

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET**

**DIPLOMSKI RAD**

**NASLOV DIPLOMSKOG RADA**

**Dea Šunjić**

Split, 2025

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Uvod u simulacije sudara čestica</b>	<b>4</b>
1.1 Monte Carlo metoda integracije . . . . .	4
1.2 Poboljšanje konvergencije Monte Carlo integracije . . . . .	5
<b>2 Hit-or-Miss metoda</b>	<b>7</b>
<b>3 Struktura generatora događaja</b>	<b>8</b>
<b>4 Proces <math>e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-</math></b>	<b>10</b>
4.1 Proces $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	12
<b>5 Monte Carlo generator za proces <math>e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-</math></b>	<b>14</b>
5.1 Implementacija Monte Carlo generatora . . . . .	15
5.1.1 Definicija diferencijalnog presjeka i parametara . . . . .	15
5.1.2 Monte Carlo integracija ukupnog presjeka . . . . .	17
5.1.3 Generiranje događaja i Forward-Backward asimetrija . . . . .	18
5.1.4 Histogrami za kutne distribucije . . . . .	20
<b>6 Numerički rezultati i analiza distribucija</b>	<b>22</b>
<b>Zaključak</b>	<b>23</b>
<b>Skraćenice</b>	<b>25</b>
<b>Privitak</b>	<b>26</b>

## **Uvod**

Ovdje počnite s pisanjem uvoda. Ne pretjerujte s uvodom.

# 1. Uvod u simulacije sudara čestica

Analiza sudara čestica počinje proučavanjem primjera kao što su elastični sudari dviju kugli u jednoj dimenziji, a zadatak je izračunati promjene njihovih količina gibanja. Sljedeća razina složenosti uključuje neelastične sudare, gdje dolazi do gubitka energije, primjerice zbog spajanja kugli ili drugih deformacija. Da bismo u simulacijama fizike čestica što vjernije prikazali prirodu, moramo uzeti u obzir mnogo učinaka i koristiti razne modele i aproksimacije. Jedan od najvažnijih alata za proučavanje sudara u fizici elementarnih čestica su Monte Carlo simulacije [1]. Ove simulacije omogućuju modeliranje složenih interakcija čestica uzimajući u obzir statističku prirodu tih procesa. Korištenjem slučajnog uzorkovanja, Monte Carlo metode omogućuju precizno predviđanje rezultata sudara, što je ključno za razumijevanje i interpretaciju eksperimentalnih podataka [2].

## 1.1 Monte Carlo metoda integracije

Monte Carlo metoda integracije temelji se na ideji da se vrijednost integrala može aproksimirati prosjekom funkcije unutar intervala. Za integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx, \quad (1.1)$$

možemo napisati:

$$I \approx (x_2 - x_1) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (1.2)$$

gdje su  $x_i$  nasumično odabrane točke u intervalu  $(x_1, x_2)$ . Ako generiramo  $\rho_i$  uniformno u  $(0, 1)$ , tada

$$x_i = x_1 + (x_2 - x_1)\rho_i. \quad (1.3)$$

Za procjenu preciznosti koristi se standardna devijacija prosjeka:

$$\sigma_{MC} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (1.4)$$

gdje je  $\sigma$  standardna devijacija  $f(x_i)$ . U praksi se često koristi definicija težine

$$W_i = (x_2 - x_1) f(x_i), \quad (1.5)$$

tako da integral postaje prosjek težina:

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i. \quad (1.6)$$

Varijanca procjene je:

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \right)^2, \quad (1.7)$$

odakle standardna nesigurnost Monte Carlo integracije postaje

$$\sigma_{MC} = \sqrt{\frac{V_N}{N}}. \quad (1.8)$$

Konačno, integral se može zapisati s procijenjenom pogreškom kao:

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \pm \sqrt{\frac{V_N}{N}}. \quad (1.9)$$

Iako postoje i druge metode za numeričku integraciju, u slučaju visoko-dimenzijskih problema poput simulacija sudara čestica, Monte Carlo integracija je praktično jedina održiva opcija zbog svoje jednostavne generalizacije na velike dimenzije i relativno brze konvergencije [1].

## 1.2 Poboljšanje konvergencije Monte Carlo integracije

Točnost integrala izračunatog Monte Carlo metodom integracije određuje se kao  $V_N/N$ . Dakle, jednostavno povećanje broja točaka poboljšava preciznost. Međutim, također se mogu primijeniti tehnike za smanjenje  $V_N$ , npr. metoda *Importance Sampling* [3]. Osnovna ideja je izvršiti Jacobianovu transformaciju kako bi integral bio ravnomjerniji u novoj varijabli integracije. Drugim riječima, traži se transformacija takva da vrijedi  $V'_N < V_N$ .

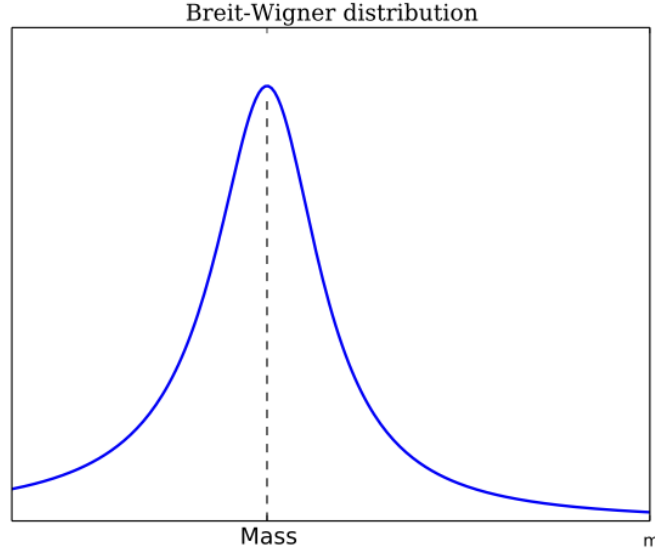
Razmatramo najjednostavniji slučaj koji se javlja u fizici čestica. U izračunima presjeka često se pojavljuje tzv. Breit-Wigner distribucija, koja opisuje „vrhunac“ rezonancije:

$$F_{BW}(m^2) = \frac{1}{(m^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2}, \quad (1.10)$$

gdje je  $M$  fizička (on-shell) masa čestice,  $m$  je off-shell masa, a  $\Gamma$  širina rezonancije. Primjer distribucije (za  $M = 90$ ,  $\Gamma = 10$ ) prikazan je na slici 1.1.

Integrali koje tada susrećemo često imaju oblik:

$$I = \int_{M_{\min}^2}^{M_{\max}^2} \frac{dm^2}{(m^2 - M^2)^2 + M^2 \Gamma^2}. \quad (1.11)$$



**Sl. 1.1.** Primjer Breit-Wigner distribucije za  $M = 90$ ,  $\Gamma = 10$  [1].

Transformacija koju uzimamo u obzir je  $m^2 \rightarrow \rho$ , gdje vrijedi:

$$m^2 = M\Gamma \tan \rho + M^2, \quad (1.12)$$

a odgovarajući Jacobian je:

$$J = \frac{\partial m^2}{\partial \rho} = M\Gamma \sec^2 \rho. \quad (1.13)$$

Integral se tada zapisuje kao:

$$I = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho \frac{\partial m^2}{\partial \rho} \frac{1}{(m^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho M\Gamma. \quad (1.14)$$

U ovom slučaju varijanca je u potpunosti smanjila:  $V'_N = 0$ . U praksi je rijetko moguće izračunati integral točno. Kada se radi o složenim područjima integracije, obično se bira funkcija koja što bolje opisuje ponašanje funkcije koju integriramo. Poseban pristup, poznat kao *multi-channel integration*, primjenjuje se u situacijama kada fazni prostor sadrži više vrhunaca, čime jednostavna Breit-Wigner distribucija više nije dovoljna. Ova metoda se koristi u suvremenim Monte Carlo generatorima [1].

## 2. Hit-or-Miss metoda

Monte Carlo metoda pokazuje se posebno pogodnom za izradu generatora događaja iz dva glavna razloga: numerički postupak ima sličnu, „slučajnu“ prirodu kao i sami fizički procesi koji se proučavaju, a uz to omogućuje generiranje događaja bez pridruženih težinskih faktora. Na sličan način kao kod Monte Carlo integracije, moguće je pregledavati funkciju  $f(x)$  i skupljati skup točaka u faznom prostoru, pri čemu svaka točka ima određenu vjerojatnost nastanka. Te točke predstavljaju potencijalne događaje, a njihova vjerojatnost odražava koliko je vjerojatno da se događaj dogodi. Kada želimo koristiti takve događaje za analizu ili daljnje simulacije, potrebno je uvijek voditi računa o pripadajućim težinama – što može biti nepraktično i neefikasno, osobito u kasnijim fazama simulacije, kada neki događaji imaju zanemarivo male težine i time nepotrebno opterećuju računalne resurse. Cjelokupni postupak integracije i generiranja događaja može se sažeti u dva osnovna koraka:

1. **Monte Carlo integracija i odabir točaka:** Nasumično se bira  $N$  točaka u faznom prostoru prema zadanoj distribuciji, pri čemu se njihove pridružene težine zbrajaju kako bi se izračunale sume  $\sum_i W_i$  i  $\sum_i W_i^2$ . Na temelju tih suma određuju se vrijednost presjeka i pripadajuća pogreška. U ovoj fazi također se bilježi točka s najvećom težinom, označena kao  $W_{\max}$ .
2. **Generiranje događaja bez pridruženih težina („hit-or-miss“ metoda):** Svaka nasumično odabrana točka faznog prostora uspoređuje se s pripadajućom vjerojatnošću, izraženom omjerom  $W_i/W_{\max}$ , i nasumičnim brojem  $R \in (0, 1)$ . Ako je omjer veći od  $R$ , događaj se prihvaća; u suprotnom se odbacuje. Ovaj proces se ponavlja dok se ne prikupi željeni broj događaja  $N_{\text{events}}$  [1].

### 3. Struktura generatora događaja

Simulacija sudara čestica u eksperimentima visoke energije zahtijeva precizno modeliranje složenih fizikalnih procesa koji vode od osnovnog sudara do konačnih čestica koje detektori registriraju. Sudari hadrona, poput proton-proton sudara na LHC-u, proizvode veliki broj čestica u konačnom stanju, često reda tisuća po događaju. To čini direktnu simulaciju iz teorijskih modela vrlo izazovnom zbog kombinacije visoke dimenzionalnosti faznog prostora i statističke prirode QCD interakcija [6].

Da bi se ovo savladalo, generatori događaja koriste pristup faktorizacije, pri kojem se složeni procesi dijele na niz uzastopnih koraka, svaki od kojih se može simulirati zasebno. Ovaj pristup omogućuje efikasno numeričko generiranje događaja bez gubitka preciznosti u predviđanju raspodjela konačnih čestica [7, 8]. Faktorizacija se može usporediti s adiabatском aproksimacijom u mehanici, gdje se gibanja sustava odvijaju na različitim vremenskim skalama i mogu se tretirati neovisno [9].

Unutar ovakve strukture, generator događaja prvo simulira osnovni proces visoke energije, poznat kao *hard process*, zatim modelira emisiju sekundarnih partona kroz *parton shower*, a zatim prelazi na hadronizaciju i raspad nestabilnih čestica. Svaka od ovih faza uključuje detaljna pravila i aproksimacije, uključujući zakon očuvanja energije, impulsa i kvantnih brojeva, te uzimanje u obzir boje i spin čestica [10].

Ovakav pristup omogućuje stvaranje realističnih događaja koji mogu biti uspoređeni s eksperimentalnim mjerenjima, pri čemu generatori događaja osiguravaju predviđanja za raspodjele kuta, energije i drugih fizikalnih veličina u konačnom stanju [6, 7]. Pritom, primjenom Monte Carlo metoda, generatori omogućuju statističku procjenu raspodjela i simulaciju rijetkih događaja, što je ključno za dizajn eksperimentalnih analiza i provjeru teorijskih modela.

Na temelju ovog konceptualnog okvira, cijeli događaj se generira kroz nekoliko uzastopnih koraka:

1. **Generiranje osnovnog procesa (hard procesa):** Odabire se točka u faznom prostoru prema metodi *hit-or-miss*, čime se simulira osnovni sudar.
2. **Raspad teških čestica (rezonanci):** Teške čestice s uskim širinama raspadaju se prije faze *parton shower*. Primjerice, top kvark može se raspasti u lepton, neutrino i b-kvark.
3. **Partonski pljusak:** Ulazni partoni se prate unatrag do sudarajućih hadrona, što generira inicijalno zračenje. Čestice u konačnom stanju koje nose boju također emitiraju zračenje,



---

stvarajući konačno zračenje.

4. **Višestruke interakcije partona:** Niže energetske sekundarne interakcije među partonima unutar sudarajućih hadrona modeliraju se kao QCD  $2 \rightarrow 2$  procesi.
5. **Hadronizacija i raspad hadrona:** U klsterskom modelu hadronizacije formiraju se skupine obojenih čestica (klasteri), iz kojih nastaju hadroni. Nestabilni hadroni se potom raspadaju u manje čestice.

Ova faktorizacija omogućuje generatorima događaja da postupno grade kompleksne događaje, što je ključno za realistične simulacije sudara i analizu eksperimentalnih podataka [1].

## 4. Proces $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Razmotrimo proces anihilacije elektrona i pozitrona u par miona putem virtualnog fotona. Ovo poglavlje će se ograničiti na prikaz ključnih koraka koji vode do izraza za diferencijalni presjek. Feynmanov dijagram prikazan je na slici 4.1, a prema pravilima QED-a za verteks i propagator fotona amplituda procesa glasi:

$$iM = \bar{v}_{s'}(p')(-ie\gamma^\lambda)u_s(p) \frac{-ig_{\lambda\nu}}{q^2} \bar{u}_r(k)(-ie\gamma^\nu)v_{r'}(k'), \quad (4.1)$$

gdje  $s, s', r, r'$  označavaju indekse spin fermiona. Nakon što izostavimo oznake za spinove, kvadrat matriksnog elementa dobiva oblik:

$$|M|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}(p')\gamma^\lambda u(p) \bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')) (\bar{u}(k)\gamma_\lambda v(k') \bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)). \quad (4.2)$$

Kako bismo dobili rezultat koji ne ovisi o orijentaciji spinova, uzimamo prosjek po spinovima početnih čestica te sumu po spinovima konačnih čestica:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2. \quad (4.3)$$

Primjenom relacija potpunosti za spinore izraz se može zapisati u obliku:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[p\gamma^\lambda p'\gamma^\nu] \text{Tr}[k\gamma_\lambda k'\gamma_\nu], \quad (4.4)$$

pri čemu smo zanemarili mase elektrona i miona. Korištenjem identiteta za tragove gamma-matrice dobiva se:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k)]. \quad (4.5)$$

Rezultat je izražen u terminima skalarnih produkata četverovektora. Kako bismo dobili jednostavniji oblik, uvodimo sustav centra mase (slika 4.2), gdje vrijedi:

$$p = (E, E\hat{z}), \quad p' = (E, -E\hat{z}), \quad (4.6)$$

$$k = (E, \vec{k}), \quad k' = (E, -\vec{k}). \quad (4.7)$$

Kut  $\theta$  definiran je između početnog elektrona i konačnog miona. U tom sustavu skalarni produkti glase:

$$p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E|\vec{k}| \cos \theta, \quad (4.8)$$

$$p \cdot k' = p' \cdot k = E^2 + E|\vec{k}| \cos \theta, \quad (4.9)$$

$$q^2 = (p + p')^2 = 4E^2, \quad p \cdot p' = 2E^2. \quad (4.10)$$

Na dovoljno visokim energijama mase leptona možemo zanemariti, pa vrijedi  $E = |\vec{k}|$ , te dobijemo:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |M|^2 = e^4 (1 + \cos^2 \theta). \quad (4.11)$$

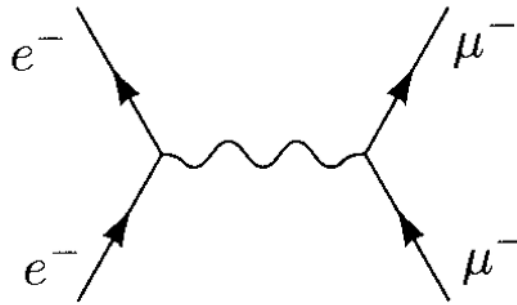
Ovaj rezultat možemo uvrstiti u opću formulu za diferencijalni presjek procesa  $2 \rightarrow 2$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 s}, \quad (4.12)$$

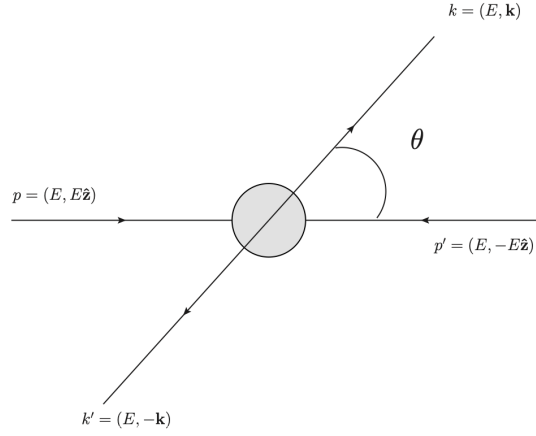
gdje  $s = E_{\text{cm}}^2$  označava energiju u centru mase. Nakon sređivanja slijedi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\hat{s}} (1 + \cos^2 \theta), \quad (4.13)$$

pri čemu je  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  elektromagnetska konstanta sprežanja. Budući da presjek ne ovisi o azimutalnom kutu  $\phi$ , integracija po njemu daje dodatni faktor  $2\pi$ .



**Sl. 4.1.** Feynmanov dijagram za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  posredstvom virtualnog fotona [4].



**Sl. 4.2.** Kinematički raspored čestica u procesu  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Kut  $\theta$  definiran je između početnog elektrona i konačnog miona [1].

#### 4.1 Proces $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Diferencijalni presjek za proizvodnju para leptona  $\mu^+\mu^-$  u leptonskim sudaračima putem slabe interakcije računa se na vrlo sličan način kao i u kvantno-elektrodinamičkom (QED) slučaju. Međutim, ključna razlika pojavljuje se zbog svojstava  $Z$  bozona, koji se ne spaja jednako na lijeve i desne fermione [5]. Upravo ta razlika u spregama dovodi do pojave asimetrija u raspodjeli konačnih čestica.

Interakcija fermiona sa  $Z$  bozonom u okviru standardnog modela može se zapisati kao

$$g_W L_{ffZ} = -\frac{1}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi}_f \gamma^\mu (V_f - A_f \gamma^5) \psi_f Z_\mu, \quad (4.14)$$

gdje  $g_W$  predstavlja spregu  $SU(2)$  teorije, dok  $\theta_W$  označava tzv. Weinbergov kut, čija se numerička vrijednost nalazi u Dodatku A. Ovdje  $\psi_f$  opisuje fermionsko polje, a  $Z_\mu$  je odgovarajuće polje  $Z$  bozona. Parametri  $V_f$  i  $A_f$  određuju vektorske i aksijalne spregnute konstante za pojedine fermione, a njihove vrijednosti prikazane su u Tablici 4.1.

Fermion	$Q_f$	$V_f$	$A_f$
$u, c, t$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$+\frac{1}{2}$
$d, s, b$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$e, \mu, \tau$	-1	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$

**Tablica 4.1.** Spregnute konstante fermiona sa  $Z$  bozonom.

Zbog ove razlike u spregama, raspodjela proizvedenih leptona nije više simetrična u odnosu na kut raspršenja, već se pojavljuje tzv. *forward-backward* asimetrija. Za razliku od čisto elektromagnetskog slučaja, gdje je diferencijalni presjek građen samo od konstantnih članova i

izraza proporcionalnih  $\cos^2 \theta$ , u prisutnosti  $Z$  bozona pojavljuje se i član linearan u  $\cos \theta$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\hat{s}} \left( A_0(1 + \cos^2 \theta) + A_1 \cos \theta \right), \quad (4.15)$$

gdje koeficijenti  $A_0$  i  $A_1$  sadrže informacije o spregama i zadani su sljedećim izrazima:

$$A_0 = Q_f^2 - 2Q_f V_\mu V_f \chi_1 + (A_\mu^2 + V_\mu^2)(A_f^2 + V_f^2) \chi_2, \quad (4.16)$$

$$A_1 = -4Q_f A_\mu A_f \chi_1 + 8A_\mu V_\mu A_f V_f \chi_2. \quad (4.17)$$

Ovdje se pojavljuju pomoćne funkcije  $\chi_1$  i  $\chi_2$ , koje uključuju rezonantno ponašanje  $Z$  bozona i zadane su izrazima:

$$\chi_1(\hat{s}) = \kappa \hat{s} \frac{\hat{s} - M_Z^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2}, \quad (4.18)$$

$$\chi_2(\hat{s}) = \kappa^2 \frac{\hat{s}^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2}, \quad (4.19)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2} G_F M_Z^2}{4\pi\alpha}. \quad (4.20)$$

Vidljivo je da se na ovaj način uzima u obzir rezonantni vrh oko mase  $Z$  bozona ( $M_Z$ ), kao i njegova konačna širina  $\Gamma_Z$ , što je ključno za realističan opis fizikalnih procesa na visokim energijama.

Konačno, korisno je napomenuti da se konzistentnost Monte Carlo integracije može provjeriti usporedbom numerički dobivenog rezultata s analitičkim izražajem za ukupni presjek. Naime, integracijom preko kuta  $\theta$  linearni član u  $\cos \theta$  nestaje zbog svoje asimetrične prirode, te preostaje:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} A_0. \quad (4.21)$$

Ovaj rezultat služi kao važan test za provjeru ispravnosti numeričkih simulacija jer omogućuje usporedbu s očekivanom teorijskom vrijednošću. [1].

## 5. Monte Carlo generator za proces $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Nakon teorijskog pregleda procesa  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  u okviru kvantne elektrodinamike i elektroslabe teorije, sljedeći korak u ovom radu bio je praktična implementacija Monte Carlo generatora događaja. Cilj ovog dijela rada bio je razviti program koji generira događaje za proces

$$e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-,$$

pri čemu se lepton  $\mu$  koristi kao reprezentativan primjer konačnog stanja, s obzirom na to da su mase leptona zanemarene. Ovaj pristup jednako vrijedi i za druge leptonske parove, osim u slučaju procesa  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ , gdje se pojavljuje dodatni  $t$ -kanalni dijagram koji nije obuhvaćen ovim izvodom.

Za razliku od složenijih slučajeva, integracija za izračun ukupnog presjeka ovdje je relativno jednostavna, jer se pojavljuju samo kosinusni članovi, koji se mogu integrirati analitički. Također, budući da je energija u centru mase  $\hat{s}$  unaprijed zadana, nije bilo potrebe za Jacobijevim transformacijama radi poboljšanja učinkovitosti integracije, kao što je slučaj u nekim drugim procesima.

Unatoč jednostavnosti, ovaj zadatak daje vrijedan uvid u osnovne gradivne blokove Monte Carlo generatora događaja. Algoritam korišten u izradi generatora temelji se na postupku prikazanom u poglavlju 3, a implementacija je provedena u programskom jeziku Python. Osim samog generiranja događaja, program uključuje i osnovne alate za vizualizaciju, pri čemu se pomoću biblioteke Matplotlib dobivaju raspodjele kinematičkih varijabli. Kao osnovna varijabla analize odabrana je  $\cos \theta$ , gdje  $\theta$  predstavlja kut između ulaznog elektrona i izlaznog muona. Ovaj kut je mjerljiv u eksperimentima jer su poznati smjerovi i dolaznih i odlaznih leptona.

Dodatne provjere ispravnosti generatora uključuju usporedbu numerički dobivenog ukupnog presjeka s analitičkim rješenjem. Primjerice, za  $E_{\text{cm}} = 90$  GeV dobivena je vrijednost

$$\sigma = (1060.82 \pm 0.25) \text{ pb},$$

što je u vrlo dobrom suglasju s analitičkim rezultatom

$$\sigma_{\text{analitički}} = 1060.93 \text{ pb}.$$

Osim ukupnog presjeka, moguće je istražiti i dodatne raspodjele, kao što su distribucije energije čestica, pseudorapidnost (koja u masless aproksimaciji odgovara rapidnosti)

$$\eta = -\ln \tan\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

kao i pojavu *forward-backward* asimetrije, definirane izrazom

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B},$$

gdje  $\sigma_F$  i  $\sigma_B$  označavaju presjeke u prednjem ( $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$ ) i stražnjem ( $\theta \in (\pi/2, \pi) \cup (-\pi, -\pi/2)$ ) poluprostoru [1].

## 5.1 Implementacija Monte Carlo generatora

### 5.1.1 Definicija diferencijalnog presjeka i parametara

U implementaciji Monte Carlo generatora prvo su definirani osnovni fizikalni parametri potrebni za izračun diferencijalnog presjeka procesa  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ : masa i širina  $Z$ -bozona, elektromagnetska konstanta  $\alpha_{\text{QED}}$ , Fermi konstanta  $G_F$ , kvadrat sinusa Weinbergovog kuta  $\sin^2 \theta_W$ , te faktor za pretvorbu iz  $\text{GeV}^{-2}$  u pikobarne (pb). Energija sudara u centru mase označena je kao  $E_{\text{cm}}$ , dok je  $\hat{s} = E_{\text{cm}}^2$  Mandelstamova varijabla.

Diferencijalni presjek u elektroslabom slučaju izražava se kao što je prikazano u formulama (4.15)–(4.20) pri čemu koeficijenti  $A_0$  i  $A_1$  uključuju vektorska i aksijalna sprezanja leptona i fermiona te funkcije  $\chi_1$  i  $\chi_2$  koje opisuju rezonantni doprinos  $Z$ -bozona. U kodu su vrijednosti spreganja fermiona  $Q_f, V_f, A_f$  uzete direktno iz Tablice 1, dok su spreganja leptona ( $\mu$ ) također preuzeta iz tablice. Na primjer, za  $\mu^-$  imamo  $Q = -1$ ,  $V_\mu = -1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $A_\mu = -1/2$ . Uvrštavanjem ovih numeričkih vrijednosti u gornje formule dobivaju se eksplicitni izrazi koji se koriste u funkciji `diff_cross_section` u kodu.

```

1 import math
2 import random
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # Parametri uzeti iz Tablice 2 dokumenta
7 m_z = 91.188                # masa Z bozona u GeV
8 width_z = 2.4414            # sirina Z bozona u GeV
9 alpha_qed = 1/132.507       # elektromagnetska konstanta
10 fermi = 1.16639e-5          # Fermi konstanta
11 sin2_theta_w = 0.222246     # kvadrat sinusa Weinbergovog kuta
12 pb_conv = 3.894e8           # GeV^-2 u pb
13
14 energy_cm = 90
15 s_hat = energy_cm**2
16
17 def diff_cross_section(cos_theta):
18     # Vektorsko i aksijalno sprezanje leptona
19     vector_coupling = -0.5 + 2*sin2_theta_w
20     axial_coupling = -0.5
21
22     # Funkcije chi1 i chi2 za rezonantni doprinos Z bozona
23     k_factor = math.sqrt(2)*fermi*m_z**2/(4*math.pi*alpha_qed)
24     chi_1 = k_factor*s_hat*(s_hat-m_z**2)/((s_hat-m_z**2)**2 +
25         (width_z**2)*m_z**2)
26     chi_2 = k_factor**2*s_hat**2/((s_hat-m_z**2)**2 + (width_z
27         **2)*m_z**2)
28
29     # Koeficijenti A0 i A1
30     A_0 = 1 + 2*vector_coupling**2*chi_1 + (axial_coupling**2
31         + vector_coupling**2)**2 * chi_2
32     A_1 = 4*axial_coupling**2*chi_1 + 8*axial_coupling**2*
33         vector_coupling**2*chi_2
34
35     const = 2*math.pi*alpha_qed**2/(4*s_hat)
36
37     return const * (A_0*(1+cos_theta**2) + A_1*cos_theta)

```

**Kôd 1.1** Definicija parametara i funkcije `diff_cross_section` koja računa diferencijalni presjek kao funkciju kuta  $\theta$ .



---

### 5.1.2 Monte Carlo integracija ukupnog presjeka

Za izračun ukupnog presjeka korištena je Monte Carlo metoda integracije. Generiran je veliki broj slučajnih vrijednosti  $\cos \theta$  u intervalu  $[-1, 1]$ , a diferencijalni presjek (definiran u funkciji `diff_cross_section`) korišten je kao težinska funkcija. Ukupni presjek dobiva se kao prosječna vrijednost težina, dok se statistička pogreška procjenjuje iz varijance.

```
1 # MC integracija - inicijalizacija
2 num_points = 1000000
3 cos_theta_range = 2.0 # [-1,1]
4 random.seed(42)
5
6 total_weight = 0.0
7 total_weight_sq = 0.0
8 max_weight = 0.0
9 max_cos_theta = -2.0
10
11 print("integracija")
```

**Kôd 1.2** – Inicijalizacija varijabli potrebnih za integraciju

U ovom dijelu koda inicijaliziraju se sve potrebne varijable: broj točaka za Monte Carlo integraciju, interval za  $\cos \theta$ , akumulatori za težine i maksimalnu težinu, te se postavlja generator slučajnih brojeva. Ovaj korak osigurava da su svi parametri spremni za izvođenje glavnog integracijskog dijela. U drugom dijelu koda izvršava se sama Monte Carlo integracija:

- Generiraju se nasumične vrijednosti  $\cos \theta$  i izračunava težina pomoću funkcije `diff_cross_section`.
- Težine se akumuliraju kako bi se dobio prosječni presjek i varijanca, a istovremeno se prati maksimalna težina
- Na kraju se računa ukupni presjek s pripadajućom statističkom pogreškom i ispisuje rezultat.
- Izračunava se i analitički presjek prema formuli (4.21) radi provjere numeričke metode.

```

1 # Glavna petlja Monte Carlo integracije
2 for _ in range(num_points):
3     cos_th = -1+random.random()*cos_theta_range
4     weight = diff_cross_section(cos_th)*cos_theta_range
5     total_weight += weight
6     total_weight_sq += weight**2
7
8     if weight > max_weight:
9         max_weight = weight
10        max_cos_theta = cos_th
11
12 cross_section_avg = total_weight/num_points
13 variance = total_weight_sq/num_points-cross_section_avg**2
14 error_mc = math.sqrt(variance/num_points)
15
16 print(f"Ukupni pop presjek: {cross_section_avg*pb_conv:.2f} "
17       f"+/- {error_mc*pb_conv:.2f} pb")
18
19 # Analiticka provjera
20 vector_coupling = -0.5+2*sin2_theta_w
21 axial_coupling = -0.5
22 k_factor = math.sqrt(2)*fermi*m_z**2/(4*math.pi*alpha_qed)
23 chi_1 = k_factor*s_hat*(s_hat-m_z**2)/((s_hat-m_z**2)**2+(
24     width_z**2)*m_z**2)
25 chi_2 = k_factor**2*s_hat**2/((s_hat-m_z**2)**2+(width_z**2)*
26     m_z**2)
27 A_0 = 1+2*vector_coupling**2*chi_1+(axial_coupling**2+
28     vector_coupling**2)**2*chi_2
29
30 sigma_analytical = (4*math.pi*alpha_qed**2/(3*s_hat))*A_0
31
32 print(f"Analiticka vrijednost presjeka: {sigma_analytical*
33     pb_conv:.2f} pb")

```

**Kôd 1.3** Monte Carlo integracija ukupnog presjeka i usporedba s analitičkim rezultatom.

### 5.1.3 Generiranje događaja i Forward-Backward asimetrija

U ovom dijelu se koristi Monte Carlo metoda Hit-or-miss za generiranje događaja  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Za svaki događaj generira se nasumična vrijednost  $\cos \theta$ , računa pripadna težina koristeći funkciju `diff_cross_section`, te se, ako događaj bude prihvaćen, sprema kut, rapiditet i četverovektor leptona.

```

1 # Inicijalizacija za generiranje događaja
2 N = 1000                # broj događaja
3 events_generated = 0
4 cos_theta_events = []   # spremaju se kutovi
5 eta_events = []        # sprema se rapiditet
6
7 forward_count = 0
8 backward_count = 0

```

#### Kôd 1.4 Inicijalizacija varijabli, liste za pohranu i brojači

Ovdje se inicijaliziraju sve potrebne varijable: ukupan broj događaja, liste za pohranu  $\cos \theta$  i rapiditeta, te brojači forward i backward događaja. Ovaj korak osigurava da su svi parametri spremni za izvođenje glavne petlje generiranja događaja.

```

1 while events_generated < N:
2     cos_theta_cand = -1 + random.random() * cos_theta_range
3     w_cand = diff_cross_section(cos_theta_cand)
4     acc_prob = w_cand / max_weight
5
6     if random.random() < acc_prob:
7         events_generated += 1
8         cos_theta_events.append(cos_theta_cand)
9
10        theta_angle = math.acos(cos_theta_cand)
11        eta = -math.log(math.tan(theta_angle / 2))
12        eta_events.append(eta)
13
14        # Brojaci forward i backward događaja
15        if cos_theta_cand > 0:
16            forward_count += 1
17        else:
18            backward_count += 1

```

#### Kôd 1.5 Glavna petlja Hit-or-miss Monte Carlo generiranja

Za prihvaćene događaje generiraju se azimutni kutovi  $\phi$ , računa se  $\sin \theta$ , energija i moment leptona, te se definira četverovektor  $\mu^-$  i  $\mu^+$ . Ovim se reproduciraju fizičke karakteristike svakog događaja.

```

1      phi_angle = random.uniform(0, 2*math.pi)
2      sin_theta = math.sqrt(1 - cos_theta_cand**2)
3
4      E_mu = energy_cm / 2
5      p_mu = E_mu
6
7      mu_minus_4vec = [E_mu,
8                       p_mu * sin_theta * math.cos(phi_angle),
9                       p_mu * sin_theta * math.sin(phi_angle),
10                      p_mu * cos_theta_cand]
11
12     mu_plus_4vec = [E_mu,
13                    -mu_minus_4vec[1],
14                    -mu_minus_4vec[2],
15                    -mu_minus_4vec[3]]
16
17     print(f"Događaj_{events_generated}:")
18     print(f"Mi_{cetverovektor}_{mu_minus_4vec}")
19     print(f"Mi_{cetverovektor}_{mu_plus_4vec}\n")

```

### Kôd 1.6 Generiranje azimutnih kutova $\phi$ i račun $\sin\theta$

Na kraju se računa Forward-Backward asimetrija  $A_{FB}$ , koja daje omjer razlike broja forward i backward događaja prema ukupnom broju događaja. Ova mjera omogućuje uvid u preferenciju emisije leptona u odnosu na smjer sudara.

```

1  A_FB = (forward_count - backward_count) / (forward_count +
        backward_count)
2  print(f"Forward_događaji_{forward_count}")
3  print(f"Backward_događaji_{backward_count}")
4  print(f"Forward-Backward_asimetrija_{A_FB}_{A_FB:.4f}")

```

### Kôd 1.7 Račun Forward-Backward asimetrije

## 5.1.4 Histogrami za kutne distribucije

Nakon generiranja događaja pomoću Hit-or-Miss metode, moguće je prikazati raspodjelu proizvedenih događaja u obliku histograma. Na taj način dobivamo vizualni uvid u oblik distribucije  $\cos\theta$  i rapiditeta  $\eta$ , što olakšava usporedbu s teorijskim očekivanjima.

```

1 # Histogram za raspodjelu cos(theta)
2 plt.hist(cos_theta_events, bins=20, color='lightblue',
3         edgecolor='black')
4 plt.xlabel(r'$\cos\theta$')
5 plt.ylabel('Broj_generiranih_dog')
6 plt.title(r'Distribucija $\cos\theta$ za proces $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$')
7 plt.grid(True)
8 plt.savefig('cos_theta_distrib.png')
9 plt.show()

```

**Kôd 1.8** Prikaz histograma raspodjele  $\cos \theta$  za generirane događaje procesa  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Prvi histogram prikazuje distribuciju  $\cos \theta$  generiranih miona. Distribucija se očekuje u skladu s analitičkim oblikom diferencijalnog presjeka, što služi kao provjera točnosti algoritma generiranja događaja.

```

1 # Histogram za rapiditet (eta)
2 plt.hist(eta_events, bins=30, color='lightgreen', edgecolor='
3         black')
4 plt.xlabel(r'Rapiditet $\eta$')
5 plt.ylabel('Broj_generiranih_dogadaja')
6 plt.title(r'Distribucija $\eta$ za proces $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$')
7 plt.grid(True)
8 plt.savefig('eta_distrib.png')
9 plt.show()

```

**Kôd 1.9** Generiranje histograma distribucije  $\cos \theta$  i rapiditeta  $\eta$  za proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Drugi histogram prikazuje distribuciju rapiditeta  $\eta$  za iste događaje. Rapiditet je povezan s kutom  $\theta$  preko relacije

$$\eta = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right),$$

pa ovaj prikaz omogućuje bolju interpretaciju raspodjele u laboratorijskim uvjetima.

## **6. Numerički rezultati i analiza distribucija**

Ovdje cu napisati sve sto mi kod izbacuje i slike distribucija koje sam dobila.

## **Zaključak**

Zaključak ide ovdje.

## Literatura

- [1] <https://arxiv.org/abs/1412.4677>
- [2] <https://www.numberanalytics.com/blog/monte-carlo-simulations-particle-physics>
- [3] L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer, 1986.
- [4] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. An Introduction to quantum field theory. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972. URL: <https://www.physicsbook.ir/book/An>
- [5] F. Halzen and A. Martin. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley and Sons, 1984 URL: <https://archive.org/details/QuarksAndLeptonsAnIntroductoryCourseInModernParticlePhysicsHalzenMartin>
- [6] Webber, B., Event Generator Physics, University of Cambridge, 2007 URL: <https://www.hep.phy.cam.ac.uk/theory/webber/MCnet/MClecture3.pdf>
- [7] Höche, S., Introduction to Parton Shower Event Generators, SLAC National Accelerator Laboratory, 2015. URL: <https://arxiv.org/abs/1411.4085>
- [8] Rojo, J., Quantum Chromodynamics: Lecture Notes, 2025. URL: [https://juanrojo.com/wp-content/uploads/2025/03/particle\\_physics2\\_qcd\\_lecture5b.pdf](https://juanrojo.com/wp-content/uploads/2025/03/particle_physics2_qcd_lecture5b.pdf)
- [9] Seymour, M. H. and Marx, M., Monte Carlo Event Generators, 2013. URL: <https://arxiv.org/abs/1304.6677>
- [10] Particle Data Group, Monte Carlo Event Generators, 2021. URL: <https://pdg.lbl.gov/2021/reviews/rpp2021-rev-mc-event-gen.pdf>



## **Skraćenice**

**ATM** Asynchronous Transfer Mode

**ISDN** Integrated Services Digital Network

## **Privitak**

Ovdje opisati instalaciju ili dodatne upute.