Многомерные случайные величины

Пусть (Ω, F, P)– некоторое вероятностное пространство и $X_1, X_2, ..., X_n$ – случайные величины, заданные на нем.

Многомерные случайные величины

Пусть (Ω, F, P)– некоторое вероятностное пространство и $X_1, X_2, ..., X_n$ – случайные величины, заданные на нем.

$$\omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)) \equiv (X_1, X_2, ..., X_n) \in R^n.$$

Многомерные случайные величины

Пусть (Ω, F, P)– некоторое вероятностное пространство и $X_1, X_2, ..., X_n$ – случайные величины, заданные на нем.

$$\omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)) \equiv (X_1, X_2, ..., X_n) \in R^n.$$

Случайным вектором или n-мерной случайной величиной будем называть вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Многомерные случайные величины

Пусть (Ω, F, P)– некоторое вероятностное пространство и $X_1, X_2, ..., X_n$ – случайные величины, заданные на нем.

$$\omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)) \equiv (X_1, X_2, ..., X_n) \in R^n.$$

Случайным вектором или n-мерной случайной величиной будем называть вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Например, ω - обращение пациента к врачу;
X_1 - возраст, X_2 - частота пульса, X_3 - давление крови и т.д.

Определение. Совместная функция распределения многомерной случайной величины – это функция

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 < x_1,\ldots,X_n < x_n).$$

Определение. Совместная функция распределения многомерной случайной величины – это функция

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 < x_1,\ldots,X_n < x_n).$$

Замечания. 1. $F_{\boxed{X_1,\ldots}}$ - чтобы различать, например,

$F_{X_2,X_5}(1,2)$ и $F_{X_1,X_3}(1,2)$;

Определение. Совместная функция распределения многомерной случайной величины – это функция

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 < x_1,\ldots,X_n < x_n).$$

Замечания. 1. $F_{\boxed{X_1,\ldots}}$ - чтобы различать, например, $F_{X_2,X_5}(1,2)$ и $F_{X_1,X_3}(1,2)$;

2. запись $P(A_1,\ldots,A_n)$ эквивалентна $P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n)$.

Определение. Совместная функция распределения многомерной случайной величины – это функция

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 < x_1,\dots,X_n < x_n).$$

Замечания. 1. $F_{\boxed{X_1,\dots}}$ - чтобы различать, например,

$F_{X_2,X_5}(1,2)$ и $F_{X_1,X_3}(1,2)$;

2. запись $P(A_1,\dots,A_n)$ эквивалентна $P(A_1\cdot\dots\cdot A_n)$.

Для простоты, при фиксированном множестве $X_1,\dots,X_n$ будем вместо $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ писать $F(x_1,\dots,x_n)$.

Определение. Совместная функция распределения многомерной случайной величины – это функция

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 < x_1,\dots,X_n < x_n).$$

Замечания. 1. $F_{\boxed{X_1,\dots}}$ - чтобы различать, например, $F_{X_2,X_5}(1,2)$ и $F_{X_1,X_3}(1,2)$;

2. запись $P(A_1,\dots,A_n)$ эквивалентна $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n)$.

Для простоты, при фиксированном множестве $X_1,\dots,X_n$ будем вместо $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ писать $F(x_1,\dots,x_n)$.

Основные свойства совместных функций распределения

1. $0 \le F\left(x_1, x_2,\dots, x_n\right) \le 1$

Определение. Совместная функция распределения многомерной случайной величины – это функция

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 < x_1,\ldots,X_n < x_n).$$

Замечания. 1. $F_{\boxed{X_1,\ldots}}$ - чтобы различать, например,

$F_{X_2,X_5}(1,2)$ и $F_{X_1,X_3}(1,2)$;

2. запись $P(A_1,\ldots,A_n)$ эквивалентна $P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n)$.

Для простоты, при фиксированном множестве $X_1,\ldots,X_n$ будем вместо $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ писать $F(x_1,\ldots,x_n)$.

Основные свойства совместных функций распределения

1. $0 \le F(x_1, x_2,\ldots,x_n) \le 1$

2. Если $x_1 < y_1, x_2 < y_2,\ldots,x_n < y_n$, то $F(x_1,\ldots,x_n) \le F(y_1,\ldots,y_n)$.

Определение. Совместная функция распределения многомерной случайной величины – это функция

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 < x_1,\dots,X_n < x_n).$$

Замечания. 1. $F_{\boxed{X_1,\dots}}$ - чтобы различать, например, $F_{X_2,X_5}(1,2)$ и $F_{X_1,X_3}(1,2)$;

2. запись $P(A_1,\dots,A_n)$ эквивалентна $P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n)$.

Для простоты, при фиксированном множестве $X_1,\dots,X_n$ будем вместо $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ писать $F(x_1,\dots,x_n)$.

Основные свойства совместных функций распределения

1. $0 \le F(x_1,x_2,\dots,x_n) \le 1$

2. Если $x_1 < y_1, x_2 < y_2,\dots,x_n < y_n$, то $F(x_1,\dots,x_n) \le F(y_1,\dots,y_n)$.

3. $\lim\limits_{x_k\to-\infty} F(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,\ \forall k = 1,\dots,n$ как вероятность невозможного события.

4. $$\lim_{x_k \to +\infty} F_{X_1,\dots,X_k,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) = \\ = F_{X_1,\dots,X_{k-1},X_{k+1}\dots,X_n}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n),\ \forall k = 1,\dots,n$$

4. $\lim\limits_{x_k \to +\infty} F_{X_1,\dots,X_k,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) =$

$$= F_{X_1,\dots,X_{k-1},X_{k+1}\dots,X_n}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n),\ \forall k = 1,\dots,n$$

Доказательство. При $x_k \to +\infty$ событие $X_k < x_k$ стремится к достоверному событию, поэтому событие

$$\{X_1 < x_1,\dots,X_k < x_k,\dots,X_n < x_n\}$$

4. $\lim\limits_{x_k \to +\infty} F_{X_1,\dots,X_k,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) =$

$$= F_{X_1,\dots,X_{k-1},X_{k+1}\dots,X_n}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n),\ \forall k = 1,\dots,n$$

Доказательство. При $x_k \to +\infty$ событие $X_k < x_k$ стремится к достоверному событию, поэтому событие

$$\{X_1 < x_1,\dots,X_k < x_k,\dots,X_n < x_n\}$$

эквивалентно событию

$$\{X_1 < x_1,\dots,X_{k-1} < x_{k-1},X_{k+1} < x_{k+1},\dots,X_n < x_n\}.$$

4. $$\lim_{x_k \to +\infty} F_{X_1,\dots,X_k,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n) =$$
$$= F_{X_1,\dots,X_{k-1},X_{k+1}\dots,X_n}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n),\ \forall k = 1,\dots,n$$

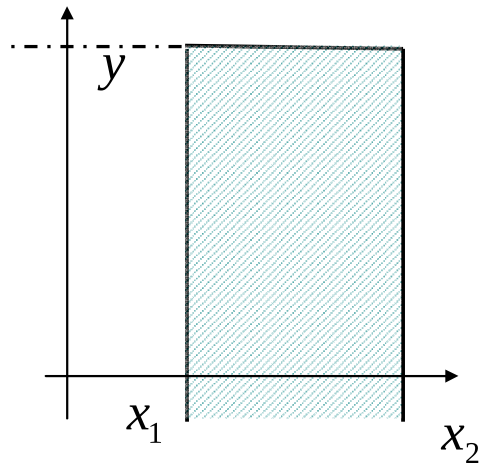
Доказательство. При $x_k \to +\infty$ событие $X_k < x_k$ стремится к достоверному событию, поэтому событие
$$\{X_1 < x_1,\dots,X_k < x_k,\dots,X_n < x_n\}$$
эквивалентно событию
$$\{X_1 < x_1,\dots,X_{k-1} < x_{k-1},X_{k+1} < x_{k+1},\dots,X_n < x_n\}.$$

5. Свойство непрерывности слева: для возрастающей последовательности $y_1, y_2,\dots, y_m,\dots,$ (где $y_m < x_k$, $y_m \to x_k$) выполняется:
$$F(x_1,\dots,y_m,\dots,x_n) \to F(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)$$
при $m \to \infty$.

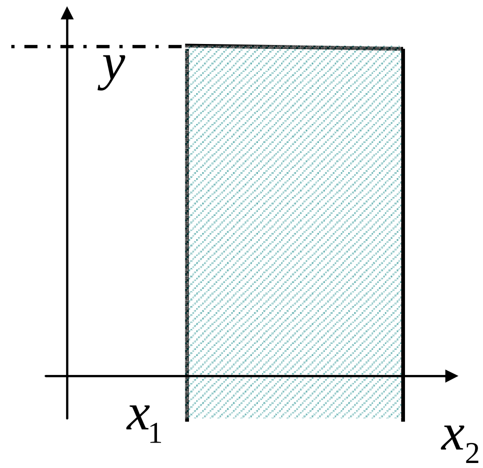
Доказывается аналогично одномерному случаю.

6. (вероятность попадания в полуполосу): Для двумерной случайной величины (X,Y) справедливо:

$$P\left(x_1 \le X < x_2, Y < y\right) = F\left(x_2, y\right) - F\left(x_1, y\right)$$



6. (вероятность попадания в полуполосу): Для двумерной случайной величины (X,Y) справедливо:
$P\left(x_1 \le X < x_2, Y < y\right) = F\left(x_2, y\right) - F\left(x_1, y\right)$



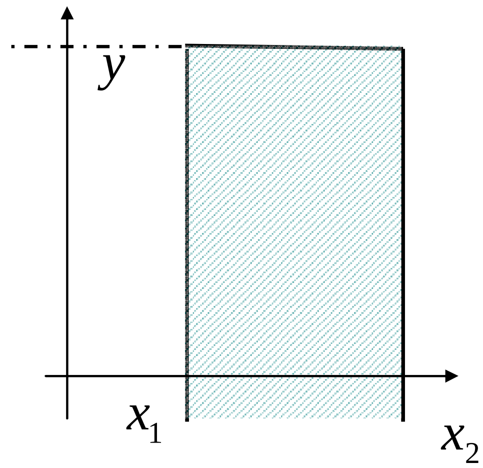
Доказательство.

Событие
$\left\{X < x_2, Y < y\right\} =$

$= \left\{X < x_1, Y < y\right\} + \left\{x_1 \le X < x_2, Y < y\right\}$

6. (вероятность попадания в полуполосу): Для двумерной случайной величины (X,Y) справедливо:

$$P\left(x_1 \le X < x_2, Y < y\right) = F\left(x_2, y\right) - F\left(x_1, y\right)$$



Доказательство.

Событие

$$\left\{X < x_2,\ Y < y\right\} =$$

$$= \left\{X < x_1,\ Y < y\right\} + \left\{x_1 \le X < x_2,\ Y < y\right\}$$

$$\Downarrow$$

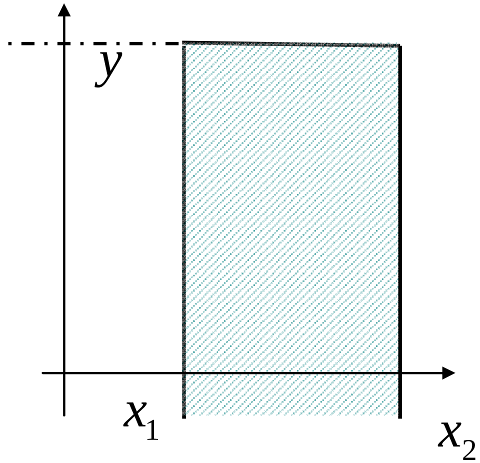
$$P(x_1 \le X < x_2,\ Y < y) = P(X < x_2,\ Y < y) - P(X < x_1,\ Y < y)$$

■

6. (вероятность попадания в полуполосу): Для двумерной случайной величины (X,Y) справедливо:

$$P\left(x_1 \le X < x_2, Y < y\right) = F\left(x_2, y\right) - F\left(x_1, y\right)$$

Доказательство.



Событие

$$\{X < x_2, Y < y\} =$$

$$= \{X < x_1, Y < y\} + \{x_1 \le X < x_2, Y < y\}$$

$$\Downarrow$$

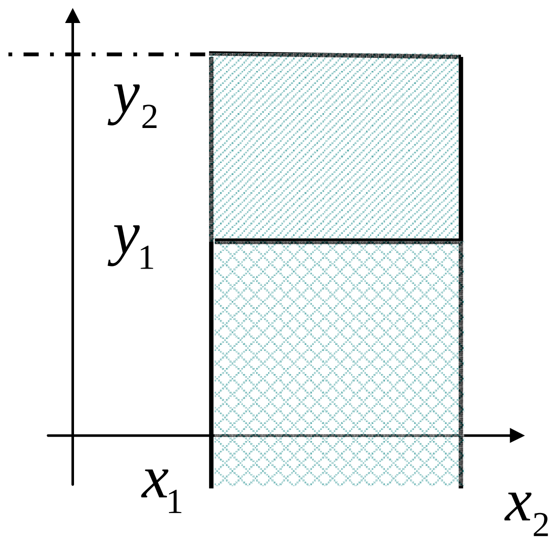
$$P(x_1 \le X < x_2, Y < y) = P(X < x_2, Y < y) - P(X < x_1, Y < y)$$

■

Аналогично, $P\left(X < x, y_1 \le Y < y_2\right) = F\left(x, y_2\right) - F\left(x, y_1\right)$

7. (вероятность попадания в прямоугольник): Для двумерной случайной величины справедливо:

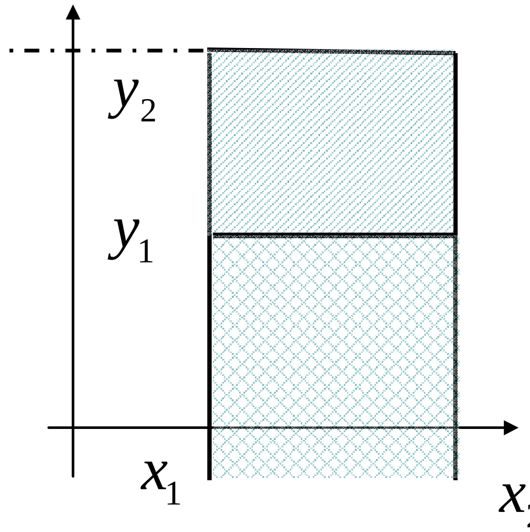
$$P\left(x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) = F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right) + F\left(x_1, y_1\right).$$



7. (вероятность попадания в прямоугольник): Для двумерной случайной величины справедливо:
$$P\left(x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) = F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right) + F\left(x_1, y_1\right).$$

Доказательство. Так как

$$\{x_1 \le X_1 < x_2, Y < y_2\} =$$
$$\{x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\} + \{x_1 \le X_1 < x_2, Y < y_1\},$$

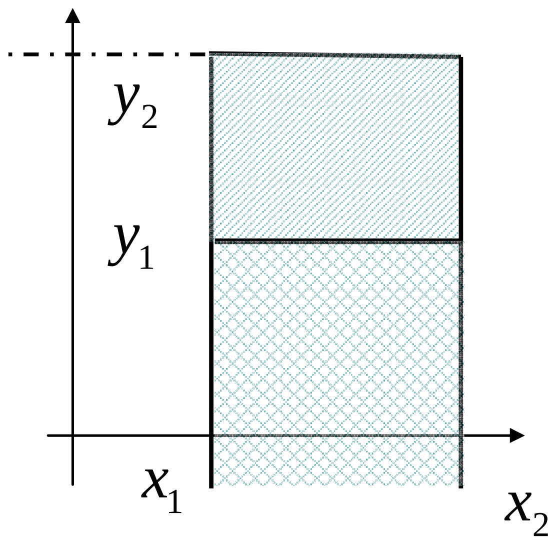


7. (вероятность попадания в прямоугольник): Для двумерной случайной величины справедливо:

$$P\left(x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) = F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right) + F\left(x_1, y_1\right).$$

Доказательство. Так как

$$\{x_1 \le X_1 < x_2, Y < y_2\} =$$
$$\{x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\} + \{x_1 \le X_1 < x_2, Y < y_1\},$$



то по свойству 6,

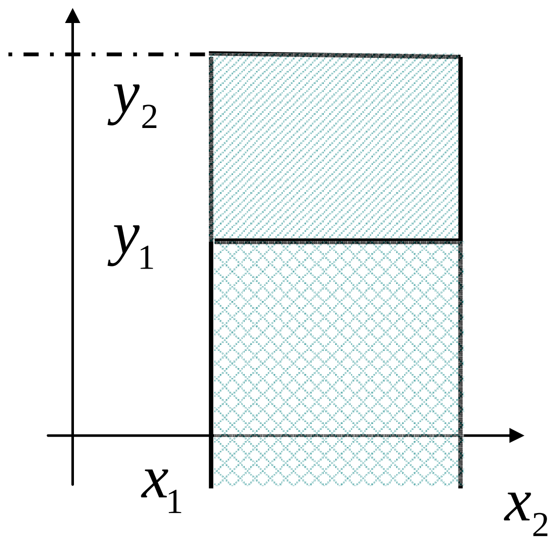
$$P\left(x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) =$$
$$F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - \left(F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right)\right) =$$

7. (вероятность попадания в прямоугольник): Для двумерной случайной величины справедливо:

$$P\left(x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) = F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right) + F\left(x_1, y_1\right).$$

Доказательство. Так как

$$\{x_1 \le X_1 < x_2, Y < y_2\} =$$
$$\{x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\} + \{x_1 \le X_1 < x_2, Y < y_1\},$$



то по свойству 6,

$$P\left(x_1 \le X_1 < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) =$$
$$F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - \left(F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right)\right) =$$
$$= F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right) - F\left(x_2, y_1\right) + F\left(x_1, y_1\right).$$

■

Независимость случайных величин

Определение. Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ называются независимыми (в совокупности), если для любой комбинации различных индексов $i_1, ..., i_k$ $(2 \le k \le n)$ выполняется:

$$F_{X_{i_1},...,X_{i_k}}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = F_{X_{i_1}}(x_{i_1}) \cdot ... \cdot F_{X_{i_k}}(x_{i_k}).$$

Независимость случайных величин

Определение. Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ называются независимыми (в совокупности), если для любой комбинации различных индексов $i_1, ..., i_k$ $(2 \le k \le n)$ выполняется:

$$F_{X_{i_1}, ..., X_{i_k}}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = F_{X_{i_1}}(x_{i_1}) \cdot ... \cdot F_{X_{i_k}}(x_{i_k}).$$

Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно независимы, если независимы любые две из них.

Многомерные случайные величины

Все компоненты – дискретные случайные величины

Все компоненты – непрерывные случайные величины

Смешанный случай

Рассмотрим случай двух дискретных случайных величин X_1, X_2; их распределение можно задать таблицей:

X		X_2				
		b_1	$\ldots$	b_j	$\ldots$	b_m
X_1	a_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	a_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	a_l	p_{l1}	$\ldots$	p_{lj}	$\ldots$	p_{lm}

где $p_{ij} = P\left(X_1 = a_i, X_2 = b_j\right)$. Очевидно, что $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$.

Рассмотрим случай двух дискретных случайных величин X_1, X_2; их распределение можно задать таблицей:

X		X_2				
		b_1	$\ldots$	b_j	$\ldots$	b_m
	a_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
X_1	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	a_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	a_l	p_{l1}	$\ldots$	p_{lj}	$\ldots$	p_{lm}

где $p_{ij} = P\left(X_1 = a_i, X_2 = b_j\right)$. Очевидно, что $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$.

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{l} p_{ij} = \sum_{i=1}^{l} P\left(X_1 = a_i, X_2 = b_j\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{l} \{X_1 = a_i\}, X_2 = b_j\right) =$$

Рассмотрим случай двух дискретных случайных величин X_1, X_2; их распределение можно задать таблицей:

X		X_2				
		b_1	$\dots$	b_j	$\dots$	b_m
	a_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}
X_1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	a_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	a_l	p_{l1}	$\dots$	p_{lj}	$\dots$	p_{lm}

где $p_{ij} = P\left(X_1 = a_i, X_2 = b_j\right)$. Очевидно, что $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$.

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{l} p_{ij} = \sum_{i=1}^{l} P\left(X_1 = a_i, X_2 = b_j\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{l} \{X_1 = a_i\}, X_2 = b_j\right) =$$

$$= P\left(X_2 = b_j\right) \overset{\text{def}}{=} p_{\cdot j},$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{i\,j} = \sum_{j=1}^{m} P\Big(X_1 = a_i, X_2 = b_j \Big) = P\Big(X_1 = a_i \Big) \overset{\text{def}}{=} p_{i\,\cdot}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{i\,j} = \sum_{j=1}^{m} P\left(X_1 = a_i, X_2 = b_j\right) = P\left(X_1 = a_i\right) \overset{\text{def}}{=} p_{i\,\cdot}$$

$p_{i\,\cdot}$, $p_{\cdot\,j}$ - маргинальные вероятности значений случайных величин X_1, X_2.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{i\,j} = \sum_{j=1}^{m} P\left(X_1 = a_i, X_2 = b_j\right) = P\left(X_1 = a_i\right) \overset{\text{def}}{=} p_{i\,\cdot}$$

$p_{i\,\cdot}$, $p_{\cdot\,j}$ - маргинальные вероятности значений случайных величин X_1, X_2.

Для дискретных случайных величин X_1, X_2 их независимость равносильна выполнению равенства

$$p_{i\,j} = p_{i\,\cdot} \cdot p_{\cdot\,j}$$

Пусть $X_1,..,X_n$ - непрерывные случайные величины.

Определение. Совместная функция распределения называется абсолютно непрерывной, если существует функция $f(u_1,...,u_n)$, такая что для любого $x=(x_1,...,x_n)$

$$F(x_1,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,...,u_n)du_1...du_n .$$

Пусть $X_1,..,X_n$ - непрерывные случайные величины.

Определение. Совместная функция распределения называется абсолютно непрерывной, если существует функция $f(u_1,...,u_n)$, такая что для любого $x=(x_1,...,x_n)$

$$F(x_1,...,x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}...\int\limits_{-\infty}^{x_n} f(u_1,...,u_n)du_1...du_n .$$

$f(u_1,...,u_n)$ - плотность многомерного распределения.

Основные свойства многомерных плотностей

1. $$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}.$$

Основные свойства многомерных плотностей

1. $f(x_1,...,x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1,...,x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}$.

2. $f(x_1,...,x_n)\geq 0.$

Основные свойства многомерных плотностей

1. $f(x_1,...,x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}$.

2. $f(x_1,...,x_n)\geq 0.$

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n=1.$

Основные свойства многомерных плотностей

1. $f(x_1,\dots,x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1\dots\partial x_n}$.

2. $f(x_1,\dots,x_n)\ge 0$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n=1$.

4. (случай $n=2$) Маргинальные плотности распределения для X_1, X_2 равны:

$$f(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_2\,;\quad f(x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1\,.$$

Основные свойства многомерных плотностей

1. $f(x_1,...,x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}$.

2. $f(x_1,...,x_n)\geq 0.$

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n = 1.$

4. (случай $n=2$) Маргинальные плотности распределения для X_1, X_2 равны:

$$f(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_2; \quad f(x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1.$$

5. Независимость случайных величин $X_1,...,X_n$ (в совокупности) равносильна выполнению равенства:

$$\forall i_1,...,i_k, \quad f(x_{i_1},...,x_{i_k})=f(x_{i_1})\cdot ...\cdot f(x_{i_k}).$$

6. Для области $A \subset R^n$ выполняется:

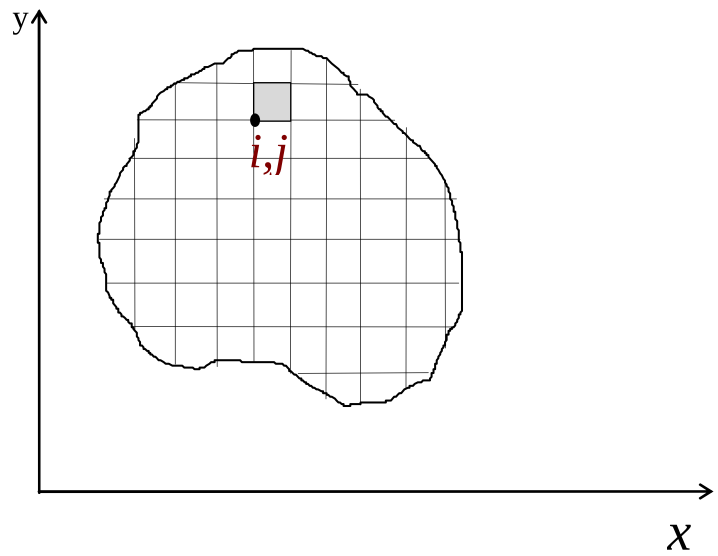
$$P\left(X \in A\right) = \underset{A}{\int \ldots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \,.$$

6. Для области $A \subset R^n$ выполняется:

$$P\left(X \in A\right) = \int\limits_A \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

Доказательство (случай $n = 2$). Вероятность попадания в элементарный прямоугольник, примыкающий к точке (x, y):

$$P(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) -$$
$$-\left(F(x + \Delta x, y) - F(x, y)\right).$$

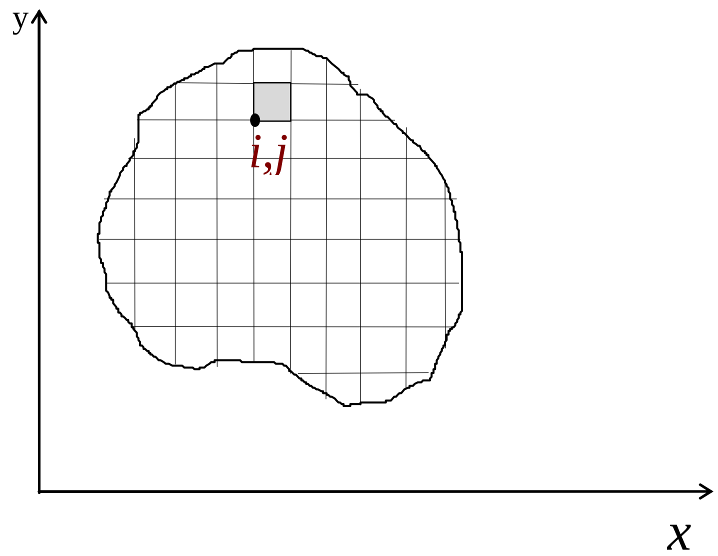


6. Для области $A \subset R^n$ выполняется:

$$P\left(X \in A \right) = \int\limits_A \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \, .$$

Доказательство (случай $n = 2$). Вероятность попадания в элементарный прямоугольник, примыкающий к точке (x, y):

$$P(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) -$$
$$- \left(F(x + \Delta x, y) - F(x, y) \right).$$



По теореме Лагранжа,

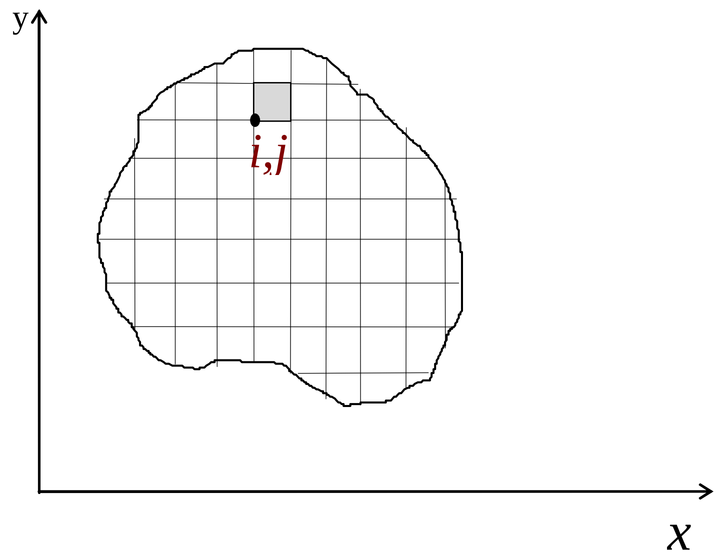
$$P(x, y) \approx \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \, .$$

6. Для области $A \subset R^n$ выполняется:

$$P\left(X \in A\right) = \underset{A}{\int \ldots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n .$$

Доказательство (случай $n = 2$). Вероятность попадания в элементарный прямоугольник, примыкающий к точке (x, y):

$$P(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) -$$
$$-\left(F(x + \Delta x, y) - F(x, y)\right).$$



По теореме Лагранжа,

$$P(x, y) \approx \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y .$$

$$\Downarrow$$

$$P(X \in A) =$$

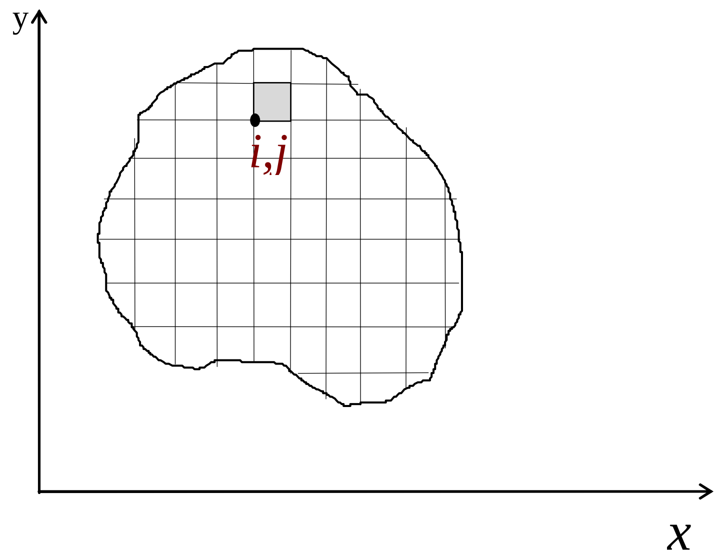
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$$

6. Для области $A \subset R^n$ выполняется:

$$P\left(X \in A\right) = \int_A \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \, .$$

Доказательство (случай $n = 2$). Вероятность попадания в элементарный прямоугольник, примыкающий к точке (x, y):

$$P(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) -$$
$$-\left(F(x + \Delta x, y) - F(x, y)\right).$$



По теореме Лагранжа,

$$P(x, y) \approx \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \, .$$

$$\Downarrow$$

$$P(X \in A) =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y = \iint_A f(x, y) dx dy \, .$$

Примеры многомерных распределений

1. **Мультиномиальное (полиномиальное) распределение**

- обобщение биномиального распределения. Пусть каждый исход принадлежит одному из $K \geq 2$ типов.

Примеры многомерных распределений

1. **Мультиномиальное (полиномиальное) распределение**

- обобщение биномиального распределения. Пусть каждый исход принадлежит одному из $K \geq 2$ типов.

Обозначим X_i – число появлений события i-го типа, $i = 1, 2, ..., K$, при N независимых испытаниях.

Примеры многомерных распределений

1. **Мультиномиальное (полиномиальное) распределение**

- обобщение биномиального распределения. Пусть каждый исход принадлежит одному из $K \geq 2$ типов.

Обозначим X_i – число появлений события i-го типа, $i = 1, 2, \ldots, K$, при N независимых испытаниях.

Пусть p_i – вероятность появления события типа i; вероятности остаются неизменными от испытания к испытанию (полиномиальная схема эксперимента).

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}\underbrace{22\ldots2}_{x_2}\ldots\ldots\underbrace{KK\ldots K}_{x_K} \quad \Rightarrow (p_1)^{x_1}(p_2)^{x_2}\ldots(p_K)^{x_K},$$

где $x_K = N - \sum_{i=1}^{K-1} x_i$, $p_K = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i$;

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}\underbrace{22\ldots2}_{x_2}\ldots\ldots\underbrace{KK\ldots K}_{x_K} \Rightarrow (p_1)^{x_1}(p_2)^{x_2}\ldots(p_K)^{x_K},$$

где $x_K = N - \sum_{i=1}^{K-1} x_i$, $p_K = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i$;

учтем число перестановок с повторениями $\Rightarrow$

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_{K-1} = x_{K-1}) = \frac{N!}{x_1!\ldots x_K!} p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_K^{x_K},$$

($K-1$ - мерное распределение).

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}\underbrace{22\ldots2}_{x_2}\ldots\ldots\underbrace{KK\ldots K}_{x_K} \quad \Rightarrow (p_1)^{x_1}(p_2)^{x_2}\ldots(p_K)^{x_K},$$

где $x_K = N - \sum_{i=1}^{K-1} x_i,\ p_K = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i;$

учтем число перестановок с повторениями $\Rightarrow$

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_{K-1} = x_{K-1}) = \frac{N!}{x_1!\ldots x_K!} p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_K^{x_K},$$

($K-1$ - мерное распределение).

$$\boxed{(X_1, \ldots, X_{K-1}) \sim M(N, p_1, \ldots, p_{K-1})}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}\underbrace{22\ldots2}_{x_2}\ldots\ldots\underbrace{KK\ldots K}_{x_K} \Rightarrow (p_1)^{x_1}(p_2)^{x_2}\ldots(p_K)^{x_K},$$

где $x_K = N - \sum_{i=1}^{K-1} x_i$, $p_K = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i$;

учтем число перестановок с повторениями $\Rightarrow$

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_{K-1} = x_{K-1}) = \frac{N!}{x_1!\ldots x_K!} p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_K^{x_K},$$

($K-1$ - мерное распределение).

$$\boxed{(X_1, \ldots, X_{K-1}) \sim M(N, p_1, \ldots, p_{K-1})}$$

При $K = 2$ получим $X_1 \sim Bin(N, p_1)$.

$$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}\underbrace{22\ldots2}_{x_2}\ldots\ldots\underbrace{KK\ldots K}_{x_K} \quad \Rightarrow (p_1)^{x_1}(p_2)^{x_2}\ldots(p_K)^{x_K},$$

где $x_K = N - \sum_{i=1}^{K-1} x_i,\ p_K = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} p_i;$

учтем число перестановок с повторениями $\Rightarrow$

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_{K-1} = x_{K-1}) = \frac{N!}{x_1!\ldots x_K!} p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_K^{x_K},$$

($K-1$ - мерное распределение).

$$\boxed{(X_1, \ldots, X_{K-1}) \sim M\left(N, p_1, \ldots, p_{K-1}\right)}$$

При $K = 2$ получим $X_1 \sim Bin(N, p_1)$.

$\dfrac{N!}{x_1!\ldots x_K!}$ - полиномиальный коэффициент в

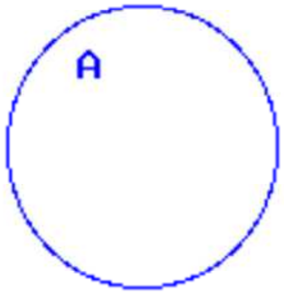
разложении $(p_1 + \ldots + p_K)^N$ по степеням $p_1, \ldots, p_K$.

2. Многомерное равномерное распределение

Пусть компоненты вектора $X = \left(X_1, \ldots, X_n \right)$ - непрерывны; задано множество $A \subset R^n$ с конечной мерой (объемом) $\mu(A)$.

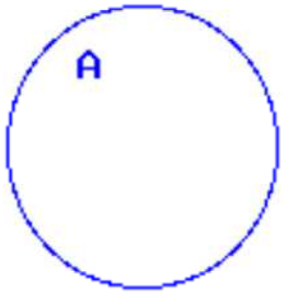
2. Многомерное равномерное распределение

Пусть компоненты вектора $X = (X_1,...,X_n)$ - непрерывны; задано множество $A \subset R^n$ с конечной мерой (объемом) $\mu(A)$.



2. Многомерное равномерное распределение

Пусть компоненты вектора $X=(X_1,...,X_n)$ - непрерывны; задано множество $A\subset R^n$ с конечной мерой (объемом) $\mu(A)$.



Вектор X подчиняется многомерному равномерному распределению в A, если его плотность распределения равна:

$$f(x)=\begin{cases}1/\mu(A),\ \textit{если}\ x\in A\\ 0,\ \textit{иначе}.\end{cases}$$

3. Многомерное нормальное распределение

Пусть компоненты случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_n)$ - непрерывны. Говорят, что вектор X подчиняется многомерному нормальному распределению, если его совместная плотность распределения определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1}(x-m)\right)$$

3. Многомерное нормальное распределение

Пусть компоненты случайного вектора $X = (X_1, ..., X_n)$ - непрерывны. Говорят, что вектор X подчиняется многомерному нормальному распределению, если его совместная плотность распределения определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1}(x-m)\right)$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $m = (m_1, ..., m_n)^T$ – некоторый вектор,

3. Многомерное нормальное распределение

Пусть компоненты случайного вектора $X = (X_1, ..., X_n)$ - непрерывны. Говорят, что вектор X подчиняется многомерному нормальному распределению, если его совместная плотность распределения определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1}(x-m)\right)$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $m = (m_1, ..., m_n)^T$ – некоторый вектор, Σ - положительно определенная симметричная матрица (ковариационная матрица),

3. Многомерное нормальное распределение

Пусть компоненты случайного вектора $X = \left(X_1, ..., X_n \right)$ - непрерывны. Говорят, что вектор X подчиняется многомерному нормальному распределению, если его совместная плотность распределения определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1}(x-m) \right)$$

где $x = \left(x_1, ..., x_n \right)^T$, $m = \left(m_1, ..., m_n \right)^T$ – некоторый вектор, Σ - положительно определенная симметричная матрица (ковариационная матрица), $\det(\Sigma)$– определитель Σ.

3. Многомерное нормальное распределение

Пусть компоненты случайного вектора $X = (X_1, ..., X_n)$ - непрерывны. Говорят, что вектор X подчиняется многомерному нормальному распределению, если его совместная плотность распределения определяется формулой:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T \Sigma^{-1}(x-m)\right)$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $m = (m_1, ..., m_n)^T$ – некоторый вектор, Σ - положительно определенная симметричная матрица (ковариационная матрица), $\det(\Sigma)$– определитель Σ.

m, Σ – параметры многомерного нормального распределения.

Пример графика плотности двумерного нормального распределения с параметрами

$$m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}:$$