

SVEUČILIŠTE U SPLITU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DIPLOMSKI RAD

**NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA MONTE CARLO  
GENERATORA S ANALIZOM FORWARD-BACKWARD  
ASIMETRIJE ZA PROCES  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$**

Dea Šunjić

Split, 2025

---

# Temeljna dokumentacijska kartica

Diplomski/Završni rad

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Odjel za (NAZIV ODJELA)  
Studijski program: [UPISATI NAZIV]  
Smjer: [UPISATI SMJER - ako postoji]

## NASLOV DIPLOMSKOG/ZAVRŠNOG RADA

Ime i prezime

### SAŽETAK

Tekst sažetka

**Ključne riječi:** XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Rad je pohranjen u repozitoriju Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu, koji je dio nacionalnog repozitorijskog sustava Dabar.

**Rad sadrži:** [XX] stranica s općim podacima, [XX] stranica, [XX] grafičkih prikaza, [XX] tablica i [XX] literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

**Mentor:** dr. sc. Ime i Prezime, viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

**Komentor:** dr. sc. Ime i Prezime, viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

**Povjerenstvo:** dr. sc. Ime i Prezime, viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

**dr. sc. Ime i Prezime,** viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

**dr. sc. Ime i Prezime,** viši asistent/docent/ izvanredni profesor/ redoviti profesor Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

Rad prihvaćen: [mjesec] [godina]

---

## Basic documentation card

Thesis

University of Split  
Faculty of Science  
Department of [DEPARTMENT NAME]  
Study programme: ...  
Specialization in: ...

### TITLE OF THE THESIS

Name of the student

#### ABSTRACT

Abstract

**Key words:** XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

The thesis is deposited in the repository of the Faculty of Science, University of Split, which is part of the national repository system, Dabar.

**Thesis consists of:** [XX] pages with generic data, [XX] pages, [XX] figures, [XX] tables and [XX] references

Original language: Croatian

**Mentor:** **First Name Last Name, Ph.D.** *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

**Supervisor:** **First Name Last Name, Ph.D.** *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

**Committee:** **First Name Last Name, Ph.D.** *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

**First Name Last Name, Ph.D.** *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

**First Name Last Name, Ph.D.** *Assistant Professor / Associate Professor / Professor of Faculty of Science, University of Split*

Thesis accepted: [mjesec] [godina]

## IZJAVA

kojom izjavljujem s punom materijalnom i moralnom odgovornošću da sam diplomski/završni rad s naslovom [NASLOV DIPLOMSKOG/ZAVRŠNOG RADA] izradio/la samostalno pod mentorstvom [titula, ime i prezime nastavnika] i komentorstvom [titula, ime i prezime nastavnika], U radu sam primijenio/la metodologiju znanstvenoistraživačkog rada i koristio/la literaturu koja je navedena na kraju diplomskog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući naveo/la u diplomskom radu na uobičajen, standardan način citirao/la sam i povezao/la s fusnotama s korištenim bibliografskim jedinicama. Rad je pisan u duhu hrvatskog jezika.

Student/ica

Ime i prezime studenta/ice i potpis

# Sadržaj

## Uvod

<b>1</b>	<b>Uvod u simulacije sudara čestica</b>	<b>1</b>
1.1	Monte Carlo metoda integracije . . . . .	1
1.2	Poboljšanje konvergencije Monte Carlo integracije . . . . .	2
<b>2</b>	<b><i>Hit-or-Miss</i> metoda</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Struktura generatora događaja</b>	<b>5</b>
3.1	Povezivanje strukture generatora događaja s razvijenim Monte Carlo modelom .	6
<b>4</b>	<b>Proces <math>e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-</math></b>	<b>8</b>
4.1	Fizička interpretacija i usporedba s analizom u literaturi . . . . .	10
4.2	Helicitetne amplitude i spinori . . . . .	11
4.2.1	Elektronski i muonski momenti . . . . .	11
4.2.2	Lorentz-invarijantna formulacija . . . . .	12
4.3	Spin u procesu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	12
4.4	Proces $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Monte Carlo generator za proces <math>e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-</math></b>	<b>16</b>
5.1	Implementacija Monte Carlo generatora . . . . .	17
5.1.1	Definicija diferencijalnog presjeka i parametara . . . . .	17
5.1.2	Monte Carlo integracija ukupnog presjeka . . . . .	19
5.1.3	Generiranje događaja i Forward-Backward asimetrija . . . . .	20
5.1.4	Histogrami za kutne distribucije . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Numerički rezultati i analiza distribucija</b>	<b>25</b>
6.1	Monte Carlo integracija ukupnog presjeka procesa $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	25
6.2	Distribucija rapiditeta . . . . .	25
6.3	Forward-Backward asimetrija . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Poboljšanja i moguće nadogradnje Monte Carlo generatora</b>	<b>28</b>
7.1	Uvođenje dodatnih fizikalnih efekata . . . . .	28
7.2	Povezivanje s eksperimentalnim podacima . . . . .	28

7.3 Plan za budući razvoj . . . . .	29
<b>Zaključak</b>	<b>30</b>
<b>Privitak</b>	<b>31</b>

## Uvod

Cilj ovog rada je razvoj i analiza Monte Carlo generatora događaja za proces  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Takav generator omogućava simulaciju konačnih stanja leptona u elektronsko-pozitronskim sudarima, pri čemu se mase leptona zanemaruju. Generirani događaji služe kao temelj za proučavanje kinematičkih raspodjela, uključujući kutne i rapiditetne distribucije, te za analizu forward-backward asimetrije.

Implementacija generatora temelji se na numeričkoj procjeni ukupnog presjeka procesa korištenjem Monte Carlo metode, što omogućava jednostavno proširenje na veće brojeve događaja i različite energijske uvjete. Program je razvijen u programskom jeziku Python i uključuje alate za vizualizaciju kinematičkih varijabli, pri čemu je odabrana analitička varijabla  $\cos \theta$ , kut između ulaznog elektrona i izlaznog muona.

Ovaj pristup omogućava praktično razumijevanje osnovnih principa Monte Carlo simulacije, integracije diferencijalnog presjeka i konstrukcije raspodjela događaja u sudaru čestica. Također, generator pruža uvid u povezanost teorijskog modela i numeričkih rezultata, uključujući usporedbu dobivenog ukupnog presjeka s analitičkim rješenjem, što potvrđuje ispravnost i preciznost implementacije.

Rad je organiziran na način da prvo opisuje teorijsku osnovu procesa, zatim detaljno prezentira implementaciju Monte Carlo generatora, nakon čega slijede rezultati numeričkih simulacija, analiza rapiditetnih distribucija i forward-backward asimetrije, te diskusija dobivenih rezultata.

# 1. Uvod u simulacije sudara čestica

Analiza sudara čestica počinje proučavanjem primjera kao što su elastični sudari dviju kugli u jednoj dimenziji, a zadatak je izračunati promjene njihovih količina gibanja. Sljedeća razina složenosti uključuje neelastične sudare, gdje dolazi do gubitka energije, primjerice zbog spajanja kugli ili drugih deformacija. Da bismo u simulacijama fizike čestica što vjernije prikazali prirodu, moramo uzeti u obzir mnogo učinaka i koristiti razne modele i aproksimacije. Jedan od najvažnijih alata za proučavanje sudara u fizici elementarnih čestica su Monte Carlo simulacije [1]. Ove simulacije omogućuju modeliranje složenih interakcija čestica uzimajući u obzir statističku prirodu tih procesa. Korištenjem slučajnog uzorkovanja, Monte Carlo metode omogućuju precizno predviđanje rezultata sudara, što je ključno za razumijevanje i interpretaciju eksperimentalnih podataka [2].

## 1.1 Monte Carlo metoda integracije

Monte Carlo metoda integracije temelji se na ideji da se vrijednost integrala može aproksimirati prosjekom funkcije unutar intervala. Za integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad (1.1)$$

možemo napisati:

$$I \approx (x_2 - x_1) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (1.2)$$

gdje su  $x_i$  nasumično odabrane točke u intervalu  $(x_1, x_2)$ . Ako generiramo  $\rho_i$  uniformno u  $(0, 1)$ , tada

$$x_i = x_1 + (x_2 - x_1)\rho_i. \quad (1.3)$$

Za procjenu preciznosti koristi se standardna devijacija prosjeka:

$$\sigma_{\text{MC}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (1.4)$$

gdje je  $\sigma$  standardna devijacija  $f(x_i)$ . U praksi se često koristi definicija težine



$$W_i = (x_2 - x_1) f(x_i), \quad (1.5)$$

tako da integral postaje prosjek težina:

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i. \quad (1.6)$$

Varijanca procjene je:

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \right)^2, \quad (1.7)$$

odakle standardna nesigurnost Monte Carlo integracije postaje

$$\sigma_{MC} = \sqrt{\frac{V_N}{N}}. \quad (1.8)$$

Konačno, integral se može zapisati s procijenjenom pogreškom kao:

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \pm \sqrt{\frac{V_N}{N}}. \quad (1.9)$$

Iako postoje i druge metode za numeričku integraciju, u slučaju visoko-dimenzionalnih problema poput simulacija sudara čestica, Monte Carlo integracija je praktično jedina održiva opcija zbog svoje jednostavne generalizacije na velike dimenzije i relativno brze konvergencije [1].

## 1.2 Poboljšanje konvergencije Monte Carlo integracije

Točnost integrala izračunatog Monte Carlo metodom integracije određuje se kao  $V_N/N$ . Dakle, jednostavno povećanje broja točaka poboljšava preciznost. Međutim, također se mogu primijeniti tehnike za smanjenje  $V_N$ , npr. metoda *Importance Sampling* [3]. Osnovna ideja je izvršiti Jacobianovu transformaciju kako bi integral bio ravnomjerniji u novoj varijabli integracije. Drugim riječima, traži se transformacija takva da vrijedi  $V'_N < V_N$ .

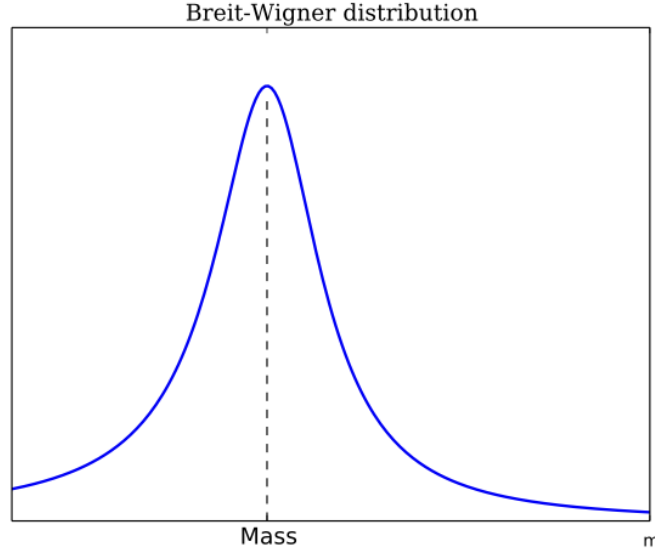
Razmatramo najjednostavniji slučaj koji se javlja u fizici čestica. U izračunima presjeka često se pojavljuje tzv. Breit-Wigner distribucija, koja opisuje „vrhunac“ rezonancije:

$$F_{BW}(m^2) = \frac{1}{(m^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2}, \quad (1.10)$$

gdje je  $M$  fizička (on-shell) masa čestice,  $m$  je off-shell masa, a  $\Gamma$  širina rezonancije. Primjer distribucije (za  $M = 90$ ,  $\Gamma = 10$ ) prikazan je na slici 1.1.

Integrali koje tada susrećemo često imaju oblik:

$$I = \int_{M_{\min}^2}^{M_{\max}^2} \frac{dm^2}{(m^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2}. \quad (1.11)$$



**Sl. 1.1.** Primjer Breit-Wigner distribucije za  $M = 90$ ,  $\Gamma = 10$  [1].

Transformacija koju uzimamo u obzir je  $m^2 \rightarrow \rho$ , gdje vrijedi:

$$m^2 = M\Gamma \tan \rho + M^2, \quad (1.12)$$

a odgovarajući Jacobian je:

$$J = \frac{\partial m^2}{\partial \rho} = M\Gamma \sec^2 \rho. \quad (1.13)$$

Integral se tada zapisuje kao:

$$I = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho \frac{\partial m^2}{\partial \rho} \frac{1}{(m^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho M\Gamma. \quad (1.14)$$

U ovom slučaju varijanca je u potpunosti smanjila:  $V'_N = 0$ . U praksi je rijetko moguće izračunati integral točno. Kada se radi o složenim područjima integracije, obično se bira funkcija koja što bolje opisuje ponašanje funkcije koju integriramo. Poseban pristup, poznat kao *multi-channel integration*, primjenjuje se u situacijama kada fazni prostor sadrži više vrhunaca, čime jednostavna Breit-Wigner distribucija više nije dovoljna. Ova metoda se koristi u suvremenim Monte Carlo generatorima [1].

## 2. *Hit-or-Miss* metoda

Monte Carlo metoda pokazuje se posebno pogodnom za izradu generatora događaja iz dva glavna razloga: numerički postupak ima sličnu, „slučajnu“ prirodu kao i sami fizički procesi koji se proučavaju, a uz to omogućuje generiranje događaja bez pridruženih težinskih faktora. Na sličan način kao kod Monte Carlo integracije, moguće je pregledavati funkciju  $f(x)$  i skupljati skup točaka u faznom prostoru, pri čemu svaka točka ima određenu vjerojatnost nastanka. Te točke predstavljaju potencijalne događaje, a njihova vjerojatnost odražava koliko je vjerojatno da se događaj dogodi. Kada želimo koristiti takve događaje za analizu ili daljnje simulacije, potrebno je uvijek voditi računa o pripadajućim težinama – što može biti nepraktično i neefikasno, osobito u kasnijim fazama simulacije, kada neki događaji imaju zanemarivo male težine i time nepotrebno opterećuju računalne resurse. Cjelokupni postupak integracije i generiranja događaja može se sažeti u dva osnovna koraka:

1. **Monte Carlo integracija i odabir točaka:** Nasumično se bira  $N$  točaka u faznom prostoru prema zadanoj distribuciji, pri čemu se njihove pridružene težine zbrajaju kako bi se izračunale sume  $\sum_i W_i$  i  $\sum_i W_i^2$ . Na temelju tih suma određuju se vrijednost presjeka i pripadajuća pogreška. U ovoj fazi također se bilježi točka s najvećom težinom, označena kao  $W_{\max}$ .
2. **Generiranje događaja bez pridruženih težina (*Hit-or-Miss* metoda):** Svaka nasumično odabrana točka faznog prostora uspoređuje se s pripadajućom vjerojatnošću, izraženom omjerom  $W_i/W_{\max}$ , i nasumičnim brojem  $R \in (0, 1)$ . Ako je omjer veći od  $R$ , događaj se prihvaća; u suprotnom se odbacuje. Ovaj proces se ponavlja dok se ne prikupi željeni broj događaja  $N_{\text{events}}$  [1].

### 3. Struktura generatora događaja

Simulacija sudara čestica u eksperimentima visoke energije zahtijeva precizno modeliranje složenih fizikalnih procesa koji vode od osnovnog sudara do konačnih čestica koje detektori registriraju. Sudari hadrona, poput proton-proton sudara na LHC-u, proizvode veliki broj čestica u konačnom stanju, često reda tisuća po događaju. To čini direktnu simulaciju iz teorijskih modela vrlo izazovnom zbog kombinacije visoke dimenzionalnosti faznog prostora i statističke prirode QCD interakcija [6].

Da bi se ovo savladalo, generatori događaja koriste pristup faktorizacije, pri kojem se složeni procesi dijele na niz uzastopnih koraka, svaki od kojih se može simulirati zasebno. Ovaj pristup omogućuje efikasno numeričko generiranje događaja bez gubitka preciznosti u predviđanju raspodjela konačnih čestica [7, 8]. Faktorizacija se može usporediti s adiabatskom aproksimacijom u mehanici, gdje se gibanja sustava odvijaju na različitim vremenskim skalama i mogu se tretirati neovisno [9].

Unutar ovakve strukture, generator događaja prvo simulira osnovni proces visoke energije, poznat kao *hard process*, zatim modelira emisiju sekundarnih partona kroz *parton shower*, a zatim prelazi na hadronizaciju i raspad nestabilnih čestica. Svaka od ovih faza uključuje detaljna pravila i aproksimacije, uključujući zakon očuvanja energije, impulsa i kvantnih brojeva, te uzimanje u obzir boje i spin čestica [10].

Ovakav pristup omogućuje stvaranje realističnih događaja koji mogu biti uspoređeni s eksperimentalnim mjerenjima, pri čemu generatori događaja osiguravaju predviđanja za raspodjele kuta, energije i drugih fizikalnih veličina u konačnom stanju [6, 7]. Pritom, primjenom Monte Carlo metoda, generatori omogućuju statističku procjenu raspodjela i simulaciju rijetkih događaja, što je ključno za dizajn eksperimentalnih analiza i provjeru teorijskih modela.

Na temelju ovog konceptualnog okvira, cijeli događaj se generira kroz nekoliko uzastopnih koraka:

1. **Generiranje osnovnog procesa (hard procesa):** Odabire se točka u faznom prostoru prema metodi *Hit-or-Miss*, čime se simulira osnovni sudar.
2. **Raspad teških čestica (rezonanci):** Teške čestice s uskim širinama raspadaju se prije faze *parton shower*. Primjerice, top kvark može se raspasti u lepton, neutrino i b-kvark.
3. **Partonski pljusak:** Ulazni partoni se prate unatrag do sudarajućih hadrona, što generira inicijalno zračenje. Čestice u konačnom stanju koje nose boju također emitiraju zračenje,

stvarajući konačno zračenje.

4. **Višestruke interakcije partona:** Niže energetske sekundarne interakcije među partonima unutar sudarajućih hadrona modeliraju se kao QCD  $2 \rightarrow 2$  procesi.
5. **Hadronizacija i raspad hadrona:** U klsterskom modelu hadronizacije formiraju se skupine obojenih čestica (klasteri), iz kojih nastaju hadroni. Nestabilni hadroni se potom raspadaju u manje čestice.

Ova faktorizacija omogućuje generatorima događaja da postupno grade kompleksne događaje, što je ključno za realistične simulacije sudara i analizu eksperimentalnih podataka [1].

### 3.1 Povezivanje strukture generatora događaja s razvijenim Monte Carlo modelom

U skladu s općom strukturom generatora događaja, razvijeni Python program predstavlja pojednostavljenu implementaciju Monte Carlo generatora za proces

$$e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-.$$

Dok profesionalni generatori događaja, poput *PYTHIA* i *HERWIG*, obuhvaćaju sve faze od osnovnog sudara do hadronizacije i raspada konačnih čestica [13, 14], implementirani program fokusira se isključivo na leptonski proces, u kojem nema hadronskih stupnjeva slobode. Stoga su složenije faze poput parton shower-a i hadronizacije izostavljene, što je fizikalno opravdano [12].

Na temelju koraka definiranim u općoj strukturi generatora događaja, možemo napraviti sljedeću usporedbu s implementacijom:

#### 1. Generiranje osnovnog procesa (hard process)

- *Primjena u Python programu:* Funkcija `diff_cross_section(cos_theta)` i Monte Carlo integracija (`for _ in range(num_points)`) generira nasumične točke u faznom prostoru prema metodi *Hit-or-Miss*.
- *Objašnjenje:* Izračunava diferencijalni presjek procesa i simulira događaje u skladu s teorijskim modelom.

#### 2. Raspad teških čestica (rezonanci)

- *Primjena u Python programu:* Parametri `m_z` i `width_z` unutar funkcije `diff_cross_section` simuliraju Breit–Wigner širinu  $Z$  bozona.
- *Objašnjenje:* Stvarni  $Z$  bozon se ne generira, ali efekti širenja rezonancije su uključeni, što omogućuje fizikalno konzistentnu simulaciju raspodjela mase konačnih čestica [10].

### 3. Partonski pljusak (parton shower)

- *Primjena u Python programu:* Nije implementirano.
- *Objašnjenje:* Ulazne i izlazne čestice su leptoni, pa nema emisije gluona ni razvoja partonskog pljuska. U profesionalnim generatorima, ovaj korak modelira QCD zračenje hadronskih čestica [13, 14].

### 4. Višestruke interakcije partona

- *Primjena u Python programu:* Nema primjene.
- *Objašnjenje:* Elektroni i pozitroni su elementarne čestice, nema sekundarnih interakcija među partonima [15].

### 5. Hadronizacija i raspad hadrona

- *Primjena u Python programu:* Nije primijenjeno.
- *Objašnjenje:* Konačno stanje sadrži samo stabilne leptone ( $\mu^+$  i  $\mu^-$ ), čije su energije i impulsi određeni direktno iz kinematike dvotjelnog raspada [10].

Postupak generiranja događaja u Python programu koristi *Hit-or-Miss* metodu (petlja `while events_generated < N`), što ilustrira princip Monte Carlo uzorkovanja diferencijalnog presjeka i odabira slučajnih točaka u faznom prostoru. Ovo je ključna faza svakog generatora događaja i omogućuje analizu kinematičkih distribucija, poput kutnih i rapiditetnih raspodjela [7, 8].

Zaključno, razvijeni generator obuhvaća samo prvu fazu i djelomično drugu, dok su ostale faze izostavljene jer nisu relevantne za leptonske sudare. Time se dobiva jednostavan, ali fizikalno konzistentan model koji omogućuje razumijevanje principa Monte Carlo simulacije i praktičnu analizu forward-backward asimetrije [12, 15].

## 4. Proces $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Razmotrimo proces anihilacije elektrona i pozitrona u par miona putem virtualnog fotona. Ovo poglavlje će se ograničiti na prikaz ključnih koraka koji vode do izraza za diferencijalni presjek. Feynmanov dijagram prikazan je na slici 4.1, a prema pravilima QED-a za verteks i propagator fotona amplituda procesa glasi:

$$iM = \bar{v}_{s'}(p')(-ie\gamma^\lambda)u_s(p) \frac{-ig_{\lambda\nu}}{q^2} \bar{u}_r(k)(-ie\gamma^\nu)v_{r'}(k'), \quad (4.1)$$

gdje  $s, s', r, r'$  označavaju indekse spin fermiona. Nakon što izostavimo oznake za spinove, kvadrat matričnog elementa dobiva oblik:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}(p')\gamma^\lambda u(p) \bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')) (\bar{u}(k)\gamma_\lambda v(k') \bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)). \quad (4.2)$$

Kako bismo dobili rezultat koji ne ovisi o orijentaciji spinova, uzimamo prosjek po spinovima početnih čestica te sumu po spinovima konačnih čestica:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2. \quad (4.3)$$

Primjenom relacija potpunosti za spinore izraz se može zapisati u obliku:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[p\gamma^\lambda p'\gamma^\nu] \text{Tr}[k\gamma_\lambda k'\gamma_\nu], \quad (4.4)$$

pri čemu smo zanemarili mase elektrona i miona. Korištenjem identiteta za tragove gamma-matrice dobiva se:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k)]. \quad (4.5)$$

Rezultat je izražen u terminima skalarnih produkata četverovektora. Kako bismo dobili jednostavniji oblik, uvodimo sustav centra mase (slika 4.2), gdje vrijedi:

$$p = (E, E\hat{z}), \quad p' = (E, -E\hat{z}), \quad (4.6)$$

$$k = (E, \vec{k}), \quad k' = (E, -\vec{k}). \quad (4.7)$$

Kut  $\theta$  definiran je između početnog elektrona i konačnog miona. U tom sustavu skalarni produkti glase:

$$p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E|\vec{k}| \cos \theta, \quad (4.8)$$

$$p \cdot k' = p' \cdot k = E^2 + E|\vec{k}| \cos \theta, \quad (4.9)$$

$$q^2 = (p + p')^2 = 4E^2, \quad p \cdot p' = 2E^2. \quad (4.10)$$

Na dovoljno visokim energijama mase leptona možemo zanemariti, pa vrijedi  $E = |\vec{k}|$ , te dobijemo:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2 = e^4 (1 + \cos^2 \theta). \quad (4.11)$$

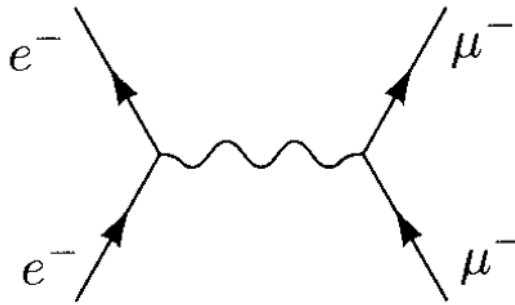
Ovaj rezultat možemo uvrstiti u opću formulu za diferencijalni presjek procesa  $2 \rightarrow 2$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 s}, \quad (4.12)$$

gdje  $s = E_{\text{cm}}^2$  označava energiju u centru mase. Nakon sređivanja slijedi:

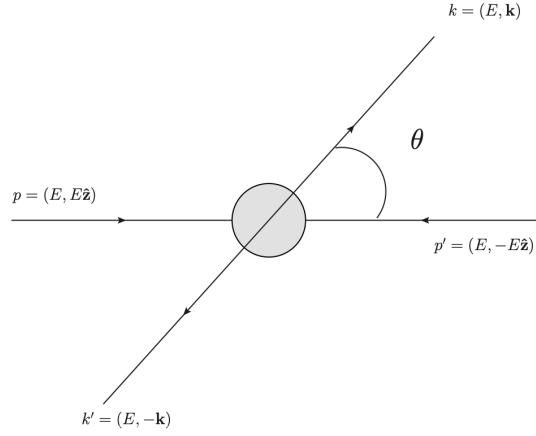
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\hat{s}} (1 + \cos^2 \theta), \quad (4.13)$$

pri čemu je  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  elektromagnetska konstanta sprežanja. Budući da presjek ne ovisi o azimutnom kutu  $\phi$ , integracija po njemu daje dodatni faktor  $2\pi$ .



**Sl. 4.1.** Feynmanov dijagram za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  posredstvom virtualnog fotona [4].





**Sl. 4.2.** Kinematički raspored čestica u procesu  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Kut  $\theta$  definiran je između početnog elektrona i konačnog miona [1].

#### 4.1 Fizička interpretacija i usporedba s analizom u literaturi

Dobiveni izraz za diferencijalni presjek procesa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta)$$

predstavlja temeljni rezultat kvantne elektrodinamike (QED) za anihilaciju elektrona i pozitrona u par miona putem virtualnog fotona. Kako bi se dublje razumjelo njegovo značenje i struktura, korisno je usporediti ovaj rezultat s detaljnijom analizom prikazanom u udžbeniku *Modern Particle Physics* (M. Thomson, 2013) [16].

U Thomsonovoj analizi polazi se od razmatranja svih mogućih kombinacija heliciteta elektrona i pozitrona u početnom stanju te miona u konačnom stanju. U granici visokih energija ( $E \gg m$ ), većina tih kombinacija daje nul-vrijednost matričnog elementa zbog strukture vektorske interakcije fotona. Pokazuje se da samo četiri kombinacije heliciteta (RL→RL, RL→LR, LR→RL, LR→LR) daju nenulte doprinose [16].

Za primjer, matrični element prijelaza RL→RL ima oblik:

$$M_{RL \rightarrow RL} = 4\pi\alpha(1 + \cos \theta), \quad (4.14)$$

dok prijelaz RL→LR daje

$$M_{RL \rightarrow LR} = 4\pi\alpha(1 - \cos \theta). \quad (4.15)$$

Zbrojem svih dopuštenih helicitetskih kombinacija dobiva se prosječni kvadrat matričnog elementa:

$$\langle |M|^2 \rangle = e^4 (1 + \cos^2 \theta). \quad (4.16)$$

Time se pokazuje da se rezultat može interpretirati kao posljedica interferencije različitih

helicitetskih amplituda, koje zajedno stvaraju simetričnu kutnu distribuciju. Ova simetrija između prednjeg i stražnjeg poluprostora odraz je očuvanja pariteta u QED interakcijama.

Diferencijalni presjek, kada se izrazi u istom obliku kao u Thomsonovom pristupu,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2 \theta), \quad (4.17)$$

potvrđuje potpuno podudaranje s rezultatom u uvodu poglavlja. Integracijom po punom prostornom kutu dobiva se ukupni presjek:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \quad (4.18)$$

što predstavlja poznatu formulu za ukupni QED presjek u anihilacijama leptonskih parova.

Ovaj teorijski rezultat eksperimentalno je potvrđen u nizu  $e^+e^-$  sudarača, uključujući JADE eksperiment pri DESY laboratoriju, gdje su izmjerene kutne distribucije u skladu s predikcijom oblika  $(1 + \cos^2 \theta)$ . Na višim energijama, zbog interferencije s izmjenom Z-bozona, javlja se mala *forward-backward* asimetrija, ali osnovni QED oblik ostaje dominantan [16].

## 4.2 Helicitetne amplitude i spinori

Proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  može se razložiti na šestnaest mogućih helicitetnih konfiguracija, četiri za početno stanje ( $e^+e^-$ ) i četiri za konačno stanje ( $\mu^+\mu^-$ ) (slike 4.3 i 4.4). Svaka od ovih konfiguracija predstavlja zaseban fizički proces, npr.  $e_\uparrow^+e_\uparrow^- \rightarrow \mu_\uparrow^+\mu_\uparrow^-$  (RR→RR) ili  $e_\uparrow^+e_\uparrow^- \rightarrow \mu_\uparrow^+\mu_\downarrow^-$  (RR→RL)[16].

Budući da su heliciteti ortogonalni, procesi s različitim konfiguracijama ne interferiraju. Ukupni kvadrat matričnog elementa za određenu početnu konfiguraciju dobiva se zbrajanjem kvadrata za sve četiri konačne konfiguracije:

$$|M_{RR}|^2 = |M_{RR \rightarrow RR}|^2 + |M_{RR \rightarrow RL}|^2 + |M_{RR \rightarrow LR}|^2 + |M_{RR \rightarrow LL}|^2. \quad (4.19)$$

Za nepolarizirane zrake, svaki početni helicitet se javlja s jednakom vjerojatnošću, što dovodi do definicije spin-averaged matričnog elementa:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2, \quad (4.20)$$

pri čemu se zbrajaju sve moguće helicitetne kombinacije početnog i konačnog stanja. Ovaj pristup objašnjava zašto krajnji diferencijalni presjek ima oblik  $(1 + \cos^2 \theta)$  [16].

### 4.2.1 Elektronski i muonski momenti

Matrični element za pojedinu helicitetnu kombinaciju može se napisati kao skalarni produkt četverovektorskih momenata elektrona i miona:

$$M = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu, \quad (4.21)$$

gdje su četiri-komponentni momenti definirani preko spinora:

$$j_e^\mu = v(p_2) \gamma^\mu u(p_1), \quad j_\mu^\nu = u(p_3) \gamma^\nu v(p_4). \quad (4.22)$$

Za neke helicitetne konfiguracije, npr. RL, komponenta momenta miona dobiva oblik:

$$j_{\mu,RL} = 2E(0, -\cos \theta, i, \sin \theta), \quad (4.23)$$

dok su druge konfiguracije (RR, LL) nula. Ova svojstva odražavaju karakter QED interakcije i pomažu razumjeti simetriju rezultata po [16].

#### 4.2.2 Lorentz-invarijantna formulacija

Kvadrat matričnog elementa može se također izraziti kroz Lorentz-invarijantne produkte četve-rovektora:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{2e^4 [(p_1 \cdot p_3)^2 + (p_1 \cdot p_4)^2]}{(p_1 \cdot p_2)^2}. \quad (4.24)$$

U uvjetu  $E \gg m_\mu$ , Mandelstamove varijable definirane su kao:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad (4.25)$$

što omogućuje zapis kvadrata matričnog elementa u obliku:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{2e^4(t^2 + u^2)}{s^2}. \quad (4.26)$$

Ovaj izraz vrijedi u svim referentnim sustavima i povezuje se direktno s diferencijalnim presjekom [16].

#### 4.3 Spin u procesu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

U analizi procesa  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  moguće je definirati četiri kombinacije heliciteta koje daju ne-nultu vrijednost matrice (slika 4.5). U svim slučajevima, spinovi dvaju početnih čestica su poravnati, kao i spinovi dvaju konačnih čestica. Ako definiramo  $z$ -os u smjeru snopa dolaznog elektrona, tada komponenta ukupnog spina sustava  $e^+e^-$  duž te osi može biti  $S_z = \pm 1$ . To znači da ne-nulti doprinos daju samo stanja s ukupnim spinom  $S = 1$  [16].

Helicitetna stanja mogu se opisati kao:

$$|S, S_z\rangle = \begin{cases} |1, +1\rangle, & \text{za RL kombinaciju,} \\ |1, -1\rangle, & \text{za LR kombinaciju.} \end{cases}$$

Za konačni sustav  $\mu^+\mu^-$  helicitetne kombinacije odgovaraju spin-stanjima  $|1, \pm 1\rangle_\theta$  mjerena u odnosu na os definiranu smjerom  $\mu^-$  čestice. Operator komponente spina duž osi definirane jediničnim vektorom  $\hat{n}$  pod kutom  $\theta$  u odnosu na  $z$ -os može se zapisati kao:

$$S_n = \frac{1}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad (4.27)$$

gdje su  $\vec{\sigma}$  Pauli [16].

Spin valna funkcija za kombinaciju RL u konačnom stanju  $\mu^+\mu^-$  može se izraziti kao:

$$|1, +1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)|1, -1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta |1, 0\rangle + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)|1, +1\rangle. \quad (4.28)$$

Kutna ovisnost matrice elementa tada proizlazi iz skalarnog produkta spin-stanja početnog  $e^+e^-$  sustava i konačnog  $\mu^+\mu^-$  sustava (slika 4.6):

$$\mathcal{M}_{RL \rightarrow RL} \propto \langle 1, +1 | 1, +1 \rangle_\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad (4.29)$$

$$\mathcal{M}_{LR \rightarrow RL} \propto \langle 1, -1 | 1, +1 \rangle_\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta). \quad (4.30)$$

U granici visoke energije ( $E \gg m$ ), doprinos daju samo stanja ukupnog spina  $S = 1$ , pri čemu je spin vektor poravnat sa smjerom gibanja čestica. Ova kutna ovisnost je izravna posljedica činjenice da interakcija tipa  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  opisuje razmjenu čestice spina 1, u ovom slučaju [16].

#### 4.4 Proces $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Diferencijalni presjek za proizvodnju para leptona  $\mu^+\mu^-$  u leptonskim sudaračima putem slabe interakcije računa se na vrlo sličan način kao i u kvantno-elektrodinamičkom (QED) slučaju. Međutim, ključna razlika pojavljuje se zbog svojstava  $Z$  bozona, koji ne djeluje jednako na lijeve i desne fermione [5]. Upravo ta razlika u spregama dovodi do pojave asimetrija u raspodjeli konačnih čestica [1].

Interakcija fermiona sa  $Z$  bozonom u okviru standardnog modela može se zapisati kao

$$g_W L_{ffZ} = -\frac{1}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi}_f \gamma^\mu (V_f - A_f \gamma^5) \psi_f Z_\mu, \quad (4.31)$$

gdje  $g_W$  predstavlja spregu SU(2) teorije, dok  $\theta_W$  označava tzv. Weinbergov kut. Ovdje  $\psi_f$  opisuje fermionsko polje, a  $Z_\mu$  je odgovarajuće polje  $Z$  bozona. Parametri  $V_f$  i  $A_f$  određuju vektorske i aksijalne spregnute konstante za pojedine fermione, a njihove vrijednosti prikazane su u Tablici 4.1.

Zbog ove razlike u spregama, raspodjela proizvedenih leptona nije više simetrična u odnosu na kut raspršenja, već se pojavljuje tzv. *forward-backward* asimetrija. Za razliku od čisto elektromagnetskog slučaja, gdje je diferencijalni presjek građen samo od konstantnih članova i

Fermion	$Q_f$	$V_f$	$A_f$
$u, c, t$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$+\frac{1}{2}$
$d, s, b$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$e, \mu, \tau$	-1	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$

**Tablica 4.1.** Spregnute konstante fermiona sa Z bozonom.

izraza proporcionalnih  $\cos^2 \theta$ , u prisutnosti Z bozona pojavljuje se i član koji je linearan u  $\cos \theta$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\hat{s}} \left( A_0(1 + \cos^2 \theta) + A_1 \cos \theta \right), \quad (4.32)$$

gdje koeficijenti  $A_0$  i  $A_1$  sadrže informacije o spregama i zadani su sljedećim izrazima:

$$A_0 = Q_f^2 - 2Q_f V_\mu V_f \chi_1 + (A_\mu^2 + V_\mu^2)(A_f^2 + V_f^2) \chi_2, \quad (4.33)$$

$$A_1 = -4Q_f A_\mu A_f \chi_1 + 8A_\mu V_\mu A_f V_f \chi_2. \quad (4.34)$$

Ovdje se pojavljuju pomoćne funkcije  $\chi_1$  i  $\chi_2$ , koje uključuju rezonantno ponašanje Z bozona i zadane su izrazima:

$$\chi_1(\hat{s}) = \kappa \hat{s} \frac{\hat{s} - M_Z^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2}, \quad (4.35)$$

$$\chi_2(\hat{s}) = \kappa^2 \frac{\hat{s}^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2}, \quad (4.36)$$

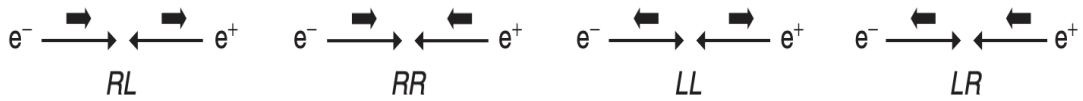
$$\kappa = \frac{\sqrt{2} G_F M_Z^2}{4\pi\alpha}. \quad (4.37)$$

Vidljivo je da se na ovaj način uzima u obzir rezonantni vrh oko mase Z bozona ( $M_Z$ ), kao i njegova konačna širina  $\Gamma_Z$ , što je ključno za realističan opis fizikalnih procesa na visokim energijama [1].

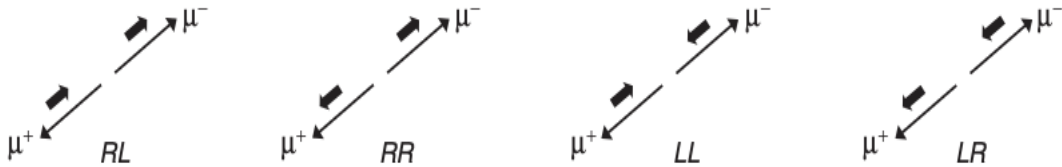
Konačno, korisno je napomenuti da se konzistentnost Monte Carlo integracije može provjeriti usporedbom numerički dobivenog rezultata s analitičkim izražajem za ukupni presjek. Naime, integracijom preko kuta  $\theta$  linearni član u  $\cos \theta$  nestaje zbog svoje asimetrične prirode, te preostaje:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} A_0. \quad (4.38)$$

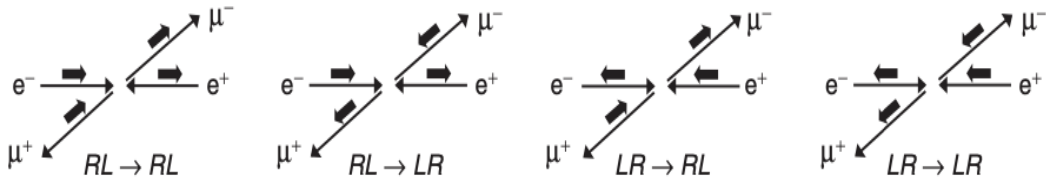
Ovaj rezultat služi kao važan test za provjeru ispravnosti numeričkih simulacija jer omogućuje usporedbu s očekivanom teorijskom vrijednošću. [1].



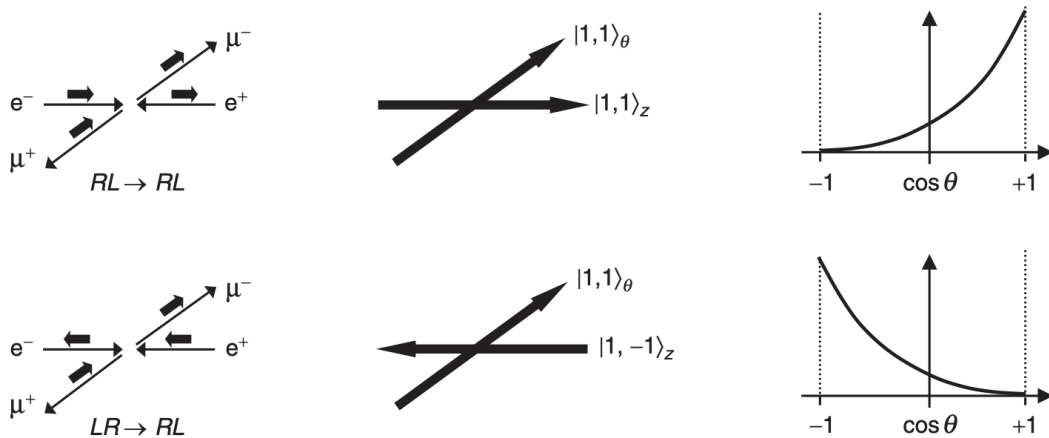
**Sl. 4.3.** Četiri moguće kombinacije heliciteta u početnom stanju  $e^+e^-$  [16].



**Sl. 4.4.** Četiri moguće kombinacije heliciteta za konačno stanje  $\mu^+\mu^-$  [16].



**Sl. 4.5.** Četiri kombinacije heliciteta u procesu  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  koje, u slučaju kada je energija  $E$  mnogo veća od mase  $m$ , daju ne-nulte matrične elemente [16].



**Sl. 4.6.** Orijentacije sustava sa spinom 1 u kombinacijama heliciteta  $RL \rightarrow RL$  i  $LR \rightarrow RL$  te ovisnost odgovarajućeg matričnog elementa o kutu u graničnom slučaju kada je  $E \gg m$  [16].

## 5. Monte Carlo generator za proces $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Nakon teorijskog pregleda procesa  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  u okviru kvantne elektrodinamike i elektroslabe teorije, sljedeći korak u ovom radu bio je praktična implementacija Monte Carlo generatora događaja. Cilj ovog dijela rada bio je razviti program koji generira događaje za proces

$$e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-,$$

pri čemu se lepton  $\mu$  koristi kao reprezentativan primjer konačnog stanja, s obzirom na to da su mase leptona zanemarene. Ovaj pristup jednako vrijedi i za druge leptonske parove, osim u slučaju procesa  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , gdje se pojavljuje dodatni  $t$ -kanalni dijagram koji nije obuhvaćen ovim izvodom [1].

Za razliku od složenijih slučajeva, integracija za izračun ukupnog presjeka ovdje je relativno jednostavna, jer se pojavljuju samo kosinusni članovi, koji se mogu integrirati analitički. Također, budući da je energija u centru mase  $\hat{s}$  unaprijed zadana, nije bilo potrebe za Jacobijevim transformacijama radi poboljšanja učinkovitosti integracije, kao što je slučaj u nekim drugim procesima [1].

Unatoč jednostavnosti, ovaj zadatak daje vrijedan uvid u osnovne gradivne blokove Monte Carlo generatora događaja. Algoritam korišten u izradi generatora temelji se na postupku prikazanom u poglavlju 3, a implementacija je provedena u programskom jeziku Python. Osim samog generiranja događaja, program uključuje i osnovne alate za vizualizaciju, pri čemu se pomoću biblioteke `Matplotlib` dobivaju raspodjele kinematičkih varijabli. Kao osnovna varijabla analize odabrana je  $\cos \theta$ , gdje  $\theta$  predstavlja kut između ulaznog elektrona i izlaznog muona. Ovaj kut je mjerljiv u eksperimentima jer su poznati smjerovi i dolaznih i odlaznih leptona [1].

Dodatne provjere ispravnosti generatora uključuju usporedbu numerički dobivenog ukupnog presjeka s analitičkim rješenjem. Primjerice, za  $E_{\text{cm}} = 90$  GeV dobivena je vrijednost

$$\sigma = (1060.82 \pm 0.25) \text{ pb},$$

što je u vrlo dobrom suglasju s analitičkim rezultatom

$$\sigma_{\text{analitički}} = 1060.93 \text{ pb}.$$

Osim ukupnog presjeka, moguće je istražiti i dodatne raspodjele, kao što su distribucije energije čestica, pseudorapidnost (koja u masless aproksimaciji odgovara rapidnosti)

$$\eta = -\ln \tan \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.1)$$

kao i pojavu *forward-backward* asimetrije, definirane izrazom

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B}, \quad (5.2)$$

gdje  $\sigma_F$  i  $\sigma_B$  označavaju presjeke u prednjem ( $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ ) i stražnjem ( $\theta \in (\pi/2, \pi) \cup (-\pi, -\pi/2)$ ) poluprostoru [1].

## 5.1 Implementacija Monte Carlo generatora

### 5.1.1 Definicija diferencijalnog presjeka i parametara

U implementaciji Monte Carlo generatora prvo su definirani osnovni fizikalni parametri potrebni za izračun diferencijalnog presjeka procesa  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ : masa i širina  $Z$ -bozona, elektromagnetska konstanta  $\alpha_{\text{QED}}$ , Fermi konstanta  $G_F$ , kvadrat sinusa Weinbergovog kuta  $\sin^2 \theta_W$ , te faktor za pretvorbu iz  $\text{GeV}^{-2}$  u pikobarne (pb). Energija sudara u centru mase označena je kao  $E_{\text{cm}}$ , dok je  $\hat{s} = E_{\text{cm}}^2$  Mandelstamova varijabla.

Diferencijalni presjek u elektroslabom slučaju izražava se kao što je prikazano u formulama (4.32)–(4.37) pri čemu koeficijenti  $A_0$  i  $A_1$  uključuju vektorska i aksijalna sprezanja leptona i fermiona te funkcije  $\chi_1$  i  $\chi_2$  koje opisuju rezonantni doprinos  $Z$ -bozona. U kodu su vrijednosti spreganja fermiona  $Q_f, V_f, A_f$  uzete direktno iz Tablice 1, dok su spreganja leptona ( $\mu$ ) također preuzeta iz tablice. Na primjer, za  $\mu^-$  imamo  $Q = -1$ ,  $V_\mu = -1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $A_\mu = -1/2$ . Uvrštavanjem ovih numeričkih vrijednosti u gornje formule dobivaju se eksplicitni izrazi koji se koriste u funkciji `diff_cross_section` u kodu 1.1.



```

1 import math
2 import random
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # Parametri uzeti iz Tablice 2 dokumenta
7 m_z = 91.188                # masa Z bozona u GeV
8 width_z = 2.4414            # sirina Z bozona u GeV
9 alpha_qed = 1/132.507       # elektromagnetska konstanta
10 fermi = 1.16639e-5          # Fermi konstanta
11 sin2_theta_w = 0.222246     # kvadrat sinusa Weinbergovog kuta
12 pb_conv = 3.894e8           # GeV^-2 u pb
13
14 energy_cm = 90
15 s_hat = energy_cm**2
16
17 def diff_cross_section(cos_theta):
18     # Vektorsko i aksijalno sprezanje leptona
19     vector_coupling = -0.5 + 2*sin2_theta_w
20     axial_coupling = -0.5
21
22     # Funkcije chi1 i chi2 za rezonantni doprinos Z bozona
23     k_factor = math.sqrt(2)*fermi*m_z**2/(4*math.pi*alpha_qed)
24     chi_1 = k_factor*s_hat*(s_hat-m_z**2)/((s_hat-m_z**2)**2 +
25         (width_z**2)*m_z**2)
26     chi_2 = k_factor**2*s_hat**2/((s_hat-m_z**2)**2 + (width_z
27         **2)*m_z**2)
28
29     # Koeficijenti A0 i A1
30     A_0 = 1 + 2*vector_coupling**2*chi_1 + (axial_coupling**2
31         + vector_coupling**2)**2 * chi_2
32     A_1 = 4*axial_coupling**2*chi_1 + 8*axial_coupling**2*
33         vector_coupling**2*chi_2
34
35     const = 2*math.pi*alpha_qed**2/(4*s_hat)
36
37     return const * (A_0*(1+cos_theta**2) + A_1*cos_theta)

```

**Kôd 1.1** Definicija parametara i funkcije `diff_cross_section` koja računa diferencijalni presjek kao funkciju kuta  $\theta$ .

### 5.1.2 Monte Carlo integracija ukupnog presjeka

Za izračun ukupnog presjeka korištena je Monte Carlo metoda integracije. Generiran je veliki broj slučajnih vrijednosti  $\cos \theta$  u intervalu  $[-1, 1]$ , a diferencijalni presjek (definiran u funkciji `diff_cross_section`) korišten je kao težinska funkcija. Ukupni presjek dobiva se kao prosječna vrijednost težina, dok se statistička pogreška procjenjuje iz varijance.

```
1 # MC integracija - inicijalizacija
2 num_points = 1000000
3 cos_theta_range = 2.0 # [-1,1]
4 random.seed(42)
5
6 total_weight = 0.0
7 total_weight_sq = 0.0
8 max_weight = 0.0
9 max_cos_theta = -2.0
10
11 print("integracija")
```

**Kôd 1.2** Inicijalizacija varijabli potrebnih za integraciju

U ovom dijelu koda inicijaliziraju se sve potrebne varijable: broj točaka za Monte Carlo integraciju, interval za  $\cos \theta$ , akumulatori za težine i maksimalnu težinu, te se postavlja generator slučajnih brojeva. Ovaj korak osigurava da su svi parametri spremni za izvođenje glavnog integracijskog dijela. U drugom dijelu koda izvršava se sama Monte Carlo integracija:

- Generiraju se nasumične vrijednosti  $\cos \theta$  i izračunava težina pomoću funkcije `diff_cross_section`.
- Težine se akumuliraju kako bi se dobio prosječni presjek i varijanca, a istovremeno se prati maksimalna težina
- Na kraju se računa ukupni presjek s pripadajućom statističkom pogreškom i ispisuje rezultat.
- Izračunava se i analitički presjek prema formuli (4.38) radi provjere numeričke metode.

```

1 # Glavna petlja Monte Carlo integracije
2 for _ in range(num_points):
3     cos_th = -1+random.random()*cos_theta_range
4     weight = diff_cross_section(cos_th)*cos_theta_range
5     total_weight += weight
6     total_weight_sq += weight**2
7
8     if weight > max_weight:
9         max_weight = weight
10        max_cos_theta = cos_th
11
12 cross_section_avg = total_weight/num_points
13 variance = total_weight_sq/num_points-cross_section_avg**2
14 error_mc = math.sqrt(variance/num_points)
15
16 print(f"Ukupni pop presjek: {cross_section_avg*pb_conv:.2f} "
17       f"+/- {error_mc*pb_conv:.2f} pb")
18
19 # Analiticka provjera
20 vector_coupling = -0.5+2*sin2_theta_w
21 axial_coupling = -0.5
22 k_factor = math.sqrt(2)*fermi*m_z**2/(4*math.pi*alpha_qed)
23 chi_1 = k_factor*s_hat*(s_hat-m_z**2)/((s_hat-m_z**2)**2+(
24     width_z**2)*m_z**2)
25 chi_2 = k_factor**2*s_hat**2/((s_hat-m_z**2)**2+(width_z**2)*
26     m_z**2)
27 A_0 = 1+2*vector_coupling**2*chi_1+(axial_coupling**2+
28     vector_coupling**2)**2*chi_2
29
30 sigma_analytical = (4*math.pi*alpha_qed**2/(3*s_hat))*A_0
31
32 print(f"Analiticka vrijednost presjeka: {sigma_analytical*
33     pb_conv:.2f} pb")

```

**Kôd 1.3** Monte Carlo integracija ukupnog presjeka i usporedba s analitičkim rezultatom.

### 5.1.3 Generiranje događaja i Forward-Backward asimetrija

U ovom dijelu se koristi Monte Carlo metoda *Hit-or-Miss* za generiranje događaja  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Za svaki događaj generira se nasumična vrijednost  $\cos \theta$ , računa pripadna težina koristeći funkciju `diff_cross_section`, te se, ako događaj bude prihvaćen, sprema kut, rapiditet i četverovektor leptona.

```

1 # Inicijalizacija za generiranje događaja
2 N = 1000                # broj događaja
3 events_generated = 0
4 cos_theta_events = []   # spremaju se kutovi
5 eta_events = []        # sprema se rapiditet
6
7 forward_count = 0
8 backward_count = 0

```

#### Kôd 1.4 Inicijalizacija varijabli, liste za pohranu i brojači

Ovdje se inicijaliziraju sve potrebne varijable: ukupan broj događaja, liste za pohranu  $\cos \theta$  i rapiditeta, te brojači forward i backward događaja. Ovaj korak osigurava da su svi parametri spremni za izvođenje glavne petlje generiranja događaja.

```

1 while events_generated < N:
2     cos_theta_cand = -1 + random.random() * cos_theta_range
3     w_cand = diff_cross_section(cos_theta_cand)
4     acc_prob = w_cand / max_weight
5
6     if random.random() < acc_prob:
7         events_generated += 1
8         cos_theta_events.append(cos_theta_cand)
9
10        theta_angle = math.acos(cos_theta_cand)
11        eta = -math.log(math.tan(theta_angle / 2))
12        eta_events.append(eta)
13
14        # Brojaci forward i backward događaja
15        if cos_theta_cand > 0:
16            forward_count += 1
17        else:
18            backward_count += 1

```

#### Kôd 1.5 Glavna petlja *Hit-or-Miss* Monte Carlo generiranja

Za prihvaćene događaje generiraju se azimutni kutovi  $\phi$ , računa se  $\sin \theta$ , energija i moment leptona, te se definira četverovektor  $\mu^-$  i  $\mu^+$ . Ovim se reproduciraju fizičke karakteristike svakog događaja.

```

1      phi_angle = random.uniform(0, 2*math.pi)
2      sin_theta = math.sqrt(1 - cos_theta_cand**2)
3
4      E_mu = energy_cm / 2
5      p_mu = E_mu
6
7      mu_minus_4vec = [E_mu,
8                       p_mu * sin_theta * math.cos(phi_angle),
9                       p_mu * sin_theta * math.sin(phi_angle),
10                      p_mu * cos_theta_cand]
11
12     mu_plus_4vec = [E_mu,
13                    -mu_minus_4vec[1],
14                    -mu_minus_4vec[2],
15                    -mu_minus_4vec[3]]
16
17     print(f"Događaj_{events_generated}:")
18     print(f"Mi_{cetverovektor}_{mu_minus_4vec}")
19     print(f"Mi_{cetverovektor}_{mu_plus_4vec}\n")

```

### Kôd 1.6 Generiranje azimutnih kutova $\phi$ i račun $\sin\theta$

Na kraju se računa Forward-Backward asimetrija  $A_{FB}$ , koja daje omjer razlike broja forward i backward događaja prema ukupnom broju događaja. Ova mjera omogućuje uvid u preferenciju emisije leptona u odnosu na smjer sudara.

```

1  A_FB = (forward_count - backward_count) / (forward_count +
        backward_count)
2  print(f"Forward_događaji:{forward_count}")
3  print(f"Backward_događaji:{backward_count}")
4  print(f"Forward-Backward_asimetrija(A_FB):{A_FB:.4f}")

```

### Kôd 1.7 Račun Forward-Backward asimetrije

## 5.1.4 Histogrami za kutne distribucije

Nakon generiranja događaja pomoću *Hit-or-Miss* metode, moguće je prikazati raspodjelu proizvedenih događaja u obliku histograma. Na taj način dobivamo vizualni uvid u oblik distribucije  $\cos\theta$  i rapiditeta  $\eta$ , što olakšava usporedbu s teorijskim očekivanjima.

```

1 # Histogram za raspodjelu cos(theta)
2 plt.hist(cos_theta_events, bins=20, color='lightblue',
3         edgecolor='black')
4 plt.xlabel(r'$\cos\theta$')
5 plt.ylabel('Broj_generiranih_dog')
6 plt.title(r'Distribucija_$\cos\theta$za_proces_$e^+e^-\to_\mu^+\mu^-$')
7 plt.grid(True)
8 plt.savefig('cos_theta_distrib.png')
9 plt.show()

```

**Kôd 1.8** Prikaz histograma raspodjele  $\cos \theta$  za generirane događaje procesa  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Prvi histogram (slika 5.1) prikazuje distribuciju  $\cos \theta$  generiranih miona. Distribucija se očekuje u skladu s analitičkim oblikom diferencijalnog presjeka, što služi kao provjera točnosti algoritma generiranja događaja.

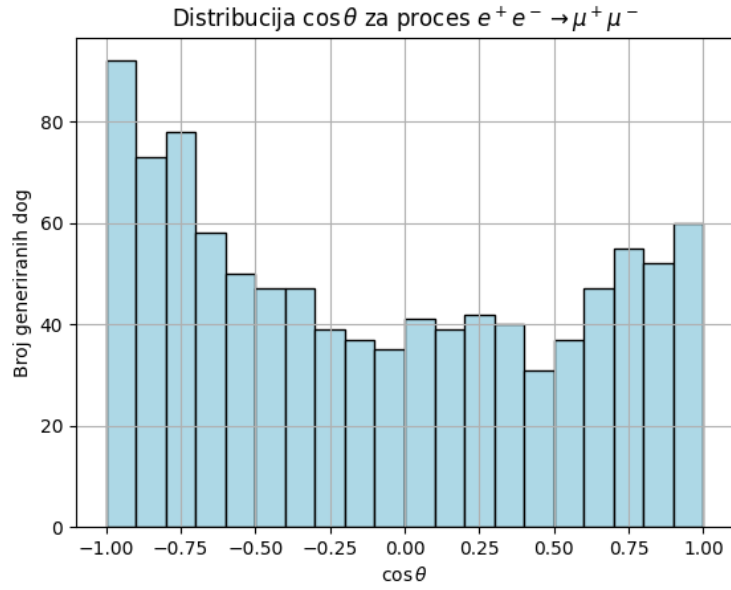
```

1 # Histogram za rapiditet (eta)
2 plt.hist(eta_events, bins=30, color='lightgreen', edgecolor='
3         black')
4 plt.xlabel(r'Rapiditet_$\eta$')
5 plt.ylabel('Broj_generiranih_dogadaja')
6 plt.title(r'Distribucija_$\eta$za_proces_$e^+e^-\to_\mu^+\mu^-$')
7 plt.grid(True)
8 plt.savefig('eta_distrib.png')
9 plt.show()

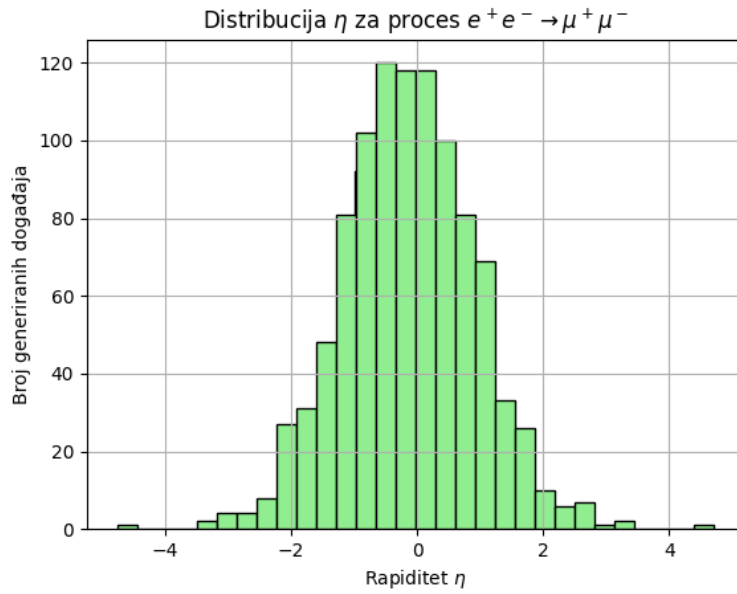
```

**Kôd 1.9** Generiranje histograma distribucije  $\cos \theta$  i rapiditeta  $\eta$  za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Drugi histogram (slika 5.2) prikazuje distribuciju rapiditeta  $\eta$  za iste događaje. Rapiditet je povezan s kutom  $\theta$  preko relacije 5.1 pa ovaj prikaz omogućuje bolju interpretaciju raspodjele u laboratorijskim uvjetima.



**Sl. 5.1.** distribuciju  $\cos\theta$  generiranih miona.



**Sl. 5.2.** Distribucija rapiditeta  $\eta$  za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Histogram je dobiven Monte Carlo simulacijom s metodom *Hit-or-Miss*, pri čemu su kutovi generirani proporcionalno diferencijalnom presjeku.

## 6. Numerički rezultati i analiza distribucija

### 6.1 Monte Carlo integracija ukupnog presjeka procesa $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Ukupni presjek za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  procijenjen je korištenjem Monte Carlo metode. Generirano je  $N = 10^6$  nasumičnih točaka za  $\cos \theta$  u intervalu  $[-1, 1]$ , pri čemu je svakoj točki dana težina:

$$w_i = \frac{d\sigma}{d\cos\theta_i} \Delta \cos\theta, \quad \Delta \cos\theta = 2. \quad (6.1)$$

Ukupni presjek dobiva se prosjekom svih težina, dok se statistička pogreška računa preko varijance. U simulaciji je dobivena vrijednost:

$$\sigma_{\text{MC}} = (1060.60 \pm 0.25) \text{ pb.}$$

Za usporedbu, analitički izraz za presjek glasi

$$\sigma_{\text{analytical}} = 1060.94 \text{ pb.}$$

Dobiveni Monte Carlo rezultat i analitička vrijednost međusobno se slažu, a razlika unutar statističke pogreške odražava numeričku prirodu metode uzorkovanja. Ovo potvrđuje ispravnost implementacije koda i konzistentnost s teorijskim predviđanjima.

### 6.2 Distribucija rapiditeta

Na slici 5.2 prikazana je distribucija rapiditeta  $\eta$  za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Rapiditet je u kodu definiran pomoću kuta raspršenja  $\theta$ , korištenjem relacije 5.1. Ova definicija povezuje geometriju događaja s kvantitativnom mjerom kuta u odnosu na os snopa. U kodu se rapiditet računa prema formuli izračunate vrijednosti  $\cos \theta$ , koja je odabrana pomoću metode *Hit-or-Miss* proporcionalno diferencijalnom presjeku. Time se osigurava da generirana distribucija  $\eta$  odražava stvarne fizikalne vjerojatnosti raspodjele raspadajućih miona u ovom procesu.

Dobiveni histogram pokazuje da se najveći broj događaja nalazi u području oko  $\eta \approx 0$ , dok broj događaja opada prema većim apsolutnim vrijednostima  $|\eta|$ . Ovaj oblik proizlazi iz simetrične prirode procesa: budući da se radi o  $e^+e^-$  sudaru u centru mase, sustav nema preferirani smjer, pa je distribucija rapiditeta simetrična u odnosu na nulu. Maksimum oko



$\eta = 0$  odgovara događajima u kojima su produkti emitirani pod kutovima blizu  $90^\circ$  u odnosu na os snopa, dok repovi distribucije odgovaraju slučajevima kada je čestica emitirana vrlo blizu smjera snopa ( $\theta \rightarrow 0$  ili  $\pi$ ).

Matematički, oblik distribucije može se razumjeti korištenjem Jacobijeve transformacije između diferencijalnog presjeka po kutu  $\theta$  i distribucije po rapiditetu  $\eta$ . Ako je kutna distribucija dana kao

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}, \quad (6.2)$$

onda distribucija po rapiditetu dobivamo standardnom formulom za promjenu varijable:

$$\frac{d\sigma}{d\eta} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \cdot \left| \frac{d\cos\theta}{d\eta} \right|. \quad (6.3)$$

Rapiditet je definiran kao

$$\eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2}, \quad \text{odnosno} \quad \cos\theta = \tanh\eta, \quad (6.4)$$

što dovodi do derivacije Jacobijana:

$$\frac{d\cos\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}(\tanh\eta) = \text{sech}^2\eta. \quad (6.5)$$

Time konačna transformacija postaje:

$$\frac{d\sigma}{d\eta} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \Big|_{\cos\theta=\tanh\eta} \cdot \text{sech}^2\eta. \quad (6.6)$$

Faktor  $\text{sech}^2\eta$  ima fizikalni smisao: kod velikih  $|\eta|$  (čestice blizu smjera snopa) mala promjena u kutu  $\theta$  odgovara velikoj promjeni rapiditeta, pa se gustoća događaja po jedinici  $\eta$  smanjuje. Drugim riječima, Jacobian "razvlači" interval kutova u širok interval rapiditeta, što geometrijski smanjuje broj događaja u repovima histograma. Za male  $|\eta|$  (centralne čestice), Jacobian je blizu 1 i distribucija se gotovo ne mijenja. Ovo objašnjava zašto histogram rapiditeta ima maksimum u sredini i opada prema repovima, čak i ako je kutna distribucija simetrična.

### 6.3 Forward-Backward asimetrija

Forward-Backward asimetrija je već uvedena izrazom (5.2):

$$A_{\text{FB}} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B},$$

gdje  $\sigma_F$  i  $\sigma_B$  označavaju presjeke u prednjem i stražnjem poluprostoru. U Monte Carlo simulaciji, presjeci su proporcionalni broju događaja u forward ( $\cos\theta > 0$ ) i backward ( $\cos\theta < 0$ ) području, pa se omjer može direktno procijeniti iz broja generiranih događaja.

Za dobiveni uzorak rezultati su sljedeći:

$$N_F = 444, \quad N_B = 556,$$

što daje vrijednost

$$A_{FB} = \frac{444 - 556}{444 + 556} = -0.1120.$$

Negativna vrijednost  $A_{FB}$  znači da je u ovom slučaju broj događaja u stražnjem poluprostoru veći od broja događaja u prednjem. Veličina asimetrije ( $|A_{FB}| \approx 0.11$ ) pokazuje da je oko 11% više događaja detektirano u backward području.

Ovo je u skladu s činjenicom da forward-backward asimetrija ne mora biti pozitivna — ona jednostavno kvantificira postoji li preferencija u smjeru emisije produkata. Znak asimetrije pokazuje u kojem poluprostoru dominiraju događaji, dok veličina asimetrije pokazuje jačinu te preferencije [11].

Fizikalno, pojava forward-backward asimetrije povezana je s interferencijom vektorskih i aksijalnih sprega u elektronsko-pozitronskim sudarima. Ovisno o parametrima modela (npr. vrijednosti  $\sin^2 \theta_W$ , energiji sudara i ulozi Z-bozona), preferirani smjer emisije može biti forward ili backward [11]. Dobiveni negativni rezultat stoga predstavlja konzistentan ishod simulacije i ilustrira osjetljivost  $A_{FB}$  na detalje teorijskog modela.

## 7. Poboljšanja i moguće nadogradnje Monte Carlo generatora

Iako razvijeni Monte Carlo generator uspješno reproducira osnovne značajke procesa  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$  te omogućuje analizu kutnih distribucija i Forward–Backward asimetrije, postoje brojni načini na koje bi se simulacija mogla nadograditi i proširiti kako bi bolje odražavala stvarne fizikalne procese i eksperimentalne uvjete.

### 7.1 Uvođenje dodatnih fizikalnih efekata

U trenutnom modelu proces je opisan na osnovnoj razini teorije, pri čemu se razmatraju dominantni doprinosi razmjene fotona i Z-bozona, dok se zanemaruju višeredne korekcije kvantne elektrodinamike (QED) i kvantne kromodinamike (QCD). Uvođenjem dodatnih efekata, poput inicijalnog i finalnog zračenja (ISR i FSR), te interferencije između različitih dijagrama, mogla bi se poboljšati preciznost modela. Primjerice, uključivanje ISR efekata omogućilo bi realističniju raspodjelu energije u početnom stanju, budući da elektroni i pozitroni u stvarnim sudarima zrače fotone prije interakcije [17].

Također, korisno bi bilo uključiti utjecaj širine Z-bozona i njegovu interferenciju s virtualnim fotonom, čime bi se omogućilo opisivanje većeg energijskog područja. Time bi se poboljšala usporedba s eksperimentalnim rezultatima na različitim energijama. [18].

### 7.2 Povezivanje s eksperimentalnim podacima

Trenutna verzija generatora proizvodi podatke koji su u skladu s teorijskim predviđanjima, ali nije uključeno uspoređivanje s mjerenjima. Jedna od mogućnosti za nadogradnju je usporedba dobivenih kutnih distribucija i izračunatog  $A_{FB}$  s podacima iz eksperimenta LEP ili budućih elektron–pozitron sudarača (ILC, FCC-ee). Takvo bi povezivanje omogućilo kvantitativnu procjenu odstupanja između modela i eksperimentalnih vrijednosti, čime bi se dodatno potvrdila fizička valjanost generatora [19].

Za takve usporedbe bilo bi potrebno uključiti i eksperimentalne efekte poput ograničenja detektora i nesavršenosti u mjerenju kuta između leptonu. Implementacija takvih korekcija mogla bi se ostvariti kroz dodavanje faktora težine generirane događaje.

### 7.3 Plan za budući razvoj

U daljnjem razvoju generatora moguće je razmotriti nekoliko smjerova:

- **Modularnost koda:** trenutni Python kod može se proširiti u modularnu strukturu koja bi omogućila jednostavno dodavanje novih procesa (npr.  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ ).
- **Grafičko sučelje:** razviti jednostavno sučelje za prikaz i analizu rezultata u stvarnom vremenu, što bi omogućilo edukativnu i demonstracijsku primjenu generatora.
- **Paralelno generiranje događaja:** implementacija paralelnog izvođenja (korištenjem `multiprocessing` modula) mogla bi značajno ubrzati generiranje velikog broja događaja.
- **Usporedba s postojećim generatorima:** rezultati bi se mogli usporediti s profesionalnim generatorima poput PYTHIA ili HERWIG, čime bi se dodatno validirala točnost pristupa [13, 14].

Sve navedene nadogradnje omogućile bi da se razvijeni Monte Carlo generator koristi ne samo kao jednostavan istraživački alat, nego i kao edukativna platforma za razumijevanje osnovnih principa simulacije sudara čestica. Takav bi pristup povezao teorijski okvir kvantne teorije polja s praktičnom numeričkom implementacijom i analizom podataka.

## Zaključak

U ovom radu razvijen je Monte Carlo generator događaja za proces  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Implementacija u Pythonu omogućila je generiranje velikog broja događaja, analizu kinematičkih varijabli i vizualizaciju raspodjela čestica. Poseban fokus stavljen je na  $\cos \theta$  i rapiditet  $\eta$ , što je omogućilo detaljnu procjenu forward-backward asimetrije u numeričkom uzorku.

Dobiveni ukupni presjek iz Monte Carlo simulacije pokazao je dobru suglasnost s analitičkim rješenjem, što potvrđuje ispravnost implementacije i točnost korištenog algoritma. Forward-backward asimetrija izračunata iz generiranih događaja ukazuje na blagu dominaciju backward emisije, što se može interpretirati kroz simetriju i geometriju procesa.

Ovaj rad pokazuje kako jednostavna implementacija Monte Carlo generatora omogućava praktično razumijevanje teorijskih principa, povezivanje numeričkih rezultata s analitičkim predikcijama i analizu raspodjela čestica u eksperimentalnom kontekstu. Pristup korišten u ovom radu može se proširiti na druge leptonske parove i različite energetske uvjete, što pruža osnovu za daljnje istraživanje i simulacije u području fizike čestica.

## Privitak

Izvorni programski kod korišten u ovom diplomskom radu dostupan je na GitHub profilu: <https://github.com/deasun6> u repozitoriju pod nazivom **Diplomski**, u grani **master**, pod datotekom **zadatak1\_lepton\_colliders.py** Ovaj kod implementira numeričku simulaciju procesa  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$  pomoću Monte Carlo metode, uz analizu forward-backward asimetrije.

## Literatura

- [1] <https://arxiv.org/abs/1412.4677>
- [2] <https://www.numberanalytics.com/blog/monte-carlo-simulations-particle-physics>
- [3] L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer, 1986.
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972. URL: <https://www.physicsbook.ir/book/An>
- [5] F. Halzen and A. Martin. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley and Sons, 1984 URL: <https://archive.org/details/QuarksAndLeptonsAnIntroductoryCourseInModernParticlePhysicsHalzenMartin>
- [6] Webber, B., Event Generator Physics, University of Cambridge, 2007 URL: <https://www.hep.phy.cam.ac.uk/theory/webber/MCnet/MClecture3.pdf>
- [7] Höche, S., Introduction to Parton Shower Event Generators, SLAC National Accelerator Laboratory, 2015. URL: <https://arxiv.org/abs/1411.4085>
- [8] Rojo, J., Quantum Chromodynamics: Lecture Notes, 2025. URL: [https://juanrojo.com/wp-content/uploads/2025/03/particle\\_physics\\_2\\_qcd\\_lecture5b.pdf](https://juanrojo.com/wp-content/uploads/2025/03/particle_physics_2_qcd_lecture5b.pdf)
- [9] Seymour, M. H. and Marx, M., Monte Carlo Event Generators, 2013. URL: <https://arxiv.org/abs/1304.6677>
- [10] Particle Data Group, Monte Carlo Event Generators, 2021. URL: <https://pdg.lbl.gov/2021/reviews/rpp2021-rev-mc-event-gen.pdf>
- [11] Physical Interpretation of Forward-Backward Asymmetry, URL: <https://physics.stackexchange.com/q/346573>
- [12] M. H. Seymour, *Introduction to Monte Carlo Event Generators* URL: <https://indico.cern.ch/event/1374994/contributions/5799352/attachments/2873556/5031819/MCnet2024lect>
- [13] T. Sjöstrand, S. Mrenna, P. Skands, *A brief introduction to PYTHIA 8.1*, Comput. Phys. Commun. URL: <https://arxiv.org/abs/0710.3820>

- [14] M. Bähr et al., *Herwig++ Physics and Manual*, Eur. Phys. J. C URL: <https://arxiv.org/abs/0803.0883>
- [15] MCnet 2025, *Introduction to Event Generators*, MCnet Summer School 2025, URL: <https://indico.cern.ch/event/1484584/contributions/6544248/attachments/3085408/5462440/mcnet2025-intro.pdf>
- [16] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press, 2013.
- [17] E. A. Kuraev, V. S. Fadin, *On Radiative Corrections to  $e^+e^-$  Single Photon Annihilation at High Energy*, Sov. J. Nucl. Phys. **41**, 466 (1985). <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9512347>
- [18] The ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Collaborations, and the LEP Electroweak Working Group, *Precision Electroweak Measurements on the Z Resonance*, Phys. Rept. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ex/0509008>
- [19] A. Blondel et al., *Future Strategies for Lepton Colliders*, arXiv:1901.02648 [hep-ex], (2019). URL: <https://arxiv.org/abs/1901.02648>