжение).

$\beta = \alpha_1\hat{}\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2$, где $\beta_2 \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \gamma_l$ $(1 \leqslant l \leqslant n)$. Тогда $\delta^*(i,\beta) = \delta^*(i,\alpha_1\hat{}\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) =$ $\delta^*(\delta^*(i,\alpha_1),\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(k,\gamma_1\hat{}\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) =$ $\delta^*(\delta^*(k,\gamma_1),\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(k,\gamma_2\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) =$ $\delta^*(\delta^*(k,\gamma_2),\gamma_3\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(k,\gamma_3\hat{}\ldots\hat{}\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \ldots =$ $\delta^*(k,\gamma_{l-1}\hat{}\beta_2) = \delta^*(\delta^*(k,\gamma_{l-1}),\beta_2) = \delta^*(k,\beta_2)$. Далее, если $\beta_2 \in \{\varepsilon,\gamma_l\}$, то $\delta^*(k,\beta_2) = k < k+1$; если же $\varepsilon \neq \beta_2 \sqsubset_{\mathrm{beg}} \gamma_l$, то $\delta^*(k,\beta_2) < k < k+1$.

$\subseteq$. Обозначим правую часть равенства (1) через $S_{i,j}$; докажем, что $R(i,j,k+1) \subseteq S_{i,j}$ для всех $i,j \leqslant n$. Пусть $\alpha \in R(i,j,k+1)$; доказывать будем индукцией по количеству $t(\alpha,k)$ слов $\varepsilon \neq \beta \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$, для которых имеет место $\delta^*(i,\beta) = k$. Если $t(\alpha,k) = 0$, то $\alpha \in R(i,j,k) \subseteq S_{i,j}$. Предположим, что для $t(\alpha,k) = t$ утверждение выполняется; докажем, что оно выполняется и для $t+1$.

ДКА $\Rightarrow$ Регулярные языки

Доказательство (окончание).

Возьмём наименьшее по длине $\varepsilon \neq \alpha_0 \sqsubset_{\mathrm{beg}} \alpha$ такое, что $\delta^*(i, \alpha_0) = k$ (пусть $\alpha = \alpha_0 \hat{\ } \alpha_1$). Тогда $j = \delta^*(i, \alpha) = \delta^*(\delta^*(i, \alpha_0), \alpha_1) = \delta^*(k, \alpha_1)$ и, следовательно, $\alpha_1 \in R(k, j, k+1)$ и $t(\alpha_1, k) = t$. По индукционному предположению, $\alpha = \alpha_0 \hat{\ } \alpha_1 \in R(i, k, k) S_{k,j} = R(i, k, k)(R(k, j, k) \cup R(k, k, k) R(k, k, k)^* R(k, j, k)) \subseteq R(i, k, k) R(k, k, k)^* R(k, j, k) \subseteq S_{i,j}$. $\square$

Теорема о накачке

Следующее утверждение является необходимым условием для регулярных языков и позволяет для достаточно богатого класса языков доказывать их нерегулярность.

Теорема о накачке

Следующее утверждение является необходимым условием для регулярных языков и позволяет для достаточно богатого класса языков доказывать их нерегулярность.

Теорема А2.3.

Пусть L — регулярный язык. Тогда существует натуральное число $n_0 \geqslant 1$, удовлетворяющее следующему условию: для любого слова $\lambda \in L$, $\mathrm{lh}(\lambda) \geqslant n_0$, существуют α, β, γ такие, что $\beta \neq \varepsilon$, $\mathrm{lh}(\alpha\hat{\ }\beta) \leqslant n_0$ и $\lambda = \alpha\hat{\ }\beta\hat{\ }\gamma$, для которых выполняется соотношение $\alpha\hat{\ }\beta^n\hat{\ }\gamma \in L$ для всех $n \in \omega$.

Теорема о накачке

Следующее утверждение является необходимым условием для регулярных языков и позволяет для достаточно богатого класса языков доказывать их нерегулярность.

Теорема A2.3.

Пусть L — регулярный язык. Тогда существует натуральное число $n_0 \geqslant 1$, удовлетворяющее следующему условию: для любого слова $\lambda \in L$, $\mathrm{lh}(\lambda) \geqslant n_0$, существуют α, β, γ такие, что $\beta \neq \varepsilon$, $\mathrm{lh}(\alpha\hat{\ }\beta) \leqslant n_0$ и $\lambda = \alpha\hat{\ }\beta\hat{\ }\gamma$, для которых выполняется соотношение $\alpha\hat{\ }\beta^n\hat{\ }\gamma \in L$ для всех $n \in \omega$.

Доказательство.

Так как L — регулярный язык, существует Д.К.А. $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ такой, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$. Положим $n_0 = n(Q)$; возьмём $\lambda \in L$ такое, что $\mathrm{lh}(\lambda) \geqslant n_0$. Пусть $\varepsilon = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n_0}$ — начальные подслова слова λ, $(\mathrm{lh}(\lambda_i) = i$, $0 \leqslant i \leqslant n_0)$.

Доказательство (окончание).

По принципу кроликов, найдётся состояние $q \in Q$, для которого имеет место $q = \delta^*(q_0, \lambda_i) = \delta^*(q_0, \lambda_j)$. Будем считать, что $i < j$ и, к тому же, $q \neq \delta^*(q_0, \lambda_p)$ для всех $i < p < j$. Положим $\alpha = \lambda_i$, а β и γ выберем так, чтобы $\lambda_i\hat{\ }\beta = \lambda_j$, $\lambda_j\hat{\ }\gamma = \lambda$. Тогда $\mathrm{lh}(\alpha\hat{\ }\beta) = \mathrm{lh}(\lambda_j) = j \leqslant n_0$. По условию, $\delta^*(q_0, \lambda) \in F$; далее, $\delta^*(q_0, \alpha\hat{\ }\beta^n\hat{\ }\gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \alpha), \beta^n\hat{\ }\gamma) = \delta^*(q, \beta^n\hat{\ }\gamma) = \delta^*(\delta^*(q, \beta), \beta^{n-1}\hat{\ }\gamma) = \delta^*(q, \beta^{n-1}\hat{\ }\gamma) = \ldots = \delta^*(q, \gamma) \in F$ $(n \in \omega)$.
□

Доказательство (окончание).

По принципу кроликов, найдётся состояние $q \in Q$, для которого имеет место $q = \delta^*(q_0, \lambda_i) = \delta^*(q_0, \lambda_j)$. Будем считать, что $i < j$ и, к тому же, $q \neq \delta^*(q_0, \lambda_p)$ для всех $i < p < j$. Положим $\alpha = \lambda_i$, а β и γ выберем так, чтобы $\lambda_i\hat{}\beta = \lambda_j$, $\lambda_j\hat{}\gamma = \lambda$. Тогда $\mathrm{lh}(\alpha\hat{}\beta) = \mathrm{lh}(\lambda_j) = j \leqslant n_0$. По условию, $\delta^*(q_0, \lambda) \in F$; далее, $\delta^*(q_0, \alpha\hat{}\beta^n\hat{}\gamma) = \delta^*(\delta^*(q_0, \alpha), \beta^n\hat{}\gamma) = \delta^*(q, \beta^n\hat{}\gamma) = \delta^*(\delta^*(q, \beta), \beta^{n-1}\hat{}\gamma) = \delta^*(q, \beta^{n-1}\hat{}\gamma) = \ldots = \delta^*(q, \gamma) \in F$ $(n \in \omega)$.
□

Теорема о накачке может восприниматься как игра, в которой играют двое ($\exists$ и $\forall$), при этом студент несет ответственность только за действия $\forall$-игрока. Сначала $\exists$-игрок предлагает натуральное число n_0; затем $\forall$-игрок предлагает слово λ $(\mathrm{lh}(\lambda) \geqslant n_0)$, за представление которого в виде $\alpha\hat{}\beta\hat{}\gamma$ отвечает $\exists$-игрок; и, наконец, $\forall$-игрок находит число n, для которого выполняется соотношение $\alpha\hat{}\beta^n\hat{}\gamma \notin L$.

Нерегулярность языков

Пример A2.4.

Язык $\{0^n1^n \mid n \in \omega\}$ *нерегулярный.* $\exists$-Игрок предлагает число n_0; студент в лице $\forall$-игрока находит слово $0^{n_0}1^{n_0}$. Далее, $\exists$-игрок произвольным образом представляет данное слово в виде конкатенации $\alpha\hat{}\beta\hat{}\gamma$ с условием $\mathrm{lh}(\alpha\hat{}\beta) \leqslant n_0$ (следовательно, $\alpha = 0^k$, $\beta = 0^l$, $\gamma = 0^m1^{n_0}$, причём $n_0 = k + l + m$, $l > 0$). Остаётся только заметить, что $\alpha\hat{}\beta^0\hat{}\gamma = 0^{k+m}1^{n_0} \notin L$.

Нерегулярность языков

Пример А2.4.

Язык $\{0^n1^n \mid n \in \omega\}$ *нерегулярный.* $\exists$-Игрок предлагает число n_0; студент в лице $\forall$-игрока находит слово $0^{n_0}1^{n_0}$. Далее, $\exists$-игрок произвольным образом представляет данное слово в виде конкатенации $\alpha\hat{}\beta\hat{}\gamma$ с условием $\mathrm{lh}(\alpha\hat{}\beta) \leqslant n_0$ (следовательно, $\alpha = 0^k$, $\beta = 0^l$, $\gamma = 0^m1^{n_0}$, причём $n_0 = k + l + m$, $l > 0$). Остаётся только заметить, что $\alpha\hat{}\beta^0\hat{}\gamma = 0^{k+m}1^{n_0} \notin L$.

Пример А2.5.

Язык $\{a^p \mid p$ *— простое*$\}$ *нерегулярный.* $\exists$-Игрок предлагает число n_0; затем $\forall$-игрок находит $p \geqslant n_0 + 2$ (это возможно, поскольку простых чисел бесконечно много); $\exists$-игрок предлагает представление $a^k\hat{}a^l\hat{}a^m$, причём $0 < l \leqslant k + l \leqslant n_0$. Тогда $a^k\hat{}a^{l\cdot(k+m)}\hat{}a^m \notin L$, поскольку количество букв равняется $k + l(k+m) + m = (k+m)(l+1)$ и $l + 1 \geqslant 1 + 1 = 2$, $k + m = p - l \geqslant n_0 + 2 - n_0 = 2$.

ДКА: алфавит $\{0\}$

Теорема А2.4.

Пусть $\Sigma = \{0\}$; тогда для языка $L \subseteq \Sigma^*$ следующие утверждения эквивалентны:

1. L регулярный;
2. существует конечное множество $\{k_1(n), \ldots, k_m(n)\}$ $(m \in \omega)$ арифметических прогрессий, принимающих натуральные числа в качестве значений, для которого выполняется равенство $L = \{0^{k_i(n)} \mid n \in \omega,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

ДКА: алфавит $\{0\}$

Теорема А2.4.

Пусть $\Sigma = \{0\}$; тогда для языка $L \subseteq \Sigma^*$ следующие утверждения эквивалентны:

1. L регулярный;
2. существует конечное множество $\{k_1(n), \ldots, k_m(n)\}$ $(m \in \omega)$ арифметических прогрессий, принимающих натуральные числа в качестве значений, для которого выполняется равенство $L = \{0^{k_i(n)} \mid n \in \omega,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

Доказательство.

$(2 \Rightarrow 1)$ Пусть $k(n) = m + d(n-1)$ — арифметическая прогрессия; тогда регулярное выражение

$$\begin{cases} \varepsilon = \varnothing^*, & \text{если } m = d = 0; \\ 0^m, & \text{если } m > 0 \text{ и } d = 0; \\ (0^d)^*, & \text{если } m = 0 \text{ и } d > 0; \\ 0^m(0^d)^*, & \text{если } md > 0; \end{cases}$$

ДКА: алфавит $\{0\}$

Доказательство (продолжение).

(правильно расставить символ $\cdot$ и скобки!!!) представляет язык $\{0^{k(n)} \mid n \in \omega\}$. Для завершения следует воспользоваться тем, что регулярные языки замкнуты относительно операции объединения.

ДКА: алфавит $\{0\}$

Доказательство (продолжение).

(правильно расставить символ $\cdot$ и скобки!!!) представляет язык $\{0^{k(n)} \mid n \in \omega\}$. Для завершения следует воспользоваться тем, что регулярные языки замкнуты относительно операции объединения.
(1 $\Rightarrow$ 2) Пусть Д.К.А. $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma; \delta, q_0, F)$ таков, что $\mathrm{L}(\mathfrak{A}) = L$. Возьмём слово $\alpha \in \{0\}^*$ с условием $\mathrm{lh}(\alpha) \geqslant n(Q)$. Тогда существует и притом единственное (почему?) состояние $q \in Q$ такое, что $\delta^*(q_0, \alpha_1) = q = \delta^*(q_0, \alpha_2)$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \sqsubseteq_{\mathrm{beg}} \alpha$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$. Пусть α_0 — слово наименьшей длины (скажем, $l_0 = \mathrm{lh}(\alpha_0)$) такое, что $\delta^*(q_0, \alpha_0) = q$.
Пусть $d \in \omega$ таково, что $\delta^*(q, a^d) = q$ и d — наименьшее с таким свойством. Далее, пусть $M_0 \subseteq \omega$ содержит все числа $m < n(Q)$, для которых $\delta^*(q_0, a^m) \in F$. Тогда язык L задается множеством арифметических прогрессий $\{m + d(n-1) \mid m \in M_0,\ m \geqslant l_0\} \cup \{m \mid m \in M_0,\ m < l_0\}$:

$$L = \{0^m \mid m \in M_0,\ m < l_0\} \cup \{0^{m+d(n-1)} \mid m \in M_0,\ m \geqslant l_0\}. \tag{2}$$

ДКА: алфавит $\{0\}$

Доказательство (окончание).

($\subseteq$) Обозначим правую часть равенства (2) через S. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*(q_0, \alpha) \in F$. Если $\mathrm{lh}(\alpha) < l_0$, то $\alpha = 0^m$, $m \in M_0$, и, следовательно, $\alpha \in S$. Если же $\mathrm{lh}(\alpha) \geqslant l_0$, то существуют и притом единственные q и $0 \leqslant r < d$ такие, что $\mathrm{lh}(\alpha) - l_0 = d \cdot q + r$ (теорема о делении с остатком); следовательно, $\delta^*(q_0, 0^{l_0+r+d\cdot q}) = \delta^*(q_0, 0^{l_0+r}) \in F$ и $l_0 + r < n(Q)$, т.е. $l_0 + r \in M_0$. Таким образом, $\alpha = 0^{(l_0+r)+d\cdot q}$ и $\alpha \in S$.

ДКА: алфавит $\{0\}$

Доказательство (окончание).

($\subseteq$) Обозначим правую часть равенства (2) через S. Пусть $\alpha \in L$; тогда $\delta^*(q_0, \alpha) \in F$. Если $\mathrm{lh}(\alpha) < l_0$, то $\alpha = 0^m$, $m \in M_0$, и, следовательно, $\alpha \in S$. Если же $\mathrm{lh}(\alpha) \geqslant l_0$, то существуют и притом единственные q и $0 \leqslant r < d$ такие, что $\mathrm{lh}(\alpha) - l_0 = d \cdot q + r$ (теорема о делении с остатком); следовательно, $\delta^*(q_0, 0^{l_0+r+d\cdot q}) = \delta^*(q_0, 0^{l_0+r}) \in F$ и $l_0 + r < n(Q)$, т.е. $l_0 + r \in M_0$. Таким образом, $\alpha = 0^{(l_0+r)+d\cdot q}$ и $\alpha \in S$.

($\supseteq$) Пусть сначала $\alpha = 0^m$ ($m \in M_0$, $m < l_0$). Следовательно, $\delta^*(q_0, 0^m) \in F$; тем самым, $\alpha \in L$. Пусть теперь $\alpha = 0^{m+dn}$ ($m \in M_0$, $m \geqslant l_0$, $n \in \omega$); тогда $\delta^*(q_0, 0^m) \in F$ и $\delta^*(q_0, 0^{m+dn}) = \delta^*(q_0, 0^m)$; таким образом, $\alpha \in L$. $\square$

ДКА: алфавит $\{0;1\}$

Теорема А2.5.

Для каждого языка L в алфавите Σ $(\mathrm{card}(\Sigma) \geqslant 2)$ существует язык L' в алфавите $\{0;1\}$, для которого выполняется следующее соотношение:
L — регулярный язык, если и только если L' — регулярный язык. Более того, данная трансформация инъективна.

ДКА: алфавит $\{0; 1\}$

Теорема А2.5.

Для каждого языка L в алфавите Σ $(\mathrm{card}(\Sigma) \geqslant 2)$ существует язык L' в алфавите $\{0; 1\}$, для которого выполняется следующее соотношение:
L — регулярный язык, если и только если L' — регулярный язык.
Более того, данная трансформация инъективна.

Доказательство.

Пусть $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$; определим $a_i \mapsto 01^i0$, $1 \leqslant i \leqslant k$.
Далее, индукцией по построению регулярного выражения, представляющего L, задаётся результат подстановки для регулярного выражения, представляющего L'. Свойство инъективности следует из того, что каждая буква задаётся двумя нулями, между которыми определенное количество единиц (аналог открывающей и закрывающей скобок). $\square$

Мотивация

- Понятие **вероятностных автоматов** появилось как синтез понятий **конечных автоматов** и **цепей Маркова** и было предназначено для построения математических моделей динамических систем, в которых присутствует неопределённость, описываемая статистическими закономерностями.

Мотивация

- Понятие **вероятностных автоматов** появилось как синтез понятий **конечных автоматов** и **цепей Маркова** и было предназначено для построения математических моделей динамических систем, в которых присутствует неопределённость, описываемая статистическими закономерностями.
- Эта неопределённость связана с неточностью знаний о состояниях, в которых моделируемые системы находятся в процессе своего функционирования, и с недетерминированностью правил изменения этих состояний.

Неопределённость

1. Природа системы:
   - влияние случайных факторов на функционирование системы (сбои системы, отказы в работе, случайные изменения функционирования, случайность потока заявок);
   - несовершенство (невозможность) точного измерения состояний системы.
2. Преднамеренное внесение неточности и неопределённости в математические модели систем:
   - точные модели имеют неприемлемо высокую сложность, и проведение анализа поведения таких систем возможно только с использованием их упрощённых моделей.

Задачи: XX век

- анализ свойств систем (безопасность, корректность, надёжность, устойчивость функционирования в непредусмотренных ситуациях и др.);
- вычисление различных количественных характеристик (частота выполнения тех или иных действий, вероятность отказа компонентов, вероятность вторжения злоумышленника в компьютерную сеть, математическое ожидание отклика веб-сервиса).

Задачи: XXI век

- верификация программ и протоколов передачи данных в компьютерных сетях;
- информационный поиск в Интернете;
- финансово-экономический анализ;
- извлечение смысла из текстов в естественных языках;
- машинное зрение и обработка изображений;
- обработка и извлечение знаний из больших массивов данных (в частности, в задачах анализа бизнес-процессов, биоинженерии и биоинформатики).

Случайные функции

Определение А2.6.

Пусть задана пара конечных множеств X, Y. **Конечной случайной функцией (СФ)** из X в Y назовём функцию $f : X \times Y \to [0;1]$, для которой выполняется соотношение $\sum\limits_{y \in Y} f(x, y) = 1$ для всех $x \in X$.

Случайные функции

Определение А2.6.

Пусть задана пара конечных множеств X, Y. **Конечной случайной функцией (СФ)** из X в Y назовём функцию $f : X \times Y \to [0;1]$, для которой выполняется соотношение $\sum\limits_{y \in Y} f(x, y) = 1$ для всех $x \in X$.

В дальнейшем конечные случайные функции будем называть просто случайными функциями. Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ значение $f(x, y)$ можно интерпретировать как вероятность того, что СФ f переводит x в y. Будут также рассматриваться локально конечные случайные функции на счётных вероятностных пространствах (для каждого $x \in X$ существует только конечное число $y \in Y$, для которых $f(x, y) > 0$).

СФ: основные атрибуты

Пусть f — СФ из X в Y. В дальнейшем этот факт мы будем обозначать как $f : X \underset{r}{\to} Y$.

СФ: основные атрибуты

Пусть f — СФ из X в Y. В дальнейшем этот факт мы будем обозначать как $f : X \underset{r}{\to} Y$.

Определение А2.7.

X — **область определения** f (обозначается как $\mathrm{Dom}_r(f)$), а Y — **область значений** f (обозначается как $\mathrm{Rng}_r(f)$).

СФ: основные атрибуты

Пусть f — СФ из X в Y. В дальнейшем этот факт мы будем обозначать как $f : X \underset{r}{\rightarrow} Y$.

Определение А2.7.

X — **область определения** f (обозначается как $\mathrm{Dom}_r(f)$), а Y — **область значений** f (обозначается как $\mathrm{Rng}_r(f)$).

Определение А2.8.

Пусть $f : X \underset{r}{\rightarrow} Y$ и $g : Y \underset{r}{\rightarrow} Z$ — СФ. Тогда их **композицией** называется СФ $fg : X \underset{r}{\rightarrow} Z$, определяемая следующим образом ($x \in X$, $z \in Z$):

$$fg(x,z) = \sum_{y \in Y} f(x,y)g(y,z).$$

Детерминированные СФ

Определение А2.9.

СФ $f : X \underset{r}{\to} Y$ называется **детерминированной**, если для каждого $x \in X$ существует и притом единственное $y \in Y$ такое, что $f(x, y) = 1$. В этом случае, будем говорить, что f **отображает** x в y.

Детерминированные СФ

Определение A2.9.

СФ $f : X \underset{r}{\rightarrow} Y$ называется **детерминированной**, если для каждого $x \in X$ существует и притом единственное $y \in Y$ такое, что $f(x, y) = 1$. В этом случае, будем говорить, что f **отображает** x в y.

Для каждого множества X запись id_X обозначает детерминированную СФ $f : X \underset{r}{\rightarrow} X$ такую, что $f(x, x) = 1$.

Матрицы

Пусть задана СФ $f : X \underset{r}{\rightarrow} Y$; пусть также на X и Y заданы упорядочения элементов $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ соответственно. Тогда f можно представить в виде матрицы

$$A_f = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_m, y_1) & \ldots & f(x_m, y_n) \end{pmatrix}.$$

Матрицы

Пусть задана СФ $f : X \underset{r}{\to} Y$; пусть также на X и Y заданы упорядочения элементов $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ соответственно. Тогда f можно представить в виде матрицы

$$A_f = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) & \ldots & f(x_1, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_m, y_1) & \ldots & f(x_m, y_n) \end{pmatrix}.$$

Ниже мы будем отождествлять каждую СФ с соответствующей ей матрицей. Полагаем также, что элементы её поля заранее упорядочены. Отметим также, что имеет место $A_{fg} = A_f \cdot A_g$.

Распределение

Определение А2.10.

Распределением на множестве X называется СФ $\xi : \mathbf{1} \underset{r}{\to} X$, где $\mathbf{1} = \{0\}$. Совокупность всех распределений на X будем обозначать как $X^{\triangle}$. Для каждых $x \in X$ и $\xi \in X^{\triangle}$ значение $\xi(0, x)$ будем записывать как x^{ξ}.

Распределение

Определение А2.10.

Распределением на множестве X называется СФ $\xi : \mathbf{1} \underset{r}{\rightarrow} X$, где $\mathbf{1} = \{0\}$. Совокупность всех распределений на X будем обозначать как $X^{\triangle}$. Для каждых $x \in X$ и $\xi \in X^{\triangle}$ значение $\xi(0, x)$ будем записывать как x^{ξ}.

Для каждого $x \in X$ определим распределение $\xi_x \in X^{\triangle}$ следующим образом:

$$y^{\xi_x} = \begin{cases} 1, & \text{если } y = x; \\ 0, & \text{если } y \neq x. \end{cases}$$

Автомат Мура

Определение А2.11.

Структура $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, \delta, \lambda, q_0)$ называется **автоматом Мура**, если она удовлетворяет следующим условиям:

- Σ, S, Q — непустые конечные множества, элементы которого называются соответственно **входными сигналами**, **выходными сигналами** и **состояниями** автомата $\mathfrak{A}$;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ и $\lambda : Q \to S$ — отображения, называемые соответственно **функцией перехода** и **функцией выхода** автомата $\mathfrak{A}$;
- q_0 — элемент Q, называемый **начальным состоянием** автомата $\mathfrak{A}$.

Автомат Мура: принцип работы

В каждый момент времени $t \in \mathbb{N}$ автомат $\mathfrak{A}$ находится в состоянии $q(t)$, причём $q(0) = q_0$. Далее, в каждый момент времени t автомат $\mathfrak{A}$

- получает входной сигнал $\sigma(t) \in \Sigma$,
- выдаёт выходной сигнал $s(t) = \lambda(q(t))$, и
- к моменту $t+1$ переходит в состояние $q(t+1) = \delta(q(t), \sigma(t))$.

Автомат Мура: принцип работы

В каждый момент времени $t \in \mathbb{N}$ автомат $\mathfrak{A}$ находится в состоянии $q(t)$, причём $q(0) = q_0$. Далее, в каждый момент времени t автомат $\mathfrak{A}$

- получает входной сигнал $\sigma(t) \in \Sigma$,
- выдаёт выходной сигнал $s(t) = \lambda(q(t))$, и
- к моменту $t+1$ переходит в состояние $q(t+1) = \delta(q(t), \sigma(t))$.

Автомат Мура можно рассматривать как обобщение ДКА (почему?)

Вероятностные автоматы

Определение A2.12.

Структура $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ называется **вероятностным автоматом (ВА)**, если он удовлетворяет следующим условиям:

- Σ, S, Q — непустые конечные множества, элементы которого называются соответственно **входными сигналами**, **выходными сигналами** и **состояниями** ВА $\mathfrak{A}$;
- $P : Q \times \Sigma \underset{r}{\to} Q \times S$ — СФ, называемая **поведением** ВА $\mathfrak{A}$;
- ξ_0 — распределение на Q, называемое **начальным распределением** ВА $\mathfrak{A}$.

Вероятностные автоматы

Определение А2.12.

Структура $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ называется **вероятностным автоматом (ВА)**, если он удовлетворяет следующим условиям:

- Σ, S, Q — непустые конечные множества, элементы которого называются соответственно **входными сигналами**, **выходными сигналами** и **состояниями** ВА $\mathfrak{A}$;
- $P : Q \times \Sigma \underset{r}{\to} Q \times S$ — СФ, называемая **поведением** ВА $\mathfrak{A}$;
- ξ_0 — распределение на Q, называемое **начальным распределением** ВА $\mathfrak{A}$.

Определение А2.13.

ВА $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ называется **детерминированным**, если $\xi_0 = \xi_q$ для некоторого $q \in Q$, а СФ P является детерминированной.

ВА: принцип работы

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ — ВА.

1. Для каждого $q \in Q$ значение q^{ξ_0} понимается как вероятность того, что в начальный момент времени $(t = 0)$ автомат $\mathfrak{A}$ находится в состоянии q.
2. Для каждого $((q, \sigma), (q', s)) \in (Q \times \Sigma) \times (Q \times S)$ значение $P((q, \sigma), (q', s))$ понимается как вероятность того, что
   - если в текущий момент времени t ВА $\mathfrak{A}$ находится в состоянии $q(t) = q$, а на его вход поступает сигнал σ,
   - то в момент $t + 1$ ВА $\mathfrak{A}$ будет находиться в состоянии $q(t + 1) = q'$, а выходной сигнал будет равняться s.

ВА: принцип работы

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ — ВА.

1. Для каждого $q \in Q$ значение q^{ξ_0} понимается как вероятность того, что в начальный момент времени $(t = 0)$ автомат $\mathfrak{A}$ находится в состоянии q.
2. Для каждого $((q, \sigma), (q', s)) \in (Q \times \Sigma) \times (Q \times S)$ значение $P((q, \sigma), (q', s))$ понимается как вероятность того, что
   - если в текущий момент времени t ВА $\mathfrak{A}$ находится в состоянии $q(t) = q$, а на его вход поступает сигнал σ,
   - то в момент $t + 1$ ВА $\mathfrak{A}$ будет находиться в состоянии $q(t + 1) = q'$, а выходной сигнал будет равняться s.

Понятие вероятностного автомата может рассматриваться как обобщение понятий НКА и автомата Мура.

ВА и матрицы

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ — ВА; фиксируем также упорядочение множества Q как $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

ВА и матрицы

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ — ВА; фиксируем также упорядочение множества Q как $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ и $s \in S$ положим

$$A^{\sigma,s} = \begin{pmatrix} P(q_1,\sigma,q_1,s) & \ldots & P(q_1,\sigma,q_n,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P(q_n,\sigma,q_1,s) & \ldots & P(q_n,\sigma,q_n,s) \end{pmatrix}.$$

ВА и матрицы

Пусть $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ — ВА; фиксируем также упорядочение множества Q как $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ и $s \in S$ положим

$$A^{\sigma,s} = \begin{pmatrix} P(q_1,\sigma,q_1,s) & \ldots & P(q_1,\sigma,q_n,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P(q_n,\sigma,q_1,s) & \ldots & P(q_n,\sigma,q_n,s) \end{pmatrix}.$$

Определим двойной индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$ и $\mathrm{lh}(\beta)$ матрицы $A^{\alpha,\beta}$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $\beta \in S^*$:

- $A^{\varepsilon,\varepsilon} = E_n$ (единичная матрица порядка n);
- если $\mathrm{lh}(\alpha) \neq \mathrm{lh}(\beta)$, то $A^{\alpha,\beta} = \mathbf{0}_n$ (нулевая матрица порядка n);
- если $\alpha = \alpha_1\hat{\ }\sigma$ и $\beta = \beta_1\hat{\ }s$ ($\mathrm{lh}(\alpha_1) = \mathrm{lh}(\beta_1)$, $\sigma \in \Sigma$, $s \in S$), то $A^{\alpha,\beta} = A^{\alpha_1,\beta_1} \cdot A^{\sigma,s}$.

ВА и матрицы

Если $A^{\alpha,\beta}$ — матрица, то число, находящее в строке q и столбце q', будет обозначаться как $A^{\alpha,\beta}_{q,q'}$.

ВА и матрицы

Если $A^{\alpha,\beta}$ — матрица, то число, находящее в строке q и столбце q', будет обозначаться как $A^{\alpha,\beta}_{q,q'}$.

Если $\alpha = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$, $\beta = s_1s_2\ldots s_k$, то $A^{\alpha,\beta}_{q,q'}$ можно понимать как вероятность того, что

- если в момент t ВА $\mathfrak{A}$ находится в состоянии q, и, начиная с этого момента, на вход автомата $\mathfrak{A}$ последовательно поступают элементы строки α (т. е. в момент t поступает сигнал σ_1, в момент $t+1$ — σ_2, и т. д.),
- то в моменты $t+1$, $t+2$, …, $t+k$ выходные сигналы автомата $\mathfrak{A}$ равны s_1, s_2, …, s_k соответственно, и в момент $t+k$ автомат $\mathfrak{A}$ будет находиться в состоянии q'.

ВА и реакция

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ и распределение $\xi \in Q^{\triangle}$.

ВА и реакция

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ и распределение $\xi \in Q^{\triangle}$.

Определение A2.14.

Будем говорить, что **ВА $\mathfrak{A}$ в момент времени t имеет распределение** ξ, если для каждого $q \in Q$ вероятность того, что $\mathfrak{A}$ в момент времени t находится в состоянии q, равняется q^{ξ}.

ВА и реакция

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ и распределение $\xi \in Q^{\triangle}$.

Определение A2.14.

Будем говорить, что **ВА** $\mathfrak{A}$ **в момент времени** t **имеет распределение** ξ, если для каждого $q \in Q$ вероятность того, что $\mathfrak{A}$ в момент времени t находится в состоянии q, равняется q^{ξ}.

Определение A2.15.

Реакцией ВА $\mathfrak{A}$ в распределении ξ называется функция $A^{\xi} : \Sigma^* \times S^* \to \mathbb{R}$ такая, что $A^{\xi}(\alpha, \beta) = \xi A^{\alpha,\beta} I$, где I — вектор-столбец порядка $|Q|$, состоящий только из единиц ($\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$).

ВА и реакция

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ и распределение $\xi \in Q^{\triangle}$.

Определение A2.14.

Будем говорить, что **ВА $\mathfrak{A}$ в момент времени t имеет распределение** ξ, если для каждого $q \in Q$ вероятность того, что $\mathfrak{A}$ в момент времени t находится в состоянии q, равняется q^{ξ}.

Определение A2.15.

Реакцией ВА $\mathfrak{A}$ в распределении ξ называется функция $A^{\xi} : \Sigma^* \times S^* \to \mathbb{R}$ такая, что $A^{\xi}(\alpha, \beta) = \xi A^{\alpha,\beta} I$, где I — вектор-столбец порядка $|Q|$, состоящий только из единиц ($\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$).

Определение A2.16.

Реакцией ВА $\mathfrak{A}$ называется реакция ВА $\mathfrak{A}$ в начальном распределении ξ_0 (и обозначается как $f_{\mathfrak{A}}(= A^{\xi_0})$).

ВА и реакции

Если $\alpha = \sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_k$ и $\beta = s_0s_1\ldots s_k$, то $f_{\mathfrak{A}}(\alpha,\beta)$ можно понимать как вероятность того, что если, начиная с момента $t=0$, на вход $\mathfrak{A}$ последовательно поступают элементы строки α (т. е. в момент 0 поступает сигнал σ_0, в момент 1 — сигнал σ_1, и т. д.), то в моменты 1, 2, $\ldots$, $k+1$ выходные сигналы $\mathfrak{A}$ равны s_0, s_1, $\ldots$, s_k соответственно.

ВА и реакции

Предложение А2.2.

Если $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ — ВА и $\xi \in Q^{\triangle}$, то A^{ξ} — СФ.

ВА и реакции

Предложение А2.2.

Если $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi_0)$ — ВА и $\xi \in Q^{\triangle}$, то A^{ξ} — СФ.

Доказательство.

Так как $A^{\xi}(\alpha, \beta) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $\beta \in S^*$, для доказательства теоремы достаточно доказать $\sum\limits_{\beta \in S^*} A^{\xi}(\alpha, \beta) = \sum\limits_{\beta \in S^*} \xi A^{\alpha,\beta} I = 1$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$.
Далее, поскольку $A^{\alpha,\beta} = 0$ при $\mathrm{lh}(\alpha) \neq \mathrm{lh}(\beta)$, приходим к соотношению

$$\sum_{\beta \in S^k} A^{\xi}(\alpha, \beta) = 1, \qquad (3)$$

для любого $\alpha \in \Sigma^k$. Докажем (3) индукцией по $k \in \omega$. Если $k = 0$, то $A^{\varepsilon,\varepsilon} = E_n$ и $\xi E_n I = \xi I = 1$, поскольку $\xi \in Q^{\triangle}$.

ВА и реакции

Доказательство (продолжение).

Пусть (3) верно для $\alpha \in \Sigma^k$; докажем, что для всех $\alpha \in \Sigma^{k+1}$ имеет место соотношение $\sum\limits_{\beta \in S^{k+1}} \xi A^{\alpha,\beta} I = 1$, которое, в свою очередь, эквивалентно

$$\sum_{\beta_1 \in S^k,\, s \in S} \xi A^{\alpha_1 \hat{}\sigma, \beta_1 \hat{} s} I = 1, \qquad (4)$$

где $\alpha = \alpha_1 \hat{}\sigma$. Так как $A^{\alpha_1 \hat{}\sigma, \beta_1 \hat{} s} = A^{\alpha_1,\beta_1} \cdot A^{\sigma,s}$, соотношение (4) переписывается как

$$\xi \sum_{\beta_1 \in S^k} A^{\alpha_1,\beta_1} \left(\sum_{s \in S} A^{\sigma,s} I \right) = 1. \qquad (5)$$

ВА и реакции

Доказательство (окончание).

(5) следует из (3) и равенства $\sum\limits_{s\in S} A^{\sigma,s}I = I$, являющегося справедливым, поскольку $I_q = \sum\limits_{s\in S,\, q'\in Q} P(q,\sigma,q',s) = 1$, что вытекает из того, что $P : Q \times \Sigma \xrightarrow[r]{} Q \times S$ — СФ. □

ВА и реакции

Доказательство (окончание).

(5) следует из (3) и равенства $\sum\limits_{s\in S} A^{\sigma,s}I = I$, являющегося справедливым, поскольку $I_q = \sum\limits_{s\in S,\, q'\in Q} P(q,\sigma,q',s) = 1$, что вытекает из того, что $P : Q\times\Sigma \underset{r}{\to} Q\times S$ — СФ. $\square$

Замечание А2.4.

Если ВА $\mathfrak{A} = (Q,\Sigma,S,P,\xi_0)$ детерминированный, то СФ A^{ξ_q} детерминированная для любого $q\in Q$; в частности, $f_{\mathfrak{A}}$ — детерминированная СФ.

ВА и реакции

Доказательство (окончание).

(5) следует из (3) и равенства $\sum\limits_{s\in S} A^{\sigma,s}I = I$, являющегося справедливым, поскольку $I_q = \sum\limits_{s\in S,\, q'\in Q} P(q,\sigma,q',s) = 1$, что вытекает из того, что $P : Q\times\Sigma \underset{r}{\to} Q\times S$ — СФ. $\square$

Замечание А2.4.

Если ВА $\mathfrak{A} = (Q,\Sigma,S,P,\xi_0)$ детерминированный, то СФ A^{ξ_q} детерминированная для любого $q\in Q$; в частности, $f_{\mathfrak{A}}$ — детерминированная СФ.

Определение А2.17.

Распределения ξ_1 и ξ_2 называются **эквивалентными относительно** $\mathfrak{A}$, если $A^{\xi_1} = A^{\xi_2}$. В этом случае будем использовать обозначение $\xi_1 \underset{\mathfrak{A}}{\sim} \xi_2$.

ВА и эквивалентность

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1, \Sigma, S, P_1, \xi_1^0)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2, \Sigma, S, P_2, \xi_2^0)$.

ВА и эквивалентность

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1, \Sigma, S, P_1, \xi_1^0)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2, \Sigma, S, P_2, \xi_2^0)$.

Определение А2.18.

$\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называются **эквивалентными** (и обозначаются как $\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2$), если $f_{\mathfrak{A}_1} = f_{\mathfrak{A}_2}$.

ВА и эквивалентность

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1, \Sigma, S, P_1, \xi_1^0)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2, \Sigma, S, P_2, \xi_2^0)$.

Определение А2.18.

$\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называются **эквивалентными** (и обозначаются как $\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2$), если $f_{\mathfrak{A}_1} = f_{\mathfrak{A}_2}$.

Определение А2.19.

Определим **объединение** автоматов
$\mathfrak{A}_1 \uplus \mathfrak{A}_2 = (Q_1 \uplus Q_2, \Sigma, S, P_1 \cup P_2, \xi^0)$, где $\xi^0 = (\frac{1}{2}\xi_1^0, \frac{1}{2}\xi_2^0)$.

ВА и эквивалентность

Пусть заданы ВА $\mathfrak{A}_1 = (Q_1, \Sigma, S, P_1, \xi_1^0)$ и $\mathfrak{A}_2 = (Q_2, \Sigma, S, P_2, \xi_2^0)$.

Определение А2.18.

$\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называются **эквивалентными** (и обозначаются как $\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2$), если $f_{\mathfrak{A}_1} = f_{\mathfrak{A}_2}$.

Определение А2.19.

Определим **объединение** автоматов
$\mathfrak{A}_1 \uplus \mathfrak{A}_2 = (Q_1 \uplus Q_2, \Sigma, S, P_1 \cup P_2, \xi^0)$, где $\xi^0 = (\frac{1}{2}\xi_1^0, \frac{1}{2}\xi_2^0)$.

Замечание А2.5.

$\mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{A}_2 \Leftrightarrow \xi_1 \underset{\mathfrak{A}_1 \uplus \mathfrak{A}_2}{\sim} \xi_2$, где $\xi_1 = (\xi_1^0, \mathbf{0})$ и $\xi_2 = (\mathbf{0}, \xi_2^0)$.

ВА и вероятностные реакции

Пусть Σ и S — конечные множества.

ВА и вероятностные реакции

Пусть Σ и S — конечные множества.

Определение А2.20.

Вероятностной реакцией (ВР) из Σ в S называется СФ $f : \Sigma^* \underset{r}{\rightarrow} S^*$, удовлетворяющая следующим двум условиям ($\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$):

1. если $\mathrm{lh}(\alpha) \neq \mathrm{lh}(\beta)$, то $f(\alpha, \beta) = 0$;
2. если $\mathrm{lh}(\alpha) = \mathrm{lh}(\beta)$, то $f(\alpha, \beta) = \sum\limits_{s \in S} f(\alpha\hat{\ }\sigma, \beta\hat{\ }s)$ для всех $\sigma \in \Sigma$.

ВА и вероятностные реакции

Пусть Σ и S — конечные множества.

Определение А2.20.

Вероятностной реакцией (ВР) из Σ в S называется СФ $f : \Sigma^* \underset{r}{\rightarrow} S^*$, удовлетворяющая следующим двум условиям ($\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$):

1. если $\mathrm{lh}(\alpha) \neq \mathrm{lh}(\beta)$, то $f(\alpha, \beta) = 0$;
2. если $\mathrm{lh}(\alpha) = \mathrm{lh}(\beta)$, то $f(\alpha, \beta) = \sum\limits_{s \in S} f(\alpha\hat{\ }\sigma, \beta\hat{\ }s)$ для всех $\sigma \in \Sigma$.

Запись $R(\Sigma, S)$ обозначает совокупность всех ВР из Σ в S.

Теорема А2.6.

Для каждых ВА $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi^0)$ и $\xi \in Q^\triangle$ имеет место $A^\xi \in R(\Sigma, S)$.

ВА и вероятностные реакции

Доказательство.

По предложению A2.2, $A^\xi : \Sigma^* \underset{r}{\to} S^*$ — СФ, поэтому достаточно только проверить два условия определения.

Пусть $\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$.

1) Если $\mathrm{lh}(\alpha) \neq \mathrm{lh}(\beta)$, то $A^{\alpha,\beta} = 0$ и, следовательно, $A^\xi(\alpha,\beta) = \xi A^{\alpha,\beta} I = 0$.

2) Пусть $\sigma \in \Sigma$; тогда $\sum\limits_{s\in S} A^\xi(\alpha\hat{\ }\sigma, \beta\hat{\ }s) = \sum\limits_{s\in S} \xi A^{\alpha\hat{\ }\sigma,\beta\hat{\ }s} I =$
$\sum\limits_{s\in S} \xi(A^{\alpha,\beta}A^{\sigma,s})I = \xi A^{\alpha,\beta}(\sum\limits_{s\in S} A^{\sigma,s} I) = \xi A^{\alpha,\beta} I = A^\xi(\alpha,\beta)$
(последнее тождество из доказательства предложения A2.2). $\square$

Остаточные вероятностные реакции

Пусть даны конечные множества Σ и S, ВР $f \in R(\Sigma, S)$ и строки $\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$, для которых выполняется соотношение $f(\alpha, \beta) \neq 0$.

Остаточные вероятностные реакции

Пусть даны конечные множества Σ и S, ВР $f \in R(\Sigma, S)$ и строки $\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$, для которых выполняется соотношение $f(\alpha, \beta) \neq 0$.

Определение А2.21.

Определим функцию $f_{\alpha,\beta} : \Sigma^* \times S^* \to \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$f_{\alpha,\beta}(\alpha', \beta') = \frac{f(\alpha\hat{\ }\alpha', \beta\hat{\ }\beta')}{f(\alpha, \beta)}$$

для всех $\alpha' \in \Sigma^*$, $\beta' \in S^*$. Функция вида $f_{\alpha,\beta}$ называется **остаточной вероятностной реакцией (ОВР)** для f.

Остаточные вероятностные реакции

Пусть даны конечные множества Σ и S, ВР $f \in R(\Sigma, S)$ и строки $\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$, для которых выполняется соотношение $f(\alpha, \beta) \neq 0$.

Определение А2.21.

Определим функцию $f_{\alpha,\beta} : \Sigma^* \times S^* \to \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$f_{\alpha,\beta}(\alpha', \beta') = \frac{f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta')}{f(\alpha, \beta)}$$

для всех $\alpha' \in \Sigma^*$, $\beta' \in S^*$. Функция вида $f_{\alpha,\beta}$ называется **остаточной вероятностной реакцией (ОВР)** для f.

Через Q_f будем обозначать множество всех ОВР для f. Отметим, что $f \in Q_f$, поскольку $f(\varepsilon, \varepsilon) = 1$ и $f = f_{\varepsilon,\varepsilon}$.

Остаточные вероятностные реакции

Предложение А2.3.

Если $f \in R(\Sigma, S)$ и $f(\alpha, \beta) \neq 0$, то $f_{\alpha,\beta} : \Sigma^* \underset{r}{\to} S^*$ — СФ.

Остаточные вероятностные реакции

Предложение A2.3.

Если $f \in R(\Sigma, S)$ и $f(\alpha, \beta) \neq 0$, то $f_{\alpha,\beta} : \Sigma^* \underset{r}{\to} S^*$ — СФ.

Доказательство.

Так как $f_{\alpha,\beta}(\alpha', \beta') \geqslant 0$, достаточно доказать, что справедливо соотношение $\sum\limits_{\beta' \in S^*} f_{\alpha,\beta}(\alpha', \beta') = 1$ для всех $\alpha' \in \Sigma^*$, которое, в свою очередь, равносильно соотношению ($\alpha' \in \Sigma^*$) $\sum\limits_{\beta' \in S^*} f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta') = f(\alpha, \beta)$. Из условия $f(\alpha, \beta) \neq 0$ вытекает соотношение $\mathrm{lh}(\alpha) = \mathrm{lh}(\beta)$. Так как $f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta') = 0$ при $\mathrm{lh}(\alpha') \neq \mathrm{lh}(\beta')$, имеем

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{\beta' \in S^*} f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta') = \sum_{\beta' \in S^k} f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta') \qquad (6)$$

для всех $\alpha' \in \Sigma^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Остаточные вероятностные реакции

Доказательство (окончание).

Докажем (6) индукцией по k. Если $k = 0$, то $\sum\limits_{\beta' \in S^0} f(\alpha\hat{}\varepsilon, \beta\hat{}\beta') = f(\alpha\hat{}\varepsilon, \beta\hat{}\varepsilon) = f(\alpha, \beta)$.

Предположим, что (6) выполняется при k; докажем, что выполняется соотношение $\sum\limits_{\beta' \in S^{k+1}} f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta') = f(\alpha, \beta)$ при $\alpha' \in \Sigma^{k+1}$. Пусть $\alpha' = \alpha_1'\hat{}\sigma$, где $\sigma \in \Sigma$; тогда

$$\sum_{\beta' \in S^{k+1}} f(\alpha\hat{}\alpha_1'\hat{}\sigma, \beta\hat{}\beta') = \sum_{\beta_1' \in S^k,\, s \in S} f(\alpha\hat{}\alpha_1'\hat{}\sigma, \beta\hat{}\beta_1'\hat{}s) =$$
$$= \sum_{\beta_1' \in S^k} \Big(\sum_{s \in S} f(\alpha\hat{}\alpha_1'\hat{}\sigma, \beta\hat{}\beta_1'\hat{}s)\Big) \overset{*}{=} \sum_{\beta_1' \in S^k} f(\alpha\hat{}\alpha_1', \beta\hat{}\beta_1') = f(\alpha, \beta).$$

Равенство $*$ вытекает из того, что $f \in R(\Sigma, S)$; последнее равенство верно по индуктивному предположению. $\square$

Остаточные вероятностные реакции

Предложение A2.4.

Если $f \in R(\Sigma, S)$ и $f(\alpha, \beta) \neq 0$, то $f_{\alpha,\beta} \in R(\Sigma, S)$.

Остаточные вероятностные реакции

Предложение А2.4.

Если $f \in R(\Sigma, S)$ и $f(\alpha, \beta) \neq 0$, то $f_{\alpha,\beta} \in R(\Sigma, S)$.

Доказательство.

По предложению А2.3, функция $f_{\alpha,\beta}$ является СФ, поэтому достаточно только проверить справедливость двух условий определения ВР для f. Сначала отметим, что из того, что $f(\alpha, \beta) \neq 0$, вытекает соотношение $\mathrm{lh}(\alpha) = \mathrm{lh}(\beta)$. Пусть $\alpha' \in \Sigma^*$, $\beta' \in S^*$; тогда выполняется следующее.

1) Если $\mathrm{lh}(\alpha') \neq \mathrm{lh}(\beta')$, то $\mathrm{lh}(\alpha\hat{\ }\alpha') \neq \mathrm{lh}(\beta\hat{\ }\beta')$; следовательно,

$$f_{\alpha,\beta}(\alpha', \beta') = \frac{f(\alpha\hat{\ }\alpha', \beta\hat{\ }\beta')}{f(\alpha, \beta)} = \frac{0}{f(\alpha, \beta)} = 0.$$

2) Пусть $\sigma \in \Sigma$; тогда $f_{\alpha,\beta}(\alpha', \beta') = \frac{f(\alpha\hat{\ }\alpha', \beta\hat{\ }\beta')}{f(\alpha,\beta)} =$

$$\frac{\sum\limits_{s\in S} f(\alpha\hat{\ }\alpha'\hat{\ }\sigma, \beta\hat{\ }\beta'\hat{\ }s)}{f(\alpha,\beta)} = \sum_{s\in S} \frac{f(\alpha\hat{\ }\alpha'\hat{\ }\sigma, \beta\hat{\ }\beta'\hat{\ }s)}{f(\alpha,\beta)} = \sum_{s\in S} f_{\alpha,\beta}(\alpha'\hat{\ }\sigma, \beta'\hat{\ }s).$$

$\square$

Остаточные вероятностные реакции

Предложение A2.5.

Если $f \in R(\Sigma, S)$, $f(\alpha, \beta) \neq 0$ и $f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta') \neq 0$, то $f_{\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta'} = (f_{\alpha,\beta})_{\alpha',\beta'}$.

Остаточные вероятностные реакции

Предложение A2.5.

Если $f \in R(\Sigma, S)$, $f(\alpha, \beta) \neq 0$ и $f(\alpha\hat{}\alpha', \beta\hat{}\beta') \neq 0$, то $f_{\alpha\hat{}\alpha',\beta\hat{}\beta'} = (f_{\alpha,\beta})_{\alpha',\beta'}$.

Доказательство.

Пусть $\alpha'' \in \Sigma^*$, $\beta'' \in S^*$; тогда $f_{\alpha\hat{}\alpha',\beta\hat{}\beta'}(\alpha'', \beta'') =$

$$\frac{f(\alpha\hat{}\alpha'\hat{}\alpha'',\beta\hat{}\beta'\hat{}\beta'')}{f(\alpha\hat{}\alpha',\beta\hat{}\beta')} = \frac{\frac{f(\alpha\hat{}\alpha'\hat{}\alpha'',\beta\hat{}\beta'\hat{}\beta'')}{f(\alpha,\beta)}}{\frac{f(\alpha\hat{}\alpha',\beta\hat{}\beta')}{f(\alpha,\beta)}} = \frac{f_{\alpha,\beta}(\alpha'\hat{}\alpha'',\beta'\hat{}\beta'')}{f_{\alpha,\beta}(\alpha',\beta')}.$$

$\square$

ВА и остаточные вероятностные реакции

Положим $\mathfrak{A}_f = (Q_f, \Sigma, S, P_f, \xi_f)$, где $P_f : Q_f \times \Sigma \underset{r}{\to} Q_f \times S$ — СФ, определяемая следующим образом:

$$P_f(g, \sigma, g', s) = \begin{cases} g(\sigma, s), & \text{если } g' = g_{\sigma,s}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ВА и остаточные вероятностные реакции

Положим $\mathfrak{A}_f = (Q_f, \Sigma, S, P_f, \xi_f)$, где $P_f : Q_f \times \Sigma \underset{r}{\rightarrow} Q_f \times S$ — СФ, определяемая следующим образом:

$$P_f(g, \sigma, g', s) = \begin{cases} g(\sigma, s), & \text{если } g' = g_{\sigma,s}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема А2.7.

Если $f \in R(\Sigma, S)$ и $|Q_f| < \infty$, то $\mathfrak{A}_f$ — ВА и $f_{\mathfrak{A}_f} = f$.

ВА и остаточные вероятностные реакции

Положим $\mathfrak{A}_f = (Q_f, \Sigma, S, P_f, \xi_f)$, где $P_f : Q_f \times \Sigma \underset{r}{\to} Q_f \times S$ — СФ, определяемая следующим образом:

$$P_f(g, \sigma, g', s) = \begin{cases} g(\sigma, s), & \text{если } g' = g_{\sigma,s}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема А2.7.

Если $f \in R(\Sigma, S)$ и $|Q_f| < \infty$, то $\mathfrak{A}_f$ — ВА и $f_{\mathfrak{A}_f} = f$.

Доказательство.

Будем считать, что $|Q_f| = n$.
Сначала докажем, что $P_f : Q_f \times \Sigma \underset{r}{\to} Q_f \times S$ действительно является СФ. Пусть $g \in Q_f$, $\sigma \in \Sigma$; тогда
$\sum\limits_{g' \in Q_f,\, s \in S} P_f(g, \sigma, g', s) = \sum\limits_{s \in S} g(\sigma, s) = 1$, поскольку $g : \Sigma \underset{r}{\to} S$ является СФ.

ВА и остаточные вероятностные реакции

Доказательство (продолжение).

Проверим теперь справедливость равенства $f_{\mathfrak{A}_f} = f$, т. е. $f(\alpha,\beta) = f_{\mathfrak{A}_f}(\alpha,\beta)$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $\beta \in S^*$. Из определения функции P_f следует, что имеет место равенство

$$\xi_g A_f^{\sigma,s} = \begin{cases} g(\sigma,s)\xi_{g_{\sigma,s}}, & \text{если } g(\sigma,s) \neq 0; \\ \overrightarrow{0}, & \text{если } g(\sigma,s) = 0; \end{cases} \tag{7}$$

для всех $g \in Q_f$, $\sigma \in \Sigma$ и $s \in S$. Разберём два случая.
1) $f(\alpha,\beta) \neq 0$. Докажем индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$ равенство

$$\xi_f A_f^{\alpha,\beta} = f(\alpha,\beta)\xi_{f_{\alpha,\beta}}. \tag{8}$$

Если $\mathrm{lh}(\alpha) = 0$, то $\alpha = \beta = \varepsilon$ и $\xi_f A^{\varepsilon,\varepsilon} = \xi_f E_n = \xi_f = f(\varepsilon,\varepsilon)\xi_{f_{\varepsilon,\varepsilon}}$.

ВА и остаточные вероятностные реакции

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\mathrm{lh}(\alpha) > 0$; тогда $\mathrm{lh}(\beta) = \mathrm{lh}(\alpha) > 0$ и, следовательно, $\alpha = \alpha'\hat{}\sigma$, $\beta = \beta'\hat{}s$ для подходящих α', β' и $\sigma \in \Sigma$, $s \in S$. Так как $f(\alpha,\beta) \neq 0$, имеем $f(\alpha',\beta') \neq 0$, поскольку $0 < f(\alpha,\beta) \leqslant \sum\limits_{s' \in S} f(\alpha'\hat{}\sigma, \beta'\hat{}s') = f(\alpha',\beta')$.

По индуктивному предположению, имеем

$$\xi_f A_f^{\alpha',\beta'} = f(\alpha',\beta')\xi_{f_{\alpha',\beta'}}. \tag{9}$$

Далее, из (7), (9) и предложения А9 получаем $\xi_f A_f^{\alpha,\beta} = \xi_f A_f^{\alpha'\hat{}\sigma,\beta'\hat{}s} = \xi_f A_f^{\alpha',\beta'} A_f^{\sigma,s} = f(\alpha',\beta')\xi_{f_{\alpha',\beta'}} A_f^{\sigma,s} = f(\alpha',\beta') \cdot f_{\alpha',\beta'}(\sigma,s)\xi_{(f_{\alpha',\beta'})_{\sigma,s}} = f(\alpha',\beta')\frac{f(\alpha'\hat{}\sigma,\beta'\hat{}s)}{f(\alpha',\beta')}\xi_{f_{\alpha'\hat{}\sigma,\beta'\hat{}s}} = f(\alpha,\beta)\xi_{f_{\alpha,\beta}}$.

Таким образом, $f_{\mathfrak{A}_f}(\alpha,\beta) = A_f^{\xi_f}(\alpha,\beta) = \xi_f A_f^{\alpha,\beta} I = f(\alpha,\beta)\xi_{f_{\alpha,\beta}} I = f(\alpha,\beta) \cdot 1 = f(\alpha,\beta)$.

ВА и остаточные вероятностные реакции

Доказательство (окончание).

2) $f(\alpha,\beta)=0$. Если $\mathrm{lh}(\alpha)\neq\mathrm{lh}(\beta)$, то $A_f^{\alpha,\beta}=0$ и $f_{\mathfrak{A}_f}(\alpha,\beta)=A_f^{\xi_f}(\alpha,\beta)=\xi_f A_f^{\alpha,\beta} I=0=f(\alpha,\beta)$.
Пусть теперь $\mathrm{lh}(\alpha)=\mathrm{lh}(\beta)$. Возьмём наибольшее число k_0 такое, что $f(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})\neq 0$, где $\mathrm{lh}(\alpha_{k_0})=\mathrm{lh}(\beta_{k_0})=k_0$, $\alpha_{k_0}\sqsubseteq_{\mathrm{beg}}\alpha$ и $\beta_{k_0}\sqsubseteq_{\mathrm{beg}}\beta$. По доказанному, $\xi_f A_f^{\alpha_{k_0},\beta_{k_0}}=f(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})\xi_{f_{\alpha_{k_0},\beta_{k_0}}}$.
Далее, пусть $\alpha=\alpha_{k_0}\hat{\ }\sigma_{k_0+1}\hat{\ }\ldots\hat{\ }\sigma_n$ и $\beta=\beta_{k_0}\hat{\ }s_{k_0+1}\hat{\ }\ldots\hat{\ }s_n$; тогда $0=f(\alpha_{k_0}\hat{\ }\sigma_{k_0+1},\beta_{k_0}\hat{\ }s_{k_0+1})=f(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})\cdot\frac{f(\alpha_{k_0}\hat{\ }\sigma_{k_0+1},\beta_{k_0}\hat{\ }s_{k_0+1})}{f(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})}=f(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})\cdot f_{\alpha_{k_0},\beta_{k_0}}(\sigma_{k_0+1},s_{k_0+1})$ и, следовательно, $f_{\alpha_{k_0},\beta_{k_0}}(\sigma_{k_0+1},s_{k_0+1})=0$. Из (7) следует $\xi_{f_{\alpha_{k_0},\beta_{k_0}}}A_f^{\sigma_{k_0+1},s_{k_0+1}}=\vec{0}$.
Таким образом,
$f_{\mathfrak{A}_f}(\alpha,\beta)=\xi_f A_f^{\alpha,\beta}I=\xi_f A_f^{\alpha_{k_0},\beta_{k_0}}A_f^{\sigma_{k_0+1},s_{k_0+1}}\ldots A_f^{\sigma_n,s_n}I=f(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})\xi_{f_{\alpha_{k_0},\beta_{k_0}}}A_f^{\sigma_{k_0+1},s_{k_0+1}}\ldots A_f^{\sigma_n,s_n}I=\vec{0}A_f^{\sigma_{k_0+2},s_{k_0+2}}\ldots A_f^{\sigma_n,s_n}I=\vec{0}I=0=f(\alpha,\beta)$. $\square$

ВА и реализуемые ВР

Определение А2.22.

ВР $f : \Sigma^* \times S^* \to [0;1]$ называется **реализуемой**, если $f = f_{\mathfrak{A}}$ для некоторого ВА $\mathfrak{A}$.

ВА и реализуемые ВР

Определение А2.22.

ВР $f : \Sigma^* \times S^* \to [0;1]$ называется **реализуемой**, если $f = f_{\mathfrak{A}}$ для некоторого ВА $\mathfrak{A}$.

Согласно теореме А2.7, если $|Q_f| < \infty$, то f реализуема. Как демонстрирует следующая теорема, обращение теоремы А2.7 неверно.

ВА и реализуемые ВР

Определение А2.22.

ВР $f : \Sigma^* \times S^* \to [0;1]$ называется **реализуемой**, если $f = f_{\mathfrak{A}}$ для некоторого ВА $\mathfrak{A}$.

Согласно теореме А2.7, если $|Q_f| < \infty$, то f реализуема. Как демонстрирует следующая теорема, обращение теоремы А2.7 неверно.

Теорема А2.8.

Пусть $f = f_{\mathfrak{A}}$, где $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi^0)$ — ВА, удовлетворяющий следующим условиям:
1) $|Q| = 2$, $\xi^0 = (1, 0)$;
2) $A^{\sigma,s} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для некоторых $\sigma \in \Sigma$, $s \in S$ и $\gamma, \delta \in (0;1)$.
Тогда $|Q_f| = \infty$.

ВА и реализуемые ВР

Доказательство.

Пусть $\alpha_k = \underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma}_{k}$ и $\beta_k = \underbrace{ss\ldots s}_{k}$, $k \in \mathbb{N}$; тогда

$A^{\alpha_k,\beta_k} = \gamma^k \begin{pmatrix} 1 & k\delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$f(\alpha_k, \beta_k) = \xi^0 A^{\alpha_k,\beta_k} I = \gamma^k(1, k\delta)I = \gamma^k(1 + k\delta)$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определена ОВР f_{α_k,β_k}, для которой выполняется следующее ($l \in \mathbb{N}$):

$$f_{\alpha_k,\beta_k}(\alpha_l, \beta_l) = \frac{f(\alpha_k\hat{}\alpha_l, \beta_k\hat{}\beta_l)}{f(\alpha_k,\beta_k)} = \\ = \frac{\gamma^{k+l}(1+(k+l)\delta)}{\gamma^k(1+k\delta)} = \frac{\gamma^l(1+(k+l)\delta)}{1+k\delta}.$$

ВА и реализуемые ВР

Доказательство (окончание).

Далее, если $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ таковы, что $f_{\alpha_{k_1},\beta_{k_1}} \equiv f_{\alpha_{k_2},\beta_{k_2}}$, т. е.

$$\frac{\gamma^l(1+(k_1+l)\delta)}{1+k_1\delta} = \frac{\gamma^l(1+(k_2+l)\delta)}{1+k_2\delta}$$

для всех $l \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $k_1 = k_2$ (обосновать!) Таким образом, $\{f_{\alpha_k,\beta_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Q_f$ и $|Q_f| = \infty$. $\square$

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Пусть Σ и S — конечные множества. Через $[0;1]^{\Sigma^* \times S^*}$ будем обозначать множество всех функций вида $f : \Sigma^* \times S^* \to [0;1]$.

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Пусть Σ и S — конечные множества. Через $[0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$ будем обозначать множество всех функций вида $f : \Sigma^* \times S^* \to [0;1]$.

Определение A2.23.

Пусть $\Gamma \subseteq [0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$; тогда **конусом над** Γ называется множество $C_0(\Gamma) \subseteq [0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$, состоящее из функций вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i$, где $a_i \in [0;1]$, $f_i \in \Gamma$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ n \in \mathbb{N})$.

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Пусть Σ и S — конечные множества. Через $[0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$ будем обозначать множество всех функций вида $f:\Sigma^*\times S^*\to[0;1]$.

Определение А2.23.

Пусть $\Gamma\subseteq[0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$; тогда **конусом над** Γ называется множество $C_0(\Gamma)\subseteq[0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$, состоящее из функций вида $\sum\limits_{i=1}^{n}a_if_i$, где $a_i\in[0;1]$, $f_i\in\Gamma$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant 1$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ n\in\mathbb{N})$.

Определение А2.24.

Для любых $\sigma\in\Sigma$ и $s\in S$ определим отображение $D^{\sigma,s}:[0;1]^{\Sigma^*\times S^*}\to[0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$, называемое **сдвигом**, сопоставляющее каждой функции $f\in[0;1]^{\Sigma^*\times S^*}$ функцию $fD^{\sigma,s}$, определяемую следующим образом: $fD^{\sigma,s}(\alpha,\beta)=f(\sigma\hat{}\alpha,s\hat{}\beta)$ для всех $\alpha\in\Sigma^*$ и $\beta\in S^*$.

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Определение А2.25.

Подмножество $\Gamma \subseteq [0;1]^{\Sigma^* \times S^*}$ называется **устойчивым относительно сдвигов**, если $fD^{\sigma,s} \in C_0(\Gamma)$ для всех $f \in \Gamma$, $\sigma \in \Sigma$ и $s \in S$.

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Определение А2.25.

Подмножество $\Gamma \subseteq [0;1]^{\Sigma^* \times S^*}$ называется **устойчивым относительно сдвигов**, если $fD^{\sigma,s} \in C_0(\Gamma)$ для всех $f \in \Gamma$, $\sigma \in \Sigma$ и $s \in S$.

Теорема А2.9(Б-Х-М)

Пусть Σ и S — конечные множества и пусть $f \in R(\Sigma, S)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. f реализуема;
2. найдётся конечное $\Gamma \subseteq R(\Sigma, S)$, устойчивое относительно сдвигов, для которого $f \in C_0(\Gamma)$.

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) Пусть f реализуема, т. е. найдётся ВА $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi^0)$, для которого выполняется соотношение $f(\alpha, \beta) = f_{\mathfrak{A}}(\alpha, \beta) = A^{\xi^0}(\alpha, \beta) = \xi^0 A^{\alpha,\beta} I$ для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $\beta \in S^*$. Для каждого $q \in Q$ положим $\mathfrak{A}_q = (Q, \Sigma, S, P, \xi_q)$, и в качестве искомого Γ возьмём множество $\Gamma_0 = \{f_{\mathfrak{A}_q} \mid q \in Q\}$. Имеем $f \in C_0(\Gamma_0)$, поскольку $f = \sum\limits_{q \in Q} q^{\xi^0} f_{\mathfrak{A}_q}$, а $\Gamma_0 \subseteq R(\Sigma, S)$, по теореме А2.6.

Докажем, что Γ_0 устойчиво относительно сдвигов, а именно, выполняется соотношение $f_{\mathfrak{A}_q} D^{\sigma,s} \in C_0(\Gamma_0)$ для всех $q \in Q$, $\sigma \in \Sigma$ и $s \in S$. Из определения сдвига получаем цепочку равенств ($\alpha \in \Sigma^*$, $\beta \in S^*$):

$$f_{\mathfrak{A}_q} D^{\sigma,s}(\alpha, \beta) = f_{\mathfrak{A}_q}(\sigma\hat{}\alpha, s\hat{}\beta) = \xi_q A^{\sigma\hat{}\alpha, s\hat{}\beta} I = \xi_q A^{\sigma,s} A^{\alpha,\beta} I.$$

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Доказательство (продолжение).

Далее, имеем

$$\xi_q A^{\sigma,s} A^{\alpha,\beta} I = \Big(\sum_{q' \in Q} a_{q'} \xi_{q'}\Big) A^{\alpha,\beta} I =$$
$$= \sum_{q' \in Q} a_{q'} \xi_{q'} A^{\alpha,\beta} I = \sum_{q' \in Q} a_{q'} f_{\mathfrak{A}_{q'}}(\alpha, \beta),$$

где $a_{q'}$ — соответствующая компонента вектор-строки $\xi_q A^{\sigma,s}$; кроме того, $a_{q'} = P(q, \sigma, q', s)$, поэтому $a_{q'} \in [0;1]$ и $\sum\limits_{q' \in Q} a_{q'} = \sum\limits_{q' \in Q} P(q, \sigma, q', s) \leqslant \sum\limits_{q' \in Q,\, s' \in S} P(q, \sigma, q', s') = 1$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Пусть $f \in C_0(\Gamma)$, где $\Gamma = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \subseteq R(\Sigma, S)$ — множество, устойчивое относительно сдвигов. Определим структуру $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma, S, P, \xi^0)$, удовлетворяющую условиям ниже, и докажем, что она является искомым ВА.

- $Q = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Доказательство (продолжение).

• $\xi^0 = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ удовлетворяют условию $f = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$, $a_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $\sum_{i=1}^{m} a_i \leqslant 1$ (напомним, $f \in C_0(\Gamma)$). Так как $f \in R(\Sigma, S)$, имеем $1 = f(\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} a_i$; тем самым, $\xi^0 \in Q^{\triangle}$.

• Функцию $P : (Q \times \Sigma) \times (Q \times S) \to [0;1]$ определим следующим образом: пусть даны $i \in Q$, $\sigma \in \Sigma$ и $s \in S$; так как $f_i D^{\sigma,s} \in C_0(\Gamma)$, найдутся $a_{ij}^{\sigma,s} \in [0;1]$ $(j \in Q)$, для которых будут выполняться соотношения $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{\sigma,s} \leqslant 1$ и $f_i D^{\sigma,s} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{\sigma,s} f_j$; положим $P(i,\sigma,j,s) = a_{ij}^{\sigma,s}$ для всех $j \in Q$.

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Доказательство (продолжение)

Отметим, что имеет место система матричных равенств ($\sigma \in \Sigma$, $s \in S$):

$$\begin{pmatrix} f_1 D^{\sigma,s} \\ f_2 D^{\sigma,s} \\ \dots \\ f_m D^{\sigma,s} \end{pmatrix} = A^{\sigma,s} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где $A^{\sigma,s} = (a_{ij}^{\sigma,s})_{i,j=1,\dots,m}$.

Покажем теперь, что P является СФ вида $Q \times \Sigma \underset{r}{\rightarrow} Q \times S$.

Действительно, выполняется равенство ($i \in Q$, $\sigma \in \Sigma$)

$$1 = \sum_{s \in S} f_i(\sigma, s) = \sum_{s \in S} f_i D^{\sigma,s}(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{s \in S} \sum_{j \in Q} a_{ij}^{\sigma,s} f_j(\varepsilon, \varepsilon) =$$
$$= \sum_{j \in Q,\, s \in S} a_{ij}^{\sigma,s} = \sum_{j \in Q,\, s \in S} P(i, \sigma, j, s).$$

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Доказательство (продолжение).

Докажем, что реакция ВА $\mathfrak{A}$ совпадает с f, т. е.

$$f_{\mathfrak{A}}(\alpha,\beta) = \xi^0 A^{\alpha,\beta} I = f(\alpha,\beta) \tag{11}$$

для всех $\alpha \in \Sigma^*$ и $\beta \in S^*$.
Пусть $\alpha \in \Sigma^*$ и $\beta \in S^*$. Если $\mathrm{lh}(\alpha) \neq \mathrm{lh}(\beta)$, то $A^{\alpha,\beta} = \mathbf{0}$ и $f(\alpha,\beta) \overset{*}{=} 0 = \overrightarrow{0}\, I = \xi^0 \mathbf{0} I \overset{**}{=} \xi^0 A^{\alpha,\beta} I = f_{\mathfrak{A}}(\alpha,\beta)$ (равенство $*$ следует из того, что $f \in R(\Sigma, S)$, а равенство $**$ — из определения матрицы $A^{\alpha,\beta}$).
Пусть теперь $\mathrm{lh}(\alpha) = \mathrm{lh}(\beta)$. Докажем индукцией по $\mathrm{lh}(\alpha)$, что

$$\begin{pmatrix} f_1(\alpha,\beta) \\ \dots \\ f_m(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = A^{\alpha,\beta} I. \tag{12}$$

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Доказательство (продолжение).

Если $\alpha = \beta = \varepsilon$, то

$$\begin{pmatrix} f_1(\varepsilon,\varepsilon) \\ \dots \\ f_m(\varepsilon,\varepsilon) \end{pmatrix} = I = E_m I = A^{\varepsilon,\varepsilon} I.$$

Если $\alpha = \sigma\hat{\ }\alpha'$ и $\beta = s\hat{\ }\beta'$, то

$$A^{\alpha,\beta} I = A^{\sigma\hat{\ }\alpha', s\hat{\ }\beta'} I = A^{\sigma,s} A^{\alpha',\beta'} I \overset{*}{=} A^{\sigma,s} \begin{pmatrix} f_1(\alpha',\beta') \\ \dots \\ f_m(\alpha',\beta') \end{pmatrix} \overset{**}{=}$$

$$\overset{**}{=} \begin{pmatrix} f_1 D^{\sigma,s}(\alpha',\beta') \\ \dots \\ f_m D^{\sigma,s}(\alpha',\beta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\sigma\hat{\ }\alpha', s\hat{\ }\beta') \\ \dots \\ f_m(\sigma\hat{\ }\alpha', s\hat{\ }\beta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha,\beta) \\ \dots \\ f_m(\alpha,\beta) \end{pmatrix}$$

Критерий Бухараева–Хомута–Миронова

Доказательство (окончание).

(равенство $*$ выполняется по индукционному предположению, а равенство $**$ — из (10)).
Далее, имеем

$$\xi^0 A^{\alpha,\beta} I = \xi^0 \begin{pmatrix} f_1(\alpha,\beta) \\ \dots \\ f_m(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta).$$

Таким образом, $f(\alpha,\beta) = f_{\mathfrak{A}}(\alpha,\beta)$. $\square$

Спасибо за внимание.