§6. Аксиоматическое определение вероятности события.

- Определение. Пусть Ω - пространство элементарных событий, *и*-алгебра событий, А - событие, принадлежащее алгебре событий. Вероятностью Р(А) события А называется числовая функция, определенная для любого А из *и* и удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам):

✓ 1) Р(А) всегда неотрицательна ($P(A) \geq 0$)

✓ 2)$P(\Omega) = 1$

✓ 3)$P(\Sigma A_к) = \Sigma P(A_к)$ - для несовместных событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ ($A_i A_j = \varnothing$)

Свойства вероятности

1. Вероятность противоположного события:

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

2. Формула сложения вероятностей (вероятность суммы двух <u>совместных</u> событий):

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

3. Монотонность вероятности:

Пусть событие A влечет за собой наступление B , тогда

$$P(B)\geq P(A)$$

- Определение. Тройка (Ω, u, p) образует вероятностное пространство.

§7. Условные вероятности

- Определение. Условной вероятностью $P(B/A)=P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже произошло.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара, из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность извлечь черный шар при втором испытании, если при первом испытании был извлечен белый шар.

$P(B/A)=P(AB)/P(A)$ – формула для вычисления условной вероятности.

§8. Вероятность произведения событий

- Вероятность произведения событий A и B вычисляется по формуле

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B),$$

которую называют формулой умножения вероятностей.

Если число рассматриваемых событий больше двух, то вероятность произведения событий следует вычислять, последовательно применяя формулу умножения вероятностей. Например, для трех событий

$$P\,(ABC)=P(AB)P(C/AB)=P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

- Определение. События A и B называются независимыми, если $P(AB)=P(A)P(B)$. Для независимых событий $P(B/A)=P(B)$.

Замечание. Независимые события всегда совместны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

- Определение. События $A_1, A_2, \ldots A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого $1 \le k \le n$ и любого набора различных между собой индексов $i_1, i_2 \ldots i_k$ имеет место равенство:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

Замечание. Если события независимы в совокупности, то они попарно независимы, т.е. любые два события независимы. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из попарной независимости не вытекает независимость в совокупности.

Пример. Производится бросание двух игральных костей.

A = {на первой кости выпало четное число очков}

B= {на второй кости выпало нечетное число очков}

C = {сумма очков четна}

Являются ли события попарно независимыми и независимыми в совокупности?

Решение.

$P(ABC)=0$; $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$; $P(AC)=P(AB)=P(CB)=1/4$

Вывод.

События попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

§8. Формула полной вероятности

- Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

✓ события $H_1, H_2, \ldots . H_n$ – попарно несовместные события, т.е. $H_i\, H_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$;

✓ события обладают конечными вероятностями $P(H_i) > 0$;

✓ событие A наступает только вследствие наступления одного из событий H_i, т.е. $A \in H_1 + H_2 + \ldots . + H_n$.

Тогда вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)P(H_n)$$

(формула полной вероятности)

Замечания.

1. Если события $H_1, H_2, \ldots. H_n$ – попарно несовместные события и $H_1+H_2+\ldots+H_n = \Omega$, то множество событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется полной группой событий.

2. Часто события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют гипотезами.

3. Формула полной вероятности работает в том случае, если множество гипотез H_i счетно.

Пример.

На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит – 25%, вторая – 35%, третья – 40% всей продукции. Брак в продукции составляет 5%, 4% и 2% соответственно. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным? (0,0345)

§9. Формула Байеса

Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_i)$, а в результате опыта появилось событие А, то с учетом этого события "новые", т.е. условные вероятности гипотез вычисляются по формуле Байеса:

$$P(H_k/A) = P(H_k)P(A/H_k)\ /P(A),\ \text{где}$$

$P(H_k)$ - априорная вероятность гипотезы H_k;

$P(H_k/A)$ - апостериорная вероятность гипотезы H_k ;

$P(A/H_k)$ - вероятность наступления события А при истинности гипотезы H_k;

$P(A)$ - полная вероятность наступления события А.

Формула Байеса позволяет «переставить причину и следствие»: по известному факту наступления события вычислить вероятность того, что оно было вызвано данной причиной.

Пример (см. пред. параграф).

На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит – 25%, вторая – 35%, третья – 40% всей продукции. Брак в продукции составляет 5%, 4% и 2% соответственно. Случайно выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он изготовлен первой машиной? (≈0,36)

§ 10. Последовательность независимых испытаний.

Схема Бернулли.

Схема Бернулли

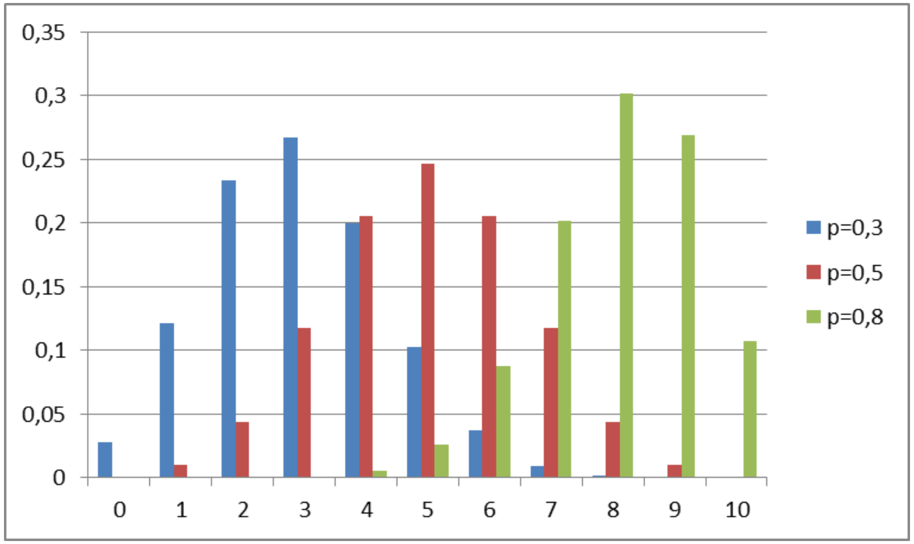
Пусть проведено n независимых испытаний, каждое из которых заканчивается либо «успехом» с вероятностью *p*, либо «неудачей» с вероятностью *q=1-p*. Тогда вероятность появления *m* «успехов» вычисляется по формуле Бернулли

$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

Вероятность появления $m_1 \le m \le m_2$ «успехов» считается по формуле Бернулли для отрезка

$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

Зависимость вероятности $P_n(m)$ от числа «успехов» m; n=10.



Наиболее вероятное число появления «успехов» $m^* = np$

Пример1. Монету бросают 4 раза. Найти вероятность того, что орел выпадет 2 раза. (3/8)

Пример 2. Монета бросается 5 раз. Найти вероятность того, что орел выпадет менее 2 раз. (3/16)

§ 11. Предельная теорема Пуассона

- Теорема. Пусть число испытаний достаточно велико ($n \to \infty$), а вероятность появления интересующего нас события в каждом испытании достаточно мала ($p \to 0$), тогда

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np \in (0; \infty), \ m = 0, 1, 2 \ldots n$$

Зам.1: на практике формулу Пуассона используют обычно когда $n > 100$, а $npq \le 9$.

Зам. 2: поскольку $p \to 0$, то теорему называют законом редких явлений.

Пример. На факультете насчитывается 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для 3-х студентов.

($\approx 0{,}109$; $\lambda \approx 1{,}37$)

§ 12. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

- Теорема. Пусть число испытаний достаточно велико (n→∞), а вероятность появления интересующего нас события в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, тогда

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$, где $$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Замечание: на практике формула Муавра-Лапласа когда $n>100$, а $npq>9$

Пример. Найти вероятность того, что событие А наступит 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2. (≈0,04986)

§ 13. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

- Теорема. Пусть число испытаний достаточно велико ($n \to \infty$), а вероятность появления, интересующего нас события, в каждом отдельном испытании постоянна и отлична от 0 и 1, тогда

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a)$$

$$a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \qquad b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$ - функция Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$ - нормированная функция Лапласа

Пример. Найти вероятность того, что при 100 подбрасываниях монеты, число выпадений герба будет в пределах от 40 до 60. (≈0,9544)