Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы

Литература:

1. Гмурман В.Е.   Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2015

2. Боголюбов А.В. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие. – М.: МГТУ «Станкин», 2007

3. Гмурман В.Е.   Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов. - М.: Издательство Юрайт, 2015

4. Владимиров А.Л. «Математическая статистика. Методические указания к выполнению расчётно-графической работы»-М.,: Станкин, 2001

§ 1. Понятие случайного события

- Определение. Событие *A* называется случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий оно может либо произойти, либо не произойти. Осуществление определенной совокупности условий называется испытанием или экспериментом.

- Определение. События называются равновозможными, если есть основания считать, что ни одно из них не является более предпочтительным, чем другое.

- Определение. Случайные события называются несовместными (или взаимоисключающими), если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других.

- Определение. Вся совокупность несовместных исходов экспериментов называется пространством элементарных событий Ω. Исходы ω_i, входящие в эту совокупность, называются элементарными событиями.

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n \}$$

§2. Математическая модель испытания

Аналогия между понятиями теории вероятностей и теории множеств

Пространство элементарных событий ↔ Множество

Элементарное событие ↔ Элемент этого множества

Событие ↔ Подмножество

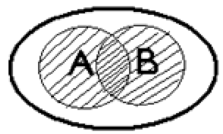
- Определение. Случайным событием называется любое подмножество пространства элементарных исходов.
- Определение. Событие называется невозможным, если оно не может произойти в данном эксперименте.
- Определение. Событие называется достоверным, если в данном эксперименте оно происходит всегда.

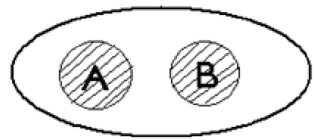
Замечание. Пространство элементарных событий может быть построено не единственным способом, выбор математической модели зависит от условий поставленной задачи.

§3. Операции над событиями. Алгебра случайных событий.

- Событие *C*, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из случайных событий *A* или *B*, называется суммой событий *A* и *B*.

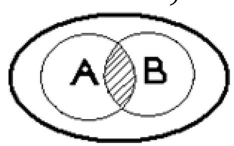
$C = A + B = A \cup B$

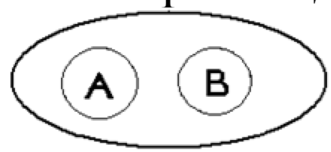




- Событие *C*, заключающееся в том, что произошли и событие *A*, и событие *B* одновременно, называется произведением событий *A* и *B*.

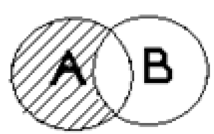
$C = AB = A \cap B$

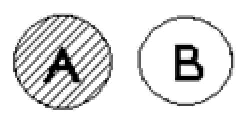




- Событие *C*, заключающееся в том, что *A* произошло, а *B* - нет, называется разностью событий *A* и *B*.

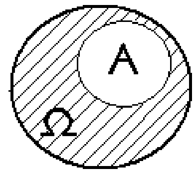
$C = A \setminus B = A - B$





- Событие $\bar{A}$ противоположно событию A, если оно содержит все исходы, не принадлеж

  $\bar{A} = \Omega \setminus A$



- События A и B называются тождественными, если они содержат одни и те же элементарные исходы.

  $A = B$

Говорят, что A влечет за собой B , если при наступлении A произойдет B.

  $A \subset B$

Свойства введенных операций

1. Коммутативность: $A + B = B + A; \quad AB = BA$
2. Ассоциативность : $(A + B) + C = A + (B+C); \quad (AB)C = A(BC)$
3. Дистрибутивность умножения относительно сложения:
   $(A + B)C = AC + BC$

Некоторые полезные соотношения

а) $A + A = A$ $\quad$ $A + \Omega = \Omega$

$AA = A$ $\quad$ $A\Omega = A$

$A\bar{A} = \varnothing$ $\quad$ $A + \bar{A} = \Omega$

б) правила де Моргана: $\overline{A+B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

в) разложение на несовместные события:

$$A + B = A + (B - AB) = AB + \overline{A}B + B\overline{A} = A + B\overline{A}$$

г) $A - B = A\overline{B}$

- Определение. Пусть Ω – пространство элементарных событий,

u – множество всех подмножеств Ω, включая невозможное событие и достоверное событие. Множество *u* называют алгеброй событий, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения.

Замечание: для испытаний с конечным числом исходов n *u* всегда является алгеброй и содержит 2^n элементов.

Вероятность события

- Классическое определение вероятности
- Геометрическая вероятность
- Статистический подход к понятию вероятности
- Субъективная вероятность
- Аксиоматическое определение вероятности события

§4. Классическое определение вероятности

- Определение. Пусть $\Omega = \{\omega_{1,}\ \omega_{2,\dots,}\ \omega_n\}$ – пространство элементарных равновозможных событий, *u*- алгебра событий ($N(u) = 2^n$)

  Тогда:

  а) $P(\omega_i) = 1/n$, $i= 1, 2,\dots, n$

  б) $P(A) = m/n$, где $A = \{\omega_{i1,}\ \omega_{i2,\dots,}\ \omega_{im}\}$

  (вероятность события *A* – есть отношение числа исходов, благоприятствующих *A*, к общему числу исходов n).

Пример 1: подбрасывание игральной кости

Пример 2: вытаскивание карты из колоды

Пример 3: двукратное подбрасывание монеты

§5. Геометрическая вероятность. Статистическая вероятность. Субъективная вероятность.

1^0.Геометрическая вероятность

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят понятие *геометрической вероятности*.

- Определение. Геометрической вероятностью P(A) наступления некоторого события A в испытании называют отношение G_A/G_Ω, где G_Ω – геометрическая мера, выражающая общее число всех равновозможных исходов данного испытания, а G_A – мера, выражающая количество благоприятствующих событию исходов.

$$P(A)= G_A/G_\Omega$$

Пример. Задача о встрече.

2^0. *Относительная частота события и статистическая вероятность*

- Определение. Относительной частотой W(A) события A называют отношение числа испытаний m, в которых данное событие появилось, к общему числу фактически проведённых испытаний n

$$W(A) = m/n$$

Относительная частота рассчитывается исключительно ПОСЛЕ опытов на основе фактически полученных данных.

В том случае, если серии испытаний проводятся в неизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости, то есть колеблется около определённого значения.

Пример.

Количество бросков монеты, n	Число появлений орла, m	Относительная частота, $\omega = \frac{m}{n}$
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за статистическую вероятность события принимают относительную частоту данного события либо близкое число.

3^0. Субъективная вероятность

Субъективная вероятность - численное значение вероятности, полученное на основе заключения эксперта. Субъективная вероятность ассоциируется с определенным типом поведения человека в процессе принятия решений и используется не для вычислений частот, а для предсказания поведения во время принятия решений.

Элементы комбинаторики

- Принцип произведения комбинаций. Если какое-либо действие осуществляется за k последовательных шагов, при этом первый шаг может быть реализован n_1 числом способом, второй шаг n_2 числом способов, k-й шаг — n_k способами, то общее число способов реализации действия равно:

$$N=n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

- Перестановками из n элементов называют всевозможные упорядоченные соединения из данных элементов. Число таких перестановок P_n равно:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

- Размещениями из n элементов по m называются всевозможные упорядоченные соединения (подмножества) m элементов из n данных элементов (не допускается повторение элементов) . Число размещений A_n^m равно:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- Размещениями с повторениями из n элементов по m называются всевозможные упорядоченные соединения (подмножества) m элементов из n данных элементов (допускается повторение элементов). Число размещений с повторениями $\overline{A}_n^m$ равно:

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

- Сочетанием из n элементов по m называется любое неупорядоченное подмножество m элементов из n (не допускается повторение элементов). Число сочетаний C_n^m равно:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Задание 1.

Среди студентов, собравшихся на лекцию, выбирают наудачу одного. Событие A — выбран юноша, B — он не курит, C — он живет в общежитии.

1. Описать событие ABC;

2. При каком условии имеет место тождество $ABC = A$?

3. Когда справедливо соотношение $C \subset B$?

Задание 2.

На курсе изучается 5 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на субботу, если в этот день должны быть две различные пары?