Мосолков Евгений БПИ196 Вариант 16

Условие:

Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(0, \pi)$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по закону Коши $f(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$?

Решение:

Так как случайна величина X распределена равномерно в интервале $(0, \pi)$, то ее плотность выглядит следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x<0\, или\, x>\pi \\ \frac{1}{\pi}, 0\le x\le\pi \end{cases}$$

Пусть $y=\phi(x)$, а $\psi(x)=\phi^{-1}(x)$, f_η – плотность случайной величины распределенной по закону Коши, а f_ξ – плотность случайной величины, распределенной равномерно, тогда для того, f_η нужно воспользоваться формулой:

$$f_\eta(x)=f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)|$$

Составим следующее уравнение:

$$f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)|=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Так как $y=\phi(x)$, то $\psi(y)=\psi(\phi(x))=x$, таким образом получаем:

$$f_\xi(x)|\psi'(y)|=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$\frac{1}{\pi}|\psi'(y)|=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$¿\psi'(y)\vee¿\frac{1}{1+y^2}$$

$$\psi(y)=arcctg(y)$$

Теперь найдем функциональное преобразование, которое было применено к равномерно распределенной функции:

$\psi(y)=arcctg(y)$ $\quad$ $x=arcctg(y)$ $\quad y=ctg(x)$

Ответ: $y = ctg(x)$