

ИДЗ-2 ТВиМС

Мосолков Евгений

Вариант N

Задача 3

Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X , распределенную равномерно в интервале $(0, \pi)$, чтобы получить случайную величину Y , распределенную по закону Коши $f(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$?

Решение:

Так как случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, \pi)$, то ее плотность выглядит следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } x > \pi \\ \frac{1}{\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Пусть $y = \phi(x)$, а $\psi(x) = \phi^{-1}(x)$, f_η – плотность случайной величины распределенной по закону Коши, а f_ξ – плотность случайной величины, распределенной равномерно, тогда для того, f_η нужно воспользоваться формулой:

$$f_\eta(x) = f_\xi(\psi(y)) |\psi'(y)|$$

Составим следующее уравнение:

$$f_\xi(\psi(y)) |\psi'(y)| = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Так как $y = \phi(x)$, то $\psi(y) = \psi(\phi(x)) = x$, таким образом получаем:

$$f_\xi(x) |\psi'(y)| = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$\frac{1}{\pi} |\psi'(y)| = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$|\psi'(y)| \vee \frac{1}{1+y^2}$$

$$\psi(y) = \text{arcctg}(y)$$

Теперь найдем функциональное преобразование, которое было применено к равномерно распределенной функции:

$$\psi(y) = \text{arcctg}(y)$$

$$x = \text{arcctg}(y)$$

$$y = \text{ctg}(x)$$

Ответ: $y = \operatorname{ctg}(x)$