Лекция L7
Домены

Вадим Пузаренко

6 апреля 2020 г.

Мотивация

Здесь развивается алгебраический аппарат, необходимый для описания абстрактного языка программирования PCF.

Упорядоченные множества

Определение.

Пусть D — множество. Каждое рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение $\sqsubseteq$ на D, т. е. бинарное отношение на D, для которого выполняются соотношения для всех x, y, $z \in D$:

1. $x \sqsubseteq x$;
2. $x \sqsubseteq y$, $y \sqsubseteq x \implies x = y$;
3. $x \sqsubseteq y$, $y \sqsubseteq z \implies x \sqsubseteq z$;

называется **порядком** на D. В этом случае $(D, \sqsubseteq)$ называется **упорядоченным множеством**.

Упорядоченные множества

Определение.

Пусть D — множество. Каждое рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение $\sqsubseteq$ на D, т. е. бинарное отношение на D, для которого выполняются соотношения для всех x, y, $z \in D$:

1. $x \sqsubseteq x$;
2. $x \sqsubseteq y$, $y \sqsubseteq x \implies x = y$;
3. $x \sqsubseteq y$, $y \sqsubseteq z \implies x \sqsubseteq z$;

называется **порядком** на D. В этом случае $(D, \sqsubseteq)$ называется **упорядоченным множеством**.

Пример.

Плоские домены. Для любого множества M положим $M_\perp = M \uplus \{\perp\}$, и зададим на нём отношение $\sqsubseteq$ следующим образом ($x, y \in M_\perp$):

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow [(x = y) \vee (x = \perp)].$$

Упорядоченные множества

Пример.

Степени множеств. Для каждого множества M обозначим через $\mathfrak{P}(M)$ множество всех его подмножеств. Тогда отношение $\subseteq$ включения на $\mathfrak{P}(M)$ будет отношением порядка.

Упорядоченные множества

Пример.

Степени множеств. Для каждого множества M обозначим через $\mathfrak{P}(M)$ множество всех его подмножеств. Тогда отношение $\subseteq$ включения на $\mathfrak{P}(M)$ будет отношением порядка.

Нами используется понятие порядка в смысле "частичного порядка", т. е. допускаются несравнимые элементы:

Упорядоченные множества

Пример.

Степени множеств. Для каждого множества M обозначим через $\mathfrak{P}(M)$ множество всех его подмножеств. Тогда отношение $\subseteq$ включения на $\mathfrak{P}(M)$ будет отношением порядка.

Нами используется понятие порядка в смысле “частичного порядка”, т. е. допускаются несравнимые элементы:

Определение.

Два элемента a, b называются **сравнимыми**, если $a \sqsubseteq b$ или $b \sqsubseteq a$. В противном случае элементы a и b называются **несравнимыми**.

Упорядоченные множества

Замечание.

Каждое подмножество A упорядоченного множества D будет упорядоченным множеством относительно индуцированного порядка. В частности, любое семейство подмножеств некоторого множества M будет упорядоченным относительно отношения $\subseteq$.

Упорядоченные множества

Замечание.

Каждое подмножество A упорядоченного множества D будет упорядоченным множеством относительно индуцированного порядка. В частности, любое семейство подмножеств некоторого множества M будет упорядоченным относительно отношения $\subseteq$.

Определение.

Упорядоченное множество $(D, \sqsubseteq)$ называется **линейно упорядоченным** или **цепью**, если любые два его элемента сравнимы.

Упорядоченные множества

Замечание.

Каждое подмножество A упорядоченного множества D будет упорядоченным множеством относительно индуцированного порядка. В частности, любое семейство подмножеств некоторого множества M будет упорядоченным относительно отношения $\subseteq$.

Определение.

Упорядоченное множество $(D, \sqsubseteq)$ называется **линейно упорядоченным** или **цепью**, если любые два его элемента сравнимы.

Примеры.

Множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ относительно естественного порядка линейно упорядочены. Более того, порядок на $\mathbb{N}$ индуцирован порядком на $\mathbb{Z}$, порядок на $\mathbb{Z}$ индуцирован порядком на $\mathbb{Q}$, и т. д.

Упорядоченные множества

Определение.

Множество натуральных чисел относительно естественного порядка обозначается через ω. Любое упорядоченное множество вида $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq a_n \sqsubseteq \ldots$, $n \in \mathbb{N}$, называется ω-**цепью**.

Упорядоченные множества

Определение.

Множество натуральных чисел относительно естественного порядка обозначается через ω. Любое упорядоченное множество вида $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq a_n \sqsubseteq \ldots$, $n \in \mathbb{N}$, называется ω-**цепью**.

Определение.

Подмножество A упорядоченного множества $(D, \sqsubseteq)$ называется **направленным**, если $A \neq \varnothing$ и любые два элемента $a, b \in A$ имеют верхнюю грань в A, а именно, найдётся $c \in A$ такой, что $a \sqsubseteq c$ и $b \sqsubseteq c$.

Упорядоченные множества

Определение.

Множество натуральных чисел относительно естественного порядка обозначается через ω. Любое упорядоченное множество вида $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq a_n \sqsubseteq \ldots$, $n \in \mathbb{N}$, называется **ω-цепью**.

Определение.

Подмножество A упорядоченного множества $(D, \sqsubseteq)$ называется **направленным**, если $A \neq \varnothing$ и любые два элемента $a, b \in A$ имеют верхнюю грань в A, а именно, найдётся $c \in A$ такой, что $a \sqsubseteq c$ и $b \sqsubseteq c$.

Примеры.

- Каждая цепь является направленным множеством.
- Для любого множества M множество $\mathfrak{P}_{fin}(M)$ всех его конечных подмножеств будет направленным относительно отношения $\subseteq$ включения.

Упорядоченные множества

Определение.

Пусть $(A, \sqsubseteq)$ — упорядоченное множество. Тогда $a \in A$ называется

- **наименьшим элементом**, если выполняется соотношение $a \sqsubseteq x$ для всех $x \in A$;
- **минимальным элементом**, если выполняется соотношение $[x \sqsubseteq a \Longrightarrow x = a]$ для всех $x \in A$.

Аналогично вводятся понятия **наибольшего** и **максимального элементов**.

Упорядоченные множества

Определение.

Пусть $(A, \sqsubseteq)$ — упорядоченное множество. Тогда $a \in A$ называется

- **наименьшим элементом**, если выполняется соотношение $a \sqsubseteq x$ для всех $x \in A$;
- **минимальным элементом**, если выполняется соотношение $[x \sqsubseteq a \implies x = a]$ для всех $x \in A$.

Аналогично вводятся понятия **наибольшего** и **максимального элементов**.

Замечание.

- Любой наименьший элемент является единственным минимальным, однако далеко не всегда минимальный элемент будет наименьшим, даже если он единственный.
- Для линейно упорядоченных множеств понятия наименьшего и минимального элементов совпадают.

Упорядоченные множества

Замечание.

- Любое конечное упорядоченное множество имеет минимальные элементы. Более того, если минимальный элемент единственный, то он будет наименьшим.
- В общем случае упорядоченное множество может не иметь ни наименьшего, ни даже минимального элементов.

Упорядоченные множества

Замечание.

- Любое конечное упорядоченное множество имеет минимальные элементы. Более того, если минимальный элемент единственный, то он будет наименьшим.
- В общем случае упорядоченное множество может не иметь ни наименьшего, ни даже минимального элементов.

Определение.

Пусть A — подмножество упорядоченного множества $(D, \sqsubseteq)$ и $c \in D$. Говорят, что c — **верхняя грань** множества A, если $x \sqsubseteq c$ для всех $x \in A$. Дуальным образом определяется понятие **нижней грани** множества A.

Упорядоченные множества

Определение.

Пусть A — подмножество упорядоченного множества $(D, \sqsubseteq)$ и $c \in D$. Говорят, что c — **точная верхняя грань (супремум)** множества A, если c — наименьший элемент среди верхних граней множества A; а именно, выполняются следующие условия:

1. $x \sqsubseteq c$ для всех $x \in A$;
2. $\forall c'(\forall x(x \sqsubseteq c') \to (c \sqsubseteq c'))$.

Если супремум множества A существует, то будем его обозначать как $\sup(A)$ или $\bigsqcup A$.
Дуальным образом определяется понятие **точной нижней грани (инфимума)** множества A. Если инфимум множества A существует, то будем его обозначать как $\inf(A)$ или $\bigsqcap A$.

Упорядоченные множества

Определение.

Пусть A — подмножество упорядоченного множества $(D, \sqsubseteq)$ и $c \in D$. Говорят, что c — **точная верхняя грань (супремум)** множества A, если c — наименьший элемент среди верхних граней множества A; а именно, выполняются следующие условия:

1. $x \sqsubseteq c$ для всех $x \in A$;
2. $\forall c'(\forall x(x \sqsubseteq c') \to (c \sqsubseteq c'))$.

Если супремум множества A существует, то будем его обозначать как $\sup(A)$ или $\bigsqcup A$.
Дуальным образом определяется понятие **точной нижней грани (инфимума)** множества A. Если инфимум множества A существует, то будем его обозначать как $\inf(A)$ или $\bigsqcap A$.

Если $A = \{a_i | i \in I\}$, то будем использовать записи $\bigsqcup\limits_{i \in I} a_i$ и $\bigsqcap\limits_{i \in I} a_i$ для $\bigsqcup A$ и $\bigsqcap A$ соответственно.

Упорядоченные множества

Примеры.

- Если $A \subseteq D$ имеет наибольший элемент, то $c = \bigsqcup A$.
- В $\mathfrak{P}(M)$ любая система $\mathcal{A} = \{A_i | i \in I\}$ имеет супремум, а именно, $C = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.
- В общем случае, множество может не иметь супремума; к примеру, в ω каждая строго возрастающая цепь $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots$ не имеет точной верхней грани.

Домены

Определение.

Упорядоченное множество $(D, \leqslant)$ называется ω-**доменом**, если оно имеет наименьший элемент $\perp$ и любая ω-цепь $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$ элементов из D имеет точную верхнюю грань в D.

Домены

Определение.

Упорядоченное множество $(D, \leqslant)$ называется ω-**доменом**, если оно имеет наименьший элемент $\perp$ и любая ω-цепь $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$ элементов из D имеет точную верхнюю грань в D.

Определение.

Упорядоченное множество $(D, \leqslant)$ называется **доменом**, если оно имеет наименьший элемент $\perp$ и любое направленное множество $A \subseteq D$ имеет точную верхнюю грань $\bigsqcup A$ в D.

Домены

Определение.

Упорядоченное множество $(D, \leqslant)$ называется ω-**доменом**, если оно имеет наименьший элемент $\perp$ и любая ω-цепь $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$ элементов из D имеет точную верхнюю грань в D.

Определение.

Упорядоченное множество $(D, \leqslant)$ называется **доменом**, если оно имеет наименьший элемент $\perp$ и любое направленное множество $A \subseteq D$ имеет точную верхнюю грань $\bigsqcup A$ в D.

Замечание.

В определении домена "любое направленное множество" можно заменить на "любая цепь".

Домены

Примеры.

- Любой домен является ω-доменом.
- Плоский домен является ω-доменом (даже доменом) в смысле этого определения.
- ω не является ω-доменом, однако $\omega \cup \{\top\}$ будет уже ω-доменом.
- $\mathfrak{P}_{fin}(M)$ не будет ω-доменом, если M бесконечно.
- Множество $\mathfrak{P}_{count}(M)$ всех не более, чем счётных подмножеств является ω-доменом. Однако оно не является доменом, если множество M несчётно.
- $\mathfrak{P}(M)$ является доменом.
- Каждое конечное упорядоченное множество с наименьшим элементом является доменом.

Домены

Примеры.

- Любой домен является ω-доменом.
- Плоский домен является ω-доменом (даже доменом) в смысле этого определения.
- ω не является ω-доменом, однако $\omega \cup \{\top\}$ будет уже ω-доменом.
- $\mathfrak{P}_{fin}(M)$ не будет ω-доменом, если M бесконечно.
- Множество $\mathfrak{P}_{count}(M)$ всех не более, чем счётных подмножеств является ω-доменом. Однако оно не является доменом, если множество M несчётно.
- $\mathfrak{P}(M)$ является доменом.
- Каждое конечное упорядоченное множество с наименьшим элементом является доменом.

Любой ли счётный ω-домен является доменом?

Непрерывные функции

Определение.

Пусть $(D, \sqsubseteq_1)$ и $(E, \sqsubseteq_2)$ — упорядоченные множества.

1. Функция $f : D \to E$ называется **монотонной**, если выполняется соотношение $(a, b \in D)$:
$$a \sqsubseteq_1 b \Longrightarrow f(a) \sqsubseteq_2 f(b).$$
2. Если, к тому же, D и E являются ω-доменами, то $f : D \to E$ называется ω-**непрерывной** функцией, если она монотонна и дополнительно удовлетворяет следующему условию:
$$f(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} a_n) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f(a_n)$$
для любой ω-цепи $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ в D.
3. Если, к тому же, D и E являются доменами, то $f : D \to E$ называется **непрерывной** функцией, если она монотонна и дополнительно удовлетворяет следующему условию:
$$f(\bigsqcup A) = \bigsqcup f(A)$$
для любого направленного множества $A \subseteq D$.

Непрерывные функции

В то время, как через $(D \to E)$ обозначаем множество всех функций из D в E, для множества всех непрерывных функций из D в E будем использовать обозначение $[D \to E]$.

Непрерывные функции

В то время, как через $(D \to E)$ обозначаем множество всех функций из D в E, для множества всех непрерывных функций из D в E будем использовать обозначение $[D \to E]$.

Примеры.

- Если D — конечный или плоский домен, то каждая монотонная функция $f : D \to E$ непрерывна.
- Следующие отображения $f : M_\perp \to N_\perp$ между плоскими доменами непрерывны:
  1. постоянная функция $\mathrm{const}_b : x \mapsto b$ для любого $b \in N_\perp$;
  2. отображение вида

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D_f; \\ \perp & \text{иначе;} \end{cases}$$

  где $f : M \to N$ — частичная функция с областью задания $D_f \subseteq M$.

Непрерывные функции

Примеры.

Пусть $\mathbf{2} = \{\bot, \top\}$ — двухэлементный домен. Отображение $f_1 : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathbf{2}$, определённое следующим образом:

$$f_1(X) = \begin{cases} \top, & \text{если } X \text{ бесконечно;} \\ \bot, & \text{если } X \text{ конечно;} \end{cases}$$

монотонно, однако не ω-непрерывно.

Отображение $f_2 : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathbf{2}$, определённое следующим образом:

$$f_2(X) = \begin{cases} \top, & \text{если } X \text{ несчётно;} \\ \bot, & \text{если } X \text{ не более, чем счётно;} \end{cases}$$

ω-непрерывно, однако не является непрерывным.

Неподвижная точка

Теорема L16

Пусть D — ω-домен и пусть f — ω-непрерывная функция. Тогда f имеет наименьшую неподвижную точку $\mathbb{Y}f$, определённую следующим образом:

$$\mathbb{Y}f = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp).$$

Неподвижная точка

Теорема L16

Пусть D — ω-домен и пусть f — ω-непрерывная функция. Тогда f имеет наименьшую неподвижную точку $\mathbb{Y}f$, определённую следующим образом:

$$\mathbb{Y}f = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp).$$

Доказательство.

Так как $\perp$ — наименьший элемент D, имеем $\perp \sqsubseteq f(\perp)$. Из монотонности вытекает соотношение $f(\perp) \sqsubseteq f(f(\perp)) = f^2(\perp)$. Далее, индукцией доказывается, что $f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Итак, мы приходим к ω-цепи $\perp \sqsubseteq f(\perp) \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq f^n(\perp) \sqsubseteq \ldots$, имеющей точную верхнюю грань в D, поскольку D — ω-домен.

Неподвижная точка

Доказательство (продолжение).

Положим $x_0 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)$; тогда из ω-непрерывности f вытекает соотношение $f(x_0) = f(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^{n+1}(\perp) = x_0$.

Тем самым, x_0 — неподвижная точка f. Покажем, что это наименьшая неподвижная точка. Пусть x_1 — неподвижная точка f; тогда $\perp \sqsubseteq x_1$ и, в силу монотонности f, $f^n(\perp) \sqsubseteq f^n(x_1) = x_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $x_0 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp) \sqsubseteq x_1$. Таким образом, x_0 — наименьшая неподвижная точка f. □

Прямое произведение

Определение.

Пусть $(D_j, \sqsubseteq_j)_{j\in J}$ — семейство доменов. Положим **прямое произведение**

$$\prod_{j\in J} D_j = \{f : J \to \bigcup_{j\in J} D_j | f(j) \in D_j \text{ для всех } j \in J\}.$$

Если $D_j = D$ для всех $j \in J$, то $\prod\limits_{j\in J} D_j$ обозначается как D^J и называется **прямой степенью**. Определим покоординатно порядок на $\prod\limits_{j\in J} D_j$, а именно,

$$f_1 \sqsubseteq f_2 \iff [f_1(j) \sqsubseteq_j f_2(j) \text{ для всех } j \in J],$$

где $f_1, f_2 \in \prod\limits_{j\in J} D_j$.

Прямое произведение

Тогда $\left(\prod\limits_{j\in J} D_j, \sqsubseteq\right)$ — домен, причём $\perp = (\perp_j)_{j\in J}$ — наименьший элемент, где $\perp_j$ — наименьший элемент D_j.
Каково бы ни было направленное множество $A \subseteq \prod\limits_{j\in J} D_j$, имеем

$\bigsqcup A(j) = \bigsqcup\limits_{f\in A} f(j)$ для любого $j \in J$,

т. е. точная верхняя грань направленного множества задаётся покоординатно.

Прямое произведение

Тогда $\left(\prod\limits_{j\in J} D_j, \sqsubseteq\right)$ — домен, причём $\perp = (\perp_j)_{j\in J}$ — наименьший элемент, где $\perp_j$ — наименьший элемент D_j.
Каково бы ни было направленное множество $A \subseteq \prod\limits_{j\in J} D_j$, имеем $\bigsqcup A(j) = \bigsqcup\limits_{f\in A} f(j)$ для любого $j \in J$,
т. е. точная верхняя грань направленного множества задаётся покоординатно.

Канонические проекции

Канонические проекции
$\mathrm{pr}_{j_0} : \prod\limits_{j\in J} D_j \to D_{j_0}$, где $f \xmapsto{\mathrm{pr}_{j_0}} f(j_0)$ $(j_0 \in J)$
непрерывны, поскольку для направленного множества $A \subseteq \prod\limits_{j\in J} D_j$ имеем
$\mathrm{pr}_{j_0}(\bigsqcup A) = \mathrm{pr}_{j_0}(\bigsqcup\{f | f \in A\}) = \bigsqcup\{f(j_0) | f \in A\} = \bigsqcup\limits_{f\in A} \mathrm{pr}_{j_0}(f)$.

Система функций

Пусть сначала $(E, \sqsubseteq_1)$ — домен, а D — произвольное множество. На множестве $(D \to E)$ всех функций вида $f : D \to E$ определим отношение порядка следующим образом $(f, g \in (D \to E))$:

$$f \sqsubseteq_0 g \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in D[f(x) \sqsubseteq_1 g(x)].$$

Данное отношение называется **поточечным порядком**.

Система функций

Пусть сначала $(E, \sqsubseteq_1)$ — домен, а D — произвольное множество. На множестве $(D \to E)$ всех функций вида $f : D \to E$ определим отношение порядка следующим образом $(f, g \in (D \to E))$:

$$f \sqsubseteq_0 g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in D[f(x) \sqsubseteq_1 g(x)].$$

Данное отношение называется **поточечным порядком**.

Тогда $((D \to E), \sqsubseteq_0)$ — домен:

1. постоянная функция $\mathrm{const}_\perp$ — наименьший элемент множества $(D \to E)$;
2. если $\{f_i | i \in I\}$ — направленное множество (функций из $(D \to E)$), то для каждого $x \in D$ совокупность $\{f_i(x) | i \in I\}$ также будет направленным множеством (в E). При этом $(\bigsqcup_{i \in I} f_i)(x) = \bigsqcup_{i \in I} f_i(x)$ для всех $x \in D$.

Система функций

Пусть, к тому же, $(D, \sqsubseteq_2)$ — домен.

Предложение L10

Если $\{f_i | i \in I\}$ — направленное множество непрерывных функций, то $f \leftrightharpoons \bigsqcup_{i \in I} f_i$ также непрерывна.

Система функций

Пусть, к тому же, $(D, \sqsubseteq_2)$ — домен.

Предложение L10

Если $\{f_i | i \in I\}$ — направленное множество непрерывных функций, то $f \leftrightharpoons \bigsqcup_{i \in I} f_i$ также непрерывна.

Доказательство.

Монотонность. Пусть $x, y \in D$ таковы, что $x \sqsubseteq_2 y$. Тогда $f_i(x) \sqsubseteq_1 f_i(y)$ для всех $i \in I$. Далее, $f(x) = \bigsqcup_{i \in I} f_i(x) \sqsubseteq_1 \bigsqcup_{i \in I} f_i(y) = f(y)$.

Система функций

Доказательство (продолжение).

Направленность. Пусть теперь $\{x_j | j \in J\}$ — направленное множество в D. Нам необходимо показать, что имеет место $f(\bigsqcup_{j\in J} x_j) = \bigsqcup_{j\in J} f(x_j)$.

Действительно, имеем $f(\bigsqcup_{j\in J} x_j) = (\bigsqcup_{i\in I} f_i)(\bigsqcup_{j\in J} x_j) = \bigsqcup_{i\in I} f_i(\bigsqcup_{j\in J} x_j) =$

$$\bigsqcup_{i\in I}(\bigsqcup_{j\in J} f_i(x_j)) \overset{(1)}{=} \bigsqcup_{j\in J}(\bigsqcup_{i\in I} f_i(x_j)) = \bigsqcup_{j\in J}((\bigsqcup_{i\in I} f_i)(x_j)) = \bigsqcup_{j\in J} f(x_j).$$

□

Система функций

Доказательство (продолжение).

Направленность. Пусть теперь $\{x_j | j \in J\}$ — направленное множество в D. Нам необходимо показать, что имеет место $f(\bigsqcup_{j\in J} x_j) = \bigsqcup_{j\in J} f(x_j)$.

Действительно, имеем $f(\bigsqcup_{j\in J} x_j) = (\bigsqcup_{i\in I} f_i)(\bigsqcup_{j\in J} x_j) = \bigsqcup_{i\in I} f_i(\bigsqcup_{j\in J} x_j) =$

$$\bigsqcup_{i\in I}(\bigsqcup_{j\in J} f_i(x_j)) \overset{(1)}{=} \bigsqcup_{j\in J}(\bigsqcup_{i\in I} f_i(x_j)) = \bigsqcup_{j\in J}((\bigsqcup_{i\in I} f_i)(x_j)) = \bigsqcup_{j\in J} f(x_j).$$

□

Упражнение.

Доказать $\overset{(1)}{=}$.

Система функций

Следствие L4

Множество $[D \to E]$ всех непрерывных функций $f : D \to E$ является доменом относительно поточечного порядка.

Система функций

Следствие L4

Множество $[D \to E]$ всех непрерывных функций $f : D \to E$ является доменом относительно поточечного порядка.

Предложение L11

Пусть D_1, D_2 и E — домены. Тогда функция $f_1^D \times D_2 \to E$ непрерывна, если и только если она покомпонентно непрерывна, а именно, все функции
$x \mapsto f(x, y_0) : D_1 \to E$, $y_0 \in D_2$;
$y \mapsto f(x_0, y) : D_2 \to E$, $x_0 \in D_1$;
непрерывны.

Система функций

Следствие L4

Множество $[D \to E]$ всех непрерывных функций $f : D \to E$ является доменом относительно поточечного порядка.

Предложение L11

Пусть D_1, D_2 и E — домены. Тогда функция $f_1^D \times D_2 \to E$ непрерывна, если и только если она покомпонентно непрерывна, а именно, все функции
$x \mapsto f(x, y_0) : D_1 \to E$, $y_0 \in D_2$;
$y \mapsto f(x_0, y) : D_2 \to E$, $x_0 \in D_1$;
непрерывны.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Остаётся в качестве упражнения. $(\Leftarrow)$ Проверка справедливости свойства монотонности остаётся в качестве упражнения.

Система функций

Доказательство (продолжение).

Пусть $\{(x_i, y_i) | i \in I\}$ — направленное множество в $D_1 \times D_2$. Тогда имеем $f(\bigsqcup_{i\in I}(x_i, y_i)) = f(\bigsqcup_{i\in I} x_i, \bigsqcup_{i\in I} y_i) = f(\bigsqcup_{i\in I} x_i, \bigsqcup_{j\in I} y_j) =$

$$\bigsqcup_{i\in I} f(x_i, \bigsqcup_{j\in I} y_j) = \bigsqcup_{i\in I}\bigsqcup_{j\in I} f(x_i, y_j) \overset{(1)}{=} \bigsqcup_{i\in I} f(x_i, y_i).$$

Остаётся только проверить равенство $\overset{(1)}{=}$. Так как каждый элемент, входящий в правую часть, встречается и в левой, имеем $\bigsqcup_{i\in I} f(x_i, y_i) \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in I}\bigsqcup_{j\in I} f(x_i, y_j)$. В обратную сторону, так как $\{(x_i, y_i) | i \in I\}$ — направленное множество, для любых $i, j \in I$ найдётся $k \in I$, для которого выполняется соотношение $(x_i, y_i) \sqsubseteq (x_k, y_k)$ и $(x_j, y_j) \sqsubseteq (x_k, y_k)$, а следовательно, $(x_i, y_j) \sqsubseteq (x_k, y_k)$. Тем самым, $\bigsqcup_{i\in I}\bigsqcup_{j\in I} f(x_i, y_j) \sqsubseteq \bigsqcup_{k\in I} f(x_k, y_k)$. В силу антисимметричности, выполняется равенство $\overset{(1)}{=}$. $\square$

Система функций

Предложение L12

Для произвольных доменов D и E функция
$\mathrm{app} : [D \to E] \times D \to E$, $(f, x) \mapsto f(x)$
непрерывна.

Система функций

Предложение L12

Для произвольных доменов D и E функция
$\mathrm{app} : [D \to E] \times D \to E$, $(f, x) \mapsto f(x)$
непрерывна.

Доказательство.

Воспользуемся предложением L11.
(1) Для каждой $f \in [D \to E]$ функция $x \mapsto f(x)$ непрерывна.
(2) Докажем, что для каждого $x \in D$ функционал $f \mapsto f(x)$ непрерывен. Пусть $\{f_i | i \in I\}$ — множество, направленное в $[D \to E]$. Тогда точная верхняя грань в $[D \to E]$ определяется поточечно: $(\bigsqcup\limits_{i \in I} f_i)(x) = \bigsqcup\limits_{i \in I} f_i(x)$. $\square$

Непрерывные функции

Замечание.

Два последних утверждения не обобщаются на случай бесконечных прямых произведений, с одной стороны; а с другой стороны, не имеют аналогов в курсе анализа.

Непрерывные функции

Замечание.

Два последних утверждения не обобщаются на случай бесконечных прямых произведений, с одной стороны; а с другой стороны, не имеют аналогов в курсе анализа.

Пример.

Пусть D, E и F — домены.

$\mathrm{id}_D : D \to D$ непрерывна. Если $f : D \to E$ и $g : E \to F$ непрерывны, то непрерывной будет и их композиция $(g \circ f) : D \to F$ (здесь $\{x_i | i \in I\}$ — направленное множество):

$$(g \circ f)(\bigsqcup_{i \in I} x_i) = g(f(\bigsqcup_{i \in I} x_i)) = g(\bigsqcup_{i \in I} f(x_i)) = \bigsqcup_{i \in I} g(f(x_i)) = \bigsqcup_{i \in I} (g \circ f)(x_i).$$

Легко проверяется свойство монотонности (упражнение!!!)

Непрерывные функционалы

Пример.

$\mathrm{comp} : [D \to E] \times [E \to F] \to [D \to F]$ — *непрерывный функционал.* Сначала докажем, что $g \circ (\bigsqcup_{i \in I} f_i) = \bigsqcup_{i \in I} (g \circ f_i)$, где $\{f_i | i \in I\}$ — направленное множество в $[D \to E]$ (здесь $x \in D$):
$(g \circ (\bigsqcup_{i \in I} f_i))(x) = g((\bigsqcup_{i \in I} f_i)(x)) = g(\bigsqcup_{i \in I} f_i(x)) = \bigsqcup_{i \in I} g(f_i(x)) = \bigsqcup_{i \in I} (g \circ f_i)(x)$.
Аналогично доказывается, что $(\bigsqcup_{i \in I} g_i) \circ f = \bigsqcup_{i \in I} (g_i \circ f)$, где $\{g_i | i \in I\}$ — направленное множество в $[E \to F]$. Проверка покомпонентной монотонности оставляется в качестве упражнения. Остаётся применить предложение L11.

Непрерывные функционалы

Примеры.

$\mathrm{it}^{(2)} : [D \to D] \to [D \to D]$, $f \mapsto f \circ f$ — *непрерывный функционал.* Действительно, этот функционал может быть определён как композиция непрерывных функционалов:

$$\begin{array}{ccccc} [D \to D] & \to & [D \to D] \times [D \to D] & \stackrel{\mathrm{comp}}{\longrightarrow} & [D \to D] \\ f & \mapsto & (f, f) & \mapsto & f \circ f \end{array}$$

Проверка того, что отображение $f \mapsto (f, f)$ будет непрерывным функционалом, остаётся в качестве упражнения.

$\mathrm{it}^{(n)} : [D \to D] \to [D \to D]$, $f \mapsto f^n$ — *непрерывный функционал.*

Проверка того, что отображение $f \mapsto f^n$ будет непрерывным функционалом, остаётся в качестве упражнения.

Непрерывные функционалы

Примеры.

$\mathbb{Y}_D^{(n)} : [D \to D] \to D$, $f \mapsto f^n(\perp)$ — *непрерывный функционал.*
Действительно, этот функционал может быть определён как композиция непрерывных функционалов:

$$\begin{array}{ccccc} [D \to D] & \xrightarrow{\mathrm{it}^{(n)}} & [D \to D] \times [D \to D] & \to & [D \to D] \\ f & \mapsto & f^n & \mapsto & f^n(\perp) \end{array}$$

$\mathbb{Y}_D : [D \to D] \to D$, $f \mapsto f^n(\perp)$ — *непрерывный функционал.*
Имеем $\mathbb{Y}_D^{(0)} \sqsubseteq \mathbb{Y}_D^{(1)} \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq \mathbb{Y}_D^{(n)} \sqsubseteq \ldots$, т. е. $\{\mathbb{Y}_D^{(n)} | n \in \mathbb{N}\}$ образует ω-цепь, поэтому $\mathbb{Y}_D = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Y}_D^{(n)}$ непрерывен.
Напомним, что $\mathbb{Y}_D(f) = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Y}_D^{(n)}(f) = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)$ является наименьшей неподвижной точкой, по теореме L16. В частности, $\mathbb{Y}_D(f) = f(\mathbb{Y}_D(f))$.

Преобразование Карри

Пусть D_1, D_2 и E — домены. Следуя подходу Карри, получаем две взаимно обратные биекции

$$(D_1 \times D_2 \to E) \xrightarrow{\text{curry}} (D_1 \to (D_2 \to E)),$$
$$(D_1 \to (D_2 \to E)) \xrightarrow{\text{uncurry}} (D_1 \times D_2 \to E),$$

индуцирующие две взаимно обратные непрерывные биекции

$$[D_1 \times D_2 \to E] \xrightarrow{\text{curry}} [D_1 \to [D_2 \to E]],$$
$$[D_1 \to [D_2 \to E]] \xrightarrow{\text{uncurry}} [D_1 \times D_2 \to E].$$

Проверка свойства непрерывности функционалов оставляется в качестве упражнения.

Спасибо за внимание.