№1

$r = a(1+\cos\varphi)$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi \Rightarrow S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{a(1+\cos\varphi)^3}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{a(1+\cos\pi)^3 - a(1+\cos 0)^3}{3} =$$

$$= \frac{a}{3}(0-8) = -\frac{8a}{3}$$

Ответ: $-\frac{8a}{3}$

№2

Найдём неопр. интеграл

$$\int \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx = \int\left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx =$$

$$= -2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$$

Найдём теперь опр. интеграл:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)}\,dx = -2\ln|-1| - 1 + 2\ln|-2| +$$

$$+ 2\ln|-2| - \frac{1}{2} + 2\ln|-2-1| = 4\ln 2 - 2\ln 3 -$$

$$-\frac{1}{2}$$

Ответ: $4\ln 2 - 2\ln 3 - \frac{1}{2}$

N3

$$\int e^{2x}\cdot\cos x\,dx = \left\langle \begin{matrix} u=\cos x & dv = e^{2x} \\ du = -\sin x\,dx & v=\frac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{e^{2x}\cos x}{2} + \int \frac{e^{2x}\sin x}{2}\,dx =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} u=-\sin x & dv = \frac{e^{2x}}{2} \\ du=-\cos x\,dx & v=\frac{e^{2x}}{4} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{e^{2x}\cos x}{2} + \frac{e^{2x}\sin x}{4} - \int \frac{e^{2x}\cos x}{4}\,dx =$$

$$= \frac{e^{2x}\cos x}{2} + \frac{e^{2x}\sin x}{4} + \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos x\,dx =$$

$$= \frac{e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\cos x}{5} + C =$$

$$= \frac{e^{2x}\,(\sin x + 2\cos x)}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2}}{5} - \frac{e^0(\sin 0 + \cos 0)}{5} =$$

$$= \frac{e^{\pi}-2}{5}$$

Ответ: $\frac{e^{\pi}-2}{5}$

№4 Проверим НА сходение

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x}{1-x}\ln(2+x)\,dx$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(2+x)}{x+1}$ – число

$\ln(2+x)\sim x+1 \Rightarrow$ сходятся одинаково

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{1-x}(x+1)\,dx = -\int_{-1}^{1}\frac{x^2+2x+1}{x-1}\,dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1}\left(\frac{4}{x-1}+x+3\right)dx = -\int_{-1}^{1}(x+3)\,dx -$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{4}{x-1}\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} - 3x\Big|_{-1}^{1} - 4\ln|x-1|\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -4\ln 0 - \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{2} - 3 =$$

$$= 4\ln 2 - 4\ln 0 - 6 = +\infty$$, т.к. $\ln 0 \to -\infty$

$\Rightarrow$ интеграл не сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{1-x}\ln(2+x)\,dx$

не сходится

Ответ: не сходится

$\boxed{N5}$

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$$

Не хватило времени, но интеграл сходится