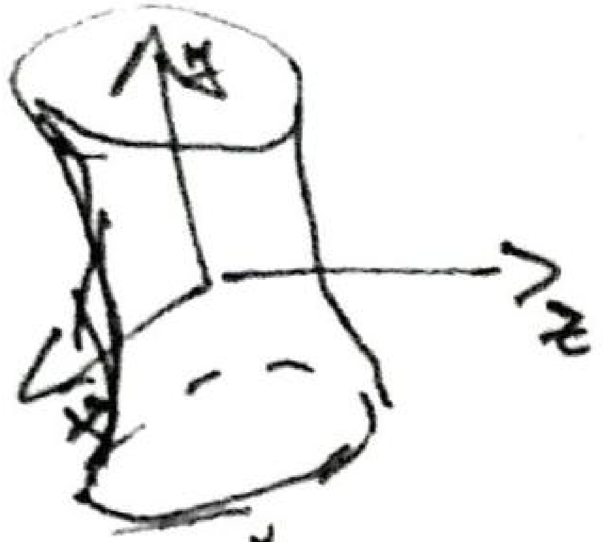
№1

а). Γ-матрица Грама A-матрица линейного оператора в e,
$e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис в $\mathbb{E}$, тогда матрица в новом базисе (A') находится по формуле:

$$A' = \Gamma^{-1} \cdot A^{T} \cdot \Gamma$$

б). Линейчатая поверхность - поверхность образованная движением линии

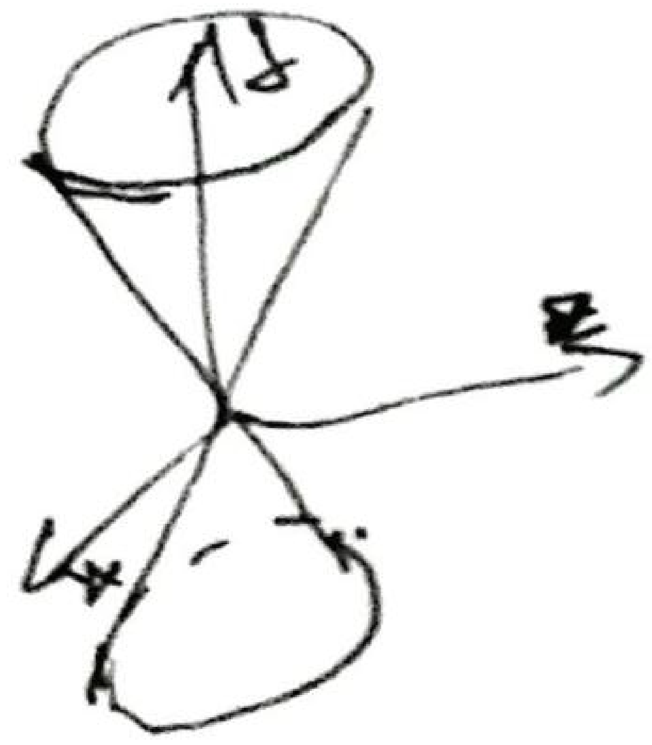


Примеры:

1 Линейчатый гиперболоид

2. Линейчатый параболоид

3 Линейчатый конус



$\boxed{№3}$

$$A = \begin{pmatrix} 96 & 450 \\ -20 & -94 \end{pmatrix}$$

Найдём с.з

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 96-\lambda & 450 \\ -20 & -94-\lambda \end{vmatrix} = (96-\lambda)(-94-\lambda) + 9000 =$$

$$= -96\cdot 94 + 94\lambda + \lambda^2 - 96\lambda + 9000 = \lambda^2 - 2\lambda - 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 6 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \text{алгебраическая кратность: } 2$$

Подставим полученные значения

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 96+4 & 450 \\ -20 & -94+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 100 & 450 \\ -20 & -90 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 6E = \begin{pmatrix} 90 & 450 \\ -20 & -100 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{получили } v_1$$

$\Rightarrow$ геометрическая кратность равна 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A нельзя привести к диагональному виду

т.к. а.к. $\neq$ г.к.

Приведём к ЖНФ:

$A = TJT^{-1}$ (т.к. с.з. - 2 в ЖНФ жордановых клеток 2 и обе они (1×1))

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$, тогда найдём матрицу перехода

ЖНФ: $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Далее необходимо найти Жорданов базис и через него уже считать A^n, но т.к. времени не хватает, вот как в общем виде будет считаться A^n

$$A^n = (TJT^{-1})^n = TJ^nT^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

№4

Сингулярное разложение

$$A = V \Sigma W^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 20 \\ 21 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 0 & 0 \\ 20 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 20 \\ 21 & 0 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 0 & 0 \\ 20 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 & 840 \\ 861 & 882 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 0 & 0 \\ 20 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 20 \\ 21 & 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 841 & 0 & 841 \\ 0 & 0 & 0 \\ 841 & 0 & 841 \end{pmatrix}$$

Найдём с.з. $A \cdot A^T$

$$|A \cdot A^T - \lambda E| = \begin{pmatrix} 800-\lambda & 840 \\ 861 & 882-\lambda \end{pmatrix} = (800-\lambda)(882-\lambda) - 840 \cdot 861 =$$

$$= 800 \cdot 882 - 882\lambda - 800\lambda + \lambda^2 - 840 \cdot 861 =$$

$$= \lambda^2 - 1682\lambda - 17640 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 =$$

Произошла проблема с числами, поэтому объясню как найти сингулярную матрицу без вычислений
мы находим собственные значения $A^T \cdot A$, они же равны собственным значениям $A \cdot A^T$, из этих значений составляется матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 \geq \lambda_2$, это и есть матрица Σ
V – матрица порядка $m \times m$, где m – число ~~столбцов~~ строк A,
W^T – матрица порядка $n \times n$, где n – число ~~строк~~ столбцов A
подставив в $A \cdot A^T - \lambda E$ – ~~их~~ собственные значения из которых получаются вектора, которые после нормализации образуют матрицу V
$A^T \cdot A - \lambda E$ – после подстановки получаются вектора, которые после нормализации образуют матрицу W
посчитав все это получается, что $A = V \Sigma W^T$, что как жаль, что у меня не вышло в числа

№5

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -10 + 24 = 14 \Rightarrow$ QR разложение существует

Q – матрица ортогонального оператора

R – верхнетреугольная матрица

Проведём ортогонализацию Грама-Шмидта

$$a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \quad a_1 = b_1 \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(a_2, b_1) = 34$

$(b_1, b_1) = 169$

$$c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{34}{169}$$

$$b_2 = a_2 - c_1 \cdot b_1 = \begin{pmatrix} \frac{168}{169} \\ \frac{70}{169} \end{pmatrix}$$

b_i – столбцы матрицы $B \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 5 & \frac{168}{169} \\ -12 & \frac{70}{169} \end{pmatrix}$$

Нормируем матрицу, получаем

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём R

$R = Q^{-1}A$, т.к. $A = QR \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = Q^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & \frac{34}{13} \\ 0 & \frac{14}{13} \end{pmatrix}$$

Ответ: да можно

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 13 & \frac{34}{13} \\ 0 & \frac{14}{13} \end{pmatrix}$$

№61

$7x^2 - y^2 + 6xy - 4\sqrt{10}x - 4\sqrt{10}y + 8 = 0$ (•)

A - матрица кв формы

$Q = 7x^2 - y^2 + 6xy$

$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Найдём с.з

$A - \lambda E = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)-(1+\lambda) - 9 = -7 + \lambda^2 + \lambda - 7\lambda - 9 =$

$= \lambda^2 - 6\lambda - 16 \Rightarrow \lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = -2$

Найдём с.в.

$A - 8E = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \sim x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A + 2E = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Нормируем вектора:

$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

S - матрица ортогонального преобразования

$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(*)

Эта кривая 2ого порядка заданная (•)

произведём замену

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}x_2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}x_2 \end{cases}$$

Подставим в исходное уравнение

$$7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}x_2\right)^2 + 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}x_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}x_2\right) -$$

$$- 4\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}x_2\right) - 4\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}x_2\right) + 8 = 0$$

для красоты поменяем x_2 на y_1

$6x_1^2 + \frac{13}{5}y_1^2 + x_1y_1 \cdot \frac{32}{\sqrt{5}} - 6\sqrt{5}x_1 - 16y_1 + 8 = 0$

далее выделяем полный квадрат и получаем каноническое уравнение прямой второго порядка

(*)