Распределение суммы двух случайных величин

Пусть $X \sim F_X(x)$, $Y \sim F_Y(y)$. Требуется найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Распределение суммы двух случайных величин

Пусть $X \sim F_X(x)$, $Y \sim F_Y(y)$. Требуется найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Если X и Y зависимы, то для разных форм зависимости можно получить разное распределение суммы (при заданных $F_X(x)$, $F_Y(y)$).

Распределение суммы двух случайных величин

Пусть $X \sim F_X(x),\ Y \sim F_Y(y)$. Требуется найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Если X и Y зависимы, то для разных форм зависимости можно получить разное распределение суммы (при заданных $F_X(x),\ F_Y(y)$).

Например,

$$X = Y \sim N(0,1),\ \Rightarrow\ Z = 2X \Rightarrow Z \sim N(0,2);$$

Распределение суммы двух случайных величин

Пусть $X \sim F_X(x)$, $Y \sim F_Y(y)$. Требуется найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Если X и Y зависимы, то для разных форм зависимости можно получить разное распределение суммы (при заданных $F_X(x)$, $F_Y(y)$).

Например,

$X = Y \sim N(0,1), \;\; \Rightarrow \; Z = 2X \Rightarrow Z \sim N(0,2)$;

но если $Y = -X \;\; \Rightarrow \;\; X, Y \sim N(0,1)$; при этом $Z \equiv 0$.

Пусть X и Y независимые дискретные величины,
$P(X=i)=p_i$, $P(Y=i)=q_i$, $i=0,1,\dots k.$

Пусть X и Y независимые дискретные величины,

$P\left(X=i\right)=p_i,\ P\left(Y=i\right)=q_i,\ i=0,1,\ldots k.$

Тогда $P(Z=k)=P(\left\{X=0,Y=k\right\}\bigcup\left\{X=1,Y=k-1\right\}\ldots$

$$\ldots\bigcup\left\{X=k,Y=0\right\})=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i,Y=k-i\right)=$$

Пусть X и Y независимые дискретные величины,

$P\left(X=i\right)=p_i,\ P\left(Y=i\right)=q_i,\ i=0,1,\ldots k.$

Тогда $P(Z=k)=P(\{X=0,Y=k\}\cup\{X=1,Y=k-1\}\ldots$

$$\ldots\cup\{X=k,Y=0\})=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i,Y=k-i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)\cdot P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}p_i q_{k-i}$$

Пусть X и Y независимые дискретные величины, $P\left(X=i\right)=p_i,\ P\left(Y=i\right)=q_i,\ i=0,1,\ldots k.$

Тогда $P(Z=k)=P(\left\{X=0,Y=k\right\}\cup\left\{X=1,Y=k-1\right\}\ldots$

$$\ldots\cup\left\{X=k,Y=0\right\})=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i,Y=k-i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)\cdot P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}p_i q_{k-i}$$

- свертка последовательностей p_i и q_i.

Пусть X и Y - независимые непрерывные случайные величины.

Пусть X и Y - независимые непрерывные случайные величины.

Теорема. Пусть $f_X(x)$, $f_Y(y)$ - плотности X и Y. Тогда плотность суммы $f_Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)dx$ (свертка плотностей).

Пусть X и Y - независимые непрерывные случайные величины.

Теорема. Пусть $f_X(x)$, $f_Y(y)$ - плотности X и Y. Тогда плотность суммы $f_Z(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)dx$ (свертка плотностей).

Доказательство.

$$F_Z(z)=F_{X+Y}(z)=P(X+Y<z)=P\big((X,Y)\in\{(x,y):x+y<z\}\big)=$$

Пусть X и Y - независимые непрерывные случайные величины.

Теорема. Пусть $f_X(x),\ f_Y(y)$ - плотности X и Y. Тогда плотность суммы $f_Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)dx$ (свертка плотностей).

Доказательство.

$$F_Z(z) = F_{X+Y}(z) = P(X+Y<z) = P\big((X,Y) \in \{(x,y) : x+y<z\}\big) =$$

$$= \iint\limits_{x+y<z} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\,dx = \ |\, y = t-x \,|$$

Пусть X и Y - независимые непрерывные случайные величины.

Теорема. Пусть $f_X(x)$, $f_Y(y)$ - плотности X и Y. Тогда плотность суммы $f_Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)dx$ (свертка плотностей).

Доказательство.

$$F_Z(z) = F_{X+Y}(z) = P(X+Y<z) = P\big((X,Y)\in\{(x,y): x+y<z\}\big) =$$

$$= \iint\limits_{x+y<z} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\,dx = \ |\, y=t-x \,|$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\int\limits_{-\infty}^{z} f_Y(t-x)dt\,dx = \int\limits_{-\infty}^{z} \underbrace{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(t-x)\,dx\right\}}_{f_Z(t)} dt \cdot$$

Пусть X и Y - независимые непрерывные случайные величины.

Теорема. Пусть $f_X(x),\ f_Y(y)$ - плотности X и Y. Тогда плотность суммы $f_Z(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(t-x)dx$ (свертка плотностей).

Доказательство.

$$F_Z(z)=F_{X+Y}(z)=P(X+Y<z)=P\big((X,Y)\in\{(x,y):x+y<z\}\big)=$$

$$=\iint\limits_{x+y<z} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\,dx=\ |\,y=t-x\,|$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\int\limits_{-\infty}^{z} f_Y(t-x)dt\,dx=\int\limits_{-\infty}^{z}\underbrace{\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(t-x)\,dx\right\}}_{f_Z(t)}dt\,.$$

Аналогично можно показать, что

$$f_Z(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,f_X(t-y)dy\,.$$

Пример. Независимые случайные величины $X, Y \geq 0$ заданы плотностями распределений

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}, \quad p(y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{y}{4}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Пример. Независимые случайные величины $X, Y \geq 0$ заданы плотностями распределений

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}, \quad p(y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{y}{4}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. $g(z) = \int_0^\infty f(x) p(z-x)\,dx$.

Пример. Независимые случайные величины $X, Y \geq 0$ заданы плотностями распределений

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}, \quad p(y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{y}{4}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. $g(z) = \int\limits_0^{\infty} f(x) p(z-x) dx$.

Так как $X = Z - Y \leq Z$, то

$$g(z) = \int\limits_0^z \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{z-x}{4}} dx = \frac{1}{12} e^{-\frac{z}{4}} \int\limits_0^z e^{-\frac{x}{12}} dx =$$

Пример. Независимые случайные величины $X, Y \ge 0$ заданы плотностями распределений

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}, \quad p(y) = \frac{1}{4} e^{-\frac{y}{4}}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. $g(z) = \int_0^\infty f(x) p(z - x) dx.$

Так как $X = Z - Y \le Z$, то

$$g(z) = \int_0^z \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{z-x}{4}} dx = \frac{1}{12} e^{-\frac{z}{4}} \int_0^z e^{-\frac{x}{12}} dx =$$

$$= e^{-\frac{z}{4}} \left(1 - e^{-\frac{z}{12}} \right), \quad z \ge 0.$$

Глава 6. Условное распределение случайных величин

Рассмотрим дискретную случайную величину $\left(X, Y\right)$, где $X \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y \in \{y_1, y_2, ..., y_m\}$.

Глава 6. Условное распределение случайных величин

Рассмотрим дискретную случайную величину (X, Y), где $X \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y \in \{y_1, y_2, ..., y_m\}$.

Обозначим

$$\boxed{p\left(x_i \middle| y_j\right) = P(X = x_i \mid Y = y_j)}$$

- условную вероятность события $X = x_i$ при условии, что произошло событие $Y = y_j$ $(i = 1,...,n, \quad j = 1,..,m)$.

Глава 6. Условное распределение случайных величин

Рассмотрим дискретную случайную величину (X, Y), где $X \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}, Y \in \{y_1, y_2, ..., y_m\}$.
Обозначим

$$\boxed{p\left(x_i \middle| y_j\right) = P(X = x_i \mid Y = y_j)}$$

- условную вероятность события $X = x_i$ при условии, что произошло событие $Y = y_j$ $(i = 1,...,n, \quad j = 1,..,m)$.

Условным распределением случайной величины X при условии $Y = y_j$ называют совокупность вероятностей $p\left(x_i \middle| y_j\right),\ i = 1,...,n,$ вычисленных в предположении, что наступило событие $Y = y_j$ (где $P(Y = y_j) \neq 0$).

Аналогично определяется условное распределение Y:

$$\boxed{p\left(y_j \middle| x_i\right) = P(Y = y_j \mid X = x_i)}.$$

Аналогично определяется условное распределение Y:

$$\boxed{p\left(y_j \middle| x_i\right) = P(Y = y_j \mid X = x_i)}.$$

Пусть известен закон распределения двумерной случайной величины $\left(X, Y\right)$ (т.е. вероятности $p\left(x_i y_j\right) = P(X = x_i, Y = y_j)$).

Аналогично определяется условное распределение Y:

$$\boxed{p\left(y_j \middle| x_i\right) = P(Y = y_j \mid X = x_i)}.$$

Пусть известен закон распределения двумерной случайной величины $\left(X, Y\right)$ (т.е. вероятности $p\left(x_i y_j\right) = P(X = x_i, Y = y_j)$).

Тогда можно вычислить условные законы распределения

$$p\left(x_i \middle| y_j\right) = \frac{p\left(x_i y_j\right)}{p\left(y_j\right)},\ p\left(y_j \middle| x_i\right) = \frac{p\left(x_i y_j\right)}{p\left(x_i\right)},\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,..,m.$$

Аналогично определяется условное распределение Y:

$$\boxed{p\left(y_j \middle| x_i\right) = P(Y = y_j \mid X = x_i)}.$$

Пусть известен закон распределения двумерной случайной величины $\left(X, Y\right)$ (т.е. вероятности $p\left(x_i y_j\right) = P(X = x_i, Y = y_j)$).

Тогда можно вычислить условные законы распределения

$$p\left(x_i \middle| y_j\right) = \frac{p\left(x_i y_j\right)}{p\left(y_j\right)},\ \ p\left(y_j \middle| x_i\right) = \frac{p\left(x_i y_j\right)}{p\left(x_i\right)},\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,..,m.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(x_i \middle| y_j\right) = 1 \quad \forall j = 1,\ldots,m;\ \sum_{j=1}^{m} p\left(y_j \middle| x_i\right) = 1 \quad \forall i = 1,\ldots n.$$

Пример. Распределение дискретной двумерной случайной величины задано таблицей

	x_1	x_2	x_3
y_1	0.1	0.3	0.2
y_2	0.06	0.18	0.16

Найти условный закон распределения X, если $Y = y_1$.

Пример. Распределение дискретной двумерной случайной величины задано таблицей

	x_1	x_2	x_3
y_1	0.1	0.3	0.2
y_2	0.06	0.18	0.16

Найти условный закон распределения X, если $Y = y_1$.

Решение.

$$p\left(x_1 \middle| y_1\right) = \frac{p\left(x_1, y_1\right)}{p\left(y_1\right)} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}, \quad p\left(x_2 \middle| y_1\right) = \frac{p\left(x_2, y_1\right)}{p\left(y_1\right)} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2},$$

$$p\left(x_3 \middle| y_1\right) = \frac{p\left(x_3, y_1\right)}{p\left(y_1\right)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

Пример. Распределение дискретной двумерной случайной величины задано таблицей

	x_1	x_2	x_3
y_1	0.1	0.3	0.2
y_2	0.06	0.18	0.16

Найти условный закон распределения X, если $Y = y_1$.

Решение.

$$p\left(x_1 \middle| y_1\right) = \frac{p\left(x_1, y_1\right)}{p\left(y_1\right)} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}, \quad p\left(x_2 \middle| y_1\right) = \frac{p\left(x_2, y_1\right)}{p\left(y_1\right)} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2},$$

$$p\left(x_3 \middle| y_1\right) = \frac{p\left(x_3, y_1\right)}{p\left(y_1\right)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$

Контроль: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1.$

Пусть (X,Y) - непрерывная двумерная случайная величина.

Условной плотностью $f(x|y)$ распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y с плотностью $f_Y(y) \neq 0$ приняла значение y, называется функция

$$\boxed{f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}.$$

Пусть (X, Y) - непрерывная двумерная случайная величина.

Условной плотностью $f(x|y)$ распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y с плотностью $f_Y(y) \neq 0$ приняла значение y, называется функция

$$\boxed{f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}.$$

Условная плотность Y при условии $X = x$:

$$\boxed{f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}}.$$

Условные плотности распределений обладают всеми свойствами плотности распределения случайных величин.

Условные плотности распределений обладают всеми свойствами плотности распределения случайных величин.

1. $f(x \mid y) \geq 0$;

Условные плотности распределений обладают всеми свойствами плотности распределения случайных величин.

1. $f(x \mid y) \geq 0$;

2. $F_X(x \mid y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t \mid y)dt$;

Условные плотности распределений обладают всеми свойствами плотности распределения случайных величин.

1. $f(x \mid y) \geq 0$;

2. $F_X(x \mid y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t \mid y)dt$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t \mid y)dt = 1$;

Условные плотности распределений обладают всеми свойствами плотности распределения случайных величин.

1. $f(x \mid y) \geq 0$;

2. $F_X(x \mid y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t \mid y)dt$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t \mid y)dt = 1$;

4. Если X, Y независимы, то $f(x \mid y) = f_X(x)$

Условные плотности распределений обладают всеми свойствами плотности распределения случайных величин.

1. $f(x \mid y) \geq 0$;

2. $F_X(x \mid y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t \mid y) dt$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t \mid y) dt = 1$;

4. Если X, Y независимы, то $f(x \mid y) = f_X(x)$

Аналогичные свойства имеет $f(y \mid x)$.

Пример. Двумерная случайная величина задана совместной плотностью распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2\\ 0 & x^2+y^2\ge r^2\end{cases}.$$

Найти условное распределение случайной величины X.

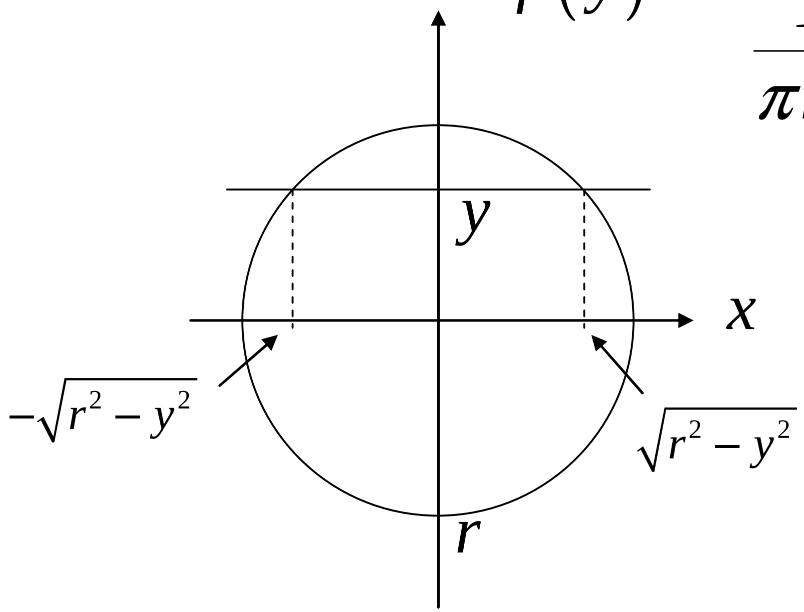
Пример. Двумерная случайная величина задана совместной плотностью распределения:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2\\ 0 & x^2+y^2\ge r^2\end{cases}.$$

Найти условное распределение случайной величины X .

Решение.

$$f\left(x\middle|y\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f\left(y\right)}=\frac{1/\pi r^2}{\dfrac{1}{\pi r^2}\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}dx}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}.$$



Условное математическое ожидание

Определение. Условным математическим ожиданием $E(Y|X=x)=E(Y|x)$ дискретной случайной величины Y при условии, что X приняла значение x, называется величина

$$E(Y|X=x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{m} y_j\, p(y_j|x).$$

Условное математическое ожидание

Определение. Условным математическим ожиданием $E(Y|X=x)=E(Y|x)$ дискретной случайной величины Y при условии, что X приняла значение x, называется величина

$$E(Y|X=x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j|x).$$

Для непрерывных случайных величин

$$E(Y|X=x)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(y|x)dy.$$

Условное математическое ожидание

Определение. Условным математическим ожиданием $E(Y|X=x)=E(Y|x)$ дискретной случайной величины Y при условии, что X приняла значение x, называется величина

$$E(Y|X=x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j|x).$$

Для непрерывных случайных величин

$$E(Y|X=x)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(y|x)dy.$$

Определение. Величина $E(Y|x)$ как функция от x называется регрессией Y по x (или x на Y).

$$\boxed{y=f_r(x)}$$