SVEUČILIŠTE U SPLITU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA MONTE CARLO GENERATORA S ANALIZOM FORWARD-BACKWARD ASIMETRIJE ZA PROCES $e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-$

Dea Šunjić

Split, 2025

Temeljna dokumentacijska kartica

Diplomski/Završni rad

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Odjel za (NAZIV ODJELA)
Studijski program: [UPISATI NAZIV]
Smjer: [UPISATI SMJER - ako postoji]

NASLOV DIPLOMSKOG/ZAVRŠNOG RADA

Ime i prezime

SAŽETAK

Tekst sažetka

Ključne riječi: XXXXXXXXXXXXXXXXXX

Rad je pohranjen u repozitoriju Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu, koji je dio nacionalnog repozitorijskog sustava Dabar.

Rad sadrži: [XX] stranica s općim podacima, [XX] stranica, [XX] grafičkih prikaza, [XX] tablica i [XX] literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

Mentor: dr. sc. Ime i Prezime, *viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu*

Komentor: dr. sc. Ime i Prezime, *viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu*

Povjerenstvo: dr. sc. Ime i Prezime, *viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu*

dr. sc. Ime i Prezime, *viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu*

dr. sc. Ime i Prezime, *viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu*

Rad prihvaćen: **[mjesec] [godina]**

Basic documentation card

Thesis

University of Split
Faculty of Science
Department of [DEPARTMENT NAME]
Study programme: . . .
Specialization in: . . .

TITLE OF THE THESIS

Name of the student

ABSTRACT

Abstract

Key words: XXXXXXXXXXXXXXXXXX

The thesis is deposited in the repository of the Faculty of Science, University of Split, which is part of the national repository system, Dabar.

Thesis consists of: [XX] pages with generic data, [XX] pages, [XX] figures, [XX] tables and [XX] references

Original language: Croatian

Mentor: First Name Last Name, Ph.D. *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

Supervisor: First Name Last Name, Ph.D. *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

Committee: First Name Last Name, Ph.D. *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

First Name Last Name, Ph.D. *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

First Name Last Name, Ph.D. *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

Thesis accepted: **[mjesec] [godina]**

IZJAVA

kojom izjavljujem s punom materijalnom i moralnom odgovornošću da sam diplomski/završni rad s naslovom [NASLOV DIPLOMSKOG/ZAVRŠNOG RADA] izradio/la samostalno pod mentorstvom [titula, ime i prezime nastavnika] i komentorstvom [titula, ime i prezime nastavnika], U radu sam primijenio/la metodologiju znanstvenoistraživačkog rada i koristio/la literaturu koja je navedena na kraju diplomskog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući naveo/la u diplomskom radu na uobičajen, standardan način citirao/la sam i povezao/la s fusnotama s korištenim bibliografskim jedinicama. Rad je pisan u duhu hrvatskog jezika.

Student/ica

Ime i prezime studenta/ice i potpis

Sadržaj

Uvod

razvoj Monte Carlo generatora i analiza generiranih događaja za proces $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$. Takav generator omogućava simulaciju konačnih stanja leptona u elektron-pozitron sudarima, pri čemu se mase leptona zanemaruju. Generirani događaji služe kao temelj za proučavanje kinematičkih raspodjela, uključujući kutne i rapiditetne distribucije te za analizu forward-backward asimetrije.

Implementacija generatora temelji se na numeričkom izračunu ukupnog udarnog presjeka procesa korištenjem Monte Carlo metode, što omogućava jednostavno proširenje na veće brojeve događaja i različite energijske uvjete. Program je razvijen u programskom jeziku Python i uključuje alate za vizualizaciju kinematičkih varijabli, pri čemu je odabrana analitička varijabla $\cos\theta$, kut između ulaznog elektrona i izlaznog muona.

Ovaj pristup omogućava praktično razumijevanje osnovnih principa Monte Carlo simulacije, integracije diferencijalnog udarnog presjeka i konstrukcije raspodjela događaja u sudaru čestica. Također, generator pruža uvid u povezanost teorijskog modela i numeričkih rezultata, uključujući usporedbu dobivenog ukupnog presjeka s analitičkim rješenjem, što potvrđuje ispravnost i preciznost implementacije.

Rad je organiziran na način da prvo opisuje teorijsku osnovu procesa, zatim detaljno prezentira implementaciju Monte Carlo generatora, nakon čega slijede rezultati numeričkih simulacija, analiza distribucija rapiditeta i forward-backward asimetrije, te diskusija dobivenih rezultata.

1. Uvod u simulacije sudara čestica

Analiza sudara čestica počinje proučavanjem primjera kao što su elastični sudari dviju kugli u jednoj dimenziji, a zadatak je izračunati promjene njihovih količina gibanja. Sljedeća razina složenosti uključuje neelastične sudare, gdje dolazi do gubitka kinetičke energije, primjerice zbog spajanja kugli ili drugih deformacija. Da bismo u simulacijama iz područja fizike elementarnih čestica što vjernije prikazali prirodu, moramo uzeti u obzir mnogo učinaka i koristiti razne modele i aproksimacije. Jedan od najvažnijih alata za proučavanje sudara u fizici elementarnih čestica su Monte Carlo simulacije [1]. Ove simulacije omogućuju modeliranje složenih interakcija čestica uzimajući u obzir statističku prirodu tih procesa. Korištenjem slučajnog uzorkovanja, Monte Carlo metode omogućuju precizno predviđanje rezultata sudara, što je ključno za razumijevanje i interpretaciju eksperimentalnih podataka [2].

1.1 Monte Carlo metoda integracije

Monte Carlo metoda integracije temelji se na ideji da se vrijednost integrala može aproksimirati prosjekom funkcije unutar intervala (slika 1.1). Za integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx, \tag{1.1}$$

aproksimacija pomoću Monte Carlo metode glasi

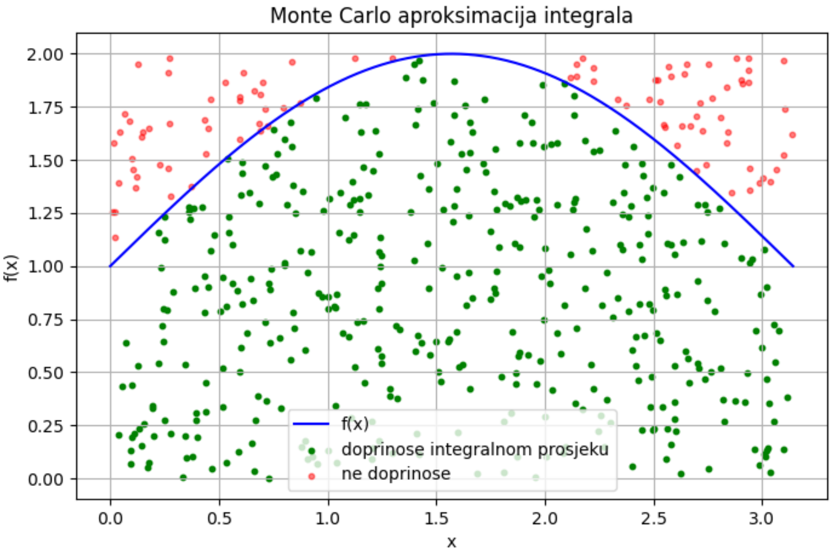
$$I \approx (x_2 - x_1)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i), \tag{1.2}$$

gdje su x_i nasumično odabrane točke u intervalu (x_1, x_2). Ako generiramo uniformno $\rho_i \in (0, 1)$, tada

$$x_i = x_1 + (x_2 - x_1)\rho_i. \tag{1.3}$$

Za procjenu preciznosti koristi se standardna devijacija prosjeka. Uvedemo težine

$$W_i = (x_2 - x_1) f(x_i), \tag{1.4}$$



Sl. 1.1. Ilustracija Monte Carlo integracije. Graf prikazuje funkciju $f(x)$ te točke koje doprinose integralnom prosjeku (zelene) i one koje ne doprinose (crvene).

tako da integral postaje prosjek težina

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i. \tag{1.5}$$

Varijanca procjene je definirana kao

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i \right)^2, \tag{1.6}$$

Naime, kako je je $I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i$, tada je

$$\mathrm{Var}(I) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} W_i \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}(W_i) = \frac{V_N}{N}. \tag{1.7}$$

Odatle slijedi standardna devijacija Monte Carlo integracije:

$$\sigma_{\mathrm{MC}} = \sqrt{\frac{V_N}{N}}. \tag{1.8}$$

U praksi se često koristi vizualna ilustracija ideje Monte Carlo integracije, kao na slici 1.1. Graf prikazuje funkciju $f(x)$ i nasumične točke, dok zeleno označene točke doprinose integralnom prosjeku, a crveno označene točke ne doprinose.

Monte Carlo metoda je osobito pogodna za visoko-dimenzionalne probleme, kao što su simulacije sudara čestica, jer je jednostavno generalizirati na velike dimenzije [1].

1.2 Poboljšanje konvergencije Monte Carlo integracije

Točnost integrala izračunatog Monte Carlo metodom integracije određuje se kao V_N/N. Dakle, jednostavno povećanje broja točaka poboljšava preciznost. Međutim, također se mogu primijeniti tehnike za smanjenje varijacije V_N, npr. metoda *Importance Sampling* [3]. Osnovna ideja je izvršiti Jacobievu transformaciju kako bi integral bio ravnomjerniji u novoj varijabli integracije. Drugim riječima, traži se transformacija takva da vrijedi $V'_N < V_N$ [1].

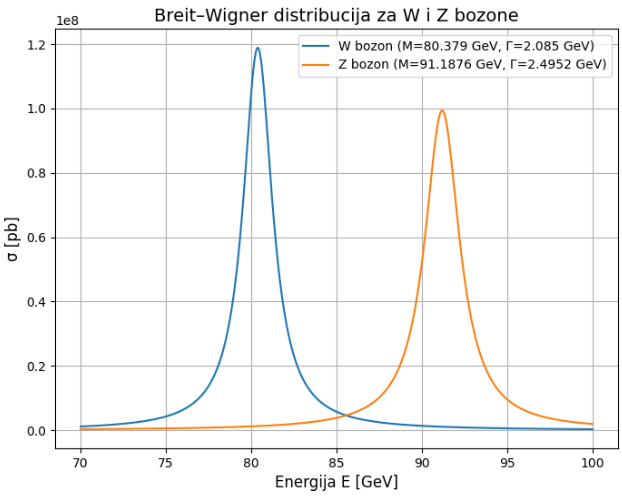
Razmatramo najjednostavniji slučaj koji se javlja u fizici čestica. U izračunima udarnih presjeka često se pojavljuje tzv. Breit-Wigner distribucija, koja modelira rezonance:

$$F_{BW}(m^2) = \frac{1}{(m^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2}, \tag{1.9}$$

gdje je M on-shell masa čestice, m je off-shell masa, a Γ širina rezonance [1].

Ovdje, *on-shell* znači da čestica zadovoljava relaciju $E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$ i predstavlja stvarnu česticu, dok *off-shell* znači da relacija nije zadovoljena i odnosi se na virtualne čestice koje privremeno posreduju u interakcijama [16, 20].

Primjer Breit–Wigner distribucije (za $M = 91.1876$, $\Gamma = 2.4952$) prikazan je na slici 1.2.



Sl. 1.2. Primjer Breit-Wigner distribucije za W i Z bozon.

Integrali koje tada susrećemo često imaju oblik:

$$I = \int_{M^2_{\text{min}}}^{M^2_{\text{max}}} \frac{dm^2}{(m^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2}. \tag{1.10}$$

Transformacija koju uzimamo u obzir je $m^2 \to \rho$, gdje vrijedi:

$$m^2 = M\Gamma \tan\rho + M^2, \tag{1.11}$$

a odgovarajući Jacobian je:

$$J = \frac{\partial m^2}{\partial \rho} = M\Gamma \sec^2 \rho. \tag{1.12}$$

Integral (1.11) tada postaje:

$$I = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho \, \frac{\partial m^2}{\partial \rho} \frac{1}{(m^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho \, M\Gamma. \tag{1.13}$$

U praksi je rijetko moguće izračunati integral analitički. Kada se radi o složenim područjima integracije, obično se bira funkcija koja što bolje opisuje ponašanje funkcije koju integriramo. Poseban pristup, poznat kao multi-channel integration, primjenjuje se u situacijama kada fazni prostor sadrži više šiljaka čime jednostavna Breit-Wigner distribucija više nije dovoljna [1]. Kod multi-channel integracije koristi se više funkcija težine (engl. *channels*), pri čemu svaki kanal odgovara jednom vrhu ili rezonanci u izrazu unutar integrala, a konačna procjena integrala dobiva se težinskim zbrajanjem doprinosa svih kanala, čime se smanjuje varijanca i omogućuje učinkovitija Monte Carlo integracija [21]. Ova metoda se koristi u suvremenim Monte Carlo generatorima [1].

2. *Hit-or-Miss* metoda

Monte Carlo metoda pokazuje se posebno pogodnom za izradu generatora događaja iz dva glavna razloga: numerički postupak ima sličnu, „slučajnu“ prirodu kao i sami fizički procesi koji se proučavaju, a uz to omogućuje generiranje događaja bez pridruženih težinskih faktora. Na sličan način kao kod Monte Carlo integracije, moguće je uzorkovati funkciju $f(x)$ i skupljati skup točaka u faznom prostoru, pri čemu svaka točka ima određenu vjerojatnost nastanka. Te točke predstavljaju potencijalne događaje, a njihova vjerojatnost odražava koliko je vjerojatno da se događaj dogodi. Kada želimo koristiti takve događaje za analizu ili daljnje simulacije, potrebno je uvijek voditi računa o pripadajućim težinama – što može biti nepraktično i neefikasno, osobito u kasnijim fazama simulacije, kada neki događaji imaju zanemarivo male težine i time nepotrebno opterećuju računalne resurse. Cjelokupni postupak integracije i generiranja događaja može se sažeti u dva osnovna koraka:

1. **Monte Carlo integracija i odabir točaka:** Nasumično se bira N točaka u faznom prostoru prema zadanoj distribuciji, pri čemu se njihove pridružene težine zbrajaju kako bi se izračunale sume $\sum_i W_i$ i $\sum_i W_i^2$. Na temelju tih suma određuju se vrijednost presjeka i pripadajuća pogreška. U ovoj fazi također se bilježi točka s najvećom težinom, označena kao W_{max}.

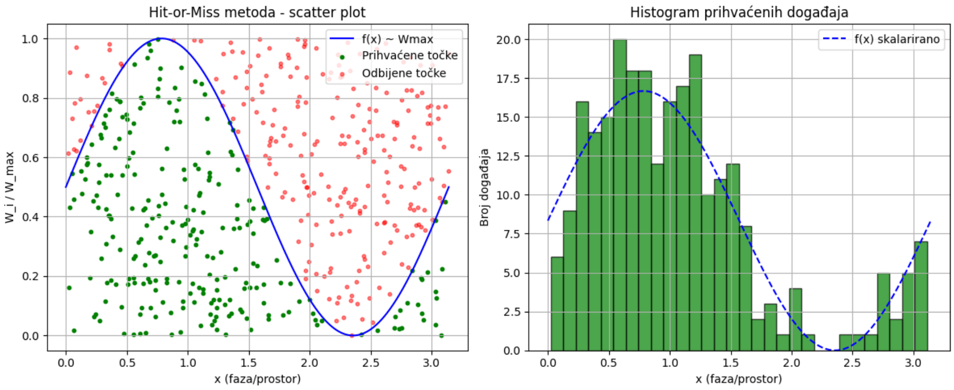
2. **Generiranje događaja bez pridruženih težina (*Hit-or-Miss* metoda):** Svaka nasumično odabrana točka faznog prostora uspoređuje se s pripadajućom vjerojatnošću, izraženom omjerom W_i/W_{max}, i nasumičnim brojem $R \in (0, 1)$. Ako je omjer veći od R, događaj se prihvaća; u suprotnom se odbacuje. Ovaj proces se ponavlja dok se ne prikupi željeni broj događaja N_{events} [1].

2.1 Primjer primjene *Hit-or-Miss* metode

Princip *Hit-or-Miss* metode može se ilustrirati pomoću grafa u jedno-dimenzionalnom faznom prostoru. Funkcija $f(x)$ predstavlja raspodjelu težina W_i, dok nasumično generirane točke u pravokutniku simuliraju odabir točaka u faznom prostoru i usporedbu s omjerom W_i/W_{max}.

Na slici 2.1 prikazan je rezultat simulacije, gdje zelene točke predstavljaju prihvaćene događaje, odnosno one za koje vrijedi $W_i/W_{\text{max}} > R$, dok crvene točke označavaju odbijene događaje.

Histogram prihvaćenih događaja (slika 2.1) pokazuje kako generirani skup događaja vizualno prati oblik funkcije $f(x)$, što potvrđuje ispravnost metode.



Sl. 2.1. Rezultat simulacije *Hit-or-Miss* metode u Pythonu. Lijevo je scatter plot koji prikazuje funkciju $f(x)$ te prihvaćene (zelene) i odbijene (crvene) točke u faznom prostoru. Desno je histogram prihvaćenih događaja, koji pokazuje raspodjelu generiranih događaja u skladu s oblikom funkcije $f(x)$.

3. Struktura generatora događaja

Simulacija sudara elementarnih čestica u eksperimentima fizike visokih energija zahtijeva precizno modeliranje složenih fizikalnih procesa koji vode od osnovnog sudara do konačnih čestica koje detektori registriraju. Sudari hadrona, poput proton-proton sudara na LHC-u, proizvode veliki broj čestica u konačnom stanju, često reda tisuću po događaju. To čini direktnu simulaciju iz teorijskih modela vrlo izazovnom zbog kombinacije visoke dimenzionalnosti faznog prostora i statističke prirode QCD interakcija [6].

Da bi se ovo savladalo, generatori događaja koriste pristup faktorizacije, pri kojem se složeni procesi dijele na niz uzastopnih koraka, svaki od kojih se može simulirati zasebno. Ovaj pristup omogućuje efikasno numeričko generiranje događaja bez gubitka preciznosti u predviđanju raspodjela konačnih čestica [7, 8]. Faktorizacija se može usporediti s adijabatskom aproksimacijom u mehanici, gdje se gibanja sustava odvijaju na različitim vremenskim skalama i pojedini dijelovi se mogu tretirati neovisno [9].

Unutar ovakve strukture, generator događaja prvo simulira osnovni proces visoke energije, poznat kao hard process, zatim modelira emisiju sekundarnih partona (engl. *partons*), tj. kvarkova i gluona koji čine unutarnju strukturu hadrona, kroz parton shower, a zatim prelazi na hadronizaciju i raspad nestabilnih čestica. Svaka od ovih faza uključuje detaljna pravila i aproksimacije, uključujući zakon očuvanja energije, impulsa i kvantnih brojeva, te uzimanje u obzir boje i spin čestica [10, 22].

Ovakav pristup omogućuje stvaranje realističnih događaja koji mogu biti uspoređeni s eksperimentalnim mjerenjima, pri čemu generatori događaja osiguravaju predviđanja za raspodjele kuta, energije i drugih fizikalnih veličina u konačnom stanju [6, 7]. Pritom, primjenom Monte Carlo metoda, generatori omogućuju statističku procjenu raspodjela i simulaciju rijetkih događaja, što je ključno za dizajn eksperimentalnih analiza i provjeru teorijskih modela.

Na temelju ovog konceptualnog okvira, cijeli događaj se generira kroz nekoliko uzastopnih koraka:

1. **Generiranje osnovnog procesa (hard procesa)**: Odabire se točka u faznom prostoru prema metodi *Hit-or-Miss*, čime se simulira osnovni sudar.

2. **Raspad teških čestica (rezonanci)**: Teške čestice s izrazito kratkim vremenom života raspadaju se prije faze *parton shower*. Primjerice, top kvark može se raspasti u lepton, neutrino i b-kvark.

3. **Partonski pljusak**: Ulazni partoni se prate unatrag do sudarajućih hadrona, što generira inicijalno zračenje. Čestice u konačnom stanju koje sudjeluju u jakim interakcijama (poput kvarkova i gluona koji nose kvantnu boju) također mogu emitirati gluone, čime nastaje konačno zračenje.

4. **Višestruke interakcije partona**: Niže energetske sekundarne interakcije među partonima unutar sudarajućih hadrona modeliraju se kao QCD $2 \to 2$ procesi.

5. **Hadronizacija i raspad hadrona**: U klasterskom modelu hadronizacije formiraju se skupine obojenih čestica (klasteri), iz kojih nastaju hadroni. Nestabilni hadroni se potom raspadaju u manje čestice.

Ova faktorizacija omogućuje generatorima događaja da postupno grade kompleksne događaje, što je ključno za realistične simulacije sudara i analizu eksperimentalnih podataka [1].

3.1 Povezivanje strukture generatora događaja s razvijenim Monte Carlo modelom

U skladu s općom strukturom generatora događaja, razvijeni Python program predstavlja pojednostavljenu implementaciju Monte Carlo generatora za proces

$$e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-.$$

Dok profesionalni generatori događaja, poput *PYTHIA* i *HERWIG*, obuhvaćaju sve faze od osnovnog sudara do hadronizacije i raspada konačnih čestica [13, 14], implementirani program fokusira se isključivo na leptonski proces, u kojem nema hadronskih stupnjeva slobode. Stoga su složenije faze poput parton shower-a i hadronizacije izostavljene, što je fizikalno opravdano [12].

Na temelju koraka definiranim u općoj strukturi generatora događaja, možemo napraviti sljedeću usporedbu s implementacijom:

1. **Generiranje osnovnog procesa (hard process)**

   - *Primjena u Python programu:* Funkcija `diff_cross_section(cos_theta)` i Monte Carlo integracija (`for _ in range(num_points)`) generira nasumične točke u faznom prostoru prema metodi *Hit-or-Miss*.
   - *Objašnjenje:* Izračunava diferencijalni presjek procesa i simulira događaje u skladu s teorijskim modelom.

2. **Raspad teških čestica (rezonanci)**

   - *Primjena u Python programu:* Parametri `m_z` i `width_z` unutar funkcije `diff_cross_section` simuliraju Breit–Wigner širinu Z bozona.

- *Objašnjenje:* Stvarni Z bozon se ne generira, ali efekti širenja rezonancije su uključeni, što omogućuje fizikalno konzistentnu simulaciju raspodjela mase konačnih čestica [10].

3. **Partonski pljusak (parton shower)**

   - *Primjena u Python programu:* Nije implementirano.
   - *Objašnjenje:* Ulazne i izlazne čestice su leptoni, pa nema emisije gluona ni razvoja partonskog pljuska. U profesionalnim generatorima, ovaj korak modelira QCD zračenje hadronskih čestica [13, 14].

4. **Višestruke interakcije partona**

   - *Primjena u Python programu:* Nema primjene.
   - *Objašnjenje:* Elektroni i pozitroni su elementarne čestice, nema sekundarnih interakcija među partonima [15].

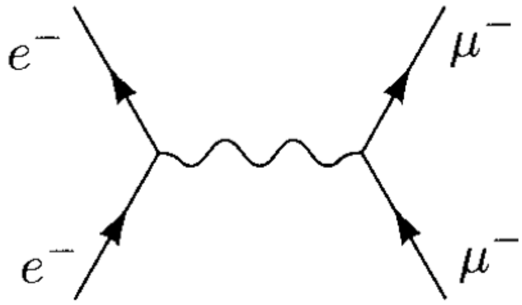
5. **Hadronizacija i raspad hadrona**

   - *Primjena u Python programu:* Nije primijenjeno.
   - *Objašnjenje:* Konačno stanje sadrži samo stabilne leptone (μ^+ i μ^-), čije su energije i impulsi određeni direktno iz kinematike dvotjelnog raspada [10].

Postupak generiranja događaja u Python programu koristi *Hit-or-Miss* metodu (petlja `while events_generated < N`), što ilustrira princip Monte Carlo uzorkovanja diferencijalnog presjeka i odabira slučajnih točaka u faznom prostoru. Ovo je ključna faza svakog generatora događaja i omogućuje analizu kinematičkih distribucija, poput kutnih i rapiditetnih raspodjela [7, 8].

Zaključno, razvijeni generator obuhvaća samo prvu fazu i djelomično drugu, dok su ostale faze izostavljene jer nisu relevantne za leptonske sudare. Time se dobiva jednostavan, ali fizikalno konzistentan model koji omogućuje razumijevanje principa Monte Carlo simulacije i praktičnu analizu forward-backward asimetrije [12, 15].

4. Proces $e^+e^- \to \gamma \to \mu^+\mu^-$



Sl. 4.1. Feynmanov dijagram za proces $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ posredstvom virtualnog fotona [4].

4.1 Diferencijalni udarni presjek procesa $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Razmotrimo proces anihilacije elektrona i pozitrona u par mion–antimion putem virtualnog fotona. Ovo poglavlje prikazuje ključne korake koji vode do izraza za diferencijalni udarni presjek u okviru kvantne elektrodinamike (QED).

Feynmanov dijagram prikazan je na slici 4.1. Prema QED Feynmanovim pravilima, amplituda procesa glasi:

$$iM = \bar{v}_{s'}(p')(-ie\gamma^\lambda)u_s(p)\,\frac{-ig_{\lambda\nu}}{q^2}\,\bar{u}_r(k)(-ie\gamma^\nu)v_{r'}(k'), \tag{4.1}$$

gdje s, s', r, r' označavaju indekse heliciteta fermiona, a $q^2 = (p + p')^2$ predstavlja kvadrat ukupnog impulsa prijenosa.

Kvadrat matrice amplituda (uz izostavljanje oznaka za heliticete) daje:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4}(\bar{v}(p')\gamma^\lambda u(p)\,\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p'))(\bar{u}(k)\gamma_\lambda v(k')\,\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)). \tag{4.2}$$

Kako bi se dobio rezultat koji ne ovisi o orijentaciji spinova, potrebno je izračunati prosjek po spinovima početnih čestica i sumu po spinovima konačnih čestica:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|M|^2. \tag{4.3}$$

Relacije potpunosti za Diracove spinore glase:

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = p + m, \tag{4.4}$$

$$\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = p - m. \tag{4.5}$$

Uvrštavanjem tih relacija u izraz za $\sum |M|^2$ i zanemarivanjem masa leptona ($m_e, m_\mu \approx 0$), dobiva se:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |M|^2 = \frac{e^4}{4q^4}\mathrm{Tr}[p'\gamma^\lambda p\gamma^\nu]\,\mathrm{Tr}[k\gamma_\lambda k'\gamma_\nu]. \tag{4.6}$$

Za četiri gamma-matrice vrijedi identitet:

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta] = 4(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}). \tag{4.7}$$

Koristeći ovaj identitet na oba traga, dobiva se:

$$\mathrm{Tr}[p'\gamma^\lambda p\gamma^\nu] = 4(p'^\lambda p^\nu + p'^\nu p^\lambda - g^{\lambda\nu}(p\cdot p')), \tag{4.8}$$

$$\mathrm{Tr}[k\gamma_\lambda k'\gamma_\nu] = 4(k_\lambda k'_\nu + k_\nu k'_\lambda - g_{\lambda\nu}(k\cdot k')). \tag{4.9}$$

Množenjem ova dva izraza i vođenjem računa o kontrakcijama metričkih tenzora, nakon sređivanja dobiva se:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |M|^2 = \frac{8e^4}{q^4}\big[(p\cdot k)(p'\cdot k') + (p\cdot k')(p'\cdot k)\big]. \tag{4.10}$$

U sustavu centra mase (slika 4.2) vektori impulsa imaju oblik:

$$p = (E, 0, 0, E), \qquad p' = (E, 0, 0, -E), \tag{4.11}$$

$$k = (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta), \qquad k' = (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta), \tag{4.12}$$

gdje je θ kut između početnog elektrona i konačnog miona.

Skalarni produkti tada glase:

$$p\cdot k = p'\cdot k' = E^2(1-\cos\theta), \tag{4.13}$$

$$p\cdot k' = p'\cdot k = E^2(1+\cos\theta), \tag{4.14}$$

$$q^2 = (p+p')^2 = 4E^2. \tag{4.15}$$

Uvrštavanjem ovih relacija u izraz za $\sum |M|^2$, dobiva se:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}} |M|^2 = e^4(1+\cos^2\theta). \tag{4.16}$$

Za proces tipa 2 $\to$ 2, opća formula za diferencijalni presjek glasi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 s}, \tag{4.17}$$

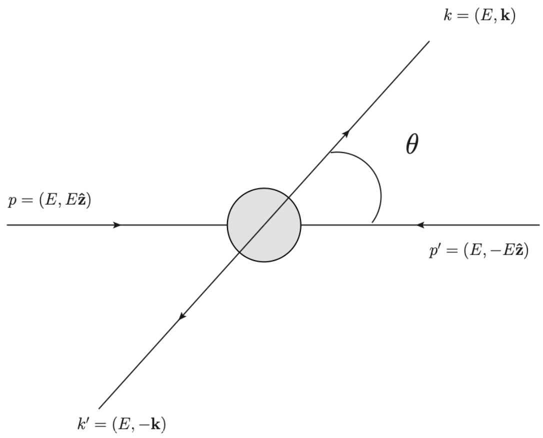
gdje je $s = E_{\mathrm{CM}}^2$ energija u centru mase. Uvrštavanjem izraza za $|M|^2$ i korištenjem definicije elektromagnetske konstante vezanja $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ dobiva se:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2\theta). \tag{4.18}$$

Budući da udarni presjek ne ovisi o azimutnom kutu ϕ, integracija po ϕ daje dodatni faktor 2π:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta\, d\theta. \tag{4.19}$$

Ovaj rezultat opisuje kutnu distribuciju i ukupni udarni presjek za proces $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ u okviru QED-a [16, 1].



Sl. 4.2. Kinematički raspored čestica u procesu $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Kut θ definiran je između početnog elektrona i konačnog miona [1].

4.2 Fizička interpretacija i usporedba s analizom u literaturi

Dobiveni izraz za diferencijalni presjek procesa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2\theta)$$

predstavlja temeljni rezultat kvantne elektrodinamike (QED) za anihilaciju elektrona i pozitrona u par miona putem virtualnog fotona. Kako bi se dublje razumjelo njegovo značenje i struktura, korisno je usporediti ovaj rezultat s detaljnijom analizom prikazanom u udžbeniku *Modern Particle Physics* (M. Thomson, 2013) [16].

U Thomsonovoj analizi polazi se od razmatranja svih mogućih kombinacija heliciteta elektrona i pozitrona u početnom stanju te miona u konačnom stanju. U granici visokih energija ($E \gg m$), većina tih kombinacija daje nul-vrijednost matričnog elementa zbog strukture vektorske interakcije fotona. Pokazuje se da samo četiri kombinacije heliciteta (RL→RL, RL→LR, LR→RL, LR→LR) daju nenulte doprinose [16].

Za primjer, matrični element prijelaza RL→RL ima oblik:

$$M_{RL\to RL} = 4\pi\alpha(1 + \cos\theta), \tag{4.20}$$

dok prijelaz RL→LR daje

$$M_{RL\to LR} = 4\pi\alpha(1 - \cos\theta). \tag{4.21}$$

Zbrojem svih dopuštenih helicitetskih kombinacija dobiva se prosječni kvadrat matričnog elementa:

$$\langle |M|^2 \rangle = e^4(1 + \cos^2\theta). \tag{4.22}$$

Time se pokazuje da se rezultat može interpretirati kao posljedica interferencije različitih helicitetskih amplituda, koje zajedno stvaraju simetričnu kutnu distribuciju. Ova simetrija između prednjeg i stražnjeg poluprostora odraz je očuvanja pariteta u QED interakcijama.

Diferencijalni presjek, kada se izrazi u istom obliku kao u Thomsonovom pristupu,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2\theta), \tag{4.23}$$

potvrđuje potpuno podudaranje s rezultatom u uvodu poglavlja. Integracijom po punom prostornom kutu dobiva se ukupni presjek:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \tag{4.24}$$

što predstavlja poznatu formulu za ukupni QED presjek u anihilacijama leptonskih parova.

Ovaj teorijski rezultat eksperimentalno je potvrđen u nizu e^+e^- sudarača, uključujući JADE eksperiment pri DESY laboratoriju, gdje su izmjerene kutne distribucije u skladu s predikcijom oblika $(1 + \cos^2\theta)$. Na višim energijama, zbog interferencije s izmjenom Z-bozona, javlja se mala *forward–backward* asimetrija, ali osnovni QED oblik ostaje dominantan [16].

4.3 Helicitetne amplitude i spinori

Proces $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ može se razložiti na šestnaest mogućih helicitetnih konfiguracija, četiri za početno stanje (e^+e^-) i četiri za konačno stanje ($\mu^+\mu^-$) (slike 4.3 i 4.4). Svaka od ovih konfiguracija predstavlja zaseban fizički proces, npr. $e^+_\uparrow e^-_\uparrow \to \mu^+_\uparrow \mu^-_\uparrow$ (RR→RR) ili $e^+_\uparrow e^-_\uparrow \to \mu^+_\uparrow \mu^-_\downarrow$ (RR→RL)[16].

Budući da su heliciteti ortogonalni, procesi s različitim konfiguracijama ne interferiraju.

Ukupni kvadrat matričnog elementa za određenu početnu konfiguraciju dobiva se zbrajanjem kvadrata za sve četiri konačne konfiguracije:

$$|M_{RR}|^2 = |M_{RR\to RR}|^2 + |M_{RR\to RL}|^2 + |M_{RR\to LR}|^2 + |M_{RR\to LL}|^2. \tag{4.25}$$

Za nepolarizirane zrake, svaki početni helicitet se javlja s jednakom vjerojatnošću, što dovodi do definicije spin-averaged matričnog elementa:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2, \tag{4.26}$$

pri čemu se zbrajaju sve moguće helicitetne kombinacije početnog i konačnog stanja. Ovaj pristup objašnjava zašto krajnji diferencijalni presjek ima oblik $(1 + \cos^2\theta)$ [16].

4.3.1 Elektronski i muonski momenti

Matrični element za pojedinu helicitetnu kombinaciju može se napisati kao skalarni produkt četverovektorskih momenata elektrona i miona:

$$M = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu, \tag{4.27}$$

gdje su četiri-komponentni momenti definirani preko spinora:

$$j_e^\mu = v(p_2)\gamma^\mu u(p_1), \quad j_\mu^\nu = u(p_3)\gamma^\nu v(p_4). \tag{4.28}$$

Za neke helicitetne konfiguracije, npr. RL, komponenta momenta miona dobiva oblik:

$$j_{\mu,RL} = 2E(0, -\cos\theta, i, \sin\theta), \tag{4.29}$$

dok su druge konfiguracije (RR, LL) nula. Ova svojstva odražavaju karakter QED interakcije i pomažu razumjeti simetriju rezultata po [16].

4.3.2 Lorentz-invarijantna formulacija

Kvadrat matričnog elementa može se također izraziti kroz Lorentz-invarijantne produkte četverovektora:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{2e^4 \left[(p_1 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2 \right]}{(p_1 \cdot p_2)^2}. \tag{4.30}$$

U uvjetu $E \gg m_\mu$, Mandelstamove varijable definirane su kao:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \tag{4.31}$$

što omogućuje zapis kvadrata matričnog elementa u obliku:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{2e^4(t^2+u^2)}{s^2}. \tag{4.32}$$

Ovaj izraz vrijedi u svim referentnim sustavima i povezuje se direktno s diferencijalnim presjekom [16].

4.4 Spin u procesu $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

U analizi procesa $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ moguće je definirati četiri kombinacije heliciteta koje daju ne-nultu vrijednost matrice (slika 4.5). U svim slučajevima, spinovi dvaju početnih čestica su poravnati, kao i spinovi dvaju konačnih čestica. Ako definiramo z-os u smjeru snopa dolaznog elektrona, tada komponenta ukupnog spina sustava e^+e^- duž te osi može biti $S_z = \pm 1$. To znači da ne-nulti doprinos daju samo stanja s ukupnim spinom $S = 1$ [16].

Helicitetna stanja mogu se opisati kao:

$$|S, S_z\rangle = \begin{cases} |1,+1\rangle, & \text{za RL kombinaciju,} \\ |1,-1\rangle, & \text{za LR kombinaciju.} \end{cases}$$

Za konačni sustav $\mu^+\mu^-$ helicitetne kombinacije odgovaraju spin-stanjima $|1,\pm1\rangle_\theta$ mjerena u odnosu na os definiranu smjerom μ^- čestice. Operator komponente spina duž osi definirane jediničnim vektorom $\hat{n}$ pod kutom θ u odnosu na z-os može se zapisati kao:

$$S_n = \frac{1}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}, \tag{4.33}$$

gdje su $\vec{\sigma}$ Pauli matrice [16].

Spin valna funkcija za kombinaciju RL u konačnom stanju $\mu^+\mu^-$ može se izraziti kao:

$$|1,+1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)|1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta|1,0\rangle + \frac{1}{2}(1+\cos\theta)|1,+1\rangle. \tag{4.34}$$

Kutna ovisnost matrice elementa tada proizlazi iz skalarnog produkta spin-stanja početnog e^+e^- sustava i konačnog $\mu^+\mu^-$ sustava (slika 4.6):

$$\mathcal{M}_{RL\to RL} \propto \langle 1,+1|1,+1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1+\cos\theta), \tag{4.35}$$

$$\mathcal{M}_{LR\to RL} \propto \langle 1,-1|1,+1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1-\cos\theta). \tag{4.36}$$

U granici visoke energije ($E \gg m$), doprinos daju samo stanja ukupnog spina $S = 1$, pri čemu je spin vektor poravnat sa smjerom gibanja čestica. Ova kutna ovisnost je izravna posljedica činjenice da interakcija tipa $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ opisuje razmjenu čestice spina 1, u ovom slučaju [16].

4.5 Proces $e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-$

Diferencijalni presjek za proizvodnju para leptona $\mu^+\mu^-$ u leptonskim sudaračima putem slabog međudjelovanja računa se na sličan način kao i u QED slučaju. Međutim, ključna razlika pojavljuje se zbog svojstava Z bozona, koji ne djeluje jednako na lijeve i desne fermione [5]. Upravo ta razlika u vezanju dovodi do pojave asimetrije u raspodjeli konačnih čestica [1].

Interakcija fermiona sa Z bozonom u okviru standardnog modela može se zapisati kao

$$g_W\, L_{ffZ} = -\frac{1}{2\cos\theta_W}\,\bar{\psi}_f\gamma^\mu\left(V_f - A_f\gamma^5\right)\psi_f\, Z_\mu, \tag{4.37}$$

gdje g_W predstavlja parametar vezanja SU(2) teorije, dok θ_W označava tzv. Weinbergov kut. Ovdje ψ_f opisuje fermionsko polje, a Z_μ je odgovarajuće polje Z bozona. Parametri V_f i A_f određuju vektorske i aksijalne spregnute konstante za pojedine fermione, a njihove vrijednosti prikazane su u Tablici 4.1.

Fermion	Q_f	V_f	A_f
u, c, t	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W$	$+\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W$	$-\frac{1}{2}$
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
e, μ, τ	-1	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W$	$-\frac{1}{2}$

Tablica 4.1. Spregnute konstante fermiona sa Z bozonom.

Zbog ove razlike u spregama, raspodjela proizvedenih leptona nije više simetrična u odnosu na kut raspršenja, već se pojavljuje tzv. *forward-backward* asimetrija. Za razliku od čisto elektromagnetskog slučaja, gdje je diferencijalni presjek građen samo od konstantnih članova i izraza proporcionalnih $\cos^2\theta$, u prisutnosti Z bozona pojavljuje se i član koji je linearan u $\cos\theta$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\hat{s}}\Big(A_0(1+\cos^2\theta) + A_1\cos\theta\Big), \tag{4.38}$$

gdje koeficijenti A_0 i A_1 sadrže informacije o spregama i zadani su sljedećim izrazima:

$$A_0 = Q_f^2 - 2Q_fV_\mu V_f\chi_1 + (A_\mu^2 + V_\mu^2)(A_f^2 + V_f^2)\chi_2, \tag{4.39}$$

$$A_1 = -4Q_fA_\mu A_f\chi_1 + 8A_\mu V_\mu A_f V_f\chi_2. \tag{4.40}$$

Ovdje se pojavljuju pomoćne funkcije χ_1 i χ_2, koje uključuju rezonantno ponašanje Z bozona i zadane su izrazima:

$$\chi_1(\hat{s}) = \kappa\,\hat{s}\,\frac{\hat{s} - M_Z^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2M_Z^2}, \tag{4.41}$$

$$\chi_2(\hat{s}) = \kappa^2\,\frac{\hat{s}^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2M_Z^2}, \tag{4.42}$$

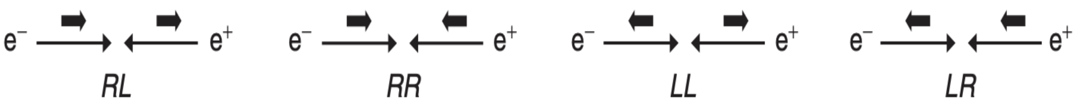
$$\kappa = \frac{\sqrt{2} G_F M_Z^2}{4\pi\alpha}. \tag{4.43}$$

Vidljivo je da se na ovaj način uzima u obzir rezonantni vrh oko mase Z bozona (M_Z), kao i njegova konačna širina Γ_Z, što je ključno za realističan opis fizikalnih procesa na visokim energijama [1].

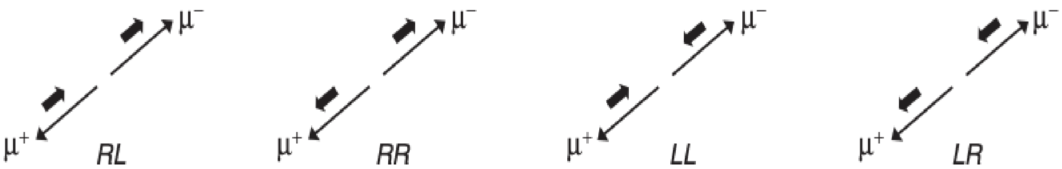
Konačno, korisno je napomenuti da se konzistentnost Monte Carlo integracije može provjeriti usporedbom numerički dobivenog rezultata s analitičkim izražajem za ukupni presjek. Naime, integracijom preko kuta θ linearni član u $\cos\theta$ nestaje zbog svoje asimetrične prirode, te preostaje:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} A_0. \tag{4.44}$$

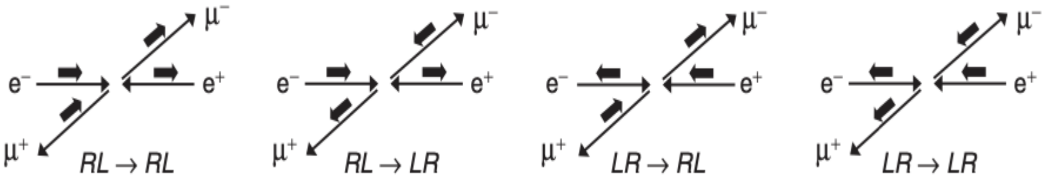
Ovaj rezultat služi kao važan test za provjeru ispravnosti numeričkih simulacija jer omogućuje usporedbu s očekivanom teorijskom vrijednošću. [1].



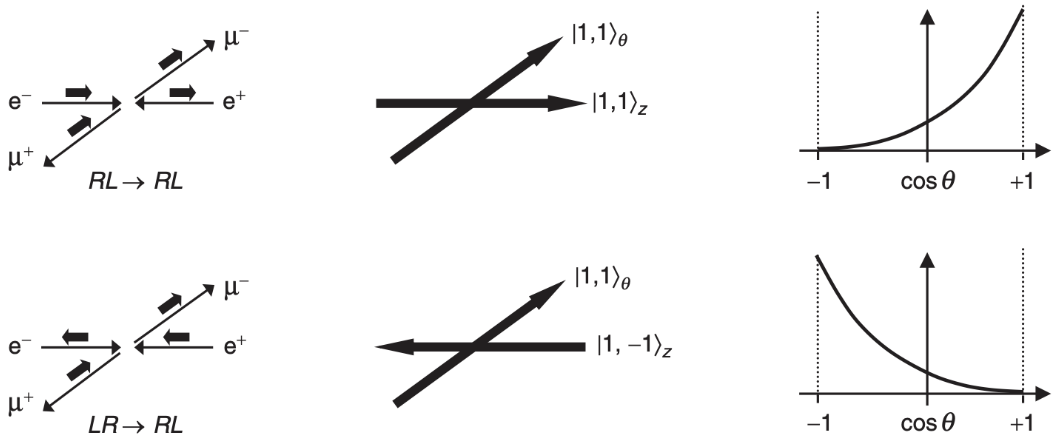
Sl. 4.3. Četiri moguće kombinacije heliciteta za početno stanje e^+e^- [16].



Sl. 4.4. Četiri moguće kombinacije heliciteta za konačno stanje $\mu^+\mu^-$ [16].



Sl. 4.5. Četiri kombinacije heliciteta u procesu $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ koje, u slučaju kada je energija E mnogo veća od mase m, daju ne-nulte matrične elemente [16].



Sl. 4.6. Orijentacije sustava sa spinom 1 u kombinacijama heliciteta $RL \to RL$ i $LR \to RL$ te ovisnost odgovarajućeg matričnog elementa o kutu u graničnom slučaju kada je $E \gg m$ [16].

5. Monte Carlo generator za proces $e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-$

Nakon teorijskog pregleda procesa $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ u okviru kvantne elektrodinamike i elektroslabe teorije, sljedeći korak u ovom radu bio je praktična implementacija Monte Carlo generatora događaja. Cilj ovog dijela rada bio je razviti program koji generira događaje za proces

$$e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-,$$

pri čemu se lepton μ koristi kao reprezentativan primjer konačnog stanja, s obzirom na to da su mase leptona zanemarene. Ovaj pristup jednako vrijedi i za druge leptonske parove, osim u slučaju procesa $e^+e^- \to e^+e^-$, gdje se pojavljuje dodatni t-kanalni dijagram koji nije obuhvaćen ovim izvodom [1].

Za razliku od složenijih slučajeva, integracija za izračun ukupnog presjeka ovdje je relativno jednostavna, jer se pojavljuju samo kosinusni članovi, koji se mogu integrirati analitički. Također, budući da je energija u centru mase $\hat{s}$ unaprijed zadana, nije bilo potrebe za Jacobijevim transformacijama radi poboljšanja učinkovitosti integracije, kao što je slučaj u nekim drugim procesima [1].

Unatoč jednostavnosti, ovaj zadatak daje vrijedan uvid u osnovne gradivne blokove Monte Carlo generatora događaja. Algoritam korišten u izradi generatora temelji se na postupku prikazanom u poglavlju 3, a implementacija je provedena u programskom jeziku `Python`. Osim samog generiranja događaja, program uključuje i osnovne alate za vizualizaciju, pri čemu se pomoću biblioteke `Matplotlib` dobivaju raspodjele kinematičkih varijabli. Kao osnovna varijabla analize odabrana je $\cos\theta$, gdje θ predstavlja kut između ulaznog elektrona i izlaznog muona. Ovaj kut je mjerljiv u eksperimentima jer su poznati smjerovi i dolaznih i odlaznih leptona [1].

Dodatne provjere ispravnosti generatora uključuju usporedbu numerički dobivenog ukupnog presjeka s analitičkim rješenjem. Primjerice, za $E_{\text{cm}} = 90$ GeV dobivena je vrijednost

$$\sigma = (1060.82 \pm 0.25)\ \text{pb},$$

što je u vrlo dobrom suglasju s analitičkim rezultatom

$$\sigma_{\text{analitički}} = 1060.93\ \text{pb}.$$

Osim ukupnog presjeka, moguće je istražiti i dodatne raspodjele, kao što su distribucije energije čestica, pseudorapidnost (koja u masless aproksimaciji odgovara rapidnosti)

$$\eta = -\ln\tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{5.1}$$

kao i pojavu *forward-backward* asimetrije, definirane izrazom

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B}, \tag{5.2}$$

gdje σ_F i σ_B označavaju presjeke u prednjem ($\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$) i stražnjem ($\theta \in (\pi/2, \pi) \cup (-\pi, -\pi/2)$) poluprostoru [1].

5.1 Implementacija Monte Carlo generatora

5.1.1 Definicija diferencijalnog presjeka i parametara

U implementaciji Monte Carlo generatora prvo su definirani osnovni fizikalni parametri potrebni za izračun diferencijalnog presjeka procesa $e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-$: masa i širina Z-bozona, elektromagnetska konstanta α_{QED}, Fermi konstanta G_F, kvadrat sinusa Weinbergovog kuta $\sin^2\theta_W$, te faktor za pretvorbu iz GeV^{-2} u pikobarne (pb). Energija sudara u centru mase označena je kao E_{cm}, dok je $\hat{s} = E_{\text{cm}}^2$ Mandelstamova varijabla.

Diferencijalni presjek u elektroslabom slučaju izražava se kao što je prikazano u formulama (4.32)–(4.37) pri čemu koeficijenti A_0 i A_1 uključuju vektorska i aksijalna sprezanja leptona i fermiona te funkcije χ_1 i χ_2 koje opisuju rezonantni doprinos Z-bozona. U kodu su vrijednosti spreganja fermiona Q_f, V_f, A_f uzete direktno iz Tablice 1, dok su spreganja leptona (μ) također preuzeta iz tablice. Na primjer, za μ^- imamo $Q = -1$, $V_\mu = -1/2 + 2\sin^2\theta_W$, $A_\mu = -1/2$. Uvrštavanjem ovih numeričkih vrijednosti u gornje formule dobivaju se eksplicitni izrazi koji se koriste u funkciji `diff_cross_section` u kodu 1.1.

```python
import math
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametri uzeti iz Tablice 2 dokumenta
m_z = 91.188                # masa Z bozona u GeV
width_z = 2.4414            # sirina Z bozona u GeV
alpha_qed = 1/132.507       # elektromagnetska konstanta
fermi = 1.16639e-5          # Fermi konstanta
sin2_theta_w = 0.222246     # kvadrat sinusa Weinbergovog kuta
pb_conv = 3.894e8           # GeV^-2 u pb

energy_cm = 90
s_hat = energy_cm**2

def diff_cross_section(cos_theta):
    # Vektorsko i aksijalno sprezanje leptona
    vector_coupling = -0.5 + 2*sin2_theta_w
    axial_coupling = -0.5

    # Funkcije chi1 i chi2 za rezonantni doprinos Z bozona
    k_factor = math.sqrt(2)*fermi*m_z**2/(4*math.pi*alpha_qed)
    chi_1 = k_factor*s_hat*(s_hat-m_z**2)/((s_hat-m_z**2)**2 + (width_z**2)*m_z**2)
    chi_2 = k_factor**2*s_hat**2/((s_hat-m_z**2)**2 + (width_z**2)*m_z**2)

    # Koeficijenti A0 i A1
    A_0 = 1 + 2*vector_coupling**2*chi_1 + (axial_coupling**2 + vector_coupling**2)**2 * chi_2
    A_1 = 4*axial_coupling**2*chi_1 + 8*axial_coupling**2*vector_coupling**2*chi_2

    const = 2*math.pi*alpha_qed**2/(4*s_hat)

    return const * (A_0*(1+cos_theta**2) + A_1*cos_theta)
```

Kôd 1.1 Definicija parametara i funkcije `diff_cross_section` koja računa diferencijalni presjek kao funkciju kuta θ.

5.1.2 Monte Carlo integracija ukupnog presjeka

Za izračun ukupnog presjeka korištena je Monte Carlo metoda integracije. Generiran je veliki broj slučajnih vrijednosti $\cos\theta$ u intervalu $[-1, 1]$, a diferencijalni presjek (definiran u funkciji `diff_cross_section`) korišten je kao težinska funkcija. Ukupni presjek dobiva se kao prosječna vrijednost težina, dok se statistička pogreška procjenjuje iz varijance.

```
# MC integracija - inicijalizacija
num_points = 1000000
cos_theta_range = 2.0  # [-1,1]
random.seed(42)

total_weight = 0.0
total_weight_sq = 0.0
max_weight = 0.0
max_cos_theta = -2.0

print("integracija")
```

Kôd 1.2 Inicijalizacija varijabli potrebnih za integraciju

U ovom dijelu koda inicijaliziraju se sve potrebne varijable: broj točaka za Monte Carlo integraciju, interval za $\cos\theta$, akumulatori za težine i maksimalnu težinu, te se postavlja generator slučajnih brojeva. Ovaj korak osigurava da su svi parametri spremni za izvođenje glavnog integracijskog dijela. U drugom dijelu koda izvršava se sama Monte Carlo integracija:

- Generiraju se nasumične vrijednosti $\cos\theta$ i izračunava težina pomoću funkcije `diff_cross_section`.
- Težine se akumuliraju kako bi se dobio prosječni presjek i varijanca, a istovremeno se prati maksimalna težina
- Na kraju se računa ukupni presjek s pripadajućom statističkom pogreškom i ispisuje rezultat.
- Izračunava se i analitički presjek prema formuli (4.38) radi provjere numeričke metode.

```python
# Glavna petlja Monte Carlo integracije
for _ in range(num_points):
    cos_th = -1+random.random()*cos_theta_range
    weight = diff_cross_section(cos_th)*cos_theta_range
    total_weight += weight
    total_weight_sq += weight**2

    if weight > max_weight:
        max_weight = weight
        max_cos_theta = cos_th

cross_section_avg = total_weight/num_points
variance = total_weight_sq/num_points-cross_section_avg**2
error_mc = math.sqrt(variance/num_points)

print(f"Ukupni pop presjek: {cross_section_avg*pb_conv:.2f} "
      f"+/- {error_mc*pb_conv:.2f} pb")

# Analiticka provjera
vector_coupling = -0.5+2*sin2_theta_w
axial_coupling = -0.5
k_factor = math.sqrt(2)*fermi*m_z**2/(4*math.pi*alpha_qed)
chi_1 = k_factor*s_hat*(s_hat-m_z**2)/((s_hat-m_z**2)**2+(width_z**2)*m_z**2)
chi_2 = k_factor**2*s_hat**2/((s_hat-m_z**2)**2+(width_z**2)*m_z**2)
A_0 = 1+2*vector_coupling**2*chi_1+(axial_coupling**2+vector_coupling**2)**2*chi_2

sigma_analytical = (4*math.pi*alpha_qed**2/(3*s_hat))*A_0

print(f"Analiticka vrijednost presjeka: {sigma_analytical * pb_conv:.2f} pb")
```

Kôd 1.3 Monte Carlo integracija ukupnog presjeka i usporedba s analitičkim rezultatom.

5.1.3 Generiranje događaja i Forward-Backward asimetrija

U ovom dijelu se koristi Monte Carlo metoda *Hit-or-Miss* za generiranje događaja $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Za svaki događaj generira se nasumična vrijednost $\cos\theta$, računa pripadna težina koristeći funkciju `diff_cross_section`, te se, ako događaj bude prihvaćen, sprema kut, rapiditet i četverovektor leptona.

```python
# Inicijalizacija za generiranje dogadaja
N = 1000                # broj dogadaja
events_generated = 0
cos_theta_events = []  # spremaju se kutovi
eta_events = []        # sprema se rapiditet

forward_count = 0
backward_count = 0
```

Kôd 1.4 Inicijalizacija varijabli, liste za pohranu i brojači

Ovdje se inicijaliziraju sve potrebne varijable: ukupan broj događaja, liste za pohranu $\cos\theta$ i rapiditeta, te brojači forward i backward događaja. Ovaj korak osigurava da su svi parametri spremni za izvođenje glavne petlje generiranja događaja.

```python
while events_generated < N:
    cos_theta_cand = -1 + random.random() * cos_theta_range
    w_cand = diff_cross_section(cos_theta_cand)
    acc_prob = w_cand / max_weight

    if random.random() < acc_prob:
        events_generated += 1
        cos_theta_events.append(cos_theta_cand)

        theta_angle = math.acos(cos_theta_cand)
        eta = -math.log(math.tan(theta_angle / 2))
        eta_events.append(eta)

        # Brojaci forward i backward dogadaja
        if cos_theta_cand > 0:
            forward_count += 1
        else:
            backward_count += 1
```

Kôd 1.5 Glavna petlja *Hit-or-Miss* Monte Carlo generiranja

Za prihvaćene događaje generiraju se azimutni kutovi ϕ, računa se $\sin\theta$, energija i moment leptona, te se definira četverovektor μ^- i μ^+. Ovim se reproduciraju fizičke karakteristike svakog događaja.

```python
        phi_angle = random.uniform(0, 2*math.pi)
        sin_theta = math.sqrt(1 - cos_theta_cand**2)

        E_mu = energy_cm / 2
        p_mu = E_mu

        mu_minus_4vec = [E_mu,
                         p_mu * sin_theta * math.cos(phi_angle),
                         p_mu * sin_theta * math.sin(phi_angle),
                         p_mu * cos_theta_cand]

        mu_plus_4vec = [E_mu,
                        -mu_minus_4vec[1],
                        -mu_minus_4vec[2],
                        -mu_minus_4vec[3]]

        print(f"Dogadaj {events_generated}:")
        print(f" Mi - cetverovektor: {mu_minus_4vec}")
        print(f" Mi + cetverovektor: {mu_plus_4vec}\n")
```

Kôd 1.6 Generiranje azimutnih kutova ϕ i račun sinθ

Na kraju se računa Forward-Backward asimetrija A_{FB}, koja daje omjer razlike broja forward i backward događaja prema ukupnom broju događaja. Ova mjera omogućuje uvid u preferenciju emisije leptona u odnosu na smjer sudara.

```python
A_FB = (forward_count - backward_count) / (forward_count + backward_count)
print(f"Forward dogadaji: {forward_count}")
print(f"Backward dogadaji: {backward_count}")
print(f"Forward-Backward asimetrija (A_FB): {A_FB:.4f}")
```

Kôd 1.7 Račun Forward-Backward asimetrije

5.1.4 Histogrami za kutne distribucije

Nakon generiranja događaja pomoću *Hit-or-Miss* metode, moguće je prikazati raspodjelu proizvedenih događaja u obliku histograma. Na taj način dobivamo vizualni uvid u oblik distribucije $\cos\theta$ i rapiditeta η, što olakšava usporedbu s teorijskim očekivanjima.

```
# Histogram za raspodjelu cos(theta)
plt.hist(cos_theta_events, bins=20, color='lightblue', edgecolor='black')
plt.xlabel(r'$\cos␣\theta$')
plt.ylabel('Broj␣generiranih␣dog')
plt.title(r'Distribucija␣$\cos␣\theta$␣za␣proces␣$e^+␣e^-␣\to␣\mu^+␣\mu^-$')
plt.grid(True)
plt.savefig('cos_theta_distrib.png')
plt.show()
```

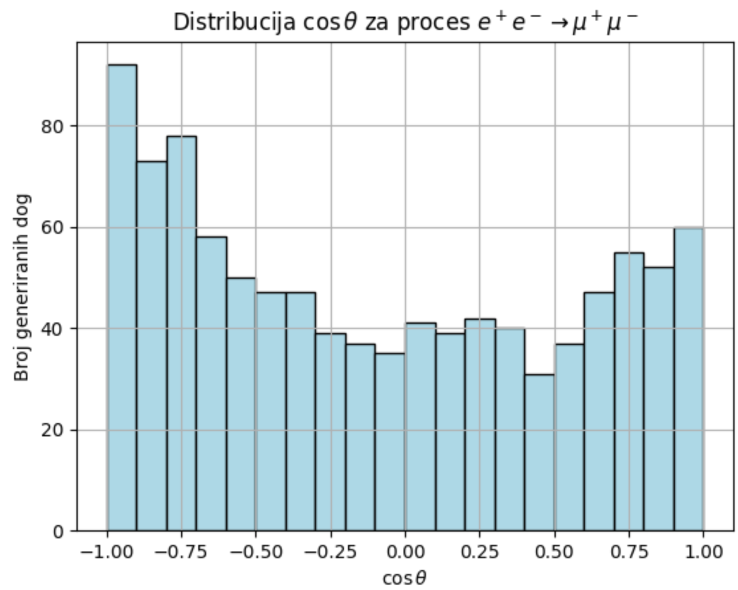
Kôd 1.8 Prikaz histograma raspodjele $\cos\theta$ za generirane događaje procesa $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.

Prvi histogram (slika 5.1) prikazuje distribuciju $\cos\theta$ generiranih miona. Distribucija se očekuje u skladu s analitičkim oblikom diferencijalnog presjeka, što služi kao provjera točnosti algoritma generiranja događaja.

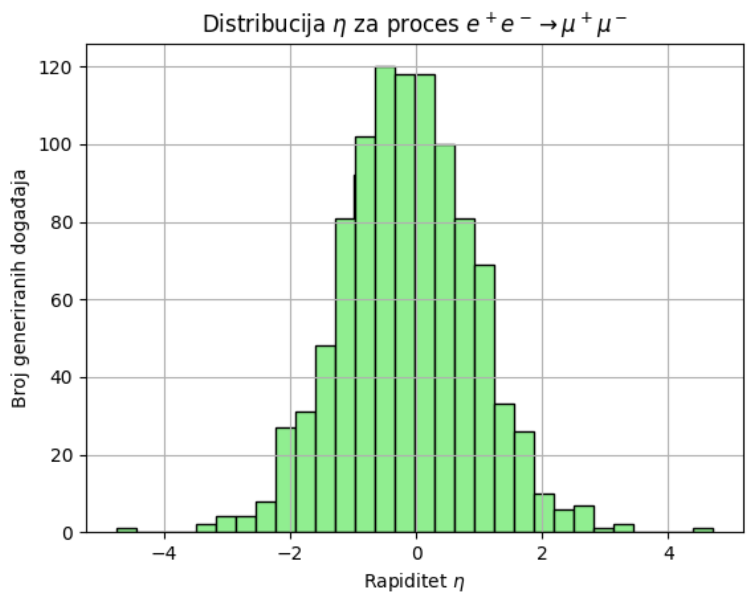
```
# Histogram za rapiditet (eta)
plt.hist(eta_events, bins=30, color='lightgreen', edgecolor='black')
plt.xlabel(r'Rapiditet␣$\eta$')
plt.ylabel('Broj␣generiranih␣dogadaja')
plt.title(r'Distribucija␣$\eta$␣za␣proces␣$e^+␣e^-␣\to␣\mu^+␣\mu^-$')
plt.grid(True)
plt.savefig('eta_distrib.png')
plt.show()
```

Kôd 1.9 Generiranje histograma distribucije $\cos\theta$ i rapiditeta η za proces $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$.

Drugi histogram (slika 5.2) prikazuje distribuciju rapiditeta η za iste događaje. Rapiditet je povezan s kutom θ preko relacije 5.1 pa ovaj prikaz omogućuje bolju interpretaciju raspodjele u laboratorijskim uvjetima.



Sl. 5.1. Distribucija $\cos\theta$ generiranih miona.



Sl. 5.2. Distribucija rapiditeta η za proces $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Histogram je dobiven Monte Carlo simulacijom s metodom *Hit-or-Miss* , pri čemu su kutovi generirani proporcionalno diferencijalnom presjeku.

6. Numerički rezultati i analiza distribucija

6.1 Monte Carlo integracija ukupnog presjeka procesa $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Ukupni presjek za proces $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ procijenjen je korištenjem Monte Carlo metode. Generirano je $N = 10^6$ nasumičnih točaka za $\cos\theta$ u intervalu $[-1, 1]$, pri čemu je svakoj točki dana težina:

$$w_i = \frac{d\sigma}{d\cos\theta_i}\Delta\cos\theta, \qquad \Delta\cos\theta = 2. \tag{6.1}$$

Ukupni presjek dobiva se prosjekom svih težina, dok se statistička pogreška računa preko varijance. U simulaciji je dobivena vrijednost:

$$\sigma_{\mathrm{MC}} = (1060.60 \pm 0.25)\ \mathrm{pb}.$$

Za usporedbu, analitički izraz za presjek glasi

$$\sigma_{\mathrm{analytical}} = 1060.94\ \mathrm{pb}.$$

Dobiveni Monte Carlo rezultat i analitička vrijednost međusobno se slažu, a razlika unutar statističke pogreške odražava numeričku prirodu metode uzorkovanja. Ovo potvrđuje ispravnost implementacije koda i konzistentnost s teorijskim predviđanjima.

6.2 Distribucija rapiditeta

Na slici 5.2 prikazana je distribucija rapiditeta η za proces $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Rapiditet je u kodu definiran pomoću kuta raspršenja θ, korištenjem relacije 5.1. Ova definicija povezuje geometriju događaja s kvantitativnom mjerom kuta u odnosu na os snopa. U kodu se rapiditet računa prema formuli izračunate vrijednosti $\cos\theta$, koja je odabrana pomoću metode *Hit-or-Miss* proporcionalno diferencijalnom presjeku. Time se osigurava da generirana distribucija η odražava stvarne fizikalne vjerojatnosti raspodjele raspadajućih miona u ovom procesu.

Dobiveni histogram pokazuje da se najveći broj događaja nalazi u području oko $\eta \approx 0$, dok broj događaja opada prema većim apsolutnim vrijednostima $|\eta|$. Ovaj oblik proizlazi iz simetrične prirode procesa: budući da se radi o e^+e^- sudaru u centru mase, sustav nema preferirani smjer, pa je distribucija rapiditeta simetrična u odnosu na nulu. Maksimum oko

$\eta = 0$ odgovara događajima u kojima su produkti emitirani pod kutovima blizu 90° u odnosu na os snopa, dok repovi distribucije odgovaraju slučajevima kada je čestica emitirana vrlo blizu smjera snopa ($\theta \to 0$ ili π).

Matematički, oblik distribucije može se razumjeti korištenjem Jacobijeve transformacije između diferencijalnog presjeka po kutu θ i distribucije po rapiditetu η. Ako je kutna distribucija dana kao

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}, \tag{6.2}$$

onda distribucija po rapiditetu dobivamo standardnom formulom za promjenu varijable:

$$\frac{d\sigma}{d\eta} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \cdot \left|\frac{d\cos\theta}{d\eta}\right|. \tag{6.3}$$

Rapiditet je definiran kao

$$\eta = -\ln\tan\frac{\theta}{2}, \quad \text{odnosno} \quad \cos\theta = \tanh\eta, \tag{6.4}$$

što dovodi do derivacije Jacobijana:

$$\frac{d\cos\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}(\tanh\eta) = \operatorname{sech}^2\eta. \tag{6.5}$$

Time konačna transformacija postaje:

$$\frac{d\sigma}{d\eta} = \left.\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right|_{\cos\theta=\tanh\eta} \cdot \operatorname{sech}^2\eta. \tag{6.6}$$

Faktor $\operatorname{sech}^2\eta$ ima fizikalni smisao: kod velikih $|\eta|$ (čestice blizu smjera snopa) mala promjena u kutu θ odgovara velikoj promjeni rapiditeta, pa se gustoća događaja po jedinici η smanjuje. Drugim riječima, Jacobian "razvlači" interval kutova u širok interval rapiditeta, što geometrijski smanjuje broj događaja u repovima histograma. Za male $|\eta|$ (centralne čestice), Jacobian je blizu 1 i distribucija se gotovo ne mijenja. Ovo objašnjava zašto histogram rapiditeta ima maksimum u sredini i opada prema repovima, čak i ako je kutna distribucija simetrična.

6.3 Forward-Backward asimetrija

Forward-Backward asimetrija je već uvedena izrazom (5.2):

$$A_{\mathrm{FB}} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B},$$

gdje σ_F i σ_B označavaju presjeke u prednjem i stražnjem poluprostoru. U Monte Carlo simulaciji, presjeci su proporcionalni broju događaja u forward ($\cos\theta > 0$) i backward ($\cos\theta < 0$) području, pa se omjer može direktno procijeniti iz broja generiranih događaja.

Za dobiveni uzorak rezultati su sljedeći:

$$N_F = 444, \qquad N_B = 556,$$

što daje vrijednost

$$A_{\text{FB}} = \frac{444 - 556}{444 + 556} = -0.1120.$$

Negativna vrijednost A_{FB} znači da je u ovom slučaju broj događaja u stražnjem poluprostoru veći od broja događaja u prednjem. Veličina asimetrije ($|A_{\text{FB}}| \approx 0.11$) pokazuje da je oko 11% više događaja detektirano u backward području.

Ovo je u skladu s činjenicom da forward-backward asimetrija ne mora biti pozitivna — ona jednostavno kvantificira postoji li preferencija u smjeru emisije produkata. Znak asimetrije pokazuje u kojem poluprostoru dominiraju događaji, dok veličina asimetrije pokazuje jačinu te preferencije [11].

Fizikalno, pojava forward-backward asimetrije povezana je s interferencijom vektorskih i aksijalnih sprega u elektronsko-pozitronskim sudarima. Ovisno o parametrima modela (npr. vrijednosti $\sin^2\theta_W$, energiji sudara i ulozi Z-bozona), preferirani smjer emisije može biti forward ili backward [11]. Dobiveni negativni rezultat stoga predstavlja konzistentan ishod simulacije i ilustrira osjetljivost A_{FB} na detalje teorijskog modela.

7. Poboljšanja i moguće nadogradnje Monte Carlo generatora

Iako razvijeni Monte Carlo generator uspješno reproducira osnovne značajke procesa $e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-$ te omogućuje analizu kutnih distribucija i Forward–Backward asimetrije, postoje brojni načini na koje bi se simulacija mogla nadograditi i proširiti kako bi bolje odražavala stvarne fizikalne procese i eksperimentalne uvjete.

7.1 Uvođenje dodatnih fizikalnih efekata

U trenutnom modelu proces je opisan na osnovnoj razini teorije, pri čemu se razmatraju dominantni doprinosi razmjene fotona i Z-bozona, dok se zanemaruju višeredne korekcije kvantne elektrodinamike (QED) i kvantne kromodinamike (QCD). Uvođenjem dodatnih efekata, poput inicijalnog i finalnog zračenja (ISR i FSR), te interferencije između različitih dijagrama, mogla bi se poboljšati preciznost modela. Primjerice, uključivanje ISR efekata omogućilo bi realističniju raspodjelu energije u početnom stanju, budući da elektroni i pozitroni u stvarnim sudarima zrače fotone prije interakcije [17].

Također, korisno bi bilo uključiti utjecaj širine Z-bozona i njegovu interferenciju s virtualnim fotonom, čime bi se omogućilo opisivanje većeg energijskog područja. Time bi se poboljšala usporedba s eksperimentalnim rezultatima na različitim energijama. [18].

7.2 Povezivanje s eksperimentalnim podacima

Trenutna verzija generatora proizvodi podatke koji su u skladu s teorijskim predviđanjima, ali nije uključeno uspoređivanje s mjerenjima. Jedna od mogućnosti za nadogradnju je usporedba dobivenih kutnih distribucija i izračunatog A_{FB} s podacima iz eksperimenta LEP ili budućih elektron–pozitron sudarača (ILC, FCC-ee). Takvo bi povezivanje omogućilo kvantitativnu procjenu odstupanja između modela i eksperimentalnih vrijednosti, čime bi se dodatno potvrdila fizička valjanost generatora [19].

Za takve usporedbe bilo bi potrebno uključiti i eksperimentalne efekte poput ograničenja detektora i nesavršenosti u mjerenju kuta između leptona. Implementacija takvih korekcija mogla bi se ostvariti kroz dodavanje faktora težine generirane događaje.

7.3 Plan za budući razvoj

U daljnjem razvoju generatora moguće je razmotriti nekoliko smjerova:

- **Modularnost koda:** trenutni Python kod može se proširiti u modularnu strukturu koja bi omogućila jednostavno dodavanje novih procesa (npr. $e^+e^- \to q\bar{q}$).
- **Grafičko sučelje:** razviti jednostavno sučelje za prikaz i analizu rezultata u stvarnom vremenu, što bi omogućilo edukativnu i demonstracijsku primjenu generatora.
- **Paralelno generiranje događaja:** implementacija paralelnog izvođenja (korištenjem `multiprocessing` modula) mogla bi značajno ubrzati generiranje velikog broja događaja.
- **Usporedba s postojećim generatorima:** rezultati bi se mogli usporediti s profesionalnim generatorima poput `PYTHIA` ili `HERWIG`, čime bi se dodatno validirala točnost pristupa [13, 14].

Sve navedene nadogradnje omogućile bi da se razvijeni Monte Carlo generator koristi ne samo kao jednostavan istraživački alat, nego i kao edukativna platforma za razumijevanje osnovnih principa simulacije sudara čestica. Takav bi pristup povezao teorijski okvir kvantne teorije polja s praktičnom numeričkom implementacijom i analizom podataka.

Zaključak

U ovom radu razvijen je Monte Carlo generator događaja za proces $e^+e^- \to Z/\gamma \to \mu^+\mu^-$. Implementacija u Pythonu omogućila je generiranje velikog broja događaja, analizu kinematičkih varijabli i vizualizaciju raspodjela čestica. Poseban fokus stavljen je na $\cos\theta$ i rapiditet η, što je omogućilo detaljnu procjenu forward-backward asimetrije u numeričkom uzorku.

Dobiveni ukupni presjek iz Monte Carlo simulacije pokazao je dobru suglasnost s analitičkim rješenjem, što potvrđuje ispravnost implementacije i točnost korištenog algoritma. Forward-backward asimetrija izračunata iz generiranih događaja ukazuje na blagu dominaciju backward emisije, što se može interpretirati kroz simetriju i geometriju procesa.

Ovaj rad pokazuje kako jednostavna implementacija Monte Carlo generatora omogućava praktično razumijevanje teorijskih principa, povezivanje numeričkih rezultata s analitičkim predikcijama i analizu raspodjela čestica u eksperimentalnom kontekstu. Pristup korišten u ovom radu može se proširiti na druge leptonske parove i različite energetske uvjete, što pruža osnovu za daljnje istraživanje i simulacije u području fizike čestica.

Privitak

Izvorni programski kod korišten u ovom diplomskom radu dostupan je na GitHub profilu: `https://github.com/deasun6` u repozitoriju pod nazivom **Diplomski**, u grani **master**, pod datotekom `zadatak1_lepton_colliders.py` Ovaj kod implementira numeričku simulaciju procesa $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ pomoću Monte Carlo metode, uz analizu forward-backward asimetrije.

Literatura

[1] https://arxiv.org/abs/1412.4677

[2] https://www.numberanalytics.com/blog/monte-carlo-simulations-particle-physics

[3] L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer, 1986.

[4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972. URL: https://www.physicsbook.ir/book/An

[5] F. Halzen and A. Martin. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wilie and Sons, 1984 URL: https://archive.org/details/QuarksAndLeptonsAnIntroductoryCourseInModernParticlePhysicsHalzenMartin

[6] Webber, B., Event Generator Physics, University of Cambridge, 2007 URL: https://www.hep.phy.cam.ac.uk/theory/webber/MCnet/MClecture3.pdf

[7] Höche, S., Introduction to Parton Shower Event Generators, SLAC National Accelerator Laboratory, 2015. URL: https://arxiv.org/abs/1411.4085

[8] Rojo, J., Quantum Chromodynamics: Lecture Notes, 2025. URL: `https://juanrojo.com/wp-content/uploads/2025/03/particle_physics_2_qcd_lecture5b.pdf`

[9] Seymour, M. H. and Marx, M., Monte Carlo Event Generators, 2013. URL: https://arxiv.org/abs/1304.6677

[10] Particle Data Group, Monte Carlo Event Generators, 2021. URL: https://pdg.lbl.gov/2021/reviews/rpp2021-rev-mc-event-gen.pdf

[11] Physical Interpretation of Forward-Backward Asymmetry, URL: https://physics.stackexchange.com/q/346573

[12] M. H. Seymour, *Introduction to Monte Carlo Event Generators* URL: https://indico.cern.ch/event/1374994/contributions/5799352/attachments/2873556/5031819/MCnet2024lect

[13] T. Sjöstrand, S. Mrenna, P. Skands, *A brief introduction to PYTHIA 8.1*, Comput. Phys. Commun. URL: https://arxiv.org/abs/0710.3820

[14] M. Bähr et al., *Herwig++ Physics and Manual*, Eur. Phys. J. C URL: https://arxiv.org/abs/0803.0883

[15] MCnet 2025, *Introduction to Event Generators*, MCnet Summer School 2025, URL: https://indico.cern.ch/event/1484584/contributions/6544248/attachments/3085408/5462440/mcnet2025-intro.pdf

[16] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press, 2013.

[17] E. A. Kuraev, V. S. Fadin, *On Radiative Corrections to e^+e^- Single Photon Annihilation at High Energy*, Sov. J. Nucl. Phys. **41**, 466 (1985). https://arxiv.org/abs/hep-ph/9512347

[18] The ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Collaborations, and the LEP Electroweak Working Group, *Precision Electroweak Measurements on the Z Resonance*, Phys. Rept. URL: https://arxiv.org/abs/hep-ex/0509008

[19] A. Blondel et al., *Future Strategies for Lepton Colliders*, arXiv:1901.02648 [hep-ex], (2019). URL: https://arxiv.org/abs/1901.02648

[20] Griffiths, David J. Introduction to Elementary Particles. Wiley-VCH, 1987. URL: https://www.hlevkin.com/hlevkin/90MathPhysBioBooks/Physics/QED/Griffiths

[21] Junichi Kanzaki (KEK), MadGraph5 aMC@NLO meeting 2025, Feb. 04, 2025, URl: `https://indico.cern.ch/event/1452599/contributions/6301174/attachments/3008418/5305098/mcps_kanzaki-1.pdf`

[22] Chýla, Jiří. *Quarks, Partons and Quantum Chromodynamics*. Institute of Physics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2008. URL: https://www.fzu.cz/ chyla/lectures/text.pdf