整数因子分解问题

1. 问题描述：
   对于大于 1 的正整数 n，可以分解为：$\mathrm{n} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots \cdot x_n$，例如，当 n=12,可以有如下的分解方式：

$$12 = 12 \qquad 12 = 3 \times 2 \times 2$$
$$12 = 6 \times 2 \qquad 12 = 2 \times 6$$
$$12 = 4 \times 3 \qquad 12 = 2 \times 3 \times 2$$
$$12 = 3 \times 4 \qquad 12 = 2 \times 2 \times 3$$

   要求算出所有的分解方式。

2. 问题分析：
   对于任何一个合数可以写成几个质数的乘积，质数只能被自身整除，因此，可以先将 n 分解成若干基本的质数相乘，再将若干质数组合，得到 n 的子因子相乘。

3. 算法设计：
   （1）分解得到所有的质数因子
   通过查询质数表，如果没有计算得到质数表，再将 n 分解成为 $\mathrm{n} = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_m$，其中$n_1$,$n_2$,$n_3\cdots n_m$为质数，设集合 D=A={$n_1$,$n_2$,$n_3\cdots n_{m\}}$,输出本身 n。
   （2）对于 n 可以拆解成两个数相乘，即 N=P*Q，且满足 P<=Q。其中$\mathrm{Q}^0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_j$, $\mathrm{P} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_i$,设集合$\mathrm{B}^0$={$p_1$,$p_2$,$p_3\cdots p_{i\}}$,C={$q_1$,$q_2$,$q_3\cdots q_{j\}}$, 则满足 A=B+C;采取递归方式求解出所有的满足条件的 P 值的组合$\mathrm{E}^0 = \{\mathrm{P}_1^0, \mathrm{P}_2^0, \mathrm{P}_3^0 \cdots \mathrm{P}_s^0\}$，和 Q 值的组合$\mathrm{F}^0 = \{\mathrm{Q}_1^0, \mathrm{Q}_2^0, \mathrm{Q}_3^0 \cdots \mathrm{Q}_s^0\}$：输出 P，Q。
   （3） 取出$Q_i^0 \in F^0$，使得$N = Q_i^0$，$A^1 = A^0 - B^0$，求解满足$\mathrm{P}^1 \geq \mathrm{P}_i^0$,$\mathrm{P}^1 \leq \mathrm{Q}^1$的所有组合使得：$\mathrm{N} = P_j^1 \cdot Q_j^1$,输出：$\mathrm{P}_i^0$,$\mathrm{P}_j^1$,$\mathrm{Q}_j^1$同理得到, B_j^1={p_1,p_2,$p_3\cdots p_{i\}}$,$C_j^1 = \{q_1, q_2, q_3 \cdots q_{j\}}$，以及满足要求的集合$E^1$和$F^1$。
   （4）如果 F 的元素个数大于 1 则按照按照步骤（3），持续进行迭代。
   （5）再对输出结果进行排列组合，得到最终结果。

   其算法描述 $\mathrm{T(A)} = \sum_Q T(A - C)$，

   其中求所有 P 组合 E 的方式方式如下：
   a. 设 v=1;从 D 中按从小到大的取出依次选出第 i 个元素，计算 $\mathrm{v} = \mathrm{v} \cdot n_i$，
   b. 若 $\mathrm{v} * \mathrm{v} < \mathrm{N}$，如果满足 v>P 输出一个 P=v，且将 D 集合中删除元素 ni 得到集合 E。
   c. 如果 $\mathrm{v} * \mathrm{v} \geq \mathrm{N}$，则停止循环和迭代。
   d. 如果 $\mathrm{v} * \mathrm{v} < \mathrm{N}$,使得 D=E，进入步骤 a,进行迭代。
   即：

$$\mathrm{T(D)} = \sum_{n_i \in D} T(D - \{n_i\}) + \mathrm{C}$$

   举例说明：
   对于 12 可以分解为（2，2，3），三个质数相乘，输出 12
   可以得到：$\mathrm{E}^0 = \{2,3\}$，输出得到 2*6，3*4

当$P_0^1=2$，$Q_0^1=6$，得到$\mathrm{E}^1=\{2\}$，输出得到 2*2*3

得到三个结果（12），（2，6），（3，4）（2，2，3）对其进行排列组合：

（12）　：12

（2，6）　：2*6　6*2

（3，4）　：3*4　　4*3

（2，2，3）：2*2*3　2*3*2　3*2*2

一共 8 种结果：

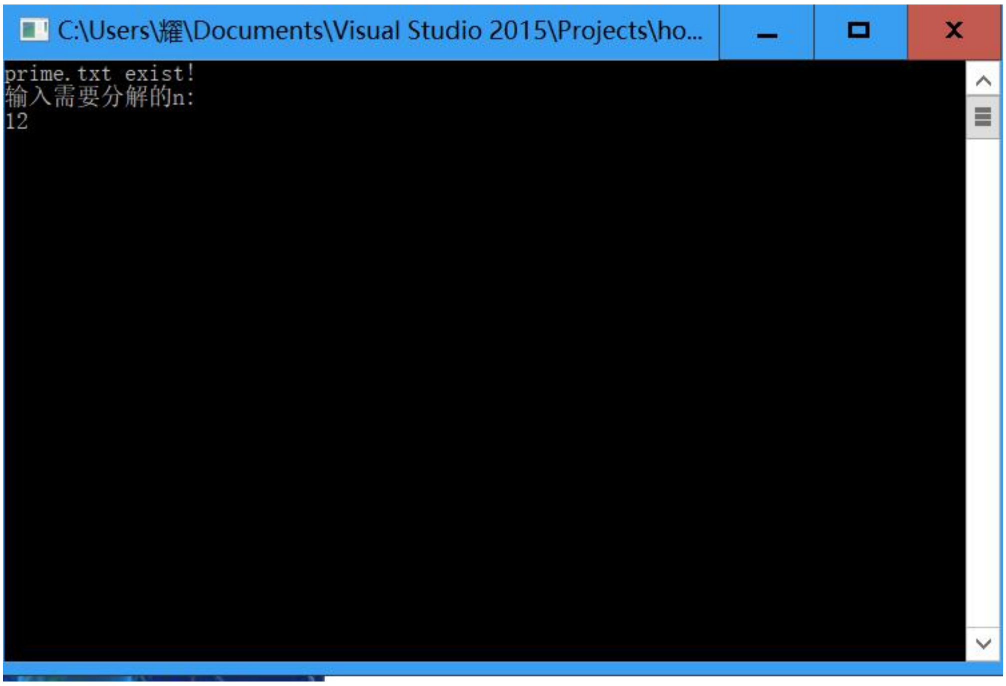
三.算法分析：

对于步骤一中的 n 的质数分解，其算法复杂度为：$\Omega(\lg n)$

对于求解 n 的 P 值的集合 E，其算法复杂度为$\Omega(\left(\frac{1}{2}\lg n\right)!)$，迭代最大平均深度为$\Omega(\left(\frac{1}{4}\lg n\right))$，故找到解的复杂度为：$\Omega((\left(\frac{1}{2}\lg n\right)!)^{lgn/4})$,最后的排列组合的复杂度为：$\Omega((\quad\lg n)!)$。其复杂度就为解个数的复杂度。

四．程序执行：

程序执行如下，输入需要分解的数。



依次得质数分解结果，E 集合，以及因子组合及排列后的结果，其结果如下：

```
12
质数分解:
2 : 2   3 : 1
P值集合:
2 : 2
3 : 3
P值集合:
2 : 2
P值集合:
P值集合:
因子组合结果
12
2       6
2       2       3
3       4
最终排列组合结果:
12
2       6
6       2
2       2       3
2       3       2
3       2       2
3       4
4       3
```