№63.42

а) $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ – имеет канонич. вид $\begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix}$

Базис $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = i \cdot x_2 \Rightarrow (i, 1)^T$

$y_2 = \operatorname{Im} z = (1 \; 0)^T = e_2$

$y_1 = \operatorname{Re} z = (0 \; 1)^T = e_1$

Проверим знак

$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \; 1) = (-1 \; 1) \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $\quad e_1 = (0 \; 1)^T$, $e_2 = (1 \; 0)^T$

б) $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} - \lambda & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5} - \lambda\right)\left(-\frac{3}{5} - \lambda\right) - \frac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow$ в канонич. виде $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Базис:

1). $\lambda = 1$:

$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \sim \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2). $\lambda = -1$

$B = A \lambda E = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \sim \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Ae_1 = \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A e_2 = \frac{1}{5\sqrt5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

e).

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&\sqrt6\\3&1&-\sqrt6\\-\sqrt6&\sqrt6&-2\end{pmatrix}$$ Найдём СЗ.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda&3&\sqrt6\\3&1-\lambda&-\sqrt6\\-\sqrt6&\sqrt6&-2-\lambda\end{vmatrix} = -3x + (1-x)^2(-x-2)+66$$

$\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = -2-2\sqrt3 i$ $\lambda_3 = -2+2\sqrt3 i$ =>

=>

Матрица оператора в канон виде $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2-2\sqrt3 i&0\\0&0&-2+2\sqrt3 i\end{pmatrix}$

Базис:

$\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix}-3&3&\sqrt6\\3&-3&-\sqrt6\\-\sqrt6&\sqrt6&-6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}^T$$

$\lambda_2 = -2-2\sqrt3 i$

$$\begin{pmatrix}3+2\sqrt3 i&3&\sqrt6\\3&3+2\sqrt3 i&-\sqrt6\\-\sqrt6&\sqrt6&2\sqrt3 i\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-\frac{\sqrt2 i}{2}\\0&1&\frac{\sqrt2 i}{2}\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt2 i}{2}\\-\frac{\sqrt2 i}{2}\\1\end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt2 i}{2}\\-\frac{\sqrt2 i}{2}\\1\end{pmatrix}^T$$

$\lambda_3 = -2+2\sqrt3 i$

$$\begin{pmatrix}3-2\sqrt3 i&3&\sqrt6\\3&3-2\sqrt3 i&-\sqrt6\\-\sqrt6&\sqrt6&-2\sqrt3 i\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-\frac{\sqrt2 i}{2}\\0&1&\frac{\sqrt2 i}{2}\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow y_3 = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}i\\ \frac{\sqrt2}{2}i\\1\end{pmatrix}^T = e_3$$

Ответ: $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2-2\sqrt3 i&0\\0&0&-2+2\sqrt3 i\end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}^T$ $e_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt2 i}{2}\\-\frac{\sqrt2 i}{2}\\1\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}i\\ \frac{\sqrt2}{2}i\\1\end{pmatrix}$

Д/З
05.06

№8.24

Q - ортогональная матрица

R - верхнетреугольная матрица

2). $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $A = QR$

Произведём ортогонализацию Грама-Шмидта

a_1, a_2, a_3 - вектори столбцы A

Построим матрицу B со столбцами b_1, b_2, b_3:

$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a_2, b_1) = 5$ $(b_1, b_1) = 3$ $c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_2 = a_2 - (c_1 b_1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$

$(a_3, b_1) = 4$ $(b_1, b_1) = 3$ $c_1 = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{4}{3}$

$(a_3, b_2) = -\frac{56}{3}$ $(b_2, b_2) = \frac{32}{3}$ $c_2 = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{168}{96} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_3 = a_3 - (c_1 b_1 + c_2 b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}$

Нормируем матрицу B (поделим каждый эл-т на норму столбца) $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $(*)$, тогда найдём верхнетреугольную

матрицу $R = Q^{-1}A$

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{3} & \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $(\circ)$

Ответ: $A = QR$

$Q = (*)$ $R = (\circ)$

Scanned by TapScanner

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Q – ортогональная матрица

R – верхнетреугольная матрица

$A = QR$

Произведём ортогонализацию Грама-Шмидта

a_1, a_2, a_3 – вектор столбцы A

Построим матрицу B со столбцами b_1, b_2, b_3:

$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a_2, b_1) = -1$ $(b_1, b_1) = 3$ $c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_2 = a_2 - (c_1 b_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$(a_3, b_1) = -1$ $C_1 = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1}{3}$ $(a_3, b_2) = -\frac{4}{3}$

$(b_2, b_2) = \frac{8}{3}$ $C_2 = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b_3 = a_3 - (c_1 b_1 + c_2 b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$, нормируем B $\Rightarrow$

Q – нормированная B $\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix}$ (*)

Q – ортогональная матрица

Найдём верхнетреугольную матрицу $R = Q^{-1} A = Q^T A$

$Q^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R = Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ (•)

Ответ: $A = QR$

$Q = (*)$

$R = (\bullet)$

$\boxed{№8.241}$

9) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = QR$

Q – ортогональная матрица

R – верхнетреугольная матрица

Произведём ортогонализацию Грама-Шмидта

a_1, a_2, a_3 – вектор столбцы A

Построим матрицу B со столбцами b_1, b_2, b_3:

$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (a_2, b_1) = 1 \quad (b_1, b_1) = 3 \quad c_1 = \dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{1}{3}$

$b_2 = a_2 - c_1 b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\quad (a_3, b_1) = 1 \quad c_1 = \dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{1}{3}$

$(a_3, b_2) = -\dfrac{4}{3} \quad (b_2, b_2) = \dfrac{8}{3}$

$c_2 = \dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow b_3 = a_3 - c_1 b_1 - c_2 b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$, нормируем $B \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} (*)$, теперь найдём $R = Q^{-1}A = Q^T A$

$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R = Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} (\bullet)$

Ответ: $A = QR$

$Q = (*)$

$R = (\bullet)$

Scanned by TapScanner

$\boxed{\text{W8.33}}$

2). $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T$ - матрица Грама системы строк

$A^T \cdot A$ - матрица Грама системы столбцов

Сингулярное разложение: $A = V \Sigma W^T$,

где V, W - ортогональные матрицы

Σ - матрица с сингулярными числами

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 117 & 117 & 45 & -45 \\ 117 & 117 & 45 & -45 \\ 45 & 45 & 117 & -117 \\ -45 & -45 & -117 & 117 \end{pmatrix}$ $A^T A = \begin{pmatrix} 208 & 112 & 8 \\ 112 & 160 & 104 \\ 8 & 104 & 100 \end{pmatrix}$

Найдём с.з AA^T

$$\det(A \cdot A^T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 117-\lambda & 117 & 45 & -45 \\ 117 & 117-\lambda & 45 & -45 \\ 45 & 45 & 117-\lambda & -117 \\ -45 & -45 & -117 & 117-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 468\lambda^3 + 46656\lambda^2$$

$\sigma_1 = \sqrt{324}$ $\sigma_2 = \sqrt{144}$ $\sigma_{3,4} = 0$, тогда получаем матрицу $\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Найдём с.в AA^T

$\lambda = 324$

$$A \cdot A^T - 324E = \begin{pmatrix} -207 & 117 & 45 & -45 \\ 117 & -207 & 45 & -45 \\ 45 & 45 & -207 & -117 \\ -45 & -45 & -117 & -207 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, нормируем $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\lambda = 144$

$$A \cdot A^T - 144E = \begin{pmatrix} -351 & 117 & 45 & -45 \\ 117 & -351 & 45 & -45 \\ 45 & 45 & -351 & -117 \\ -45 & -45 & -117 & -351 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, нормируем $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

продолжение 8.33 а)

$$A\cdot A^T - 0E = \begin{pmatrix} 117 & 117 & 45 & -45 \\ 117 & 117 & 45 & -45 \\ 45 & 45 & 117 & -117 \\ -45 & -45 & -117 & 117 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, нормализуем $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$ $u_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} -\frac12 & \frac12 & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 & \frac12 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 & -\frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac12 & \frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём векторы W используя формулу $w_i = \frac{A^T \cdot u_i}{\sigma_i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} \frac23 & -\frac23 & \frac13 \\ \frac23 & \frac13 & -\frac23 \\ \frac13 & \frac23 & \frac23 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow A$ можно разложить как $A = V \Sigma W^T \Rightarrow$

Ответ:
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac12 & \frac12 & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 & \frac12 & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 & -\frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac12 & \frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac23 & \frac23 & \frac13 \\ -\frac23 & \frac13 & \frac23 \\ \frac13 & -\frac23 & \frac23 \end{pmatrix}$$

---

3). Найти сингулярное разложение A

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

AA^T – матрица Грама системы строк

A^TA – матрица Грама системы столбцов

Сингулярное разложение : $A = V \Sigma W^T$

Σ – матрица с сингулярными числами

V, W – ортогональные матрицы

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 90 & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 90 & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 90 & -90 \\ -72 & -72 & -90 & 90 \end{pmatrix}$$

Найдём с.з.

$$\det(A\cdot A^T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 90-\lambda & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 90-\lambda & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 90-\lambda & -90 \\ -72 & -72 & -90 & 90-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= \lambda^4 - 360\lambda^3 + 11664\lambda^2 \Rightarrow \lambda_1 = 324 \quad \lambda_2 = 36 \quad \lambda_{3,4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_1 = 18 \quad \sigma_2 = 6 \quad \sigma_3 = 0 \quad \sigma_4 = 0 \Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Найдём с.в AA^T

$\lambda = 324$

$$AA^T - 324E = \begin{pmatrix} -234 & 90 & 72 & -72 \\ 90 & -234 & 72 & -72 \\ 72 & -72 & -234 & -90 \\ -72 & -72 & -90 & -234 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ нормируем: } u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$AA^T - 36E = \begin{pmatrix} 54 & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 54 & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 54 & -90 \\ -72 & -72 & -90 & 54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ нормируем: } u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 90 & 90 & 72 & -72 \\ 90 & 90 & 72 & -72 \\ 72 & 72 & 90 & -90 \\ -72 & -72 & -90 & 90 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ нормируем } u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} u_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

, Найдём ~~[illegible]~~ W ~~[illegible]~~ по формуле $w_i = \frac{A^T u_i}{\sigma_i} \Rightarrow$

w_i - столбец W

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

сингулярное разложение $A = V \Sigma W^T$:

Ответ:
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

7). Найти сингулярное разложение

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-1\\4&1&-1\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}$$

$A\cdot A^T$ – матрица Грама системы строк

$A=V\Sigma W^T$ – сингулярное разложение, где V, W – ортогональные матрицы, Σ – матрица с сингулярными числами

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}18&18&0&0\\18&18&0&0\\0&0&18&18\\0&0&18&18\end{pmatrix}$$

Найдём с.з. AA^T

$$\det(A\cdot A^T-\lambda E)=\begin{vmatrix}18-\lambda&18&0&0\\18&18-\lambda&0&0\\0&0&18-\lambda&18\\0&0&18&18-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^4-72\lambda^3+1296\lambda^2 \Rightarrow \lambda_{1,2}=36 \quad \lambda_{3,4}=0 \Rightarrow \sigma_{1,2}=6 \quad \sigma_{3,4}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda=36$

$$AA^T-36\lambda=\begin{pmatrix}-18&18&0&0\\18&-18&0&0\\0&0&-18&18\\0&0&18&-18\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

нормализуем вектори: $u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\\0\end{pmatrix}$ $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$\lambda=0$

$$AA^T=\begin{pmatrix}18&18&0&0\\18&18&0&0\\0&0&18&18\\0&0&18&18\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \; v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

нормализуем вектори: $u_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}$$

, тогда найдём W по формуле $w_i=\frac{A^T u_i}{\sigma_i}$, где w_i – столбец в W

$$W=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\0&\frac{\sqrt5}{3}&-\frac23\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac23\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } A=V\Sigma W^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&0&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac13&-\frac23&\frac23\end{pmatrix}$$