N 1

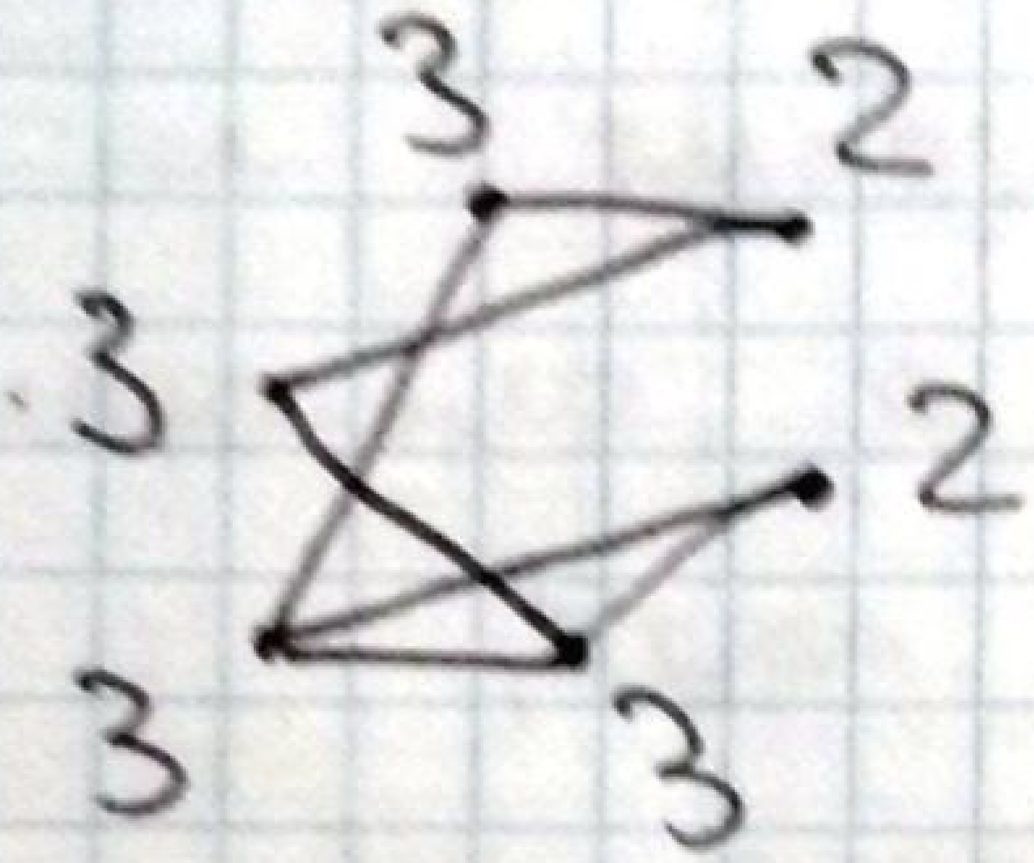
а). $C_2^8 = 28$ - всего ребер

Макс. кол-во ребер у графа с 8 вершинами степени 1 : $28 - 6 = 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ такого графа нет

б). Существует

Пример:



Ответ: а). нет ; б). да

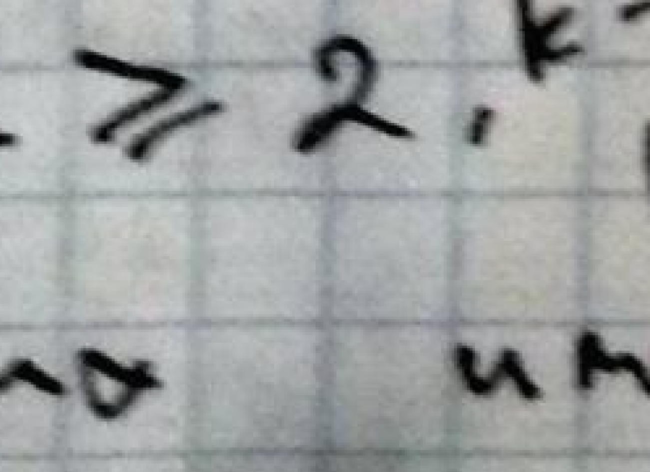
N 2 n - число вершин

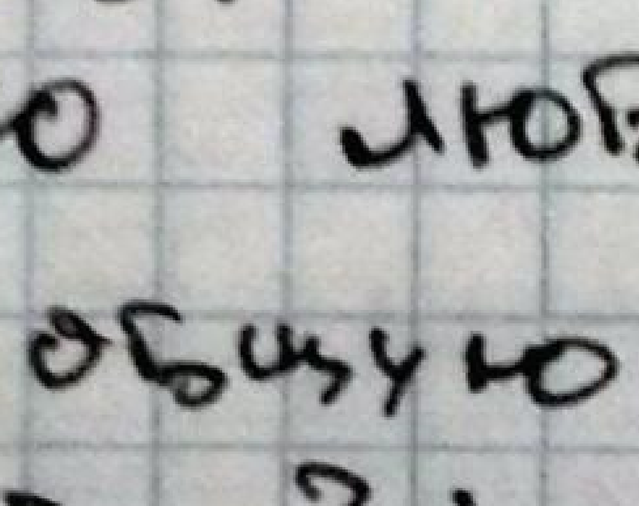
при $n < 3$ $\nexists$ 2-ух ребер

при $n = 3$, если граф имеет $k \geq 2$, (k - число ребер) ребер, то любые 2 из

них имеют общую вершину

(таких случаев 2:





a, b пересекаются в L

L - общая вершина

аналогично

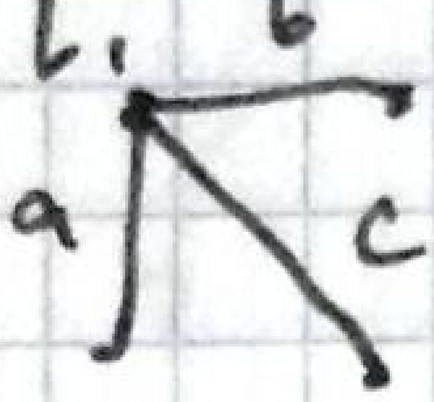
a, b - пересек. в L_2

a, c - пересек. в L_1

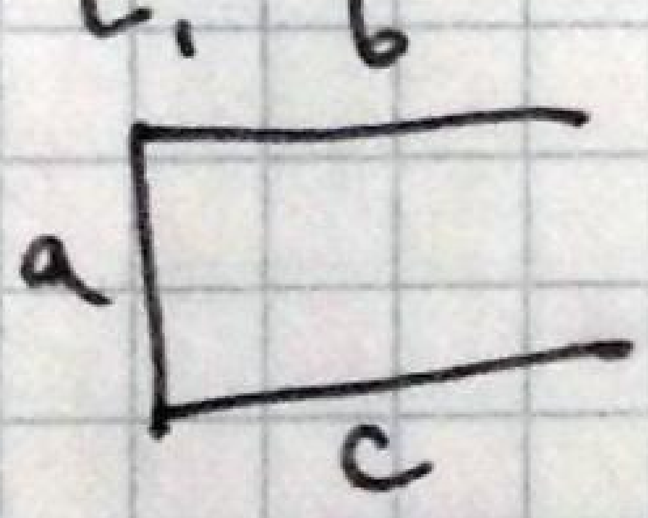
b, c - пересек. в L_3

при $n > 3$

Рассмотрим $n = 4$

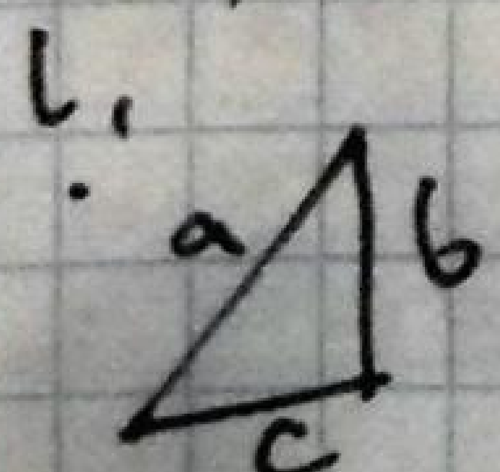


Работают случаи когда из 1. выходят все ребра, т.к. при ребрах не выходящих из этой точки например в таком случае



ребра b и c не будут сходится в 1й вершине, при этом справедлив случай, когда какие-то 3 точки образуют треуг.

Например

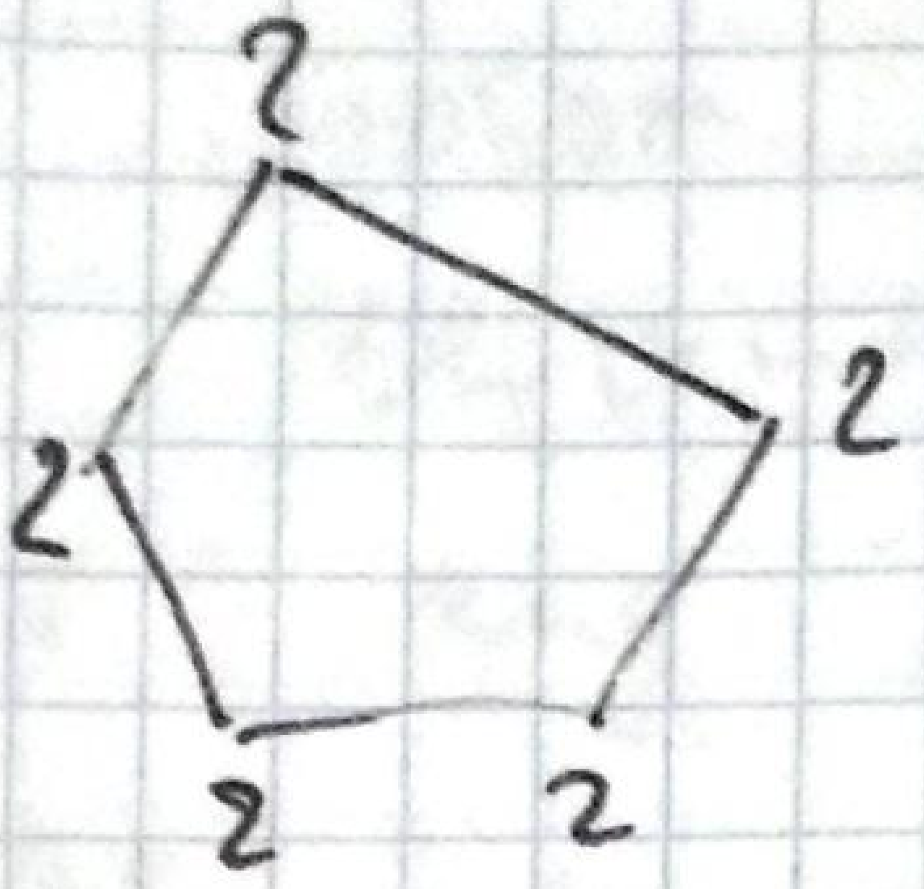


, тогда любые 2 ребра сходятся в одной точке

Аналогично и для $n > 4$, т.к. количество точек не вошедших в треугольник не важно, а звезда может иметь сколько угодно ребер $\Rightarrow$

$\boxed{№4}$

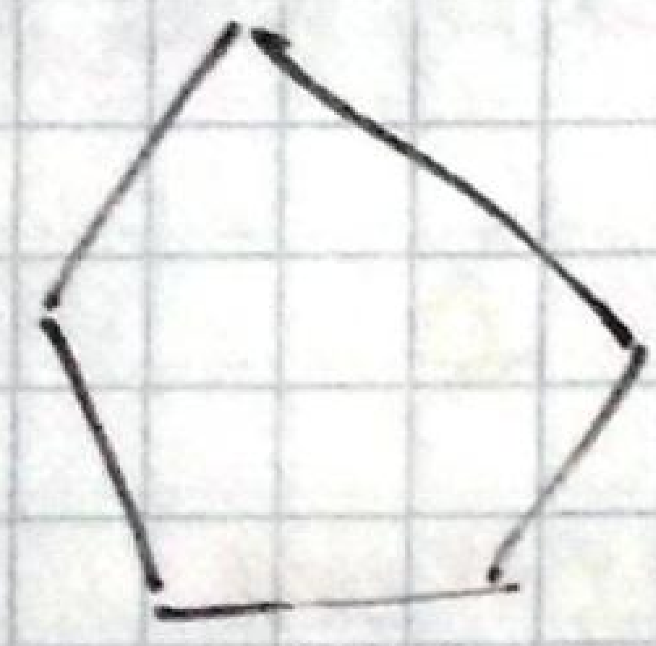
G :



$\bar{G}$:

Заметим что $G \cong \bar{G}$

Ответ: Получаем граф



$\boxed{№5}$

Нет не существует, т.к.

Рассмотрим вершину V

V - имеет степень 50, т.к.

$V \in G$ и $V \in \bar{G}$, то эта вершина имеет степень 50 в G, а в $\bar{G}$ имеет степени 49

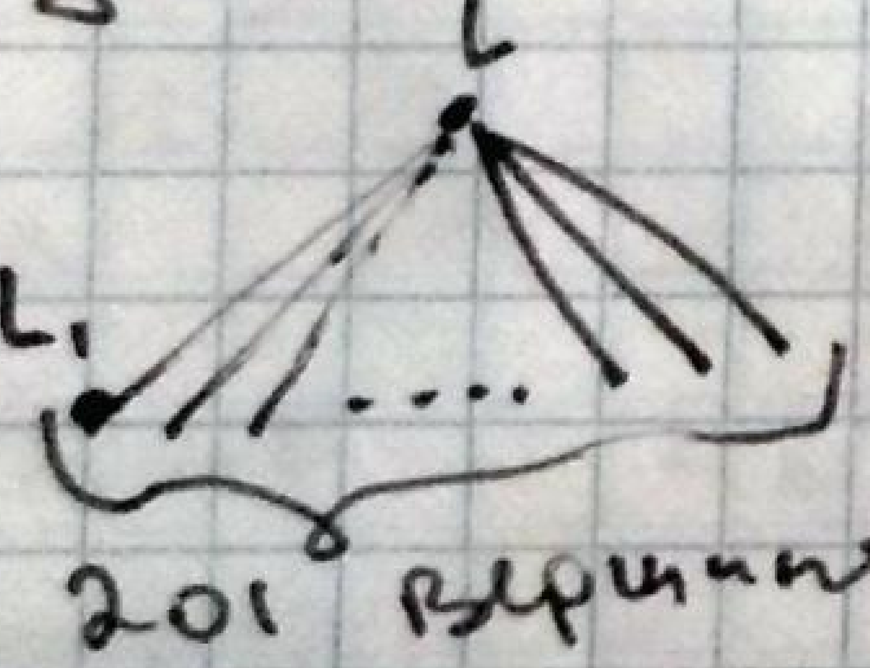
При этом если добавит ребро в $\bar{G}$, то степень вершины в G станет 49 а в $\bar{G}$ 50 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет не может быть

=> В любом графе у которого число вершин ≥ 3, который имеет вид звезды (все ребра выходят из 1й точки) или в котором присутствует треугольник составленный из ребер, притом только 1, любые 2 ребра имеют общую вершину.

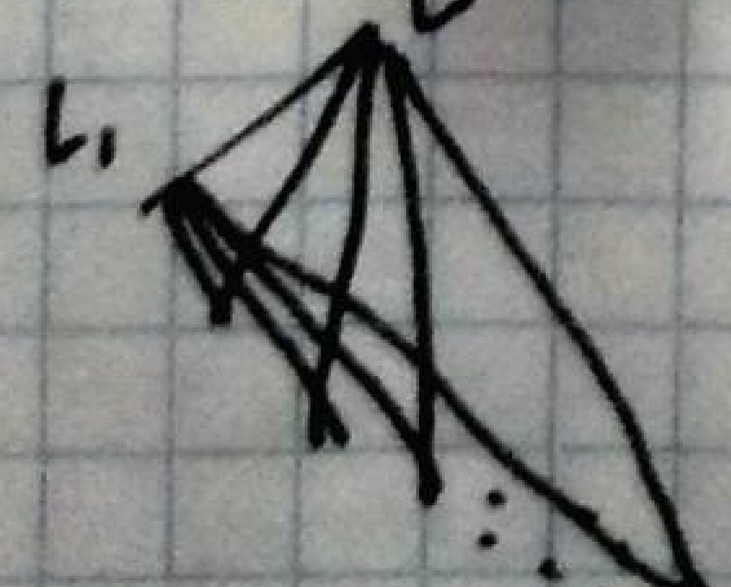
$\boxed{№ 3}/4$

У нас есть вершина степени 201. Допустим она имеет вид:

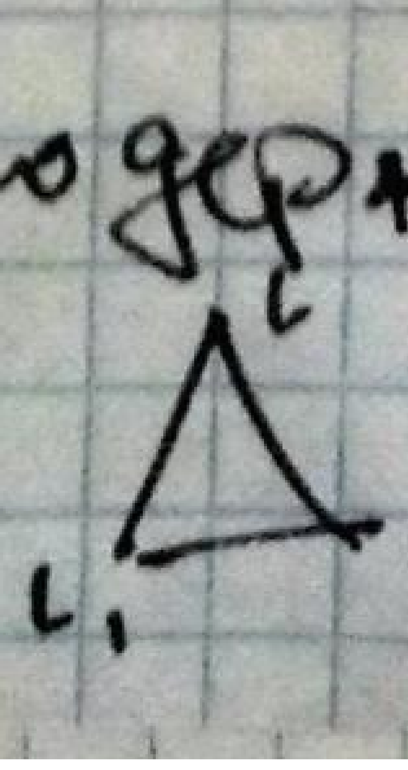


Т.к. все вершины степени 201

Тогда соединим L_1 с оставшимися вершинами отличными от изначальной L. Получаем след граф:



Вершин степени 0 осталось 198 => граф содержит след подграф



K_3

чтд

№6

Для начала определимся

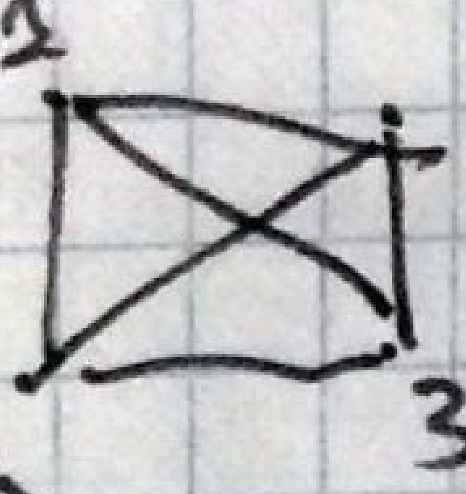
Есть 3 человека: 1, 2, 3

если 1 и 2 братья и 2 и 3 братья,

то 1 и 3 тоже братья!

(во избежание недоразумений)

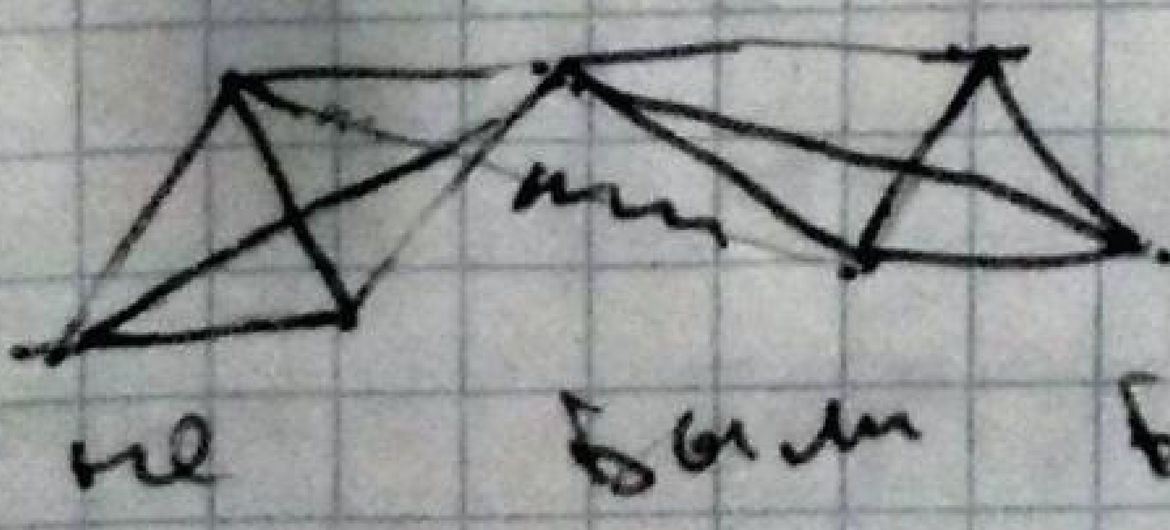
Тогда чтобы у человека было ровно три брата мы можем составить следующий подграф (для 4х человек)



Теперь если добавить ещё 1 брата то он будет братом для всех 4х братьев т.к. [redacted]

[redacted] с 7 людьми будет [redacted] Замкнут

[redacted] Наиболее близким к условию задачи будет граф:



Если бы они не были братьями, то это было бы решение, но братья есть братья, поэтому граф замкнут => все между собой братья => каждые 2 между собой ЧТД

№7

База: Пусть $\exists$ 2 города $\Rightarrow$ единств. разделение на группы:
$\boxed{1} - \boxed{2}$ $\Rightarrow$ между ними есть дорога $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ условие справедливо

Предположение:
Пусть утверждение справедливо
$\forall$ страны с более чем n городами
все города $\leq n$ — в $1^{й}$ группе,
а $(n+1)^{й}$ во второй $\Rightarrow$
~~[illegible]~~ все города ведут
в $(n+1)^{й}$, тогда мы можем
попасть в $(n+1)^{й}$ город из
любого $\leq n$ города $\Rightarrow$ это работает
и в обратную сторону ~~[illegible]~~ в
любого $\leq n$ города можно попасть
из $(n+1)^{ого}$ $\Rightarrow$ возможно из
любого города добраться до
любого другого

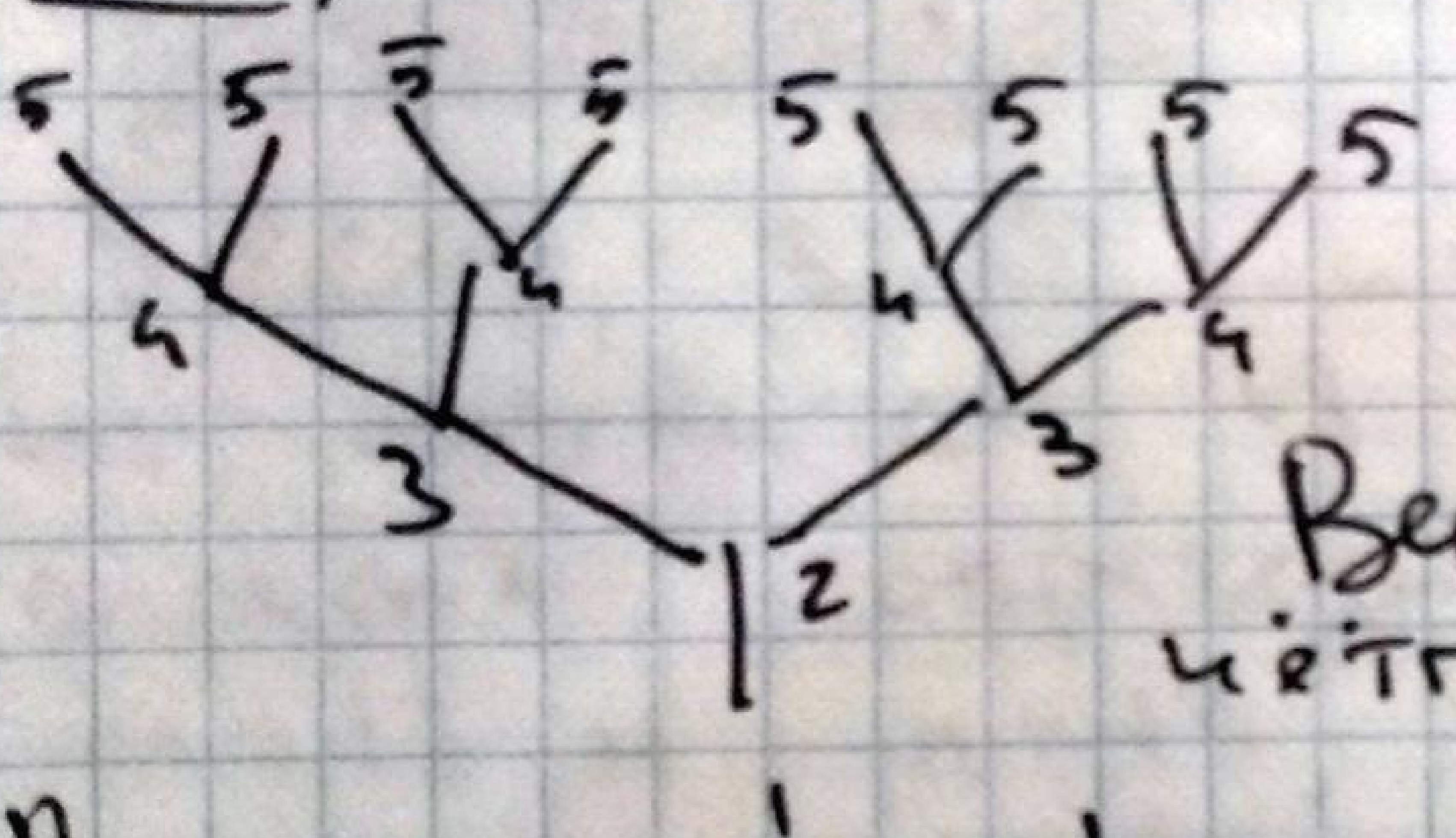
ЧТД

№8

Если взять вершину с чётной суммой ед., то при смене 400 битов сумма останется чётной => получаем две несмежные группы с чётной суммой ед. и с нечёт. суммой ед. => противоречие

ЧТД

№9 Рассмотрим дерево



Пронумеруем вершины по глубине дерева

Вершины разной чётности несмежны

Пусть чёт. k_0, нечётных k_1, k_m - большее из k_0, k_1, n - кол-во вершин, тогда $k_m \geq \frac{2n}{2} => \geq n$, где k_m - попарно несмежные вершины

ЧТД

№11

Рассмотрим две группы:

A - группа прямых

B - группа точек =>

=> из A в B выходит $26 \cdot 7 = 182$ пути, а из B в A выходит $43 \cdot 4 = 172$ пути => противоречие => нет не может быть

Ответ: нет не может быть

№12

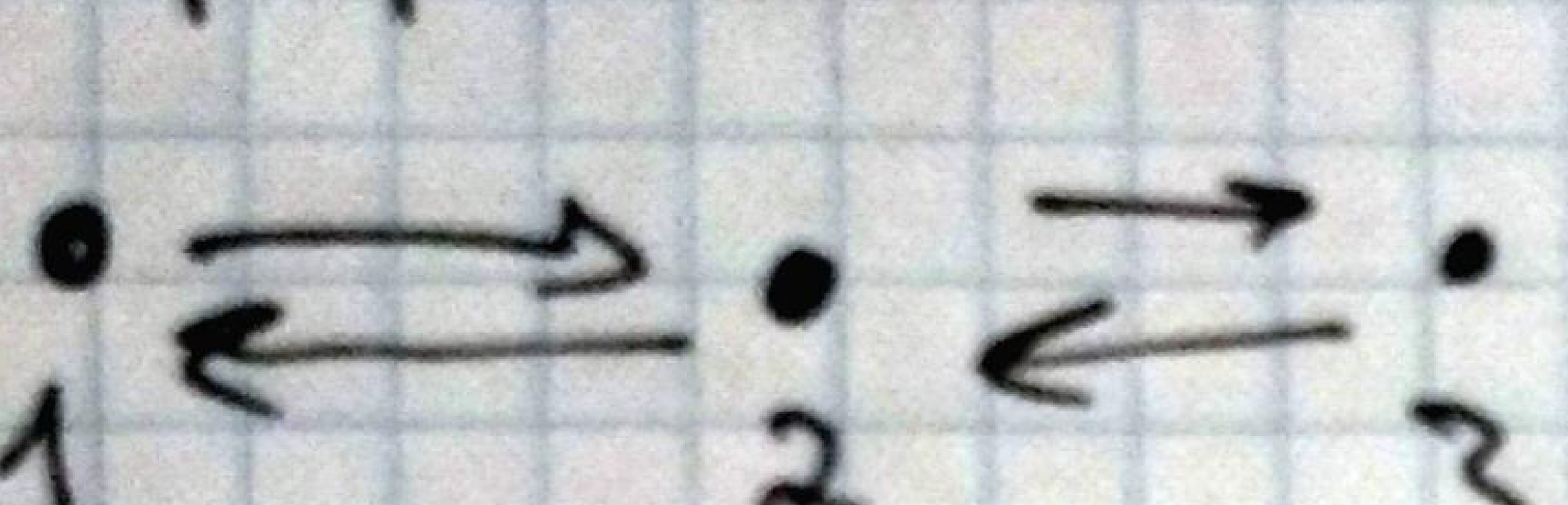
$$\begin{cases} n = 26 - m \\ m \cdot n = 26m - m^2 \end{cases}$$

=> если взять число <13, то не получится 169, кроме того система справедлива только при $m=13$ и $n=13$, т.к. 169 - полный квадрат и имеет множители 1, 13, 169, при этом выполняется условие что ∀ мальчик из „A" подрался ∀ мальчиком из „Б"

Ответ: по 13 учеников

$\boxed{№13}$ Нет

Контрпример:



$1 \rightleftarrows 2$

$3 \rightleftarrows 2$

$1 \rightleftarrows 2 \rightleftarrows 3 \Rightarrow$ Нет

Ответ: нет