$\boxed{№ 1}$

Пусть функция f имеет непрерывную производную $(n+1)$ ого порядка на интеграле (x_0-h, x_0+h), где $h>0$, тогда остаточный член $r_n(x)$ для $x \in (x_0-h, x_0+h)$ записывается в виде $r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ $(*)$

$(*)$ - остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме

$\square$ Т.к. $f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t)$, то проинтегрировав по частям получаем:

$$f(x)-f(x_0) = -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt \Rightarrow$$

Пусть для некоторого $m \leq n$ доказано что:

$$f(x)-f(x_0) = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt \quad (\bullet)$$

Интегрируем по частям последнее слагаемое, получаем:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m +$$

$$+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt$$

Подставляем это выражение в $(\bullet)$, получаем ту же формулу с заменой m на $m+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ формула $(\bullet)$ доказана по индукции для всех $m \leq n$

при $m=n$ она приводит к $(*)$ $\blacksquare$

Scanned by TapScanner

$\boxed{№3}$

$f(x) = \ln(4+3x-x^2) \quad x_0 = 0$

$\ln(4+3x-x^2) = \ln(1+(3+3x-x^2) \quad a = 3+3x-x^2$

$\ln(1+a) = \frac{a}{1!} - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n!} - \ldots, x \in (-1;1]$

$\ln(4+3x-x^2) = \frac{3+3x-x^2}{1!} - \frac{(3+3x-x^2)^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(3+3x-x^2)^n}{n!}$

$\ln(4+3x-x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3+3x-x^2)^n}{n!}, x \in (-1;1]$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3+3x-x^2)^n}{n!}, x \in (-1, 1]$

$\boxed{№4}$

$f(x,y) = (1+(tg^2x))^{\ln y} \quad \frac{dx}{dy} - ? \quad \frac{dy}{dx} - ?$

$dx = \ln y (1-tg^2x)^{\ln y - 1} \cdot \left(-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)$

$dy = (1-tg^2x)^{\ln y} \cdot \ln(1-tg^2x) \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\ln y \cdot (-2\sin x) \cdot y}{\cos^3 x \cdot \ln(1-tg^2x) \cdot (1-tg^2x)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^3 x\,(1-tg^2x) \cdot \ln(1-tg^2x)}{-2\sin x \cdot y \cdot \ln y}$

Ответ: $\frac{\ln y \cdot (-2\sin x) \cdot y}{\cos^3 x \cdot \ln(1-tg^2x) \cdot (1-tg^2x)} = \frac{dx}{dy}; \quad \frac{\cos^3 x\,(1-tg^2x) \cdot \ln(1-tg^2x)}{-2\sin x \cdot y \cdot \ln y} = \frac{dy}{dx}$

Scanned by TapScanner

№5

$M(1; -1; -1)$

$x^3 + y^3 + z^3 = -x \cdot y \cdot z$

$x^3 + y^3 + z^3 + x \cdot y \cdot z = 0$

$d(x^3 + y^3 + z^3 + xyz) = 0$

$d(x^3 + y^3 + z^3 + dx \cdot yz + x\,dy\,z + xy\,dz = 0$

$3x^2 dx + 3y^2 dy + 3z^2 dz + dx \cdot yz + x\,dy\,z + xy\,dz = 0$

$(3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz = 0$

Подставим $M(1; -1; -1)$

$4dx + 2dy + 2dz = 0$

$2dx + dy + dz = 0$

$2x - 2 + y - 1 + z - 1 = 0$

$2x + y + z - 4 = 0$

Уравнение касательной: $2x + y + z - 4 = 0$

$\bar{n} = (2; 1; 1)$

Уравнение нормали:

$\frac{x-1}{2} = y - 1 = z - 1$

Ответ:

Уравнение касательной к плоскости в M: $2x + y + z - 4 = 0$

Уравнение нормали к поверхности: $\frac{x-1}{2} = y - 1 = z - 1$

№6

$f = xy^2z^3$ $\quad M(3, 2, 1)$ $\quad \bar{a}(3, 4, 5)$

$f'_x = y^2 z^3$ $\quad f'_x(M) = 4 \cdot 1 = 4$

$f'_y = 2xyz^3$ $\quad f'_y(M) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

$f'_z = 3xy^2z^2$ $\quad f'_z(M) = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 36$

Найдём нормированный вектор:

$$\bar{a}_n = \frac{\bar{a}}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{\bar{a}}{5\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}; \frac{4}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Найдём производную f в точке M используя формулу

$$\frac{df}{dl} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma,$$

где l – луч из M в направлении $\bar{a}$

$$\frac{df}{dl} = 4 \cdot \frac{3}{5\sqrt{2}} + 12 \cdot \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{36}{\sqrt{2}} = \frac{48}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{48}{\sqrt{2}}$

Scanned by TapScanner