№1

$a_1 = (9, 7, 2, 1)$ $\quad b_1 = (1, 10, 10, 3)$

$a_2 = (6, -6, -7, -7)$ $\quad b_2 = (5, -8, 5, 8)$

$a_3 = (3, -8, -10, -6)$ $\quad b_3 = (-13, 44, 5, -18)$

$a_4 = (-8, -6, -7, -4)$ $\quad b_4 = (7, -46, -20, 7)$

M_a - матрица из векторов a_i, M_b - матрица из векторов b_i, $i \in \overline{1,4}$

$$M_a = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 1 \\ 6 & -6 & -7 & -7 \\ 3 & -8 & -10 & -6 \\ -8 & -6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \quad M_b = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 & 3 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ -13 & 44 & 5 & -18 \\ 7 & -46 & -20 & 7 \end{pmatrix}$$

вычисления производим в базисе e (в котором и заданы все вектора)

$$M \cdot M_a = M_b \Rightarrow M_a^T \cdot M^T = M_b^T \Rightarrow M^T = (M_a^T)^{-1} \cdot M_b^T$$

$$(M^T)^T = \frac{1}{1381} \begin{pmatrix} 3420 & -3658 & 12314 & -9326 \\ 1469 & -2588 & 10722 & -9613 \\ -4015 & 4145 & -17925 & 16525 \\ 3271 & -5365 & 17417 & -12713 \end{pmatrix} = M_e$$

M_e - матрица линейного оператора

Найдём ядро оператора:

$M_e \cdot X = 0$ методом Гаусса

$$M_e \underbrace{\sim}_{\text{приводим к канон. виду}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{554}{389} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{656}{389} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{395}{389} \end{pmatrix} \Rightarrow M_e \sim x_4 \begin{pmatrix} \frac{554}{389} \\ \frac{656}{389} \\ \frac{335}{389} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \frac{554}{389} \\ \frac{656}{389} \\ \frac{395}{389} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}\, M_e = L(u_1) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, M_e) = 1$$

[redacted]

Размерность образа линейного оператора равна числу ненулевых строк в матрице M_e в ступенчатом (канноническом) =

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, M_e) = 3$

проверка $\dim(\mathrm{Im}\, M_e) + \dim(\mathrm{Ker}\, M_e) = \dim(M_e)$

$$3 + 1 = 4$$

Ответ: $M_e = \begin{pmatrix} 3420 & -3658 & 12314 & -9326 \\ 1469 & -2588 & 10722 & -9613 \\ -4015 & 4145 & -17925 & 16525 \\ 3271 & -5365 & 17417 & -12713 \end{pmatrix}$ $\quad \dim(\mathrm{Im}\, M_e) = 3$, $\dim(\mathrm{Ker}\, M_e) = 1$

$\boxed{№2}$

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & 3 & 0 & 0 \\ -174 & -44 & 2 & 1 \\ -878 & -222 & -25 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -16 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ -174 & -44 & 2-\lambda & 1 \\ -878 & -222 & -25 & 12-\lambda \end{vmatrix}$$

приводим к ступенчатому виду $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{222\lambda-1564}{11-\lambda} & -25 & -\lambda+12 \\ 0 & 0 & \frac{25(\lambda-7)^2}{222\lambda-1564} & -\frac{(-\lambda+12)(\lambda-7)^2}{222\lambda-1564} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\lambda-7)^2}{25} \end{vmatrix} =$$

опр. равен произведению на гл. диагонали

$$= (\lambda-7)^4 \Rightarrow \lambda = 7$$

$$A-7E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & -4 & 0 & 0 \\ -174 & -44 & -5 & 1 \\ -878 & -222 & -25 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= -2x_4 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned} \Rightarrow x_4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ФСР = u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$r_0 = Rg(E) = 4$

$r_1 = Rg(A-7E) = 3$

$r_2 = Rg((A-7E)^2) = Rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 0 \\ -8700 & -2200 & 0 & 50 \end{pmatrix} = 2$

$r_3 = Rg((A-7E)^3) = 1$

Найдём кол-во клеток в Жордановой форме

$m_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$

$m_1 = 0$

$m_2 = 2 \quad m_3 = 0 \Rightarrow$ в ЖНФ 2 клетки 2×2

Scanned by TapScanner

Построим ЖНФ:

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{N3}$

Т.к. f - должна быть линейной формой покажем что f - линейна:

1). $f(p+q) = (p+q)(0) + (p+q)(6) = p(0) + q(0) +$
$+ p(6) + q(6) = (f(0) + p(6)) + (q(0) + p(6)) =$
$= f(p) + f(q)$

2). $f(\alpha p) = \alpha p(0) + \alpha(p)(6) = \alpha(p(0) + p(6)) = \alpha f(p)$

Т.к. линейность выполняется f - линейная форма

Найдём координаты в базисах (подставим в f каждый элемент базиса)

а). $[1, x, x^2, x^3]$

а). $f(1) = 2$; $f(x) = 6$; $f(x^2) = 36$; $f(x^3) = 216 \Rightarrow$

получаем координаты $[2, 6, 36, 216]$

б). $[1, x-5, x^2+4x+1, x^3-2x^2-3x+4]$

$f(1) = 2$

$f(x-5) = -5+6-5 = -4$

$f(x^2+4x+1) = 1+36+24+1 = 62$

$f(x^3-2x^2-3x+4) = 4+216-72-18+4 = 134 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ получаем координаты $[2, -4, 62, 134]$

Ответ: а). $[2, 6, 36, 216]$

б). $[2, -4, 62, 134]$

$\boxed{N4}$

$e_1 = (-15, -2, 10)^T$

$e_2 = (-3, -11, -11)^T$

$e_3 = (-8, -11, 12)^T$

построим матрицу Грама: $G = \begin{pmatrix} (e_1 e_1) & (e_1 e_2) & (e_1 e_3) \\ (e_2 e_1) & (e_2 e_2) & (e_2 e_3) \\ (e_3 e_1) & (e_3 e_2) & (e_3 e_3) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 329 & -43 & 262 \\ -43 & 251 & 13 \\ 262 & 13 & 329 \end{pmatrix}$, тогда $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{27470}{2994003} & \frac{5851}{2994003} & -\frac{7369}{998001} \\ \frac{5851}{2994003} & \frac{13189}{2994003} & -\frac{1727}{998001} \\ -\frac{7369}{998001} & -\frac{1727}{998001} & \frac{2990}{332667} \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} -15 & -2 & 10 \\ -3 & -11 & -11 \\ -8 & -11 & 12 \end{pmatrix}$ - матрица из e_1, e_2, e_3

Тогда решив уравнение $M' = G^{-1} \cdot M$, мы получим M' - матрицу из векторов взаимного базиса

$$M' = G^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{146618}{998001} & \frac{10240}{332667} & \frac{43672}{998001} \\ \frac{24520}{998001} & -\frac{685}{332667} & \frac{46892}{998001} \\ -\frac{47332}{332667} & -\frac{1361}{110889} & -\frac{23333}{332667} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ответ: $\begin{cases} e'_1 = \left(\frac{146618}{998001}, \frac{10240}{332667}, \frac{43672}{998001}\right) \\ e'_2 = \left(\frac{24520}{998001}, -\frac{685}{332667}, \frac{46892}{998001}\right) \\ e'_3 = \left(-\frac{47332}{332667}, -\frac{1361}{110889}, -\frac{23333}{332667}\right) \end{cases}$

Scanned by TapScanner

$\boxed{N5}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Выполним ортогонализацию Грама - Шмидта матрицы A

a_1, a_2, a_3 - векторы столбцы матрицы A

b_1, b_2, b_3 - векторы столбцы матрицы B такие что:

$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $(a_2, b_1) = 3$

$(b_1, b_1) = 2$

$c_1 = \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{3}{2}$

$b_2 = a_2 - (c_1 \cdot b_1) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

$(a_3, b_1) = 5$, $(b_1, b_1) = 2$,

$c_1 = \dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{5}{2}$

$(a_3, b_2) = \frac{1}{2}$

$(b_2, b_2) = \frac{1}{2}$ $c_2 = \dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = 1$

$b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$B=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Нормируем матрицу получаем: (делим каждый эл. на норму столбца)

получаем ортогональную матрицу $\Rightarrow$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ - получаем ортогональную матрицу

$\Rightarrow Q^T = Q^{-1} \Rightarrow$ Найдём R, где

$R = Q^{-1}A = Q^T A$

$$Q^T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$R = Q^T \cdot A = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Ответ: $A = QR$, где $Q = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

$\boxed{№6}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 - 9x_4 = 0 \\ 9x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases} \qquad \alpha = (-3, -3, 4, -4)$$

Найдём ФСР данной СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & -9 \\ 9 & -7 & 6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{82}{31} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{104}{31} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{203}{31} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ФСР: $a = (-82, 104, 203, 31)$ $(x_4 = 24)$

Мы знаем, что $\alpha = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$

т.к. $z \in L^{\perp} \Rightarrow$ скалярное произведение базисного вектора на z равно $0 \Rightarrow (a, z) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha, a) = \beta(a, a)$, где $y = \beta a$

$622 = \beta \cdot 50 \Rightarrow \beta = \frac{311}{25} \Rightarrow y = \beta a = \left(-\frac{25502}{25} \; \frac{32344}{25} \; \frac{63133}{25} \; \frac{9641}{25}\right)^T$

$\Rightarrow \rho(\alpha, L) = \|z\|$

$z = \alpha - y = \left(\frac{23452}{25} \; -\frac{29744}{25} \; -\frac{58058}{25} \; -\frac{8866}{25}\right)^T \Rightarrow$

$\Rightarrow \|z\| = \frac{286\sqrt{58749}}{25}$

Ответ: $\rho(\alpha, L) = \frac{286\sqrt{58749}}{25}$

$\cos\widehat{(L, y)} = \frac{59710}{58749}$

$(\alpha, y) = \|\alpha\| \cdot \|y\| \cdot \cos\widehat{(\alpha, y)}$

$\cos\widehat{(\alpha, y)} = \cos\widehat{(L, y)} = \frac{(\alpha, y)}{\|\alpha\| \cdot \|y\|}$

$\|\alpha\| = \sqrt{58749}$

$\|y\| = \frac{311\sqrt{58749}}{25}$

$(\alpha, y) = \frac{3713962}{5} \Rightarrow \cos\widehat{(L, y)} = \frac{59710}{58749}$

Scanned by TapScanner

$\boxed{№7}$

$v_1 = (1, 1, 0, -1, -1)$ $\quad x_1 = (-69, -38, -71, 66, 24)$

$v_2 = (4, -4, 0, -4, 4)$ $\quad x_2 = (15, -21, -67, 32, 85)$

$w_1 = (1, 1, 0, 1, 1)$

$w_2 = (-2, 2, 0, -2, 2)$

$x_{1-2} = (-84, -17, -4, 34, -61)$

Используем формулу расстояния между линейными многообразиями

$$d = \sqrt{\frac{\det(\overline{P}^T \cdot \overline{P})}{\det(P^T P)}}$$, где $P = (v_1 | v_2 | w_1 | w_2)$, а $P_1 = (v_1 | v_2 | w_1 | w_2 | x$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 & -84 \\ 1 & -4 & 1 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & -2 & 34 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & -61 \end{pmatrix}$$, тогда

$$d = \sqrt{\frac{262144}{16384}} = 4$$

Ответ: 4

№8

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1) =$$

$$= -(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Найдём угол поворота:

$\left.\begin{matrix}\cos\varphi=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right| \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}$, теперь найдём каноническую форму

$$Q=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda=1$$

$\lambda=1 \Rightarrow B=A-\lambda E \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ФСР: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow e = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$ – нормированный вектор ФСР Q, при $\lambda=1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $Ae=e$, то ось вращения $=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi=\frac{\pi}{3}$ $\quad$ ось вращения – прямая с напр. вектором $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Scanned by TapScanner

№9

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & -\frac{28}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{28}{9} & \frac{5}{9} & \frac{26}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{26}{9} & \frac{20}{9} \end{pmatrix}$$

Матрицу ~~…~~вая оператора, заданную матрицей A в некотором ортонормированном базисе можно привести ортогональным преобразованием к диагональному виду, если ~~…~~ в характеристическом многочлене $\forall \lambda \in \mathbb{F}$

пусть матрица в базисе a_1, a_2, a_3

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{7}{9}-\lambda & -\frac{28}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{28}{9} & \frac{5}{9}-\lambda & \frac{26}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{26}{9} & \frac{20}{9}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2\lambda^2 + 19\lambda - 20 - \lambda^3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F} \Rightarrow$$

=> составим диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ - диагональный вид A в базисе e_1, e_2, e_3

Тогда найдём матрицу перехода $S_{a \to e} = A^{-1} \cdot A'$

$$S_{a \to e} = \begin{pmatrix} \frac{16}{45} & -\frac{17}{45} & \frac{41}{90} \\ -\frac{17}{45} & \frac{4}{45} & -\frac{7}{90} \\ \frac{41}{90} & -\frac{7}{90} & \frac{91}{180} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{64}{45} & -\frac{17}{45} & \frac{41}{18} \\ \frac{68}{45} & \frac{4}{45} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{82}{45} & -\frac{7}{90} & \frac{91}{36} \end{pmatrix}$$

Ответ: $$A' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ - диагональный вид

$$S_{a \to e} = \begin{pmatrix} -\frac{64}{45} & -\frac{17}{45} & \frac{41}{18} \\ \frac{68}{45} & \frac{4}{45} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{82}{45} & -\frac{7}{90} & \frac{91}{36} \end{pmatrix}$$

№101

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$ m – число строк, n – число столбцов

$A = V\Sigma W^T$ (по т. о сингулярном разложении, т.к. $m<n$, то

W^T – ортогональная матрица $n\times n$ из нормированых векторов

V – ортогональная матрица $m\times m$ из нормированых векторов

Σ – матрица $m\times n$ с ненулевыми эл. $\sigma_{ii}=\sigma_i$, $i\in\overline{1,m}$, стоящими на главной диагонали в порядке невозрастания

$\sigma_i = |\lambda_i|$, где λ – собственное значение $A\cdot A^T$

Найдём с.з.:

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -6 & -6\\ -6 & 10 & -6\\ -6 & -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$\phi_{A^TA}(\lambda)=\begin{vmatrix}10-\lambda & -6 & -6\\ -6 & 10-\lambda & -6\\ -6 & -6 & 18-\lambda\end{vmatrix}=38\lambda^2-352\lambda-\lambda^3 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1=22\\ \lambda_2=16\\ \lambda_3=0\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{22} & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

уже нормированный вектор

$\lambda_1=22$

$$\begin{pmatrix}-12 & -6 & -6\\ -6 & -12 & -6\\ -6 & -6 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow u_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{11}\\ -\frac{\sqrt{11}}{11}\\ \frac{3\sqrt{11}}{11}\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=16$

$$\begin{pmatrix}-6 & -6 & -6\\ -6 & -6 & -6\\ -6 & -6 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow u_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

$\lambda_3=0$

$$\begin{pmatrix}10 & -6 & -6\\ -6 & 10 & -6\\ -6 & -6 & 18\end{pmatrix}\sim x_3\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow u_3=\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{22}}{22}\\ \frac{3\sqrt{22}}{22}\\ \frac{\sqrt{22}}{11}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{22}}{22}\\ -\frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{22}}{22}\\ \frac{3\sqrt{11}}{11} & 0 & \frac{\sqrt{22}}{11}\end{pmatrix}$$

Найдём вектора v_1 и v_2, которые составляют V

это с.з. $A\cdot A^T \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\cdot A^T = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & -3\\ -3 & 19\end{pmatrix}$$

$$\Phi_{A\cdot A^T}(\lambda) = \begin{vmatrix}19-\lambda & -3\\ -3 & 19-\lambda\end{vmatrix} = 352 - 38\lambda + \lambda^2 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1 = 22\\ \lambda_2 = 16\end{matrix}$$

$\lambda_1 = 22$

$$\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 16$

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$$, тогда проверим

$$V\cdot\Sigma\cdot W^T = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \text{верно}$$

мы нашли сингулярное разложение $\Sigma = \begin{pmatrix}\sqrt{22} & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$

Посмотрим, что получится если в Σ заменить все $\sigma_i = 0$, где $i \neq 1$ и $i = \overline{1,m}$

получаем матрицу $\Sigma' = \begin{pmatrix}\sqrt{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

попробуем перемножить матрицы

$$V\cdot\Sigma'\cdot W^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Получилась матрица $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

Ответ: $V = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ $W = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{3\sqrt{22}}{22}\\ -\frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt2}{2} & \frac{3\sqrt{22}}{22}\\ 3\sqrt{11} & 0 & \frac{\sqrt{22}}{11}\end{pmatrix}$ $\Sigma = \begin{pmatrix}\sqrt{22} & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$

$$V\cdot\Sigma W^T = \begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Если заменить все сингулярные значения кроме 1 наибольшего

получится матрица: $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$