

Vorlesungsskript zu Mathematik II

Kurs: Informatik

Dozent: Felix Neuner

`felix.neuner@uni-ulm.de`

In Anlehnung an:

Papula, L. (2015). Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1 Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

Papula, L. (2015). Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2 Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

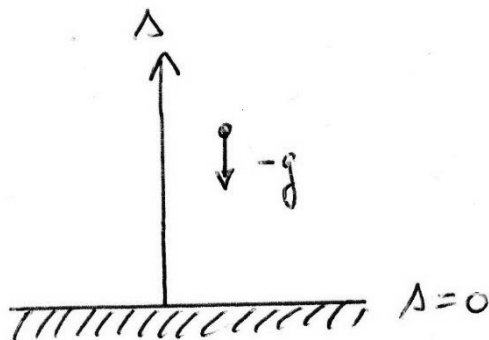
Inhaltsverzeichnis

1.	Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen	2
1.1	Mathematische Formulierung	3
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung	4
1.3	Anfangs- und Randwertprobleme	4
1.4	Lösen von DGL durch trennen der Variablen	6
1.5	Integration einer DGL durch Substitution	7
2.	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	9
2.1	Integration einer homogenen linearen DGL 1. Ordnung	9
2.2	Integration einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung durch „Variation der Konstanten“	10
2.3	Integration einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung durch „Aufsuchen einer partikulären Lösung“	12
2.4	Lineare DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	13
3.	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	15
3.1	Eigenschaften einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung	15
3.2	Integration einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	17
3.3	Integration einer inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	19
3.4	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	22
3.5	Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	26
3.7	Anwendungsbeispiele	31
4.	Fourier-Reihen und Fourier-Transformation	37
4.1	Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe	38
4.2	Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen	47
4.3	Fourier-Transformation und ihre Anwendung	48
5.	Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	50
5.1	Funktion von zwei unabhängigen Variablen	51
5.2	Flächenuntersuchungen, Höhenlinien	52
6.	Partielle Ableitungen	54
6.1	Partielle Ableitung 1. Ordnung	55
6.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	58
6.3	Satz von Schwarz	58
6.4	Vollständiges Differential und Tangentialebene	59
7.	Differentiation und Funktionen: Anwendungen	65
7.1	Gradient und Richtungsableitung	65
7.2	Implizite Differentiation	67
7.3	Extremaleigenschaften von Funktionen mit mehreren Variablen	69
7.4	Extremwerte mit Nebenbedingungen	74
7.5	Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren	75

1. Einführung in gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind in Naturwissenschaft und Technik allgegenwärtig, sind aber gleichwohl im Allgemeinen mit analytischen (unter Umständen aber auch mit numerischen) Methoden sehr schwer zu lösen. Nur in wenigen Spezialfällen können Sie in geschlossener Form analytisch gelöst werden.

Wir betrachten einen im luftleeren Raum frei fallenden Körper. Zur Beschreibung der Bewegung führen wir eine von der Erdoberfläche senkrecht nach oben gerichtete Koordinatenachse ein (s -Achse).



Der Körper unterliegt allein der Schwerkraft (Fallbeschleunigung $a = -g$). Das Minuszeichen besagt, dass die Beschleunigung entgegen der positiven Koordinatenrichtung wirkt. Aus der technischen Mechanik kennen wir außerdem den Zusammenhang

$$v(t) = \dot{s}(t) \quad \text{und} \quad a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t),$$

wobei mit dem Punkt die zeitliche Ableitung symbolisiert wird. Dabei ist $s(t)$ die Weg-Zeit-Funktion und $v(t)$ die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion. Für den freien Fall ergibt sich somit

$$\ddot{s}(t) = -g.$$

Diese Gleichung enthält die 2. Ableitung einer noch unbekannten Weg-Zeit-Funktion $s(t)$. Gleichungen dieser Art, die Ableitungen einer Funktion enthalten, werden als *Differentialgleichungen* bezeichnet. Bei der obigen Gleichung spricht man von einer Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung (da die höchste involvierte Ableitung eine 2. Ableitung ist).

Die Lösung dieser DGL ist einfach zu bekommen. Entweder versucht man diese zu erraten (probieren Sie es aus!) oder man integriert die DGL zwei Mal nacheinander, um sukzessive den Grad der Ableitung zu reduzieren. Es gilt dann

$$v(t) = \int a(t) dt = - \int g dt = -gt + c_1$$

mit der Integrationskonstanten c_1 . Durch erneute Integration erhalten wir die Weg-Zeit-Funktion

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + c_1) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2.$$

Diese Funktion enthält noch zwei voneinander unabhängige Integrationskonstanten. Das hier dargestellte Weg-Zeit-Gesetz ist die *allgemeine* Lösung der DGl $\ddot{s}(t) = -g$. Diese Parameter müssen für den Einzelfall aus den so genannten *Anfangsbedingungen* bestimmt werden. Bei einer DGl 2. Ordnung benötigen wir zwei solcher Anfangsbedingungen, da 2 Integrationskonstanten bestimmt werden müssen. In diesem Beispiel benötigen wir den Anfangsort $s(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$. Diese könnten im vorliegenden Beispiel zum Zeitpunkt $t = 0$ lauten:

$$s(0) = s_0 \text{ (Anfangshöhe) und } v(0) = v_0 \text{ (Anfangsgeschwindigkeit)}$$

Durch Einsetzen von $t = 0$ folgt dann sofort $c_1 = v_0$ und $c_2 = s_0$. Die Integrationskonstanten sind somit *eindeutig* durch Anfangshöhe und Anfangsgeschwindigkeit bestimmt und die DGl somit *eindeutig* lösbar (dies aber nur aufgrund der physikalisch festgelegten Anfangsbedingungen). Es gilt also:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

Eine solche spezielle (hier: den physikalischen Anfangsbedingungen angepasste) Lösung, heißt auch *partikuläre* Lösung (im Gegensatz zur *allgemeinen* Lösung mit den frei wählbaren Integrationskonstanten).

1.1 Mathematische Formulierung

Definition: Gewöhnliche Differentialgleichung

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten (hinreichend oft differenzierbaren) Funktion $y = y(x)$ bis zur n -ten Ordnung auftreten, heißt eine *gewöhnliche Differentialgleichung* (kurz: DGl) n -ter Ordnung.

In *impliziter* Form: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (also *nicht* aufgelöst nach der höchsten Abl.)

In *expliziter* Form: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Beispiele:

1. $y' = 2x$ explizite DGl 1. Ordnung
2. $x^2 + y' - y \cdot y'' = 0$ implizite DGl 2. Ordnung
3. $\dot{s}(t) = -g$ explizite DGl 2. Ordnung
4. $y^{(6)} - y^{(4)} + y'' = e^x$ implizite DGl 6. Ordnung

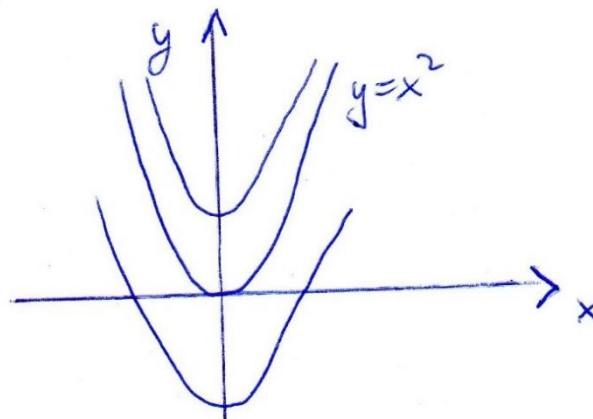
1.2 Lösungen einer Differentialgleichung

Definition: Lösung einer DGL

Eine Funktion $y = y(x)$ heißt eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt. Dabei enthält die *allgemeine* Lösung einer DGL n -ter Ordnung noch n frei wählbare Parameter (Integrationskonstanten). Eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund zusätzlicher Bedingungen den n Parametern *feste* Werte zuweist. Dies kann z.B. durch *Anfangsbedingungen* oder durch *Randbedingungen* geschehen.

Beispiel:

Die allgemeine Lösung der DGL $y' = 2x$ lautet $y = x^2 + c$ ($c \in \mathbb{R}$), stellt also eine Parabelschar dar. Die Konstante c legt dabei den Scheitel der Parabel fest.



1.3 Anfangs- und Randwertprobleme

Anfangswertproblem (AWP) n -ter Ordnung:

Vgl. auch Eingangsbeispiel „freier Fall“. Die Anfangsbedingungen sind durch den Funktionswert und die Ableitungen bis zur $n - 1$. Ordnung gegeben, d.h. $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)$. Dadurch werden die entsprechenden Integrationskonstanten festgelegt. Für die in den Anwendungen besonders wichtigen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung lässt sich ein AWP geometrisch wie folgt deuten:

DGL 1. Ordnung: Gesucht ist diejenige spezielle Lösungskurve der DGL, die durch den vorgegebenen Punkt $(x_0, y(x_0))$ verläuft.

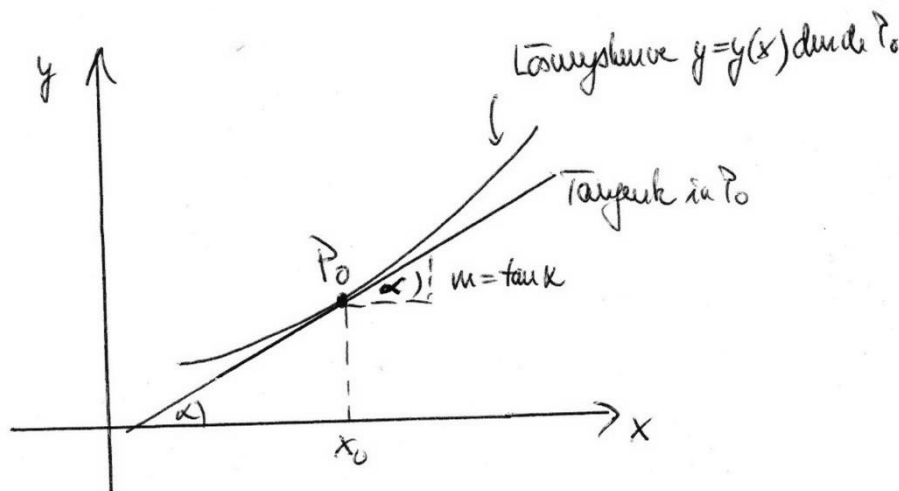
DGL 2. Ordnung: Gesucht ist diejenige spezielle Lösungskurve der DGL, die durch den vorgegebenen Punkt $(x_0, y(x_0))$ verläuft und dort die Steigung $y'(x_0) = m$ besitzt.

Beispiel:

Wir lösen das AWP $y' = 2x$ mit der Anfangsbedingung (AB) $y(0) = 1$. Wie oben schon gesehen, ist die allgemeine Lösung $y = x^2 + c$ ($c \in \mathbb{R}$). Die Konstante c wird durch Einsetzen der AB in die allgemeine Lösung bestimmt: $y(x=0) = 1 \Rightarrow c = 1$.

Randwertproblem (RWP) n -ter Ordnung:

Hier werden spezielle Lösungen einer DGI n -ter Ordnung gesucht, wobei an n verschiedenen Stellen x_1, x_2, \dots, x_n der Reihe nach die Funktionswerte festgelegt sind. Sie werden als Randwerte oder Randbedingungen bezeichnet. Bei DGI n. Ordnung heißt dies geometrisch: Die Lösungskurve ist so zu bestimmen, dass sie durch 2 vorgegebene Punkte verläuft. Nicht jedes Randwertproblem ist lösbar. Andererseits können auch mehrere Lösungen auftreten. Für Beispiele sei auf die Literatur verwiesen, z.B. Papula Band 2.

Geometrische Betrachtungen

1.4 Lösen von DGI durch trennen der Variablen

Eine DGI 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. Trennung der beiden Variablen (falls $g(y) \neq 0$; ansonsten „trivial“).
2. Integration auf beiden Seiten der Gleichung.
3. Auflösen der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen y (falls möglich).

Beispiel 1:

Gesucht ist die allgemeine Lösung von $y' = y$. Für $y \neq 0$ gilt

$$y' = \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx.$$

Durch Integration auf beiden Seiten der Gleichung folgt dann

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Die Lösung liegt jetzt in impliziter Form vor. Wir lösen nach y auf:

$$|y| = e^{x+c} = e^c \cdot e^x \quad \text{und damit} \quad y = \pm e^c \cdot e^x$$

Wenn die Integrationskonstante c alle *reellen* Zahlen durchläuft, durchläuft die Konstante e^c alle *positiven* Zahlen. Insgesamt folgt dann

$$y = \pm e^c \cdot e^x = K \cdot e^x \quad (K \neq 0).$$

Die allgemeine Lösung lautet schließlich

$$y = K \cdot e^x \quad (K \in \mathbb{R}),$$

denn für $K = 0$ erhalten wir hieraus die partikuläre Lösung $y = 0$.

Hinweis:

Bei der Integration einer DGI treten häufig logarithmische Terme wie $\ln|x|$ etc. auf. Es ist dann oft zweckmäßig, die Integrationskonstante auch in logarithmischer Form anzusetzen, also $\ln|c|$. Für $c \neq 0$ kann dieser Term auch alle reellen Zahlen annehmen. Der Vorteil dieser Methode besteht in einem geringeren Arbeitsaufwand.

Beispiel 2:

Gegeben ist das AWP $x + y \cdot y' = 0$, $y(0) = 2$. Wir lösen es durch Trennung der Variablen:

$$x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y dy = -x dx$$

$$\text{Integration: } \int y dy = -\int x dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + c.$$

Die allgemeine Lösung dieser DGI lautet also in impliziter Form: $x^2 + y^2 = 2c$. Diese Gleichung stellt geometrisch einen Kreis mit Radius $\sqrt{2c}$ und Mittelpunkt im Ursprung dar, falls $c > 0$. Durchläuft c alle positiven Zahlen, so entstehen konzentrische Kreise. Für $c = 0$ erhalten wir den Nullpunkt als Lösung, für $c < 0$ existieren keine Lösungen.

Wir kommen nun zurück auf das AWP: $y(0) = 2 \Rightarrow 4 = 2c \Rightarrow c = 2$. Die Lösungsgleichung lautet also $x^2 + y^2 = 4$, der Radius des entsprechenden Kreises beträgt 2.

1.5 Integration einer DGI durch Substitution

Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c) \quad (\text{Substitution: } u = ax + by + c)$$

und

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{Substitution: } u = \frac{y}{x})$$

lassen sich mittels der angegebenen *Substitution* schrittweise wie folgt lösen:

1. Durchführung der Substitution.
2. Integration der neuen DGI 1. Ordnung für die Hilfsfunktion u durch Trennung der Variablen.
3. Rücksubstitution und Auflösen der Gleichung nach y .

Beispiel:

Gegeben ist die DGL $y' = \frac{x+2y}{x}$. Wir formen Sie um zu $y' = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x}$. Diese DGL ist vom Typ

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Wir substituieren also

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot u \Rightarrow y' = u + x \cdot u'.$$

Damit transformiert sich die gegebene DGL folgendermaßen:

$$y' = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow u + x \cdot u' = 1 + 2u \Rightarrow x \cdot u' = 1 + u$$

Integration durch Trennung der Variablen:

$$x \frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x}$$

Es folgt

$$\ln|u+1| = \ln|x| + \ln c = \ln|c \cdot x|, \quad c \in \mathfrak{R}^+$$

und damit

$$u+1 = \pm c \cdot x \Rightarrow u = \pm c \cdot x - 1, \quad c \in \mathfrak{R}^+$$

Rücksubstitution:

$$y = x \cdot u = \pm c \cdot x^2 - x, \quad c \in \mathfrak{R}^+$$

Dies ist die allgemeine Lösung der gegebenen DGL.

2. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition

Eine DGL 1. Ordnung heißt *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \quad \text{darstellbar ist.}$$

Die Funktion $g(x)$ wird dabei als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. Fehlt das Störglied, d.h. ist $g(x) \equiv 0$, so heißt die lineare DGL *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Beispiele:

- | | |
|---|--|
| 1. $y' - x^2 \cdot y = 0$ | homogene lineare DGL 1. Ordnung |
| 2. $x \cdot y' + 2y = e^x$ | inhomogene lineare DGL 1. Ordnung |
| 3. $x \cdot y' + \sin(x) \cdot y + \cos(x) = x$ | inhomogene lineare DGL 1. Ordnung |
| 4. $y' = 1 - y^2$ | nicht-lineare inh. DGL 1. Ordnung, y tritt in 2. Potenz auf |
| 5. $y \cdot y' + x = 0$ | nicht-lineare hom. DGL 1. Ordnung, „gemischtes Produkt“ $y \cdot y'$ |
| 6. $x \cdot y' + x \cdot \sin(y) + \cos(x) = x$ | nicht-lineare inh. DGL. 1. Ordnung, $\sin y$! |

2.1 Integration einer homogenen linearen DGL 1. Ordnung

Eine *homogene lineare* DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

wird durch Trennung der Variablen gelöst. Die allgemeine Lösung ist dann in der Form

$$y = c \cdot e^{-\int f(x) dx} \quad (c \in \mathbb{R})$$

darstellbar. Diese Lösungsformel kann (wie angesprochen durch Trennung der Variablen) hergeleitet werden. Andererseits können Sie die Lösung in die DGL einsetzen und somit Ihre Richtigkeit verifizieren. Probieren Sie beide Varianten aus!

Beispiel:

Gegeben ist eine homogene lineare DGL 1. Ordnung in Form des AWP

$$y' - 2xy = 0, \quad y(0) = 5.$$

Die allgemeine Lösung kann nun durch Trennung der Variablen bestimmt werden, aber auch direkt mit Hilfe der obigen Lösungsformel. Mit $f(x) = -2x$ folgt dann

$$y = c \cdot e^{\int 2x dx} = c \cdot e^{x^2}.$$

$$\text{Es gilt } y(0) = 5 \Rightarrow 5 = c \cdot e^0 \Rightarrow c = 5,$$

also hat das AWP die Lösung $y = 5 \cdot e^{x^2}$.

2.2 Integration einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung durch „Variation der Konstanten“

Eine *inhomogene lineare* DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

lässt sich durch „Variation der Konstanten“ schrittweise wie folgt lösen:

1. Integration der zugehörigen homogenen DGL $y' + f(x) \cdot y = 0$,

$$\text{Lösung: } y_0 = K \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

2. Variation der Konstanten: Die Integrationskonstante K wird durch eine Funktion $K(x)$ ersetzt. Den Lösungsansatz

$$y = K(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

setzt man dann in die *inhomogene* DGL ein und erhält eine einfache DGL 1. Ordnung für die Faktorfunktion $K(x)$, die durch Integration direkt gelöst werden kann.

Beispiel:

Gegeben ist die DGI

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}.$$

Die zugehörige homogene DGI

$$y' - 3y = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y_0 = K \cdot e^{3x} \text{ (nachrechnen!).}$$

Die inhomogene DGI lösen wir durch den Ansatz

$$y = K(x) \cdot e^{3x} \text{ (Variation der Konstanten)}$$

Es folgt dann

$$y' = K'(x) \cdot e^{3x} + 3K(x) \cdot e^{3x}.$$

Einsetzen in die DGI liefert

$$y' - 3y = K'(x) \cdot e^{3x} + 3K(x) \cdot e^{3x} - 3K(x) \cdot e^{3x} = x \cdot e^{4x}$$

und damit

$$K'(x) \cdot e^{3x} = x \cdot e^{4x} \Rightarrow K'(x) = x \cdot e^x$$

Durch unbestimmte Integration folgt schließlich

$$K(x) = \int x \cdot e^x dx = (x-1) \cdot e^x + c \quad (\text{vgl. auch Integraltafeln, Formelsammlung})$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y = K(x) \cdot e^{3x} = (x-1) \cdot e^{4x} + c \cdot e^{3x} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

2.3 Integration einer inhomogenen linearen DGI 1. Ordnung durch „Aufsuchen einer partikulären Lösung“

Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen linearen* DGI 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist als *Summe* aus der allgemeinen Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen DGI

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der inhomogenen linearen DGI darstellbar, d.h.

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Lösungsverfahren:

Eine *inhomogene lineare* DGI 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

lässt sich in vielen Fällen wie folgt lösen:

1. Integration der zugehörigen homogenen DGI (siehe oben) zur Erlangung der homogenen Lösung y_0 .
2. Mit Hilfe eines geeigneten Lösungsansatzes, der noch einen oder mehrere Parameter enthält, wird eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen linearen DGI bestimmt.
3. Die allgemeine Lösung y der inhomogenen linearen DGI ist dann die Summe aus y_0 und der partikulären Lösung y_p , d.h. $y = y_0 + y_p$.

Bemerkung:

Der Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung hängt sowohl vom Typ der Koeffizientenfunktion $f(x)$ als auch vom Typ der Störfunktion $g(x)$ ab. Im konkreten Fall muss man sich zunächst für einen speziellen Funktionstyp entscheiden und dann versuchen, die Parameter so zu bestimmen, dass diese Funktion der inhomogenen DGI genügt. Das gelingt jedoch nur in einfachen Fällen. Ein Beispiel findet sich im nächsten Abschnitt.

2.4 Lineare DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann in der Form

$$y' + a \cdot y = g(x) \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

geschrieben werden und stellt einen Spezialfall der linearen DGL 1. Ordnung dar.

Die *homogene* DGL besitzt die allgemeine Lösung

$$y_0 = c \cdot e^{-a \cdot x} \quad (c \in \mathbb{R})$$

Die inhomogene DGL kann wie gehabt durch Variation der Konstanten oder durch Aufsuchen einer partikulären Lösung gelöst werden. In letzterem Fall ist ein geeigneter Lösungsansatz zu wählen. Dies wird im unteren Beispiel und den Übungen klarer (vgl. auch Papula Band 2).

Beispiel:

Gegeben ist die DGL

$$y' + 2y = 2x^2 - 4.$$

Die zugehörige homogene DGL $y' + 2y = 0$ besitzt die Lösung

$$y_0 = c \cdot e^{-2 \cdot x} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Als Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung wählen wir

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 4.$$

Wir ordnen die einzelnen Terme nach x -Potenzen und erhalten

$$2a \cdot x^2 + (2a + 2b) \cdot x + (b + 2c) = 2x^2 - 4.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das folgende einfache lineare Gleichungssystem (bereits in gestaffelter Form):

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$2a + 2b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$b + 2c = -4 \Rightarrow c = -1,5$$

Damit folgt $y_p = x^2 - x - 1,5$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$y = y_0 + y_p = c \cdot e^{-2x} + x^2 - x - 1,5 \quad (c \in \mathbb{R}).$$

3. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition

Eine DGL vom Typ $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x)$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

heißt eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkung:

Erneut gelten folgende Bezeichnungen: $g(x)$ heißt *Störfunktion*. Ist $g(x) \equiv 0$, so heißt die DGL *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Beispiele:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $y'' + 3y = 0$ | homogen, linear, 2. Ordnung, konstante Koeffizienten |
| 2. $y'' + y' - 10y = \cos(x)$ | inhomogen, linear, 2. Ordnung, konstante Koeffizienten |
| 3. $y'' + x \cdot y' - 10y = \cos(x)$ | inh., linear, 2. Ordnung, <i>keine</i> konstante Koeffizienten |
| 4. $y'' + y' - y^2 = 0$ | nicht-linear, 2. Ordnung |

3.1 Eigenschaften einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung

Eine homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ($y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$) besitzt folgende Eigenschaften:

1. Ist $y_1(x)$ eine Lösung der DGL, so ist auch $c \cdot y_1(x)$ ($c \in \mathbb{R}$) eine Lösung der DGL.
2. Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der DGL, so ist auch die *Linearkombination* $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ eine Lösung der DGL ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
3. Ist $y(x) = u(x) + j \cdot v(x)$ eine *komplexwertige* Lösung der DGL, so sind auch *Realteil* $u(x)$ und *Imaginärteil* $v(x)$ (reelle) Lösungen der DGL.

Wir verzichten auf einen Beweis. Durch direktes Einsetzen können diese jedoch einfach nachgewiesen werden.

Aufgabe:

Gegeben ist die Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0 \quad (\omega > 0).$$

Partikuläre Lösungen sind u.a. $y_1(x) = \sin(\omega \cdot x)$ und $y_2(x) = \cos(\omega \cdot x)$, aber auch die komplexwertige Exponentialfunktion $y(x) = e^{j\omega \cdot x}$ löst die Schwingungsgleichung. Verifizieren Sie anhand dieser Beispiele die Punkte 1. – 3. (s.o.).

Definition

Zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung werden als *Basisfunktionen* (auch: *Basislösungen*) der DGL bezeichnet, wenn gilt

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (W: \text{„Wronski-Determinante“}).$$

Man spricht dann auch von *linear unabhängigen* Lösungen.

Satz über die Lösungsmenge einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

ist als Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen (Basisfunktionen) $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in der Form

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

darstellbar.

Bemerkung:

Die Basisfunktionen bilden eine so genannte *Fundamentalebasis*, auch *Fundamentalsystem* genannt.

Beispiel:

Gegeben ist die Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 \cdot y = 0 \quad (\omega > 0).$$

Partikuläre Lösungen sind u.a. $y_1(x) = \sin(\omega \cdot x)$ und $y_2(x) = \cos(\omega \cdot x)$. Diese bilden eine Fundamentalebasis der DGL, da ihre Wronski-Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Es gilt nämlich

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \\ \omega \cdot \cos(\omega x) & -\omega \cdot \sin(\omega x) \end{vmatrix} = -\omega \cdot [\sin^2(\omega x) + \cos^2(\omega x)] = -\omega \neq 0.$$

Die allgemeine Lösung ist damit in der Form

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(\omega x) + c_2 \cdot \cos(\omega x) \quad \text{darstellbar.}$$

3.2 Integration einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Mit dem Lösungsansatz $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$ lässt sich eine *Fundamentalebasis* y_1, y_2 der DGL

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

finden. Die *Basislösungen* hängen dabei von den Lösungen λ_1, λ_2 der zugehörigen *charakteristischen Gleichung* (auch: *charakteristisches Polynom*)

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$

ab, wobei die folgenden Fälle zu unterscheiden sind ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)

Fundamentalebasis: $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$

Allgemeine Lösung: $y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = c$ (reell)

Fundamentalebasis: $y_1 = e^{cx}, y_2 = x \cdot e^{cx}$

Allgemeine Lösung: $y = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{cx}$

3. Fall: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)

Reelle Fundamentalebasis: $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x), y_2 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x)$

Allgemeine Lösung: $y = e^{\alpha x} \cdot \{c_1 \cdot \sin(\omega x) + c_2 \cdot \cos(\omega x)\}$

Beispiel 1:

Gegeben ist die DGI $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 3 \cdot \lambda - 4 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$ (1. Fall)

Fundamentalebasis: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-4x}$

Allgemeine Lösung: $y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-4x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Beispiel 2:

Gegeben ist die DGI $y'' + 4y' + 20y = 0$.

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4 \cdot \lambda + 20 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = -2 + 4j, \lambda_2 = -2 - 4j$ (3. Fall)

Reelle Fundamentalebasis: $y_1 = e^{-2x} \sin(4x), y_2 = e^{-2x} \cos(4x)$

Allgemeine Lösung: $y = e^{-2x} \{c_1 \sin(4x) + c_2 \cos(4x)\} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

3.3 Integration einer inhomogenen linearen DGI 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die *allgemeine Lösung* $y = y(x)$ der DGI

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

lautet

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x),$$

wobei $y_0(x)$ die *allgemeine Lösung* der zugehörigen *homogenen* DGI $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ ist und $y_p(x)$ eine (beliebige) *partikuläre Lösung* der *inhomogenen* DGI darstellt.

Lösungsverfahren:

Dadurch ergibt sich das Lösungsverfahren für die DGI *) wie folgt:

1. Zunächst wird die *allgemeine Lösung* $y_0(x)$ von $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ bestimmt (*homogene Lösung*).
2. Dann ermittelt man mit einem geeigneten Lösungsansatz eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGI.
3. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGI ist dann

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Bemerkungen:

1. In den Beispielen und Übungen soll deutlich werden, wie ein geeigneter Lösungsansatz (siehe 2.) für die partikuläre Lösung gefunden werden kann (dazu mehr in der Vorlesung!). Dies funktioniert allerdings nur in einfachen Fällen. Eventuell vertiefen wir dies in der Vorlesung auch anhand eines Beiblattes (vgl. auch Papula Band 2, Kapitel 3.4.).
2. Es gibt auch ein formaleres Verfahren zum Aufsuchen partikulärer Lösungen, nämlich mit Hilfe der Wronski-Determinante.

Beispiel 1:

Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGI

$$y'' + y' - 2y = 10x + 1.$$

Zunächst benötigen wir die allgemeine Lösung der homogenen DGI

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGI

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ein geeigneter Lösungsansatz für die inhomogene DGI lautet

$$y_p = a \cdot x + b,$$

wobei die reellen Parameter a und b zu bestimmen sind. Überlegen Sie sich, warum ein solcher Ansatz zielführend sein könnte.

Den Ansatz setzen wir in die inhomogene DGI ein. Dazu benötigen wir

$$y_p' = a \quad \text{sowie} \quad y_p'' = 0.$$

Es gilt also

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = 0 + a - 2(ax + b) = 10x + 1$$

Koeffizientenvergleich: $-2a = 10 \Rightarrow a = -5$ und $a - 2b = 1 \Rightarrow b = -3$.

Also lautet die partikuläre Lösung $y_p = -5 \cdot x - 3$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGI ist dann

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x} - 5 \cdot x - 3 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Machen Sie die Probe, um das Ergebnis zu verifizieren!

Beispiel 2:

Gesucht ist die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + y' - 2y = 3\sin(2x).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet wie in Beispiel 1

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Als Lösungsansatz für die inhomogene DGL wählen wir

$$y_p = a \cdot \sin(2x) + b \cdot \cos(2x) \quad (\text{Warum macht dies Sinn?}),$$

wobei die reellen Parameter a und b zu bestimmen sind. Den Ansatz setzen wir in die inhomogene DGL ein. Dazu benötigen wir

$$y_p' = 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x) \quad \text{sowie} \quad y_p'' = -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) = -4y_p.$$

Es gilt also

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = -4a \sin(2x) - 4b \cos(2x) + 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x) - 2a \sin(2x) - 2b \cos(2x) = 3\sin(2x)$$

Wir ordnen die Glieder nach Sinus- und Kosinusfunktionen:

$$\sin(2x) \cdot \{-4a - 2b - 2a - 3\} + \cos(2x) \cdot \{-4b + 2a - 2b\} = 0$$

Koeffizientenvergleich (alle Vorfaktoren müssen verschwinden!):

$$-6a - 2b - 3 = 0 \quad \text{und} \quad -6b + 2a = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem besitzt die Lösung

$$a = -\frac{9}{20}, \quad b = -\frac{3}{20}.$$

Also lautet die partikuläre Lösung $y_p = -\frac{9}{20} \sin(2x) - \frac{3}{20} \cos(2x).$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist dann

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-2x} - \frac{9}{20} \sin(2x) - \frac{3}{20} \cos(2x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Machen Sie die Probe, um das Ergebnis zu verifizieren!

3.4 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition

Eine DGL n -ter Ordnung vom Typ

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x) \quad (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$$

heißt eine *lineare DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*.

Aufgabe:

Überlegen Sie sich selbst je ein Beispiel für eine homogene bzw. eine inhomogene lineare DGL n -ter Ordnung.

Integration der homogenen linearen DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der Lösungsformalismus verläuft analog zu dem bei homogenen linearen DGLn 2. Ordnung.

Definition:

n Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n einer *homogenen* linearen DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$$

werden als *Basisfunktionen* oder *Basislösungen* dieser DGL bezeichnet, wenn für die aus ihnen gebildete *Wronski-Determinante*

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

gilt.

Satz über die Lösungsmenge einer homogenen linearen DGI n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Die allgemeine Lösung $y = y(x)$ von

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$$

ist als *Linearkombination* von n *Basislösungen* (*linear unabhängigen Lösungen*) y_1, y_2, \dots, y_n in der Form

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x) \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

darstellbar.

Bemerkung:

Erneut bilden die Basislösungen eine *Fundamentalebasis* (*Fundamentalsystem*).

Satz zur Integration der homogenen linearen DGI:

Mit dem Lösungsansatz $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$ lässt sich eine *Fundamentalebasis* y_1, y_2, \dots, y_n der DGI

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0 \quad (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$$

finden. Die *Basislösungen* hängen dabei von den Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (diese werden auch als *Eigenwerte* bezeichnet) der zugehörigen *charakteristischen Gleichung* (auch: *charakteristisches Polynom*)

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

ab, wobei die folgenden Fälle zu unterscheiden sind ($c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$):

1. Fall: Es treten nur einfache reelle Lösungen auf

Die n verschiedenen reellen Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ führen zur *Fundamentalebasis*

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

Allgemeine Lösung: $y = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n x}$

2. Fall: Es treten auch mehrfache reelle Lösungen auf

Eine r -fache reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \alpha$ führt zu den r Basislösungen (Basisfunktionen)

$$y_1 = e^{\alpha x}, y_2 = x \cdot e^{\alpha x}, \dots, y_r = x^{r-1} \cdot e^{\alpha x}$$

und somit zu folgendem Beitrag in der allgemeinen Lösung der DGL:

$$(c_1 + c_2 \cdot x + \dots + c_r \cdot x^{r-1}) \cdot e^{\alpha x}$$

3. Fall: Es treten konjugiert komplexe Lösungen auf

Eine (einfache) konjugiert komplexe Lösung $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ führt zu den beiden (reellen) Basisfunktionen

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x), y_2 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x)$$

und somit zu folgendem Beitrag in der allgemeinen Lösung der DGL:

$$e^{\alpha x} \cdot \{c_1 \cdot \sin(\omega x) + c_2 \cdot \cos(\omega x)\}$$

Bei einer r -fachen konjugiert komplexen Lösung müssen die Konstanten c_1 und c_2 durch Polynomfunktionen vom Grade $r - 1$ ersetzt werden.

Beispiel:

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0 \quad (4. \text{ Ordnung})$$

Charakteristische Gleichung mit Lösungen (3. Fall):

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_{3,4} = \pm 2j$$

Fundamentalebasis der DGL:

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x, y_3 = \sin(2x), y_4 = \cos(2x)$$

Allgemeine Lösung:

$$y = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot \sin(2x) + c_4 \cdot \cos(2x) \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$$

Integration der inhomogenen linearen DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x) \quad (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R})$$

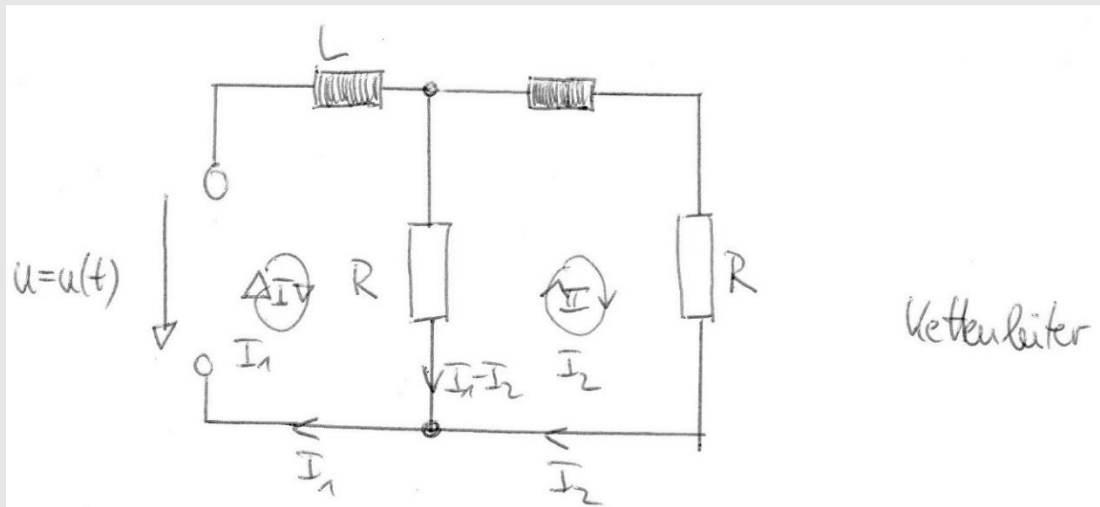
kann nach dem folgenden Verfahren bestimmt werden.

Lösungsverfahren:

1. Zunächst wird die *allgemeine* Lösung $y_0(x)$ der zugehörigen homogenen DGL bestimmt (*homogene Lösung*).
2. Dann ermittelt man mit einem geeigneten Lösungsansatz eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen DGL.
3. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist dann $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$.

3.5 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: Verzweigter Stromkreis (Kettenleiter)



Nach der Maschenregel gilt im dargestellten Stromkreis

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{R}{L}I_1 + \frac{R}{L}I_2 + \frac{U}{L} \quad \text{und} \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{R}{L}I_1 - \frac{2R}{L}I_2$$

Es handelt sich hier um zwei lineare DGLn 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Neu ist dabei für uns, dass die beiden unbekannten zeitabhängigen Größen I_1 und I_2 nicht unabhängig voneinander sind, sondern einer *Kopplung* unterliegen. Man spricht hier von einem *System von gekoppelten DGLn* (in diesem Fall 1. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten).

Grundbegriffe

Zwei *gekoppelte lineare DGLn 1. Ordnung* mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$y_1' = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + g_1(x) \quad \text{und} \quad y_2' = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + g_2(x)$$

bilden ein *lineares Differenzialgleichungs-System 2. Ordnung*, das auch in *Matrixform*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

oder in der *Kurzschreibweise*

$$\vec{y}' = A \cdot \vec{y} + \vec{g}(x)$$

dargestellt werden kann.

Dabei sind die a_{ik} reelle konstante Koeffizienten, welche die *Koeffizientenmatrix* A bilden. \vec{g} ist der *Störvektor* mit den Störgliedern (Störfunktionen) g_1 und g_2 , \vec{y} ist der *Lösungsvektor* mit den Lösungen y_1 und y_2 als Komponenten,

Homogene und inhomogene Systeme:

Das obige lineare DGL-System heißt *homogen*, falls $\vec{g} \equiv \vec{0}$, andernfalls heißt es *inhomogen*. Homogene lineare DGL-Systeme haben also die Form $\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$.

Allgemeine Lösung eines linearen Systems:

Die allgemeine Lösung $\vec{y} = \vec{y}(x)$ enthält noch *zwei* voneinander unabhängige Parameter.

Anfangswertproblem (AWP):

Ein AWP liegt vor, wenn den beiden Komponenten des Lösungsvektors $\vec{y} = \vec{y}(x)$ ein Anfangswert vorgegeben wird, aus dem sich dann die unbekannten Parameter der allgemeinen Lösung bestimmen lassen. Man erhält so eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung des DGL-Systems.

Beispiel:

Das lineare DGL-System

$$\frac{dI_1}{dt} = \dot{I}_1 = -\frac{R}{L}I_1 + \frac{R}{L}I_2 + \frac{U}{L} \quad \text{und} \quad \frac{dI_2}{dt} = \dot{I}_2 = \frac{R}{L}I_1 - \frac{2R}{L}I_2$$

kann in Matrixform folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{R}{L} \\ \frac{R}{L} & -\frac{2R}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{U}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um ein inhomogenes System.

Integration des homogenen linearen DGL-Systems 2. Ordnung

Ein homogenes lineares DGL-System 2. Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{y}' = A \cdot \vec{y}$$

lässt sich stets durch einen Exponentialansatz

$$y_1 = K_1 \cdot e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y_2 = K_2 \cdot e^{\lambda x}$$

mit einem zunächst noch unbekannten Parameter λ lösen. Die Werte dieses Parameters sind dabei die *Eigenwerte* der Koeffizientenmatrix A und werden somit aus der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

berechnet. Dabei sind 3 Fälle zu unterscheiden ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)

Erste Lösungsfunktion:

$$y_1 = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

Die zweite Lösungsfunktion wird dann aus der Gleichung

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} \cdot (y_1' - a_{11}y_1)$$

durch Einsetzen ermittelt.

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ (reell)

Erste Lösungsfunktion:

$$y_1 = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{\alpha x}$$

Die zweite Lösungsfunktion erhält man wiederum durch Einsetzen.

3. Fall: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)

Erste Lösungsfunktion:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \{c_1 \cdot \sin(\omega x) + c_2 \cdot \cos(\omega x)\}$$

Die zweite Lösungsfunktion erhält man wiederum durch Einsetzen.

Bemerkung:

Eine einzelne DGL 2. Ordnung kann in ein lineares System 2. Ordnung überführt werden. Ausgehend von

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

kann man schreiben

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

und erhält das äquivalente System

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Damit sind die jeweiligen Lösungsstrukturen äquivalent. Je nach Problemstellung kann es hilfreich sein, die eine Form in die andere zu überführen. Dies kann auch auf Systeme höherer Ordnungen verallgemeinert werden.

Beispiel:

Gegeben ist das homogene System 2. Ordnung

$$y_1' = -y_1 + 3y_2 \quad \text{und} \quad y_2' = 2y_1 - 2y_2, \text{ umgeschrieben} \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristische Gleichung mit Lösungen:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1$$

Allgemeine Lösung: ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$y_1 = c_1 \cdot e^{-4x} + c_2 \cdot e^x$$

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} \cdot (y_1' - a_{11}y_1) = \dots = -c_1 \cdot e^{-4x} + \frac{2}{3}c_2 \cdot e^x$$

Dargestellt als Lösungsvektor:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-4x} + c_2 \cdot e^x \\ -c_1 \cdot e^{-4x} + \frac{2}{3}c_2 \cdot e^x \end{pmatrix}.$$

Integration des inhomogenen linearen DGI-Systems 2. Ordnung

Das *inhomogene* System

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. Zunächst wird die *allgemeine* Lösung $y_{1(0)} = y_{1(0)}(x)$ und $y_{2(0)} = y_{2(0)}(x)$ des zugehörigen *homogenen* Systems bestimmt.
2. Dann ermittelt man mit Hilfe eines geeigneten Lösungsansatzes eine partikuläre Lösung $y_{1(p)} = y_{1(p)}(x)$ und $y_{2(p)} = y_{2(p)}(x)$. Beim Lösungsansatz sind in *beiden* Funktionen jeweils *beide* Störfunktionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ entsprechend zu berücksichtigen.
3. $y_1 = y_{1(0)} + y_{1(p)}$ und $y_2 = y_{2(0)} + y_{2(p)}$

Bemerkung 1:

Der Rechenaufwand kann aufgrund der relativ vielen zu bestimmenden Parameter hoch werden. Bei der Berechnung dieser in den Lösungsansätzen auftretenden Parameter stößt man auf lineare Gleichungssysteme, die bei geeigneten Ansätzen eindeutig lösbar sind.

Bemerkung 2:

Systeme linearer DGLn können auch nach dem *Eliminationsverfahren* gelöst werden. Dabei wird ein System zunächst auf eine einzelne DGL höherer Ordnung gebracht. Diese kann dann nach dem bekannten Verfahren gelöst werden. Wir gehen darauf im Rahmen des nun folgenden Abschnitts näher ein.

3.6 Anwendungsbeispiele

Beispiel 1: Radioaktiver Zerfall

Radioaktive Substanzen zerfallen nach statistischen Gesetzmäßigkeiten. Wir stellen eine DGL für den radioaktiven Zerfall auf. Dabei sei

$n = n(t)$: Anzahl der zur Zeit t noch vorhandenen Atomkerne

dt : Kurzes Beobachtungsintervall (infinitesimal kleines Zeitintervall)

dn : Anzahl der im Beobachtungsintervall dt zerfallenen Atomkerne

Man kann annehmen, dass die Anzahl dn der im Beobachtungsintervall dt zerfallenen Atomkerne sowohl dem Beobachtungsintervall dt als auch der Anzahl n der noch vorhandenen Atomkerne proportional ist, also

$$dn \propto dt, \quad dn \propto n \quad \Rightarrow \quad dn \propto n \cdot dt .$$

Aus dieser Proportionalität erhalten wir durch Einführen der Proportionalitätskonstanten $\lambda > 0$ (Zerfallskonstante; diese wird experimentell bestimmt) die DGL

$$dn = -\lambda \cdot n \cdot dt \quad \text{bzw.} \quad \frac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n \quad \text{bzw.} \quad \frac{dn}{dt} + \lambda \cdot n = 0 .$$

Dabei bedeutet das Minuszeichen, dass die Anzahl der Atomkerne ständig abnimmt. Wir haben nun eine homogene lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhalten. Die allgemeine Lösung dieser DGL lautet

$$n(t) = c \cdot e^{-\lambda t} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Den Parameter c kann man aus dem Anfangswert $n(0) = n_0$ bestimmen. Es folgt dann $c = n_0$, also erhalten wir das Zerfallsgesetz

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t} .$$

Skizzieren Sie eine Zerfallskurve!

Beispiel 2: Fallender Körper mit Luftwiderstand

Bereits in der Hinführung zu Differentialgleichungen haben wir uns mit einem fallenden Körper unter Berücksichtigung des Luftwiderstands beschäftigt. Allerdings haben wir dort das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz als gegeben hingenommen. Jetzt wollen wir dieses mit Hilfe einer DGL herleiten. Als Ausgangspunkt für die Dynamik des fallenden Körpers dient die Kräftebilanz. Nach dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik (2. Newtonsches Axiom) gilt

$$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v^2.$$

Dabei ist m die Masse des Körpers, a die Beschleunigung, die der Körper erfährt, g die Fallbeschleunigung, v die Geschwindigkeit und k ein Reibungskoeffizient. Die linke Seite der Gleichung stellt somit die d'Alembertsche Trägheitskraft dar, auf der rechten Seite die Schwerkraft sowie die Reibungskraft, die als proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit angenommen wird. Es ist zu beachten, dass die Reibungskraft der Schwerkraft (und damit auch der Bewegungsrichtung entgegen wirkt. Daher rührt das Minuszeichen. Dabei ist weiterhin zu bemerken, dass die Richtung der Schwerkraft positiv gewählt wurde (ansonsten muss man die Vorzeichen auf der rechten Seite umkehren).

Mit der Beziehung

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

erhalten wir eine DGL 1. Ordnung, nämlich

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - k \cdot v^2$$

Diese kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Wir formen die DGL zunächst um nach

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2 \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{g - \frac{k}{m} \cdot v^2} = dt. \quad *)$$

Jetzt sind die Variablen getrennt und die DGL kann prinzipiell integriert werden. Allerdings führen wir weitere Umformungen durch, um die ein Integral zu bekommen, welches mit Hilfe unserer Formelsammlung gelöst werden kann. Dazu schreiben wir

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m} \cdot v^2} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{1 - \frac{k}{mg} \cdot v^2}$$

und substituieren $x = \sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot v$. Damit folgt $\frac{dx}{dv} = \sqrt{\frac{k}{mg}} \Rightarrow dv = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot dx$.

Jetzt können wir die Gleichung *) integrieren. Es gilt dann

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m} \cdot v^2} = \int dt \quad \underset{\text{Substitution}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{g} \cdot \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \int \frac{1}{1-x^2} dx = \int dt.$$

Aus physikalischen Gründen gilt $0 \leq x < 1$. Die zugrunde liegende Integration ergibt dann mit Hilfe der Formelsammlung

$$\sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \operatorname{artanh} x = t + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Durch Rücksubstitution und Umformen folgt dann

$$\operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} \cdot v \right) = \sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot (t + c) \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Auflösen nach v ergibt

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh \left\{ \sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot (t + c) \right\} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Wir nehmen an, dass der Fall aus der Ruhe heraus erfolgt, das heißt die Anfangsbedingung ist $v(0) = 0$. Daraus lässt sich die Integrationskonstante c berechnen. Es gilt

$$v(0) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh \left\{ \sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot c \right\} = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Wir erhalten also das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v = v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \tanh \left\{ \sqrt{\frac{gk}{m}} \cdot t \right\} \quad (t \geq 0).$$

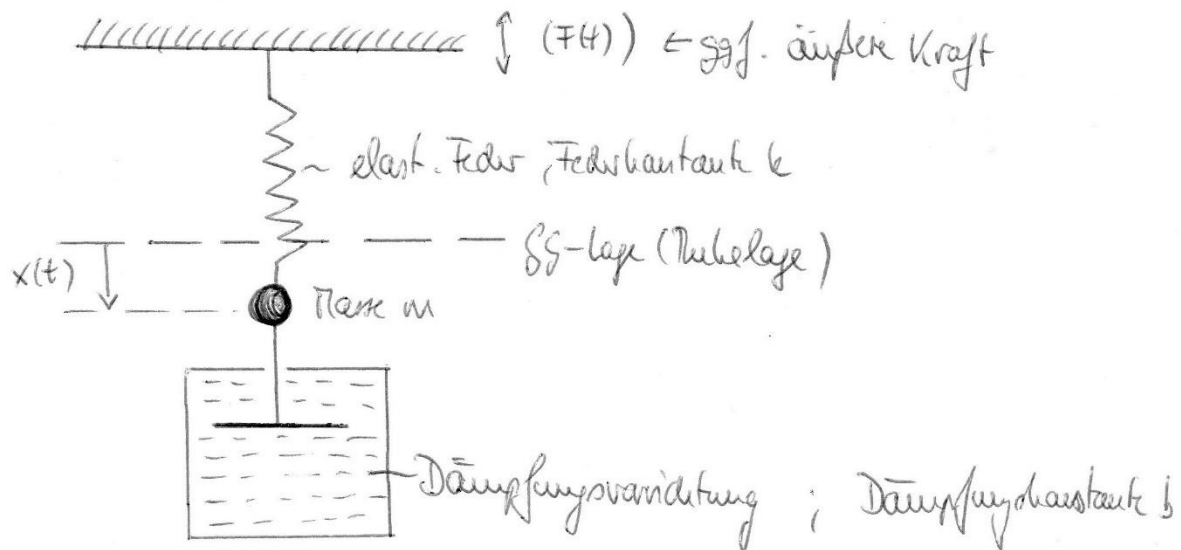
Damit ist das Problem gelöst. Wir wollen das Ergebnis aber noch weiter untersuchen. Für $t \rightarrow \infty$ strebt die Fallgeschwindigkeit gegen den Endwert

$$v_E = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (\text{Begründen Sie dies!}).$$

Der Körper fällt dann kräftefrei, d.h. mit konstanter Endgeschwindigkeit v_E , da sich Gewichtskraft und Reibungskraft (Luftwiderstand) aufheben. Dieses Ergebnis ist konsistent mit der Ausgangsgleichung, wenn man $m \cdot a = 0$ setzt (überprüfen Sie dies!). Wir können nun vereinfacht schreiben

$$v = v(t) = v_E \cdot \tanh \left\{ \frac{g}{v_E} \cdot t \right\}, \quad v_E = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (t \geq 0).$$

Beispiel 3: Mechanische Schwingungen



Mit den Bezeichnungen aus der oben stehenden Skizze gilt:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F(t).$$

Dabei ist $F(t)$ eine zusätzliche von außen wirkende zeitabhängige Kraft (Störgröße). Diese kann beispielsweise über einen Exzenter einwirken. Wirkt eine solche äußere Kraft (gilt also $F(t) \neq 0$), so handelt es sich *nicht* mehr um eine *freie* Schwingung. Insbesondere bei periodisch einwirkenden äußeren Kräften spricht man dann von einer *erzwungenen* Schwingung.

Es ergeben sich folgende Schwingungstypen:

1. Freie ungedämpfte Schwingung

Keine äußere Kraft ($F(t) = 0$) und keine Dämpfung ($b = 0$): $m \ddot{x} + kx = 0$

2. Freie gedämpfte Schwingung

Keine äußere Kraft ($F(t) = 0$), aber Dämpfung ($b \neq 0$): $m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = 0$

3. Erzwungene Schwingung

Periodische äußere Kraft, d.h. $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)$ mit der Erregerkreisfrequenz ω :

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F(t)$$

Bemerkung:

Freie Schwingungen werden durch homogene, erzwungene Schwingungen durch inhomogene lineare DGLn 2. Ordnung beschrieben.

1. Freie ungedämpfte Schwingung

Ein harmonischer Feder-Masse-Schwinger wird durch die DGL

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{mit der Eigenkreisfrequenz } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

beschrieben. Letztere Schwingungsgleichung gilt für alle so genannten harmonischen Schwingungen. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \text{mit den (konjugiert komplexen) Lösungen} \quad \lambda_{1,2} = \pm j \cdot \omega_0.$$

Die (reelle) Fundamentalbasis der DGL ist also

$$x_1 = \sin(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad x_2 = \cos(\omega_0 t).$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$x(t) = c_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + c_2 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Sie ist aber auch in der Form

$$x(t) = c \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (c > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

darstellbar. Wer besonders interessiert ist, kann mit Hilfe der Additionstheoreme die Äquivalenz der beiden Lösungen zeigen.

2. Freie gedämpfte Schwingung

Die DGL der freien gedämpften Schwingung lautet

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit } \delta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dabei wird δ als Dämpfungsfaktor oder Abklingkonstante bezeichnet.

Wir unterscheiden 3 mögliche Schwingungstypen:

1. Schwache Dämpfung („Schwingfall“, $\delta < \omega_0$):

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot \{c_1 \sin(\omega_d t) + c_2 \cos(\omega_d t)\} \quad \text{oder} \quad x(t) = c \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_d)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $0 \leq \varphi_d < 2\pi$ und $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems).

2. Aperiodischer Grenzfall ($\delta = \omega_0$):

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot \{c_1 \cdot t + c_2\} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

3. Starke Dämpfung („Kriechfall“, $\delta > \omega_0$):

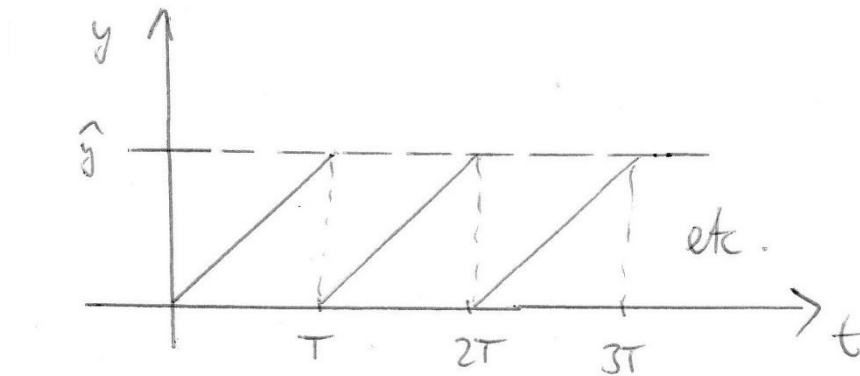
$$x(t) = c_1 \cdot e^{-k_1 t} + c_2 \cdot e^{-k_2 t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Dabei sind $-k_1$ und $-k_2$ die Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung.

4. Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

Problemstellung und Ansatz

Die *Fourier-Transformation* ist u.a. in der Optik sehr bedeutsam. *Fourier-Reihen* treten bei der Beschreibung von periodischen (aber nicht unbedingt sinusförmigen) Problemen auf. Sie spielen in Elektro- und Nachrichtentechnik eine wichtige Rolle. Beispiele sind Kippschwingungen (Sägezahnspannungen) sowie Sinushalbwellen-Impulse bei Einweggleichrichtern.



In einfachen Fällen lässt sich ein zeitlich periodischer Vorgang wie etwa die Schwingung eines Federpendels oder eine Wechselspannung durch ein Sinusgesetz der allgemeinen Form

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

darstellen. Man spricht dann von einer harmonischen oder Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz ω und der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Liegt nun ein *periodischer nicht-sinusförmiger* Vorgang (etwa eine *anharmonische Schwingung*) vor, so ist es von Interesse, ob diese Schwingung aus *harmonischen Einzelschwingungen* zusammengesetzt werden kann. Dies ist unter bestimmten Voraussetzungen tatsächlich möglich. Man spricht dann von der *Zerlegung* oder auch *Entwicklung* dieser Schwingung in eine Fourier-Reihe bzw. von einer durchgeführten *Fourier-Analyse*.

Die zugehörige Entwicklung eines periodischen Vorgangs $y = y(t)$ mit Periodendauer T und Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ lautet

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)]$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \dots$$

Diese Darstellung in Form einer unendlichen *trigonometrischen Reihe* heißt *Fourier-Reihe*, die Entwicklung selbst wird als *harmonische* oder *Fourier-Analyse* bezeichnet. In dieser Darstellung erscheint die Gesamtschwingung $y = y(t)$ als ungestörte Überlagerung unendlich vieler

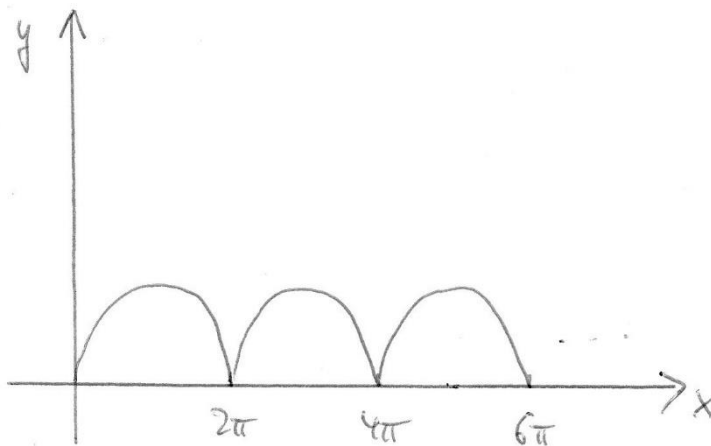
harmonischer Teilschwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$. Die Kreisfrequenzen der einzelnen Schwingungskomponenten sind somit stets *ganzzahlige* Vielfache von ω_0 , der sogenannten *Grundkreisfrequenz*. Die Teilschwingung mit der Grundkreisfrequenz heißt *Grundschiwingung*, die übrigen Teilschwingungen werden als *Oberschwingungen* bezeichnet.

Man spricht häufig auch von einer *Zerlegung* der Schwingung in harmonische Teilschwingungen und daher von der *Fourier-Zerlegung*.

Die *Entwicklungskoeffizienten* a_n und b_n heißen *Fourier-Koeffizienten*.

4.1 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe

Wir gehen nun von einer periodischen Funktion f mit $y = f(x)$ mit der Periodenlänge $p = 2\pi$ aus.



Sie kann unter bestimmten Voraussetzungen in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden. Diese Art der Darstellung heißt *Fourier-Reihe* von f . Sie enthält neben den Sinus- und Kosinusfunktionen mit den Kreisfrequenzen 1, 2, 3, ... noch ein konstantes Glied. Wir wollen uns nun mit der Bestimmung der noch unbekannten Fourier-Koeffizienten a_n und b_n auseinandersetzen.

Einige Hilfsintegrale

Für die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten werden einige Integrale benötigt, die wir hier zusammengestellt haben.

$$1. \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n} [\sin(nx)]_0^{2\pi} = 0$$

$$2. \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} [\cos(nx)]_0^{2\pi} = 0$$

$$3. \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi, n = m \end{cases}$$

$$4. \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx = 0$$

$$5. \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \pi, n = m \end{cases}$$

Bestimmung der Fourier-Koeffizienten

Zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten wenden wir einen Rechentrick an: Wir integrieren jeweils den Ansatz der Fourierreihe und nutzen dabei die in 10.2.1. dargestellten Integralbeziehungen aus. Dadurch erhalten wir dann Formeln zur Berechnung der Koeffizienten.

1. Bestimmung von a_0 :

Wir integrieren die Fourierreihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$ gliedweise zwischen 0 und 2π und erhalten

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx \right].$$

Mit Hilfe der Integrale aus der F.S. folgt dann $\int_0^{2\pi} f(x) dx = a_0 \pi$.

Der Fourier-Koeffizient a_0 lässt sich also aus der Integralformel $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ bestimmen.

2. Bestimmung von a_n ($n \in \mathbb{N}^*$):

Wir multiplizieren die Fourier-Reihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$ zunächst mit $\cos(mx)$, $m \in \mathbb{N}^*$. Anschließend integrieren wir wiederum gliedweise zwischen 0 und 2π :

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx \right]$$

Mit Hilfe der Integrale aus der F.S. erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = a_n \pi.$$

Somit erhalten wir für die Fourier-Koeffizienten a_n die Integralformel

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx.$$

3. Bestimmung von b_n ($n \in \mathbb{N}^*$):

Wir multiplizieren die Fourier-Reihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$ nun mit $\sin(mx)$, $m \in \mathbb{N}^*$. Anschließend integrieren wir wiederum gliedweise zwischen 0 und 2π . Das Ergebnis ist dann (erneut unter Verwendung Integrale aus Abschnitt 4.2.1.)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx.$$

Zusammenfassung: Bestimmung der Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Eine periodische Funktion f mit der Periode $p = 2\pi$ lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen (siehe Bemerkungen) in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickeln (sogenannte *Fourier-Reihe* von f). Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten erfolgt aus den Integralformeln

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, n \in \mathbb{N}^* \text{ und}$$

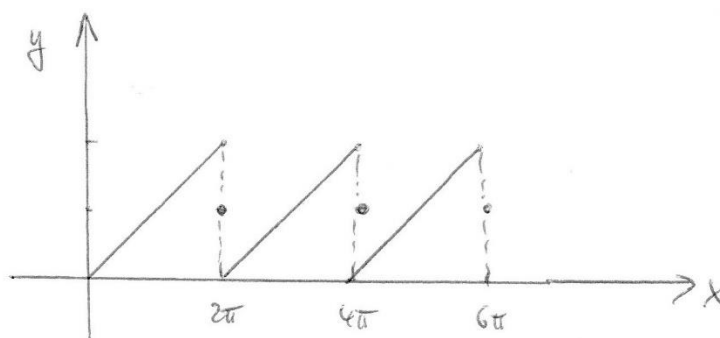
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx, n \in \mathbb{N}^*.$$

Bemerkung 1: Voraussetzungen für Fourier-Entwicklung und Übereinstimmung mit f

Die Entwicklung der periodischen Funktion f in eine Fourier-Reihe ist unter den folgenden Voraussetzungen möglich (sogenannte Dirichlet-Bedingungen):

1. Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, auf denen f *stetig* und *monoton* ist.
2. An den *Unstetigkeitsstellen* (es kommen nur Sprung-Unstetigkeiten mit endlichen Sprüngen in Frage) existiert sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Fourier-Reihe von f für alle $x \in \mathbb{R}$. An den Stetigkeitsstellen von f stimmt sie mit der Funktion f überein, während sie an den *Sprungstellen* das *arithmetische Mittel* aus dem *links-* und dem *rechtsseitigen Grenzwert* der Funktion liefert. So besitzt beispielsweise die Fourier-Reihe der hier skizzierten Kippschwingung an den Sprungstellen $x_k = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ den Funktionswert $\frac{4+0}{2} = 2$.



Bemerkung 2: Symmetriebetrachtungen

Die Fourier-Reihe einer *geraden* Funktion f enthält nur *gerade* Reihenglieder, d.h. neben dem *konstanten* Glied nur *Kosinusglieder*. Es gilt dann

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx).$$

Die Fourier-Reihe einer *ungeraden* Funktion f enthält nur *ungerade* Reihenglieder, nur *Sinusglieder*. Es gilt dann

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx).$$

Bemerkung 3: Abbruch einer Fourier-Reihe

Bei *Abbruch* einer Fourier-Reihe nach endlich vielen Gliedern erhält man eine Näherungsfunktion für f in Form einer *endlichen trigonometrischen Summe*. Ähnlich wie bei den Potenzreihen gilt auch hier: Je mehr Glieder berücksichtigt werden, desto besser ist die Näherung.

Bemerkung 4: Integrationsintervall

Die Integration darf über ein beliebiges Periodenintervall der Länge 2π erfolgen, z.B. zwischen $-\pi$ und π .

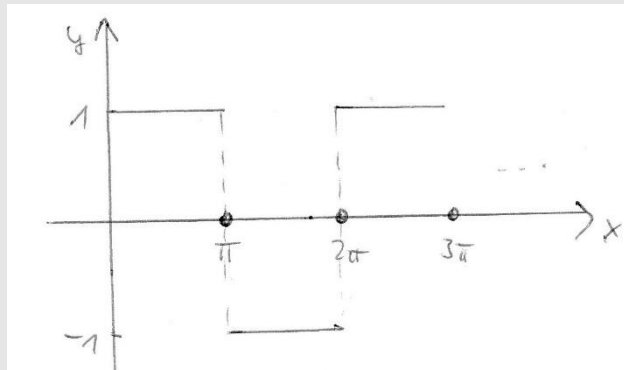
Bemerkung 5: Periodenlänge p

Die Fourier-Entwicklung ist nicht auf periodische Funktionen mit Periodenlänge 2π beschränkt. Sie lässt sich auch auf periodische Funktionen mit *beliebiger* Periodenlänge p verallgemeinern. Der allgemeine Fall kann stets mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf den hier behandelten speziellen Fall zurückgeführt werden.

Bemerkung 6: Physikalische Interpretation

Die Entwicklung einer (periodischen) anharmonischen Schwingung in unendlich viele Sinus- und Kosinusfunktionen bedeutet aus physikalischer Sicht eine Zerlegung der Schwingung in ihre *harmonischen* Anteile. Sie bestehen aus Grundschiwingung und Oberschwingungen. Bringen wir umgekehrt diese Grundschiwingung und die entsprechenden Oberschwingungen zur *ungestörten Überlagerung*, so erhalten wir als *Resultierende* genau diese Ausgangsschwingung. Dies ist das sogenannte *Superpositionsprinzip*. Es gilt, weil die einzelnen harmonischen Schwingungen jeweils einer *linearen* Schwingungs-Differentialgleichung genügen. Für *lineare* Phänomene gilt das *Superpositionsprinzip*.

Beispiel 1: Fourier-Reihe eines Rechteckimpulses



Wir entwickeln die dargestellte Rechteckskurve mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad (\text{und periodisch fortgesetzt})$$

in eine Fourier-Reihe. Da f eine *ungerade* Funktion ist, reduziert sich die Entwicklung auf

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx),$$

siehe Bemerkung 2. Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten lautet dann

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{n\pi} (\cos(n \cdot 2\pi) + \cos(0) - 2 \cdot \cos(n\pi)) \end{aligned}$$

Mit $\cos(2n\pi) = \cos(0) = 1$ sowie $\cos(n\pi) = (-1)^n$ folgt, dass die Fourier-Koeffizienten für gerade n verschwinden. Mit $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) gilt dann nämlich

$$b_{2k} = \frac{1}{2k\pi} (1 + 1 - 2) = 0.$$

Ist n jedoch ungerade, so kann man $n = 2k - 1$ setzen ($k \in \mathbb{N}^*$), und wir erhalten

$$b_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\pi} (1 + 1 + 2) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}.$$

Die Fourier-Reihe der Rechteckskurve besitzt damit die Gestalt $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$.

Bemerkung:

Durch *Abbruch* dieser Reihe nach dem ersten, zweiten bzw. dritten Glied erhalten wir die folgenden *Näherungsformeln*:

$$1. \text{ Näherung: } f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x)$$

$$2. \text{ Näherung: } f_2(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[\sin(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) \right]$$

$$3. \text{ Näherung: } f_3(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left[\sin(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x) \right]$$

Die Approximation wird dabei mit zunehmender Anzahl der Glieder immer besser.

Man spricht bei diesen Näherungsfunktionen auch von *trigonometrischen Polynomen*, ähnlich wie bei der Taylor-Reihe, wo eine Funktion bei Abbruch der Reihe durch (gewöhnliche) Polynome angenähert wird.

Beispiel 2: Fourier-Zerlegung einer Kippspannung

Wir betrachten den unten dargestellten zeitlichen Verlauf einer *Kippspannung* mit der Schwingungsdauer T :

Dieser sägezahnförmige Impuls wird durch die Funktionsgleichung

$$y(t) = \frac{\hat{u}}{T} t, \quad 0 \leq t < T \quad \text{und periodisch fortgesetzt}$$

Beschrieben. Um die Fourier-Zerlegung in Grundschwingung und Oberschwingungen zu erhalten, müssen wir die Fourier-Koeffizienten berechnen.

Berechnung von a_0 :

Es gilt

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}}{T} t dt = \frac{2\hat{u}}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{2\hat{u}}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} = \hat{u}.$$

Berechnung von a_n :

Es gilt für $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}}{T} t \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{u}}{T^2} \int_0^T t \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{u}}{T^2} \cdot 0 = 0.$$

Dabei haben wir die Beziehungen

$$\omega_0 T = 2\pi, \sin(n \cdot 2\pi) = 0, \cos(n \cdot 2\pi) = 1 \text{ und damit}$$

$$\int_0^T t \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^T = \frac{\cos(n \cdot 2\pi)}{n^2 \omega_0^2} + \frac{T \cdot \sin(n \cdot 2\pi)}{n\omega_0} - \frac{1}{n^2 \omega_0^2} = 0$$

ausgenutzt.

Berechnung von b_n :

Es gilt für $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}}{T} t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{u}}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2\hat{u}}{T^2} \cdot \left(-\frac{T^2}{2n\pi} \right) = -\frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

Dabei haben wir die Beziehungen

$$\omega_0 T = 2\pi, \sin(n \cdot 2\pi) = 0, \cos(n \cdot 2\pi) = 1 \text{ und damit}$$

$$\int_0^T t \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^T = \frac{\sin(n \cdot 2\pi)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{T \cdot \cos(n \cdot 2\pi)}{n\omega_0} = -\frac{T}{n\omega_0} = -\frac{T^2}{2n\pi}$$

ausgenutzt.

Ergebnis:

Die Fourier-Reihe der Kippspannung besitzt somit die Gestalt

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t).$$

Interpretation:

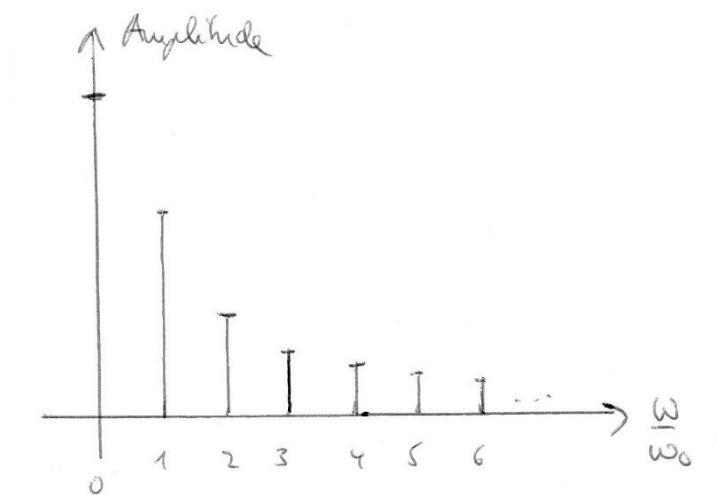
In der Kippspannung sind demnach folgende Komponenten enthalten:

- Gleichspannungsanteil $\frac{\hat{u}}{2}$

- Grundschiwingung mit Kreisfrequenz ω_0 und Amplitude $\frac{\hat{u}}{\pi}$

- sinusförmige Oberschwingungen mit Kreisfrequenzen $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$ und Amplituden $\frac{\hat{u}}{2\pi}, \frac{\hat{u}}{3\pi}, \frac{\hat{u}}{4\pi}, \dots$

Einen anschaulichen Einblick in die Struktur der Kippspannung erhält man aus dem sogenannten Amplitudenspektrum.



Hier werden die Amplituden der einzelnen Schwingungskomponenten als Funktion der Kreisfrequenz aufgetragen. Diesem Spektrum können wir entnehmen, welche Schwingungskomponenten überhaupt in der Kippspannung enthalten sind und mit welchem Anteil sie zur Gesamtschwingung beitragen. Dem Gleichspannungsanteil wird dabei die Kreisfrequenz 0 zugeordnet.

4.2 Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen

1. Rechteckskurve:

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \text{ und periodisch fortgesetzt}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\omega_0 T)}{2k-1}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

2. Dreieckskurve:

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{2\hat{y}}{T}t + \hat{y}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2\hat{y}}{T}t - \hat{y}, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \text{ und periodisch fortgesetzt}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\omega_0 T)}{(2k-1)^2}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

3. Kippschwingung (Sägezahnimpuls):

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{T}t, \quad 0 \leq t < T \text{ und periodisch fortgesetzt}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{y}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 T)}{k}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

4. Sinusimpuls (Einweggleichrichtung)

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t), & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{\pi} + \frac{\hat{y}}{2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{2\hat{y}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega_0 T)}{(2k-1)(2k+1)}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

4.3 Fourier-Transformation und ihre Anwendung

Die *Fourier-Transformation* ist die Erweiterung der harmonischen Analyse auf *nicht-periodische Funktionen*. Formal ist dies durch den Grenzübergang der Periodendauer T gegen Unendlich gewährleistet.

U.A. in der Elektro- und Nachrichtentechnik (aber auch in der Optik) ist die Fourier-Transformation äußerst bedeutsam, wenn dort nicht-periodische, z.B. *zeitlich begrenzte Pulse* untersucht werden. Ähnlich wie die durch die Fourier-Analyse erhaltenen Fourier-Reihen kann man dann anhand der *Fourier-Transformierten* Aussagen über das *Frequenzspektrum* dieses Pulses treffen. Allerdings ist dieses nun *nicht mehr diskret* (also aus einzelnen Oberschwingungen mit Kreisfrequenzen $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$) aufgebaut, sondern *kontinuierlich*.

Definition

Gegeben sei eine auf \mathbb{R} stetige Funktion f . Das Integral

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

heißt (falls es existiert) die *Fourier-Transformierte* (oder *Spektralfunktion*) von f .

Bemerkungen:

1. Oft findet man auch die Definition $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$.

2. Die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ ist eine Funktion der Kreisfrequenz und veranschaulicht somit das *Frequenzspektrum* eines zeitlichen Pulses, daher heißt sie auch *Spektralfunktion*.

3. Wenn wir die Exponentialfunktion im Integranden durch Sinus und Kosinus darstellen, erkennen wir die Ähnlichkeit zur Fourier-Reihe:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) f(t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) f(t) dt.$$

Dabei ist das Summenzeichen durch ein Integral ersetzt worden und die Kreisfrequenzen sind nun kontinuierlich. Wir können hier leider nicht weiter ins Detail gehen.

4. Die *inverse Fourier-Transformation* lautet (falls existent) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega$.

Beispiel

Gegeben sei ein rechteckförmiger Spannungspuls

$$u(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Die Fourier-Transformierte ist dann für $\omega \neq 0$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} \left[e^{-i\omega t} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

Dabei haben wir die bekannte Beziehung $\sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2i}$ verwendet. Für $\omega = 0$ folgt $F(\omega) = 2$.

Insgesamt gilt also

$$F(\omega) = \begin{cases} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2, & \omega = 0 \end{cases}.$$

5. Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

Bislang haben wir uns ausschließlich mit Funktionen *einer* unabhängigen Variablen beschäftigt, z.B. $g(x) = x^2$ oder $f(t) = \sqrt[7]{\ln(\sin(t))}$. Allgemein kann man auch schreiben: y ist eine Funktion von x , d.h. $y = f(x)$. Dies wäre dann eine sogenannte *explizite* Darstellung der Funktion f . Man beachte auch, dass man eine Funktion in impliziter Form darstellen kann, d.h. nicht nach der abhängigen Variablen aufgelöst. Ein Beispiel hierzu wäre $2y + \sqrt{x} = 5$. Ist x die abhängige Variable, so kann man diese implizite Gleichung nach y auflösen und erhält so die explizite Darstellung der Funktion y (diese Funktion ist von einer Variablen x abhängig). Oft sind implizite Funktionen aber schwer oder gar nicht *global* auflösbar nach einer Variablen.

Durch Funktionen einer unabhängigen Variablen haben wir Zusammenhänge bzw. Abhängigkeiten zwischen zwei Größen (beispielsweise x und y) beschrieben. Nun kann eine Funktion, die beispielsweise eine physikalische oder technische Größe repräsentiert, auch von mehreren unabhängigen Variablen abhängen. Sind dies zwei unabhängige Variablen x und y , so kann man die Funktion f darstellen durch $z = f(x, y)$. Hat man mehr Variablen, so bezeichnet man diese oft auch mit x_1, x_2, x_3, \dots , so dass man die Funktion f durch $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ darstellt.

Beispiel:

Die an einem ohmschen Widerstand abfallende Spannung U hängt von der Größe des Widerstands R und von der Stromstärke I ab, es gilt $U = RI$.

U ist damit eine Funktion von R und I , man schreibt daher $U = U(R, I) = RI$.

Hier sind R und I also keine festen, sondern variable Größen. So sei beispielsweise der Widerstand R über einen Regler beliebig einstellbar.

Wir wollen nun noch ein häufiges Missverständnis klären: Aus der Schule kennt man häufig Funktionen einer Variablen mit einem weiteren *festen Funktionsparameter*, etwa $f_t(x) = t \cdot x^2$

Dabei ist x die *unabhängige Variable*, t ist ein *fester Parameter*. Leitet man also die Funktion ab, so ist x die Variable, nach der differenziert wird. Übertragen auf das obige Beispiel, wäre dies der Fall, wenn ein (jedenfalls in einem bestimmten Bereich der Stromstärke) fester, also konstanter Widerstand verwendet würde. Dann wäre R der feste Parameter und nur noch I wäre variabel.

5.1 Funktion von zwei unabhängigen Variablen

Definition:

Unter einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) aus einer Definitionsmenge D genau ein Element z aus einer Wertemenge W zuordnet. Kurz: $z = f(x, y)$.

Bemerkungen:

1. Diese Definition lässt sich direkt auf Funktionen beliebig vieler unabhängiger Variablen übertragen.
2. Die Definitionsmenge ist in unserem Fall stets eine Teilmenge des Raums $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. der Raum $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ selbst (oder im Falle mehrerer unabhängiger Variablen: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$), die Wertemenge ist eine Teilmenge von \mathbb{R} bzw. \mathbb{R} selbst. Man findet in der Literatur oft die Schreibweise: $f : D \rightarrow W$ bzw. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiele und Darstellungsformen

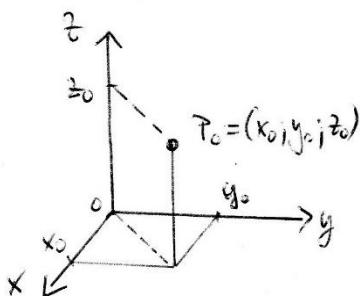
1. Wie lauten die Definitions- und Wertebereiche der folgenden Funktionen:

a) $f(x, y) = 2x + 5 - y$ b) $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$

Lösung zu b): Zur Bestimmung des Definitionsbereichs betrachten wir den Radikanden, er darf nicht negativ sein. Daraus folgt: $64 - x^2 - y^2 \geq 0$, also $x^2 + y^2 \leq 64$. Dies entspricht dem Inneren einer Kreisscheibe (incl. Rand) mit Radius 8.

2. Die explizite Darstellung einer Funktion mehrerer unabhängiger Variablen haben wir bereits kennen gelernt. Eine implizite Darstellung schreibt man meist in der Form $F(x, y, z) = 0$. Beispiel: $x^2 - y^3 + \ln(y - z^3) + 5 = 0$. Diese Funktion kann man nicht einfach nach z auflösen, um eine explizite Darstellung $z = f(x, y)$ zu erhalten.

3. *Geometrische Darstellung* einer Funktion $z = f(x, y)$ als *Fläche im Raum*: Eine Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen kann in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem durch eine über dem Definitionsbereich D liegende Fläche dargestellt werden. Der Funktionswert z besitzt dabei die geometrische Bedeutung der *Höhenkoordinate*.



5.2 Flächenuntersuchungen, Höhenlinien

Wir wollen in diesem Abschnitt auf die zuletzt genannte geometrische Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum eingehen.

Beispiel 1: Ebenen im Anschauungsraum

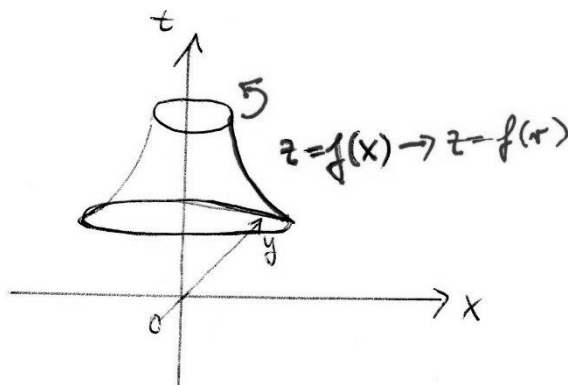
Wie lässt sich die räumliche Lage der Ebene $E: 3x + 6y + 4z = 12$ graphisch veranschaulichen?

Beispiel 2: Rotationsflächen

Die Funktionsgleichung einer zur z -Achse *rotationssymmetrischen* Fläche besitzt die allgemeine Form $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Eine solche Rotationsfläche entsteht durch Drehung der Kurve $z = f(x)$ um die z -Achse.

Dabei wird die x -Koordinate zum Radius r eines um die z -Achse beschriebenen Kreises mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, also $z = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Ein einfaches Beispiel stellt die Mantelfläche eines sog. Rotationsparaboloids dar. Es entsteht z.B. durch Rotation der Normalparabel $z = x^2$ um die z -Achse. Die Funktionsgleichung der Rotationsfläche lautet dann $z = r^2 = x^2 + y^2$.

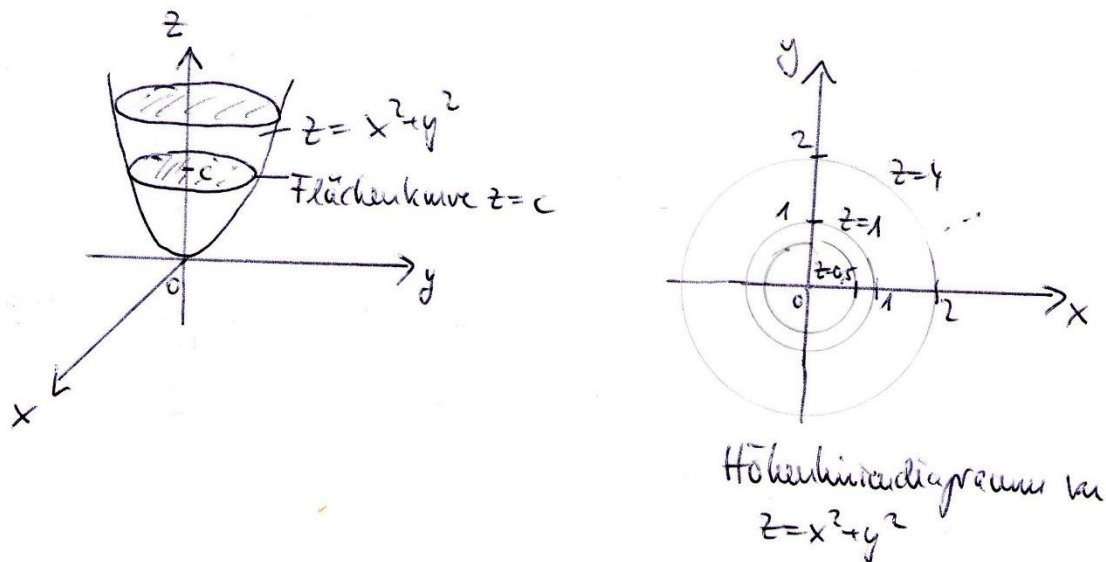


Höhenliniendiagramm einer Funktion $z = f(x, y)$:

Die *Höhenlinien* einer Funktion $z = f(x, y)$ genügen der impliziten Kurvengleichung $f(x, y) = \text{const.} = c$. Dabei ist c der Wert der Höhenkoordinate z .

Beispiel 3:

Wir beschäftigen uns mit den Höhenlinien des Rotationsparaboloids $x^2 + y^2 = c$. Für jeden positiven Wert des Parameters c erhalten wir einen Kreis um den Ursprung mit Radius $r = \sqrt{c}$.



Schnittkurvendiagramme einer Funktion $z = f(x, y)$:

Die folgenden Schnittkurvendiagramme der Funktion $z = f(x, y)$ ergeben sich durch Schnitte der zugehörigen Bildfläche mit Ebenen parallel zu einer der drei Koordinatenebenen:

1. Schnitte parallel zur (x, y) -Ebene: $f(x, y) = c$ (Höhenliniendiagramm)
2. Schnitte parallel zur (y, z) -Ebene: $z = f(x = c, y)$
3. Schnitte parallel zur (x, z) -Ebene: $z = f(x, y = c)$

Beispiel 4:

Die Zustandsgleichung des idealen Gases $pV = RT$ (für 1 Mol) liefert für konstante Temperatur ($T = \text{const.}$) ein sog. Kennlinienfeld aus Hyperbeln für $p(V)$, nämlich

$$p(V) = \frac{RT}{V} = \frac{\text{const.}}{V} \quad (V > 0).$$

Die Kennlinien beschreiben die Abhängigkeit des Drucks p vom Volumen V bei *konstanter* Temperatur T (*isotherme* Zustandsänderungen). Diese Linien heißen in diesem Fall daher auch *Isothermen*.

6. Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen sind Ableitungen einer Funktion, die von mehreren Variablen abhängt, nach einer (oder auch mehreren) bestimmten Variablen. In der Physik treten solche Ableitungen sehr häufig auf, etwa bei der Beschreibung von Wellen. Eine Welle wird durch ihre Auslenkung an einem bestimmten *Ort* zu einem bestimmten *Zeitpunkt* beschrieben. Für die Ausbreitung der Welle sind also die *Änderungen* von Ort und Zeit wichtig. Diese werden durch partielle Ableitungen nach Ort und Zeit beschrieben. In der Technik sind solche Ableitungen bei der Beschreibung Strömungsvorgängen, in der Festigkeitslehre, beim Wärmetransport und an vielen anderen Stellen allgegenwärtig.

Die Ableitung einer Funktion f (die nur von einer Variablen abhängen soll) an einer Stelle x_0 entspricht anschaulich der momentanen Änderungsrate der Funktion an dieser Stelle. Hängt beispielsweise eine physikalisch-technische Größe von mehreren anderen Größen ab, so kann man diese durch eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen darstellen. Möchte man dann wissen, wie die momentane Änderungsrate hinsichtlich *einer* dieser Variablen lautet, so muss *nach der entsprechenden Variablen abgeleitet* werden. Wie die funktioniert, sehen wir in den folgenden Abschnitten.

Zunächst wollen wir aber die Definition der ersten Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 rekapitulieren. Sie lautet

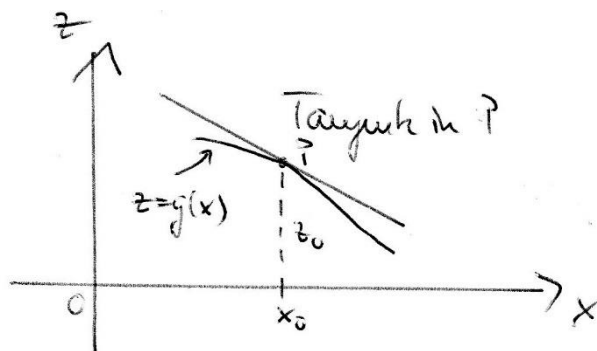
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Analoge Überlegungen führen bei einer Funktion von zwei Variablen (geometrisch als Fläche im Raum darstellbar) zum Begriff der *partiellen* Ableitung. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir einen Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$, der auf einer Fläche $z = f(x, y)$ liegt, d.h. $z_0 = f(x_0, y_0)$. Durch diesen Flächenpunkt legen wir zwei Schnittebenen, die parallel zur x -z- bzw. y -z-Koordinatenebene verlaufen. Als Schnittlinien erhalten wir dann zwei Flächenkurven K_1, K_2 . Falls die Zeit reicht, wird dies in der Vorlesung grafisch veranschaulicht.

Wir betrachten zunächst den Schnitt der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0$. Die auf der Schnittkurve K_1 gelegenen Punkte stimmen in ihrer y -Koordinate überein, d.h. $y = y_0$. Die Höhenkoordinate z dieser Punkte hängt somit nur noch von der x -Koordinate ab. Die Funktionsgleichung der Schnittkurve K_1 lautet daher

$$z = f(x, y_0) = g(x).$$

Das Steigungsverhalten dieser räumlichen Kurve lässt sich besser untersuchen, wenn wir die Kurve in die x - z -Ebene projizieren. Dabei wird die Gestalt der Kurve nicht verändert.



Für die Steigung m_x der in P angelegten Kurventangente gilt dann laut Definition der Ableitung

$$m_x = \tan \alpha = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

Beachten wir noch, dass $g(x) = f(x, y_0)$ gilt, so können wir die obige Zeile auch wie folgt schreiben:

$$m_x = \tan \alpha = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Formal erhalten wir diesen Grenzwert, indem wir die Funktion $z = f(x, y)$ nach der Variablen x differenzieren. Bei dieser partiellen Differentiation nach x wird die Variable y als fester Parameter angesehen. Für das partielle Differenzieren selbst gelten dann die gleichen Ableitungsregeln wie für Funktionen einer unabhängigen Variablen.

Ähnliche Betrachtungen können wir nun anhand des Schnitts der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0$ vornehmen. Insgesamt führt dies zu folgender Definition.

6.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung

Definition

Unter den partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer Funktion f mit $z = f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) werden die folgenden Grenzwerte – falls existent – verstanden:

Partielle Ableitung 1. Ord. nach x : $f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

Partielle Ableitung 1. Ord. nach y : $f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

Bemerkungen:

1. Sprechweisen für f_x sind „partielle Ableitung von f nach x “ oder kurz „ f partiell nach x “.
2. Die Grenzwertbildung, die zu den partiellen Ableitungen einer Funktion führt, wird als *partielle Differentiation* oder auch *partiell differenzieren* bezeichnet.
3. Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) : $f_x(x_0, y_0)$ gibt den Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ in x -Richtung an, $f_y(x_0, y_0)$ entsprechend in y -Richtung.
4. Partielle Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y}$: Diese erzeugen aus einer Funktion $z = f(x, y)$ durch ihr Einwirken die partiellen Ableitungen 1. Ordnung, also $\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)] = f_x(x, y)$.

Beispiel:

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = f(x, y) = -4x^5y^2 + 9xy^4 - 3x + 5y - 2$. Berechnen Sie anschließend die Werte an der Stelle $(1, 2)$ und die Steigungswinkel der beiden Flächentangenten im entsprechenden Flächenpunkt P .

Partielle Ableitung 1. Ordnung einer Funktion mit n unabhängigen Variablen

Gegeben sei eine Funktion f mit n unabhängigen Variablen, die wir durch $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ darstellen. Die partielle Ableitung der Funktion f nach der Variablen x_k , wobei $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, an der Stelle $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ ist dann $f_{x_k}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, oder kurz f_{x_k} bzw. $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Zusammenfassung: Partielles Ableiten einer Funktion von mehreren Variablen

Bei einer Funktion von n unabhängigen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n , die durch die Funktionsgleichung $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bestimmt ist, lassen sich insgesamt n partielle Ableitungen 1. Ordnung bilden. Man erhält sie nach folgendem Schema:

1. In der Funktionsgleichung werden zunächst *alle* unabhängigen Variablen *außer* der Differentiationsvariablen (nach dieser wird abgeleitet) als *konstante* Größen, d.h. *Parameter* betrachtet.
2. Die gegebene Funktion erscheint nun als eine (gewöhnliche) Funktion von *einer* Variablen, nämlich der Differentiationsvariablen. Daher wird sie unter Verwendung der bekannten *Ableitungsregeln* nach dieser Variablen differenziert. Das *Ergebnis* dieser Differentiation ist die gesuchte *partielle Ableitung 1. Ordnung*.

Beispiele:

1. Differenzieren Sie die Funktion $u = u(x, y, z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ partiell nach y .

Lösung: Unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir $u_y = 2xz \cdot e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

2. Wir differenzieren die Zustandsgleichung des idealen Gases $p = p(\nu, V, T) = \frac{\nu RT}{V}$ partiell

nach V : $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{\nu RT}{V^2}$.

3. Wir bilden die partielle Ableitung von $f(x, y) = xy^2 \cdot (\sin x + \cos y)$ nach y : Mit Hilfe der Produktregel (vgl. auch Aufgabe 1!) gilt: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy(\sin x + \cos y) - xy^2 \sin y = \dots$

6.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Auf partielle Ableitungen höherer Ordnung stößt man, wenn man eine Funktion von mehreren unabhängigen Variablen mehrmals nacheinander partiell differenziert. Betrachten wir dazu die Funktion f mit $z = f(x, y)$. Differenzieren wir nun f_x partiell nach x , so erhalten wir f_{xx} . Differenzieren wir dagegen f_x partiell nach y , so erhalten wir f_{xy} usw. Dies sind Beispiele für partielle Ableitungen 2. Ordnung. Wir haben hier vorausgesetzt, dass diese partiellen Ableitungen auch existieren. Falls existent, kann man nun partielle Ableitungen 3. und höherer Ordnung nach dem gleichen Schema bilden.

Eine genügend oft partiell differenzierbare Funktion f von zwei unabhängigen Variablen besitzt 4 partielle Ableitungen 2. Ordnung (nämlich $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$), 8 partielle Ableitungen 3. Ordnung (nämlich $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx}, f_{yyy}$) usw. Wir werden aber gleich sehen, dass sich diese Anzahl unter bestimmten Umständen stark reduziert. Zunächst sei aber noch darauf hingewiesen, dass die einzelnen Differentiationsschritte grundsätzlich in der Reihenfolge, in der die als Indizes angehängten Differentiationsvariablen im Ableitungssymbol auftreten, auszuführen sind (von links nach rechts gelesen).

Partielle Ableitungen höherer Ordnung lassen sich auch in Form partieller Differentialquotienten darstellen. Beispiele:

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

6.3 Satz von Schwarz

Bei einer *gemischten* partiellen Ableitung k -ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte *vertauscht* werden, wenn die partiellen Ableitungen k -ter Ordnung *stetige* Funktionen sind.

Bemerkungen:

1. Wir verzichten auf einen Beweis.
2. Dieser Satz ist sehr nützlich, weil er den Rechenaufwand stark reduziert. Hat man beispielsweise f_{xy} berechnet, so ist damit auch f_{yx} bekannt. Man kann sich unter der oben genannten Voraussetzung herausuchen, in welcher Reihenfolge man partiell differenziert, was manchmal sehr hilfreich sein kann.
3. Für die Anwendungen, die uns begegnen werden, ist der Satz von Schwarz in aller Regel gültig.

Beispiel:

Gesucht ist $\frac{\partial^8 f}{\partial x^2 \partial y^4 \partial z^2}$ mit $f(x, y, z) = \cos(x^2 + z^5 + 1) \cdot y^2$. Hier müsste man eigentlich zunächst zwei Mal nach z ableiten, was etwas mühsam ist. Nach dem Satz von Schwarz kann man aber auch zunächst die y -Ableitungen ausführen. Damit folgt sofort: $\frac{\partial^8 f}{\partial x^2 \partial y^4 \partial z^2} = 0$.

6.4 Vollständiges Differential und Tangentialebene

Das *vollständige Differential* spielt u.a. in der Thermodynamik eine wichtige Rolle. Man benötigt es in Naturwissenschaft und Technik auch häufig zur Linearisierung von Funktionen und bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzungen (bei Messungen wichtig).

Geometrische Betrachtungen zur Tangentialebene

Die Rolle, die die Kurventangente bei einer Funktion von einer Variablen spielt, übernimmt bei einer Funktion f mit $z = f(x, y)$ von zwei Variablen die so genannte *Tangentialebene*. Sie enthält sämtliche im Flächenpunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ an die Fläche von $z = f(x, y)$ angelegten Tangenten.

In der unmittelbaren Umgebung ihres Berührungspunktes P besitzen Fläche und Tangentialebene i. A. keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Wir leiten die Funktionsgleichung dieser Tangentialebene her. Eine Ebene kann in der folgenden linearen Form angesetzt werden:

$$z = ax + by + c \quad *)$$

Dabei sind die Parameter a , b und c zu bestimmen. Dazu verwenden wir die Eigenschaften der Tangentialebene. Fläche und Tangentialebene besitzen im Berührungspunkt P den gleichen Anstieg. Daher stimmen dort die entsprechenden partiellen Ableitung 1. Ordnung überein. Die Ableitungen der linearen Funktion lauten $z_x = a$, $z_y = b$. Am Berührungspunkt P gilt daher

$$a = f_x(x_0, y_0), b = f_y(x_0, y_0) \quad **)$$

Beachtet man nun noch, dass P ein gemeinsamer Punkt von Fläche und Tangentialebene ist, dann kann auch c bestimmt werden aus

$$z_0 = ax_0 + by_0 + c \Rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0.$$

Dieser Ausdruck sowie **) können nun in den obigen Ansatz *) eingesetzt werden, so dass wir insgesamt $z = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0$ erhalten.

Gleichung der Tangentialebene:

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Flächenpunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ lautet in symmetrischer Schreibweise

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Beispiel:

Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ im Punkt $P = (1, 1, 2)$. Dazu bilden wir zunächst die partiellen Ableitungen 1. Ordnung, die $f_x(x, y) = 2x, f_y(x, y) = 2y$ lauten. Damit folgt: $f_x(1, 1) = 2, f_y(1, 1) = 2$. Die Gleichung der gesuchten Tangentialebene ist also $z = 2x + 2y - 2$.

Das vollständige (auch: totale) Differential

Wir betrachten erneut eine Funktion f von zwei unabhängigen Variablen. $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ sei ein Punkt auf der zugehörigen Fläche, T die in P aufgestellte Tangentialebene.

Welche Änderung erfährt nun der Funktionswert (die Höhenkoordinate z) des Punktes P bei einer Verschiebung dieses Punktes auf der Fläche selbst bzw. auf der zugehörigen Tangentialebene?

Verschiebungen auf der Fläche:

Die bei einer Verschiebung auf der Fläche eintretenden Koordinatenänderungen, bezogen auf den Berührungspunkt P , bezeichnen wir mit $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. P wird nun so auf der Fläche verschoben, dass sich seine beiden unabhängigen Koordinaten x und y um Δx bzw. Δy ändern. Dabei ändert sich der Funktionswert z um

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Diese Größe beschreibt somit den Zuwachs der Höhenkoordinate und damit des Funktionswerts bei einer Verschiebung auf der Fläche. P ist dabei in den Punkt Q gewandert,

$$P = (x_0, y_0, z_0) \rightarrow Q = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z).$$

Verschiebungen auf der Tangentialebene:

Die mit einer Verschiebung auf der Tangentialebene T verbundenen Koordinatenänderungen, bezogen auf P , bezeichnen wir mit dx , dy und dz . Dabei soll P so auf der Tangentialebene verschoben werden, dass sich seine beiden unabhängigen Koordinaten wiederum um Δx bzw. Δy ändern. Wir setzen also $dx = \Delta x, dy = \Delta y$. Die Änderung des Funktionswerts von P lässt sich dann aus der Gleichung der Tangentialebene T berechnen. Dazu setzen wir die folgenden Verschiebungen an

$$x - x_0 = dx, y - y_0 = dy, z - z_0 = dz.$$

Wir erhalten somit

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Durch diesen Ausdruck wird der Zuwachs der Höhenkoordinate z bei einer Verschiebung auf der Tangentialebene beschrieben. P ist dabei in den Punkt Q' übergegangen, der auf T , i. A. aber nicht mehr auf der Fläche liegt,

$$P = (x_0, y_0, z_0) \rightarrow Q' = (x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz).$$

Es ist somit $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, aber $\Delta z \neq dz$! Bei *geringfügigen* Verschiebungen gilt jedoch *näherungsweise*

$$\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Man darf unter diesen Voraussetzungen die Fläche $z = f(x, y)$ in der unmittelbaren Umgebung von P durch die zugehörige Tangentialebene T ersetzen. Diese Näherung spielt bei der *Linearisierung* von Funktionen sowie bei der Fehlerfortpflanzung eine wichtige Rolle.

Für den Zuwachs dz der Höhenkoordinate z auf der Tangentialebene führen wir nun eine neue Bezeichnung ein.

Definition: Vollständiges Differential

Unter dem *vollständigen* Differential (auch: *totalen* Differential) einer Funktion f mit

$z = f(x, y)$ wird der *lineare Differentialausdruck* $dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ verstanden.

Geometrische Deutung des vollständigen Differentials

Bei einer Funktion f mit $z = f(x, y)$ beschreibt das *vollständige Differential* $dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$ die *Änderung der Höhenkoordinate* z auf der im *Berührpunkt* $P = (x_0, y_0, z_0)$ aufgestellten *Tangentialebene*. Dabei sind die so genannten Differentiale dx , dy und dz die Koordinaten eines *beliebigen* Punktes auf der Tangentialebene, bezogen auf den Punkt P .

Bemerkung:

Es soll hier nochmals herausgestellt werden, dass die Koordinatenänderungen dx , dy und dz die Relativkoordinaten eines auf der Tangentialebene gelegenen Punktes bezüglich des Berührpunktes P darstellen.

Linearisierung einer Funktion

Eine *nichtlineare* Funktion $y = f(x)$ lässt sich in der Umgebung eines Kurvenpunktes $P = (x_0, y_0)$ durch eine *lineare* Funktion, nämlich die dortige Kurventangente, *annähern*, falls sie dort differenzierbar ist. Man spricht von der *Linearisierung* der Funktion.

Auch eine Funktion f von zwei unabhängigen Variablen mit der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ kann unter bestimmten Voraussetzungen in der unmittelbaren Umgebung eines Flächenpunktes $P = (x_0, y_0, z_0)$ linearisiert werden, d.h. durch eine Tangentialebene der Form $z = ax + by + c$ näherungsweise ersetzt werden. Der Punkt P wird in Naturwissenschaft und Technik oft als *Arbeitspunkt* bezeichnet. Eine gekrümmte Fläche wird also in der Umgebung des Arbeitspunktes näherungsweise durch die dortige Tangentialebene ersetzt. Oder anders ausgedrückt: Die nichtlineare Funktion wird hier näherungsweise durch eine lineare Funktion ersetzt:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \text{ bzw. } \Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y$$

Beispiel:

Der Gesamtwiderstand R einer Parallelschaltung aus zwei ohmschen Widerständen R_1, R_2 beträgt $R = R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Wir linearisieren diese Funktion in der Umgebung von $R_1 = 100\Omega$ und $R_2 = 400\Omega$. Der Gesamtwiderstand beträgt dann an diesem Arbeitspunkt 80Ω . Die linearisierte Funktion ist durch

$$\Delta R = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \right)_P \Delta R_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \right)_P \Delta R_2$$

gegeben. Mit dem Index P ist der Arbeitspunkt gemeint. Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

den entsprechenden Werten am Arbeitspunkt folgt schließlich $\Delta R = 0.64\Delta R_1 + 0.04\Delta R_2$. *)

Bei einer Änderung der beiden Einzelwiderstände um ΔR_1 bzw. ΔR_2 ändert sich der Gesamtwiderstand also näherungsweise in der durch *) dargestellten Weise.

Betrachten wir dazu ein *Rechenbeispiel*: Vergrößern wir den ersten Widerstand um 10Ω und verkleinern gleichzeitig den zweiten um 20Ω , d.h. $\Delta R_1 = 10\Omega, \Delta R_2 = -20\Omega$, dann ändert sich der Gesamtwiderstand *näherungsweise* um 5.6Ω . Er beträgt dann also 85.6Ω . Der *exakte* Wert ist aber $R = \frac{110\Omega \cdot 380\Omega}{110\Omega + 380\Omega} \approx 85.3\Omega$.

Definition des vollständigen Differentials für Funktionen von n unabhängigen Variablen

Unter dem vollständigen Differential einer Funktion f , die durch $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gegeben ist, versteht man den linearen Differentialausdruck

$$da = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Bemerkungen:

1. Das totale Differential hängt von den n Variablen und den n zugehörigen Differentialen ab.
2. Das totale Differential einer Funktion beschreibt näherungsweise, wie sich der Funktionswert bei geringfügigen Veränderungen der unabhängigen Variablen um $dx_k = \Delta x_k$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) ändert. Es gilt dann: $\Delta u \approx du = f_{x_1} \Delta x_1 + f_{x_2} \Delta x_2 + \dots + f_{x_n} \Delta x_n$.
3. Geometrisch ist das totale Differential bei Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen nicht mehr einfach zu deuten.

Beispiel

Die Zustandsgleichung des idealen Gases lautet $p(\nu, V, T) = \frac{\nu RT}{V}$. Damit lautet das zugehörige vollständige Differential

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial p}{\partial V} dV + \frac{\partial p}{\partial T} dT = \frac{RT}{V} d\nu - \frac{\nu RT}{V^2} dV + \frac{\nu R}{V} dT.$$

Es beschreibt näherungsweise die Änderung des Gasdrucks bei einer geringfügigen Änderung von Stoffmenge, Volumen und Temperatur.

7. Differentiation und Funktionen: Anwendungen

7.1 Gradient und Richtungsableitung

Definition:

Unter dem *Gradient* eines differenzierbaren Skalarfeldes $\varphi = \varphi(x, y, z)$ versteht man den aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung gebildeten *Vektor*

$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

1. In der Mathematik stellt man den Gradienten oft aus formalen Gründen als Zeilenvektor (nicht als Spaltenvektor) dar. Dies ist für uns jedoch nicht zentral.
2. Das Symbol $\vec{\nabla}$ (lies: Nabla) wird auch als *Nabla-Operator* bezeichnet und ist ein „dreidimensionaler“ Differentialoperator.

Eigenschaften des Gradienten:

Der Gradient eines differenzierbaren Skalarfeldes $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ist das formale Produkt aus dem Nabla-Operator und dem Skalar $\varphi = \varphi(x, y, z)$, d.h.

$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Er steht senkrecht auf den Niveauflächen von φ und zeigt in die Richtung des größten Zuwachses von φ .

Rechenregeln:

Sinngemäß wie bei der „gewöhnlichen“ Ableitung.

Richtungsableitung:

Die partiellen Ableitungen geben die lokale Änderung der Funktionswerte in Richtung der Koordinatenachsen an. Es ist daher sinnvoll, allgemeiner auch eine Ableitung in Richtung eines beliebigen Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ zu definieren. Dies ist die sog. *Richtungsableitung*. Sie ist durch

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta t v_x, y_0 + \Delta t v_y) - f(x_0, y_0)}{\Delta t}$$

definiert. Ist der Wert der Richtungsableitung positiv, so nimmt f in Richtung des Vektors \vec{v} zu, ist er negativ, so nimmt f in Richtung des Vektors \vec{v} ab.

Bemerkung:

Diese Definition und die folgenden Betrachtungen gelten auch sinngemäß für Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen.

Satz: Berechnung der Richtungsableitung

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot v_y$$

Voraussetzung: f ist dort total differenzierbar (wir gehen hier nicht weiter darauf ein)

Beispiel:

Den Anstieg der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ im Punkt $(1, 1)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erhalten wir aus

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) = 2x \cdot v_x + 2y \cdot v_y \quad \text{und damit} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1) = 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot (-\sqrt{2}) = 0.$$

7.2 Implizite Differentiation

Aus den ersten Semestern ist bereits der Fall einer implizit definierten Funktionsgleichung $F(x, y) = 0$ mit einer unabhängigen Variablen bekannt. Damals wurde gezeigt, dass mit Hilfe der Kettenregel die Steigung der Kurventangente in einem Punkt $P = (x_0, y_0)$ bestimmt werden kann, auch wenn die Funktionsgleichung $F(x, y) = 0$ nicht nach einer der beiden Variablen aufgelöst werden kann oder aber diese Auflösung zwar grundsätzlich möglich, aber mit großen Schwierigkeiten verbunden ist.

Nun wollen wir mit Hilfe des totalen Differentials ein weiteres praktikables Verfahren der impliziten Differentiation kennen lernen. Wir gehen dabei von einer in der impliziten Form $F(x, y) = 0$ gegebenen Funktionsgleichung aus und fassen die dadurch definierte Kurve als Schnittlinie der Fläche $z = F(x, y)$ mit der x - y -Ebene ($z = 0$) auf.

Unter bestimmten Voraussetzungen ist es dann möglich, den Kurvenanstieg durch die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von z auszudrücken. Zu diesem Zweck bilden wir das vollständige Differential

$$dz = F_x dx + F_y dy.$$

Für die Punkte der Schnittkurve ist $z = 0$ und somit auch $dz = 0$, d.h.

$$dz = F_x dx + F_y dy = 0.$$

Wir dividieren diese Gleichung formal durch das Differential dx , berücksichtigen noch

$$\frac{dx}{dx} = 1, \frac{dy}{dx} = y' \text{ und erhalten so}$$

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = F_x + F_y \cdot y' = 0.$$

Für $F_y \neq 0$ lässt sich diese Beziehung nach der Kurvensteigung y' auflösen, wir erhalten

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Zusammenfassend können wir festhalten:

Der Anstieg einer in der impliziten Form $F(x, y) = 0$ dargestellten Funktionskurve im Kurvenpunkt $P = (x_0, y_0)$ lässt sich mit Hilfe der partiellen Differentiation wie folgt bestimmen:

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}, F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Bemerkungen:

1. Die Ableitung y' enthält nach der obigen Formel meist beide Variablen. Diese sind jedoch nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Funktionsgleichung $F(x, y) = 0$ miteinander verknüpft.
2. Wir sind auch dann in der Lage, eine Funktion zu differenzieren, wenn diese *nicht* in der expliziten Form $y = f(x)$ darstellbar ist.

Beispiel:

Wir berechnen die Tangentensteigung der Ellipse, die durch die implizite Funktionsgleichung $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ gegeben ist, im Punkt $P(x_0 < 0, y_0 = 3)$.

Die Auflösung der Ellipsengleichung nach y ist zwar möglich, aber hier ist die implizite Differentiation einfacher. Wir berechnen zunächst den Wert von x_0 und erhalten $x_0 = -\sqrt{15.75} \approx -3.97$. Dann bringen wir die Ellipsengleichung auf die Form $F(x, y) = 0$, also

$$F(x, y) = \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0 \text{ bzw. } F(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 144 = 0.$$

Mit $F_x(x, y) = 8x, F_y(x, y) = 18y$ folgt dann $y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{4x}{9y}$.

Die Ellipsentangente im Punkt $P = (-\sqrt{15.75}, 3)$ besitzt damit ungefähr die Steigung 0.588.

7.3 Extremaleigenschaften von Funktionen mit mehreren Variablen

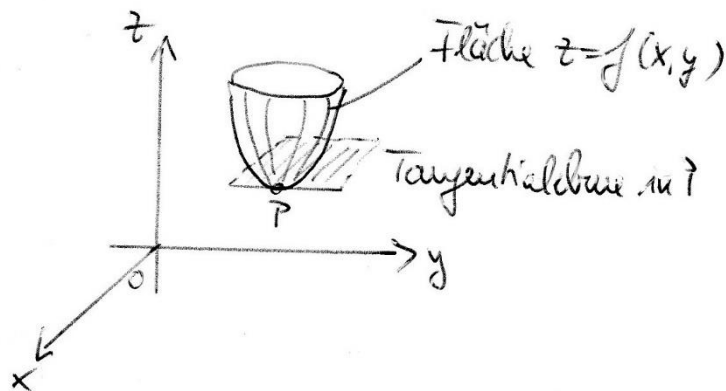
In Technik und Wirtschaft hat die Untersuchung der Extremaleigenschaften von Funktionen größte Bedeutung. Denn vielfach treten Optimierungsprobleme auf, die auf die Minimierung oder Maximierung einer Zielfunktion hinauslaufen. Solche Zielfunktionen (z. B. Kostenfunktionen) können sehr kompliziert sein und von vielen Faktoren, repräsentiert durch Variablen, abhängen.

Definition: Lokale Maxima und Minima

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ besitzt an der Stelle (x_0, y_0) ein *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum*, wenn für alle (x, y) in einer *Umgebung* von (x_0, y_0) gilt $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ bzw. $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, wobei $(x, y) \neq (x_0, y_0)$.

Bemerkungen

1. In der obigen Definition haben wir uns auf Funktionen von zwei unabhängigen Variablen beschränkt, d.h. $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Man kann aber sofort die Erweiterung $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vornehmen und hat dann statt $z = f(x, y)$ eben $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und entsprechend die Stelle (x_1, x_2, \dots, x_n) .
2. Die Definition kann man anschaulich so lesen: Nimmt die Funktion an jeder Stelle in unmittelbarer Nähe der Stelle (x_0, y_0) kleinere Werte (oder denselben Wert) an als die Funktion an eben dieser Stelle, so liegt ein lokales Maximum vor. Entsprechende gilt für ein lokales Minimum. Unter dem Begriff *Umgebung* kann man sich eine kleine Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ vorstellen, die man um den Punkt (x_0, y_0) legt. Dieses Scheibchen kann beliebig klein sein. Mathematisch kann man die Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) durch $U_r(x_0, y_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| < r \right\}$ darstellen. Dies ist natürlich auch direkt auf den \mathbb{R}^n erweiterbar.
3. Gelten die Ungleichungen aus der Definition sogar an allen Stellen (x, y) im Definitionsreich, so spricht man von einem *globalen Maximum* bzw. *globalen Minimum*.
4. Die lokalen Maxima und Minima einer Funktion werden unter dem Begriff *lokale Extremwerte* zusammengefasst. Die den Extremwerten entsprechenden *Flächenpunkte* heißen *Hoch-* bzw. *Tiefpunkte*.



Beispiel:

Durch Rotation der Normalparabel $z = x^2$ um die z -Achse entsteht die Rotationsfläche $z = x^2 + y^2$ (Rotationsparaboloid).

Aus dem Scheitelpunkt (Minimum) der Parabel wird nun der Flächenpunkt $P = (0, 0, 0)$, der von sämtlichen Flächenpunkten die tiefste Lage einnimmt. An der Stelle $(0, 0)$ liegt also ein lokales, aber sogar ein globales Minimum vor.

Dieses Beispiel und die Anschauung lassen vermuten, dass die in einem Extrempunkt angelegte *Tangentialebene* stets *parallel* zur x - y -Koordinatenebene verläuft. Dann besitzen die entsprechenden Flächentangenten dort die Steigung Null. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung müssten also verschwinden. Dies führt auf die notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert.

Satz über die notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert

In einer lokalen Extremstelle (x_0, y_0) der Funktion mit $z = f(x, y)$ besitzt die zugehörige Fläche stets eine zur x - y -Ebene parallele Tangentialebene. Die Bedingungen

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f_y(x_0, y_0) = 0$$

sind daher *notwendige* Voraussetzungen für die Existenz eines lokalen Extremums an der Stelle (x_0, y_0) .

Bemerkungen:

1. Wir haben hier vorausgesetzt, dass die Tangentialebene existiert, d.h. dass die Funktion an der Stelle (x_0, y_0) differenzierbar ist bzw. die partiellen Ableitungen erster Ordnung dort existieren. In den Fällen, die uns begegnen, ist dies in aller Regel der zutreffend.
2. Das Kriterium ist zwar *notwendig*, aber *keinesfalls hinreichend*. In einem Extremum verläuft die Tangentialebene stets parallel zur x - y -Ebene. Umgekehrt ist aber nicht jeder Flächenpunkt mit einer zur x - y -Ebene parallelen Tangentialebene ein Hoch- oder Tiefpunkt. Es gibt nämlich auch so genannte Sattelpunkte. Man spricht bei Punkten mit horizontaler Tangentialebene auch von *stationären* Punkten.

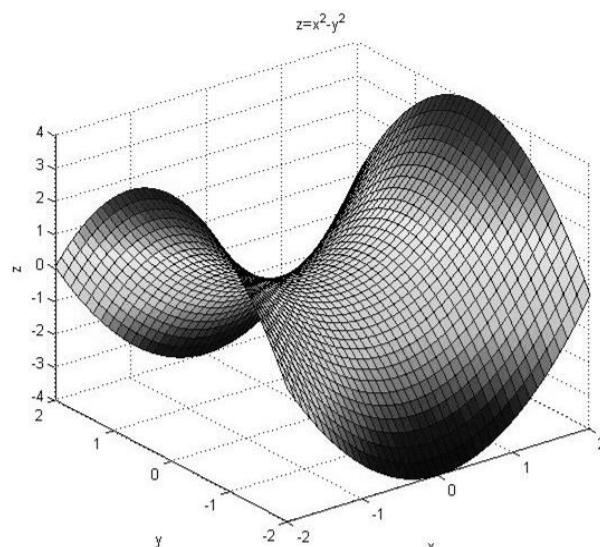
Beispiel:

Wir betrachten das hyperbolische Paraboloid mit der Funktionsgleichung $z = f(x, y) = x^2 - y^2$. An der Stelle $(0, 0)$ sind die notwendigen Bedingungen für ein lokales Extremum erfüllt, denn

$$f_x(x, y) = 2x \Rightarrow f_x(0, 0) = 0 \text{ sowie } f_y(x, y) = -2y \Rightarrow f_y(0, 0) = 0.$$

Die Tangentialebene im Punkt $P = (0, 0, 0)$ fällt daher mit der x - y -Ebene zusammen. Dennoch besitzt die Funktion f an der Stelle $(0, 0)$ kein Extremum, sondern einen *Sattelpunkt*.

Dies soll noch weiter veranschaulicht werden: Betrachten wir einen Schnitt der Fläche mit der x - z -Ebene. Dann erhalten wir die nach *oben* geöffnete Normalparabel $z = x^2$, die in P ihr *Minimum* besitzt. Ein Schnitt der Fläche mit der y - z -Ebene ergibt jedoch die nach *unten* geöffnete Normalparabel $z = -y^2$, die in P ihr *Maximum* annimmt. Der Flächenpunkt $P = (0, 0, 0)$ kann daher kein Extremum sein. Die Rotationsfläche $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ besitzt die Form eines Sattels und wird daher auch als *Sattelfläche* bezeichnet.



Wann können wir jedoch sicher sein, dass ein lokales Extremum vorliegt? Damit kommen wir zur hinreichenden Bedingung.

Satz über die hinreichende Bedingung für einen lokalen Extremwert

Eine Funktion f mit $z = f(x, y)$ (und deren partielle Ableitungen 2. Ordnung sowohl existieren als auch stetig sind) besitzt an der Stelle (x_0, y_0) mit Sicherheit ein lokales Extremum, wenn die folgenden Bedingungen zugleich erfüllt sind:

1. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung verschwinden in (x_0, y_0) , d.h.

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f_y(x_0, y_0) = 0$$

2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung genügen der Ungleichung

$$\Delta = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0.$$

Ist zusätzlich $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, so liegt ein lokales *Maximum* vor, für $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ dagegen ein lokales *Minimum*.

Bemerkungen:

1. Wir verzichten erneut auf einen Beweis dieser Beziehung und verweisen auf die Literatur (Meyberg-Vachenauer, Band 1).

2. Δ bezeichnet man auch als *Diskriminante* und kann in Form einer Determinante geschrieben werden

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Man beachte dabei, dass aufgrund des Satzes von Schwarz (1.3.6.) $f_{yx} = f_{xy}$ gesetzt werden konnte.

3. Wir haben im obigen Satz noch keine Aussage darüber getroffen, was passiert, wenn die Diskriminante nicht positiv ist. Dies soll hier ergänzt werden. Wir gehen davon aus, dass Bedingung 1 des Satzes erfüllt ist. Dann gilt:

Falls $\Delta < 0$: Es liegt kein Extrempunkt, sondern ein *Sattelpunkt* vor.

Falls $\Delta = 0$: Das Kriterium ermöglicht in diesem Fall *keine* Entscheidung darüber, ob an der betreffenden Stelle ein lokales Extremum vorliegt.

4. Der Begriff des lokalen Extremums lässt sich, wie weiter oben angesprochen, auch auf Funktionen mit mehr als zwei unabhängigen Variablen übertragen. Notwendig für die Existenz eines lokalen Extremwertes ist auch hier, dass an der Extremstelle sämtliche partiellen Ableitungen 1. Ordnung (falls existent) verschwinden. Auf die hinreichenden Bedingungen können wir hier jedoch nicht eingehen.

Beispiel

Wir betrachten eine um die z -Achse rotierte Gaußsche Glockenkurve, $z = f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ und untersuchen diese auf Extremstellen und -werte. Die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung lauten

$$f_x(x, y) = -2x \cdot e^{-(x^2+y^2)}, \quad f_y(x, y) = -2y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{sowie}$$

$$f_{xx}(x, y) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}, \quad f_{yy}(x, y) = (4y^2 - 2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{und}$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4xy \cdot e^{-(x^2+y^2)}.$$

An der Stelle $(0, 0)$ (und sonst nirgendwo) folgt damit $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Dort ist also die *notwendige* Bedingung für eine lokale Extremstelle erfüllt. Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung folgt weiter $f_{xx}(0, 0) = -2$, $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 0$, $f_{yy}(0, 0) = -2$.

Damit nimmt die Diskriminante Δ den Wert 4 (>0) an. Da zusätzlich $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$, liegt ein *lokales Maximum* vor. Dies war auch zu erwarten, da es sich um eine um die z -Achse rotierte Gaußsche Glockenkurve handelt.

An der Stelle $(0, 0)$ liegt sogar ein *globales Maximum* vor. Denn es gilt $f(0, 0) \geq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7.4 Extremwerte mit Nebenbedingungen

In der Praxis treten am häufigsten Extremwertprobleme auf, bei denen zusätzliche Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind. Praktisch jede technische Entwicklung im industriellen Wettbewerb läuft auf Optimierungs- oder auch Extremwertprobleme mit komplexen Nebenbedingungen hinaus. Nicht immer, aber oft, ist eine mathematische Beschreibung möglich und notwendig.

Direkte Lösung von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung

Übertragen wir diese Situation auf die Mathematik von Funktionen f mit zwei unabhängigen Variablen, gegeben durch $z = f(x, y)$. Nebenbedingungen bedeuten hier eine *Kopplung* zwischen den zuvor unabhängigen Variablen x und y . Diese wird oft in Form einer impliziten Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ angegeben. Eine Möglichkeit besteht nun darin, die Nebenbedingung nach einer Variablen, z. B. y , aufzulösen. Der gefundene Ausdruck $y = y(x)$ kann nun in $z = f(x, y)$ eingesetzt werden. Die auf diese Weise erhaltene Funktion $z = f(x, y(x)) = F(x)$ hängt nur noch von x ab, womit wir das Problem auf eine Extremwertaufgabe mit nur einer Variablen zurückgeführt haben.

Beispiel:

Aus einem langen Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R) soll durch Längsschnitte ein Balken mit rechteckigem Querschnitt so heraus gesägt werden, dass sein Widerstandsmoment $W = \frac{bh^2}{6}$ einen möglichst großen Wert annimmt. Dabei ist b die Breite des Balkens und h seine Dicke. Das Widerstandsmoment ist also eine Funktion von zwei Variablen. b und h sind jedoch nicht unabhängig voneinander, sie sind miteinander gekoppelt.

Die Nebenbedingung lautet also

$$b^2 + h^2 = 4R^2 \quad \text{oder} \quad \varphi(b, h) = b^2 + h^2 - 4R^2 = 0.$$

Wir lösen diese Extremwertaufgabe schrittweise.

1. Schritt: Auflösen der Nebenbedingung nach h^2 und einsetzen in die Formel für W :

$$h^2 = 4R^2 - b^2 \Rightarrow W = \frac{1}{6}(4R^2b - b^3).$$

Dabei kann die Balkenbreite nur Werte zwischen 0 und $2R$ annehmen.

2. Schritt: Wir bilden die Ableitungen W' und W'' : $W' = \frac{1}{6}(4R^2 - 3b^2)$ und $W'' = -b$

3. *Schritt*: Berechnung des gesuchten Maximums unter Berücksichtigung der hinreichenden Bedingungen $W' = 0$ und $W'' < 0$ (Bedingungen für lokales Maximum einer Funktion mit *einer* unabhängigen Variablen): $W' = \frac{1}{6}(R^2 - 3b^2) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}\sqrt{3}R \vee b = -\frac{2}{3}\sqrt{3}R$

Nur der positive Wert von b liegt im Definitionsbereich. Wir setzen in die zweite Ableitung ein und erhalten $W''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}R\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}R < 0$.

Es liegt also tatsächlich ein (lokales) Maximum vor. Es wird der maximale Wert

$$W_{\max} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}R \cdot \left(4R^2 - \frac{4}{3}R^2\right) = \frac{8}{27}\sqrt{3}R^3 \text{ angenommen.}$$

Zur Untersuchung auf ein globales Maximum muss man die Funktion W noch an den Definitionsrändern, also für $b = 0$ bzw. $b = 2R$ betrachten. Dort ist W jedoch 0.

7.5 Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Der gerade skizzierte Lösungsweg lässt sich jedoch nur dann beschreiten, wenn die Auflösung der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ nach einer der beiden Variablen überhaupt möglich ist. In vielen Fällen gilt jedoch: Eine Auflösung der Nebenbedingung ist nicht möglich oder zu aufwendig bzw. die so aufgelöste Funktion hat sehr komplizierte Ableitungen.

Für solche Fälle gibt es ein formaleres Lösungsverfahren nach Lagrange, die so genannte *Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren*. Dieses Verfahren wollen wir im Folgenden entwickeln:

Zunächst bildet man die totalen Differentiale von $z = f(x, y)$ und $u = \varphi(x, y)$ und erhält

$$dz = f_x dx + f_y dy \quad \text{bzw.} \quad du = \varphi_x dx + \varphi_y dy.$$

Wegen der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ muss $u = 0$ und damit auch $du = 0$ gelten. Also

$$du = \varphi_x dx + \varphi_y dy \equiv 0.^1$$

Dies bedeutet aber, dass die beiden Differentiale dx und dy nicht mehr unabhängig voneinander, sondern über die obige Gleichung miteinander gekoppelt sind. dz verschwindet dagegen nur am Ort des Extremums, $x = x_0, y = y_0$. An dieser Stelle können wir also

¹ Das Zeichen „ \equiv “, also „identisch gleich“, bedeutet, dass das Differential für *alle* Werte von x und y verschwindet.

$$f_x dx + f_y dy = 0 \wedge \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$$

schreiben. Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten dx und dy . Eine nicht-triviale Lösung existiert nur für

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgern wir, dass die beiden Zeilenvektoren linear abhängig sind. Wir können daher die erste Zeile als ein Vielfaches der zweiten Zeile in der Form

$$f_x = -\lambda \cdot \varphi_x, f_y = -\lambda \cdot \varphi_y, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f_x + \lambda \cdot \varphi_x = 0, f_y + \lambda \cdot \varphi_y = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

darstellen. Dabei heißt λ *Lagrangescher Multiplikator*. Aus diesen Bedingungsgleichungen in Verbindung mit der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ lassen sich dann die drei Unbekannten x , y und λ bestimmen.

Formal gelangt man zum gleichen Ergebnis, wenn man aus den beiden Gleichungen $z = f(x, y)$ und $u = \varphi(x, y)$ zunächst die Hilfsfunktion

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

bildet und dann deren partielle Ableitungen 1. Ordnung der Reihe nach gleich Null setzt. Dies führt zum Gleichungssystem

$$f_x + \lambda \cdot \varphi_x = 0 \wedge f_y + \lambda \cdot \varphi_y = 0 \wedge \varphi(x, y) = 0$$

mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, aus dem sich die Koordinaten des gesuchten Extremwertes berechnen lassen. λ ist dabei nur ein Hilfsparameter.

Zusammenfassung: Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Die Extremwerte von $z = f(x, y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe der *Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren* schrittweise wie folgt bestimmen:

1. Aus der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ und der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$$

gebildet. Der noch unbekannte Faktor λ heißt Lagrangescher Multiplikator.

2. Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt:

$$F_x = f_x + \lambda \cdot \varphi_x = 0 \wedge F_y = f_y + \lambda \cdot \varphi_y = 0 \wedge F_\lambda = \varphi(x, y) = 0$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten Extremwerte und der Lagrangesche Multiplikator bestimmen.

Bemerkungen

1. λ ist ein Hilfsparameter und sollte daher möglichst früh aus den Rechnungen eliminiert werden.
2. Die unter 2.3.4. angegebenen Bedingungen sind *notwendig*, jedoch *nicht hinreichend* für die Existenz eines Extremwerts unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$. Es muss daher stets von Fall zu Fall geprüft werden, ob auch tatsächlich ein Extremwert vorliegt bzw. um ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.
3. Dieses Verfahren lässt sich auch ohne Schwierigkeiten auf Funktionen von n Variablen (x_1, x_2, \dots, x_n) mit m Nebenbedingungen erweitern.

Funktion: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Nebenbedingungen: $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, k \in \{1, 2, \dots, m\}$

Man bildet wiederum die Hilfsfunktion

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

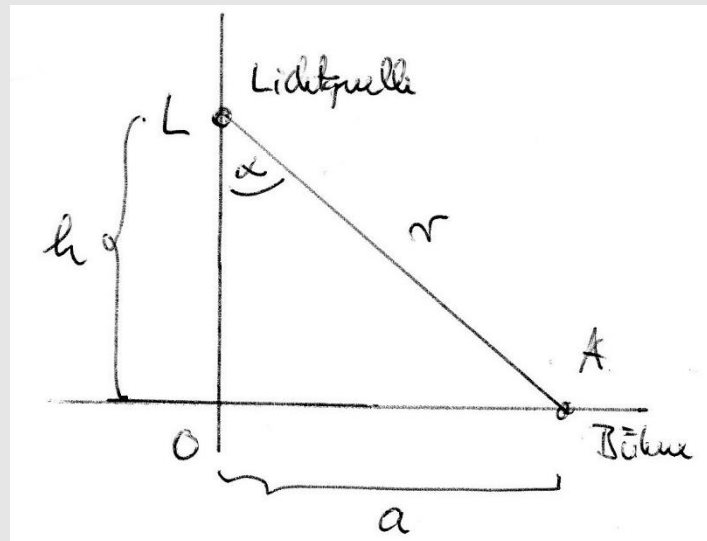
und setzt dann die $n + m$ partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Reihe nach gleich Null,

$$F_{x_1} = 0, F_{x_2} = 0, \dots, F_{x_n} = 0, F_{\lambda_1} = 0, F_{\lambda_2} = 0, \dots, F_{\lambda_m} = 0.$$

Aus diesen $n + m$ Gleichungen lassen sich dann die Koordinaten und Lagrange-Multiplikatoren bestimmen.

Beispiel

Ein fester Punkt A einer ebenen Bühne wird durch eine in der Höhe h verstellbare punktförmige Lichtquelle L mit der konstanten Lichtstärke I beleuchtet.



Die von der Lichtquelle im Punkt A erzeugte Beleuchtungsstärke B genügt dabei dem Lambert-schen Gesetz

$$B = B(\alpha, r) = \frac{I \cdot \cos \alpha}{r^2}.$$

α ist der Einfallswinkel des Lichts und r der Abstand zwischen der Lichtquelle und dem Punkt A . Unter welchem Winkel wird dieser Punkt optimal beleuchtet?

Beim Verschieben der Lampe ändert sich sowohl der Einfallswinkel α als auch der Abstand r . Zwischen diesen Größen besteht jedoch eine Abhängigkeit. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OAL folgt nämlich

$$a = r \cdot \sin \alpha.$$

Dies ist die gesuchte Nebenbedingung, die wir noch in die implizite Form

$$\varphi(\alpha, r) = r \cdot \sin \alpha - a$$

bringen. a ist dabei keine Variable, sondern ein fester Parameter. Nun können wir die Hilfsfunktion

$$F(\alpha, r, \lambda) = B(\alpha, r) + \lambda \cdot \varphi(r) = \frac{I \cdot \cos \alpha}{r^2} + \lambda \cdot (r \cdot \sin \alpha - a)$$

bilden. Wir bilden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung,

$$F_{\alpha} = -\frac{I \cdot \sin \alpha}{r^2} + \lambda \cdot r \cdot \cos \alpha \stackrel{!}{=} 0,$$

$$F_r = -\frac{2I \cdot \cos \alpha}{r^3} + \lambda \cdot \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0 \text{ und}$$

$$F_\lambda = r \cdot \sin \alpha - a \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen eliminieren wir den Lagrangeschen Multiplikator und erhalten

$$\frac{I \cdot \sin \alpha}{r^3 \cdot \cos \alpha} = \frac{2I \cdot \cos \alpha}{r^3 \sin \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2,$$

also $\tan \alpha = \sqrt{2} \vee \tan \alpha = -\sqrt{2}$.

Da die gesuchte Lösung im ersten Quadranten liegen muss, kommt nur das positive Vorzeichen in Frage, $\alpha \approx 54,74^\circ$. Bei diesem Winkel wird also A optimal beleuchtet. Die maximale Beleuchtungsstärke beträgt dann $B_{\max} \approx \frac{0,385I}{a^2}$.