№1

а). Элемент коммутативного кольца K называется обратимым, если $\exists\, a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

б). Базисом линейного пространства V является система векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ таких, что:

а). $b_1, \ldots, b_n$ – ЛНЗ

б). Любой вектор представим в виде линейной комбинации остальных

№8

Докажите, что центр группы является её нормальной подгруппой

$Z(G)$ является нормальной подгруппой G

□ Покажем, что $Z(G)$ – группа, т.е. $\forall a, b \in Z(G) : a \cdot b^{-1} \in Z(G)$

$ab^{-1}g = ab^{-1}(g^{-1})^{-1} = a(g^{-1}b)^{-1} = a(bg^{-1})^{-1} = gab^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \in Z(G)$

Если $a \in Z(G)$ и $g, b \in G$

$g^{-1}agb = g^{-1}gab = ab = ba = bg^{-1}g = bg^{-1}ag \Rightarrow$

если есть $a \in Z(G)$, то $g^{-1}ag$ также $\in Z(G) \Rightarrow$ по критерию нормальности $Z(G)$ является норм. подгруппой G ■

$\boxed{№3}$

а). $F = \mathbb{Z}_3[x] / \langle 2x^3 + 2x + 1 \rangle$

Попробуем найти корни $2x^3 + 2x + 1 = 0$

Подставим
$0: \quad 0 + 0 + 1 \neq 0$
$1: \quad 2 + 2 + 1 \neq 0$
$2: \quad 16 + 4 + 1 = 21 = 0 \Rightarrow 2$ - корень $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^3 + 2x + 1$ приводим над $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow$ нет не явл. полем

б). $\dfrac{\overline{2x^3 + x + 1}}{\overline{x^2 + x + 2}} = \dfrac{\overline{2x}}{\overline{x^2 + x + 2}}$

1). $$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x + 1 & 2x^3 + 2x + 1 \\ \hline -\; 2x^3 + 2x + 1 & 1 \\ -x = 2x & \end{array}$$

$x^2 + x + 2$ не упрощается также, т.к. его степень меньше $(2 < 3)$

2) Найдём элемент обратный к $x^2 + x + 2$ методом неопределённых коэф.

$(x^2 + x + 2)(ax^2 + bx + c) = 1$

$a(2x^2 + x^3 + x^2 + x) + b(2x + x^2 + x^3) + c(2 + x + x^2) = 1$

$a(x^3 + x) + b(2x + x^2 + x^3) + c(2 + x + x^2) = 1$

Перегруппируем по степеням x

$x^3(a + b) + x^2(b + c) + x(a + 2b + c) + 2c = 1$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow$ обратный к $x^2 + x + 2 = 2x^2 - x + 2$

3). $2x \cdot (2x^2 + x + 2) = x^3 + 2x^2 + x$

$x^3 + 2x^2 + x = 2x^2 - 2$

Ответ: а). не является
б). $2x^2 - 2$

$\boxed{№5}$ ...

$Q(x) = -36x_1^2 + 109x_2^2 + 16x_3^2 - 48x_1x_2 + 24x_1x_3 - 84x_2x_3$

Пусть A - такая матрица, что

$(x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q(x)$, тогда

$$A = \begin{pmatrix} -36 & -24 & 12 \\ -24 & 109 & -42 \\ 12 & -42 & 16 \end{pmatrix}$$

Найдём $Rg(A)$

$|-36| = -36 \Rightarrow Rg(A)$ не меньше 1

$\begin{vmatrix} -36 & -24 \\ -24 & 109 \end{vmatrix} = -39 \cdot 109 - (-24)(-24) = -3924 - 24^2 \neq 0 \Rightarrow$ (очевидно)

$\Rightarrow Rg(A)$ не меньше 2

$\begin{vmatrix} -36 & -24 & 12 \\ -24 & 109 & -42 \\ 12 & -42 & 16 \end{vmatrix} = -36 \cdot 109 \cdot 16 + 24 \cdot 42 \cdot 12 + 24 \cdot 42 \cdot 12 + 36 \cdot 42 \cdot 42 - 12 \cdot 109 \cdot 12$

$= -62784 + 48384 + 63504 - 15696 = 111888 - 78480 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rg(A) = 3$

Найдём канонический вид квадратной формы $Q(x)$

$-36x_1^2 + 109x_2^2 + 16x_3^2 - 48x_1x_2 + 24x_1x_3 - 84x_2x_3$

Канонический вид кв. формы - все слагаемые имеют степень 2

Индексы инерции высчитываются как количество положительных или отрицательных ненулевых элементов кв формы в каноническом виде

Задание сводится к тому, что мы выделяем полные квадраты в кв. форме, а затем производим замену всех векторов на переменные

$$Q(x) = -(6x_1 + 4x_2)^2 + \left(5\sqrt{5}x_2 - \frac{42}{5\sqrt{5}}x_3\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{236}{125}}x_3 - \frac{12}{\sqrt{\frac{236}{125}}}x_1\right)^2 - \frac{18000}{236}x_1^2$$

Тогда произведя замену

$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 4x_2 \\ y_2 = 5\sqrt{5}x_2 - \frac{42}{5\sqrt{5}}x_3 \\ y_3 = \sqrt{\frac{236}{125}}x_3 - \frac{12}{\sqrt{\frac{236}{125}}}x_1 \end{cases}$$

получим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 5\sqrt{5} & -\frac{42}{5\sqrt{5}} \\ -\frac{12}{\sqrt{\frac{236}{125}}} & 0 & \sqrt{\frac{236}{125}} \end{pmatrix}$$

P - матрица перехода

$\boxed{N2}$

группа $GL_n(\mathbb{R})$ – квадратные матрицы $n \times n$

группа H – вещественные квадратные матрицы $n \times n$

с нулевой суммой

Т.к. операция матричного сложения коммутативна, то

H является нормальной подгруппой группы $GL_n(\mathbb{R})$ по

сложению (~~все~~ элементы обратимы и $\exists$ единица $\neq 0$)

по определению нормальной подгруппы

Найдём $GL_n(\mathbb{R})/H$

Scanned by TapScanner