Лекция C5
Нумерации и вычислимость, II

Вадим Пузаренко

25 декабря 2023 г.

1-сводимость

Определение C5.1.

Говорят, что ν_0 **1-сводится к** ν_1 (и используют обозначение $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$), если существует инъективная вф f такая, что $\nu_0(n) = \nu_1 f(n)$ для всех $n \in \omega$.

1-сводимость

Определение С5.1.

Говорят, что ν_0 **1-сводится к** ν_1 (и используют обозначение $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$), если существует инъективная вф f такая, что $\nu_0(n) = \nu_1 f(n)$ для всех $n \in \omega$.

Определение С5.2.

Говорят, что ν_0 и ν_1 **вычислимо изоморфны** (и используют обозначение $\nu_0 \approx \nu_1$), если существует вычислимая перестановка p такая, что $\nu_0(n) = \nu_1 p(n)$ для всех $n \in \omega$.

1-сводимость

Определение C5.1.

Говорят, что ν_0 **1-сводится к** ν_1 (и используют обозначение $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$), если существует инъективная вф f такая, что $\nu_0(n) = \nu_1 f(n)$ для всех $n \in \omega$.

Определение C5.2.

Говорят, что ν_0 и ν_1 **вычислимо изоморфны** (и используют обозначение $\nu_0 \approx \nu_1$), если существует вычислимая перестановка p такая, что $\nu_0(n) = \nu_1 p(n)$ для всех $n \in \omega$.

Замечание C5.1.

Если $\nu_0 \approx \nu_1$, то $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant_1 \nu_0$. Следующее утверждение говорит, что справедливо и обратное утверждение.

Изоморфизм нумераций

Теорема C5.1.

Пусть нумерации ν_0 и ν_1 таковы, что $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant_1 \nu_0$. Тогда $\nu_0 \approx \nu_1$.

Изоморфизм нумераций

Теорема C5.1.

Пусть нумерации ν_0 и ν_1 таковы, что $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant_1 \nu_0$. Тогда $\nu_0 \approx \nu_1$.

Доказательство.

Пусть f, g — инъективные вф, сводящие ν_0 к ν_1 и ν_1 к ν_0 соответственно, т.е. $\nu_0 = \nu_1 f$ и $\nu_1 = \nu_0 g$. Определим теперь функции h_0 и h_1 следующим образом:

$$h_0(x,0) \risingdotseq x; \qquad h_1(x,0) \risingdotseq x$$
$$h_0(x,y+1) \risingdotseq gfh_0(x,y); \qquad h_1(x,y+1) \risingdotseq fgh_1(x,y).$$

Функции h_0, h_1 вычислимы, как функции, полученные из вычислимых с помощью схем примитивной рекурсии, суперпозиции, и, к тому же, имеет место $h_0(x,y) = (gf)^y(x)$, $h_1(x,y) = (fg)^y(x)$ для всех $x, y \in \omega$ (отметим, что функция k называется **сплинтером** функции p в точке $x \in \omega$, если $k(y) = p^y(x)$ для всех $y \in \omega$).

Положим $S_0(x) \risingdotseq \{h_0(x,t) | t \in \omega\}$, $S_1(x) \risingdotseq \{h_1(x,t) | t \in \omega\}$. Заметим, что для любого $t \in \omega$ выполняются равенства

$\nu_0(x) = \nu_0 h_0(x,t)$, $\nu_1 x = \nu_1 h_1(x,t)$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство (продолжение).

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Изоморфизм нумераций

Доказательство (продолжение).

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма C5.1A.

Пусть $S_0(x)$ ($S_1(x)$) — конечное множество. Тогда $S_1(f(x))$ ($S_0(g(x))$) также является конечным множеством, имеющим столько же элементов, и наоборот. Кроме того, если y таково, что $S_0(x)\cap S_0(y)\neq\varnothing$ ($S_1(x)\cap S_1(y)\neq\varnothing$), то $S_0(x)=S_0(y)$ ($S_1(x)=S_1(y)$). В частности, $S_0(x)=S_0(gf(x))$ ($S_1(x)=S_1(fg(x))$).

Изоморфизм нумераций

Доказательство (продолжение).

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма C5.1A.

Пусть $S_0(x)$ ($S_1(x)$) — конечное множество. Тогда $S_1(f(x))$ ($S_0(g(x))$) также является конечным множеством, имеющим столько же элементов, и наоборот. Кроме того, если y таково, что $S_0(x) \cap S_0(y) \neq \varnothing$ ($S_1(x) \cap S_1(y) \neq \varnothing$), то $S_0(x) = S_0(y)$ ($S_1(x) = S_1(y)$). В частности, $S_0(x) = S_0(gf(x))$ ($S_1(x) = S_1(fg(x))$).

Доказательство леммы C5.1A.

Покажем сначала, что либо функция $\lambda y.h_0(x, y)$ является инъекцией, либо она строго периодическая, т.е. найдётся $z > 0$ такое, что $h_0(x, 0) = h_0(x, z)$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство леммы C5.1A (продолжение).

Предположим, что $\lambda y.h_0(x,y)$ не является инъекцией; тогда существуют $y_1 < y_2$ такие, что $h_0(x,y_1) = h_0(x,y_2)$. Но $h_0(x,y_1) = (gf)^{y_1}(x)$, а $h_0(x,y_2) = (gf)^{y_2}(x)$. Так как gf является инъекцией, имеем $h_0(x,0) = x = (gf)^{y_2-y_1}(x) = h_0(x,y_2-y_1)$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство леммы С5.1А (продолжение).

Предположим, что $\lambda y.h_0(x,y)$ не является инъекцией; тогда существуют $y_1 < y_2$ такие, что $h_0(x,y_1) = h_0(x,y_2)$. Но $h_0(x,y_1) = (gf)^{y_1}(x)$, а $h_0(x,y_2) = (gf)^{y_2}(x)$. Так как gf является инъекцией, имеем $h_0(x,0) = x = (gf)^{y_2-y_1}(x) = h_0(x,y_2-y_1)$.
Итак, если $S_0(x)$ — конечное множество, содержащее $k+1$ элемент, то его элементы представляют собой значения функции $\lambda y.h_0(x,y)$ от первых $k+1$ аргументов. А именно, $S_0(x) = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$, где $x_0 \leftrightharpoons x = h_0(x,0)$, $x_1 \leftrightharpoons h(x,1)$, ..., $x_k \leftrightharpoons h_0(x,k)$,
причём $gf(x_k) = x_0$. Имеем $\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k)\} \subseteq S_1(f(x))$, поскольку $x_i = (gf)^i(x)$ и $f(x_i) = (fg)^i(f(x)) \in S_1(f(x))$. Кроме того, $f(x_i) \neq f(x_j)$, как только $0 \leqslant i < j \leqslant k$ (что вытекает из того, что f инъективна), и $fg(f(x_k)) = f(gf(x_k)) = f(x)$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство леммы C5.1A (продолжение).

Предположим, что $\lambda y.h_0(x, y)$ не является инъекцией; тогда существуют $y_1 < y_2$ такие, что $h_0(x, y_1) = h_0(x, y_2)$. Но $h_0(x, y_1) = (gf)^{y_1}(x)$, а $h_0(x, y_2) = (gf)^{y_2}(x)$. Так как gf является инъекцией, имеем $h_0(x, 0) = x = (gf)^{y_2 - y_1}(x) = h_0(x, y_2 - y_1)$.
Итак, если $S_0(x)$ — конечное множество, содержащее $k + 1$ элемент, то его элементы представляют собой значения функции $\lambda y.h_0(x, y)$ от первых $k + 1$ аргументов. А именно, $S_0(x) = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, где $x_0 \leftrightharpoons x = h_0(x, 0)$, $x_1 \leftrightharpoons h(x, 1)$, …, $x_k \leftrightharpoons h_0(x, k)$,
причём $gf(x_k) = x_0$. Имеем $\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)\} \subseteq S_1(f(x))$, поскольку $x_i = (gf)^i(x)$ и $f(x_i) = (fg)^i(f(x)) \in S_1(f(x))$. Кроме того, $f(x_i) \neq f(x_j)$, как только $0 \leqslant i < j \leqslant k$ (что вытекает из того, что f инъективна), и $fg(f(x_k)) = f(gf(x_k)) = f(x)$.
Итак, если $S_0(x)$ — конечное множество, то $S_1(f(x))$ конечно, и отображение $y \mapsto f(y)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $S_0(x)$ и $S_1(f(x))$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство леммы С5.1А (окончание).

Аналогично доказывается, что отображение $y \mapsto g(y)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $S_1(f(x))$ и $S_0(gf(x))$. Тем самым, если $S_1(f(x))$ конечно, то и $S_0(gf(x))$ конечно.

Пусть теперь y таково, что $z \in S_0(x) \cap S_0(y)$. Тогда $z = (gf)^{y_0}(x)$ для подходящего $0 \leqslant y_0 \leqslant k$ и, следовательно,

$x = (gf)^{k+1}(x) = (gf)^{k+1-y_0}(z) \in S_0(y)$; таким образом, $S_0(x) \subseteq S_0(y)$.

Отметим сначала, что $S_0(y)$ конечно: пусть $z = (gf)^{z_0}(y)$, тогда

$S_0(y) = \{(gf)^i(y) | 0 \leqslant i < z_0\} \cup S_0(z) \subseteq \{(gf)^i(y) | 0 \leqslant i < z_0\} \cup S_0(x)$.

Далее, так как $S_0(y)$ конечно, существует $z_1 > z_0$ такое, что $(gf)^{z_1}(y) = y$, ввиду строгой периодичности. Таким образом,

$y = (gf)^{z_1 - z_0}(z) \in S_0(x)$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство леммы C5.1A (окончание).

Аналогично доказывается, что отображение $y \mapsto g(y)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $S_1(f(x))$ и $S_0(gf(x))$. Тем самым, если $S_1(f(x))$ конечно, то и $S_0(gf(x))$ конечно.
Пусть теперь y таково, что $z \in S_0(x) \cap S_0(y)$. Тогда $z = (gf)^{y_0}(x)$ для подходящего $0 \leqslant y_0 \leqslant k$ и, следовательно,
$x = (gf)^{k+1}(x) = (gf)^{k+1-y_0}(z) \in S_0(y)$; таким образом, $S_0(x) \subseteq S_0(y)$.
Отметим сначала, что $S_0(y)$ конечно: пусть $z = (gf)^{z_0}(y)$, тогда
$S_0(y) = \{(gf)^i(y) | 0 \leqslant i < z_0\} \cup S_0(z) \subseteq \{(gf)^i(y) | 0 \leqslant i < z_0\} \cup S_0(x)$.
Далее, так как $S_0(y)$ конечно, существует $z_1 > z_0$ такое, что $(gf)^{z_1}(y) = y$, ввиду строгой периодичности. Таким образом,
$y = (gf)^{z_1 - z_0}(z) \in S_0(x)$.
Аналогично разбирается второй случай леммы. $\square$

Изоморфизм нумераций

Доказательство леммы C5.1A (окончание).

Аналогично доказывается, что отображение $y \mapsto g(y)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $S_1(f(x))$ и $S_0(gf(x))$. Тем самым, если $S_1(f(x))$ конечно, то и $S_0(gf(x))$ конечно.

Пусть теперь y таково, что $z \in S_0(x) \cap S_0(y)$. Тогда $z = (gf)^{y_0}(x)$ для подходящего $0 \leqslant y_0 \leqslant k$ и, следовательно,

$x = (gf)^{k+1}(x) = (gf)^{k+1-y_0}(z) \in S_0(y)$; таким образом, $S_0(x) \subseteq S_0(y)$.

Отметим сначала, что $S_0(y)$ конечно: пусть $z = (gf)^{z_0}(y)$, тогда

$S_0(y) = \{(gf)^i(y) | 0 \leqslant i < z_0\} \cup S_0(z) \subseteq \{(gf)^i(y) | 0 \leqslant i < z_0\} \cup S_0(x)$.

Далее, так как $S_0(y)$ конечно, существует $z_1 > z_0$ такое, что $(gf)^{z_1}(y) = y$, ввиду строгой периодичности. Таким образом,

$y = (gf)^{z_1 - z_0}(z) \in S_0(x)$.

Аналогично разбирается второй случай леммы. $\square$

Доказательство теоремы C5.1 (продолжение).

Будем эффективно строить множество пар натуральных чисел M так, чтобы выполнялись следующие условия:

Изоморфизм нумераций

Доказательство теоремы C5.1 (продолжение).

1) для любого $n \in \omega$ существует единственное $m \in \omega$ такое, что $\langle n, m\rangle \in M$;
2) для любого $m \in \omega$ существует единственное $n \in \omega$ такое, что $\langle n, m\rangle \in M$;
3) $\nu_0 n = \nu_1 m$ для любой пары $\langle n, m\rangle \in M$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство теоремы С5.1 (продолжение).

1) для любого $n \in \omega$ существует единственное $m \in \omega$ такое, что $\langle n, m\rangle \in M$;
2) для любого $m \in \omega$ существует единственное $n \in \omega$ такое, что $\langle n, m\rangle \in M$;
3) $\nu_0 n = \nu_1 m$ для любой пары $\langle n, m\rangle \in M$.

Построение множества M будет осуществляться по шагам. На каждом шаге t будет добавляться не более одной пары во множество M_t, представителя сильной аппроксимации множества M, причём так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) если $2n < t$, то существует единственное m такое, что $\langle n, m\rangle \in M_t$;
б) если $2n + 1 < t$, то существует единственное m такое, что $\langle m, n\rangle \in M_t$;
в) если $\langle m, n\rangle \in M_t$, то $n \in S_1(f(m))$ или $m \in S_0(g(n))$ (заметим, что из этого следует справедливость равенства $\nu_0 m = \nu_1 n$).

Изоморфизм нумераций

Доказательство теоремы C5.1 (продолжение).

КОНСТРУКЦИЯ.

Шаг 0. Положим $M_0 \leftrightharpoons \varnothing$.

Шаг $t = 2n+2$. **А.** Если в множестве M_{2n+1} имеется пара вида $\langle m, n\rangle$ для подходящего m, то полагаем $M_{2n+2} \leftrightharpoons M_{2n+1}$.

Б. Пусть не выполняется случай А, т.е. $\langle m, n\rangle \notin M_{2n+1}$ для всех $m \in \omega$. Тогда находим $t_0 \leftrightharpoons \mu t(\forall x[\langle h_0(g(n), t), x\rangle \notin M_{2n+1}])$ и полагаем $M_{2n+2} \leftrightharpoons M_{2n+1} \cup \{\langle h_0(g(n), t_0), n\rangle\}$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство теоремы C5.1 (продолжение).

КОНСТРУКЦИЯ.

Шаг 0. Положим $M_0 \leftrightharpoons \varnothing$.

Шаг $t = 2n+2$. **А.** Если в множестве M_{2n+1} имеется пара вида $\langle m, n\rangle$ для подходящего m, то полагаем $M_{2n+2} \leftrightharpoons M_{2n+1}$.

Б. Пусть не выполняется случай А, т.е. $\langle m, n\rangle \notin M_{2n+1}$ для всех $m \in \omega$. Тогда находим $t_0 \leftrightharpoons \mu t(\forall x[\langle h_0(g(n), t), x\rangle \notin M_{2n+1}])$ и полагаем $M_{2n+2} \leftrightharpoons M_{2n+1} \cup \{\langle h_0(g(n), t_0), n\rangle\}$.

Покажем, что такое t_0 существует. Если $S_0(g(n))$ бесконечно, то существование такого числа следует из того, что M_{2n+1} конечно. Пусть теперь $S_0(g(n))$ конечно. Допустим, что не существует такого t, что

$$\forall x[\langle h_0(g(n), t), x\rangle \notin M_{2n+1}]. \qquad (1)$$

Пусть $S_0(g(n))$ имеет $k+1$ элементов, а именно, $x_0 = g(n)$, $x_1 = gfg(n) = gf(x_0)$, ..., $x_k = (gf)^k g(n) = gf(x_{k-1})$.

Изоморфизм нумераций

Доказательство теоремы C5.1 (продолжение).

Так как условие (1) не выполнено, найдутся попарно различные элементы y_0, y_1, ..., y_k такие, что имеет место $\langle x_i, y_i \rangle \in M_{2n+1}$, $i = 0, 1, \ldots, k$.
Из условия в) следует, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, k$ имеет место $y_i \in S_1(f(x_i))$ или $x_i \in S_0(g(y_i))$.
Так как $S_0(g(n))$ конечно, множество $S_1(fg(n))$ также является конечным; кроме того, $|S_0(g(n))| = |S_1(fg(n))| = k + 1$ и $S_1(fg(n)) = S_1(n)$. Далее, $f(x_i) \in S_1(n)$, а по лемме C5.1A, $S_1(f(x_i)) = S_1(n)$. Тем самым, если $y_i \in S_1(f(x_i))$, то $y_i \in S_1(n)$ (здесь $0 \leqslant i \leqslant k$). Пусть теперь $x_i \in S_0(g(y_i))$, тогда $x_i = (gf)^t g(y_i)$ для некоторого t и $f(x_i) = (fg)^{t+1}(y_i)$. Следовательно, $S_1(y_i) = S_1(f(x_0)) = S_1(n)$ и $y_i \in S_1(n)$. Так как $|S_1(n)| = k + 1$, а все y_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, различны, имеем $n \in S_1(n) = \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$.
Следовательно, $y_i = n$ и $\langle x_i, y_i \rangle = \langle x_i, n \rangle \in M_{2n+1}$ для подходящего $0 \leqslant i \leqslant k$. Пришли к противоречию с тем, что не существует t, удовлетворяющее (1).

Изоморфизм нумераций

Доказательство теоремы С5.1 (окончание).

Шаг $t = 2n+1$. **А.** Если в множестве M_{2n} имеется пара вида $\langle n, m\rangle$ для подходящего m, то полагаем $M_{2n+1} \leftrightharpoons M_{2n}$.

Б. Пусть не выполняется случай А, т.е. $\langle n, m\rangle \notin M_{2n}$ для всех $m \in \omega$. Тогда находим $t_0 \leftrightharpoons \mu t(\forall x[\langle x, h_1(f(n), t)\rangle \notin M_{2n}])$ и полагаем $M_{2n+1} \leftrightharpoons M_{2n} \cup \{\langle n, h_1(f(n), t_0)\rangle\}$.

Существование t_0 показывается, как выше.

Шаг $t = \omega$. Полагаем $M \leftrightharpoons \bigcup\limits_{t\in\omega} M_t$.

ЗАВЕРШЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ.

Изоморфизм нумераций

Доказательство теоремы C5.1 (окончание).

Шаг $t = 2n+1$. **А.** Если в множестве M_{2n} имеется пара вида $\langle n, m\rangle$ для подходящего m, то полагаем $M_{2n+1} \leftrightharpoons M_{2n}$.
Б. Пусть не выполняется случай А, т.е. $\langle n, m\rangle \notin M_{2n}$ для всех $m \in \omega$. Тогда находим $t_0 \leftrightharpoons \mu t(\forall x[\langle x, h_1(f(n), t)\rangle \notin M_{2n}])$ и полагаем $M_{2n+1} \leftrightharpoons M_{2n} \cup \{\langle n, h_1(f(n), t_0)\rangle\}$.
Существование t_0 показывается, как выше.
Шаг $t = \omega$. Полагаем $M \leftrightharpoons \bigcup\limits_{t\in\omega} M_t$.

ЗАВЕРШЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ.
Ввиду выполнения условий а), б) и в) для M_t, $t \in \omega$, множество M удовлетворяет условиям 1), 2) и 3).
По условию 1), $M = \Gamma_p$ некоторой всюду определенной функции p. Так как M вп, функция p вычислима. По условию 2), функция p — перестановка натурального ряда. Условие 3) показывает, что $\nu_0 = \nu_1 p$. $\square$

Цилиндрические нумерации

Определение C5.3.

Цилиндром нумерации $\nu : \omega \to S$ называется нумерация $c(\nu) : \omega \to S$, определенная следующим образом:

$c(\nu)(c(x, y)) \leftrightharpoons \nu y$, $x, y \in \omega$, или, что то же самое,

$c(\nu)(x) \leftrightharpoons \nu r x$, $x \in \omega$.

Нумерация называется **цилиндрической**, если она вычислимо изоморфна своему цилиндру.

Цилиндрические нумерации

Определение C5.3.

Цилиндром нумерации $\nu : \omega \to S$ называется нумерация $c(\nu) : \omega \to S$, определенная следующим образом:

$c(\nu)(c(x, y)) \leftrightharpoons \nu y,\ x, y \in \omega,$ или, что то же самое,

$c(\nu)(x) \leftrightharpoons \nu r x,\ x \in \omega.$

Нумерация называется **цилиндрической**, если она вычислимо изоморфна своему цилиндру.

Лемма C5.1.

Пусть ν_0 и ν_1 — две нумерации множества S. Если существует вычислимая функция f, сводящая ν_0 к ν_1, такая что $\rho f = \omega$, то $\nu_0 \equiv \nu_1$.

Цилиндрические нумерации

Определение С5.3.

Цилиндром нумерации $\nu : \omega \to S$ называется нумерация $c(\nu) : \omega \to S$, определенная следующим образом:

$c(\nu)(c(x, y)) \leftrightharpoons \nu y$, $x, y \in \omega$, или, что то же самое,

$c(\nu)(x) \leftrightharpoons \nu r x$, $x \in \omega$.

Нумерация называется **цилиндрической**, если она вычислимо изоморфна своему цилиндру.

Лемма С5.1.

Пусть ν_0 и ν_1 — две нумерации множества S. Если существует вычислимая функция f, сводящая ν_0 к ν_1, такая что $\rho f = \omega$, то $\nu_0 \equiv \nu_1$.

Доказательство.

В самом деле, $\nu_0 = \nu_1 f$, поэтому $\nu_0 \leqslant \nu_1$. Положим $g(x) \leftrightharpoons \mu y[f(y) = x]$, тогда $\nu_0 g(x) = \nu_1 f(g(x)) = \nu_1 x$ и, следовательно, $\nu_1 \leqslant \nu_0$. Таким образом, $\nu_0 \equiv \nu_1$. $\square$

Снова однозначные нумерации

Лемма C5.2.

Если ν_0 и ν_1 — нумерации множества S, ν_0 — однозначная нумерация, то из $\nu_0 \leqslant \nu_1$ следует $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$.

Снова однозначные нумерации

Лемма C5.2.

Если ν_0 и ν_1 — нумерации множества S, ν_0 — однозначная нумерация, то из $\nu_0 \leqslant \nu_1$ следует $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu_1 f$; докажем, что f инъективна. В самом деле, $f(n) = f(m) \Rightarrow \nu_0 n = \nu_1 f(n) = \nu_1 f(m) = \nu_0 m \Rightarrow n = m$. $\square$

Снова однозначные нумерации

Лемма C5.2.

Если ν_0 и ν_1 — нумерации множества S, ν_0 — однозначная нумерация, то из $\nu_0 \leqslant \nu_1$ следует $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu_1 f$; докажем, что f инъективна. В самом деле, $f(n) = f(m) \Rightarrow \nu_0 n = \nu_1 f(n) = \nu_1 f(m) = \nu_0 m \Rightarrow n = m$. $\square$

Следствие C5.1.

Если ν_0 и ν_1 — нумерации множества S, ν_0 — однозначная нумерация и $\nu_1 \leqslant \nu_0$, то $\nu_1 \equiv \nu_0$. Если, к тому же, ν_1 однозначна, то $\nu_1 \approx \nu_0$.

Снова однозначные нумерации

Лемма C5.2.

Если ν_0 и ν_1 — нумерации множества S, ν_0 — однозначная нумерация, то из $\nu_0 \leqslant \nu_1$ следует $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu_1 f$; докажем, что f инъективна. В самом деле, $f(n) = f(m) \Rightarrow \nu_0 n = \nu_1 f(n) = \nu_1 f(m) = \nu_0 m \Rightarrow n = m$. □

Следствие C5.1.

Если ν_0 и ν_1 — нумерации множества S, ν_0 — однозначная нумерация и $\nu_1 \leqslant \nu_0$, то $\nu_1 \equiv \nu_0$. Если, к тому же, ν_1 однозначна, то $\nu_1 \approx \nu_0$.

Доказательство.

Пусть ν_0 и ν_1 — нумерации из условия. Тогда из того, что $\nu_1 \leqslant \nu_0$ и ν_0 минимальна (см. следствие C4.2), заключаем, что $\nu_0 \equiv \nu_1$.

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство (окончание).

Если же обе нумерации ν_0 и ν_1 однозначные, то, по доказанному, $\nu_0 \equiv \nu_1$, и по лемме C5.2, $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant_1 \nu_0$. По теореме C5.1, $\nu_0 \approx \nu_1$. $\square$

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство (окончание).

Если же обе нумерации ν_0 и ν_1 однозначные, то, по доказанному, $\nu_0 \equiv \nu_1$, и по лемме C5.2, $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant_1 \nu_0$. По теореме C5.1, $\nu_0 \approx \nu_1$. □

Лемма C5.3.

Какова бы ни была нумерация ν, имеем $\nu \leqslant_1 c(\nu)$ и $c(\nu) \leqslant \nu$; в частности, $\nu \equiv c(\nu)$.

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство (окончание).

Если же обе нумерации ν_0 и ν_1 однозначные, то, по доказанному, $\nu_0 \equiv \nu_1$, и по лемме C5.2, $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant_1 \nu_0$. По теореме C5.1, $\nu_0 \approx \nu_1$. □

Лемма C5.3.

Какова бы ни была нумерация ν, имеем $\nu \leqslant_1 c(\nu)$ и $c(\nu) \leqslant \nu$; в частности, $\nu \equiv c(\nu)$.

Доказательство.

В самом деле, вф $\lambda x.c(0,x)$ инъективна и сводит ν к $c(\nu)$; а вф r сводит $c(\nu)$ к ν. □

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство (окончание).

Если же обе нумерации ν_0 и ν_1 однозначные, то, по доказанному, $\nu_0 \equiv \nu_1$, и по лемме C5.2, $\nu_0 \leqslant_1 \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant_1 \nu_0$. По теореме C5.1, $\nu_0 \approx \nu_1$. □

Лемма C5.3.

Какова бы ни была нумерация ν, имеем $\nu \leqslant_1 c(\nu)$ и $c(\nu) \leqslant \nu$; в частности, $\nu \equiv c(\nu)$.

Доказательство.

В самом деле, вф $\lambda x.c(0,x)$ инъективна и сводит ν к $c(\nu)$; а вф r сводит $c(\nu)$ к ν. □

Следствие C5.2.

Существуют эквивалентные, но не вычислимо изоморфные нумерации.

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство.

Пусть ν — однозначная нумерация счётного множества S; тогда $c(\nu) \equiv \nu$. Заметим, что всякая нумерация, вычислимо изоморфная однозначной нумерации, также является однозначной. Однако нумерация $c(\nu)$ не является однозначной. Таким образом, $\nu \not\approx c(\nu)$. $\square$

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство.

Пусть ν — однозначная нумерация счётного множества S; тогда $c(\nu) \equiv \nu$. Заметим, что всякая нумерация, вычислимо изоморфная однозначной нумерации, также является однозначной. Однако нумерация $c(\nu)$ не является однозначной. Таким образом, $\nu \not\approx c(\nu)$. □

Теорема C5.2.

Для нумерации ν следующие утверждения эквивалентны:

1. ν — цилиндрическая нумерация;
2. существует вф f такая, что $\forall x[(f(x) > x) \wedge (\nu(f(x)) = \nu x)]$;
3. $\forall \nu'[(\nu' \leqslant \nu) \to (\nu' \leqslant_1 \nu)]$.

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство.

$(1 \Rightarrow 2)$ Пусть вычислимые перестановки p_1 и p_2 таковы, что $\nu = c(\nu)p_1$ и $c(\nu) = \nu p_2$. Определим функцию f следующим образом: $f(x) \leftrightharpoons p_2(c(\mu z[p_2(c(z, rp_1(x))) > x], rp_1(x)))$. Далее, $f(x)$ вычислима и, к тому же, $f(x) > x$; кроме того,
$\nu f(x) = \nu p_2(c(\mu z[p_2(c(z, rp_1(x))) > x], rp_1(x))) =$
$c(\nu)(c(\mu z[p_2(c(z, rp_1(x))) > x], rp_1(x))) = \nu rp_1(x) = c(\nu)p_1(x) = \nu x$ для всех $x \in \omega$.

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) Пусть вычислимые перестановки p_1 и p_2 таковы, что $\nu = c(\nu)p_1$ и $c(\nu) = \nu p_2$. Определим функцию f следующим образом: $f(x) \leftrightharpoons p_2(c(\mu z[p_2(c(z, rp_1(x))) > x], rp_1(x)))$. Далее, $f(x)$ вычислима и, к тому же, $f(x) > x$; кроме того,
$\nu f(x) = \nu p_2(c(\mu z[p_2(c(z, rp_1(x))) > x], rp_1(x))) =$
$c(\nu)(c(\mu z[p_2(c(z, rp_1(x))) > x], rp_1(x))) = \nu rp_1(x) = c(\nu)p_1(x) = \nu x$ для всех $x \in \omega$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Пусть вф f удовлетворяет условию (2), а нумерация ν' сводится к ν посредством вф g. Возьмём сплинтер F функции f, т.е.

$$\left[\begin{array}{ll} F(0,x) = & x, \\ F(y+1,x) = & fF(y,x). \end{array}\right.$$

Заметим, что $\nu x = \nu f^y(x) = \nu F(y,x)$ для всех $x, y \in \omega$. Определим теперь функцию h следующим образом:

$$\left[\begin{array}{ll} h(0) = & g(0), \\ h(x+1) = & F(s(h(x)), g(x+1)). \end{array}\right.$$

Свойства цилиндрических нумераций

Доказательство (окончание).

Функция h вычислима и, к тому же, является строго возрастающей, поскольку $h(x+1) = f^{s(h(x))}(g(x+1)) \geqslant s(h(x)) > h(x)$ (в частности, инъекцией). Кроме того, $\nu' x = \nu g(x) = \nu h(x)$ для всех $x \in \omega$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Так как $c(\nu) \leqslant \nu$ (посредством функции r), имеем $c(\nu) \leqslant_1 \nu$. Далее, $\nu \leqslant_1 c(\nu)$ (посредством функции $\lambda x.c(0,x)$) и, по теореме C5.1, $\nu \approx c(\nu)$. Таким образом, нумерация ν цилиндрическая. $\square$

Свойства цилиндрических нумераций

Следствие C5.3.

Всякий цилиндр является цилиндрической нумерацией.

Свойства цилиндрических нумераций

Следствие C5.3.

Всякий цилиндр является цилиндрической нумерацией.

Доказательство.

Пусть ν — нумерация множества S; докажем, что $c(\nu)$ является цилиндрической нумерацией. Положим функцию $f(x) \leftrightharpoons c(\mathrm{s}(lx), rx)$, тогда $f(x)$ вычислима, $f(x) = c(\mathrm{s}(lx), rx) > c(lx, rx) = x$ и $c(\nu)(x) = \nu rx = c(\nu)(c(\mathrm{s}(lx), rx)) = c(\nu)fx$. По теореме C5.2(2), $c(\nu)$ — цилиндрическая нумерация. $\square$

Сводимости на натуральных числах

Пусть $A, B \subseteq \omega$.

Сводимости на натуральных числах

Пусть $A, B \subseteq \omega$.

Определение C5.4.

Говорят, что A ***m*-сводится** к B, и обозначают $A \leqslant_m B$, если существует вф f такая, что $n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B$ для всех $n \in \omega$. Говорят, что A и B ***m*-эквивалентны**, и обозначают $A \equiv_m B$, если $A \leqslant_m B$ и $B \leqslant_m A$.

Сводимости на натуральных числах

Пусть $A, B \subseteq \omega$.

Определение C5.4.

Говорят, что A **m-сводится** к B, и обозначают $A \leqslant_m B$, если существует вф f такая, что $n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B$ для всех $n \in \omega$. Говорят, что A и B **m-эквивалентны**, и обозначают $A \equiv_m B$, если $A \leqslant_m B$ и $B \leqslant_m A$.

Определение C5.5.

Говорят, что A **1-сводится** к B, и обозначают $A \leqslant_1 B$, если существует инъективная вф f такая, что $n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B$ для всех $n \in \omega$.

Сводимости на натуральных числах

Пусть $A, B \subseteq \omega$.

Определение C5.4.

Говорят, что A **m-сводится** к B, и обозначают $A \leqslant_m B$, если существует вф f такая, что $n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B$ для всех $n \in \omega$. Говорят, что A и B **m-эквивалентны**, и обозначают $A \equiv_m B$, если $A \leqslant_m B$ и $B \leqslant_m A$.

Определение C5.5.

Говорят, что A **1-сводится** к B, и обозначают $A \leqslant_1 B$, если существует инъективная вф f такая, что $n \in A \Leftrightarrow f(n) \in B$ для всех $n \in \omega$.

Определение C5.6.

Говорят, что A и B **вычислимо изоморфны**, и обозначают $A \approx B$, если существует вычислимая перестановка p такая, что $n \in A \Leftrightarrow p(n) \in B$ для всех $n \in \omega$.

Сводимости на натуральных числах

Определение C5.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндром**, если A и $c(\omega \times D)$ вычислимо изоморфны для некоторого $D \subseteq \omega$. Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндрификацией** множества $B \subseteq \omega$, если $A = c(\omega \times B)$.

Сводимости на натуральных числах

Определение C5.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндром**, если A и $c(\omega \times D)$ вычислимо изоморфны для некоторого $D \subseteq \omega$. Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндрификацией** множества $B \subseteq \omega$, если $A = c(\omega \times B)$.

Замечание C5.2.

1. $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$.

Сводимости на натуральных числах

Определение C5.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндром**, если A и $c(\omega \times D)$ вычислимо изоморфны для некоторого $D \subseteq \omega$. Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндрификацией** множества $B \subseteq \omega$, если $A = c(\omega \times B)$.

Замечание C5.2.

1. $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$.
2. $A \equiv_m B \Leftrightarrow \chi_A \equiv \chi_B$.

Сводимости на натуральных числах

Определение C5.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндром**, если A и $c(\omega \times D)$ вычислимо изоморфны для некоторого $D \subseteq \omega$. Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндрификацией** множества $B \subseteq \omega$, если $A = c(\omega \times B)$.

Замечание C5.2.

1. $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$.
2. $A \equiv_m B \Leftrightarrow \chi_A \equiv \chi_B$.
3. $A \leqslant_1 B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant_1 \chi_B$.

Сводимости на натуральных числах

Определение C5.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндром**, если A и $c(\omega \times D)$ вычислимо изоморфны для некоторого $D \subseteq \omega$. Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндрификацией** множества $B \subseteq \omega$, если $A = c(\omega \times B)$.

Замечание C5.2.

1. $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$.
2. $A \equiv_m B \Leftrightarrow \chi_A \equiv \chi_B$.
3. $A \leqslant_1 B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant_1 \chi_B$.
4. $A \approx B \Leftrightarrow \chi_A \approx \chi_B$.

Сводимости на натуральных числах

Определение С5.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндром**, если A и $c(\omega \times D)$ вычислимо изоморфны для некоторого $D \subseteq \omega$. Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндрификацией** множества $B \subseteq \omega$, если $A = c(\omega \times B)$.

Замечание С5.2.

1. $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$.
2. $A \equiv_m B \Leftrightarrow \chi_A \equiv \chi_B$.
3. $A \leqslant_1 B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant_1 \chi_B$.
4. $A \approx B \Leftrightarrow \chi_A \approx \chi_B$.
5. A — цилиндр, если и только если χ_A — цилиндрическая нумерация.

Сводимости на натуральных числах

Определение C5.7.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндром**, если A и $c(\omega \times D)$ вычислимо изоморфны для некоторого $D \subseteq \omega$. Множество $A \subseteq \omega$ называется **цилиндрификацией** множества $B \subseteq \omega$, если $A = c(\omega \times B)$.

Замечание C5.2.

1. $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B$.
2. $A \equiv_m B \Leftrightarrow \chi_A \equiv \chi_B$.
3. $A \leqslant_1 B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant_1 \chi_B$.
4. $A \approx B \Leftrightarrow \chi_A \approx \chi_B$.
5. A — цилиндр, если и только если χ_A — цилиндрическая нумерация.
6. A — цилиндрификация B, если и только если $\chi_A = c(\chi_B)$.

Множества натуральных чисел

Теорема C5.3 (Майхилла).

Если $A \leqslant_1 B$ и $B \leqslant_1 A$, то $A \approx B$.

Множества натуральных чисел

Теорема C5.3 (Майхилла).

Если $A \leqslant_1 B$ и $B \leqslant_1 A$, то $A \approx B$.

Доказательство.

Непосредственно следует из замечания C5.2 и теоремы C5.1. $\square$

Множества натуральных чисел

Теорема C5.3 (Майхилла).

Если $A \leqslant_1 B$ и $B \leqslant_1 A$, то $A \approx B$.

Доказательство.

Непосредственно следует из замечания C5.2 и теоремы C5.1. $\square$

Теорема C5.4.

Для множества $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. A — цилиндр;
2. существует вычислимая функция f такая, что $\forall x[(f(x) > x) \wedge (x \in A \Leftrightarrow f(x) \in A)]$;
3. $\forall B[B \leqslant_m A \Rightarrow B \leqslant_1 A]$.

Множества натуральных чисел

Теорема C5.3 (Майхилла).

Если $A \leqslant_1 B$ и $B \leqslant_1 A$, то $A \approx B$.

Доказательство.

Непосредственно следует из замечания C5.2 и теоремы C5.1. □

Теорема C5.4.

Для множества $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. A — цилиндр;
2. существует вычислимая функция f такая, что $\forall x[(f(x) > x) \wedge (x \in A \Leftrightarrow f(x) \in A)]$;
3. $\forall B[B \leqslant_m A \Rightarrow B \leqslant_1 A]$.

Доказательство.

Непосредственно следует из замечания C5.2 и теоремы C5.2. □

Вычислимые инварианты

Определение C5.8.

Свойство P на $\mathcal{P}(\omega)$ называется **вычислимо инвариантным**, если выполняется соотношение $\mathrm{P}(A) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\pi(A))$ для всех $A \subseteq \omega$ и вычислимой перестановки π.

Вычислимые инварианты

Определение C5.8.

Свойство P на $\mathcal{P}(\omega)$ называется **вычислимо инвариантным**, если выполняется соотношение $\mathrm{P}(A) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\pi(A))$ для всех $A \subseteq \omega$ и вычислимой перестановки π.

Примеры C5.1.

1. *Свойство* $2 \in A?$ *не является инвариантным.* Действительно, пусть вычислимая перестановка такая, что $\pi(2) = 0$; тогда $2 \in \{2\}$, но $2 \notin \{0\} = \pi(\{2\})$.

Вычислимые инварианты

Определение C5.8.

Свойство P на $\mathcal{P}(\omega)$ называется **вычислимо инвариантным**, если выполняется соотношение $\mathrm{P}(A) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\pi(A))$ для всех $A \subseteq \omega$ и вычислимой перестановки π.

Примеры C5.1.

1. *Свойство* $2 \in A$? *не является инвариантным.* Действительно, пусть вычислимая перестановка такая, что $\pi(2) = 0$; тогда $2 \in \{2\}$, но $2 \notin \{0\} = \pi(\{2\})$.
2. *Пусть* $n \in \omega$; *свойство множества иметь* n *элементов вычислимо инвариантно* (следует из того, что π — перестановка).

Вычислимые инварианты

Определение C5.8.

Свойство P на $\mathcal{P}(\omega)$ называется **вычислимо инвариантным**, если выполняется соотношение $\mathrm{P}(A) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\pi(A))$ для всех $A \subseteq \omega$ и вычислимой перестановки π.

Примеры C5.1.

1. *Свойство* $2 \in A$? *не является инвариантным.* Действительно, пусть вычислимая перестановка такая, что $\pi(2) = 0$; тогда $2 \in \{2\}$, но $2 \notin \{0\} = \pi(\{2\})$.
2. *Пусть* $n \in \omega$; *свойство множества иметь* n *элементов вычислимо инвариантно* (следует из того, что π — перестановка).
3. *Свойство быть бесконечным вычислимым вычислимо инвариантно* (см. предложение C3.2(1)).

Вычислимые инварианты

Определение C5.8.

Свойство P на $\mathcal{P}(\omega)$ называется **вычислимо инвариантным**, если выполняется соотношение $\mathrm{P}(A) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\pi(A))$ для всех $A \subseteq \omega$ и вычислимой перестановки π.

Примеры C5.1.

1. *Свойство $2 \in A$? не является инвариантным.* Действительно, пусть вычислимая перестановка такая, что $\pi(2) = 0$; тогда $2 \in \{2\}$, но $2 \notin \{0\} = \pi(\{2\})$.
2. *Пусть $n \in \omega$; свойство множества иметь n элементов вычислимо инвариантно* (следует из того, что π — перестановка).
3. *Свойство быть бесконечным вычислимым вычислимо инвариантно* (см. предложение C3.2(1)).
4. *Свойство быть вычислимо перечислимым вычислимо инвариантно* (см. лемму C3.10).

Вычислимые инварианты

Определение C5.8.

Свойство P на $\mathcal{P}(\omega)$ называется **вычислимо инвариантным**, если выполняется соотношение $\mathrm{P}(A) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\pi(A))$ для всех $A \subseteq \omega$ и вычислимой перестановки π.

Примеры C5.1.

1. *Свойство $2 \in A$? не является инвариантным.* Действительно, пусть вычислимая перестановка такая, что $\pi(2) = 0$; тогда $2 \in \{2\}$, но $2 \notin \{0\} = \pi(\{2\})$.
2. *Пусть $n \in \omega$; свойство множества иметь n элементов вычислимо инвариантно* (следует из того, что π — перестановка).
3. *Свойство быть бесконечным вычислимым вычислимо инвариантно* (см. предложение C3.2(1)).
4. *Свойство быть вычислимо перечислимым вычислимо инвариантно* (см. лемму C3.10).
5. *Свойство быть цилиндром вычислимо инвариантно.*

Вычислимые инварианты

Следствие C5.4.

Пусть свойства P_0 и P_1 вычислимо инвариантны. Тогда свойства $\neg\mathrm{P}_0$, $\mathrm{P}_0 \wedge \mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_0 \vee \mathrm{P}_1$ также вычислимо инвариантны.

Вычислимые инварианты

Следствие С5.4.

Пусть свойства P_0 и P_1 вычислимо инвариантны. Тогда свойства $\neg\mathrm{P}_0$, $\mathrm{P}_0 \wedge \mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_0 \vee \mathrm{P}_1$ также вычислимо инвариантны.

Определение С5.9.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **иммунным**, если оно бесконечно и не содержит в качестве бесконечного подмножества вычислимо перечислимого множества. Вычислимо перечислимое множество с иммунным дополнением называется **простым**.

Вычислимые инварианты

Следствие С5.4.

Пусть свойства P_0 и P_1 вычислимо инвариантны. Тогда свойства $\neg\mathrm{P}_0$, $\mathrm{P}_0 \wedge \mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_0 \vee \mathrm{P}_1$ также вычислимо инвариантны.

Определение С5.9.

Множество $A \subseteq \omega$ называется **иммунным**, если оно бесконечно и не содержит в качестве бесконечного подмножества вычислимо перечислимого множества. Вычислимо перечислимое множество с иммунным дополнением называется **простым**.

Замечание С5.3.

Непосредственно из определения следует, что если A иммунно, то A не может быть вп, поскольку иначе A содержало бы бесконечное впм, а именно, A.

Простые множества

Теорема C5.5.

Простые множества существуют.

Простые множества

Теорема C5.5.

Простые множества существуют.

Доказательство.

Простое множество S будем строить с помощью сильной аппроксимации S_t. Пусть W_n — последовательность вп множеств такая, что $R \leftrightharpoons \{\langle n, m\rangle | m \in W_n\}$ — универсальный вп предикат. Пусть также B_s — сильная аппроксимация $c(R)$, причём на каждом шаге добавляется не более одного числа, и $W_{n,s} \leftrightharpoons \{m | c(m, n) \in B_s\}$ для всех $n, s \in \omega$.

Простые множества

Теорема C5.5.

Простые множества существуют.

Доказательство.

Простое множество S будем строить с помощью сильной аппроксимации S_t. Пусть W_n — последовательность вп множеств такая, что $R \leftrightharpoons \{\langle n, m\rangle | m \in W_n\}$ — универсальный вп предикат. Пусть также B_s — сильная аппроксимация $c(R)$, причём на каждом шаге добавляется не более одного числа, и $W_{n,s} \leftrightharpoons \{m | c(m, n) \in B_s\}$ для всех $n, s \in \omega$.

Шаг 0. Полагаем $S_0 = \varnothing$.
Шаг $t + 1$. Ищем наименьшее число $m \leqslant t$ такое, что $W_{m,t+1} \cap S_t = \varnothing \wedge \exists x(x \in W_{m,t+1} \wedge x > 2m)$.
Если такое число m существует (что выясняется эффективно), то полагаем $S_{t+1} \leftrightharpoons S_t \cup \{s_{m,t+1}\}$, где $s_{m,t+1} = \min\{x \in W_{m,t+1} | x > 2m\}$.

Простые множества

Доказательство (окончание).

Затем (или сразу, если такого m не существует) переходим к следующему шагу. Из построения вытекает, что S вп. Заметим, что если n_0, n_1, r_0 и r_1 таковы, что $r_0 < r_1$ и $s_{n_i,r_i} \in S_{n_i}$, $i = 0, 1$, то $n_0 \neq n_1$, поскольку $W_{n_0,r_1} \cap S_{r_1} \neq \varnothing$. Отсюда следует, что из отрезка $[0; 2m]$ во множество S будет помещено не более m чисел. Поэтому $\overline{S}$ бесконечно.

Простые множества

Доказательство (окончание).

Затем (или сразу, если такого m не существует) переходим к следующему шагу. Из построения вытекает, что S вп. Заметим, что если n_0, n_1, r_0 и r_1 таковы, что $r_0 < r_1$ и $s_{n_i,r_i} \in S_{n_i}$, $i = 0, 1$, то $n_0 \neq n_1$, поскольку $W_{n_0,r_1} \cap S_{r_1} \neq \varnothing$. Отсюда следует, что из отрезка $[0; 2m]$ во множество S будет помещено не более m чисел. Поэтому $\overline{S}$ бесконечно.

Остаётся доказать, что если A — бесконечное впм, то $A \cap S \neq \varnothing$.

Сначала определим $N_A = \{m | W_m = A\}$ и $t_A = \min\{t | \exists x \exists m[(m \in N_A) \wedge (x \in W_{m,t}) \wedge (x > 2m)]\}$. Пусть теперь m_A таково, что $m_A \in N_A \wedge \exists x[(x \in W_{m_A,t_A}) \wedge (x > 2m_A)]$. Далее, если $W_{m_A,t_A} \cap S_{t_A+1} \neq \varnothing$, то $A \cap S = W_{m_A} \cap S \neq \varnothing$; если же $W_{m_A,t_A} \cap S_{t_A+1} = \varnothing$, то будет выполняться $W_{m_A,t_A+m_A+1} \cap S_{t_A+m_A+2} \neq \varnothing$ и, следовательно, $A \cap S = W_{m_A} \cap S \neq \varnothing$.

Простые множества

Доказательство (окончание).

Затем (или сразу, если такого m не существует) переходим к следующему шагу. Из построения вытекает, что S вп. Заметим, что если n_0, n_1, r_0 и r_1 таковы, что $r_0 < r_1$ и $s_{n_i,r_i} \in S_{n_i}$, $i = 0, 1$, то $n_0 \neq n_1$, поскольку $W_{n_0,r_1} \cap S_{r_1} \neq \varnothing$. Отсюда следует, что из отрезка $[0; 2m]$ во множество S будет помещено не более m чисел. Поэтому $\overline{S}$ бесконечно.

Остаётся доказать, что если A — бесконечное впм, то $A \cap S \neq \varnothing$.

Сначала определим $N_A = \{m | W_m = A\}$ и $t_A = \min\{t | \exists x \exists m[(m \in N_A) \wedge (x \in W_{m,t}) \wedge (x > 2m)]\}$. Пусть теперь m_A таково, что $m_A \in N_A \wedge \exists x[(x \in W_{m_A,t_A}) \wedge (x > 2m_A)]$. Далее, если $W_{m_A,t_A} \cap S_{t_A+1} \neq \varnothing$, то $A \cap S = W_{m_A} \cap S \neq \varnothing$; если же $W_{m_A,t_A} \cap S_{t_A+1} = \varnothing$, то будет выполняться $W_{m_A,t_A+m_A+1} \cap S_{t_A+m_A+2} \neq \varnothing$ и, следовательно, $A \cap S = W_{m_A} \cap S \neq \varnothing$.

Итак, S — впм с иммунным дополнением. $\square$

Простые множества

Второе доказательство теоремы C5.5.

Как и прежде, возьмём вычислимую последовательность $\{W_m\}_{m\in\omega}$ в.п. множеств так, чтобы предикат $C \leftrightharpoons \{\langle m, n | n \in W_m\rangle\}$ был универсальным. Тогда бинарный предикат R, заданный как

$$R(m, n) \Leftrightarrow [(n \in W_m) \wedge (n > 2m)], \tag{2}$$

будет в.п. Пусть ч.в.ф. φ униформизует данный предикат (см. теорему C3.3). Покажем, что $B \leftrightharpoons \rho\varphi$ будет простым множеством. Для этого проверим справедливость следующих свойств.

1) B — в.п.м. Непосредственно следует из теоремы C3.1(3).

2) $\omega - B$ бесконечно. В самом деле, $\varphi(m) > 2m$ для всех $m \in \omega$, поэтому $|B \cap [0; 2m]| \leqslant m$. Следовательно, $|\overline{B} \cap [0; 2m]| \geqslant m$. Таким образом, $\overline{B}$ бесконечно.

Простые множества

Второе доказательство теоремы С5.5 (окончание).

3) Множество B бесконечно. В самом деле, любое коконечное множество является вычислимо перечислимым (даже вычислимым), а таких множеств бесконечно много. В силу универсальности предиката C, $\delta\varphi$, а вместе с ней, и $\rho\varphi$ являются бесконечными множествами.

4) Если D — бесконечное в.п.м., то $D \cap B \neq \varnothing$. В самом деле, пусть $m_0 \in \omega$ таково, что $D = W_{m_0}$ (существование такого числа вытекает из универсальности предиката C). Так как D — бесконечное множество, существует $n_0 \in D$ такое, что $n_0 > 2m_0$; поэтому $\varphi(m_0)\downarrow$ и $\varphi(m_0) \in B \cap D$ (см. (2)). $\square$

Простые множества

Второе доказательство теоремы C5.5 (окончание).

3) Множество B бесконечно. В самом деле, любое коконечное множество является вычислимо перечислимым (даже вычислимым), а таких множеств бесконечно много. В силу универсальности предиката C, $\delta\varphi$, а вместе с ней, и $\rho\varphi$ являются бесконечными множествами.
4) Если D — бесконечное в.п.м., то $D \cap B \neq \varnothing$. В самом деле, пусть $m_0 \in \omega$ таково, что $D = W_{m_0}$ (существование такого числа вытекает из универсальности предиката C). Так как D — бесконечное множество, существует $n_0 \in D$ такое, что $n_0 > 2m_0$; поэтому $\varphi(m_0)\downarrow$ и $\varphi(m_0) \in B \cap D$ (см. (2)). □

Замечание C5.4.

Свойство множества быть простым (иммунным) вычислимо инвариантно.

Полные множества

Определение C5.10.

Вычислимо перечислимое множество M называется ***m*-полным**, если $A \leqslant_m M$ для любого вычислимо перечислимого множества A.

Полные множества

Определение C5.10.

Вычислимо перечислимое множество M называется **m-полным**, если $A \leqslant_m M$ для любого вычислимо перечислимого множества A.

Определение C5.11.

Вычислимо перечислимое множество M называется **1-полным**, если $A \leqslant_1 M$ для любого вычислимо перечислимого множества A.

Полные множества

Определение С5.10.

Вычислимо перечислимое множество M называется ***m*-полным**, если $A \leqslant_m M$ для любого вычислимо перечислимого множества A.

Определение С5.11.

Вычислимо перечислимое множество M называется **1-полным**, если $A \leqslant_1 M$ для любого вычислимо перечислимого множества A.

Пример С5.2.

Пусть $R \subseteq \omega^2$ — универсальный вычислимо перечислимый предикат. Тогда $c(R)$ является 1-полным: пусть A вычислимо перечислимо и, следовательно, $A = \{m | R(a, m)\}$ для подходящего $a \in \omega$; поэтому $m \in A \Leftrightarrow R(a, m) \Leftrightarrow c(a, m) \in c(R)$, а вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция $\lambda x.c(a, x)$ инъективна.

Полные множества

Замечание C5.5.

Любое 1-полное множество является m-полным. На самом деле, верно и обратное (обсудим позже).

Полные множества

Замечание C5.5.

Любое 1-полное множество является m-полным. На самом деле, верно и обратное (обсудим позже).

Следствие C5.5.

Любые два 1-полных множества вычислимо изоморфны.

Доказательство.

Пусть M_1 и M_2 — 1-полные множества. Тогда $M_1 \leqslant_1 M_2$ и $M_2 \leqslant_1 M_1$, а по теореме C5.3 Майхилла, $M_1 \approx M_2$. $\square$

Спасибо за внимание.