№1

Представим 1224 в виде простых множителей:

$1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$, тогда все делители 1224 это помноженные между собой 2, 3, 17, при этом 2 может встретиться 3 раза, 2 – два раза, а 17 – только один раз $\Rightarrow$ делителей $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Ответ: 24 делителя

№2

Каждая из 7 монет может лежать в любом из карманов $\Rightarrow$ 3 варианта разложения 1 монеты $\Rightarrow$ $3^7 = 2187$ вариантов разложения 7 монет по 3 карманам

Ответ: 2187

Scanned by TapScanner

№3

$\alpha = cbcad$

Рассмотрим все слова с длинами 1, 2, 3, 4, 5 начинающиеся с a: их $(1+26+26^2+26^3+26^4) = p$

слов начинающихся с b столько же

Тогда рассмотрим все слова стоящие перед α, начинающиеся с c

длина 1: 1 слово (c)

длина 2: 2 слова (ca, cb)

длина 3: ca_ – 26 слов
cb_ – 3 слова

длина 4: ca_ _ – 26^2 слов
cba_ – 26 слов
cbb_ – 26 слов
cbc_ – 1 слово

длина 5: ca_ _ _ – 26^3 слов
cba_ _ – 26^2 слов
cbb_ _ – 26^2 слов
cbc_ _ – 3 слова ⇒

$\Rightarrow 2p + 3 + 3\cdot 26^2 + 3\cdot 26 + 3 + 3 + 26^3 =$
$= 570202$ (пользуясь вычислительными мощностями компьютера)

Scanned by TapScanner

Ответ: 970202

№4

а). При $n=0$ $C_0^0 = 1$

при $n>0$ Рассмотрим бином Ньютона:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n =$$

$$= 0^n = 0$$

Ответ: 1, при $n=0$ и 0, при $n>0$

б).

$n=0$ $C_0^0 = 1$ $\sum\limits_{2|k} C_n^k = \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k}$

$n>0$

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{[\frac{n}{2}]} = C_{n-1}^0 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 +$$

$$+ \ldots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$$

Ответ: 1, при $n=0$, 2^{n-1}, при $n>0$

в). Аналогично предыдущим пунктам

при $n=0$ $C_0^0 = 1$

при $n>0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} - C_{n+1}^{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Ответ: 1, при $n=0$

$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, при $n>0$.

$\boxed{№5}$

Представим шаги робота как двоичное число длины $m+n$, n – число 0

m – число 1

- 0 – шаг вверх
- 1 – шаг вправо $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ остаётся найти число сочетаний

$$C_{n+m}^{m} = C_{n+m}^{n}$$

Ответ: C_{n+m}^{m}

$\boxed{№6}$

$$a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)=\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}=$$

$$=A^n_{n+a-1}$$

$$C^n_{a+n-1}=\frac{A^n_{a+n-1}}{n!}$$ => т.к. число сочетаний это целое число.

$$A^n_{a+n-1} \vdots n!$$

Что и требовалось доказать

$\boxed{№7}$ Переберём все 6ти значные слова у которых число чётных цифр равно числу нечётных

ччч ннн
ччн — — — 3 комбинации
чнч — — — 3 комб.
нчч — — — 3 комб.
ннч — — — 3 комб
нчн — — — 3 комб
чнн — — — 3 комб
нннччч

=> Всего видов таких чисел 20

тогда $20\cdot5^6$ – всевозможные числа, при этом $5^5\cdot10$ – числа начинающиеся с нуля, вычтя их получаем что всего 281250 чисел с равным количеством чет. и нечёт. цифр

Ответ: 281250

$\boxed{№8}$

Для того чтобы разложить n предметов по k ящикам воспользуемся формулой C^{k-1}_{n+k-1}

$$C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_5^3 = 84 \cdot 20 \cdot 10 = 16800$$

Ответ: 16800

$\boxed{№9}$

$$(x^2+x^7+x^9)^{20} - x^{40} \cdot (1+x^5+x^7)^{20}$$

$$1+x^5+x^7$$

Найдём коэффициент при x^{17}

$$(1+(x^5+x^7))^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^5+x^7)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{5k} (1+x^2)^k = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{5k} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l x^{2l} \right)$$

$$0 \le k \le 20, \quad 0 \le l \le k, \quad 5k+2l = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k < 4, \ k \ne 0, \ k \ne 1, \ k \ne 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 3, \ l = 1 \Rightarrow C_{20}^3 \cdot C_3^1 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2!} =$$

$$= \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2} = 3420$$

Ответ: 3420

$\boxed{\text{№10}}$

Если 2 кармана пусты, то способов 3

Если 1 карман пуст, то способов:

$3\cdot(2^7-2)$

Если нет пустых карманов, то способов 3^7 =>

$\Rightarrow 3^7-3-3(2^7-2)=1806$

Ответ: 1806

$\boxed{\text{№11}}$

Найдём количество вариантов выбора 4х книг

$C_4^{10}=210$, также найдём количество перестановок 6 книг $!6=$

$\left[\frac{6!}{e}\right]=265$

Перемножив $C_4^{10}\cdot\left[\frac{6!}{e}\right]$ получим сколькими способами можно разложить 10 книг, так чтобы 4 из них ост. на месте =>

$\Rightarrow 210\cdot 265=55650$

Ответ: 55650

№12

- Найдём все взаимнопростые числа с 2020

$\varphi(2020)=(101-1)\cdot(5-1)\cdot 2\cdot(2-1)=800 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. всего 2020 чисел

- не взаимнопростых из них
- $2020-800=1220$

Ответ: 1220

Scanned by TapScanner