№1

Бинарное отношение $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — это пары всех вещественных чисел

Тотальность: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : (x,y) \in P$

Сюръективность: $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : (x,y) \in P$

Функциональность: $(x,y_1) \in P \wedge (x,y_2) \in P \Rightarrow y_1 = y_2$

Инъективность: $(x_1, y) \in P \wedge (x_2, y) \in P \Rightarrow x_1 = x_2$

а). $\sin(y) = x$ — не функциональное, инъективное, не тотальное, сюръективное

б). $y = \sin(x)$ — не инъективное, функциональное, не сюръективное, тотальное

№11 Возьмём обычный год (365 дней)

Пусть $n = 365$, тогда в худшем случае у всех человек в группе день рождения в разные дни года, причём все эти дни будут кем-то заняты (т.к. человек 365 и дней 365 $\Rightarrow$

$\circledast$ $\Rightarrow$ при $n = 366$ найдётся 2 человека с днём рождения в 1 день $\Rightarrow \min n = 366$ (для года обычного))

аналогично, если год високосный

$\min n = 367$ (т.к. дней 366)

по принципу Дирихле $\circledast$

$\boxed{№12}$

Рассмотрим все числа:

$$\{1, 11, \ldots, \underbrace{1\ldots1}_{2018}\} = Q$$

Таких чисел 2018

Рассмотрим $Q \bmod 2017$

(каждый элемент по модулю 2017)

по принципу Дирихле $\exists\, x, y$, такие, что

$x \in Q$ $y \in Q$ $x \bmod 2017 = y \bmod 2017$, т.к.

чисел 2018, а остатков 2017 $\Rightarrow$

среди всех остатков 2017 есть 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, z \in Q$, такой, что $z \bmod 2017 = 0$

ЧТД

$\boxed{№4}$

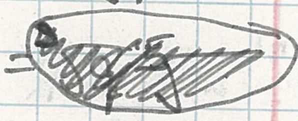
а). $Q^3 = 3 \to Q = \{0, 1, 2\} \to Q$

Применим тождественную функцию

$$\begin{cases} 0 \to 0 \\ 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \end{cases}$$

$f = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$

б). $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$\forall q \in \mathbb{Q} \quad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R} = $  $\sqrt[3]{q}$

в). $\mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{R}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}\times\mathbb{Z} = \forall r \in \mathbb{R} \ \forall z \in \mathbb{Z} \ \mathbb{R}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R} =$
$= \sqrt[3]{r^3+z^3}$

$\boxed{№5}$

а). $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow$ т.к. $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$

$2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}^2} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$$

т.к. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

ЧТД

б) $\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$

$$\underline{3}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots), \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2\}\}$$

$$\underline{5}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots), \dots \mid a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

$f: \underline{3}^{\mathbb{N}} \to \underline{5}^{\mathbb{N}}$ $f = id$ - инъекция $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{2}^{\mathbb{N}} \leq \underline{3}^{\mathbb{N}}$ $g: \underline{5}^{\mathbb{N}} \to \underline{3}^{\mathbb{N}}$

Перейдём из 5ричной в 3троичную:

$h(0) \leftrightarrow 00$

$h(1) \leftrightarrow 01$

$h(2) \leftrightarrow 02$

$h(3) \leftrightarrow 10$

$h(4) \leftrightarrow 11$

$g((a_0, a_1, \ldots)) = ($„первая цифра из $h(a_0)$", „вторая цифра из $h(a_0)$", „первая цифра из $h(a_1)$", $\ldots)$

(Аналогично заданию с семинара №10 (в) Набор задач №5)

в). Трехмерный куб равномощен своему сечению, содержащему более 1 точки.

Т.к. сечение содержит > 1 точки это либо прямая либо плоскость

Прямая представима как $\mathbb{R}$, плоскость как $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а куб как $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

(доказано на лекции)

1). $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

2). $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$

ЧТД

№6

Т.к. $P(\mathbb{R}) \sim 2^{\mathbb{R}}$ $\wedge$ $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$, т.к.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \Rightarrow P(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

ЧТД

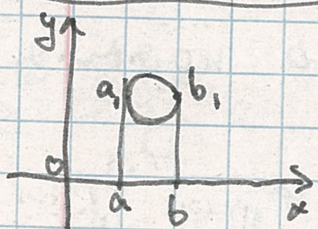
№7

Докажем, что $\forall$ окружность $\exists\, x,y \in \mathbb{Q}$

~~$x,y \in \mathbb{Q}$~~ d - диаметр окружности

отрезок $ab = d$

aa_1 и bb_1 - касательные



Возьмём отрезок $[ka, kb]$, $k \in \mathbb{N}$

$k(a-b) > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $[ka, kb]$ есть целое число

$z \in \mathbb{Z}$ вернёмся к отрезку $[a,b]$

в нём есть точка $\frac{z}{k}$: $\frac{z}{k} \in [a;b]$ и

и $\frac{z}{k} \in \mathbb{Q}$ ■

Значит в обеих окружностях есть точки с координатами $\in \mathbb{Q}$

Возьмём из обеих окружностей

Точку

$f: \mathbb{Q}^n$ -

если

что

$X \leq \mathbb{Q}$

($\mathbb{Q}$ - с

№9

$\forall$ сх

$\{x_n\}$,

$\{f(x_n)$

Также

всех

равно

$h: \mathbb{Q}$

$f: \mathbb{R}$

подстав

функц

что

точку $\in \mathbb{Q}$. получаем инъекцию $f: \mathbb{Q}^4 \to X$, т.к. остальные восьмерки $\cap$ эту если проходят через те же точки, что не удв. условию.

$X \lesssim \mathbb{Q}^4 \Rightarrow X \lesssim \mathbb{N}$ $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N})$

ЧТД

($\mathbb{Q}$ – счётно, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ – доказанно на лекции)

$\boxed{№9}$ Определение непрерывности по Гейне

$\forall$ сходящейся при $n \to \infty$ последоват. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится последовательность $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, причём $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n)$

Также известно, что $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}}$ во всех точках $\mathbb{R}$ сходятся послед. рациональных чисел

$h: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ – тривиальная инъекция

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция

поставим $\forall f$ в соответствие функцию $f \circ h: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Покажем что это соответствие инъективно

Пусть $f \neq f'$, т.е. $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Пусть $f \circ h = f' \circ h$

$\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – рациональная послед., такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \alpha$, тогда

$$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \cancel{\lim_{n\to\infty} (f \circ h)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (f\circ h)(q_n) = \lim_{n\to\infty} (f'\circ h)(q_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f'(q_n) = f'(\alpha)$$ Противорение =>

=> отображение инъективно

Инъекция из $\mathbb{R}$ в f =>

=> $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие функцию $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такую что $f_\alpha(x) = \alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Очевидно, что все f_α непрерывны =>

=> мощность множества функций $f = \mathfrak{c}$

ЧТД

№1
В –
Есл
смот
тогд
мно
=>
=>
№2
g(
=>
gob
{a
Пред
{f(
f(a
a,
a,

$\boxed{№10}$ Док, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B - конечно или счётно, то $A \setminus B \sim A$

Если A - бесконечно, B конечно или счётно, то $A \cup B \sim A$ (доказано на лекции), тогда к множеству $A \setminus B$ добавим множество $A \cap B$ =>

$$\Rightarrow A \setminus B \sim (A \setminus B) \cup (A \cap B) \sim A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \setminus B \sim A$$

чтд

$\boxed{№2}$ Пусть $g \circ f$ - инъекция

$g(b(x)) = g \circ f$ - инъекция, $b \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x$ инъекция

$g \circ b : \{(a,c) \subset A \times C \mid \exists b \in B$ такое, что $\{a, b\} \subset b$; $(b; c) \in f$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C\}$

Предположим f не инъективна

$$\begin{cases} f(a_1) = b \\ f(a_2) = b \\ a_1 \neq a_2 \\ a_1, a_2 \in A \end{cases} \text{ и } \begin{cases} g(f(a_1)) = c \\ g(f(a_2)) = c \end{cases}$$

, т.к. $g(f(x))$ - инъектив

получаем противоречие => $\frac{?}{?}$

$\Rightarrow g \circ f$ инъективна $\Rightarrow f$ инъективна

ЧТД

$\boxed{№3}$ 1) $f: A \to B$ – инъекция $\Rightarrow \forall C,$

$\forall g, h: C \to A$, $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g \circ h$

f – инъекция $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A}$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\forall x \in C$ $\forall g, h$ такие, что если $f \circ g = f \circ h$, то $f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = h(x) \Rightarrow g = h$

2) $f: A \to B$ – инъекция $\Leftarrow \forall C,$

$\forall g, h: C \to A$, $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g \circ h$

Пусть f – не инъекция, тогда

$\exists\, x_1 \neq x_2 \in A \mid f(x_1) = f(x_2)$

Расс

Тогда

то g

$\Rightarrow$

т.к.

где

$\Rightarrow f$

Рассмотрим g: $g(x_1') = x_1$; $g(x_2') = x_2$

тогда если $f(x_1) = f(x_2)$, где $x_1 = g(\alpha)$
$x_2 = h(\alpha)$

то $g(\alpha) = x_1 \Rightarrow \alpha = x_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_1') = x_1$ и $h(x_1') = x_2 = g(x_2')$

т.к. $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$, а $h(x_1') = g(x_2')$,

где $x_1' \neq x_2'$ получаем противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - инъекция ЧТД