§ 17. Непрерывные случайные величины (НСВ)

- Определение. Непрерывной случайной величиной X называется такая случайная величина, которая может принимать любые числовые значения в заданном интервале и для которой существует предел:

$$\rho_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x},$$

называемый плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X.

Свойства плотности распределения вероятностей.

a) $\rho_X(x) \geq 0$

b) $\rho_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$, $F_X(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_X(t)dt$

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x)dx = 1$ - условие нормировки

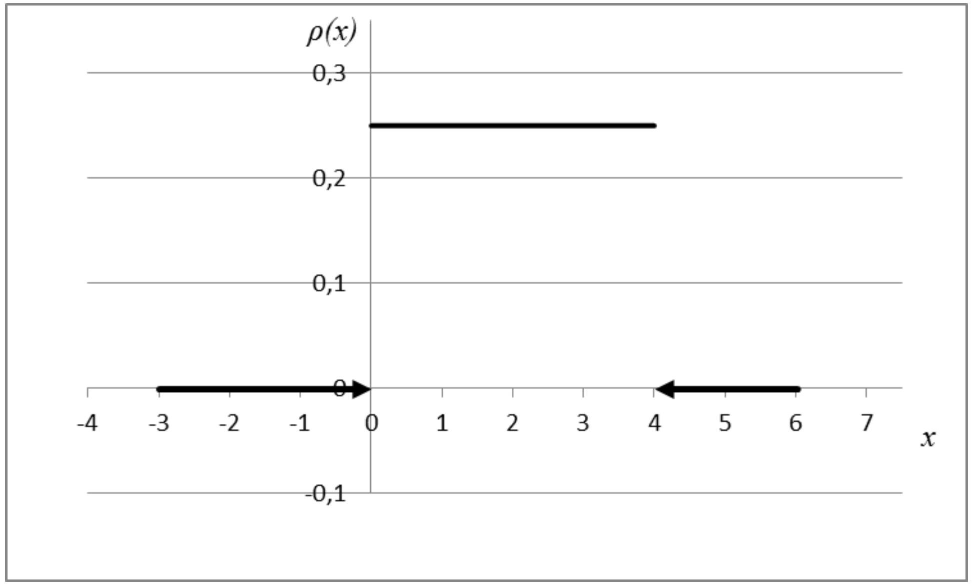
d) $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho_X(x)dx$

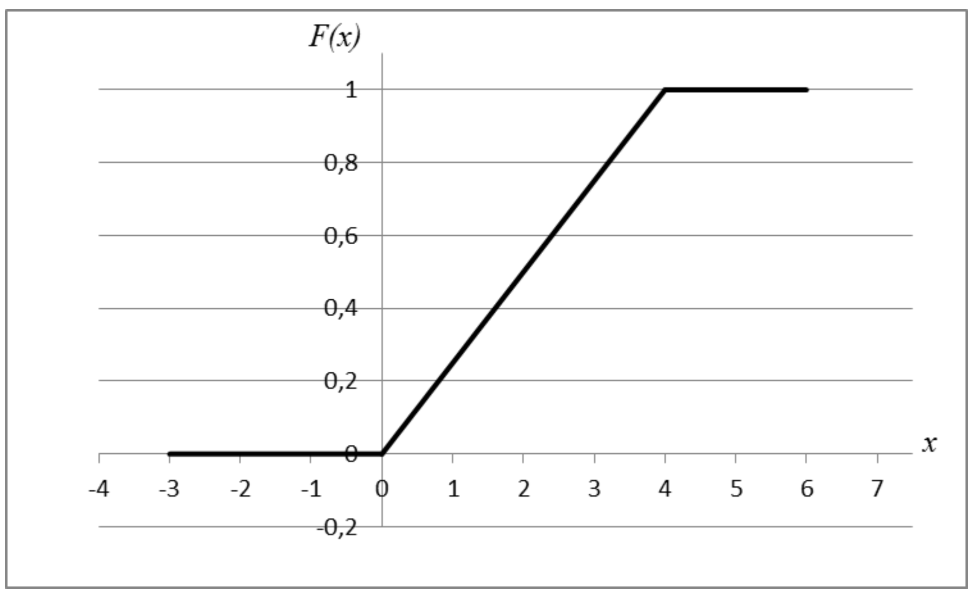
- Определение. Случайная величина X называется равномерно распределенной на отрезке [*a; b*] (имеющей *равномерное распределение с параметрами a,b*), если её плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & при\, x \in [a;b] \\ 0, & при\, x \notin [a;b] \end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$


ρ(x)
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

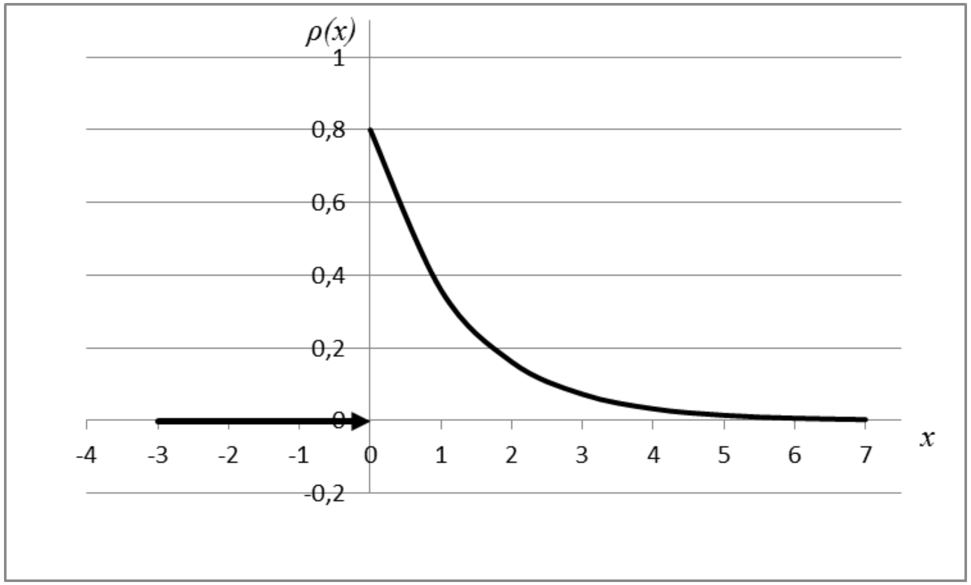

F(x)
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

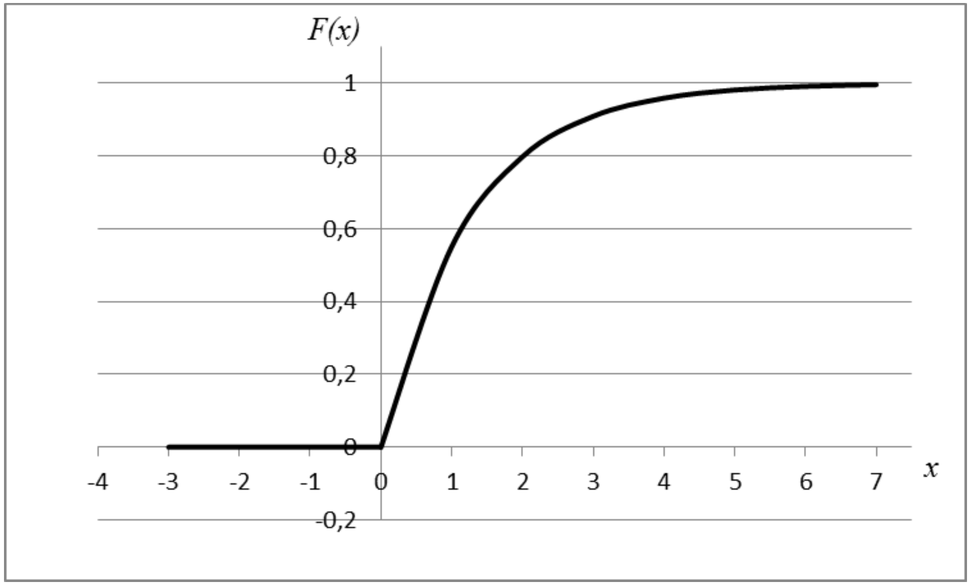
- Определение. Случайная величина X называется распределенной по показательному (экспоненциальному) закону с параметром $\lambda > 0$ (имеющей *показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$), если её плотность распределения вероятности имеет вид:

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Графики $\rho_X(x)$ *и* $F_X(x)$; $\lambda = 0{,}8$





- Определение. Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону с параметрами a,σ (имеющей *нормальное распределение с параметрами* a,σ), если её плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$\rho_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad X\to N(a;\sigma)$$

Если $a=0,\sigma=1$, т.е. X→ $N(0;1)$, то говорят, что НСВ X имеет стандартное нормальное распределение.

Функция распределения

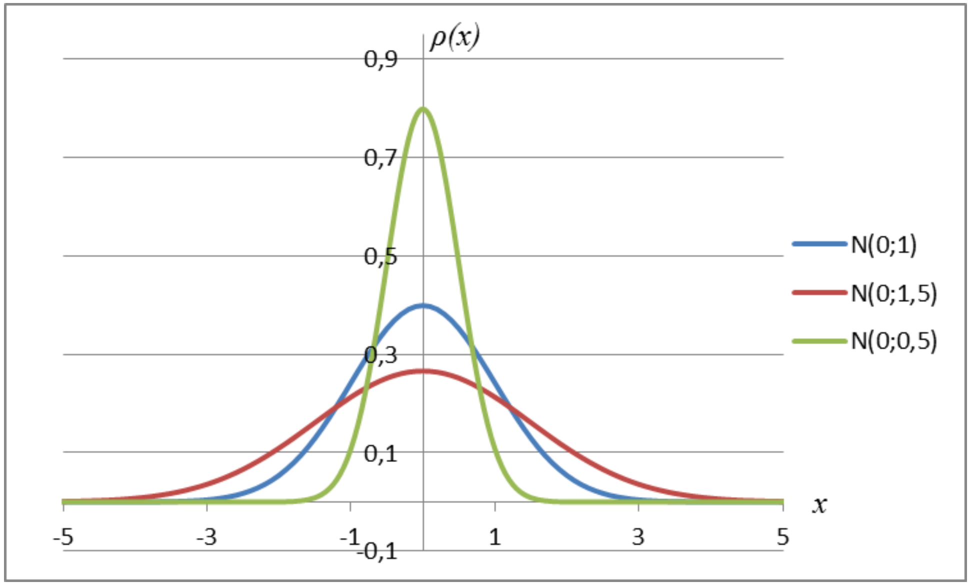
$$F(x)=\Phi(\frac{x-a}{\sigma})=\frac{1}{2}+\Phi_0(\frac{x-a}{\sigma})$$

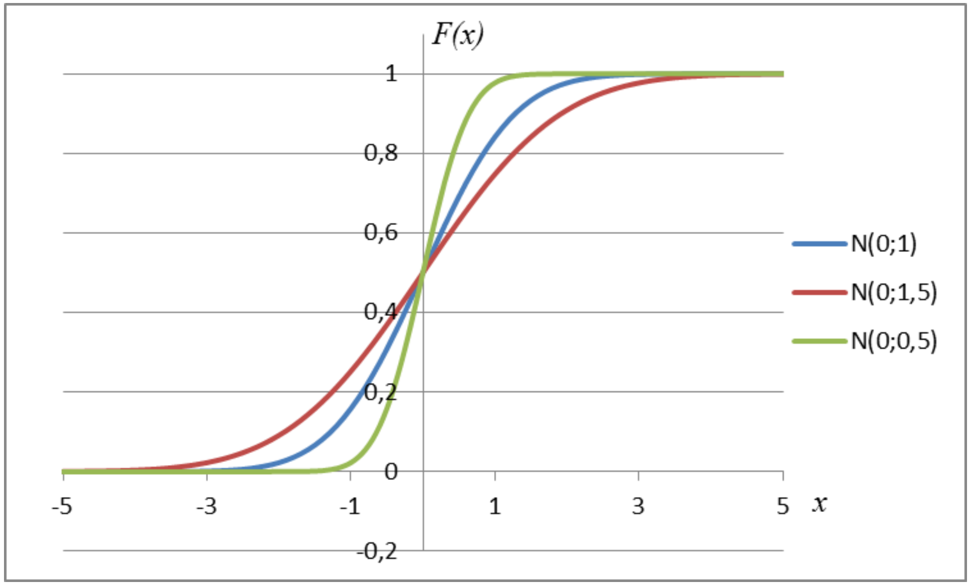
Вероятность попадания значений X в заданный интервал (отрезок, промежуток)

$$P(\alpha\le x\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\int_\alpha^\beta\rho(x)dx$$

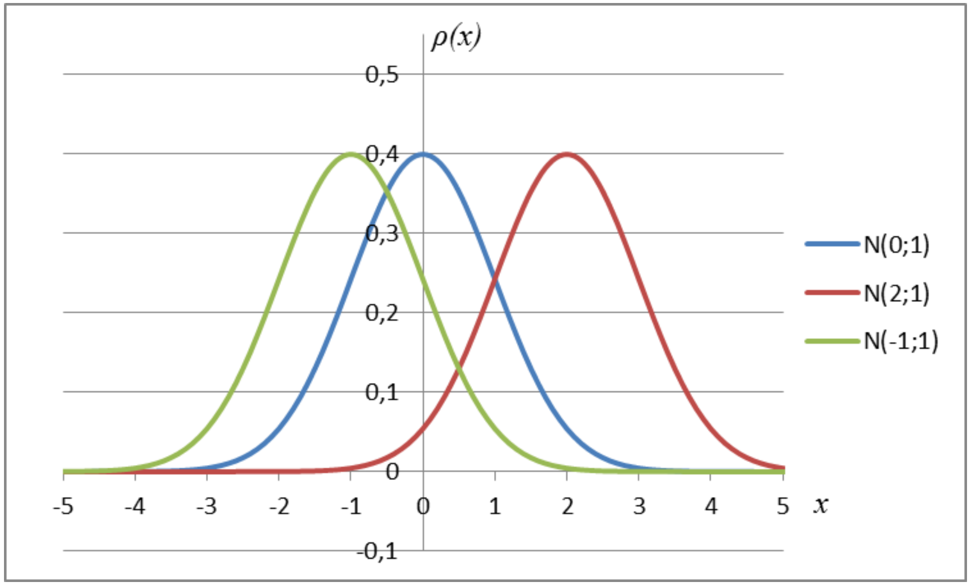
$$P(\alpha\le x\le\beta)=\Phi_0(\frac{\beta-\alpha}{\sigma})-\Phi_0(\frac{\alpha-a}{\sigma})=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})\ -\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$$

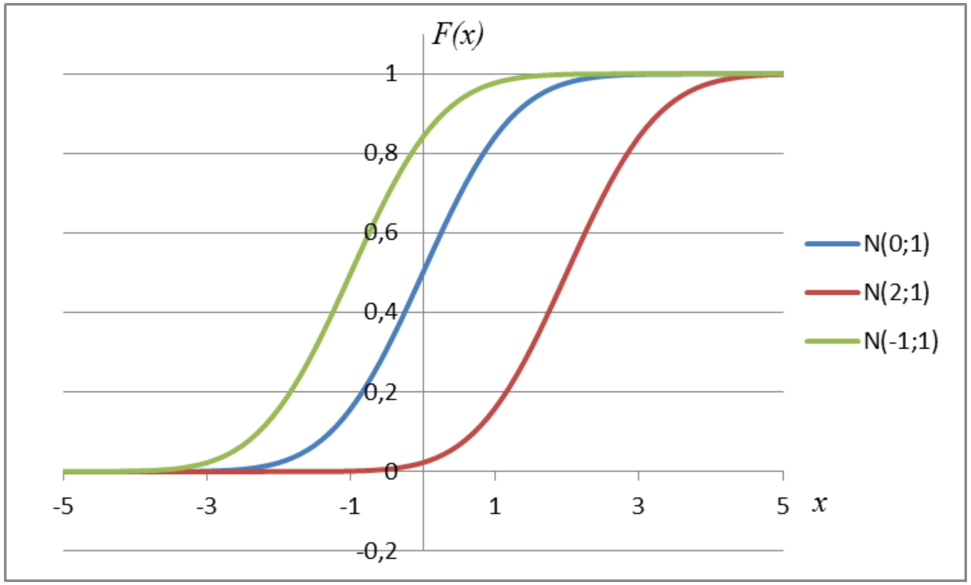
Влияние параметра σ:





Влияние параметра a:





§ 18. Правило трех сигм

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону X→ $N(a;\sigma)$

$$P(\alpha \le x \le \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$$

$$\alpha = a - \delta$$

$$\beta = a + \delta$$

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Если $\delta = 3\sigma$, то

$$P(a - 3\sigma \le x \le a + 3\sigma) = 2\Phi_0(3) \approx 0{,}9973$$

Правило трёх сигм — практически все значения нормально распределённой случайной величины лежат в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

§ 19. Математическое ожидание дискретной случайной величины

- Определение. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е.

$$m_x = M[X] = MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Пример 1. Найти математическое ожидание ДСВ X:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

M[X]=1·0,3+2·0,5+5·0,2=2,3

Математическое ожидание случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром p

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	…	$q^{k-1} \cdot p$	…

$$MX = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty}\left(q^m\right)' = p\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \quad \to \quad MX = \frac{1}{p}$$

Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ.

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$$MX = \sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \{k = m-1\} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

$$MX = \lambda$$

§ 20. Свойства математического ожидания дискретной случайной величины

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине: $M[C]=C.$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания: $M[CX]=CM[X].$

3. Математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$M[XY]=M[X]\cdot M[Y].$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий:

$M[X+Y]=M[X]+M[Y].$

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей биномиальный закон распределения с параметрами n и p.

1) $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

X_i – число успехов в i-ом испытании (индикатор).

X_i	0	1
p_i	q	p

$q = 1 - p$, $\qquad MX_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

2) $MX = M\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right] = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np$, $\qquad MX = np$

Для гипергеометрического распределения: $MX = n\dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$

§ 21. Математическое ожидание непрерывной случайной величины

- Определение. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X*, возможные значения которой принадлежит отрезку $[a,b]$, называется определенный интеграл вида

$$MX = \int_a^b x\rho(x)dx$$

(если $a \to \infty$ *и* $b \to \infty$, то интеграл считается абсолютно сходящимся).

Для математического ожидания НСВ справедливы те же свойства, что и для ДСВ.

а) Математическое ожидание СВ, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$

$$MX=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

б) Математическое ожидание СВ, распределенной по показательному закону с параметром λ

$$MX=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\{y=\lambda x,\quad dy=\lambda dx\}=\int_0^\infty\frac{y}{\lambda}\lambda e^{-y}\frac{1}{\lambda}dy=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ye^{-y}dy=$$

$$\left\{\begin{aligned}&\int_a^в UdV=UV\bigg|_a^в-\int_a^в VdU\\&\int_a^в U'Vdx=UV\bigg|_a^в-\int_a^в V'Udx\end{aligned}\right\}=\left\{\begin{matrix}V=y & V'=1\\ U'=e^{-y} & U=-e^{-y}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\lambda}\left[-ye^{-y}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-y})dy\right]=$$

$$\frac{1}{\lambda}\left[0+\int_0^\infty e^{-y}dy\right]=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-y}dy=\frac{1}{\lambda}(-e^{-y})\bigg|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

в) Математическое ожидание СВ, имеющей нормальное распределение $N(a,\sigma)$

$$M[x]=\int_{-\infty}^\infty x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^\infty(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}a\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^\infty te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy=a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy=a\Phi(\infty)=a$$