§ 22. Дисперсия случайной величины

- Определение. Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

  $$DX=D[X]=M[(X-M[X])^2]$$

  Замечание. Случайная величина X-M[X] называется отклонением. .

- Теорема. $D[X]=M[X^2]-(M[X])^2$

  Доказательство.

  $DX=M[X^2-2X\cdot M[X]+(M[X])^2]=M[X^2]-2M[X]\cdot M[X]+(M[X])^2=$

  $=M[X^2]-(M[X])^2$

- Определение. Величина $\sigma= (D[X])^{1/2}$ называется средним квадратичным отклонением.

Пример 1. Найти дисперсию X:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

$M[X]=1\cdot 0,3+2\cdot 0,5+5\cdot 0,2=2,3$

$DX=M[(X-MX)^2]$ — 1 способ

$DX=M[X^2]-(M[X])^2$ — 2 способ

а) 1 способ:

$M[(X-MX)^2]=(-1,3)^2\cdot 0,3+(-0,3)^2\cdot 0,5+(2,7)^2\cdot 0,2=2,01$

б) 2 способ:

$M[X^2]=1\cdot 0,3+4\cdot 0,5+25\cdot 0,2=7,3$

$(M[X])^2=(2,3)^2=5,29$

$DX=M[X^2]-(M[X])^2=7,3-5,29=2,01$

§ 23.Свойства дисперсии

1) $D[X] \geq 0$

Доказательство: т.к. дисперсия есть математическое ожидание случайной величины, значения которой неотрицательны, $D[X]=M[(X-M[X])^2]$, то $D[X]$ не может быть меньше 0.

2) $D[C]=0$, C-const

Доказательство: $D[C]=M[(C-MC)^2]=M[0]=0$;

3) $D[CX]=C^2D[X]$

Доказательство: $D[CX]=M[(CX-M[CX])^2]=M[(CX)^2]-(M[CX])^2=C^2D[X]$

4) $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$ (справедливо только для независимых случайных величин).

Доказательство : $D[X+Y]=M[(X+Y)^2]-(M[X+Y])^2=M[X^2+2XY+Y^2]-(MX+MY)^2=$

$=M[X^2]+2MX\cdot MY+M[Y^2]-(MX)^2-2MX\cdot MY-(MY)^2= D[X]+D[Y]$

Замечание:

$D[X-Y]=D[X]+D[Y]$

$D[X-Y]=D[X+(-1)\cdot Y]=DX+D[-Y]=DX+(-1)^2\cdot DY=DX+DY$

Дисперсия случайной величины, распределенной по *равномерному закону*

$$MX = \frac{a+b}{2}$$

$$M[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{b-a} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$DX = M[X^2] - (M[X])^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Дисперсия случайной величины, распределенной по *показательному закону*:

$$DX = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left[\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt - 1\right] = \frac{1}{\lambda^2}\left[t^2(-e^{-t}) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} 2t dt - 1\right] = \frac{1}{\lambda^2}(0 + 2 - 1) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Дисперсия случайной величины, распределенной по *нормальному закону:*

$$DX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{\frac{x-a}{\sigma} = z\right\} = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \begin{cases} U = z \quad U' = 1 \\ V' = ze^{\frac{-z^2}{2}} \quad V = e \end{cases}$$

$$= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2$$

Дисперсия случайной величины, распределенной по *биноминальному закону*:

X-число успехов в серии из n независимых испытаний.

$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

X_i- индикатор

X_i	0	1
P	q	p

$$MX_i = 1\cdot p + 0\cdot q = p$$

$$DX_i = M[X_i^2] - (MX_i)^2 = (0\cdot q + 1\cdot p) - p^2 = p - p^2 = pq$$

$$D[X] = D[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] = npq$$

Для *геометрического* распределения: $DX = \dfrac{q}{p^2}$

Для распределения *Пуассона*: $DX = MX = \lambda$

Для *гипергеометрического* распределения: $DX = \dfrac{n_1+n_2-n}{n_1+n_2-1} n \dfrac{n_1}{n_1+n_2} \dfrac{n_2}{n_1+n_2}$

§ 24. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс

- Определение. *Начальным моментом* порядка k случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^k .

$$\nu_k = M[X^k],\ k = 1, 2, 3 \ldots.$$

$$(\nu_1 = MX,\ \nu_2 = M[X^2],\ DX = \nu_2 - \nu_1^2)$$

- Определение. Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины $(X-MX)^k$

$$\mu_k = M[(X-MX)^k],\quad k = 1, 2, 3 \ldots.$$

$$(\mu_1 = 0,\quad \mu_2 = DX)$$

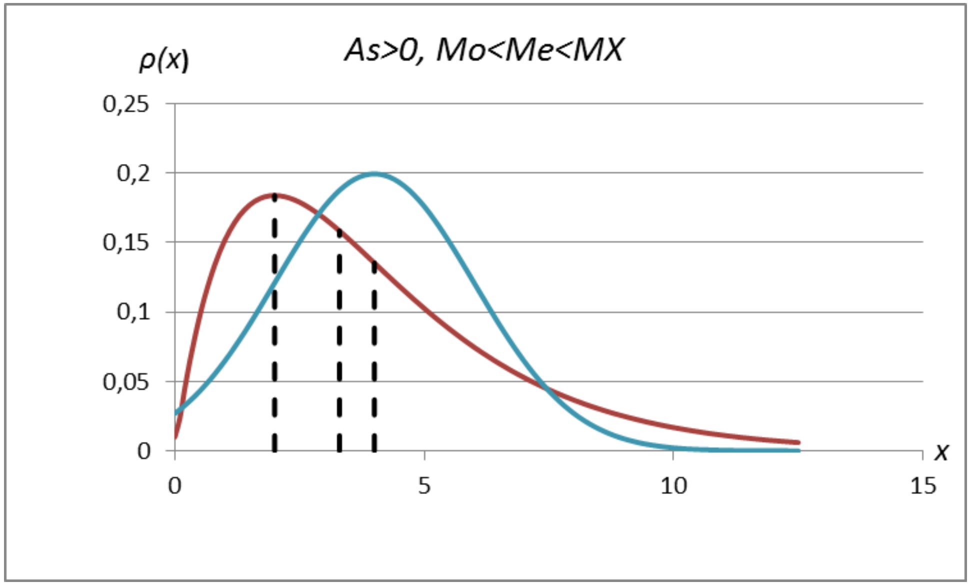
- Определение. Асимметрией теоретического распределения называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднеквадратичного отклонения:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

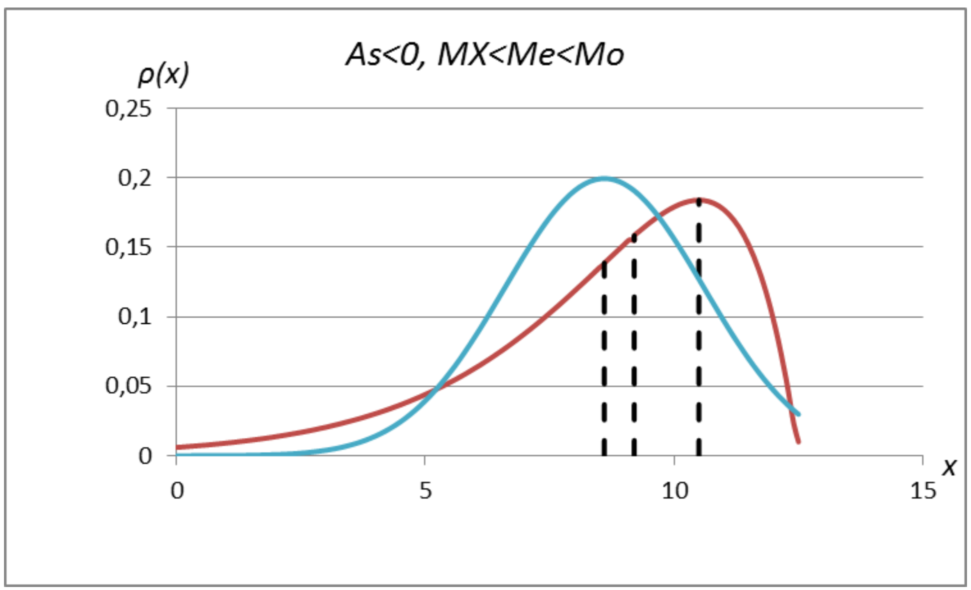
Для нормального распределения $A_s=0$.

$A_s>0$ (правосторонняя асимметрия), если «длинная» часть кривой $\rho(x)$ расположена справа от MX. $A_s<0$ (левосторонняя асимметрия), если «длинная» часть кривой $\rho(x)$ - слева от MX. Вместо MX на практике используют моду распределения.

- Определение. *Мода* (*Mo*) – это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность (для дискретных СВ) или плотность вероятности (для непрерывных СВ).
- Определение. *Медианой непрерывной случайной величины X* ***(Me)*** называется такое ее значение x, для которого $F(x) = \dfrac{1}{2}$.



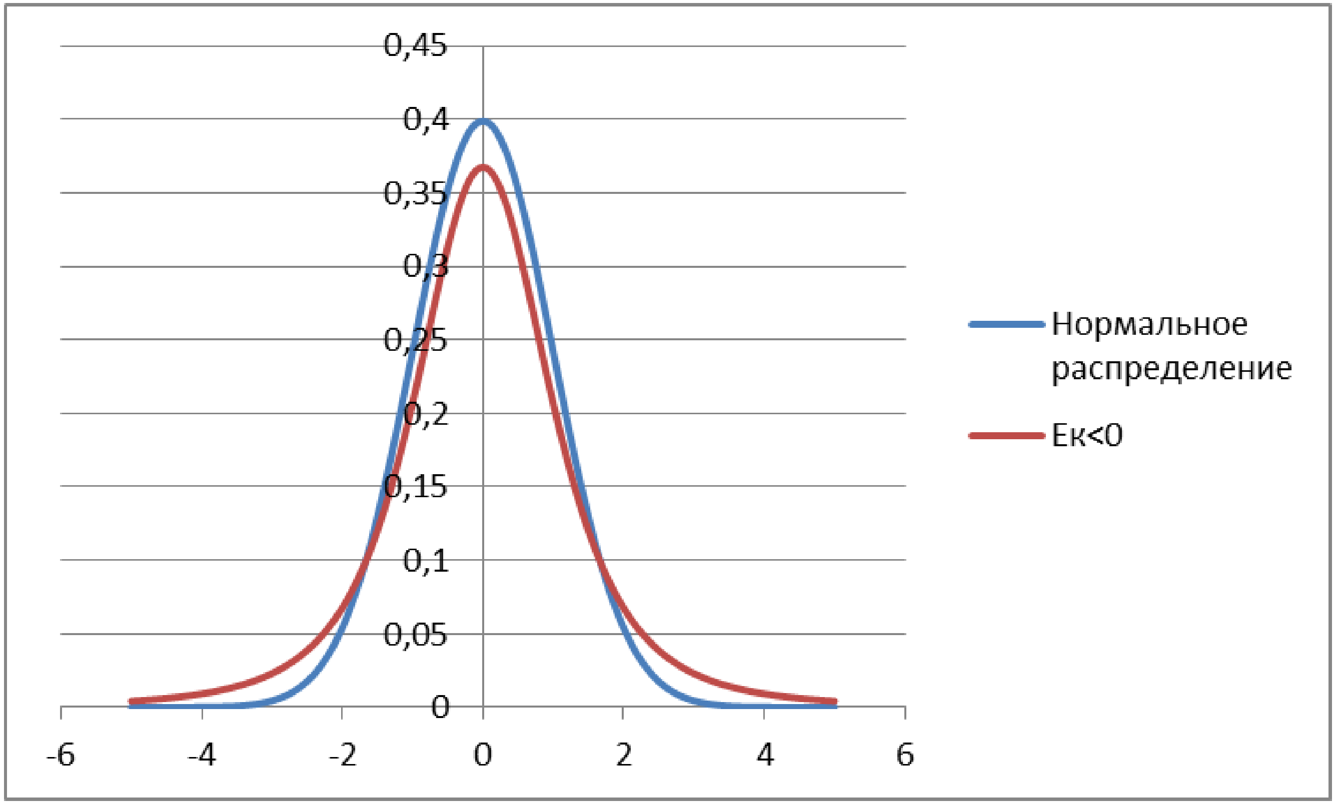
As>0, Mo<Me<MX
ρ(x)
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
x
0
5
10
15



As<0, MX<Me<Mo
ρ(x)
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
x
0
5
10
15

- Определение. Эксцессом называют характеристику $E_к = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$

Для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, $E_к = 0$



Закон больших чисел(§ 25- § 27)

- Математические теоремы, в которых выясняются закономерности поведения суммы большого числа случайных величин, а также условия их (закономерностей) возникновения, получили общее название *закона больших чисел.*

§ 25. Неравенства Маркова и Чебышева

а) *неравенство Маркова*: для любой случайной величины X и $\varepsilon > 0$

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{M[|X|]}{\varepsilon}$$

Замечание 1: в основном неравенство Маркова формулируют для неотрицательных случайных величин в виде $P(X \geq \varepsilon) \leq \dfrac{M[X]}{\varepsilon}$

Замечание 2: неравенство Маркова иногда называют 1-ым неравенством Чебышева.

Следствия:

1. $P(|X| \geq \varepsilon) = P(X^2 \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{M[X^2]}{\varepsilon^2} = \dfrac{\nu^2}{\varepsilon^2}$

2. $P(X < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{M[X]}{\varepsilon}$

б) *неравенство Чебышева*: для любой случайной величины X и $\varepsilon > 0$

$$P(|X-a| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$, где $a = M[X]$

Доказательство:

Пусть X – непрерывная случайная величина

$$P(|X-a| \geq \varepsilon) = \int\limits_{|x-a|\geq\varepsilon} \rho_x(x)dx$$

$$P(|X-a| \geq \varepsilon) = \left\{ \begin{matrix} |x-a| \geq \varepsilon \\ \left[\begin{matrix} x \leq a-\varepsilon \\ x \geq a+\varepsilon \end{matrix} \right. \end{matrix} \right\} \leq \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}\rho(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}\rho(x) \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}\rho(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\rho(x)dx = \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

Следствие: $P(|X-a| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D[X]}{\varepsilon^2}$

Замечание:

Доказательство неравенств для дискретных случайных величин проводится аналогично.

Пример 1. Наблюдениями установлено, что средняя оценка студентов на контрольной работе по математике – 35 баллов.

а) оценить вероятность того, что наугад выбранный студент напишет контрольную на «отлично».

$$P(X \geq 45) \leq \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

б) оценить вероятность того, что наугад выбранный студент не напишет контрольную на положительную оценку.

$$P(X < 25) \geq 1 - \frac{35}{25}$$

Пример 2. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время Т равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время Т окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

$M[X]=10*0,05=0,5 \quad D[X]=10*0,05*0,95=0,475$

а) $P(|X-0,5|<2)\geq 1-\frac{0,475}{4}=0,88$

Точное решение (по формуле Бернулли) $P(-1,5<X<2,5)=P(0\leq X\leq 2)=0,988$

б) $P(|X-0,5|\geq 2)\leq \frac{0,475}{4}=0,12$

Точное решение $P(|X-0,5|\geq 2)=1-0,988=0,012$

§ 26. Теорема Чебышева (ЗБЧ в форме Чебышева)

Теорема.

Пусть

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – попарно-независимые случайные величины с какими угодно распределениями.
- $M[X_k]=a_k$, $D[X_k]=\sigma_k^2$, причем $D[X_k]\le H$ $k=1, 2 \ldots n$
- $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \overline{a}) > \varepsilon) = 0 \quad \text{, где} \quad \overline{a} = M[\overline{X_n}]$$

Доказательство.

$$M[\overline{X_n}] = M[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)] = \frac{1}{n}M[X_1 + X_2 + ... + X_n] = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

$$D[\overline{X_n}] = D[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)] = \frac{1}{n^2}D[X_1 + X_2 + ... + X_n] = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2)$$

Неравенство Чебышева для случайной величины $\overline{X_n}$ имеет вид

$$P(|\overline{X_n} - \bar{a}| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[\overline{X_n}]}{\varepsilon^2}$$

по условию $D[X_k] \leq H \Rightarrow \quad P(|\overline{X_n} - \bar{a}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n^2}\frac{nH}{\varepsilon^2} = \frac{H}{n\varepsilon^2} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \bar{a}| \geq \varepsilon) = 0$$

Пример 1. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднеквадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

$$P(|\overline{X_n} - \bar{a}| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{H}{n\varepsilon^2}$$

$$P(|\overline{X_n} - \bar{a}| < 0{,}5) \geq 1 - \frac{25}{1000 * 0{,}25} = 0{,}9$$

Следствия:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \bar{a}| < \varepsilon) = 1$

2. Закон больших чисел в форме Бернулли

(m_n – число успехов в серии из n независимых испытаний, p-вероятность успеха в каждом отдельном испытании)

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{m_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = 0$$

т.к. $D[X_k] = npq \quad \rightarrow \quad P(|\frac{m_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$

3. Закон больших чисел в форме Пуассона

(m_n – число успехов в серии из n независимых испытаний, p_i-вероятность успеха в i-ом отдельном испытании)

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{m_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i| \geq \varepsilon) = 0$$

(при доказательстве используется неравенство $P(|\frac{m_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$)

Пример 2. Вероятность того, что изделие является качественным, равна 0,9. Сколько следует проверить изделий, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения доли качественных изделий от 0,9 не превысит 0,01?

$$P(|\frac{m_n}{n} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$P(|\frac{m_n}{n} - 0{,}9| < 0{,}01) \geq 1 - \frac{0{,}9 * 0{,}1}{n * 0{,}0001} = 1 - \frac{900}{n} \geq 0{,}95$$

$$n \geq 18000$$

§ 27. Понятие о центральной предельной теореме (ЦПТ)

ЦПТ Ляпунова устанавливает общие достаточные условия, при которых суммы независимых случайных величин имеют асимптотически нормальное распределение.

Теорема. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots X_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то при $n \to \infty$ равномерно по всей числовой оси $x \in (-\infty;+\infty)$

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - an}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

где $a = M[X_n]$, $\sigma = \sqrt{D[X_n]}$

Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному. Примером такой случайной величины может служить случайная ошибка прямого измерения.