ВЫРАЖЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП КОКСТЕРА ЧЕРЕЗ YJM-ЭЛЕМЕНТЫ

Разработал: Стерлягов А.А., магистрант ВятГУ, г. Киров

Руководитель: Пушкарёв И.А., к.ф.-м.н., доцент ВятГУ, г. Киров

Постановка задачи

- Разработать модуль для проведения вычислений в групповых алгебрах.
- Разработать модуль для вычисления образа конкретного симметрического многочлена в групповой алгебре.
- Разработать модуль для реализации построения по конкретному стандартному элементу центра Z_n его прообраза.
- При помощи разработанного ПО эмпирически изучить свойства гомоморфизма из алгебры симметрических многочленов в центр групповой алгебры.

Основные определения

Пусть σ – такой элемент группы G_m, что никакой элемент, сопряжённый с ним в группе G_m не содержится ни в какой группе с меньшим номером. Символом $\Xi_n(\sigma)$ (при $n \geq m$) обозначим сумму всех элементов в групповой алгебре группы G_n, которые сопряжёны с σ и лежат в $G_n \backslash G_{n-1}$. Эти суммы будем называть YJM-элементами (Юнг-Юцис-Мёрфи).

Основные определения

- В основном примере групповых алгебр симметрических групп $s_i = (i, i+1)$ – кокстеровские образующие симметрической группы, сопряжены транспозиции $\sigma = (1,2)$. В описанной ситуации $\Xi_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1}(i, n)$ классические элементы Юнга-Юциса-Мёрфи.
- При $n = 5$ $\Xi_5(\sigma) = (1,5) + (2,5) + (3,5) + (4,5)$.

Перечисление неприводимых представлений

Следствия из теоремы Фробениуса-Шура:

1) Базис центра групповой алгебры образуют суммы классов сопряженных элементов.

2) Количество неизоморфных неприводимых представлений группы равно количеству классов сопряженных элементов.

В симметрической группе перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда у них одинаковая циклическая структура.

Симметрические многочлены от YJM-элементов

- Рассмотрим последовательность коммутативных алгебр $Q_n(y_1, \dots, y_n)$ симметрических многочленов с целыми коэффициентами от формальных переменных $y_1, \dots, y_n$. Подстановка в переменные y_k элементов $\Xi_k(\sigma)$ индуцирует гомоморфизм алгебры Q_n в центр Z_n групповой алгебры $C[S_n]$ n-ой симметрической группы S_n.
- <u>Теорема.</u> Элементы центра групповой алгебры являются симметрическими многочленами от YJM-элементов.

Симметрические многочлены от YJM-элементов

$$\sum_{i=2}^{n} \Xi_i(\sigma) = S((2,1))$$

$$\sum_{i=2}^{n} \Xi_i^2(\sigma) = S\big((3,2,1)\big) + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \times 1$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \Xi_i(\sigma)\Big(\sum_{j=i+1}^{n} \Xi_j(\sigma)\Big) = S\big((3,2,1)\big) + S((2,1)(4,3))$$

Описание работы программы

- Задание исходных параметров.
- Генерация элементарных симметрических многочленов и YJM-элементов.
- Подстановка переменных.
- Генерация разбиений чисел от 2 до n.
- Перемножение многочленов.
- Группировка сопряженных слагаемых.
- Решение полученной системы.

Требуемый размер перестановок

- Если многочлен имеет суммарную степень n, необходимо выбрать размер группы так, чтобы не пропал ни один класс сопряженных элементов.
- Худшим случаем является n непересекающихся транспозиций, поэтому размер группы k должен быть равен $2n$.

Алгоритм генерации всех разбиений натурального числа (Д. Кнут)

Алгоритм генерирует все разбиения $a_1 \geq a_2 \geq \ \dots a_m \geq 1$ с $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$ и $1 \leq m \leq n$ при $n \geq 1$.

1. Установить $a_m = 1$ для $n \geq m > 1$. Затем установить $m = 1$ и $a_0 = 0$.

2. Установить $a_m = n$ и $q = m - [n = 1]$.

3. Посетить разбиение $a_1 a_2 \dots a_m$. Затем, если $a_q \neq 2$, перейти к шагу 5.

4. Установить $a_q = 1$, $q = q - 1$, $m = m + 1$ и вернуться к шагу 3. (В этот момент $a_k = 1$ для $\mathrm{q} < k \leq n$).

5. Завершить работу, если $q = 0$. В противном случае установить $x = a_q - 1, a_q = x, n = m - q + 1$ и $m = q + 1$.

6. Если $\mathrm{n} \leq q$, вернуться к шагу 2. В противном случае установить $a_m = x, m = m + 1, n = n - x$ и повторить данный шаг.

Анализ полученных результатов

k=2, n=1	*k=4, n=2*	*k=6, n=3*	*k=8, n=4*	*k=9, n=5*
1	*-1*	*1*	*1*	*-1*

1. Приведенные системы все целочисленные, невырожденные, определители у них ±1. Следовательно, матрицы являются целочисленно обратимыми.
2. Из обратимости матриц следует отсутствие ядра гомоморфизма.

Анализ полученных результатов

$$
\begin{cases}
\{x_1 = \sigma_1 \\
\begin{cases} x_2 + x_3 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 21 = \sigma_1^2 \end{cases} \\
\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 = \sigma_3 \\ 20x_1 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 = \sigma_2\sigma_1 \\ 71x_1 + 16x_4 + 9x_5 + 6x_6 = \sigma_1^3 \end{cases}
\end{cases}
$$

Количество разбиений натурального числа

- $p(n)$ – количество разбиений натурального числа n. Например $p(200) = 3972999029388$.
- Формула Харди-Рамануджана-Радемахера

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}[\psi_k{}'(x)],$$

где $\psi_k(x) = \dfrac{sh\left(\left(\frac{\pi}{k}\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{x-\frac{1}{24}}\right)\right)}{\sqrt{x-\frac{1}{24}}}$,

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h \bmod k \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{\frac{-2\pi i n h}{k}},$$

$\omega_{h,k}$ - некоторый подходящий корень $24k$-й степени из единицы.

Анализ полученных результатов

$$\begin{cases} \begin{cases} (2,1) = \sigma_1 \end{cases} \\ \begin{cases} (2,1)(4,3) = 21 + 3\sigma_2 - \sigma_1^2 \\ (3,2,1) = -21 - 2\sigma_2 + \sigma_1^2 \end{cases} \\ \begin{cases} (2,1)(4,3)(6,5) = -2\sigma_1 + 10\sigma_3 - 7\sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^3 \\ (3,2,1)(5,4) = 13\sigma_1 - 12\sigma_3 + 10\sigma_2\sigma_1 - 3\sigma_1^3 \\ (4,3,2,1) = -11\sigma_1 + 3\sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_1 + \sigma_1^3 \end{cases} \end{cases}$$

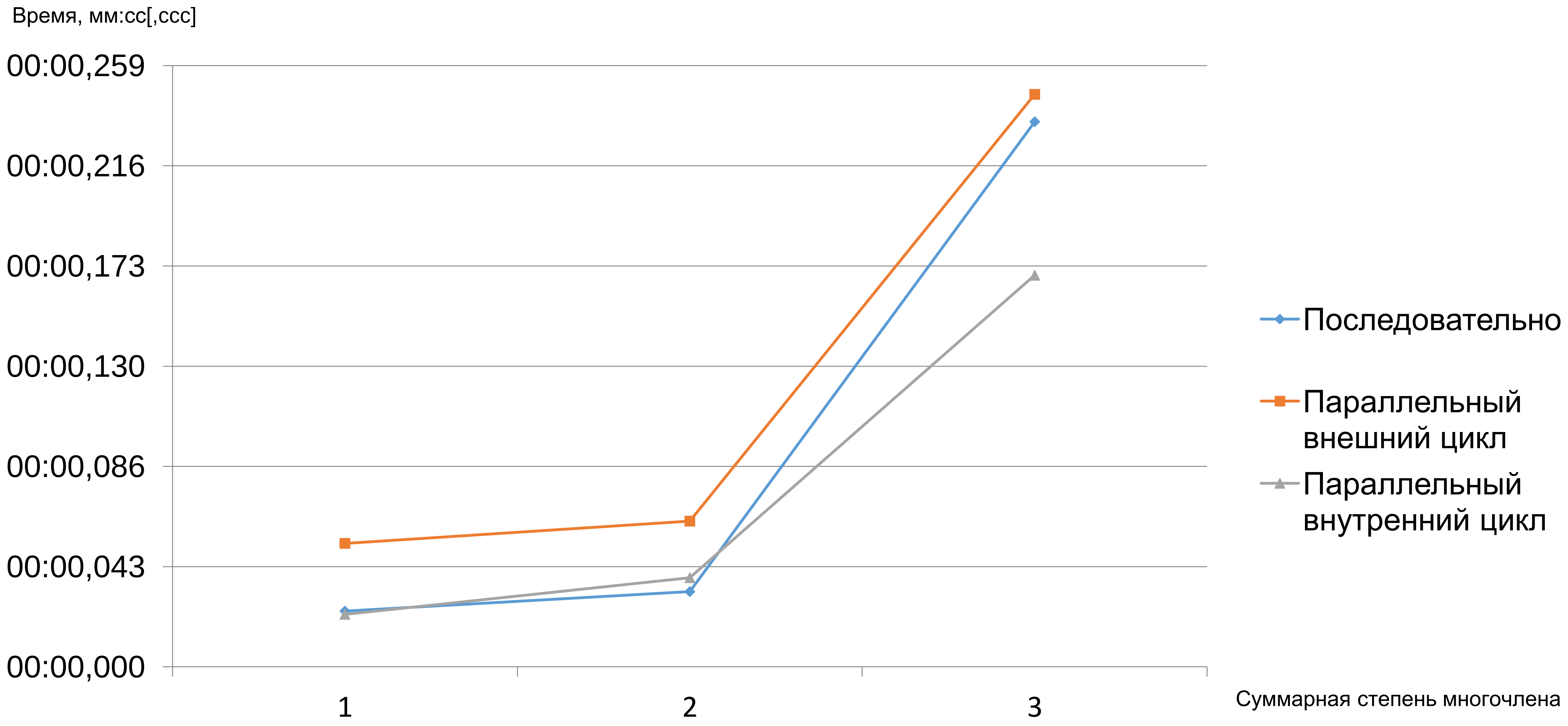
Организация параллельных вычислений

- Использование Parallel.ForEach из Microsoft .NET Framework для организации параллельного выполнения циклов.
- Два варианта распараллеливания:

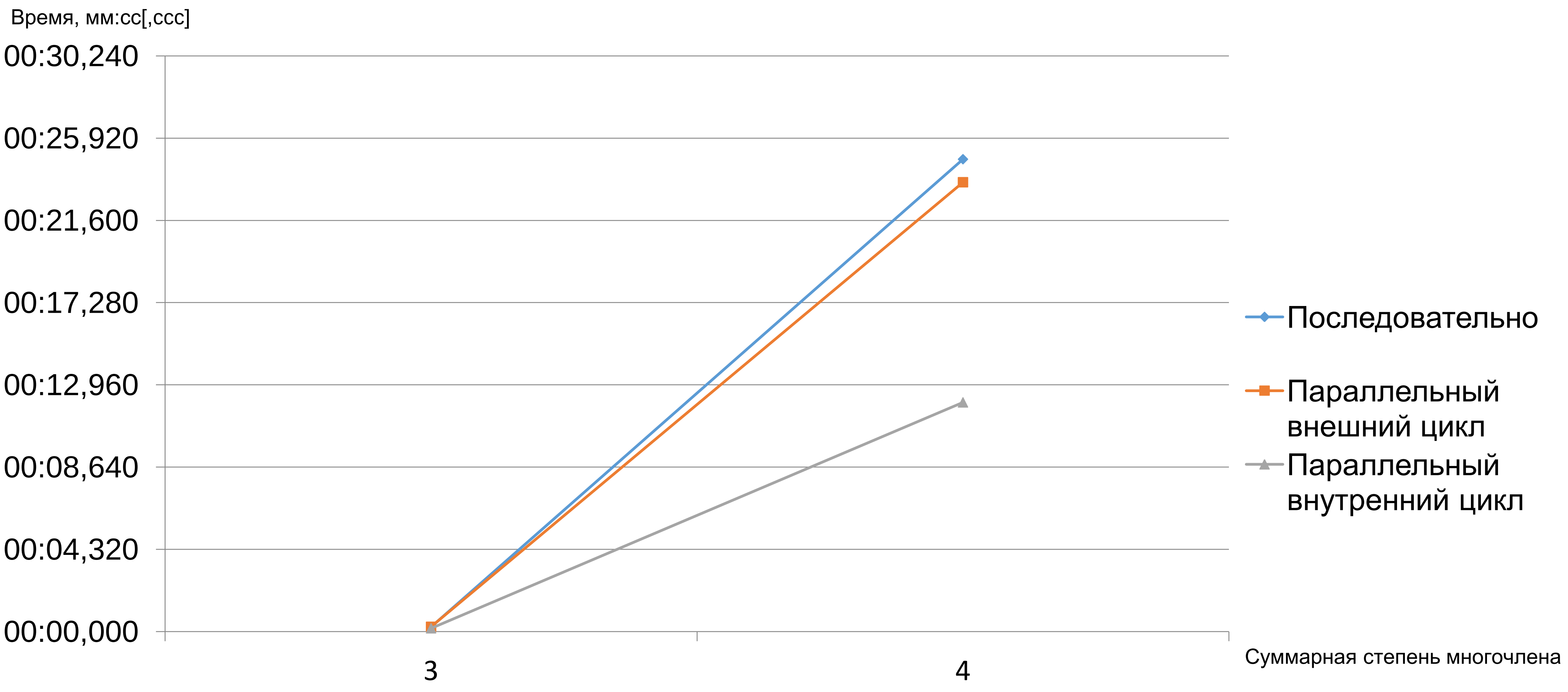
1) распараллеливание цикла по всем разбиениям;

2) распараллеливание цикла перемножения многочленов, соответствующих разбиению.

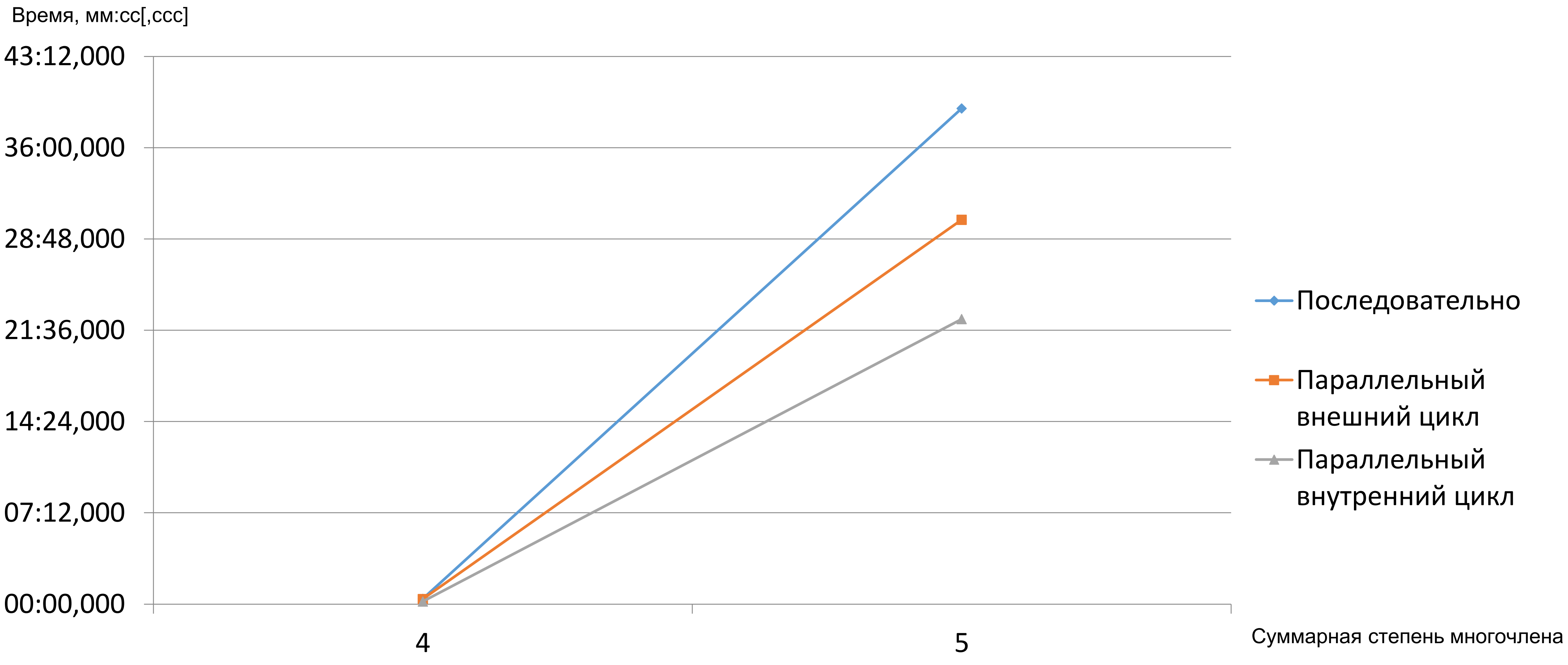
Анализ эффективности распараллеливания



Анализ эффективности распараллеливания



Анализ эффективности распараллеливания



Выводы

- Построены и решены системы уравнений, определяющие параметры и свойства вложения симметрических многочленов в центр групповой алгебры.
- Для рассмотренных групповых алгебр продемонстрировано отсутствие ядра у вложения.
- Стандартные элементы центра выражены через симметрические многочлены, тем самым эмпирически подтверждена теорема о том, что элементы центра являются симметрическими многочленами от YJM-элементов, а также вычислены явные формулы.
- Распараллеливание реализованных алгоритмов дает выигрыш порядка 50%.