Лекция C4
Нумерации и вычислимость, I

Вадим Пузаренко

18 февраля 2023 г.

Нумерации

Определение С4.1.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Любое отображение $\nu : \omega \twoheadrightarrow S$ из множества ω натуральных чисел на множество S (сюръекция) называется **нумерацией** множества S. Множество всех нумераций множества S будем обозначать как $N(S)$.

Нумерации

Определение C4.1.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Любое отображение $\nu : \omega \twoheadrightarrow S$ из множества ω натуральных чисел на множество S (сюръекция) называется **нумерацией** множества S. Множество всех нумераций множества S будем обозначать как $N(S)$.

Пусть $\nu_0 \in N(S_0)$, $\nu_1 \in N(S_1)$.

Определение C4.2.

Будем говорить, что ν_0 **сводится к** ν_1 (и использовать обозначение $\nu_0 \leqslant \nu_1$), если существует вычислимая функция f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Нумерации

Определение C4.1.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Любое отображение $\nu : \omega \twoheadrightarrow S$ из множества ω натуральных чисел на множество S (сюръекция) называется **нумерацией** множества S. Множество всех нумераций множества S будем обозначать как $N(S)$.

Пусть $\nu_0 \in N(S_0)$, $\nu_1 \in N(S_1)$.

Определение C4.2.

Будем говорить, что ν_0 **сводится к** ν_1 (и использовать обозначение $\nu_0 \leqslant \nu_1$), если существует вычислимая функция f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$.

Лемма C4.1.

Отношение $\leqslant$ сводимости на $N(S)$ является предпорядком (а именно, рефлексивным и транзитивным), для любого непустого не более, чем счётного множества (**упражнение!!!**)

Нумерации

Определение С4.3.

Будем говорить, что ν_0 и ν_1 **эквивалентны** (и использовать обозначение $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leqslant \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant \nu_0$.

Нумерации

Определение C4.3.

Будем говорить, что ν_0 и ν_1 **эквивалентны** (и использовать обозначение $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leqslant \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant \nu_0$.

Обозначение C4.1.

Отношение $\equiv$ действительно является отношением эквивалентности на $N(S)$. Положим $L(S) = {}^{N(S)}/_{\equiv}$ и $\mathbf{L}(S) = \langle L(S), \leqslant \rangle$, где $[\nu_0]_{\equiv} \leqslant [\nu_1]_{\equiv} \Leftrightarrow (\nu_0 \leqslant \nu_1)$ для любых $\nu_0, \nu_1 \in N(S)$ (здесь S — непустое не более, чем счётное множество).

Нумерации

Определение С4.3.

Будем говорить, что ν_0 и ν_1 **эквивалентны** (и использовать обозначение $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leqslant \nu_1$ и $\nu_1 \leqslant \nu_0$.

Обозначение С4.1.

Отношение $\equiv$ действительно является отношением эквивалентности на $N(S)$. Положим $L(S) = {}^{N(S)}/_{\equiv}$ и $\mathbf{L}(S) = \langle L(S), \leqslant \rangle$, где $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv \Leftrightarrow (\nu_0 \leqslant \nu_1)$ для любых $\nu_0, \nu_1 \in N(S)$ (здесь S — непустое не более, чем счётное множество).

Обозначение С4.2.

Положим $L^*(S) = \{o\} \cup \bigcup_{\varnothing \neq S_0 \subseteq S} L(S_0)$ и $\mathbf{L}^*(S) = \langle L^*(S), \leqslant \rangle$, где $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv \Leftrightarrow (\nu_0 = o) \vee (\nu_0 \leqslant \nu_1)$ для любых $\nu_0 \in N(S_0)$, $\nu_1 \in N(S_1)$ (здесь $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S$, а S — непустое не более, чем счётное множество). В этом случае o играет роль “пустой нумерации”.

Нумерации и упорядоченные множества

Предложение С4.1.

Пусть непустые не более, чем счётные множества S_0 и S_1 таковы, что $|S_0| = |S_1|$. Тогда $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$ и $\mathbf{L}(S_0) \simeq \mathbf{L}(S_1)$.

Нумерации и упорядоченные множества

Предложение C4.1.

Пусть непустые не более, чем счётные множества S_0 и S_1 таковы, что $|S_0| = |S_1|$. Тогда $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$ и $\mathbf{L}(S_0) \simeq \mathbf{L}(S_1)$.

Доказательство.

Пусть $\psi : S_0 \overset{1:1}{\twoheadrightarrow} S_1$ — биекция и пусть $\Psi : L^*(S_0) \to L^*(S_1)$ — трансформация, для которой выполняются следующие условия:

- $\Psi(o) = o$;
- $\Psi([\nu]_\equiv) = [\psi\nu]_\equiv$ для любой нумерации $\nu \in \bigcup_{\varnothing \neq S_0' \subseteq S_0} N(S_0')$.

Докажем, что данная трансформация осуществляет изоморфизм между $\mathbf{L}^*(S_0)$ и $\mathbf{L}^*(S_1)$. Зафиксируем также отображение φ, обратное к функции ψ. Сначала докажем, что $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv \Leftrightarrow \Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$ **для всех** $\nu_0 \in N(S_0') \cup \{o\}$, $\nu_1 \in N(S_1') \cup \{o\}$ **и** $\varnothing \neq S_0' \subseteq S_1' \subseteq S_0$.

Пусть $\nu_0 \in N(S_0') \cup \{o\}$, $\nu_1 \in N(S_1') \cup \{o\}$, $\varnothing \neq S_0' \subseteq S_1' \subseteq S_0$ таковы, что $(\Rightarrow)$ $\nu_0 \leqslant \nu_1$. Если $\nu_0 = o$, то $\Psi([\nu_0]_\equiv) = o \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$.

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Следовательно, $\psi\nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi\nu_1)f$ и, тем самым, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$.

Нумерации и упорядоченные множества

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Следовательно, $\psi\nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi\nu_1)f$ и, тем самым, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Далее, пусть $(\Leftarrow)$ $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Если $\Psi([\nu_0]_\equiv) = o$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$; если же $\Psi([\nu_0]_\equiv) \neq o$, то существует вф f такая, что $\psi\nu_0 = (\psi\nu_1)f$. Следовательно,
$\nu_0 = (\varphi\psi)\nu_0 = \varphi(\psi\nu_0) = \varphi((\psi\nu_1)f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi\psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$.
Таким образом, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$.

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Следовательно, $\psi\nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi\nu_1)f$ и, тем самым, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Далее, пусть ($\Leftarrow$) $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Если $\Psi([\nu_0]_\equiv) = o$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$; если же $\Psi([\nu_0]_\equiv) \neq o$, то существует вф f такая, что $\psi\nu_0 = (\psi\nu_1)f$. Следовательно,
$\nu_0 = (\varphi\psi)\nu_0 = \varphi(\psi\nu_0) = \varphi((\psi\nu_1)f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi\psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$.
Таким образом, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$.
Ψ — функция. Пусть $[\nu_0]_\equiv = [\nu_1]_\equiv$; тогда $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$ и $[\nu_1]_\equiv \leqslant [\nu_0]_\equiv$, а по доказанному, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$ и $\Psi([\nu_1]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_0]_\equiv)$. Таким образом, $\Psi([\nu_0]_\equiv) = \Psi([\nu_1]_\equiv)$.

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Следовательно, $\psi\nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi\nu_1)f$ и, тем самым, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Далее, пусть $(\Leftarrow)$ $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Если $\Psi([\nu_0]_\equiv) = o$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$; если же $\Psi([\nu_0]_\equiv) \neq o$, то существует вф f такая, что $\psi\nu_0 = (\psi\nu_1)f$. Следовательно, $\nu_0 = (\varphi\psi)\nu_0 = \varphi(\psi\nu_0) = \varphi((\psi\nu_1)f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi\psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$. Таким образом, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$.

Ψ — функция. Пусть $[\nu_0]_\equiv = [\nu_1]_\equiv$; тогда $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$ и $[\nu_1]_\equiv \leqslant [\nu_0]_\equiv$, а по доказанному, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$ и $\Psi([\nu_1]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_0]_\equiv)$. Таким образом, $\Psi([\nu_0]_\equiv) = \Psi([\nu_1]_\equiv)$.

Ψ — инъекция. Пусть $\Psi([\nu_0]_\equiv) = \Psi([\nu_1]_\equiv)$; тогда $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$ и $\Psi([\nu_1]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_0]_\equiv)$, а по доказанному, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$ и $[\nu_1]_\equiv \leqslant [\nu_0]_\equiv$. Таким образом, $[\nu_0]_\equiv = [\nu_1]_\equiv$.

Доказательство (продолжение).

Пусть теперь $\nu_0 \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu_0 = \nu_1 f$. Следовательно, $\psi\nu_0 = \psi(\nu_1 f) = (\psi\nu_1)f$ и, тем самым, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Далее, пусть $(\Leftarrow)$ $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$. Если $\Psi([\nu_0]_\equiv) = o$, то и $\nu_0 = o$, а по определению, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$; если же $\Psi([\nu_0]_\equiv) \neq o$, то существует вф f такая, что $\psi\nu_0 = (\psi\nu_1)f$. Следовательно, $\nu_0 = (\varphi\psi)\nu_0 = \varphi(\psi\nu_0) = \varphi((\psi\nu_1)f) = \varphi(\psi(\nu_1 f)) = (\varphi\psi)(\nu_1 f) = \nu_1 f$. Таким образом, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$.

Ψ — функция. Пусть $[\nu_0]_\equiv = [\nu_1]_\equiv$; тогда $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$ и $[\nu_1]_\equiv \leqslant [\nu_0]_\equiv$, а по доказанному, $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$ и $\Psi([\nu_1]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_0]_\equiv)$. Таким образом, $\Psi([\nu_0]_\equiv) = \Psi([\nu_1]_\equiv)$.

Ψ — инъекция. Пусть $\Psi([\nu_0]_\equiv) = \Psi([\nu_1]_\equiv)$; тогда $\Psi([\nu_0]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_1]_\equiv)$ и $\Psi([\nu_1]_\equiv) \leqslant \Psi([\nu_0]_\equiv)$, а по доказанному, $[\nu_0]_\equiv \leqslant [\nu_1]_\equiv$ и $[\nu_1]_\equiv \leqslant [\nu_0]_\equiv$. Таким образом, $[\nu_0]_\equiv = [\nu_1]_\equiv$.

Ψ — сюръекция. Пусть $\mu \in N(S') \cup \{o\}$, $S' \subseteq S_1$. Если $\mu = o$, то $\Psi(o) = o$; если же $\mu \neq o$, то $\Psi([\varphi\mu]_\equiv) = [\psi(\varphi\mu)]_\equiv = [(\psi\varphi)\mu]_\equiv = [\mu]_\equiv$.

Нумерации и упорядоченные множества

Доказательство (окончание).

$\Psi \restriction \mathbf{L}(S_0) : \mathbf{L}(S_0) \to \mathbf{L}(S_1)$. Если $\nu_0 \in N(S_0)$, то $\psi\nu_0 \in N(S_1)$ и $\Psi([\nu_0]_\equiv) = [\psi\nu_0]_\equiv$; если же $\mu_0 \in N(S_1)$, то $\varphi\mu_0 \in N(S_0)$ и $\psi(\varphi\mu_0) = (\psi\varphi)\mu_0 = \mu_0$. Таким образом, $\Psi([\varphi\mu_0]_\equiv) = [\mu_0]_\equiv$. $\square$

Доказательство (окончание).

$\Psi \restriction \mathbf{L}(S_0) : \mathbf{L}(S_0) \to \mathbf{L}(S_1)$. Если $\nu_0 \in N(S_0)$, то $\psi\nu_0 \in N(S_1)$ и $\Psi([\nu_0]_\equiv) = [\psi\nu_0]_\equiv$; если же $\mu_0 \in N(S_1)$, то $\varphi\mu_0 \in N(S_0)$ и $\psi(\varphi\mu_0) = (\psi\varphi)\mu_0 = \mu_0$. Таким образом, $\Psi([\varphi\mu_0]_\equiv) = [\mu_0]_\equiv$. $\square$

Замечание C4.1.

Отметим, что o — наименьший элемент $\mathbf{L}^*(S)$, где S — непустое не более, чем счётное множество. Если $|S| = 1$, то $|N(S)| = 1$ и, следовательно, $|L(S)| = 1$, $|L^*(S)| = 2$. В самом деле, если S одноэлементно, то существует только одна нумерация множества S, а именно, $\lambda n.s$, где $S = \{s\}$. В этом случае $L^*(S) = \{o, \{\lambda n.s\}\}$.

Доказательство (окончание).

$\Psi \restriction \mathbf{L}(S_0) : \mathbf{L}(S_0) \to \mathbf{L}(S_1)$. Если $\nu_0 \in N(S_0)$, то $\psi\nu_0 \in N(S_1)$ и $\Psi([\nu_0]_\equiv) = [\psi\nu_0]_\equiv$; если же $\mu_0 \in N(S_1)$, то $\varphi\mu_0 \in N(S_0)$ и $\psi(\varphi\mu_0) = (\psi\varphi)\mu_0 = \mu_0$. Таким образом, $\Psi([\varphi\mu_0]_\equiv) = [\mu_0]_\equiv$. □

Замечание С4.1.

Отметим, что o — наименьший элемент $\mathbf{L}^*(S)$, где S — непустое не более, чем счётное множество. Если $|S| = 1$, то $|N(S)| = 1$ и, следовательно, $|L(S)| = 1$, $|L^*(S)| = 2$. В самом деле, если S одноэлементно, то существует только одна нумерация множества S, а именно, $\lambda n.s$, где $S = \{s\}$. В этом случае $L^*(S) = \{o, \{\lambda n.s\}\}$.

Определение С4.4.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Элемент $\mathbf{a} \in L^*(S)$ называется **минимальным**, если $\mathbf{a} \neq o$ и $\forall \mathbf{b}[\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a} \to ((\mathbf{b} = \mathbf{a}) \vee (\mathbf{b} = o))]$.

Нумерации и упорядоченные множества

Предложение С4.2.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Тогда $\mathbf{L}^*(S)$ имеет в точности $|S|$ минимальных элементов.

Нумерации и упорядоченные множества

Предложение С4.2.

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество. Тогда $\mathbf{L}^*(S)$ имеет в точности $|S|$ минимальных элементов.

Доказательство.

Пусть $s \in S$; докажем сначала, что $[\lambda n.s]_\equiv$ является минимальным элементом $\mathbf{L}^*(S)$. В самом деле, пусть $\mathbf{b} \leqslant [\lambda n.s]_\equiv$ таково, что $\mathbf{b} \neq o$; тогда найдётся вф f такая, что $\nu(n) = (\lambda n.s \circ f)(n) = s$ для всех $n \in \omega$ (здесь $\nu \in \mathbf{b}$). Следовательно, $\mathbf{b} = [\lambda n.s]_\equiv$. Кроме того, если $s_1 \neq s_2$, то $[\lambda n.s_1]_\equiv \neq [\lambda n.s_2]_\equiv$. В самом деле, если $(\lambda n.s_1 \circ f_1)(n) = (\lambda n.s_2 \circ f_2)(n)$, то $s_1 = (\lambda n.s_1 \circ f_1)(1) = (\lambda n.s_2 \circ f_2)(1) = s_2$. Тем самым, количество минимальных элементов $\mathbf{L}^*(S)$ не меньше $|S|$.

Докажем теперь, что других минимальных элементов структура $\mathbf{L}^*(S)$ не имеет. Пусть $\mathbf{b} \in L(S_0)$, $S_0 \subseteq S$, $|S_0| \geqslant 2$. Пусть $\nu \in N(S_0)$ таково, что $\mathbf{b} = [\nu]_\equiv$; тогда $\nu(0) = s_0 \in S_0$ и $\lambda n.s_0 = \nu(0) = \nu 0(n)$. Таким образом, $[\lambda n.s_0]_\equiv \leqslant [\nu]_\equiv$ и $[\lambda n.s_0]_\equiv \neq [\nu]_\equiv$ (последнее вытекает из того, что $\rho\nu \neq \{s_0\} = \rho(\lambda n.s_0)$). $\square$

Нумерации и упорядоченные множества

Следствие С4.1.

Пусть S_0, S_1 — непустые не более, чем счётные множества. Тогда $|S_0| = |S_1|$, если и только если $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$.

Нумерации и упорядоченные множества

Следствие С4.1.

Пусть S_0, S_1 — непустые не более, чем счётные множества. Тогда $|S_0| = |S_1|$, если и только если $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$.

1. Если $|S| = 1$, то $|L(S)| = 1$.
2. Если $|S| > 1$, то $|L(S)| = \mathfrak{c}$.
3. Если $|S| = \omega$, то $\mathbf{L}(S)$ имеет $\mathfrak{c}$ минимальных элементов.

Нумерации и упорядоченные множества

Следствие C4.1.

Пусть S_0, S_1 — непустые не более, чем счётные множества. Тогда $|S_0| = |S_1|$, если и только если $\mathbf{L}^*(S_0) \simeq \mathbf{L}^*(S_1)$.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$.

1. Если $|S| = 1$, то $|L(S)| = 1$.
2. Если $|S| > 1$, то $|L(S)| = \mathfrak{c}$.
3. Если $|S| = \omega$, то $\mathbf{L}(S)$ имеет $\mathfrak{c}$ минимальных элементов.
4. Если $1 < |S| < \omega$, то $\mathbf{L}(S)$ имеет наименьший элемент.
5. Если $1 < |S_0| < \omega$ и $1 < |S_1| < \omega$, то $\mathbf{L}(S_0) \simeq \mathbf{L}(S_1)$ (Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.; доказательство данного утверждения громоздкое, поэтому здесь не приводится).

Разрешимые нумерации

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Разрешимые нумерации

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m\rangle | \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Разрешимые нумерации

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m\rangle | \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение С4.5.

Нумерация ν называется

Разрешимые нумерации

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение C4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m\rangle | \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение C4.5.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \imath_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);

Разрешимые нумерации

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение С4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m\rangle | \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение С4.5.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \imath_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);
- **разрешимой**, если η_ν вычислимо;

Разрешимые нумерации

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение C4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m\rangle | \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение C4.5.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \imath_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);
- **разрешимой**, если η_ν вычислимо;
- **позитивной**, если η_ν вычислимо перечислимо;

Разрешимые нумерации

Пусть S — непустое не более, чем счётное множество и пусть $\nu \in N(S)$.

Обозначение C4.3.

Положим $\eta_\nu = \{\langle n, m\rangle | \nu(n) = \nu(m)\}$. Заметим, что η_ν — отношение эквивалентности на натуральных числах, разбивающее множество натуральных чисел на $|S|$ классов.

Определение C4.5.

Нумерация ν называется

- **однозначной**, если $\eta_\nu = \imath_\omega$ (а именно, $\nu(m) = \nu(n) \Leftrightarrow m = n$);
- **разрешимой**, если η_ν вычислимо;
- **позитивной**, если η_ν вычислимо перечислимо;
- **негативной**, если $\omega^2 \setminus \eta_\nu$ вычислимо перечислимо.

Разрешимые нумерации

Основные свойства.

1. Любая однозначная нумерация является разрешимой.

Разрешимые нумерации

Основные свойства.

1. Любая однозначная нумерация является разрешимой.
2. Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.

Разрешимые нумерации

Основные свойства.

1. Любая однозначная нумерация является разрешимой.
2. Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.
3. Если нумерация является позитивной и негативной одновременно, то она разрешима (следствие теоремы С8? Поста).

Разрешимые нумерации

Основные свойства.

1. Любая однозначная нумерация является разрешимой.
2. Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.
3. Если нумерация является позитивной и негативной одновременно, то она разрешима (следствие теоремы C8? Поста).

Определение C4.6.

Нумерация ν называется **минимальной**, если выполняется соотношение $\mu \leqslant \nu \to \mu \equiv \nu$ для всех $\mu \in N(S)$.

Разрешимые нумерации

Основные свойства.

1. Любая однозначная нумерация является разрешимой.
2. Любая разрешимая нумерация одновременно и позитивна, и негативна.
3. Если нумерация является позитивной и негативной одновременно, то она разрешима (следствие теоремы C8? Поста).

Определение C4.6.

Нумерация ν называется **минимальной**, если выполняется соотношение $\mu \leqslant \nu \to \mu \equiv \nu$ для всех $\mu \in N(S)$.

Предложение C4.3.

Любая позитивная нумерация минимальна.

Позитивные нумерации

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leqslant \nu$. Возьмём вф f, для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:
$R \leftrightharpoons \{\langle n, m\rangle | \exists t[(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)]\}$.

Позитивные нумерации

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leqslant \nu$. Возьмём вф f, для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:
$R \risingdotseq \{\langle n, m\rangle | \exists t[(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)]\}$.
Сначала докажем, что $\mathrm{Pr}_1(R) = \omega$. В самом деле, пусть $n \in \omega$; тогда $\nu(n) = s \in S$ и, следовательно, найдётся $m_0 \in \omega$, для которого имеет место $\mu(m_0) = s$. Далее, $s = \mu(m_0) = \nu(f(m_0))$ и $\eta_\nu(n, f(m_0))$; таким образом, $R(n, f(m_0))$ и $n \in \mathrm{Pr}_1(R)$.

Позитивные нумерации

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leqslant \nu$. Возьмём вф f, для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:
$R \leftrightharpoons \{\langle n, m\rangle | \exists t[(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)]\}$.
Сначала докажем, что $\mathrm{Pr}_1(R) = \omega$. В самом деле, пусть $n \in \omega$; тогда $\nu(n) = s \in S$ и, следовательно, найдётся $m_0 \in \omega$, для которого имеет место $\mu(m_0) = s$. Далее, $s = \mu(m_0) = \nu(f(m_0))$ и $\eta_\nu(n, f(m_0))$; таким образом, $R(n, f(m_0))$ и $n \in \mathrm{Pr}_1(R)$.
По теореме об униформизации (C9?), существует вф g такая, что $\Gamma_g \subseteq R$. Покажем, что $\nu = \mu g$. В самом деле, $R(n, g(n))$, поэтому найдётся $t_0 \in \omega$, для которого выполняется $\eta_\nu(n, t_0)$ и $f(g(n)) = t_0$. Отсюда заключаем, что $\nu(n) = \nu(t_0) = \nu(f(g(n))) = \mu(g(n))$. $\square$

Позитивные нумерации

Доказательство.

Пусть $\nu \in N(S)$ — позитивная нумерация и пусть нумерация $\mu \in N(S)$ такова, что $\mu \leqslant \nu$. Возьмём вф f, для которой выполняется $\mu = \nu f$ и определим бинарный вп предикат R следующим образом:
$R \leftrightharpoons \{\langle n, m\rangle | \exists t[(f(m) = t) \wedge \eta_\nu(n, t)]\}$.
Сначала докажем, что $\mathrm{Pr}_1(R) = \omega$. В самом деле, пусть $n \in \omega$; тогда $\nu(n) = s \in S$ и, следовательно, найдётся $m_0 \in \omega$, для которого имеет место $\mu(m_0) = s$. Далее, $s = \mu(m_0) = \nu(f(m_0))$ и $\eta_\nu(n, f(m_0))$; таким образом, $R(n, f(m_0))$ и $n \in \mathrm{Pr}_1(R)$.
По теореме об униформизации (C9?), существует вф g такая, что $\Gamma_g \subseteq R$. Покажем, что $\nu = \mu g$. В самом деле, $R(n, g(n))$, поэтому найдётся $t_0 \in \omega$, для которого выполняется $\eta_\nu(n, t_0)$ и $f(g(n)) = t_0$. Отсюда заключаем, что $\nu(n) = \nu(t_0) = \nu(f(g(n))) = \mu(g(n))$. □

Следствие C4.2.

Любая однозначная (разрешимая, позитивная) нумерация минимальна.

Разрешимые нумерации

Лемма C4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Разрешимые нумерации

Лемма С4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
$\eta_{\nu_0}(n, m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_\nu(f(n), f(m))$.

Разрешимые нумерации

Лемма С4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
$\eta_{\nu_0}(n, m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_\nu(f(n), f(m))$.
Pos Пусть ν — позитивная нумерация, т.е. η_ν вп. Следовательно, $\eta_{\nu_0} = \{\langle n, m\rangle | \eta_\nu(f(n), f(m))\}$ и, по лемме С26?, η_{ν_0} — впм. Таким образом, ν_0 позитивна.

Разрешимые нумерации

Лемма C4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
$\eta_{\nu_0}(n,m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_\nu(f(n), f(m))$.
Pos Пусть ν — позитивная нумерация, т.е. η_ν вп. Следовательно, $\eta_{\nu_0} = \{\langle n,m\rangle | \eta_\nu(f(n), f(m))\}$ и, по лемме C26?, η_{ν_0} — впм. Таким образом, ν_0 позитивна.
Neg Пусть ν — негативная нумерация, т.е. $\omega^2 \setminus \eta_\nu$ вп. Следовательно, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0} = \{\langle n,m\rangle | \langle f(n), f(m)\rangle \notin \eta_\nu\}$ и, по лемме C26?, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0}$ — впм. Таким образом, ν_0 негативна.

Разрешимые нумерации

Лемма C4.2.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация и пусть нумерация ν_0 такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$. Тогда ν_0 также является разрешимой (позитивной, негативной) нумерацией.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu_0 = \nu f$. Тогда
$\eta_{\nu_0}(n, m) \Leftrightarrow [\nu(f(n)) = \nu_0(n) = \nu_0(m) = \nu(f(m))] \Leftrightarrow \eta_\nu(f(n), f(m))$.

Pos Пусть ν — позитивная нумерация, т.е. η_ν вп. Следовательно, $\eta_{\nu_0} = \{\langle n, m\rangle | \eta_\nu(f(n), f(m))\}$ и, по лемме C26?, η_{ν_0} — впм. Таким образом, ν_0 позитивна.

Neg Пусть ν — негативная нумерация, т.е. $\omega^2 \setminus \eta_\nu$ вп. Следовательно, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0} = \{\langle n, m\rangle | \langle f(n), f(m)\rangle \notin \eta_\nu\}$ и, по лемме C26?, $\omega^2 \setminus \eta_{\nu_0}$ — впм. Таким образом, ν_0 негативна.

Dec Пусть ν — разрешимая нумерация, а значит, позитивна и негативна одновременно. По доказанному, ν_0 также является позитивной и негативной одновременно. По теореме C8? Поста, ν_0 разрешима. $\square$

Разрешимые нумерации

Лемма С4.3.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация множества S и пусть $s \in S$. Тогда $\nu^{-1}(s)$ вычислимо (вычислимо перечислимо, ко-вычислимо перечислимо).

Разрешимые нумерации

Лемма C4.3.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация множества S и пусть $s \in S$. Тогда $\nu^{-1}(s)$ вычислимо (вычислимо перечислимо, ко-вычислимо перечислимо).

Доказательство.

Пусть n_0 таково, что $\nu(n_0) = s$. Тогда (**Dec**, **Pos**)
$n \in \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) = s) \Leftrightarrow (\nu(n) = \nu(n_0)) \Leftrightarrow \eta_\nu(n, n_0)$ и (**Neg**)
$n \notin \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq \nu(n_0)) \Leftrightarrow \neg\eta_\nu(n, n_0)$. $\square$

Разрешимые нумерации

Лемма С4.3.

Пусть ν — разрешимая (позитивная, негативная) нумерация множества S и пусть $s \in S$. Тогда $\nu^{-1}(s)$ вычислимо (вычислимо перечислимо, ко-вычислимо перечислимо).

Доказательство.

Пусть n_0 таково, что $\nu(n_0) = s$. Тогда (**Dec**, **Pos**)
$n \in \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) = s) \Leftrightarrow (\nu(n) = \nu(n_0)) \Leftrightarrow \eta_\nu(n, n_0)$ и (**Neg**)
$n \notin \nu^{-1}(s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq s) \Leftrightarrow (\nu(n) \neq \nu(n_0)) \Leftrightarrow \neg\eta_\nu(n, n_0)$. □

Лемма С4.4.

Пусть $S \neq \varnothing$ — конечное множество. Тогда ν разрешима, если и только если $\nu^{-1}(s)$ вычислимо для всех $s \in S$.

Разрешимые нумерации

Доказательство.

($\Rightarrow$) Непосредственно следует из леммы С4.3. ($\Leftarrow$) Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$; тогда $\eta_\nu(n, m) \Leftrightarrow [((n \in \nu^{-1}(s_1)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_1)))\vee$
$\vee((n \in \nu^{-1}(s_2)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_2))) \vee \ldots \vee$
$\vee((n \in \nu^{-1}(s_k)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_k)))]$. $\square$

Разрешимые нумерации

Доказательство.

($\Rightarrow$) Непосредственно следует из леммы C4.3. ($\Leftarrow$) Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$; тогда $\eta_\nu(n, m) \Leftrightarrow [((n \in \nu^{-1}(s_1)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_1)))\vee$
$\vee((n \in \nu^{-1}(s_2)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_2))) \vee \ldots \vee$
$\vee((n \in \nu^{-1}(s_k)) \wedge (m \in \nu^{-1}(s_k)))]$. □

Пример C4.1.

Пусть $\eta = \imath_\omega \cup \{\langle 2n, 2n+1\rangle, \langle 2n+1, 2n\rangle | n \in A\}$, где A — вп, но не вычислимо. Определим нумерацию ν множества ${}^{\omega}/_{\eta}$ как $\nu(n) = [n]_\eta$; тогда $\eta_\nu = \eta$, причём каждый класс эквивалентности содержит не более двух элементов и, в частности, вычислим. Однако нумерация ν позитивна, но не является разрешимой, поскольку имеет место $n \in A \Leftrightarrow (\nu(2n) = \nu(2n+1))$.

Разрешимые нумерации

Лемма C4.5.

Пусть $S \neq \varnothing$ — конечное множество. Тогда любая позитивная нумерация разрешима.

Разрешимые нумерации

Лемма C4.5.

Пусть $S \neq \varnothing$ — конечное множество. Тогда любая позитивная нумерация разрешима.

Доказательство.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k > 1$. Тогда $\nu^{-1}(s_i)$ и $\omega \setminus \nu^{-1}(s_i) = \bigcup\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{k} \nu^{-1}(s_j)$ вп, по лемме C4.3, а по теореме Поста (C8?), $\nu^{-1}(s_i)$ вычислимо $(1 \leqslant i \leqslant k)$. По лемме C4.4, ν разрешима. □

Разрешимые нумерации

Лемма C4.6.

Пусть $S \neq \varnothing$ — конечное множество. Тогда любая негативная нумерация разрешима.

Разрешимые нумерации

Лемма C4.6.

Пусть $S \neq \varnothing$ — конечное множество. Тогда любая негативная нумерация разрешима.

Доказательство.

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k > 1$. Тогда $\omega \setminus \nu^{-1}(s_i)$ и $\nu^{-1}(s_i) = \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{k} \omega \setminus \nu^{-1}(s_j)$ вп, по лемме C4.3, а по теореме Поста (C8?), $\nu^{-1}(s_i)$ вычислимо $(1 \leqslant i \leqslant k)$. По лемме C4.4, ν разрешима. □

Однозначные нумерации

Предложение C4.4.

Пусть ν — нумерация бесконечного множества S. Тогда ν разрешима, если и только если она эквивалентна некоторой однозначной.

Однозначные нумерации

Предложение C4.4.

Пусть ν — нумерация бесконечного множества S. Тогда ν разрешима, если и только если она эквивалентна некоторой однозначной.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть однозначная нумерация ν_0 такова, что $\nu \equiv \nu_0$. Тогда $\nu \leqslant \nu_0$ и, по лемме C4.2, ν разрешима.

Однозначные нумерации

Предложение С4.4.

Пусть ν — нумерация бесконечного множества S. Тогда ν разрешима, если и только если она эквивалентна некоторой однозначной.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть однозначная нумерация ν_0 такова, что $\nu \equiv \nu_0$. Тогда $\nu \leqslant \nu_0$ и, по лемме С4.2, ν разрешима.
($\Rightarrow$) Пусть ν — разрешимая нумерация. Тогда η_ν вычислимо. Покажем, что функция g, перечисляющая в порядке строгого возрастания наименьшие числа из классов, вычислима:

$$\left[\begin{array}{ll} g(0) = & 0, \\ g(n+1) = & \mu t.[(t > g(n)) \wedge \forall i < t \neg \eta_\nu(i,t)]. \end{array}\right.$$

Положим $\nu_0(n) \leftrightharpoons \nu g(n)$ для всех $n \in \omega$ (g всюду определена, поскольку S бесконечно). Нумерация ν_0 однозначна, поскольку каждый класс η_ν-эквивалентности присутствует в точности один раз; кроме того, $\nu_0 \leqslant \nu$, что вытекает непосредственно из определения. Условие $\nu \equiv \nu_0$ вытекает из следствия С4.2. $\square$

Негативные нумерации

Предложение С4.5.

Пусть ν — негативная нумерация бесконечного множества S. Тогда существует однозначная нумерация ν_0 множества S такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$.

Негативные нумерации

Предложение C4.5.

Пусть ν — негативная нумерация бесконечного множества S. Тогда существует однозначная нумерация ν_0 множества S такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$.

Доказательство.

Пусть $A = c(\omega^2 \setminus \eta_\nu)$; возьмём сильную аппроксимацию $\varnothing = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_s \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_s A_s = A$ для A, дополнительно удовлетворяющим условию $|A_{s+1} - A_s| \leqslant 1$ для всех $s \in \omega$. Определим функцию f следующим образом:

$$\left[\begin{array}{ll} f(0) \leftrightharpoons & 0, \\ f(n+1) \leftrightharpoons & l(\mu k.[(l(k) \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}) \wedge \\ & \wedge \forall u < l(k)(c(u, l(k)) \in A_{r(k)})]). \end{array}\right.$$

Негативные нумерации

Предложение C4.5.

Пусть ν — негативная нумерация бесконечного множества S. Тогда существует однозначная нумерация ν_0 множества S такая, что $\nu_0 \leqslant \nu$.

Доказательство.

Пусть $A = c(\omega^2 \setminus \eta_\nu)$; возьмём сильную аппроксимацию $\varnothing = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_s \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_s A_s = A$ для A, дополнительно удовлетворяющим условию $|A_{s+1} - A_s| \leqslant 1$ для всех $s \in \omega$. Определим функцию f следующим образом:

$$\left[\begin{array}{ll} f(0) \leftrightharpoons & 0, \\ f(n+1) \leftrightharpoons & l(\mu k.[(l(k) \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}) \wedge \\ & \wedge \forall u < l(k)(c(u, l(k)) \in A_{r(k)})]). \end{array}\right.$$

Докажем сначала, что функция $f(n)$ частично вычислима. Возьмём вспомогательную функцию $g(n) = p_0^{f(0)+1} \cdot p_1^{f(1)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{f(n)+1}$ и докажем, что $g(n)$ частично вычислима; тогда $f(n) = ex(n, g(n)) \dot{-} 1$ и, в частности, $f(n)$ будет чвф.

Негативные нумерации

Доказательство (продолжение).

Действительно,

$$\left[\begin{array}{ll} g(0) \leftrightharpoons & 2, \\ g(n+1) \leftrightharpoons & g(n)\times \\ & p_{n+1}^{s(l(\mu k.[\forall i\leqslant n(l(k)\neq \mathrm{ex}(i,g(n))\dot{-}1)\wedge\forall u<l(k)(c(u,l(k))\in A_{r(k)})]))}. \end{array}\right.$$

Негативные нумерации

Доказательство (продолжение).

Действительно,

$$\left[\begin{array}{ll} g(0) \leftrightharpoons & 2, \\ g(n+1) \leftrightharpoons & g(n)\times \\ & p_{n+1}^{s(l(\mu k.[\forall i\leqslant n(l(k)\neq \mathrm{ex}(i,g(n))\dot{-}1)\wedge\forall u<l(k)(c(u,l(k))\in A_{r(k)})]))}. \end{array}\right.$$

Покажем теперь, что для каждого наименьшего ν-номера n_0 найдётся шаг s_{n_0} такой, что $\forall u < n_0[c(u, n_0) \in A_{s_{n_0}}]$. В самом деле, для каждого $u < n_0$ выберем шаг s_u, для которого выполняется $c(u, n_0) \in A_{s_u}$; в силу монотонности аппроксимации, все числа попадут в A_s, где $s \leftrightharpoons \max\{s_u | u < n_0\}$. Отсюда вытекает, что функция f всюду определена, поскольку S бесконечно.

Негативные нумерации

Доказательство (окончание).

Наконец, любой наименьший ν-номер попадёт в ρf. Возьмём любой наименьший ν-номер m_0; по доказанному, найдётся шаг s_{m_0}, для которого выполняется $c(u, m_0) \in A_{s_{m_0}}$ для всех $u < m_0$. Заметим, что существует лишь конечное число пар вида $\langle p, s_p \rangle$, для которых имеет место $c(p, s_p) < c(m_0, s_{m_0})$. Следовательно, среди чисел $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(m_0 + s_{m_0} + 1)$ обязательно будет присутствовать число m_0, поскольку $m_0 + s_{m_0}$ — количество диагоналей, мèньших данной.

Негативные нумерации

Доказательство (окончание).

Наконец, любой наименьший ν-номер попадёт в ρf. Возьмём любой наименьший ν-номер m_0; по доказанному, найдётся шаг s_{m_0}, для которого выполняется $c(u, m_0) \in A_{s_{m_0}}$ для всех $u < m_0$. Заметим, что существует лишь конечное число пар вида $\langle p, s_p \rangle$, для которых имеет место $c(p, s_p) < c(m_0, s_{m_0})$. Следовательно, среди чисел $f(0)$, $f(1)$, $\ldots$, $f(m_0 + s_{m_0} + 1)$ обязательно будет присутствовать число m_0, поскольку $m_0 + s_{m_0}$ — количество диагоналей, мѐньших данной.

Положим $\nu_0 \leftrightharpoons \nu f$. Из определения следует, что $\nu_0 \leqslant \nu$, а из вышеприведённых свойств вытекает, что ν_0 — однозначная нумерация множества S. $\square$

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Лемма C4.7.

Если S счётно, то $\mathbf{L}(S)$ имеет $\mathfrak{c}$ минимальных элементов.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Лемма C4.7.

Если S счётно, то $\mathbf{L}(S)$ имеет $\mathfrak{c}$ минимальных элементов.

Доказательство.

Воспользуемся здесь тем, что группа $\mathfrak{G}$ перестановок множества ω континуальна (доказать !!!) Возьмём однозначную нумерацию ν множества S. Зафиксируем также отображение ν^*, обратное к ν. Тогда $\nu\psi$, $\psi \in \mathfrak{G}$, также будет однозначной нумерацией, как композиция двух биекций. Более того, трансформация $\psi \in \mathfrak{G} \overset{\Psi}{\mapsto} \nu\psi \in N(S)$ осуществляет биективное соответствие между перестановками на натуральных числах и однозначными нумерациями множества S.

Ψ — инъекция. Пусть $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{G}$; тогда $(\nu\psi_1 = \nu\psi_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\psi_1 = (\nu^*\nu)\psi_1 = \nu^*(\nu\psi_1) = \nu^*(\nu\psi_2) = (\nu^*\nu)\psi_2 = \psi_2)$.

Ψ — сюръекция. Пусть ν_0 — однозначная нумерация множества S. Тогда $\nu^*\nu_0 \in \mathfrak{G}$ и $\nu_0 = (\nu\nu^*)\nu_0 = \nu(\nu^*\nu_0)$.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Доказательство (окончание).

Так как множество однозначных нумераций континуально, множество их классов эквивалентности не более, чем континуально. Заметим, что каждый класс не более, чем счётен (на самом деле, в точности счётен): $\nu_0 f \in [\nu_0]_{\equiv}$ для подходящей вф f, а множество всех вычислимых функций счётно. Далее, множество различных классов однозначных нумераций континуально, поскольку в противном случае $\mathfrak{c} > |\bigcup_{\psi\in\mathfrak{G}}[\nu\psi]_{\equiv}| \geqslant |\{\mu \in N(S) | \mu$ – однозначная$\}|$. Остаётся вспомнить, что любая однозначная нумерация минимальна (см. следствие С4.2). $\square$

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Доказательство (окончание).

Так как множество однозначных нумераций континуально, множество их классов эквивалентности не более, чем континуально. Заметим, что каждый класс не более, чем счётен (на самом деле, в точности счётен): $\nu_0 f \in [\nu_0]_\equiv$ для подходящей вф f, а множество всех вычислимых функций счётно. Далее, множество различных классов однозначных нумераций континуально, поскольку в противном случае $\mathfrak{c} > |\bigcup_{\psi\in\mathfrak{G}}[\nu\psi]_\equiv| \geqslant |\{\mu \in N(S)|\mu$ – однозначная$\}|$. Остаётся вспомнить, что любая однозначная нумерация минимальна (см. следствие C4.2). $\square$

Лемма C4.8.

Если S конечно, то $\mathbf{L}(S)$ имеет наименьший элемент.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Доказательство.

Пусть $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k \geqslant 1$. Положим

$$\nu_0(n) \leftrightharpoons \begin{cases} s_0, & \text{если } n = 0; \\ s_1, & \text{если } n = 1; \\ \ldots & \ldots \\ s_k, & \text{если } n \geqslant k. \end{cases}$$

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Доказательство.

Пусть $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$; без ограничения общности будем считать, что $k \geqslant 1$. Положим

$$\nu_0(n) \leftrightharpoons \begin{cases} s_0, & \text{если } n = 0; \\ s_1, & \text{если } n = 1; \\ \ldots & \ldots \\ s_k, & \text{если } n \geqslant k. \end{cases}$$

Докажем, что $\nu_0 \leqslant \nu$ для любой нумерации $\nu \in N(S)$. Возьмём числа n_i такие, что $\nu(n_i) = s_i$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$. Определим функцию f_0 следующим образом:

$$f_0(x) \leftrightharpoons \begin{cases} n_0, & \text{если } x = 0; \\ n_1, & \text{если } x = 1; \\ \ldots & \ldots \\ n_k, & \text{если } x \geqslant k. \end{cases}$$

Данная функция вычислима (даже примитивно рекурсивна) и, к тому же $\nu_0(x) = \nu f_0(x)$ для всех $x \in \omega$. $\square$

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Следствие С4.3.

Пусть $S_0 \neq \varnothing$ — конечное множество и пусть S_1 счётно. Тогда $\mathbf{L}(S_0) \not\cong \mathbf{L}(S_1)$.

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Следствие C4.3.

Пусть $S_0 \neq \varnothing$ — конечное множество и пусть S_1 счётно. Тогда $\mathbf{L}(S_0) \not\approx \mathbf{L}(S_1)$.

Доказательство.

В самом деле, $\mathbf{L}(S_0)$ имеет наименьший элемент, по лемме C4.8, а $\mathbf{L}(S_1)$ не может иметь наименьшего элемента, по лемме C4.7. □

Типы изоморфизма $\mathbf{L}(S)$

Следствие С4.3.

Пусть $S_0 \neq \varnothing$ — конечное множество и пусть S_1 счётно. Тогда $\mathbf{L}(S_0) \not\cong \mathbf{L}(S_1)$.

Доказательство.

В самом деле, $\mathbf{L}(S_0)$ имеет наименьший элемент, по лемме С4.8, а $\mathbf{L}(S_1)$ не может иметь наименьшего элемента, по лемме С4.7. □

Перейдём к описанию алгебраических свойств частично упорядоченных множеств вида $\mathbf{L}(S)$, где $S \neq \varnothing$. Кроме того, дадим без доказательства описание типа изоморфизма $\mathbf{L}(S)$, где $1 < |S| < \omega$.

Прямая сумма

Определение С4.7.

Пусть ν_0, ν_1 — нумерации; их **прямой суммой** называется

$$\nu_0 \oplus \nu_1(x) = \begin{cases} \nu_0\left(\dfrac{x}{2}\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\[2ex] \nu_1\left(\dfrac{x-1}{2}\right), & \text{если } x \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Прямая сумма

Определение C4.7.

Пусть ν_0, ν_1 — нумерации; их **прямой суммой** называется

$$\nu_0 \oplus \nu_1(x) = \begin{cases} \nu_0\left(\dfrac{x}{2}\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\[2ex] \nu_1\left(\dfrac{x-1}{2}\right), & \text{если } x \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Предложение C4.6.

Пусть ν, ν_0 и ν_1 — нумерации. Тогда $\nu_0 \oplus \nu_1 \leqslant \nu$, если и только если $\nu_0 \leqslant \nu$ и $\nu_1 \leqslant \nu$.

Прямая сумма

Определение С4.7.

Пусть ν_0, ν_1 — нумерации; их **прямой суммой** называется

$$\nu_0 \oplus \nu_1(x) = \begin{cases} \nu_0\left(\dfrac{x}{2}\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\ \nu_1\left(\dfrac{x-1}{2}\right), & \text{если } x \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Предложение С4.6.

Пусть ν, ν_0 и ν_1 — нумерации. Тогда $\nu_0 \oplus \nu_1 \leqslant \nu$, если и только если $\nu_0 \leqslant \nu$ и $\nu_1 \leqslant \nu$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\nu_0 \oplus \nu_1 \leqslant \nu$ с помощью вф g, а именно, $(\nu_0 \oplus \nu_1)(n) = \nu(g(n))$ для всех $n \in \omega$. Возьмём $g_0(x) \leftrightharpoons \lambda x.g(2x)$; тогда $\nu g_0(x) = \nu g(2x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(2x) = \nu_0(x)$ для всех $x \in \omega$ и, следовательно, $\nu_0 \leqslant \nu$.

Прямая сумма

Доказательство (окончание).

Возьмём $g_1(x) \leftrightharpoons \lambda x.g(2x+1)$; тогда $\nu g_1(x) = \nu g(2x+1) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(2x+1) = \nu_1(x)$ для всех $x \in \omega$ и, следовательно, $\nu_1 \leqslant \nu$.

Прямая сумма

Доказательство (окончание).

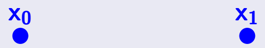
Возьмём $g_1(x) \leftrightharpoons \lambda x.g(2x+1)$; тогда $\nu g_1(x) = \nu g(2x+1) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(2x+1) = \nu_1(x)$ для всех $x \in \omega$ и, следовательно, $\nu_1 \leqslant \nu$.

($\Leftarrow$) Пусть теперь $\nu_0 \leqslant \nu$ и $\nu_1 \leqslant \nu$; тогда найдутся вф f_0 и f_1, для которых выполняются $\nu_0 = \nu f_0$ и $\nu_1 = \nu f_1$. Тогда функция

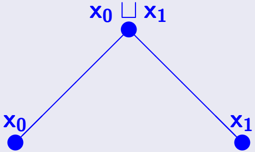
$$f(x) \leftrightharpoons \begin{cases} f_0\left(\left[\dfrac{x}{2}\right]\right), & \text{если } x \text{ чётно;} \\ f_1\left(\left[\dfrac{x \dot{-} 1}{2}\right]\right), & \text{если } x \text{ нечётно;} \end{cases}$$

вычислима; кроме того, $\nu f(x) = \nu f_0\left(\dfrac{x}{2}\right) = \nu_0\left(\dfrac{x}{2}\right) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(x)$, если x чётно; $\nu f(x) = \nu f_1\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = \nu_1\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = (\nu_0 \oplus \nu_1)(x)$, если x нечётно. В любом случае, имеем $\nu_0 \oplus \nu_1 = \nu f$; таким образом, $\nu_0 \oplus \nu_1 \leqslant \nu$. $\square$

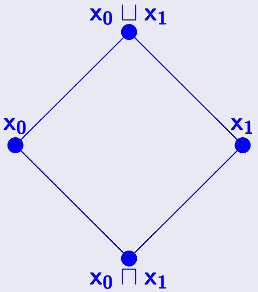
Верхняя полурешётка



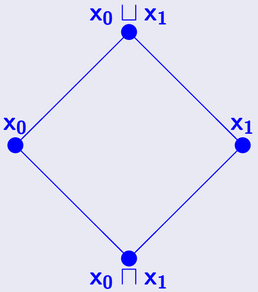
Верхняя полурешётка



Верхняя полурешётка



Верхняя полурешётка



Определение C4.8.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$ называется **верхней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная верхняя грань $x_0 \sqcup x_1 \leftrightharpoons \sup\{x_0, x_1\}$.

Верхняя полурешётка

Определение C4.9.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant\rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \leftrightharpoons \inf\{x_0, x_1\}$.

Верхняя полурешётка

Определение C4.9.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant\rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \leftrightharpoons \inf\{x_0, x_1\}$.

Определение C4.10.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant\rangle$ называется **решёткой**, если оно одновременно является и нижней, и верхней полурешетками.

Верхняя полурешётка

Определение C4.9.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \leftrightharpoons \inf\{x_0, x_1\}$.

Определение C4.10.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$ называется **решёткой**, если оно одновременно является и нижней, и верхней полурешетками.

Пример C4.2.

Любое линейно упорядоченное множество является решёткой.

Верхняя полурешётка

Определение C4.9.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$ называется **нижней полурешёткой**, если для любых $x_0, x_1 \in X$ существует точная нижняя грань $x_0 \sqcap x_1 \leftrightharpoons \inf\{x_0, x_1\}$.

Определение C4.10.

Частично упорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$ называется **решёткой**, если оно одновременно является и нижней, и верхней полурешетками.

Пример C4.2.

Любое линейно упорядоченное множество является решёткой.

Следствие C4.4.

Структуры $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ являются верхними полурешётками для любого не более, чем счётного множества S. Если, к тому же, S счётно, то $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ не являются нижними полурешётками.

Верхняя полурешётка

Доказательство.

То, что данные структуры являются верхними полурешётками, непосредственно следует из предложения C4.6. Докажем теперь, что в случае, когда S счётно, $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ не являются нижними полурешётками. Возьмём два различных минимальных элемента $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \in L(S)$ (см. лемму C4.7); тогда не существует $\mathbf{a}_0 \sqcap_{\mathbf{L}(S)} \mathbf{a}_1 \in L(S)$ (если бы этот элемент существовал (обозначим его через $\mathbf{c}$), то $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_0 \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_1 \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a}_1$; следовательно, $\mathbf{a}_0 = \mathbf{c} = \mathbf{a}_1$, однако $\mathbf{a}_0 \neq \mathbf{a}_1$, противоречие). Допустим, что существует $\mathbf{a}_0 \sqcap_{\mathbf{L}^*(S)} \mathbf{a}_1 \in L^*(S)$; если $\mathbf{a}_0 \sqcap_{\mathbf{L}^*(S)} \mathbf{a}_1 \in L(S)$, то $\mathbf{a}_0 \sqcap_{\mathbf{L}^*(S)} \mathbf{a}_1$ — точная нижняя грань элементов $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_1$ в $\mathbf{L}(S)$. Поэтому $\mathbf{a}_0 \sqcap_{\mathbf{L}^*(S)} \mathbf{a}_1 \in L(S_0)$ для некоторого $S_0 \subset S$. Возьмём $s_0 \in S \setminus S_0$; тогда $[\lambda n.s_0]_\equiv \leqslant \mathbf{a}_0$, $[\lambda n.s_0]_\equiv \leqslant \mathbf{a}_1$, но $[\lambda n.s_0]_\equiv \not\leqslant \mathbf{a}_0 \sqcap_{\mathbf{L}^*(S)} \mathbf{a}_1$, противоречие. $\square$

Верхние полурешётки

Верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S. Тем самым, верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Верхние полурешётки

Верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S. Тем самым, верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Лемма С4.9.

Любая конечная верхняя полурешётка с наименьшим элементом является решёткой.

Верхние полурешётки

Верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S. Тем самым, верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Лемма С4.9.

Любая конечная верхняя полурешётка с наименьшим элементом является решёткой.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — конечная верхняя полурешётка и пусть $\mathbf{0} \in L$ — наименьший элемент. Докажем, что $\mathfrak{L}$ — решётка. Пусть $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_1 \in L$, тогда положим $X \leftrightharpoons \{\mathbf{c} \in L | \mathbf{c} \leqslant \mathbf{c}_0, \ \mathbf{c} \leqslant \mathbf{c}_1\}$. Множество X не пусто, поскольку $\mathbf{0} \in X$; кроме того, X конечно, как подмножество конечного множества L. Докажем, что $\mathbf{c}_0 \sqcap \mathbf{c}_1 = \bigsqcup X$.

Верхние полурешётки

Верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ в случае, когда $1 < |S| < \omega$, также не являются нижними полурешётками. Однако проверка данного условия не столь проста, как для счётного множества S. Тем самым, верхние полурешётки $\mathbf{L}(S)$ и $\mathbf{L}^*(S)$ являются решётками, если и только если $|S| = 1$.

Лемма C4.9.

Любая конечная верхняя полурешётка с наименьшим элементом является решёткой.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — конечная верхняя полурешётка и пусть $\mathbf{0} \in L$ — наименьший элемент. Докажем, что $\mathfrak{L}$ — решётка. Пусть $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_1 \in L$, тогда положим $X \leftrightharpoons \{\mathbf{c} \in L | \mathbf{c} \leqslant \mathbf{c}_0, \mathbf{c} \leqslant \mathbf{c}_1\}$. Множество X не пусто, поскольку $\mathbf{0} \in X$; кроме того, X конечно, как подмножество конечного множества L. Докажем, что $\mathbf{c}_0 \sqcap \mathbf{c}_1 = \bigsqcup X$.
$\bigsqcup X_0$ — нижняя грань $\mathbf{c}_0$ и $\mathbf{c}_1$ для любого $X_0 \subseteq X$. Доказывается индукцией по $|X_0|$. Если $n = 1$, то $X_0 = \{\mathbf{a}\}$ и $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1$.

Верхние полурешётки

Доказательство (окончание).

Если $n = k + 1$, то $X_0 = X_1 \cup \{\mathbf{a}\}$ и $|X_1| = k$; по предположению индукции, $\bigsqcup X_1 \leqslant \mathbf{c}_0$ и $\bigsqcup X_1 \leqslant \mathbf{c}_1$; кроме того, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1$. Далее, $\bigsqcup X_0 = \bigsqcup(X_1 \cup \{a\}) = \bigsqcup X_1 \sqcup \mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_i$, $i = 0, 1$.

Верхние полурешётки

Доказательство (окончание).

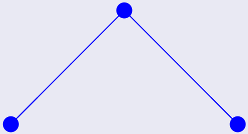
Если $n = k + 1$, то $X_0 = X_1 \cup \{\mathbf{a}\}$ и $|X_1| = k$; по предположению индукции, $\bigsqcup X_1 \leqslant \mathbf{c}_0$ и $\bigsqcup X_1 \leqslant \mathbf{c}_1$; кроме того, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1$. Далее, $\bigsqcup X_0 = \bigsqcup(X_1 \cup \{a\}) = \bigsqcup X_1 \sqcup \mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_i$, $i = 0, 1$. $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1 \Rightarrow a \leqslant \bigsqcup X$. Пусть справедлива посылка (т.е. $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1$), тогда $\mathbf{a} \in X$ и, следовательно, $\mathbf{a} \leqslant \bigsqcup X$. □

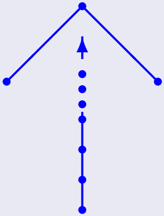
Верхние полурешётки

Доказательство (окончание).

Если $n = k + 1$, то $X_0 = X_1 \cup \{\mathbf{a}\}$ и $|X_1| = k$; по предположению индукции, $\bigsqcup X_1 \leqslant \mathbf{c}_0$ и $\bigsqcup X_1 \leqslant \mathbf{c}_1$; кроме того, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1$. Далее, $\bigsqcup X_0 = \bigsqcup(X_1 \cup \{a\}) = \bigsqcup X_1 \sqcup \mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_i$, $i = 0, 1$. $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1 \Rightarrow a \leqslant \bigsqcup X$. Пусть справедлива посылка (т.е. $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}_1$), тогда $\mathbf{a} \in X$ и, следовательно, $\mathbf{a} \leqslant \bigsqcup X$. $\square$

Верхняя полурешётка, но не решётка





Свойство дистрибутивности

Предложение С4.7.

Пусть нумерации ν_0, ν_1, ν, μ таковы, что $\nu \leqslant \nu_0 \oplus \nu_1$ и $\mu \leqslant \nu_0$, $\mu \leqslant \nu_1$, $\mu \leqslant \nu$. Тогда найдутся нумерации ν_0' и ν_1', для которых выполняется следующее: $\nu \equiv \nu_0' \oplus \nu_1'$, $\mu \leqslant \nu_0' \leqslant \nu_0$, $\mu \leqslant \nu_1' \leqslant \nu_1$.

Свойство дистрибутивности

Предложение C4.7.

Пусть нумерации ν_0, ν_1, ν, μ таковы, что $\nu \leqslant \nu_0 \oplus \nu_1$ и $\mu \leqslant \nu_0$, $\mu \leqslant \nu_1$, $\mu \leqslant \nu$. Тогда найдутся нумерации ν_0' и ν_1', для которых выполняется следующее: $\nu \equiv \nu_0' \oplus \nu_1'$, $\mu \leqslant \nu_0' \leqslant \nu_0$, $\mu \leqslant \nu_1' \leqslant \nu_1$.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu = (\nu_0 \oplus \nu_1)f$. Положим $R_0 \leftrightharpoons \{n|f(n) \text{ чётно}\}$ и $R_1 \leftrightharpoons \{n|f(n) \text{ нечётно}\}$. Определим нумерацию ν_i', $i = 0, 1$, следующим образом:
если $R_i = \varnothing$, то $\nu_i' \leftrightharpoons \mu$; если же $R_i \neq \varnothing$, то возьмём вф g_i так, что $\rho g_i = R_i$, и положим $\nu_i' \leftrightharpoons \mu \oplus \nu g_i$.

Свойство дистрибутивности

Предложение C4.7.

Пусть нумерации ν_0, ν_1, ν, μ таковы, что $\nu \leqslant \nu_0 \oplus \nu_1$ и $\mu \leqslant \nu_0$, $\mu \leqslant \nu_1$, $\mu \leqslant \nu$. Тогда найдутся нумерации ν_0' и ν_1', для которых выполняется следующее: $\nu \equiv \nu_0' \oplus \nu_1'$, $\mu \leqslant \nu_0' \leqslant \nu_0$, $\mu \leqslant \nu_1' \leqslant \nu_1$.

Доказательство.

Пусть вф f такова, что $\nu = (\nu_0 \oplus \nu_1)f$. Положим $R_0 \leftrightharpoons \{n | f(n) \text{ чётно}\}$ и $R_1 \leftrightharpoons \{n | f(n) \text{ нечётно}\}$. Определим нумерацию ν_i', $i = 0, 1$, следующим образом:
если $R_i = \varnothing$, то $\nu_i' \leftrightharpoons \mu$; если же $R_i \neq \varnothing$, то возьмём вф g_i так, что $\rho g_i = R_i$, и положим $\nu_i' \leftrightharpoons \mu \oplus \nu g_i$.
Проверим, что $\nu_i' \leqslant \nu_i$. Если $R_i = \varnothing$, то $\nu_i' = \mu \leqslant \nu_i$. Если $R_i \neq \varnothing$, то достаточно показать, что $\nu g_i \leqslant \nu_i$. Пусть $i = 0$ и $F \leftrightharpoons \lambda x \left[\frac{fg_0(x)}{2}\right]$, тогда $\nu g_0(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)fg_0(x) = \nu_0 \left[\frac{fg_0(x)}{2}\right] = \nu_0 F(x)$;

Свойство дистрибутивности

Доказательство (продолжение).

пусть $i = 1$ и $G \leftrightharpoons \lambda x \left[\dfrac{fg_1(x) - 1}{2}\right]$, тогда

$\nu g_1(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1) fg_1(x) = \nu_1 \left[\dfrac{fg_1(x) - 1}{2}\right] = \nu_1 G(x)$. Итак, $\nu_i' \leqslant \nu_i$.

Свойство дистрибутивности

Доказательство (продолжение).

пусть $i = 1$ и $G \leftrightharpoons \lambda x \left[\dfrac{fg_1(x) - 1}{2}\right]$, тогда

$\nu g_1(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1) fg_1(x) = \nu_1 \left[\dfrac{fg_1(x) - 1}{2}\right] = \nu_1 G(x)$. Итак, $\nu'_i \leqslant \nu_i$.

Так как $\mu \leqslant \nu$ и $\nu g_i \leqslant \nu$, имеем $\nu'_i \leqslant \nu$ и $\nu'_0 \oplus \nu'_1 \leqslant \nu$, по предложению C4.6.

Свойство дистрибутивности

Доказательство (продолжение).

пусть $i = 1$ и $G \leftrightharpoons \lambda x\left[\frac{fg_1(x)-1}{2}\right]$, тогда

$\nu g_1(x) = (\nu_0 \oplus \nu_1)fg_1(x) = \nu_1\left[\frac{fg_1(x)-1}{2}\right] = \nu_1 G(x)$. Итак, $\nu'_i \leqslant \nu_i$.

Так как $\mu \leqslant \nu$ и $\nu g_i \leqslant \nu$, имеем $\nu'_i \leqslant \nu$ и $\nu'_0 \oplus \nu'_1 \leqslant \nu$, по предложению С4.6.

Покажем, что $\nu \leqslant \nu'_0 \oplus \nu'_1$. Рассмотрим случай $R_0 \neq \varnothing$ и $R_1 \neq \varnothing$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть функция H определяется так:

$H \leftrightharpoons \lambda x[\mu y((g_0(y) = x) \vee (g_1(y) = x))]$,

а функция h — следующим образом:

$$h(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 2(2H(x)+1), & \text{если } g_0(H(x)) = x \text{ (т.е. } x \in R_0); \\ 2(2H(x)+1)+1, & \text{если } g_1(H(x)) = x \text{ (т.е. } x \in R_1). \end{cases}$$

Проверим, что $\nu = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)h$. Пусть $x \in R_0$, тогда

$\nu x = \nu g_0(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_0)(2H(x)+1) = \nu'_0(2H(x)+1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(2(2H(x)+1)) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(h(x))$;

Свойство дистрибутивности

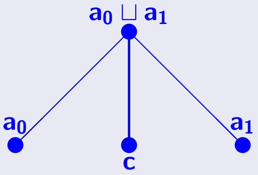
Доказательство (окончание).

если $x \in R_1$, то $\nu x = \nu g_1(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_1)(2H(x)+1) = \nu_1'(2H(x)+1) = (\nu_0' \oplus \nu_1')(2(2H(x)+1)+1) = (\nu_0' \oplus \nu_1')(h(x))$. Так как $R_0 \cap R_1 = \varnothing$ и $R_0 \cup R_1 = \omega$, имеем $\nu x = (\nu_0' \oplus \nu_1')h(x)$ для всех $x \in \omega$; таким образом, $\nu \leqslant \nu_0' \oplus \nu_1'$. $\square$

Свойство дистрибутивности

Доказательство (окончание).

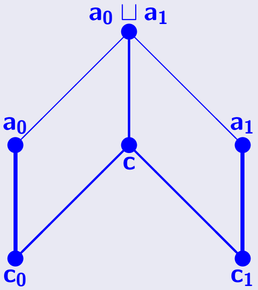
если $x \in R_1$, то $\nu x = \nu g_1(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_1)(2H(x)+1) = \nu_1'(2H(x)+1) = (\nu_0' \oplus \nu_1')(2(2H(x)+1)+1) = (\nu_0' \oplus \nu_1')(h(x))$. Так как $R_0 \cap R_1 = \varnothing$ и $R_0 \cup R_1 = \omega$, имеем $\nu x = (\nu_0' \oplus \nu_1')h(x)$ для всех $x \in \omega$; таким образом, $\nu \leqslant \nu_0' \oplus \nu_1'$. □



Свойство дистрибутивности

Доказательство (окончание).

если $x \in R_1$, то $\nu x = \nu g_1(H(x)) = (\mu \oplus \nu g_1)(2H(x)+1) = \nu'_1(2H(x)+1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(2(2H(x)+1)+1) = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)(h(x))$. Так как $R_0 \cap R_1 = \varnothing$ и $R_0 \cup R_1 = \omega$, имеем $\nu x = (\nu'_0 \oplus \nu'_1)h(x)$ для всех $x \in \omega$; таким образом, $\nu \leqslant \nu'_0 \oplus \nu'_1$. □



Свойство дистрибутивности

Определение C4.11.

Верхняя полурешётка $\langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ называется **дистрибутивной**, если выполняется следующее: для всех $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} \in L$ таких, что $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1$, найдутся $\mathbf{c}_0 \leqslant \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c}_1 \leqslant \mathbf{a}_1$, для которых имеет место $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1$.

Свойство дистрибутивности

Определение С4.11.

Верхняя полурешётка $\langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ называется **дистрибутивной**, если выполняется следующее: для всех $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} \in L$ таких, что $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1$, найдутся $\mathbf{c}_0 \leqslant \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c}_1 \leqslant \mathbf{a}_1$, для которых имеет место $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1$.

Определение С4.12.

Решётка $\langle L, \leqslant, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется **дистрибутивной**, если для всех $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} \in L$ выполняется тождество $(\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) \sqcap \mathbf{c} = (\mathbf{a}_0 \sqcap \mathbf{c}) \sqcup (\mathbf{a}_1 \sqcap \mathbf{c})$.

Свойство дистрибутивности

Определение C4.11.

Верхняя полурешётка $\langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ называется **дистрибутивной**, если выполняется следующее: для всех $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} \in L$ таких, что $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1$, найдутся $\mathbf{c}_0 \leqslant \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c}_1 \leqslant \mathbf{a}_1$, для которых имеет место $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1$.

Определение C4.12.

Решётка $\langle L, \leqslant, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется **дистрибутивной**, если для всех $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} \in L$ выполняется тождество $(\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) \sqcap \mathbf{c} = (\mathbf{a}_0 \sqcap \mathbf{c}) \sqcup (\mathbf{a}_1 \sqcap \mathbf{c})$.

Определение C4.13.

Пусть $\langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка и пусть $\mathbf{a} \in L$. **Верхним конусом** будем называть множество $\mathbf{a} \uparrow L \leftrightharpoons \{\mathbf{c} \in L | \mathbf{a} \leqslant \mathbf{c}\}$.

Свойство дистрибутивности

Следствие C4.5.

Пусть $S \neq \varnothing$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^*(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}^*(S)$ дистрибутивна.

Свойство дистрибутивности

Следствие C4.5.

Пусть $S \neq \varnothing$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^*(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}^*(S)$ дистрибутивна.

Следствие C4.6.

Пусть $S \neq \varnothing$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}(S)$ дистрибутивна.

Свойство дистрибутивности

Следствие C4.5.

Пусть $S \neq \varnothing$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}^*(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}^*(S)$ дистрибутивна.

Следствие C4.6.

Пусть $S \neq \varnothing$ — не более, чем счётное множество и пусть $\mathbf{a} \in \mathbf{L}(S)$. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{L}(S)$ дистрибутивна.

Следствие C4.7.

Пусть $S \neq \varnothing$ — конечное множество. Тогда верхняя полурешётка $\mathbf{L}(S)$ дистрибутивна.

Свойство дистрибутивности

Предложение С4.8.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Тогда $\mathfrak{L}$ дистрибутивна как решётка, если и только если она дистрибутивна как верхняя полурешётка.

Свойство дистрибутивности

Предложение С4.8.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Тогда $\mathfrak{L}$ дистрибутивна как решётка, если и только если она дистрибутивна как верхняя полурешётка.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{c} \in L$ таковы, что $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1$; тогда положим $\mathbf{c}_0 \leftrightharpoons \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c}_1 \leftrightharpoons \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1$. Следовательно, $\mathbf{c}_i = \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_i \leqslant \mathbf{a}_i$, $i = 0, 1$, и $\mathbf{c} = \mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) = (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0) \sqcup (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1) = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1$.

Свойство дистрибутивности

Предложение С4.8.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Тогда $\mathfrak{L}$ дистрибутивна как решётка, если и только если она дистрибутивна как верхняя полурешётка.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{c} \in L$ таковы, что $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1$; тогда положим $\mathbf{c}_0 \leftrightharpoons \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c}_1 \leftrightharpoons \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1$. Следовательно, $\mathbf{c}_i = \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_i \leqslant \mathbf{a}_i$, $i = 0, 1$, и $\mathbf{c} = \mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) = (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0) \sqcup (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1) = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{L}$ дистрибутивна как верхняя полурешётка; докажем, что выполняется соотношение $\mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) = (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0) \sqcup (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1)$.

($\geqslant$) Действительно, $\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_i \leqslant \mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1)$, $i = 0, 1$, поскольку $[\mathbf{b} \leqslant \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a}_i] \Rightarrow [\mathbf{b} \leqslant \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1]$; следовательно, $(\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0) \sqcup (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1) \leqslant \mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1)$.

($\leqslant$) Так как $\mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) \leqslant \mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1$, найдутся элементы $\mathbf{c}_0 \leqslant \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{c}_1 \leqslant \mathbf{a}_1$ такие, что $\mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1$. Следовательно, $\mathbf{c}_0 \leqslant \mathbf{c}$, $\mathbf{c}_1 \leqslant \mathbf{c}$ и $\mathbf{c}_0 \leqslant \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0$, $\mathbf{c}_1 \leqslant \mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1$. Таким образом, $\mathbf{c} \sqcap (\mathbf{a}_0 \sqcup \mathbf{a}_1) = \mathbf{c}_0 \sqcup \mathbf{c}_1 \leqslant (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_0) \sqcup (\mathbf{c} \sqcap \mathbf{a}_1)$. $\square$

Идеалы полурешёток

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Идеалы полурешёток

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение C4.14.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки $\mathfrak{L}$ (и обозначается как $\mathcal{I} \lhd \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \sqcup \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I}$;
2. $\mathbf{b} \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a} \in L$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathcal{I}$.

Идеалы полурешёток

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение С4.14.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки $\mathfrak{L}$ (и обозначается как $\mathcal{I} \lhd \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \sqcup \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I}$;
2. $\mathbf{b} \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a} \in L$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathcal{I}$.

Определение С4.15.

Идеал $\mathcal{I} \lhd \mathfrak{L}$ полурешётки $\mathfrak{L}$ называется **главным**, если он имеет наибольший элемент. В противном случае он называется **неглавным**.

Идеалы полурешёток

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение C4.14.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки $\mathfrak{L}$ (и обозначается как $\mathcal{I} \lhd \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \sqcup \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I}$;
2. $\mathbf{b} \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a} \in L$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathcal{I}$.

Определение C4.15.

Идеал $\mathcal{I} \lhd \mathfrak{L}$ полурешётки $\mathfrak{L}$ называется **главным**, если он имеет наибольший элемент. В противном случае он называется **неглавным**.

Примеры C4.3.

1. Пусть $\mathbf{a} \in L$, тогда $\mathbf{a} \downarrow \mathfrak{L} \leftrightharpoons \{\mathbf{c} \in L | \mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}\}$ — главный идеал.

Идеалы полурешёток

Пусть $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup \rangle$ — верхняя полурешётка.

Определение C4.14.

Непустое множество $\mathcal{I} \subseteq L$ называется **идеалом** полурешётки $\mathfrak{L}$ (и обозначается как $\mathcal{I} \lhd \mathfrak{L}$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \sqcup \mathbf{a}_2 \in \mathcal{I}$;
2. $\mathbf{b} \in \mathcal{I}$, $\mathbf{a} \in L$, $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathcal{I}$.

Определение C4.15.

Идеал $\mathcal{I} \lhd \mathfrak{L}$ полурешётки $\mathfrak{L}$ называется **главным**, если он имеет наибольший элемент. В противном случае он называется **неглавным**.

Примеры C4.3.

1. Пусть $\mathbf{a} \in L$, тогда $\mathbf{a} \downarrow \mathfrak{L} \leftrightharpoons \{\mathbf{c} \in L | \mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}\}$ — главный идеал.
2. Пусть не более, чем счётное множество S таково, что $|S| > 1$; тогда $L(S) \lhd \mathbf{L}(S)$ — неглавный идеал.

$\mathfrak{c}$-универсальность

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

Определение С4.16.

Дистрибутивную полурешётку $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ с нулём (наименьшим элементом) будем называть **допустимой**, если любой главный её идеал не более, чем счётен.

$\mathfrak{c}$-универсальность

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

Определение C4.16.

Дистрибутивную полурешётку $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ с нулём (наименьшим элементом) будем называть **допустимой**, если любой главный её идеал не более, чем счётен. Допустимую полурешётку $\mathfrak{L}$ назовём **$\mathfrak{c}$-универсальной**, если она удовлетворяет следующему условию:
если $\mathfrak{L}'$ — допустимая полурешётка мощности $< \mathfrak{c}$, φ — изоморфизм собственного идеала $S' \lhd \mathfrak{L}'$ на идеал $\mathfrak{L}$, то существует изоморфизм φ' полурешётки $\mathfrak{L}'$ на идеал $\mathfrak{L}$, продолжающий φ, т.е. $\varphi' \restriction S' = \varphi$.

$\mathfrak{c}$-универсальность

Под полурешёткой будем понимать верхнюю полурешётку.

Определение C4.16.

Дистрибутивную полурешётку $\mathfrak{L} = \langle L, \leqslant, \sqcup, \mathbf{0} \rangle$ с нулём (наименьшим элементом) будем называть **допустимой**, если любой главный её идеал не более, чем счётен. Допустимую полурешётку $\mathfrak{L}$ назовём **$\mathfrak{c}$-универсальной**, если она удовлетворяет следующему условию:
если $\mathfrak{L}'$ — допустимая полурешётка мощности $< \mathfrak{c}$, φ — изоморфизм собственного идеала $S' \lhd \mathfrak{L}'$ на идеал $\mathfrak{L}$, то существует изоморфизм φ' полурешётки $\mathfrak{L}'$ на идеал $\mathfrak{L}$, продолжающий φ, т.е. $\varphi' \upharpoonright S' = \varphi$.

Следствие C4.8.

Любые две $\mathfrak{c}$-универсальные полурешётки изоморфны.

$\mathfrak{c}$-универсальность

Теорема C4.1.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $\mathbf{L}(S)$ является $\mathfrak{c}$-универсальной полурешёткой.

$\mathfrak{c}$-универсальность

Теорема C4.1.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $\mathbf{L}(S)$ является $\mathfrak{c}$-универсальной полурешёткой.

Следствие C4.9.

Если конечные множества S_1, S_2 содержат по меньшей мере два элемента, то $\mathbf{L}(S_1) \simeq \mathbf{L}(S_2)$.

$\mathfrak{c}$-универсальность

Теорема C4.1.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $\mathbf{L}(S)$ является $\mathfrak{c}$-универсальной полурешёткой.

Следствие C4.9.

Если конечные множества S_1, S_2 содержат по меньшей мере два элемента, то $\mathbf{L}(S_1) \simeq \mathbf{L}(S_2)$.

Следствие C4.10.

Пусть множество S таково, что $1 < |S| < \omega$. Тогда $\mathbf{L}(S)$ — дистрибутивная верхняя полурешётка, не являющаяся решёткой.

Спасибо за внимание.