Д/З 29.05

$\boxed{№1586}$

$$A=\begin{pmatrix}17 & -8 & 4\\ -8 & 17 & -4\\ 4 & -4 & 11\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=0 \Leftrightarrow -(\lambda-27)(\lambda-9)^2=0 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&27\end{pmatrix}$$

$\lambda=27$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-10 & -8 & 4\\ -8 & -10 & -4\\ 4 & -4 & -16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-2x_3\\x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow y_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$Rg=2=3-1$

$\lambda=9$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}8&-8&4\\-8&8&-4\\4&-4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=x_2-\frac{x_3}{2}$$

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2\\ \hline x_1 & -1 & 1\\ x_2 & 0 & 1\\ x_3 & 2 & 0\end{array}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}\\0\\\frac{2}{\sqrt3}\end{pmatrix}\quad e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

Ответ: $e_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{2}{\sqrt5}\\1\end{pmatrix}\quad e_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}\\0\\\frac{2}{\sqrt3}\end{pmatrix}\quad e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&27\end{pmatrix}$

$\boxed{№45.4}$

2) $A=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-1&5&-1\\-1&-1&5\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&-1\\-1&5-\lambda&-1\\-1&-1&5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$\lambda_{1,2}=6$, $\lambda_3=3$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

$\lambda=3$

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow y_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow f_1=\left(\frac{1}{\sqrt3};\frac{1}{\sqrt3};\frac{1}{\sqrt3}\right)$$

$\lambda=6$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

	a_1	a_2
x_1	-1	-1
x_2	1	0
x_3	0	1

$b_1=a_1$

$b_2=a_2-c_1b_1$, $c_1=\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}$

$c_1=\frac{1}{2}$, $(b_1,b_1)=\frac{\sqrt6}{2}$

$b_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\ \dots\end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$

Scanned by TapScanner

$\Rightarrow f_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad f_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Ответ:

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

№45.4

*). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_{2,3,4} = 3$

$\lambda = -2$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, нормируем $f_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$

$\lambda = 3$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad f_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad f_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$

Ответ: $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \quad f_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}^T$

$f_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \quad f_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$

W1543

$A^* - ?$

$a_1=(0,0,1)$ $b_1=(1,2,1)$

$a_2=(0,1,1)$ $b_2=(3,1,2)$

$a_3=(1,1,1)$ $b_3=(7,1,4)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&-1&1\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&1&0&0 \end{array}\right) \qquad AA^T=E \Rightarrow A=(A^{-1})^T$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0&-1&1\\ -1&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}^T \qquad BA^{-1}=\begin{pmatrix} 4&2&1\\ -2&-1&2\\ 2&1&1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 4&2&1\\ -2&-1&2\\ 2&1&1 \end{pmatrix}}}$

W1556

$$\Gamma=\begin{pmatrix} 2&2&1\\ 2&3&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1}=\begin{pmatrix} 2&-1&-1\\ -1&1&0\\ -1&0&2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2&1&1\\ -1&-3&1\\ 1&2&-1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 2&-1&1\\ 1&-3&2\\ 1&1&-1 \end{pmatrix}$$

$$A^*=\Gamma^{-1}A^T\Gamma=\begin{pmatrix} 2&0&1\\ -1&-2&1\\ 0&3&-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2&2&1\\ 2&3&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5&5&3\\ -5&-7&-2\\ 3&6&0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 5&5&3\\ -5&-7&-2\\ 3&6&0 \end{pmatrix}$

W1557

$$U=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix} \quad U^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^*=U^{-1}A^TU=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{W1542}}$

$f_1=(1,2,1)$

$f_2=(1,1,2)$

$f_3=(1,1,0)$

[redacted] $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ 2 & 7 & -3\end{pmatrix}$

$A^*=$ [redacted] $\Gamma^{-1}A^T\Gamma$

$$\Gamma=\begin{pmatrix}6 & 5 & 3\\ 5 & 6 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix}-36 & -37 & -15\\ 30 & 30 & 14\\ 26 & 27 & 9\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-36 & -37 & -15\\ 30 & 30 & 14\\ 26 & 27 & 9\end{pmatrix}$

№63.13

2). $Ae_1 = \frac{1}{13}(5e_1 - 12e_2)$, $Ae_2 = \frac{1}{13}(12e_1 + 5e_2)$

$$\begin{pmatrix} Ae_1^2 & Ae_1Ae_2 \\ Ae_1Ae_2 & Ae_2^2 \end{pmatrix} = E \Rightarrow да$$

Ответ: да

е). $Ae_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$

$Ae_2 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$

$Ae_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$

$f_1 = (1\ 2\ 2)$

$f_1^2 \neq 1 \Rightarrow$ нет

Ответ: нет

4) [redacted] да   3). нет

№63.15

б). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T \sim [redacted] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

$\Rightarrow$ да

Ответ: да

2).

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \Rightarrow да$$

Ответ: да

$\boxed{№63.31}$

[redacted] а). $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}7&4\\-8&-1\end{bmatrix}$

$\Gamma=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

[redacted] $\Gamma^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&4\\-8&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&5\\-23&-6\end{pmatrix}$

$\Gamma^{-1}A\Gamma=\begin{pmatrix}15&5\\23&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35&20\\-52&-29\end{pmatrix}\neq E \Rightarrow$ нет

Ответ: нет

б). $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\2&4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2&-5\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-5&4\end{pmatrix}\neq E \Rightarrow$ нет

Ответ: нет