

W1

а). G - группа F - подгруппа



подгруппа F нормальна, если содержит эдро
гомоморфизма $G \rightarrow F$

W2

$SL_n(\mathbb{Z}_5)$ является нормальной
подгруппой в группе $GL_n(\mathbb{Z}_5)$

W3

а). $F = \mathbb{F}_3[x] / \langle x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \rangle$

F - поле, т.к. F - коммутативное кольцо
у каждого элемента которого есть обратный

W5

$$Q(x) = -8x_1^2 + 17x_2^2 + 17x_3^2 - 24x_1x_2 + 24x_1x_3 + 6x_2x_3$$

Нормальная форма:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 12 \\ -12 & -17 & 3 \\ 12 & 3 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & -12 & 12 \\ -12 & -17 & 3 \\ 12 & 3 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -12 & -17 & 3 \\ 12 & 3 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & -14 & 20 \\ 0 & 21 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & 21 & -1 \\ 0 & 0 & 19\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(Q(x)) = 3$$

У8

$$Q(x) = (\lambda + 23)x_1^2 + (\lambda + 23)x_2^2 - 24x_3^2 + 10x_1x_2 + 12x_1x_3 - 40x_2x_3$$

Норм. форма:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} \lambda + 23 & 5 & 6 \\ 5 & \lambda + 23 & -20 \\ 6 & -20 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q(x)) = (\lambda + 23)(\lambda + 23)(-24) - 600 - 600 - 36(\lambda + 23) + 400(\lambda + 23)$$

$$+ 600 = -24\lambda^2 - 1540\lambda - 14101$$

Кв. форма положительная
отрицательная

$$\det(Q(x)) > 0, \text{ — } \text{реш}$$

$$\det(Q(x)) < 0 \Rightarrow \text{реш}$$

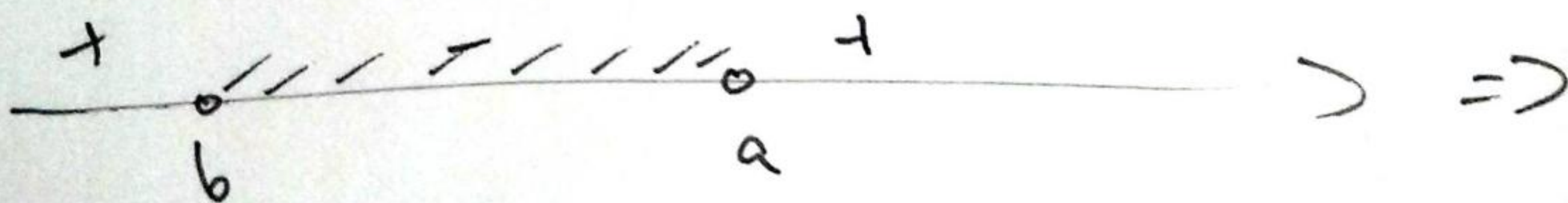
$$\Rightarrow -24\lambda^2 - 1540\lambda - 14101 > 0$$

$$24\lambda^2 + 1540\lambda + 14101 < 0$$

$$\lambda = \frac{-1540 \pm \sqrt{1540^2 + 96 \cdot 14101}}{48}$$

$$a = \frac{-1540 + \sqrt{1540^2 + 96 \cdot 14101}}{48}$$

$$b = \frac{-1540 - \sqrt{1540^2 + 96 \cdot 14101}}{48}$$



\Rightarrow при $\lambda \in (b, a)$ квадратичная форма
имеет отрицательную определенность,
в ост. случаях кв. форма имеет
положительную определенность

W7

Функции $(1, \cos x, \sin(x + \frac{\pi}{4}))$ — линейно
независимы, т.к. с их помощью невозможно
составить базис
Функции $(\cos x, 1, \cos(x + \frac{\pi}{6}))$ — образуют базис
в линейной оболочке $(1, \cos x, \sin(x + \frac{\pi}{4}))$

W8

В зависимости от характеристик
простой, подпространство будет конечномерным, замкнутым,
либо тривиальным.