5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D\left(X+Y\right)=E\left(X+Y-E\left(X+Y\right)\right)^2=E\left(X-EX+Y-EY\right)^2=$$

$$=\underbrace{E\left(X-EX\right)^2}_{DX}+\underbrace{E\left(Y-EY\right)^2}_{DY}+2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right).$$

Так как X и Y независимы, то

$$E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)=$$

$$=\underbrace{E\left(X\cdot Y\right)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E\left(X\cdot EY\right)}_{EX\cdot EY}-\underbrace{E\left(Y\cdot EX\right)}_{EX\cdot EY}+EX\cdot EY=0.$$

$$\Downarrow$$

$$D\left(X+Y\right)=DX+DY.$$

Замечания. а) Дисперсия разности независимых X, Y равна $D\left(X-Y\right)=DX+DY$.

б) Свойство справедливо и для суммы $n\geq 2$ попарно независимых случайных величин.

6. Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y равна:

$$D(X \cdot Y) = EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2 \cdot (EY)^2.$$

6. Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y равна:

$$D(X\cdot Y)=EX^2\cdot EY^2-(EX)^2\cdot(EY)^2.$$

Доказательство. По определению дисперсии и в силу независимости, получим:

$$D(X\cdot Y)=E(X^2Y^2)-[E(X\cdot Y)]^2=$$

6. Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y равна:

$$D(X \cdot Y) = EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2 \cdot (EY)^2.$$

Доказательство. По определению дисперсии и в силу независимости, получим:

$$D(X \cdot Y) = E(X^2 Y^2) - [E(X \cdot Y)]^2 =$$

$$= EX^2 \cdot EY^2 - [EX \cdot EY]^2 =$$

6. Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y равна:

$$D(X \cdot Y) = EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2 \cdot (EY)^2.$$

Доказательство. По определению дисперсии и в силу независимости, получим:

$$D(X \cdot Y) = E(X^2 Y^2) - [E(X \cdot Y)]^2 =$$

$$= EX^2 \cdot EY^2 - [EX \cdot EY]^2 =$$

$$= EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2 \cdot (EY)^2.$$

6. Дисперсия произведения независимых случайных величин X и Y равна:

$$D(X \cdot Y) = EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2 \cdot (EY)^2.$$

Доказательство. По определению дисперсии и в силу независимости, получим:

$$D(X \cdot Y) = E(X^2 Y^2) - [E(X \cdot Y)]^2 =$$

$$= EX^2 \cdot EY^2 - [EX \cdot EY]^2 =$$

$$= EX^2 \cdot EY^2 - (EX)^2 \cdot (EY)^2.$$

Следствие. Если X и Y - независимые с.в. и $EX = EY = 0$, то $D(X \cdot Y) = DX \cdot DY$

Найдем дисперсию для некоторых законов распределения случайных величин:

1. Дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $\left[a,b\right]$, равна:

$$DX = \frac{\left(b-a\right)^2}{12}.$$

Найдем дисперсию для некоторых законов распределения случайных величин:

1. Дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, равна:

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Доказательство. По определению дисперсии,

$$DX = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - (EX)^2 = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

Найдем дисперсию для некоторых законов распределения случайных величин:

1. Дисперсия случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, равна:

$$DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Доказательство. По определению дисперсии,

$$DX=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-(EX)^2=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\bigg|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Дисперсия случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(a,\sigma)$, равна:

$$DX = \sigma^2.$$

2. Дисперсия случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(a,\sigma)$, равна:

$$DX=\sigma^2.$$

Доказательство. Обозначим $Y=\dfrac{X-a}{\sigma}$, тогда

$$X=a+\sigma Y \;\;\Rightarrow\;\; DX=\sigma^2 DY.$$

2. Дисперсия случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(a,\sigma)$, равна:

$$DX=\sigma^2.$$

Доказательство. Обозначим $Y=\dfrac{X-a}{\sigma}$, тогда

$X=a+\sigma Y \;\Rightarrow\; DX=\sigma^2 DY$.

$$EY^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\left(-e^{-t^2/2}\right)=$$

2. Дисперсия случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(a,\sigma)$, равна:

$$DX = \sigma^2.$$

Доказательство. Обозначим $Y = \dfrac{X-a}{\sigma}$, тогда

$$X = a + \sigma Y \;\Rightarrow\; DX = \sigma^2 DY.$$

$$EY^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\left(-e^{-t^2/2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underbrace{-t\,e^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,d\,t\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,d\,t = 1.$$

2. Дисперсия случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(a,\sigma)$, равна:

$$DX=\sigma^2.$$

Доказательство. Обозначим $Y=\dfrac{X-a}{\sigma}$, тогда

$X=a+\sigma Y \;\Rightarrow\; DX=\sigma^2 DY$.

$$EY^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\,d\left(-e^{-t^2/2}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\underbrace{-t\,e^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}d\,t\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,d\,t=1.$$

Значит $DY=EY^2-\left(EY\right)^2=1-0=1\Rightarrow \boxed{DX=\sigma^2}$.

3. Дисперсия случайной величины X, подчиняющейся биномиальному закону распределения $Bin(n, p)$ равна:

$$DX = np(1 - p).$$

3. Дисперсия случайной величины X, подчиняющейся биномиальному закону распределения $Bin(n, p)$ равна:

$$DX = np(1-p).$$

Доказательство. Пусть $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$,
где $X_i \in \{0,1\}$, $X_i \sim Bin(1, p)$ (распределение Бернулли)
и все X_i - независимые.

3. Дисперсия случайной величины X, подчиняющейся биномиальному закону распределения $Bin(n, p)$ равна:

$$DX = np(1-p).$$

Доказательство. Пусть $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$,
где $X_i \in \{0,1\}$, $X_i \sim Bin(1, p)$ (распределение Бернулли)
и все X_i - независимые.

Тогда

$$EX_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p,$$

$$DX_i = EX_i^2 - \left(EX_i\right)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

3. Дисперсия случайной величины X, подчиняющейся биномиальному закону распределения $Bin(n, p)$ равна:

$$DX = np(1-p).$$

Доказательство. Пусть $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$,
где $X_i \in \{0,1\}$, $X_i \sim Bin(1, p)$ (распределение Бернулли)
и все X_i - независимые.

Тогда

$$EX_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p,$$

$$DX_i = EX_i^2 - \left(EX_i\right)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

По свойству дисперсии,

$$DX = D\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right) = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n.$$

Значит $DX = np(1-p)$.

4. Дисперсия случайной величины X, имеющей закон распределения Пуассона $P(\lambda)$, равна:

$$DX = \lambda.$$

4. Дисперсия случайной величины X, имеющей закон распределения Пуассона $P(\lambda)$, равна:

$$DX = \lambda.$$

Доказательство.

$$EX^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)+n) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

4. Дисперсия случайной величины X, имеющей закон распределения Пуассона $P(\lambda)$, равна:

$$DX = \lambda.$$

Доказательство.

$$EX^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)+n) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda}}_{=1} + \lambda \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}}_{=1} = \lambda^2 + \lambda.$$

4. Дисперсия случайной величины X, имеющей закон распределения Пуассона $P(\lambda)$, равна:

$$DX = \lambda.$$

Доказательство.

$$EX^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)+n) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda}}_{=1} + \lambda \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}}_{=1} = \lambda^2 + \lambda.$$

Значит $DX = EX^2 - \left(EX\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Вероятностные неравенства, связанные с математическим ожиданием и дисперсией

Неравенство Маркова

Пусть $Z \geq 0$ - неотрицательная случайная величина, у которой существует математическое ожидание, и $\tau > 0$. Тогда выполняется неравенство

$$P\left(Z \geq \tau\right) \leq \frac{EZ}{\tau}.$$

Вероятностные неравенства, связанные с математическим ожиданием и дисперсией

Неравенство Маркова

Пусть $Z \geq 0$ - неотрицательная случайная величина, у которой существует математическое ожидание, и $\tau > 0$. Тогда выполняется неравенство

$$P(Z \geq \tau) \leq \frac{EZ}{\tau}.$$

Доказательство.

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f(z)dz = \int_{0}^{\tau} z\, f(z)dz + \int_{\tau}^{\infty} z\, f(z)dz \geq$$

Вероятностные неравенства, связанные с математическим ожиданием и дисперсией

Неравенство Маркова

Пусть $Z \geq 0$ - неотрицательная случайная величина, у которой существует математическое ожидание, и $\tau > 0$. Тогда выполняется неравенство

$$P(Z \geq \tau) \leq \frac{EZ}{\tau}.$$

Доказательство.

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f(z)dz = \int_{0}^{\tau} z\, f(z)dz + \int_{\tau}^{\infty} z\, f(z)dz \geq$$

$$\geq \int_{\tau}^{\infty} z\, f(z)dz \geq \tau \int_{\tau}^{\infty} f(z)dz = \tau P(Z \geq \tau) \Rightarrow P(Z \geq \tau) \leq \frac{E(Z)}{\tau}.$$

Оценка грубая, так как используется информация только об одной характеристике – математическом ожидании.

Оценка грубая, так как используется информация только об одной характеристике – математическом ожидании.

Пример. В среднем в семье двое детей. Оценить сверху вероятность того, что в семье более четырех детей:

$$P(X \geq 5) \leq \frac{2}{5}$$

Неравенство Чебышева

Рассмотрим произвольную случайную величину X, имеющую конечное математическое ожидание EX и дисперсию DX. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\left(\left|X - EX\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева

Рассмотрим произвольную случайную величину X, имеющую конечное математическое ожидание EX и дисперсию DX. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\left(\left|X - EX\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Обозначим $\tau = \varepsilon^2$, $Z = \left(X - EX\right)^2$, тогда из неравенства Маркова получим:

$$P\left(\left(X - EX\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(X - EX\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева

Рассмотрим произвольную случайную величину X, имеющую конечное математическое ожидание EX и дисперсию DX. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\left(\left|X - EX\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Обозначим $\tau = \varepsilon^2$, $Z = \left(X - EX\right)^2$, тогда из неравенства Маркова получим:

$$P\left(\left(X - EX\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(X - EX\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Событие $\left(X - EX\right)^2 \geq \varepsilon^2$ эквивалентно событию $\left|X - EX\right| \geq \varepsilon$.

Неравенство Чебышева

Рассмотрим произвольную случайную величину X, имеющую конечное математическое ожидание EX и дисперсию DX. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\left(\left|X - EX\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Обозначим $\tau = \varepsilon^2$, $Z = \left(X - EX\right)^2$, тогда из неравенства Маркова получим:

$$P\left(\left(X - EX\right)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E\left(X - EX\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Событие $\left(X - EX\right)^2 \geq \varepsilon^2$ эквивалентно событию $\left|X - EX\right| \geq \varepsilon$. Значит,

$$P\left(\left|X - EX\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Пример. Пусть известно, что средняя температура в марте $-10°C$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma = 5°C$. Тогда вероятность того, что температура отклонится от средней более чем на $15°C$ можно оценить сверху как $\dfrac{5^2}{15^2} = 0.111$.

Пример. Пусть известно, что средняя температура в марте $-10°C$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma = 5°C$. Тогда вероятность того, что температура отклонится от средней более чем на $15°C$ можно оценить сверху как $\dfrac{5^2}{15^2} = 0.111$.

Замечание. Пусть $\varepsilon = k\sigma$, где $\sigma = \sqrt{DX}$, $k > 0$. Тогда

$$P(|X - EX| > k\sigma) < \frac{1}{}$$

Пример. Пусть известно, что средняя температура в марте $-10°C$, а среднеквадратическое отклонение $\sigma = 5°C$. Тогда вероятность того, что температура отклонится от средней более чем на $15°C$ можно оценить сверху как $\dfrac{5^2}{15^2} = 0.111$.

Замечание. Пусть $\varepsilon = k\sigma$, где $\sigma = \sqrt{DX}$, $k > 0$. Тогда

$$P\left(\left|X - EX\right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Например, вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания более чем на четыре среднеквадратических уклонения, не превышает 0.0625.
Для нормальной сл. величины: $P\left(\left|X - a\right| \geq 3\sigma\right) = 0.0027 \leq 1/9.$

Характеристики положения случайных величин

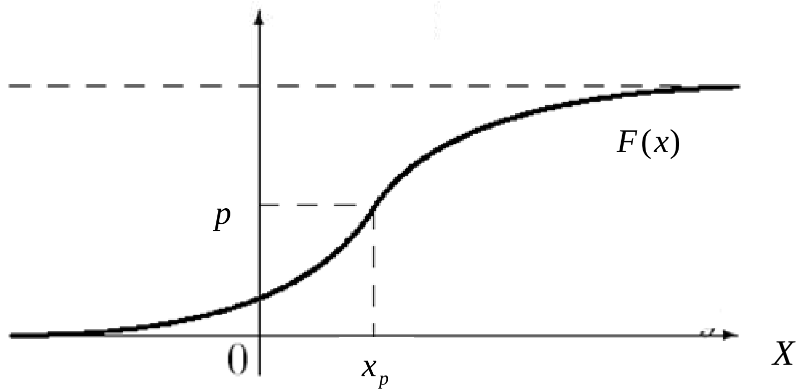
Квантилью уровня p случайной величины X называется число x_p, удовлетворяющее уравнению:

$F\left(x_p\right) = p$, где $F(x)$ - функция распределения, $0 < p < 1$.

Характеристики положения случайных величин

Квантилью уровня p случайной величины X называется число x_p, удовлетворяющее уравнению:

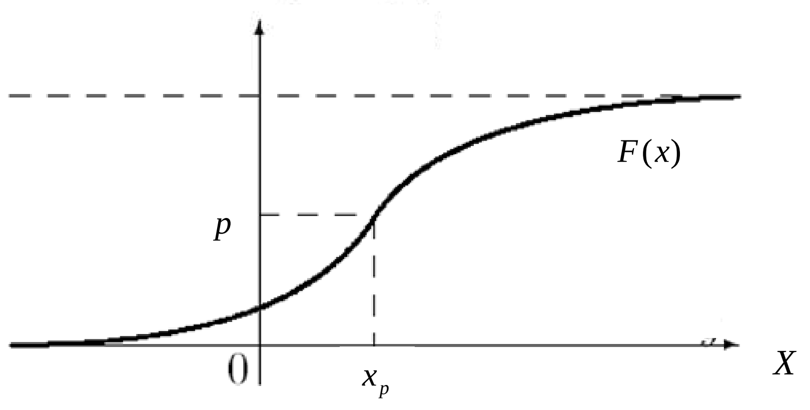
$F\left(x_p\right) = p$, где $F(x)$ - функция распределения, $0 < p < 1$.



Характеристики положения случайных величин

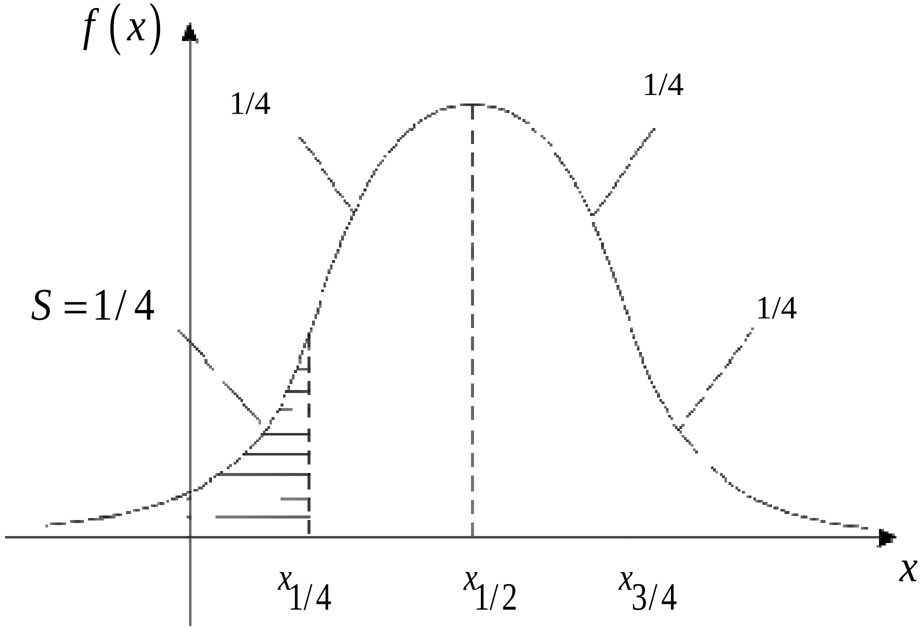
Квантилью уровня p случайной величины X называется число x_p, удовлетворяющее уравнению:

$F\left(x_p\right)=p$, где $F(x)$ - функция распределения, $0<p<1$.



$x_{0.5}$ – это медиана случайной величины: $x_{0.5}=Med\ X$:
(значение переменной, которое делит ранжированную совокупность на две равные части: 50 % «нижних» значений и 50 % — «верхних» значений). Медиана может быть не единственна (в этом случае выбирают произвольное из возможных значений).

Квартили $x_{1/4}, x_{2/4}, x_{3/4}$;



Децили - $x_{1/10}, x_{2/10}, \ldots, x_{9/10}$;

Процентили - $x_{1/100}, x_{2/100}, \ldots, x_{99/100}$.

Квантили широко используется в робастной статистике.

Квантили широко используется в робастной статистике.

Например, рассмотрим ряд измерений роста (равные вероятности):

176; 187; 1655; 175; 178 $\Rightarrow \boxed{EX = 474,2}$.

Квантили широко используется в робастной статистике.

Например, рассмотрим ряд измерений роста (равные вероятности):

176; 187; 1655, 175; 178 $\Rightarrow \boxed{EX = 474,2}$.

Наблюдение 1655 – выброс (ошибка) - сильно влияет на математическое ожидание.

Квантили широко используется в робастной статистике.

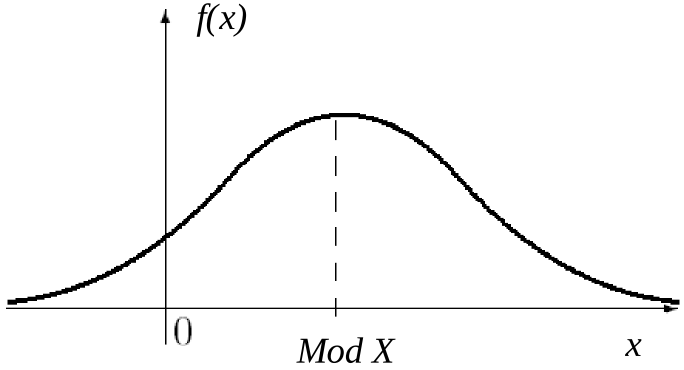
Например, рассмотрим ряд измерений роста (равные вероятности):

176; 187; 1655, 175; 178 $\Rightarrow \boxed{EX = 474{,}2}$.

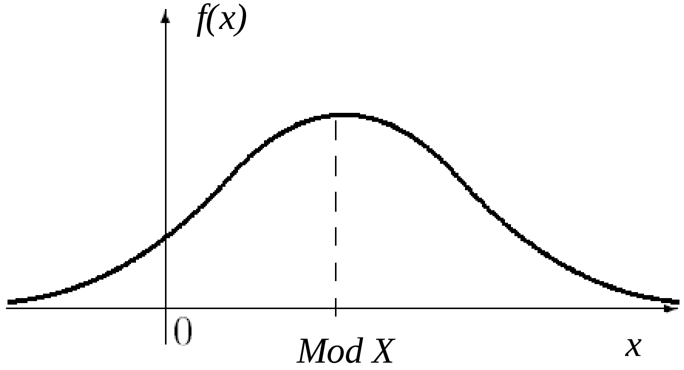
Наблюдение 1655 – выброс (ошибка) - сильно влияет на математическое ожидание.

175; 176; 178; 187; 1655 $\Rightarrow \boxed{Med\ X = 178}$

Модой непрерывной случайной величины X называют точку $Mod\ X$ локального максимума ее плотности распределения $f(x)$.

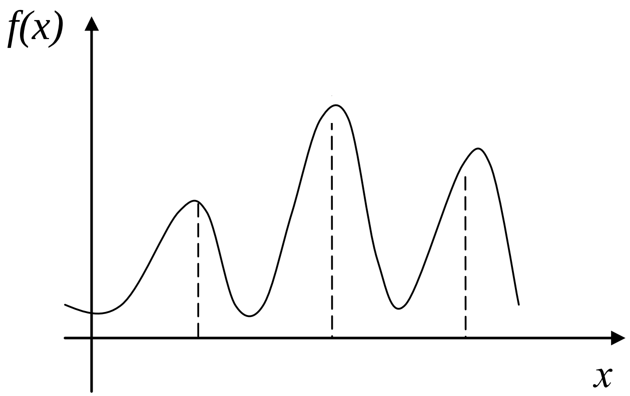


Модой непрерывной случайной величины X называют точку $Mod\ X$ локального максимума ее плотности распределения $f(x)$.

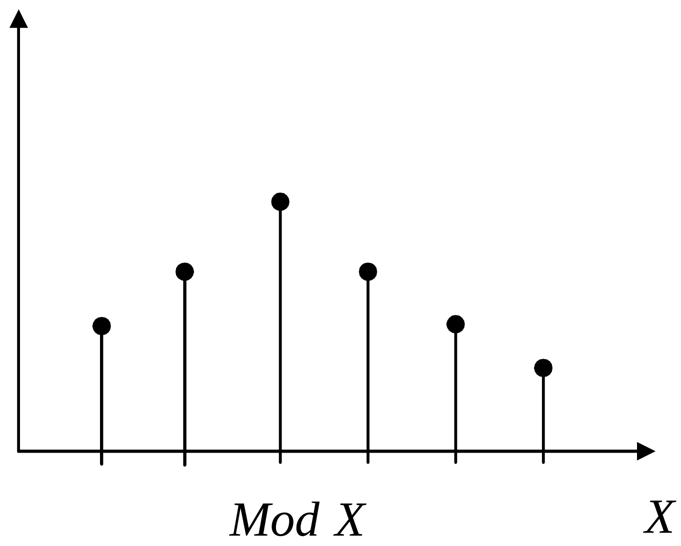


Виды распределений:

- унимодальные (одна мода);
- бимодальные (две моды);
- мультимодальные (полимодальные) (более двух мод).



Модой дискретной упорядоченной случайной величины называют такое её значение x_i, для которого $p_{i-1} < p_i$ и $p_i > p_{i+1}$, при этом все её значения должны быть расположены в порядке возрастания.



Моменты случайных величин

Определение 1. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$m_k = EX^k.$$

Свойство 1. Математическое ожидание EX есть начальный момент первого порядка.

Моменты случайных величин

Определение 1. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$m_k = EX^k.$$

Свойство 1. Математическое ожидание EX есть начальный момент первого порядка.

Определение 2. Абсолютным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$\nu_k = E|X|^k.$$

Моменты случайных величин

Определение 1. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$m_k = EX^k.$$

Свойство 1. Математическое ожидание EX есть начальный момент первого порядка.

Определение 2. Абсолютным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$\nu_k = E|X|^k.$$

Определение 3. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$\mu_k = E(X - EX)^k$$

Моменты случайных величин

Определение 1. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$m_k = EX^k.$$

Свойство 1. Математическое ожидание EX есть начальный момент первого порядка.

Определение 2. Абсолютным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$\nu_k = E|X|^k.$$

Определение 3. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется величина

$$\mu_k = E(X - EX)^k$$

Свойство 2. Дисперсия DX есть центральный момент второго порядка.

Свойство 3. Если $E|X|^k < \infty$, то $E|X|^m < \infty$ при любом $0 < m < k$.

Свойство 3. Если $E|X|^k < \infty$, то $E|X|^m < \infty$ при любом $0 < m < k$.

Доказательство. Так $|X|^m < |X|^k + 1$ при $0 < m < k$, то $E|X|^m < E|X|^k + 1 < \infty$.

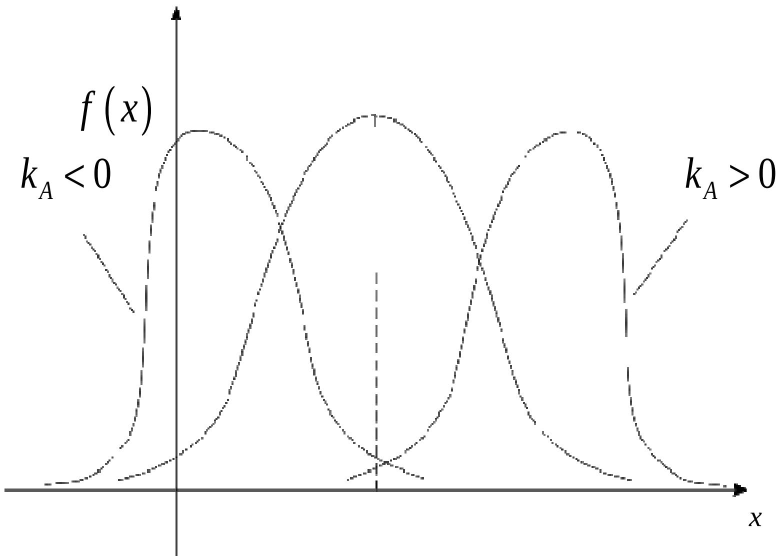
Свойство 3. Если $E|X|^k < \infty$, то $E|X|^m < \infty$ при любом $0 < m < k$.
Доказательство. Так $|X|^m < |X|^k + 1$ при $0 < m < k$, то $E|X|^m < E|X|^k + 1 < \infty$.

Таким образом, например, из существования второго момента EX^2 следует существование математического ожидания EX.

Коэффициент асимметрии

$$k_A = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$$

- применяется для характеристики скошенности или асимметрии распределения

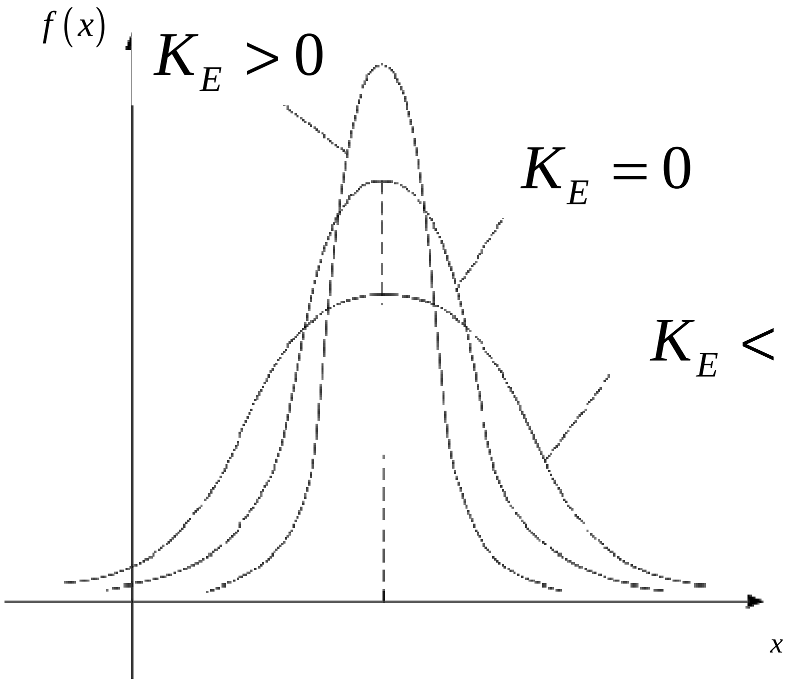


Симметричное (например, нормальное) распределение выступает в качестве меры (эталона): $k_A = 0$.

Коэффициент эксцесса («островершинности»)

$$K_E = \mu_4 / \sigma_X^4 - 3.$$

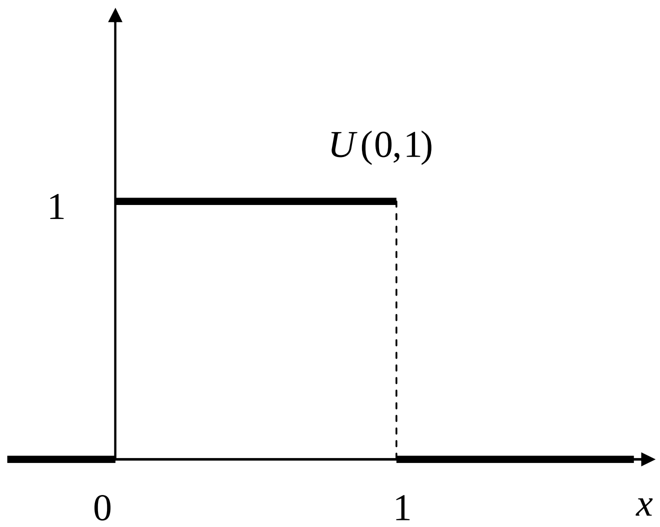
- применяется для характеристики степени крутизны распределения



Для нормального распределения $K_E = 0$.

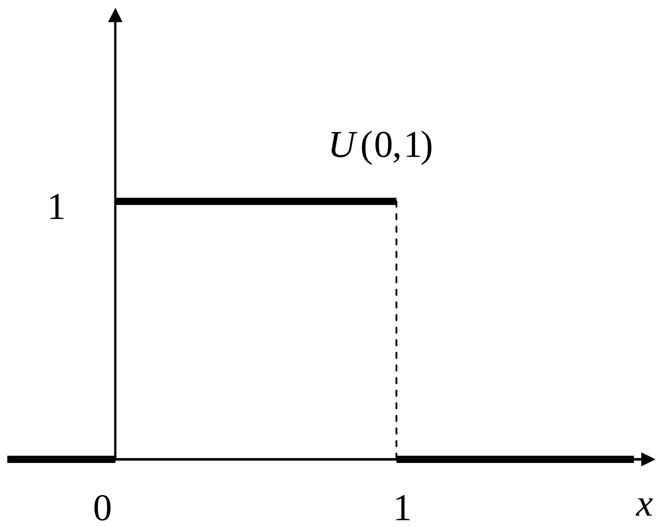
Пример. Пусть $X \sim U(0,1)$.

Найти K_A, K_E.



Пример. Пусть $X \sim U(0,1)$.

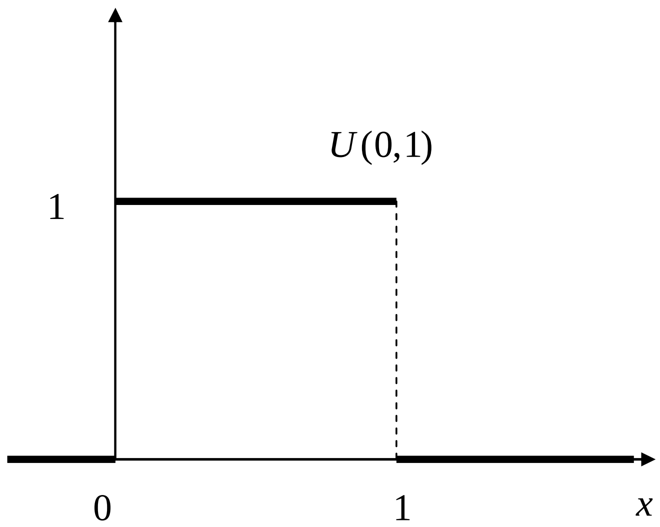
Найти K_A, K_E.



Вспомним, что $EX = 0.5$, $\sigma_X = \sqrt{\dfrac{1}{12}}$.

Пример. Пусть $X \sim U(0,1)$.

Найти K_A, K_E.



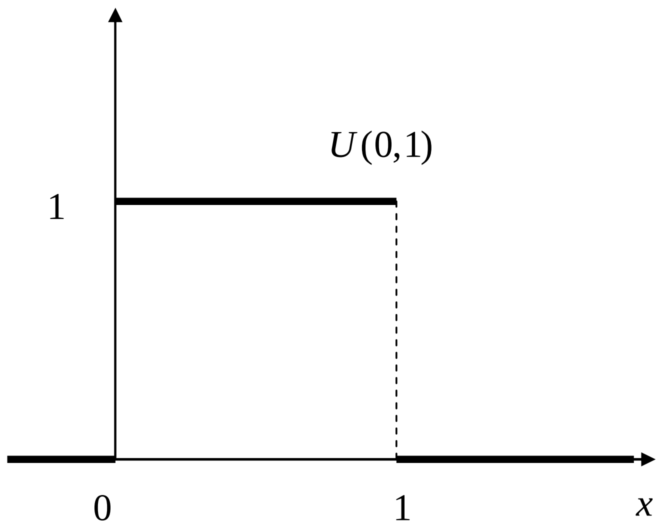
Вспомним, что $EX = 0.5,\ \sigma_X = \sqrt{\dfrac{1}{12}}$.

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3};$$

$$\mu_3 = \int_0^1 \frac{(x-0.5)^3}{1-0}dx = \frac{(x-0.5)^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{(1-0.5)^4-(0-0.5)^4}{4} = 0 \Rightarrow K_A = 0$$

Пример. Пусть $X \sim U(0,1)$.

Найти K_A, K_E.



Вспомним, что $EX = 0.5$, $\sigma_X = \sqrt{\dfrac{1}{12}}$.

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3};$$

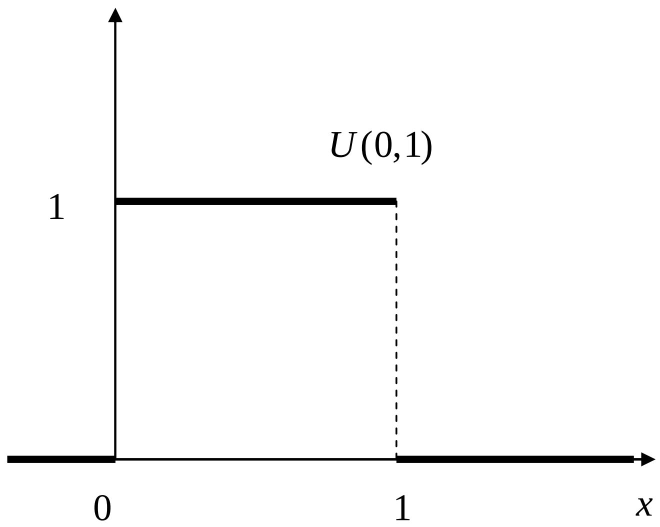
$$\mu_3 = \int_0^1 \frac{(x-0.5)^3}{1-0}dx = \frac{(x-0.5)^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{(1-0.5)^4-(0-0.5)^4}{4} = 0 \Rightarrow K_A = 0$$

$$K_E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3.$$

$$\mu_4 = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (x-0.5)^4 dx = \frac{(x-0.5)^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{(1-0)^5-(0-1)^5}{5\cdot 2^5} = \frac{2}{160} = \frac{1}{80},$$

Пример. Пусть $X \sim U(0,1)$.

Найти K_A, K_E.



Вспомним, что $EX = 0.5$, $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

$$K_A = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3};$$

$$\mu_3 = \int_0^1 \frac{(x-0.5)^3}{1-0} dx = \frac{(x-0.5)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{(1-0.5)^4 - (0-0.5)^4}{4} = 0 \Rightarrow K_A = 0$$

$$K_E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3.$$

$$\mu_4 = \frac{1}{1-0} \int_0^1 (x-0.5)^4 dx = \frac{(x-0.5)^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{(1-0)^5 - (0-1)^5}{5 \cdot 2^5} = \frac{2}{160} = \frac{1}{80},$$

$$\Rightarrow K_E = \frac{1 \cdot 12^2}{80} - 3 = -1.2.$$

Глава 5. Функции от случайных величин

Пусть задана случайная величина $X \in \mathbf{R}$. Рассмотрим неслучайную функцию

$$Y = g(X),$$

где $Y \in \mathbf{R}$.

Глава 5. Функции от случайных величин

Пусть задана случайная величина $X \in \mathbf{R}$. Рассмотрим неслучайную функцию

$$Y = g(X),$$

где $Y \in \mathbf{R}$.

Как найти закон распределения случайной величины Y?

Пусть X – дискретная случайная величина.

Глава 5. Функции от случайных величин

Пусть задана случайная величина $X \in \mathbf{R}$. Рассмотрим неслучайную функцию

$$Y = g(X),$$

где $Y \in \mathbf{R}$.

Как найти закон распределения случайной величины Y?

Пусть X – дискретная случайная величина.

Правило 1. Если соотношение между X и Y взаимно однозначное, то вероятности соответствующих значений X и Y равны между собой.

Пример.

X	2	3
p	0.6	0.4

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Пример.

X	2	3
p	0.6	0.4

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Найдем все возможные значения случайной величины Y: $y_1 = 2^2 = 4, \quad y_2 = 3^2 = 9$.

Распределение случайной величины Y имеет вид:

Y	4	9
p	0.6	0.4

.

Правило 2. Если различным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Правило 2. Если различным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Пример. Распределение X задано таблицей:

X	-2	2	3
p	0.4	0.1	0.5

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Правило 2. Если различным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Пример. Распределение X задано таблицей:

X	-2	2	3
p	0.4	0.1	0.5

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Возможные значения Y: $y_1 = (-2)^2 = 2^2 = 4, \quad y_2 = 3^2 = 9$.

$$P(Y = y_1) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

Правило 2. Если различным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Пример. Распределение X задано таблицей:

X	-2	2	3
p	0.4	0.1	0.5

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Возможные значения Y: $y_1 = (-2)^2 = 2^2 = 4, \quad y_2 = 3^2 = 9$.

$$P(Y = y_1) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

Получим распределение Y:

Y	4	9
p	0.5	0.5