Лекция С3
Вычислимые и вычислимо перечислимые множества

Вадим Пузаренко

5 апреля 2020 г.

Характеристическая функция

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — множество кортежей натуральных чисел. Тогда его **характеристическая функция** $\chi_A : \omega^n \to \omega$ определяется следующим образом:

$$\chi_A(k_1, \ldots, k_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (k_1, \ldots, k_n) \in A; \\ 1, & \text{если } (k_1, \ldots, k_n) \in \omega^n \setminus A. \end{cases}$$

Частичная характеристическая функция множества A $\chi^*_A : \omega^n \to \omega$ определяется следующим образом:

$$\chi^*_A(k_1, \ldots, k_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } (k_1, \ldots, k_n) \in A; \\ \uparrow, & \text{если } (k_1, \ldots, k_n) \in \omega^n \setminus A. \end{cases}$$

Тогда $dom(\chi^*_A) = A$.

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Примеры

Следующие подмножества ω вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- ω;

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Примеры

Следующие подмножества ω вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- ω;
- $\varnothing$;

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Примеры

Следующие подмножества ω вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- ω;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого n;

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Примеры

Следующие подмножества ω вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- ω;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого n;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Примеры

Следующие подмножества ω вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- ω;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого n;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;
- $\omega \setminus \{1\}$;

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Примеры

Следующие подмножества ω вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- ω;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого n;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;
- $\omega \setminus \{1\}$;
- $\omega \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого n;

Вычислимые множества

Определение

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Множество A называется **вычислимым**, если его характеристическая функция χ_A вычислима.

Примеры

Следующие подмножества ω вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- ω;
- $\varnothing$;
- $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого n;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$;
- $\omega \setminus \{1\}$;
- $\omega \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ для любого n;
- $\omega \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $k, n_1, \ldots, n_k$.

Примеры вычислимых множеств

Примеры

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

Примеры вычислимых множеств

Примеры

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;

Примеры вычислимых множеств

Примеры

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;

Примеры вычислимых множеств

Примеры

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;

Примеры вычислимых множеств

Примеры

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;
- $\{(n, m) | (n, m) \in \omega^2,\ \ n | m\}$;

Примеры вычислимых множеств

Примеры

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;
- $\{(n, m) | (n, m) \in \omega^2,\ n | m\}$;
- $\{(n, m) | (n, m) \in \omega^2,\ n + m$ — простое число$\}$;

Примеры вычислимых множеств

Примеры

Следующие множества вычислимы (даже примитивно рекурсивны):

- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$;
- $\{n | n \in \omega, n$ — простое число$\}$;
- $\{(n, m) | (n, m) \in \omega^2,\ \ n | m\}$;
- $\{(n, m) | (n, m) \in \omega^2,\ \ n + m$ — простое число$\}$;
- $\{(n, m) | (n, m) \in \omega^2,\ \ n, m$ — простые числа, $|n - m| = 2\}$.

Сильно вычислимые последовательности

Определение 1

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- $n \mapsto |A_n|$ — вычислимая функция.

Сильно вычислимые последовательности

Определение 1

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- $n \mapsto |A_n|$ — вычислимая функция.

Определение 2

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- $n \mapsto \max(A_n \cup \{0\})$ — вычислимая функция.

Сильно вычислимые последовательности

Определение 3

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m \in A_n) \to (m \leqslant f(n))$, для всех $m, n \in \omega$.

Сильно вычислимые последовательности

Определение 3

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m\in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m\in A_n)\to(m\leqslant f(n))$, для всех $m,n\in\omega$.

Определение

Канонической нумерацией конечных множеств называется $\gamma(n)$, определяемая следующим образом: $\gamma(0)\leftrightharpoons\varnothing$;
$\gamma(n)=\{x_1<x_2<\ldots<x_k\}$, если $n=2^{x_1}+\ldots+2^{x_k}$.

Сильно вычислимые последовательности

Определение 3

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если выполняются следующие условия:

- $\{(m,n)|m \in A_n\}$ — вычислимый предикат;
- существует вычислимая функция $f(n)$ такая, что имеет место $(m \in A_n) \to (m \leqslant f(n))$, для всех $m, n \in \omega$.

Определение

Канонической нумерацией конечных множеств называется $\gamma(n)$, определяемая следующим образом: $\gamma(0) \leftrightharpoons \varnothing$;
$\gamma(n) = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_k\}$, если $n = 2^{x_1} + \ldots + 2^{x_k}$.

Определение 4

Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ конечных множеств называется **сильно вычислимой**, если существует вф f такая, что $A_n = \gamma(f(n))$ для всех $n \in \omega$.

Сильно вычислимые последовательности

Предложение С13

$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.

Сильно вычислимые последовательности

Предложение С13

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

$(1 \Rightarrow 2)$

Первые условия совпадают, поэтому проверим справедливость второго условия. Пусть вычислимые функции $g(m) = |A_m|$ и $h(n, m)$ таковы, что $h(n, m) = 0 \Leftrightarrow m \in A_n$. Определим сначала вспомогательную частично вычислимую функцию $\psi(n, k)$ такую, что $\psi(n, 0) = 0$, а при $k > 0$ функция $\lambda k.\psi(n, k)$ перечисляет в порядке возрастания множество A_n $(n \in \omega)$:

$$\left[\begin{array}{l} \psi(n,0) = 0; \\ \psi(n, k+1) = \mu t[((k = 0) \vee (t > \psi(n, k))) \wedge (t \in A_n)]. \end{array}\right.$$

Действительно, $q(n, k, z) = \mu t[(k \cdot (\mathrm{s}(z) \dot{-} t)) + h(n, t) = 0]$ — ч.в.ф. из определения примитивной рекурсии. Далее, $\max(A_n \cup \{0\}) = \psi(n, |A_n|)$.

Сильно вычислимые последовательности

$(2 \Rightarrow 3)$

Как и в предыдущем случае, первые условия совпадают. Докажем справедливость второго условия. Однако второе условие выполняется, если в качестве функции $f(n)$ взять $\max(A_n \cup \{0\})$, поскольку имеет место

$$(m \in A_n) \to (m \leqslant \max(A_n \cup \{0\})),$$

для всех $m, n \in \omega$.

Сильно вычислимые последовательности

$(2 \Rightarrow 3)$

Как и в предыдущем случае, первые условия совпадают. Докажем справедливость второго условия. Однако второе условие выполняется, если в качестве функции $f(n)$ взять $\max(A_n \cup \{0\})$, поскольку имеет место

$$(m \in A_n) \to (m \leqslant \max(A_n \cup \{0\})),$$

для всех $m, n \in \omega$.

$(3 \Rightarrow 4)$

Пусть вычислимые функции $g(n)$ и $h(n, m)$ таковы, что $h(n, m) = 0 \Leftrightarrow m \in A_n$, а $g(n)$ удовлетворяет второму условию из (3). Тогда $f(n) = \sum_{i=0}^{g(n)} (2^i \cdot \overline{\mathrm{sg}}(h(n, i)))$ будет искомой.

Сильно вычислимые последовательности

$(4 \Rightarrow 1)$

Сначала докажем первое условие из (1). Действительно,
$m \in \gamma(f(n)) \Leftrightarrow (\left[\frac{f(n)}{2^m}\right]$ нечетно):
$m \in \gamma(f(n)) \Rightarrow f(n) = \ldots + 2^m + \ldots = \ldots + 2^m \cdot (1 + 2 \cdot (\ldots))$ и $\sum\limits_{i \in A_{f(n)},\, i<m} 2^i < 2^m$;
$m \notin \gamma(f(n)) \Rightarrow f(n) = \ldots + \ldots = \ldots + 2^m \cdot (2 \cdot (\ldots))$ и $\sum\limits_{i \in A_{f(n)},\, i<m} 2^i < 2^m$.
Таким образом, $\chi_Q(n, m) = \overline{\mathrm{sg}}(rest(\left[\frac{f(n)}{2^m}\right], 2))$, где $Q = \{(m, n) | m \in \gamma(f(n))\}$.

Далее, $m \in \gamma(f(n)) \Rightarrow m < 2^m \leqslant f(n)$, поэтому $|A_n| = \sum\limits_{i=0}^{f(n)} \chi_Q(i, n)$.

Вычислимо перечислимые множества

Определение

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф φ.

Примеры

Следующие множества вычислимо перечислимы:

Вычислимо перечислимые множества

Определение

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф φ.

Примеры

Следующие множества вычислимо перечислимы:

- ω;
- $\{n\}$ для любого $n \in \omega$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $n_1, \ldots, n_k \in \omega$;

Вычислимо перечислимые множества

Определение

Множество $A \subseteq \omega^n$ называется **вычислимо перечислимым**, если $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$ для некоторой чвф φ.

Примеры

Следующие множества вычислимо перечислимы:

- ω;
- $\{n\}$ для любого $n \in \omega$;
- $\{n_1, \ldots, n_k\}$ для любых $n_1, \ldots, n_k \in \omega$;
- $\{2 \cdot n | n \in \omega\}$;
- $\{k \cdot n | n \in \omega\}$, для любого $k \in \omega$.

Вычислимо перечислимые множества

Теорема C7

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

Вычислимо перечислимые множества

Теорема С7

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, φ — ч.в.ф.;
2. χ_A^* — ч.в.ф.;

Вычислимо перечислимые множества

Теорема C7

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, φ — ч.в.ф.;
2. χ^*_A — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, φ — ч.в.ф.;

Вычислимо перечислимые множества

Теорема C7

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, φ — ч.в.ф.;
2. χ_A^* — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, φ — ч.в.ф.;
4. $A = \varnothing$ или $A = \rho f$, f — в.ф.;
5. A конечно или $A = \rho f$, f — инъективная в.ф.;

Вычислимо перечислимые множества

Теорема С7

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, φ — ч.в.ф.;
2. χ_A^* — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, φ — ч.в.ф.;
4. $A = \varnothing$ или $A = \rho f$, f — в.ф.;
5. A конечно или $A = \rho f$, f — инъективная в.ф.;
6. $A = \exists y Q(x, y)$, Q — вычислимый предикат;

Вычислимо перечислимые множества

Теорема C7

Для $A \subseteq \omega$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $A = \delta\varphi$, φ — ч.в.ф.;
2. χ_A^* — ч.в.ф.;
3. $A = \rho\varphi$, φ — ч.в.ф.;
4. $A = \varnothing$ или $A = \rho f$, f — в.ф.;
5. A конечно или $A = \rho f$, f — инъективная в.ф.;
6. $A = \exists y Q(x, y)$, Q — вычислимый предикат;
7. существует сильно вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ такая, что $\varnothing = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_s \subseteq A_{s+1} \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_s A_s = A$;
8. существует сильно вычислимая последовательность, удовлетворяющая условию (7) и дополнительно условию $|A_{s+1} - A_s| = 1$, $s \in \omega$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi_A^*(x) = 0(\varphi(x))$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi^*_A(x) = 0(\varphi(x))$. (2 $\Rightarrow$ 1) $\delta\chi^*_A = A$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi^*_A(x) = 0(\varphi(x))$. (2 $\Rightarrow$ 1) $\delta\chi^*_A = A$.
(2 $\Rightarrow$ 3) $\psi(x) = x \cdot \mathrm{s}(\chi^*_A(x))$ и $\rho\psi = \delta\chi^*_A = A$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi^*_A(x) = 0(\varphi(x))$. (2 $\Rightarrow$ 1) $\delta\chi^*_A = A$.
(2 $\Rightarrow$ 3) $\psi(x) = x \cdot \mathrm{s}(\chi^*_A(x))$ и $\rho\psi = \delta\chi^*_A = A$.
(3 $\Rightarrow$ 4) Пусть $A \neq \varnothing$ и $x_0 \in A$. Так как $\psi(x)$ частично вычислима, по теореме Клини о нормальной форме найдутся примитивно рекурсивные функция U и отношение $T(x, y)$, для которых выполняется $\psi(x) = U(\mu y.T(x, y))$. Определим вспомогательную вф $f_1(x, s)$ следующим образом:

$$f_1(x, s) = \begin{cases} U(\mu y \leqslant s.T(x, y)), & \text{если } \exists y \leqslant sT(x, y); \\ x_0, & \text{если } \forall y \leqslant s\neg T(x, y). \end{cases}$$

Таким образом, $A = \rho f$, где $f(x) = f_1(l(x), r(x))$ — вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство.

(1 $\Rightarrow$ 2) $\chi^*_A(x) = 0(\varphi(x))$. (2 $\Rightarrow$ 1) $\delta\chi^*_A = A$.
(2 $\Rightarrow$ 3) $\psi(x) = x \cdot \mathrm{s}(\chi^*_A(x))$ и $\rho\psi = \delta\chi^*_A = A$.
(3 $\Rightarrow$ 4) Пусть $A \neq \varnothing$ и $x_0 \in A$. Так как $\psi(x)$ частично вычислима, по теореме Клини о нормальной форме найдутся примитивно рекурсивные функция U и отношение $T(x, y)$, для которых выполняется $\psi(x) = U(\mu y.T(x, y))$. Определим вспомогательную вф $f_1(x, s)$ следующим образом:

$$f_1(x,s) = \begin{cases} U(\mu y \leqslant s.T(x,y)), & \text{если } \exists y \leqslant sT(x,y); \\ x_0, & \text{если } \forall y \leqslant s \neg T(x,y). \end{cases}$$

Таким образом, $A = \rho f$, где $f(x) = f_1(l(x), r(x))$ — вычислимая (даже примитивно рекурсивная) функция.
(5 $\Rightarrow$ 4) Если A бесконечно, то $A = \rho f$ для некоторой вычислимой функции f. Пусть теперь A конечно (скажем, $A = \{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$). Тогда

$$f_0(x) = n_0 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x) + n_1 \cdot \overline{\mathrm{sg}}|x-1| + \ldots + n_{k-1} \cdot \overline{\mathrm{sg}}|x-(k-1)| + n_k \cdot \overline{\mathrm{sg}}(k \dot{-} x)$$

вычислима и $\rho f_0 = A$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство (продолжение)

$(4 \Rightarrow 5)$ Пусть A бесконечно и пусть вф f такова, что $\rho f = A$. Возьмём вспомогательную функцию g, выдающую наименьшие f-номера элементов множества A в порядке возрастания:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(n+1) = \mu t.[(t > g(n)) \wedge \forall i < t(f(i) \neq f(t))]. \end{array}\right.$$

Тогда $f_0(n) \leftrightharpoons f(g(n))$ вычислима, инъективна и $\rho f_0 = A$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство (продолжение)

$(4 \Rightarrow 5)$ Пусть A бесконечно и пусть вф f такова, что $\rho f = A$. Возьмём вспомогательную функцию g, выдающую наименьшие f-номера элементов множества A в порядке возрастания:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(n+1) = \mu t.[(t > g(n)) \wedge \forall i < t(f(i) \neq f(t))]. \end{array}\right.$$

Тогда $f_0(n) \leftrightharpoons f(g(n))$ вычислима, инъективна и $\rho f_0 = A$.

$(4 \Rightarrow 8)$ Если $A = \varnothing$, то положим $A_n = \varnothing$ для всех $n \in \omega$. Последовательность A_n сильно вычислима, поскольку $\chi_S(m, n) \equiv 1$, где $S = \{\langle m, n\rangle | m \in A_n\}$, и $|A_n| = 0$. Нетрудно понять, что эта последовательность удовлетворяет посылке условия 8.

Пусть теперь $A \neq \varnothing$; возьмём вф f из условия 4 (т.е. $\rho f = A$) и положим $A_n = \{m | \exists i < n(m = f(i))\}$. Последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ сильно вычислима, поскольку $S = \{\langle m, n\rangle | m \in A_n\}$ — вычислимое отношение $(m \in A_n \Leftrightarrow \exists i < n(m = f(i)))$, а функция $g(n) = \max(A_n \cup \{0\})$ также вычислима:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(n+1) = \max\{g(n), f(n)\}. \end{array}\right.$$

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство (продолжение)

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
($A_0 = \varnothing$) $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
($A_s \subseteq A_{s+1}$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
($A_s \subseteq A$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
($A \subseteq \bigcup_s A_s$) Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого i_0; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство (продолжение)

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
($A_0 = \varnothing$) $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
($A_s \subseteq A_{s+1}$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
($A_s \subseteq A$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
($A \subseteq \bigcup_s A_s$) Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого i_0; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.
($8 \Rightarrow 7$) Очевидно.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство (продолжение)

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
$(A_0 = \varnothing)$ $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
$(A_s \subseteq A_{s+1})$ Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
$(A_s \subseteq A)$ Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
$(A \subseteq \bigcup_s A_s)$ Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого i_0; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.
$(8 \Rightarrow 7)$ Очевидно.
$(7 \Rightarrow 6)$ Действительно, $A = \exists y Q(x, y)$, где $Q = \{\langle x, y\rangle | x \in A_y\}$ вычислимо $(A = \bigcup_y A_y)$.

Вычислимо перечислимые множества

Доказательство (продолжение)

Покажем, что она удовлетворяет остальным условиям п. 8.
($A_0 = \varnothing$) $m \in A_0 \Rightarrow \exists i < 0(m = f(i))$.
($A_s \subseteq A_{s+1}$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i < s$; следовательно, $x = f(i_0)$, где $i_0 < s + 1$; тем самым, $x \in A_{s+1}$.
($A_s \subseteq A$) Пусть $x \in A_s$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого $i_0 < s$ и, следовательно, $x \in \rho f$; таким образом, $x \in A$.
($A \subseteq \bigcup_s A_s$) Пусть $x \in A$; тогда $x = f(i_0)$ для некоторого i_0; в частности, $x \in A_{s_0}$ при $s_0 = i_0 + 1$.
($8 \Rightarrow 7$) Очевидно.
($7 \Rightarrow 6$) Действительно, $A = \exists y Q(x, y)$, где $Q = \{\langle x, y\rangle | x \in A_y\}$ вычислимо ($A = \bigcup_y A_y$).
($6 \Rightarrow 1$) Действительно, $A = \delta\psi$, где $\psi(x) = \mu y.Q(x, y)$ — чвф. Если $x \in A$, то $Q(x, y_0)$ для некоторого y; возьмём наименьшее такое $y_0 = y$; следовательно, $\psi(x) \downarrow= y_0$. Если же $x \notin A$, то не выполняется $Q(x, y)$ ни для какого y и, следовательно, $\psi(x) \uparrow$. $\square$

Унарные vs k-местные

Лемма C18

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — множество. Тогда A вычислимо перечислимо, если и только если $c^n(A)$ вычислимо перечислимо.

Унарные vs k-местные

Лемма С18

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — множество. Тогда A вычислимо перечислимо, если и только если $c^n(A)$ вычислимо перечислимо.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $A \subseteq \omega^n$ вычислимо перечислимо; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, $\psi_1(x) = \psi(c_{n,1}(x), c_{n,2}(x), \ldots, c_{n,n}(x))$ также чвф и $c^n(A) = \delta\psi_1$; тем самым, $c^n(A)$ — впм.

($\Leftarrow$) Пусть $c^n(A) = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x)$; тогда $\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ также чвф и $A = \delta\psi_2$; таким образом, A — впм. $\square$

Унарные vs k-местные

Лемма C19

Пусть $A \subseteq \omega$ — множество. Тогда A вычислимо перечислимо, если и только если $B = \{\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle | A(c^n(k_1, k_2, \ldots, k_n))\}$ вычислимо перечислимо.

Унарные vs k-местные

Лемма С19

Пусть $A \subseteq \omega$ — множество. Тогда A вычислимо перечислимо, если и только если $B = \{\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle | A(c^n(k_1, k_2, \ldots, k_n))\}$ вычислимо перечислимо.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $A \subseteq \omega$ вычислимо перечислимо; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x)$. Следовательно, $\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ также чвф и $B = \delta\psi_1$; тем самым, B — впм.
($\Leftarrow$) Пусть $B = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; тогда $\psi_2(x) = \psi(c_{n,1}(x), c_{n,2}(x), \ldots, c_{n,n}(x))$ также чвф и $A = \delta\psi_2$; таким образом, A — впм. $\square$

ВМ vs ВПМ

Замечание

Трансформации, описанные в леммах С18 и С19, взаимно обратны. К примеру, $A \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C18}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C19}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_k$ и $A \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C19}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C18}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_1$ тождественны.

ВМ vs ВПМ

Замечание

Трансформации, описанные в леммах C18 и C19, взаимно обратны. К примеру, $A \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C18}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C19}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_k$ и $A \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C19}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C18}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_1$ тождественны.

Лемма C20

Любое вычислимое множество вычислимо перечислимо.

ВМ vs ВПМ

Замечание

Трансформации, описанные в леммах С18 и С19, взаимно обратны. К примеру, $A \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C18}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C19}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_k$ и $A \in \mathrm{CEP}_1 \overset{\mathrm{C19}}{\mapsto} B \in \mathrm{CEP}_k \overset{\mathrm{C18}}{\mapsto} C \in \mathrm{CEP}_1$ тождественны.

Лемма С20

Любое вычислимое множество вычислимо перечислимо.

Доказательство.

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — вычислимое множество. Тогда функция $\chi_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вычислима и, следовательно, $\chi^*_{c^n(A)}(x) = \mu y.[\chi_{c^n(A)}(c_{n,1}(x), c_{n,2}(x), \ldots, c_{n,n}(x)) = 0]$ — чвф. Таким образом, $c^n(A)$ — впм и, по лемме С19, множество A также является вычислимо перечислимым. $\square$

Операции на ВПМ

Лемма С21

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

Операции на ВПМ

Лемма C21

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

Доказательство.

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — чвф. Тогда $A \cap B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. □

Операции на ВПМ

Лемма C21

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

Доказательство.

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — чвф. Тогда $A \cap B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. $\square$

Лемма C22

Пусть $A \subseteq \omega^k$, $B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их декартово произведение $A \times B$ также вычислимо перечислимо.

Операции на ВПМ

Лемма C21

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их пересечение $A \cap B$ также вычислимо перечислимо.

Доказательство.

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — чвф. Тогда $A \cap B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. □

Лемма C22

Пусть $A \subseteq \omega^k$, $B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их декартово произведение $A \times B$ также вычислимо перечислимо.

Доказательство.

Пусть $A \subseteq \omega^k$, $B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $A = \delta\varphi_1$, $B = \delta\varphi_2$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — чвф. Тогда $A \times B = \delta(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$. □

Операции на ВПМ

Лемма С23

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их объединение $A \cup B$ также вычислимо перечислимо.

Операции на ВПМ

Лемма C23

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их объединение $A \cup B$ также вычислимо перечислимо.

Доказательство.

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $c^n(A)$, $c^n(B)$ также являются впм и, следовательно, $c^n(A) = \exists y Q_1(x, y)$, $c^n(B) = \exists y Q_2(x, y)$, где Q_1 и Q_2 — вычислимые предикаты, и
$c^n(A \cup B) = c^n(A) \cup c^n(B) = \exists y(Q_1(x, y) \vee Q_2(x, y))$. Таким образом, $c^n(A \cup B)$ — впм и, по лемме C18, $A \cup B$ также является впм. $\square$

Операции на ВПМ

Лемма С23

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — вычислимо перечислимые множества. Тогда их объединение $A \cup B$ также вычислимо перечислимо.

Доказательство.

Пусть $A, B \subseteq \omega^n$ — впм; тогда $c^n(A)$, $c^n(B)$ также являются впм и, следовательно, $c^n(A) = \exists y Q_1(x, y)$, $c^n(B) = \exists y Q_2(x, y)$, где Q_1 и Q_2 — вычислимые предикаты, и $c^n(A \cup B) = c^n(A) \cup c^n(B) = \exists y (Q_1(x, y) \vee Q_2(x, y))$. Таким образом, $c^n(A \cup B)$ — впм и, по лемме С18, $A \cup B$ также является впм. □

Лемма С24

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$ — вычислимо перечислимое множество. Тогда его проекция $\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ также вычислимо перечислимо.

Операции на ВПМ

Доказательство.

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$; тогда $c^{n+1}(A)$ также является впм и, следовательно, $c^{n+1}(A) = \exists y Q(x, y)$, где Q — вычислимый предикат, и
$c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) = \exists z Q(c(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), l(z), r(z)))$.
Таким образом, $c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y))$ — впм и, по лемме С18, $\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ также является впм. $\square$

Операции на ВПМ

Доказательство.

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$; тогда $c^{n+1}(A)$ также является впм и, следовательно, $c^{n+1}(A) = \exists y Q(x, y)$, где Q — вычислимый предикат, и
$c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) = \exists z Q(c(c^n(x_1, x_2, \ldots, x_n), l(z), r(z)))$.
Таким образом, $c^n(\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y))$ — впм и, по лемме C18, $\exists y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ также является впм. □

Лемма C25

Пусть $A \subseteq \omega^{n+1}$ — впм. Тогда следующие множества также будут вычислимо перечислимыми:

1. $\exists i \leqslant y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$;
2. $\exists i < y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$;
3. $\forall i \leqslant y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$;
4. $\forall i < y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$.

Операции на ВПМ

Доказательство.

1) Так как
$\exists i \leqslant y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i) = \exists i[(i \leqslant y) \wedge A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)]$,
используя леммы С20, С21, С22, С24, заключаем, что
$\exists i \leqslant y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i)$ является впм.

2) Рассматривается аналогично предыдущему случаю.

3) Пусть $A = \delta\varphi$, где $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ — чвф. Тогда
$\forall i \leqslant y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i) = \delta\varphi_1$, где
$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \prod_{i=0}^{y} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, i).$$

4) Заметим, что $\forall i < y A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i) = \forall i \leqslant y\Big((y > 0) \wedge (\neg(i \geqslant y \dot{-} 1) \vee A(x_1, x_2, \ldots, x_n, i))\Big)$. Остаётся применить леммы С20, С21, С22, С23 и п. 3. $\square$

Операции на ВПМ

Лемма C26

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — впм и пусть ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n — k-местные чвф. Тогда $B = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | A(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k),$ $\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))\}$ также является вычислимо перечислимым множеством.

Операции на ВПМ

Лемма C26

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — впм и пусть ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n — k-местные чвф. Тогда $B = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | A(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))\}$ также является вычислимо перечислимым множеством.

Доказательство.

Пусть $A = \delta\varphi$, где $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — чвф. Тогда $B = \delta\varphi_1$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varphi(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ — чвф. Таким образом, B также является впм. $\square$

Операции на ВПМ

Лемма C26

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — впм и пусть ψ_1, ψ_2, …, ψ_n — k-местные чвф. Тогда $B = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | A(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k),$ $\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))\}$ также является вычислимо перечислимым множеством.

Доказательство.

Пусть $A = \delta\varphi$, где $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — чвф. Тогда $B = \delta\varphi_1$, где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varphi(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots,$ $\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ — чвф. Таким образом, B также является впм. $\square$

Лемма C27

Пусть $A \subseteq \omega^n$ — впм и пусть φ — n-местная чвф. Тогда $\varphi(A)$ также является вычислимо перечислимым множеством.

Операции на ВПМ

Доказательство.

Пусть множество A и функция φ удовлетворяют посылке. Тогда $c^n(A)$ и $\varphi_0(x) = \varphi(c_{n,1}(x), c_{n,2}(x), \ldots, c_{n,n}(x))$ также являются впм и чвф соответственно, что следует из лемм C18 и C14(1). Тогда $c^n(A) = \rho\psi$ для некоторой чвф $\psi(x)$ и $\varphi(A) = \rho\varphi_1$, где $\varphi_1(x) = \varphi_0(\psi(x))$ — чвф: действительно, $\varphi(A) = \varphi_0(c^n(A))$. Таким образом, $\varphi(A)$ — впм. $\square$

Теорема Поста

Теорема C8

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Тогда A вычислимо, если и только если A и $\bar{A} = \omega^n \setminus A$ вычислимо перечислимы.

Теорема Поста

Теорема C8

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Тогда A вычислимо, если и только если A и $\bar{A} = \omega^n \setminus A$ вычислимо перечислимы.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Непосредственно следует из того, что любое вычислимое множество вычислимо перечислимо (см. лемму C20), а также того, что класс вычислимых множеств замкнут относительно операции дополнения (см. предложение C3).

Теорема Поста

Теорема C8

Пусть $A \subseteq \omega^n$. Тогда A вычислимо, если и только если A и $\bar{A} = \omega^n \setminus A$ вычислимо перечислимы.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Непосредственно следует из того, что любое вычислимое множество вычислимо перечислимо (см. лемму C20), а также того, что класс вычислимых множеств замкнут относительно операции дополнения (см. предложение C3).

($\Leftarrow$) Пусть $A \subseteq \omega^n$ и $\overline{A} = \omega^n \setminus A$ — впм; тогда $c^n(A), \overline{c^n(A)} = c^n(\overline{A})$ также будут впм. Следовательно, $c^n(A)$ и $\overline{c^n(A)}$ задаются сильно вычислимыми последовательностями $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и $\{B_n\}_{n\in\omega}$. Определим $f(n) = \mu s[n \in A_s \cup B_s]$; функция f частично вычислима и всюду определена, поскольку $c^n(A) \cup \overline{c^n(A)} = \omega$. Далее, $n \in c^n(A) \Leftrightarrow n \in A_{f(n)}$ и, следовательно, $\chi_{c^n(A)}(n) = \chi_Q(n, f(n))$, где $Q = \{\langle n, s\rangle | n \in A_s\}$. Таким образом, $c^n(A)$ вычислимо, а вместе с ним и A (см. лемму C14(3)). $\square$

Теорема об униформизации

Теорема C9

Пусть $R \subseteq \omega^{n+1}$ — вп предикат. Тогда найдётся n-местная чвф ψ, униформизующая данный предикат, а именно, удовлетворяющая следующим условиям:

- $\delta\psi = \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$;
- $\Gamma_\psi \subseteq R$ (другими символами, $\forall \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \delta\psi . R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)))$.

Теорема об униформизации

Теорема C9

Пусть $R \subseteq \omega^{n+1}$ — вп предикат. Тогда найдётся n-местная чвф ψ, униформизующая данный предикат, а именно, удовлетворяющая следующим условиям:

- $\delta\psi = \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$;
- $\Gamma_\psi \subseteq R$ (другими символами, $\forall \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \delta\psi . R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)))$.

Доказательство.

Пусть $R \subseteq \omega^{n+1}$ — вп предикат; по лемме C18, $c^{n+1}(R) \subseteq \omega$ является впм. Следовательно, $c^{n+1}(R) = \exists y Q(x, y)$ для некоторого вычислимого предиката $Q(x, y)$. Значит, $R = \exists y Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}), y)$. Положим $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l(\mu z . Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z)), r(z)))$. Покажем, что чвф ψ удовлетворяет заключению теоремы.

Теорема об униформизации

Доказательство (продолжение)

$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow \Leftrightarrow \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. ($\Rightarrow$) Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow = t_0$; тогда найдётся z_0 такое, что $\mu z.Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z)), r(z)) = z_0$ и $l(z_0) = t_0$. Следовательно, существует z_0 такое, что $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z_0)), r(z_0))$, откуда заключаем, что $R(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z_0))$. Таким образом, $\exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$.

Теорема об униформизации

Доказательство (продолжение)

$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow \Leftrightarrow \exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. ($\Rightarrow$) Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow = t_0$; тогда найдётся z_0 такое, что $\mu z.Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z)), r(z)) = z_0$ и $l(z_0) = t_0$. Следовательно, существует z_0 такое, что $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z_0)), r(z_0))$, откуда заключаем, что $R(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z_0))$. Таким образом, $\exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$.
($\Leftarrow$) Пусть теперь $\exists y R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$; тогда $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y), t)$ для некоторых y и t. Возьмём $z = c(y, t)$; далее, имеем $Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z)), r(z))$ для некоторого z. Выберем наименьшее $z_0 = z$, для которого выполняется данное отношение. Тогда $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = l(\mu z.Q(c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, l(z)), r(z))) = l(z_0)$. Таким образом, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\downarrow$.

Теорема об униформизации

Доказательство (продолжение)

$\Gamma_\psi \subseteq R$. Пусть кортеж $\langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$ таков, что $\psi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\downarrow$; покажем, что $R(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0)$, где $t_0 = \psi(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Действительно, пусть z_0 таково, что $\mu z.Q(c^{n+1}(k_1, k_2, \ldots, k_n, l(z)), r(z)) = z_0$; тогда $l(z_0) = t_0$ и $Q(c^{n+1}(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0), r(z_0))$. Следовательно, $Q(c^{n+1}(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0), y)$ для некоторого y; таким образом, $R(k_1, k_2, \ldots, k_n, t_0)$. $\square$

Теорема о редукции

Теорема С10

Каковы бы ни были впм A, B, найдутся впм A_0 и B_0, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$;
2. $A_0 \cup B_0 = A \cup B$;
3. $A_0 \cap B_0 = \varnothing$.

Теорема о редукции

Теорема С10

Каковы бы ни были впм A, B, найдутся впм A_0 и B_0, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$;
2. $A_0 \cup B_0 = A \cup B$;
3. $A_0 \cap B_0 = \varnothing$.

Доказательство.

Пусть A, B — впм; положим $R = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ (бинарный вп предикат). По теореме об униформизации (С9), существует чвф ψ такая, что $\delta\psi = \exists y R(x, y) = A \cup B$ и $\rho\psi \subseteq \{0; 1\}$. Положим $A_0 = \psi^{-1}(0)$, $B_0 = \psi^{-1}(1)$; тогда $A_0 \cap B_0 = \psi^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(1) = \varnothing$, $A_0 \cup B_0 = \psi^{-1}(0) \cup \psi^{-1}(1) = \rho\psi = A \cup B$. Далее, $x \in A_0 \Rightarrow R(x, 0) \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B_0 \Rightarrow R(x, 1) \Leftrightarrow x \in B$. $\square$

Теорема о графике

Теорема С11

Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — частичная функция. Тогда ψ — чвф, если и только если
$\Gamma_\psi = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, y\rangle | \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y\}$ — впм.

Теорема о графике

Теорема C11

Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — частичная функция. Тогда ψ — чвф, если и только если
$\Gamma_\psi = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k, y\rangle | \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = y\}$ — впм.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — чвф. Определим чвф $\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightharpoons c^{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k))$; тогда $\rho\psi_2 = c^{k+1}(\Gamma_\psi)$, где $\psi_2(x) = c^{k+1}(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x), \psi(c_{k,1}(x), c_{k,2}(x), \ldots, c_{k,k}(x)))$. Таким образом, $c^{k+1}(\Gamma_\psi)$ — впм, а по лемме C18, Γ_ψ также впм.
($\Rightarrow$) Пусть Γ_ψ — впм; по теореме об униформизации (C9), существует чвф $\psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, для которой выполняются условия $\delta\psi_3 = \exists y \Gamma_\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = \delta\psi$ и $\Gamma_\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k, \psi_3(x_1, x_2, \ldots, x_k))$, т.е. $\Gamma_{\psi_3} \subseteq \Gamma_\psi$. Таким образом, $\psi = \psi_3$ и ψ также является чвф. $\square$

Универсальные предикаты

Определение

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^n)$; предикат $R \subseteq \omega^{n+1}$ называется **универсальным для семейства** $\mathcal{S}$, если $\mathcal{S} = \{\lambda x_1 x_2 \ldots x_n . R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) | e_0 \in \omega\}$. Если $\mathcal{S}$ — семейство всех k-местных вычислимо перечислимых множеств, то предикат R будем называть просто **универсальным**.

Универсальные предикаты

Определение

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^n)$; предикат $R \subseteq \omega^{n+1}$ называется **универсальным для семейства** $\mathcal{S}$, если $\mathcal{S} = \{\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) | e_0 \in \omega\}$. Если $\mathcal{S}$ — семейство всех k-местных вычислимо перечислимых множеств, то предикат R будем называть просто **универсальным**.

Теорема С12

Каково бы ни было $k \geqslant 1$, существует универсальный $k+1$-местный вычислимо перечислимый предикат.

Универсальные предикаты

Определение

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega^n)$; предикат $R \subseteq \omega^{n+1}$ называется **универсальным для семейства** $\mathcal{S}$, если $\mathcal{S} = \{\lambda x_1 x_2 \ldots x_n . R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) | e_0 \in \omega\}$. Если $\mathcal{S}$ — семейство всех k-местных вычислимо перечислимых множеств, то предикат R будем называть просто **универсальным**.

Теорема С12

Каково бы ни было $k \geqslant 1$, существует универсальный $k+1$-местный вычислимо перечислимый предикат.

Доказательство.

Пусть $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — универсальная чвф (см. теорему С5); положим $R = \delta\varphi$ и покажем, что R является универсальным $k+1$-местным вп предикатом.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Действительно, пусть $A \subseteq \omega^k$ — впм; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Так как $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — универсальная чвф, существует e_0 такое, что $\varphi(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Следовательно, $A = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)\}$. $\square$

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Действительно, пусть $A \subseteq \omega^k$ — впм; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Так как $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — универсальная чвф, существует e_0 такое, что $\varphi(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Следовательно, $A = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle | R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)\}$. $\square$

Следствие C3

Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Действительно, пусть $A \subseteq \omega^k$ — впм; тогда $A = \delta\psi$ для некоторой чвф $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Так как $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — универсальная чвф, существует e_0 такое, что $\varphi(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Следовательно, $A = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle | R(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)\}$. $\square$

Следствие С3

Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

Доказательство.

Пусть последовательность W_n вычислимо перечислимых множеств такова, что $R = \{\langle m, n\rangle | m \in W_n\}$ является универсальным бинарным вп предикатом. Покажем, что множество $A = \{n | n \in W_n\}$ удовлетворяет заключению следствия. Действительно, A вычислимо перечислимо.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Допустим, что оно вычислимо; тогда по теореме Поста (С8), $\overline{A} = \{n | n \notin W_n\}$ также вп. Так как R является универсальным, $\overline{A} = W_{e_0}$ для подходящего e_0. Тем самым, $e_0 \in W_{e_0} \Leftrightarrow e_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow e_0 \notin W_{e_0}$, противоречие. $\square$

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Допустим, что оно вычислимо; тогда по теореме Поста (C8), $\overline{A} = \{n | n \notin W_n\}$ также вп. Так как R является универсальным, $\overline{A} = W_{e_0}$ для подходящего e_0. Тем самым, $e_0 \in W_{e_0} \Leftrightarrow e_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow e_0 \notin W_{e_0}$, противоречие. $\square$

Теорема C13 (Мучник)

Существует бинарный вычислимо перечислимый предикат, универсальный для семейства всех вычислимых множеств (как подсемейства семейства всех вычислимо перечислимых множеств).

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Допустим, что оно вычислимо; тогда по теореме Поста (С8), $\overline{A} = \{n | n \notin W_n\}$ также вп. Так как R является универсальным, $\overline{A} = W_{e_0}$ для подходящего e_0. Тем самым, $e_0 \in W_{e_0} \Leftrightarrow e_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow e_0 \notin W_{e_0}$, противоречие. □

Теорема С13 (Мучник)

Существует бинарный вычислимо перечислимый предикат, универсальный для семейства всех вычислимых множеств (как подсемейства семейства всех вычислимо перечислимых множеств).

Доказательство.

Пусть $\varphi(x_0, x_1)$ — чвф, универсальная для семейства всех чвф, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$. По теореме С11 и лемме С18, $c^3(\Gamma_\varphi)$ — впм.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Следовательно, существует сильно вычислимая последовательность A_s вычислимо перечислимых множеств, удовлетворяющая условию 8 теоремы С7, являющаяся сильной аппроксимацией для впм $c^3(\Gamma_\varphi)$. В процессе конструкции будет строиться последовательность B_n множеств, удовлетворяющая следующим условиям:

А) $R = \{\langle n, m\rangle | m \in B_n\}$ вп;

Б) если $\varphi_n(x) \leftrightharpoons \lambda x.\varphi(n,x)$ всюду определена, то $\varphi_n = \chi_{B_n}$;

В) если $\varphi_n(x)$ не является всюду определенной, то B_n конечно.

Из условий (А), (Б), (В) будет следовать, что R — вп предикат, универсальный для семейства всех вм. Действительно, R вп, по (А). Кроме того, для любого $n \in \omega$ множество B_n вычислимо: если φ_n всюду определена, то φ_n вычислима и $\varphi_n = \chi_{B_n}$; если же φ_n не является всюду определенной, то B_n конечно и, в частности, вычислимо. В обратную сторону, пусть C — вычислимое множество; тогда найдётся $n_0 \in \omega$, для которого выполняется $\varphi_{n_0} = \chi_C$; по (Б), $C = B_{n_0}$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Прежде, чем перейти к описанию конструкции, введём вспомогательные функции и множества: $\varphi_{n,s}$ — конечная функция с $\Gamma_{\varphi_{n,s}} = \{\langle m,k\rangle | c^3(n,m,k) \in A_s\}$;
$k(n,s) = \max\{l | \forall i < l (i \in \delta\varphi_{n,s})\}$; $B_n = \bigcup_s B_{n,s}$;
$R_s = \bigcup_n c(\{n\} \times B_{n,s})$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Прежде, чем перейти к описанию конструкции, введём вспомогательные функции и множества: $\varphi_{n,s}$ — конечная функция с $\Gamma_{\varphi_{n,s}} = \{\langle m,k\rangle | c^3(n,m,k) \in A_s\}$;
$k(n,s) = \max\{l | \forall i < l (i \in \delta\varphi_{n,s})\}$; $B_n = \bigcup_s B_{n,s}$;
$R_s = \bigcup_n c(\{n\} \times B_{n,s})$.

КОНСТРУКЦИЯ

Шаг s. Для всех n и s положим $B_{n,s} = \{m < k(n,s) | \varphi_{n,s}(m) = 0\}$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Прежде, чем перейти к описанию конструкции, введём вспомогательные функции и множества: $\varphi_{n,s}$ — конечная функция с $\Gamma_{\varphi_{n,s}} = \{\langle m, k\rangle | c^3(n, m, k) \in A_s\}$;
$k(n, s) = \max\{l | \forall i < l(i \in \delta\varphi_{n,s})\}$; $B_n = \bigcup_s B_{n,s}$;
$R_s = \bigcup_n c(\{n\} \times B_{n,s})$.

КОНСТРУКЦИЯ

Шаг s. Для всех n и s положим $B_{n,s} = \{m < k(n, s) | \varphi_{n,s}(m) = 0\}$.

Докажем теперь справедливость пп. (А), (Б), (В).

А) R_s — сильная аппроксимация для $c(R)$. Действительно, пусть вф f_0 из определения 3(2), а именно, $m \in A_s \Rightarrow m \leqslant f_0(s)$ для всех m и s; тогда $m \in R_s \Rightarrow m \leqslant c(m, \varphi_{l(m)}(r(m))) = c^3(l(m), r(m), \varphi_{l(m)}(r(m))) \in A_s \Rightarrow m \leqslant f_0(s)$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность R_s сильно вычислима.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность R_s сильно вычислима.
$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность R_s сильно вычислима.
$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.
$(R_s \subseteq R_{s+1})$ Пусть $m \in R_s$; тогда $(\imath)$ $c(m, 0) \in A_s$ и, следовательно, $c(m, 0) \in A_{s+1}$; $(\imath\imath)$ кроме того, $\delta\varphi_{n,s} \subseteq \delta\varphi_{n,s+1}$, поэтому $k(n, s) \leqslant k(n, s+1)$ для всех n; тем самым, $r(m) < k(l(m), s) \Rightarrow r(m) < k(l(m), s+1)$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность R_s сильно вычислима.
$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.
$(R_s \subseteq R_{s+1})$ Пусть $m \in R_s$; тогда $(\imath)$ $c(m, 0) \in A_s$ и, следовательно, $c(m, 0) \in A_{s+1}$; $(\imath\imath)$ кроме того, $\delta\varphi_{n,s} \subseteq \delta\varphi_{n,s+1}$, поэтому $k(n, s) \leqslant k(n, s+1)$ для всех n; тем самым, $r(m) < k(l(m), s) \Rightarrow r(m) < k(l(m), s+1)$.
$(R_s \subseteq c(R))$ Пусть $m \in R_s$; тогда $r(m) \in B_{l(m),s}$ и, следовательно, $r(m) \in B_{l(m)}$; таким образом, $\langle l(m), r(m)\rangle \in R$ и $m = c(l(m), r(m)) \in c(R)$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Далее, $m \in R_s \Leftrightarrow [(c^3(l(m), r(m), 0) \in A_s) \wedge (r(m) < k(l(m), s))]$, поэтому $\{\langle m, s\rangle | m \in R_s\}$ вычислимо. Следовательно, последовательность R_s сильно вычислима.

$(R_0 = \varnothing)$ Действительно, $m \in R_0 \Rightarrow c(m, 0) \in A_0 = \varnothing$.

$(R_s \subseteq R_{s+1})$ Пусть $m \in R_s$; тогда **(i)** $c(m, 0) \in A_s$ и, следовательно, $c(m, 0) \in A_{s+1}$; **(ii)** кроме того, $\delta\varphi_{n,s} \subseteq \delta\varphi_{n,s+1}$, поэтому $k(n, s) \leqslant k(n, s+1)$ для всех n; тем самым, $r(m) < k(l(m), s) \Rightarrow r(m) < k(l(m), s+1)$.

$(R_s \subseteq c(R))$ Пусть $m \in R_s$; тогда $r(m) \in B_{l(m),s}$ и, следовательно, $r(m) \in B_{l(m)}$; таким образом, $\langle l(m), r(m)\rangle \in R$ и $m = c(l(m), r(m)) \in c(R)$.

$(c(R) \subseteq R_s)$ Пусть $m \in c(R)$; тогда $r(m) \in B_{l(m)} = \bigcup_s B_{l(m),s}$ и, следовательно, $r(m) \in B_{l(m),s_0}$ для подходящего s_0. Таким образом, $m = c(l(m), r(m)) \in R_{s_0}$.

Универсальные предикаты

Доказательство (продолжение)

Б) Если $\varphi_n(x)$ всюду определена, то $\varphi_n = \chi_{B_n}$. Сначала индукцией по $l \in \omega$ покажем, что **для всех l выполняется $k(n,s) \geqslant l$ для подходящего s**. Если $l = 0$, то положим $s = 0$. Предположим, что $k(n,s) \geqslant l_0$ для подходящего $s = s_0$. Так как $l_0 \in \delta\varphi_n$, найдётся шаг s_1 такой, что $l_0 \in \delta\varphi_{n,s_1}$. Далее, возьмём $s_2 = \max\{s_0, s_1\}$; тогда $k(n,s_2) \geqslant l_0 + 1$. Пусть теперь последовательность s_m такова, что $k(n,s_m) \geqslant m$; тогда если $\varphi_n(m) = 0$, то $\varphi_{n,s_m}(m) = 0$ и $m \in B_{n,s_m} \subseteq B_n$. Если же $\varphi_n(m) = 1$, то $\varphi_{n,s}(m) \neq 0$ ни для какого s и, следовательно, $m \notin B_{n,s}$ для всех s; тем самым, $m \notin B_n$.

В) Если $\varphi_n(x)$ не является всюду определенной, то B_n конечно. Пусть $\varphi_n(x)$ — функция, не являющаяся всюду определённой. Пусть k_0 — наименьшее число, для которого $\varphi_n(k_0)\uparrow$. Тогда $k(n,s) \leqslant k_0$ для всех s и, следовательно, $m \in B_n \Rightarrow m < k_0$. Таким образом, B_n конечно. □

Универсальные предикаты

Следствие С4

Существует вычислимо перечислимое множество, не являющееся вычислимым.

Универсальные предикаты

Следствие С4

Существует вычислимо перечислимое множество, не являющееся вычислимым.

Доказательство.

Воспользуемся теоремой Поста (С8). Пусть R — вп предикат, универсальный для семейства всех вычислимых множеств. Покажем, что $c(R)$ удовлетворяет заключению следствия. По лемме С18, множество $c(R)$ вычислимо перечислимо. Из леммы С15(4) вытекает, что достаточно показать, что R не вычислимо. Действительно, если бы R было вычислимым, то $\chi_R(x_0, x_1)$ была чвф, универсальной для всех чвф, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$, что противоречило бы предложению С12. $\square$

Вычислимые множества

Предложение C14

Для $A \subseteq \omega$ выполняются следующие условия:

1. Множество A вычислимо и бесконечно, если и только если $A = \rho f$ для некоторой строго возрастающей вф f;
2. Множество $A \neq \varnothing$ вычислимо, если и только если $A = \rho f$ для некоторой возрастающей вф f.

Вычислимые множества

Предложение С14

Для $A \subseteq \omega$ выполняются следующие условия:

1. Множество A вычислимо и бесконечно, если и только если $A = \rho f$ для некоторой строго возрастающей вф f;
2. Множество $A \neq \varnothing$ вычислимо, если и только если $A = \rho f$ для некоторой возрастающей вф f.

Доказательство.

1) ($\Rightarrow$) Пусть A бесконечно и вычислимо; покажем, что функция, перечисляющая A в порядке строгого возрастания, вычислима. Действительно, пусть $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots\}$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} f(0) = a_0, \\ f(x+1) = \mu y(y \in A \wedge (y > f(x))); \end{array}\right.$$

и, следовательно, вычислимая функция f перечисляет множество A в порядке строгого возрастания.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

($\Leftarrow$) Воспользуемся теоремой Поста (C8). Так как $A = \rho f$ и f вычислима, множество A вп. Далее, $n \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall y \leqslant n(f(y) \neq n)$, поэтому $\overline{A}$ вп. Таким образом, A вычислимо.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

($\Leftarrow$) Воспользуемся теоремой Поста (С8). Так как $A = \rho f$ и f вычислима, множество A вп. Далее, $n \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall y \leqslant n(f(y) \neq n)$, поэтому $\overline{A}$ вп. Таким образом, A вычислимо.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

($\Leftarrow$) Воспользуемся теоремой Поста (С8). Так как $A = \rho f$ и f вычислима, множество A вп. Далее, $n \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall y \leqslant n (f(y) \neq n)$, поэтому $\overline{A}$ вп. Таким образом, A вычислимо.

2) ($\Rightarrow$) Если A бесконечно, то следует воспользоваться п. 1. Пусть теперь $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно; тогда $f(x) = a_0 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x) + a_1 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-1|) + \ldots + a_{k-1} \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-(k-1)|) + a_k \cdot \mathrm{sg}(\mathrm{s}(x) \dot{-} k)$ вычислима, возрастающая и $\rho f = A$.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

($\Leftarrow$) Воспользуемся теоремой Поста (С8). Так как $A = \rho f$ и f вычислима, множество A вп. Далее, $n \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall y \leqslant n(f(y) \neq n)$, поэтому $\overline{A}$ вп. Таким образом, A вычислимо.

2) ($\Rightarrow$) Если A бесконечно, то следует воспользоваться п. 1. Пусть теперь $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно; тогда $f(x) =$ $a_0 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x) + a_1 \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-1|) + \ldots + a_{k-1} \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x-(k-1)|) + a_k \cdot \mathrm{sg}(\mathrm{s}(x) \dot{-} k)$ вычислима, возрастающая и $\rho f = A$.

($\Leftarrow$) Сначала покажем, что функция, осуществляющая перечисление наименьших номеров в порядке строгого возрастания, вычислима:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(x+1) = \mu y.[(y > g(x)) \wedge (f(y) > f(g(x)))]. \end{array}\right.$$

Если A бесконечно, то $g(x)$ всюду определена и, следовательно, $f_0(x) \leftrightharpoons f(g(x))$ вычислима; к тому же, $f_0(x)$ строго возрастающая и $\rho f_0 = A$, а из п. 1 следует, что A вычислимо.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

Если же $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно, то функция $\chi_A(x) = \mathrm{sg}(|x - a_1| \cdot |x - a_2| \cdot \ldots \cdot |x - a_k|)$ вычислима, а следовательно, A также вычислимо. $\square$

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

Если же $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно, то функция $\chi_A(x) = \mathrm{sg}(|x - a_1| \cdot |x - a_2| \cdot \ldots \cdot |x - a_k|)$ вычислима, а следовательно, A также вычислимо. $\square$

Теорема С14

Пусть A — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существуют непересекающиеся бесконечные вычислимые множества $B_0, B_1 \subseteq A$.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

Если же $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_k\}$ конечно, то функция $\chi_A(x) = \mathrm{sg}(|x - a_1| \cdot |x - a_2| \cdot \ldots \cdot |x - a_k|)$ вычислима, а следовательно, A также вычислимо. $\square$

Теорема C14

Пусть A — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существуют непересекающиеся бесконечные вычислимые множества $B_0, B_1 \subseteq A$.

Доказательство.

Так как A — бесконечное впм, имеем $A = \rho f$ для некоторой инъективной вф f. Определим всполмогательную вф $g(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = 0, \\ g(x+1) = \mu y.[(y > g(x)) \wedge (f(y) > f(g(x)))]. \end{array}\right.$$

Тогда вычислима функция $f_0(x) = f(g(x))$ строго возрастающая.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

Положим $h_0(x) = f_0(2 \cdot x + 1)$ и $h_1(x) = f_0(2 \cdot x)$. Данные функции вычислимы и, к тому же, строго возрастающие, поэтому $B_0 = \rho h_0$ и $B_1 = \rho h_1$ — вычислимые бесконечные множества, по предложению C14(1). Кроме того, $B_0 \cap B_1 = \varnothing$, что следует из свойства инъективности функции $f_0(x)$. Также имеем $B_0 \cup B_1 = \rho h_0 \cup \rho h_1 \subseteq \rho f_0 \subseteq \rho f = A$. $\square$

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

Положим $h_0(x) = f_0(2 \cdot x + 1)$ и $h_1(x) = f_0(2 \cdot x)$. Данные функции вычислимы и, к тому же, строго возрастающие, поэтому $B_0 = \rho h_0$ и $B_1 = \rho h_1$ — вычислимые бесконечные множества, по предложению С14(1). Кроме того, $B_0 \cap B_1 = \varnothing$, что следует из свойства инъективности функции $f_0(x)$. Также имеем $B_0 \cup B_1 = \rho h_0 \cup \rho h_1 \subseteq \rho f_0 \subseteq \rho f = A$. $\square$

Следствие С5

Пусть A — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существует бесконечное вычислимое множество $B \subseteq A$ такое, что $A \setminus B$ бесконечно.

Вычислимые множества

Доказательство (продолжение)

Положим $h_0(x) = f_0(2 \cdot x + 1)$ и $h_1(x) = f_0(2 \cdot x)$. Данные функции вычислимы и, к тому же, строго возрастающие, поэтому $B_0 = \rho h_0$ и $B_1 = \rho h_1$ — вычислимые бесконечные множества, по предложению C14(1). Кроме того, $B_0 \cap B_1 = \varnothing$, что следует из свойства инъективности функции $f_0(x)$. Также имеем $B_0 \cup B_1 = \rho h_0 \cup \rho h_1 \subseteq \rho f_0 \subseteq \rho f = A$. $\square$

Следствие C5

Пусть A — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Тогда существует бесконечное вычислимое множество $B \subseteq A$ такое, что $A \setminus B$ бесконечно.

Доказательство.

Пусть A — бесконечное впм. Возьмём в качестве B множество B_0. Тогда B вычислимо и бесконечно. Кроме того, $A \setminus B \supseteq B_1$, поэтому $A \setminus B$ бесконечно. $\square$

Неотделимая пара

Определение

Непересекающиеся вычислимо перечислимые множества $A \subseteq \omega$ и $B \subseteq \omega$ называются **вычислимо отделимыми**, если существует вычислимое множество $C \subseteq \omega$ такое, что $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. В противном случае, A и B называются **вычислимо неотделимыми**.

Неотделимая пара

Определение

Непересекающиеся вычислимо перечислимые множества $A \subseteq \omega$ и $B \subseteq \omega$ называются **вычислимо отделимыми**, если существует вычислимое множество $C \subseteq \omega$ такое, что $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. В противном случае, A и B называются **вычислимо неотделимыми**.

Теорема C15

Существует вычислимо неотделимая пара вычислимо перечислимых множеств.

Неотделимая пара

Определение

Непересекающиеся вычислимо перечислимые множества $A \subseteq \omega$ и $B \subseteq \omega$ называются **вычислимо отделимыми**, если существует вычислимое множество $C \subseteq \omega$ такое, что $A \subseteq C \subseteq \overline{B}$. В противном случае, A и B называются **вычислимо неотделимыми**.

Теорема С15

Существует вычислимо неотделимая пара вычислимо перечислимых множеств.

Доказательство.

Пусть $\varphi(x, y)$ — чвф, универсальная для семейства всех частично вычислимых функций, принимающих значения $\subseteq \{0; 1\}$. Положим $A_0 = \{e | \varphi(e, e) \downarrow = 1\}$ и $A_1 = \{e | \varphi(e, e) \downarrow = 0\}$ и докажем (методом от противного), что пара A_0 и A_1 вычислима неотделима.

Неотделимая пара

Доказательство (продолжение)

Допустим, что вм C отделяет A_0 от A_1, а именно, $A_0 \subseteq C \subseteq \overline{A_1}$. Тогда χ_C — вф, принимающая значения 0 и 1. Значит, $\chi_C = \lambda x.\varphi(e_0, x)$ для подходящего e_0, причём $\varphi(e_0, e_0)\downarrow$. Если $\varphi(e_0, e_0) = 1$, то $e_0 \in A_0$ и, слеlовательно, $e_0 \in C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 0$; если же $\varphi(e_0, e_0) = 0$, то $e_0 \in A_1$ и, следовательно, $e_0 \notin C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 1$; в любом случае приходим к противоречию. $\square$

Неотделимая пара

Доказательство (продолжение)

Допустим, что вм C отделяет A_0 от A_1, а именно, $A_0 \subseteq C \subseteq \overline{A_1}$. Тогда χ_C — вф, принимающая значения 0 и 1. Значит, $\chi_C = \lambda x.\varphi(e_0, x)$ для подходящего e_0, причём $\varphi(e_0, e_0)\downarrow$. Если $\varphi(e_0, e_0) = 1$, то $e_0 \in A_0$ и, сле|ловательно, $e_0 \in C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 0$; если же $\varphi(e_0, e_0) = 0$, то $e_0 \in A_1$ и, следовательно, $e_0 \notin C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 1$; в любом случае приходим к противоречию. $\square$

Следствие C6

Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

Неотделимая пара

Доказательство (продолжение)

Допустим, что вм C отделяет A_0 от A_1, а именно, $A_0 \subseteq C \subseteq \overline{A_1}$. Тогда χ_C — вф, принимающая значения 0 и 1. Значит, $\chi_C = \lambda x.\varphi(e_0, x)$ для подходящего e_0, причём $\varphi(e_0, e_0)\downarrow$. Если $\varphi(e_0, e_0) = 1$, то $e_0 \in A_0$ и, слеlовательно, $e_0 \in C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 0$; если же $\varphi(e_0, e_0) = 0$, то $e_0 \in A_1$ и, следовательно, $e_0 \notin C$, т.е. $\chi_C(e_0) = \varphi(e_0, e_0) = 1$; в любом случае приходим к противоречию. $\square$

Следствие C6

Существует вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество.

Доказательство.

Пусть A_0 и A_1 — вычислимо неотделимая пара непересекающихся впм. Тогда A_0 вычислимо перечислимо; докажем (методом от противного), что оно не вычислимо. Действительно, если бы оно было вычислимым, пара A_0 отделялась бы от A_1 вычислимым множеством A_0. $\square$

Продолжение

Определение

Пусть $\varphi(x)$ — частичная функция. Всюду определенная функция $f(x)$ называется **продолжением функции** φ, если $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.

Продолжение

Определение

Пусть $\varphi(x)$ — частичная функция. Всюду определенная функция $f(x)$ называется **продолжением функции** φ, если $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.

Теорема С16

Пусть A — впм и пусть A_s — сильная аппроксимация для A. Тогда $\psi(x) = \mu s[x \in A_s]$ имеет вычислимое продолжение, если и только если A — вычислимо.

Продолжение

Определение

Пусть $\varphi(x)$ — частичная функция. Всюду определенная функция $f(x)$ называется **продолжением функции** φ, если $\Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_f$.

Теорема С16

Пусть A — впм и пусть A_s — сильная аппроксимация для A. Тогда $\psi(x) = \mu s[x \in A_s]$ имеет вычислимое продолжение, если и только если A — вычислимо.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Пусть A вычислимо; тогда $f(x) \leftrightharpoons \mu s.[(x \notin A) \wedge (x \in A_s)]$ вычислима и $\Gamma_\psi \subseteq \Gamma_f$.
$(\Rightarrow)$ Пусть f — вычислимое продолжение функции ψ; тогда $x \in A \Leftrightarrow x \in A_{f(x)}$ и, следовательно, A вычислимо. $\square$

Продолжение

Следствие C7

Существует частично вычислимая функция, не имеющая вычислимого продолжения.

Продолжение

Следствие С7

Существует частично вычислимая функция, не имеющая вычислимого продолжения.

Доказательство.

Пусть A — вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество (см., например, следствие С6). Возьмём сильную аппроксимацию A_s для множества A. Тогда частично вычислимая функция $\psi(x) \leftrightharpoons \mu s.[x \in A_s]$ не имеет вычислимого продолжения. □

Спасибо за внимание.