Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин.

Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин.

Проверка статистической гипотезы состоит в том, чтобы сформулировать такое правило, которое позволило бы по результатам проведенных наблюдений принять или отклонить гипотезу.

Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин.

Проверка статистической гипотезы состоит в том, чтобы сформулировать такое правило, которое позволило бы по результатам проведенных наблюдений принять или отклонить гипотезу.

Правило, согласно которому гипотеза принимается или отвергается, называется *критерием* проверки статистической гипотезы.

Гипотезу, которую мы проверяем, будем называть *основной* или *нулевой* гипотезой, и будем всегда обозначать H_0.

Гипотезу, которую мы проверяем, будем называть *основной* или *нулевой* гипотезой, и будем всегда обозначать H_0.

Альтернативные или *конкурирующие* гипотезы будем обозначать $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_m$.

Виды статистических гипотез

Виды статистических гипотез

однородности, если имеется две или более выборок случайных величин;

Виды статистических гипотез

однородности, если имеется две или более выборок случайных величин;

независимости, если имеется выборка многомерной случайной величины;

Виды статистических гипотез

однородности, если имеется две или более выборок случайных величин;

независимости, если имеется выборка многомерной случайной величины;

случайности, если есть предположения о независимости и одинаковом распределении наблюдений в выборке;

Виды статистических гипотез

однородности, если имеется две или более выборок случайных величин;

независимости, если имеется выборка многомерной случайной величины;

случайности, если есть предположения о независимости и одинаковом распределении наблюдений в выборке;

о виде распределения, если есть предположения о законе распределения случайной величины.

Различают простые и сложные гипотезы.

Простая гипотеза – предполагает, что случайная величина подчиняется конкретной функции распределения.

.

Различают простые и сложные гипотезы.

Простая гипотеза – предполагает, что случайная величина подчиняется конкретной функции распределения.

Сложная гипотеза – предполагает принадлежность функции распределения некоторому множеству функций.

Различают простые и сложные гипотезы.

Простая гипотеза – предполагает, что случайная величина подчиняется конкретной функции распределения.

Сложная гипотеза – предполагает принадлежность функции распределения некоторому множеству функций.

Например, $X \sim N(0,1)$ - простая, $X \sim N(0,\sigma)$ - сложная

Различают простые и сложные гипотезы.

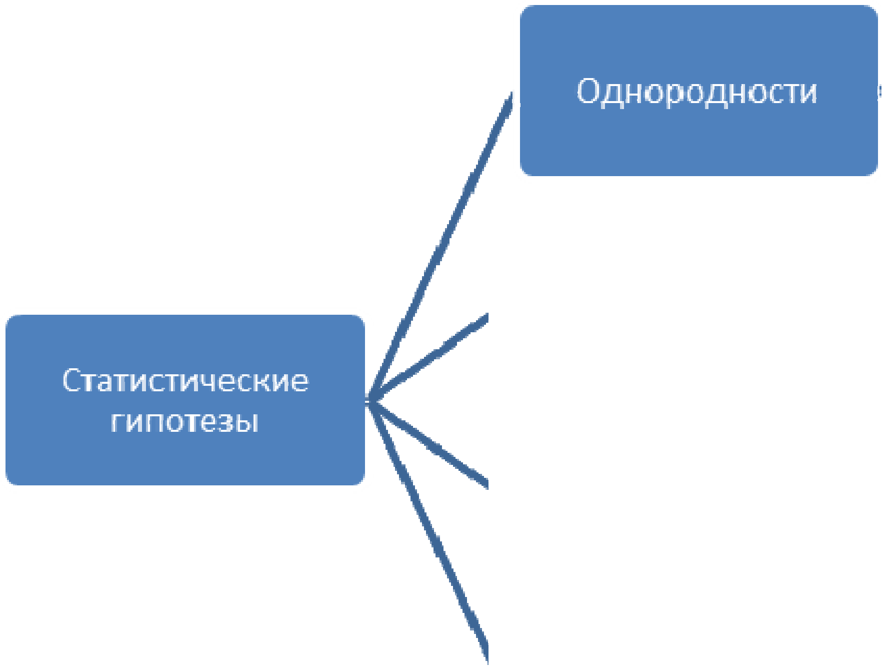
Простая гипотеза – предполагает, что случайная величина подчиняется конкретной функции распределения.

Сложная гипотеза – предполагает принадлежность функции распределения некоторому множеству функций.

Например, $X \sim N(0,1)$ - простая, $X \sim N(0,\sigma)$ - сложная гипотеза.

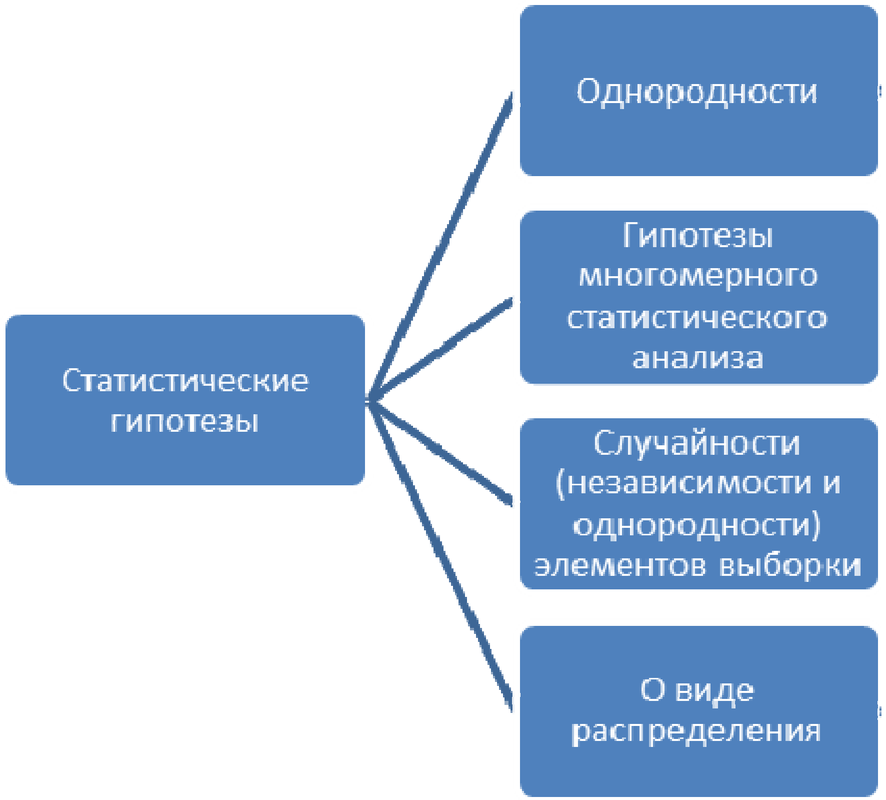
$$H_0,\ H_1 \begin{cases} \nearrow \text{простые} \\ \searrow \text{сложные} \end{cases}$$

Статистические гипотезы

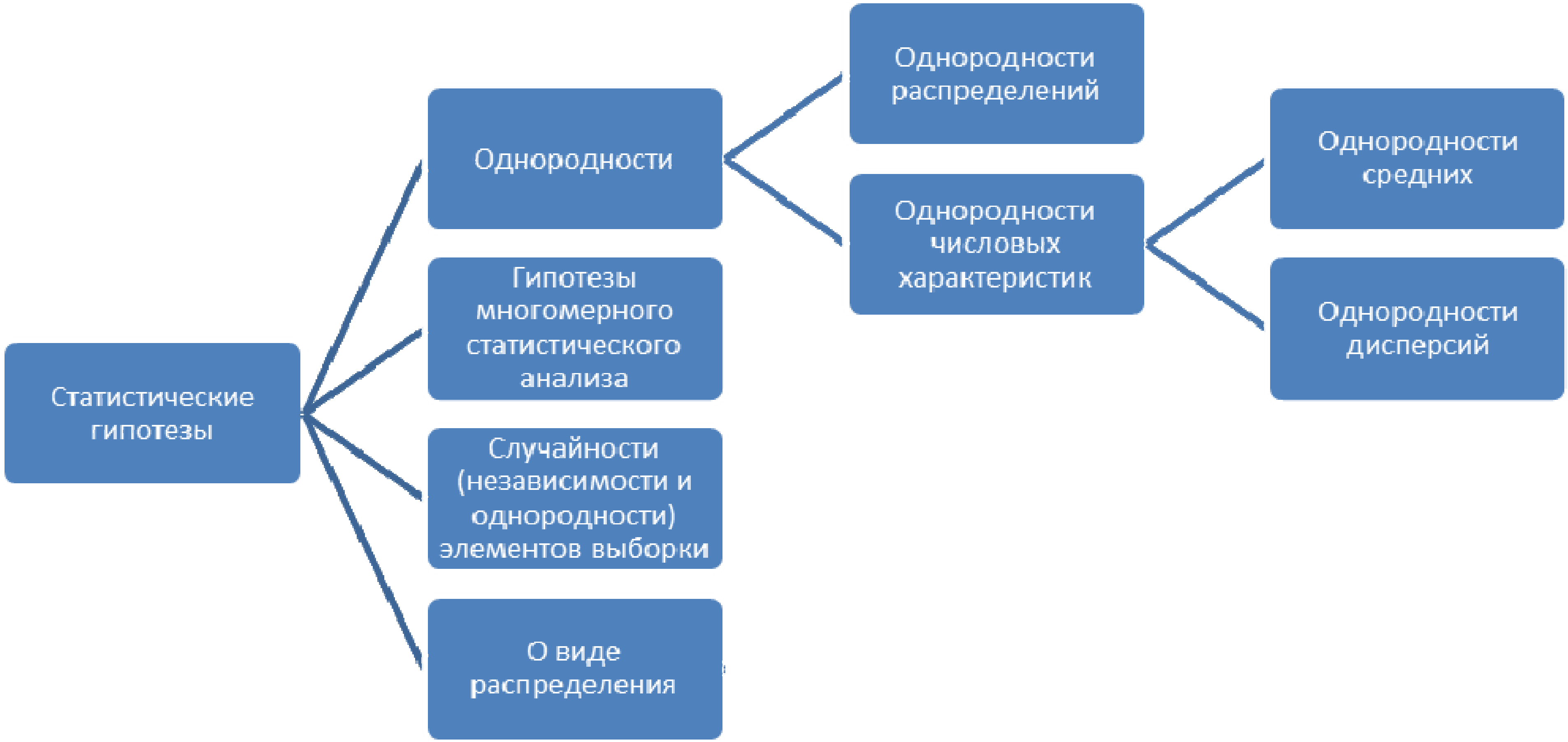

Однородности
Статистические гипотезы


Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Статистические гипотезы


Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки


Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки
О виде распределения


Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки
О виде распределения
Однородности распределений
Однородности числовых характеристик


Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки
О виде распределения
Однородности распределений
Однородности числовых характеристик
Однородности средних
Однородности дисперсий


Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки
О виде распределения
Однородности распределений
Однородности числовых характеристик
Однородности средних
Однородности дисперсий
Простые
Сложные

Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки
О виде распределения
Однородности распределений
Однородности числовых характеристик
Простые
Сложные
Однородности средних
Однородности дисперсий
О согласии с заданным семейством законов распределений


Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки
О виде распределения
Однородности распределений
Однородности числовых характеристик
Однородности средних
Однородности дисперсий
Простые
Сложные
О согласии с заданным семейством законов распределений
Нормальности


Статистические гипотезы
Однородности
Гипотезы многомерного статистического анализа
Случайности (независимости и однородности) элементов выборки
О виде распределения
Однородности распределений
Однородности числовых характеристик
Простые
Сложные
Однородности средних
Однородности дисперсий
О согласии с заданным семейством законов распределений
Нормальности
Экспоненциальности
...

Решение принять или отвергнуть гипотезу H_0 (т.е. принять альтернативную гипотезу H_1) будем принимать по выборке.

Всё выборочное пространство R^n разбивается на два множества Ω_0 и Ω_1: $R^n = \Omega_0 \bigcup \Omega_1,\ \Omega_0 \bigcap \Omega_1 = \varnothing$.

При попадании выборочной точки в Ω_1 гипотеза H_0 отвергается, при попадании в Ω_0 гипотеза H_0 принимается.

Множество Ω_1 называется критической областью для гипотезы H_0.
Множество Ω_0 называется доверительной областью для гипотезы H_0.

Можно совершить ошибки двух родов:

ошибка первого рода - отвержение верной гипотезы;

Можно совершить ошибки двух родов:

ошибка первого рода - отвержение верной гипотезы;

ошибка второго рода - принятие неверной гипотезы.

Можно совершить ошибки двух родов:

ошибка первого рода - отвержение верной гипотезы;

ошибка второго рода - принятие неверной гипотезы.

Обычно ошибка 1-го рода – более важна.

Можно совершить ошибки двух родов:

ошибка первого рода - отвержение верной гипотезы;

ошибка второго рода - принятие неверной гипотезы.

Обычно ошибка 1-го рода – более важна.

При сужении критической области вероятность ошибки первого рода уменьшается; при этом возрастает вероятность ошибки второго рода, и наоборот.

Гипотеза H_0	Решение	Обозначение вероятности	Название
Верна	Отвергается	α	Вероятность ошибки первого рода, уровень значимости
	Принимается	$1-\alpha$	Доверительная вероятность
Неверна	Принимается	β	Вероятность ошибки второго рода
	Отвергается	$1-\beta$	Мощность критерия

Будем строить критическую область с помощью функции от выборки $S(\mathbf{X}_n)$ - статистики критерия.

Критерий показывает «непохожесть» наблюдений на гипотетический «эталон».

Гипотеза H_0 отвергается, если наблюдаемая статистика критерия попадает в критическую область W_α.

$$\Omega_1 = \left\{ \mathbf{X}_n : S(\mathbf{X}_n) \in W_\alpha \right\}$$

Виды критических областей для статистики критерия:

- правосторонняя критическая область $W_\alpha = \left(t_\alpha, \infty\right)$;
- левосторонняя $W_\alpha = \left(-\infty, t_\alpha\right)$;
- двусторонняя $W_\alpha = \left(-\infty, t_{\alpha_1}\right) \cup \left(t_{\alpha_2}, \infty\right)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Зависимость критической области от α означает, что

$$P\left\{S(\mathbf{X}_n) \in W_\alpha \middle| H_0\right\} = \alpha,$$

где α - это вероятность ошибки первого рода.

Вероятность ошибки первого рода α задается исследователем.

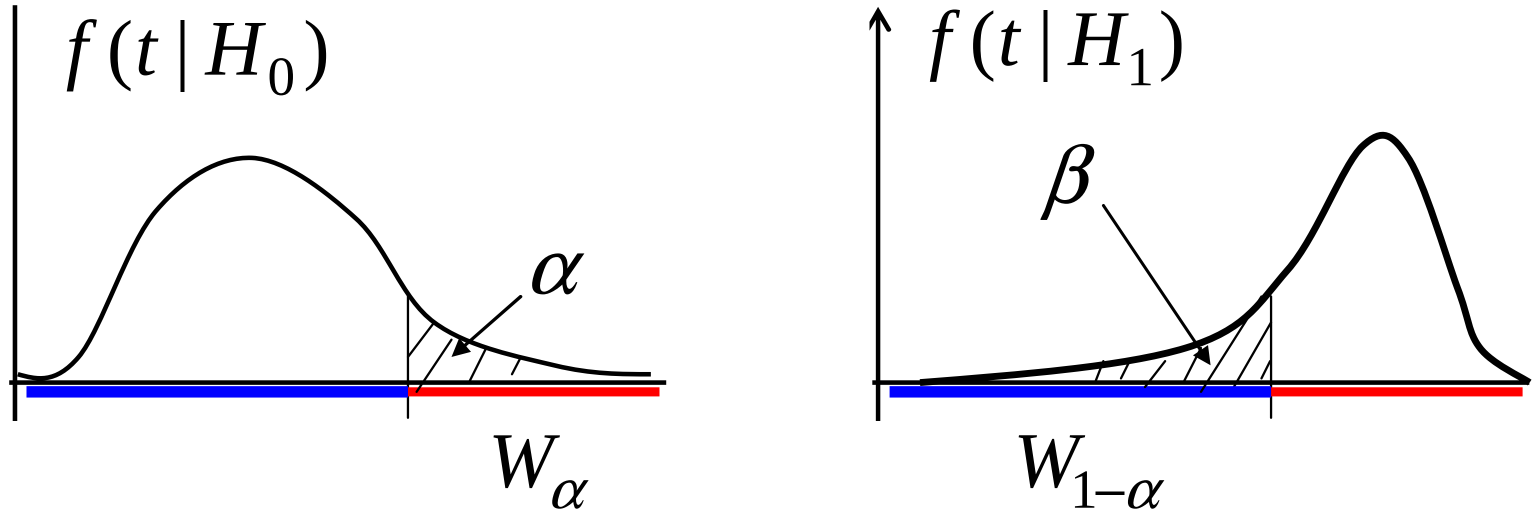
Гипотеза H_0 не отвергается, если наблюдаемая статистика критерия попадает в доверительную область $W_{1-\alpha}$.

$$\Omega_0 = \left\{\mathbf{X}_n : S(\mathbf{X}_n) \in W_{1-\alpha}\right\}, \; W_\alpha \bigcup W_{1-\alpha} = W$$

Вероятность ошибки второго рода зависит от того, какая альтернативная гипотеза верна

$$P\left\{S(\mathbf{X}_n) \in W_{1-\alpha} \middle| H_1\right\} = \beta,$$

$$\beta = P\{S(\mathbf{X}_n) \in W_{1-\alpha} \mid H_1\}$$



Проверка гипотезы: способ рассуждения «от противного»:

Предположим, H_0 - верна. Выберем α – малое (например, 0.001) и W_α такое, что $P\left\{S(\mathbf{X}_n)\in W_\alpha \mid H_0\right\})=\alpha$.

То есть попадание в W_α «практически невозможно», если H_0 верна (принцип «практической невозможности» маловероятных событий).

Если все же $S(\mathbf{X}_n)\in W_\alpha$, то получили противоречие, значит H_0 следует отвергнуть.

Вычисление достигаемого уровня значимости

Достигаемый уровень значимости (p-значение или p-value) определяется как вероятность попадания статистики критерия:

- в область $\left(S(\mathbf{X}_n),\infty\right)$, если критическая область правосторонняя;
- в область $\left(-\infty,S(\mathbf{X}_n)\right)$, если критическая область левосторонняя;

- где $S(\mathbf{X}_n)$ - вычисленное значение статистики по реализации выборки.

Если критическая область двусторонняя, то однозначного способа вычисления достигаемого уровня значимости нет. Например, можно вычислять *p*-value как

$$2 \cdot \min\Big(p, 1 - p\Big),$$

где $p = P\Big\{S \in \Big(S(\mathbf{X}_n), \infty\Big) \Big| H_0\Big\}$.

Гипотеза отвергается, если достигаемый уровень значимости оказывается меньше заданной вероятности ошибки первого рода:

$$p\text{-}value < \alpha$$

- не нужно заранее фиксировать уровень значимости и определять критическую область для значений статистики критерия.
- p-value характеризует “степень уверенности” в принимаемом решении, т.е. чем меньше p-value, тем больше оснований для отвержения основной гипотезы.
- При верной гипотезе H_0 p-value является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале [0,1]
- При ложной гипотезе H_0 p-value стремится к нулю с ростом объема выборки

Принятие гипотезы означает, что она не противоречит имеющимся наблюдениям. При этом могут существовать и другие гипотезы, которые также не противоречат наблюдениям.

Если гипотеза отвергается, то это означает, что она не согласуется с имеющимися наблюдениями, при условии, что справедливы теоретические предположения, которые были использованы при ее проверке.

Выбор критерия проверки статистической гипотезы

1. Критерий должен быть *состоятельным*, т.е. его мощность должна стремиться к единице с ростом объема выборки: $1-\beta_n \to 1,\ n \to \infty$

2. Критерий должен быть *несмещенным*, т.е. мощность должна быть больше, чем вероятность ошибки первого рода: $1-\beta_n > \alpha$

3. Критерий должен обладать *наибольшей мощностью* при заданном объеме выборки и заданном уровне значимости критерия: $1-\beta_n \to \max$

Проверка гипотезы о виде распределения

Простая гипотеза:

$$H_0 : F_X(x) = F(x)$$

Сложная гипотеза:

$$H_0 : F_X(x) = F(x, \theta)$$

Для проверки гипотезы о виде распределении используются *критерии согласия*.

Критерий Колмогорова

Пусть наблюдается непрерывная случайная величина

Расстояние между эмпирическим $F_n(x)$ и теоретическим $F(x,\ \theta)$ распределениями

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |\, F_n(x) - F(x,\theta) \,|,$$

Статистика с поправкой Большева:

$$S_k = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}},$$

где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, $D_n^+ = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{\frac{i}{n} - F(X_{(i)},\theta)\right\}$,

$$D_n^- = \max_{1\le i\le n}\left\{F(X_{(i)},\theta) - \frac{i-1}{n}\right\},$$

и $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ – вариационный ряд.

Критическая область - правосторонняя

Простая гипотеза

При $n \to \infty$: $P(S_k > t_\alpha \big| H_0) \to 1 - K(t_\alpha) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 t_\alpha^2} = \alpha$.

$$t_\alpha = K^{-1}(1-\alpha)$$

Проверка H_0: для заданного α, по таблице распределения Колмогорова, определяется t_α.

Если $S_k > t_\alpha$, то H_0 отвергается.

Таблица распределения Колмогорова

В таблице показаны квантили $t_{1-\alpha}$=$K^{-1}(1-\alpha)$ функции распределения Колмогорова.

	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
$t_{1-\alpha}$	1,2238	1,3581	1,6276

Сложная гипотеза

В случае сложной гипотезы статистика критерия Колмогорова подчиняется различным законам, в зависимости от вида распределения основной гипотезы и оцениваемых параметров.

При $n \to \infty$: $P(S_k > t_\alpha \mid H_0) \to 1 - G(t_\alpha) = \alpha$.

$$t_\alpha = G^{-1}(1-\alpha)$$

Проверка H_0: для заданного α, по таблице распределения Колмогорова при сложной гипотезе определяется t_α.

Если $S_k > t_\alpha$, то H_0 отвергается.

Таблица распределения статистики Колмогорова при проверке сложных гипотез

В таблице показаны квантили $t_{1-\alpha}$=$G^{-1}(1-\alpha)$ функции распределения статистики критерия Колмогорова при проверке сложной гипотезы, когда параметры распределения при верной гипотезе H_0 оцениваются по методу максимального правдоподобия.

№	Распределение	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
1	Экспоненциальное	0,9841	1,0794	1,2838
2	Лапласа	0,8710	0,9497	1,1206
3	Нормальное	0,8333	0,9042	1,0599
4	Логистическое	0,7451	0,8036	0,9261

Критерии типа ω^2

В критериях типа ω^2 расстояние между гипотетическим и истинным распределениями рассматривают в квадратичной метрике.

Статистика критерия

$$\omega_n^2\left[\psi(F)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{E\left[F_n(x)\right] - F(x)\right\}^2 \psi(F(x))dF(x) =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{g\left[F(x_i)\right] - \frac{2i-1}{2n} f\left[F(x_i)\right]\right\} + \int_0^1 (1-t)^2 \psi(t)dt,$$

где $f(t) = \int_0^1 \psi(s)ds,\ g(t) = \int_0^1 s\psi(s)ds$.

При выборе $\psi(t) \equiv 1$ получается статистика критерия Крамера-Мизеса-Смирнова:

$$S_{\omega} = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ F(X_{(i)}, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2 .$$

При выборе $\psi(t) \equiv 1 / t(1-t)$ получается статистика критерия Андерсона-Дарлинга:

$$S_{\Omega} = n\Omega_n^2 =$$

$$-n - 2\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(X_{(i)}, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n}\right) \ln(1 - F(X_{(i)}, \theta)) \right\}.$$

Критическая область - правосторонняя

Статистики S_{ω} и S_{Ω} при простой гипотезе в пределе подчиняется законам $a_1(t)$ и $a_2(t)$, соответственно.

В случае сложной гипотезы – различным законам, в зависимости от вида распределения, числа и типа оцениваемых параметров, значений параметров формы, от метода оценивания.

Критерий согласия Пирсона

Пусть $A_1, A_2, \ldots , A_k$ – полная группа попарно несовместных событий, $p_1, p_2, \ldots , p_k$ – их вероятности, $0 < p_i < 1,\ i = 1,\ldots,k$.

Обозначим $M_1,\ M_2,\ldots,\ M_k$ - частоты этих событий в n независимых испытаниях, $\sum M_i = n$.

Пусть

$$K = \sum_{i=1}^{k} \frac{(M_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Теорема Пирсона. $\boxed{K \to \chi^2_{k-1}}$ при $n \to \infty$.

Применения теоремы:

Пусть X - дискретная случайная величина со значениями

$$x_1, x_2, \ldots, x_k.$$

Гипотеза H_0: $P(X = x_i) = p_i,\ i = 1,\ldots,k$. По выборке определены частоты

$$m_1, m_2, \ldots, m_k.$$

Можно применить теорему Пирсона, где $A_i = \{X = x_i\},\ i = 1,\ldots,k$, m_i - реализация M_i. Тогда критерий:

$$\boxed{K = \sum_{i=1}^{k} \frac{(M_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2_{k-1}}.$$

Так как

$$M_i \sim Bin(n,\ p_i),\quad i = 1,\ldots,k, \text{ и } \ EM_i = np_i,$$

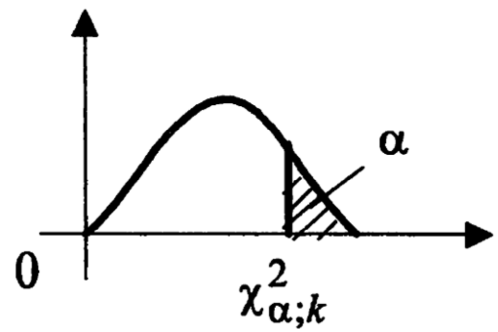
то $M_i \approx np_i$ (если гипотеза верна) $\Rightarrow (M_i - np_i)^2 \approx 0 \Rightarrow$

K мало (если np_i достаточно большое).

Процедура проверки гипотезы H_0:

1. Задается уровень значимости α.

2. По таблицам χ^2-распределения находится критическое значение $\chi^2_{cr}(\alpha, k-1)$.



3. Вычисляется $K_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$.

4. Если $K_{набл} > \chi^2_{cr}$, то H_0 отвергается;

   если $K_{набл} \le \chi^2_{cr}$, то H_0 принимается.

Замечание. Если для некоторого i теоретическая частота np_i мала, то следует объединить значение x_i с некоторым другим (соседним) значением x_j. Обычно требуют: $np_i > 5$.

Пример. Монету подбросили 100 раз; из них 55 раз выпал герб. Проверить гипотезу

$$H_0 : P(\textit{герб}) = P(\textit{решка}) = 0.5$$

на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

$k = 2,\ n = 100,$ теоретические частоты: $np_1 = np_2 = 50$.

$$K_{\textit{набл}} = \frac{(55-50)^2}{50} + \frac{(45-50)^2}{50} = \frac{25}{50} + \frac{25}{50} = 1.$$

$$\chi^2_{cr}(0.05,1) = 3.84.$$

Так как $K_{\textit{набл}} < \chi^2_{cr}$, то гипотеза H_0 не противоречит наблюдениям.

Пусть X - непрерывная случайная величина.

Выдвигается гипотеза $X \sim F(x,\theta)$, где θ - задано.

Разобьем ось Ox на интервалы Δ_i такие, чтобы постулируемые вероятности: $p_i = P(X \in \Delta_i),\ i = 1,\ldots,k$ были достаточно велики (обычно требуют $np_i > 5$).

Тогда событие $A_i = \{X \in \Delta_i\}$. Гипотеза H_0:

$$P(X \in \Delta_i) = p_i,\ i = 1,\ldots,k.$$

Проверка гипотезы - аналогично предыдущему.

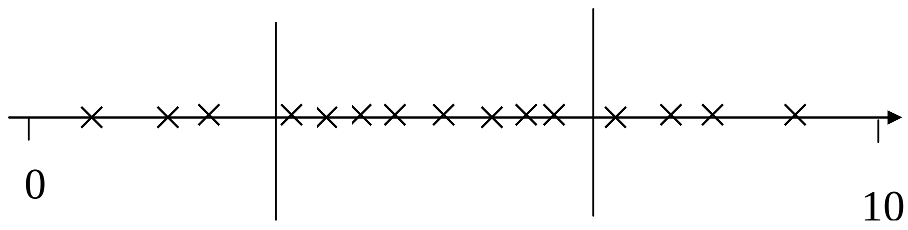
Замечание. Если вероятности зависят от нескольких неизвестных параметров:

$$p_i = p_i(\theta_1,\ldots,\theta_r),\ i = 1,\ldots,\ k,$$

причем эти параметры оцениваются по той же самой выборке, то статистика Пирсона $\boxed{K \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi^2_{k-1-r}}$.

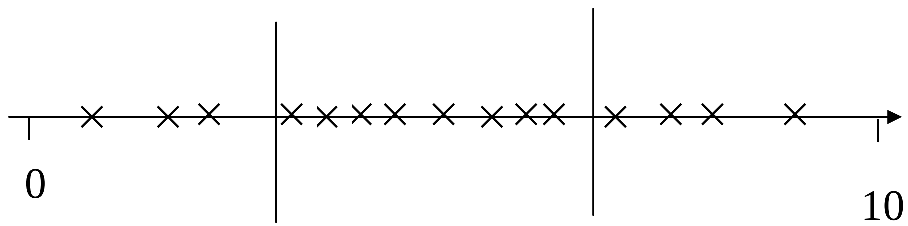
Пример.

Выборка изображена графически:



Пример.

Выборка изображена графически:

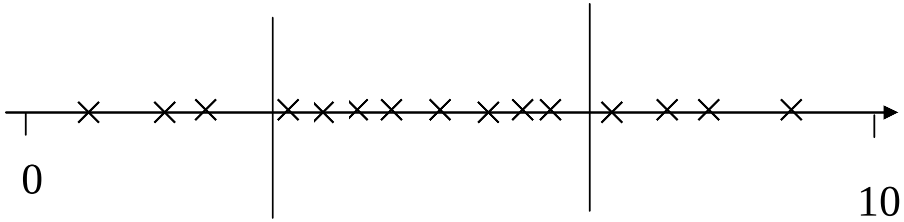


$n=15,\ H_0 = X \sim U(0,10)$ - равномерное распределение;

$$\Delta_i = 10/3,\ i = 1,2,3;$$

Пример.

Выборка изображена графически:



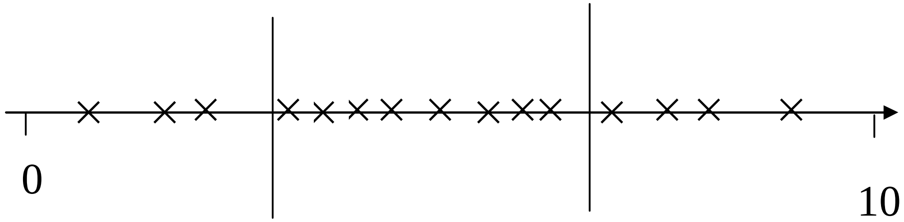
$n=15,\ H_0 = X \sim U(0,10)$ - равномерное распределение;

$$\Delta_i = 10/3,\ i = 1,2,3;$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3;\ np_i = 15/3 = 5;$$

Пример.

Выборка изображена графически:



$n = 15,\ H_0 = X \sim U(0,10)$ - равномерное распределение;

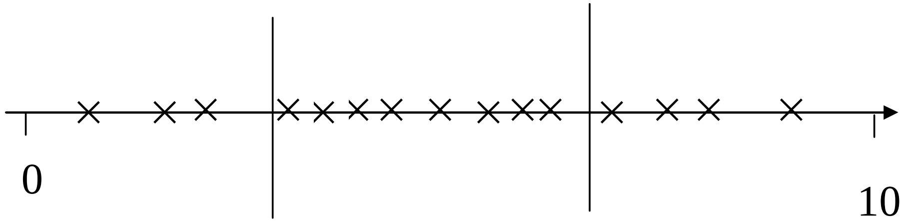
$$\Delta_i = 10/3,\ i = 1,2,3;$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3;\ np_i = 15/3 = 5;$$

$$K_{набл} = \frac{(3-5)^2}{5} + \frac{(8-5)^2}{5} + \frac{(4-5)^2}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

Пример.

Выборка изображена графически:



$n=15,\ H_0 = X \sim U(0,10)$ - равномерное распределение;

$$\Delta_i = 10/3,\ i = 1,2,3;$$

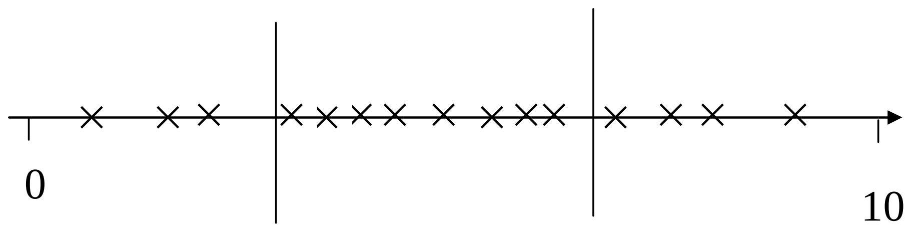
$$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3;\ np_i = 15/3 = 5;$$

$$K_{набл} = \frac{(3-5)^2}{5} + \frac{(8-5)^2}{5} + \frac{(4-5)^2}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$\chi^2_{cr}(0.05,2) = 6.$$

Пример.

Выборка изображена графически:



$n = 15$, $H_0 = X \sim U(0,10)$ - равномерное распределение;

$$\Delta_i = 10/3,\ i = 1,2,3;$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3;\ np_i = 15/3 = 5;$$

$$K_{набл} = \frac{(3-5)^2}{5} + \frac{(8-5)^2}{5} + \frac{(4-5)^2}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$\chi^2_{cr}(0.05, 2) = 6.$$

Так как $K_{набл} < \chi^2_{cr}$, то гипотеза H_0 не противоречит наблюдениям;

т.е. выборка согласуется с равномерным распределением ($\alpha = 0.05$).

Проверка гипотез о параметрах распределения

Пусть $X \sim N(a, \sigma)$, параметры неизвестны.

Проверка гипотез о параметрах распределения

Пусть $X \sim N(a, \sigma)$, параметры неизвестны.
Гипотеза $H_0 = "a = a_0"$, где a_0 - заданное число.

Проверка гипотез о параметрах распределения

Пусть $X \sim N(a, \sigma)$, параметры неизвестны.
Гипотеза $H_0 = "a = a_0"$, где a_0 - заданное число.

По свойству распределения Стьюдента

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{S} \sqrt{n-1} \sim t_{n-1},$$

если H_0 верна. В качестве критерия возьмем T.

Проверка гипотез о параметрах распределения

Пусть $X \sim N(a, \sigma)$, параметры неизвестны.
Гипотеза $H_0 = "a = a_0"$, где a_0 - заданное число.

По свойству распределения Стьюдента

$$T = \frac{\overline{X} - a_0}{S}\sqrt{n-1} \sim t_{n-1},$$

если H_0 верна. В качестве критерия возьмем T.

Таким образом, если H_0 верна, то $P\left(|T| > t_{cr}\right) = \alpha$, где α - уровень значимости.

Проверка гипотез о параметрах распределения

Пусть $X \sim N(a,\sigma)$, параметры неизвестны.
Гипотеза $H_0 = "a = a_0"$, где a_0 - заданное число.

По свойству распределения Стьюдента

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{S}\sqrt{n-1} \sim t_{n-1},$$

если H_0 верна. В качестве критерия возьмем T.

Таким образом, если H_0 верна, то $P\left(|T| > t_{cr}\right) = \alpha$, где α - уровень значимости.

Для заданного малого α по таблице двухсторонних критических значений Стьюдента найдем $t_{cr}(\alpha, n-1)$.

Проверка гипотез о параметрах распределения

Пусть $X \sim N(a, \sigma)$, параметры неизвестны.
Гипотеза $H_0 = "a = a_0"$, где a_0 - заданное число.

По свойству распределения Стьюдента

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{S} \sqrt{n-1} \sim t_{n-1},$$

если H_0 верна. В качестве критерия возьмем T.

Таким образом, если H_0 верна, то $P\left(\left|T\right| > t_{cr}\right) = \alpha$, где α - уровень значимости.

Для заданного малого α по таблице двухсторонних критических значений Стьюдента найдем $t_{cr}(\alpha, n-1)$.

Если $|T_{набл}| > t_{cr}$, то H_0 отвергается, если $|T_{набл}| \leq t_{cr}$, то H_0 принимается.

Замечание. Эквивалентный критерий:

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{\tilde{S}} \sqrt{n},$$

где $\tilde{S}^2$ - исправленная дисперсия.

Замечание. Эквивалентный критерий:

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{\tilde{S}}\sqrt{n},$$

где $\tilde{S}^2$ - исправленная дисперсия.

Пример. Имеется выборка наблюдений за случайной величиной X: $\{3, 5, 2, 3, 3, 2\}$. Известно, что $X \sim N(a, \sigma)$. Проверить гипотезу $H_0 = "a = 2"$ $(\alpha = 0.05)$:

Замечание. Эквивалентный критерий:

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{\tilde{S}} \sqrt{n},$$

где $\tilde{S}^2$ - исправленная дисперсия.

Пример. Имеется выборка наблюдений за случайной величиной X: $\{3, 5, 2, 3, 3, 2\}$. Известно, что $X \sim N(a, \sigma)$. Проверить гипотезу $H_0 = "a = 2" \quad (\alpha = 0.05)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(3 + 5 + 2 + 3 + 3 + 2) = 3,$$

Замечание. Эквивалентный критерий:

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{\tilde{S}} \sqrt{n},$$

где $\tilde{S}^2$ - исправленная дисперсия.

Пример. Имеется выборка наблюдений за случайной величиной X: $\{3, 5, 2, 3, 3, 2\}$. Известно, что $X \sim N(a, \sigma)$. Проверить гипотезу $H_0 = "a = 2"$ $(\alpha = 0.05)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(3 + 5 + 2 + 3 + 3 + 2) = 3,$$

$$S^2 = \frac{1}{6}\left(3^2 + 5^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2\right) - 3^2 = 1,$$

Замечание. Эквивалентный критерий:

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{\tilde{S}} \sqrt{n},$$

где $\tilde{S}^2$ - исправленная дисперсия.

Пример. Имеется выборка наблюдений за случайной величиной X: $\{3, 5, 2, 3, 3, 2\}$. Известно, что $X \sim N(a, \sigma)$. Проверить гипотезу $H_0 = "a = 2"$ $(\alpha = 0.05)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(3 + 5 + 2 + 3 + 3 + 2) = 3,$$

$$S^2 = \frac{1}{6}\left(3^2 + 5^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2\right) - 3^2 = 1,$$

$$T_{набл} = \frac{3-2}{1}\sqrt{5} \approx 2.23, \quad t_{cr}(0.05, 5) = 2.57,$$

Замечание. Эквивалентный критерий:

$$T = \frac{\overline{X} - a_0}{\tilde{S}}\sqrt{n},$$

где $\tilde{S}^2$ - исправленная дисперсия.

Пример. Имеется выборка наблюдений за случайной величиной X: $\{3, 5, 2, 3, 3, 2\}$. Известно, что $X \sim N(a, \sigma)$. Проверить гипотезу $H_0 = "a = 2" \quad (\alpha = 0.05)$:

$$\overline{x} = \frac{1}{6}\left(3 + 5 + 2 + 3 + 3 + 2\right) = 3,$$

$$S^2 = \frac{1}{6}\left(3^2 + 5^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2\right) - 3^2 = 1,$$

$$T_{набл} = \frac{3-2}{1}\sqrt{5} \approx 2.23, \quad t_{cr}(0.05, 5) = 2.57,$$

$$|T_{набл}| < t_{cr} \Rightarrow H_0 \text{ принимается.}$$