

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт математики и информационных систем
Факультет компьютерных и физико-математических наук
Кафедра фундаментальной информатики и прикладной математики

Допущена к защите
Заведующий кафедрой ФИиПМ
канд. техн. наук, доцент
_____ Е. В. Котельников
«_____» _____ 2017 г.

Выпускная квалификационная работа

ВЫРАЖЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ
НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП КОКСТЕРА ЧЕРЕЗ
УМ-ЭЛЕМЕНТЫ

Выполнил

студент гр. ПМИМ-2301-01-00 _____ / Стерлягов А.А. / _____

Руководитель

к.ф.-м.н., доцент каф. ФИиПМ _____ / Пушкарев И.А. / _____

Киров 2017

Содержание

Введение.....	3
1 Обзор научной литературы, связанной с проблематикой работы	4
1.1 Основные определения.....	4
1.2 Теория представлений симметрических групп.....	5
1.3 YJM-элементы	6
1.4 Симметрические многочлены от YJM-элементов	8
2 Актуальность темы выпускной квалификационной работы. Постановка задачи.....	9
3 Разработка программного обеспечения	10
3.1 Обоснование выбора средств реализации	10
3.2 Описание функций и схемы классов.....	10
3.3 Описание алгоритма работы программы.....	23
3.4 Организация параллельных вычислений.....	26
3.5 Анализ полученных результатов	26
Заключение	30
Приложение А (справочное). Схемы алгоритмов основных функций.....	31
Приложение Б (справочное). Часть листинга программы	35
Приложение В (справочное). Системы уравнений и их решения.....	61
Приложение Г (обязательное). Графическая часть	66
Приложение Д (обязательное). Авторская справка	72
Приложение Ж (обязательное). Библиографический список.....	73

Введение

Теория представлений конечных групп — технически довольно сложный раздел алгебры, зачастую требующий для полного понимания трудоёмких вычислений.

Как ни странно, эти вычисления, как правило, производятся вручную, или вообще обсуждаются косвенным образом. Исследователи предпочитают "проявить здравый смысл" и доказывать требуемые свойства, опираясь не на прямые вычисления, а на взаимодействие свойств формул и конструкций. Это усложняет и без того непростые тексты работ, поэтому некоторые из них славятся своей нечитаемостью.

Данная работа является попыткой применить компьютер к явному вычислению одного простого, но важного семейства формул. Кроме практического интереса — дополнительно убедиться в том, что теорема, доказанная при помощи (относительно) косвенных соображений всё-таки верна (хотя бы для небольших представлений), работа также представляет теоретически-эвристический интерес: необходимо понять, почему компьютеры так мало применяются в исследованиях теории представлений и существуют ли каких-нибудь препятствия принципиального вида для их применения.

1 Обзор научной литературы, связанной с проблематикой работы

1.1 Основные определения

Рассмотрим основные определения, используемые в данной работе.

Перестановкой множества M называется биекция множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя. n называется порядком перестановки. В теории групп под перестановкой произвольного множества подразумевается биекция этого множества на себя.

Тривиальная перестановка – это перестановка, которая отображает каждый элемент множества в себя. Циклом называется перестановка, которая тривиальна на всем множестве, кроме подмножества $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$. k в таком случае называется длиной цикла. Транспозицией называется цикл длины 2.

Группой называется множество, с определенной на нем бинарной операцией, обладающей свойством ассоциативности, причем для этой операции имеется нейтральный элемент, а также для каждого элемента существует обратный [1].

Симметрический многочлен – многочлен от n переменных, который не изменяется при всех перестановках входящих в него переменных. Элементарные симметрические многочлены – это симметрические многочлены вида

$$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n} x_{j_1} \dots x_{j_k} \quad (1)$$

Алгеброй над полем K называется кольцо A с единицей, являющееся одновременно векторным пространством над полем K [2].

Рассмотрим всевозможные формальные суммы

$$\sum a_g \cdot g, \quad a_g \in K \quad (2)$$

Две суммы считаются равными тогда и только тогда, когда у них совпадают коэффициенты $a_g \in K$ для всех $g \in G$ (формальную сумму можно рассматривать как функцию на группе со значениями в поле K , причем коэффициент a_g дает значение этой функции на элементе $g \in G$). Определим операции над формальными суммами следующим образом

$$\sum a_g \cdot g + \sum b_g \cdot g = \sum (a_g + b_g) \cdot g, \quad (3)$$

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h \cdot h \right) = \sum_{g, h \in G} a_g b_h gh = \sum_{f \in G} c_f \cdot f, \quad (4)$$

$$t \left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) = \sum_{g \in G} t a_g g, \quad t \in K \quad (5)$$

Можно проверить, что относительно определенных операций множество формальных сумм образует алгебру $K[G]$, которая называется групповой алгеброй группы G над полем K [2].

1.2 Теория представлений симметрических групп

Теория представлений симметрических групп является, по-видимому, одним из старейших приложений аппарата общей теории представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Она восходит к работам А. Юнга (см. напр. [3]) и характерна большой сложностью рассматриваемых

конструкций. Например, Г. Джеймс, автор прекрасного изложения этой теории [4], пишет, что работы Юнга очень трудночитаемы. Сложность рассматриваемых конструкций была серьёзным препятствием к разработке самой теории и её обобщений на серии групп, близких к симметрическим (или иначе группам Кокстера серии A): на группы Кокстера серий BC, D и некоторые другие похожие серии групп и алгебр.

Ситуация существенно изменилась в начале 90-х годов XX века, когда А. М. Вершику удалось в соавторстве с А. Ю. Окуньковым рассмотреть групповые алгебры симметрических групп как локальные стационарные алгебры [5]. Теория оказалась достаточно проста и элегантна, поэтому последовало на сплетения симметрических групп с произвольными конечными группами [6], а также на сплетения симметрических групп с произвольными конечномерными полупростыми алгебрами [7].

1.3 YJM-элементы

Рассмотрим возрастающее семейство конечных групп $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n \subseteq \dots$. Эти группы имеют семейство образующих $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, так, что

$$G_n = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle \quad (6)$$

Пусть σ – такой элемент группы G_m , что никакой элемент, сопряжённый с ним в группе G_m не содержится ни в какой группе с меньшим номером. Символом $E_n(\sigma)$ (при $n \geq m$) обозначим сумму всех элементов в групповой алгебре группы G_n , которые сопряжены в этой группе с элементом σ . Эти суммы будем называть элементами Юнга-Юциса-Мерфи или YJM-элементами [8].

Заметим, что элемент $E_n(\sigma)$ является разностью центрального элемента $C_n(\sigma)$ групповой алгебры группы G_n и центрального элемента $C_{n-1}(\sigma_j)$ групповой алгебры предыдущей группы. Элементы $\{\sigma_j\}$ образуют полную группу представителей классов сопряжённости в группе G_{n-1} элементов этой группы, сопряжённых в группе G_n с элементом σ : $E_n(\sigma) = C_n(\sigma) - C_{n-1}(\sigma_j)$. Эти элементы, даже с разными номерами и соответствующие разным элементам, коммутируют между собой [9]. Действительно:

$$\begin{aligned} E_n(\sigma) \cdot E_m(\eta) &= (C_n(\sigma) - C_{n-1}(\sigma_j))(C_m(\eta) - C_{m-1}(\eta_k)) = \\ &= C_n(\sigma) \cdot C_m(\eta) - C_{n-1}(\sigma_j) \cdot C_m(\eta) + \\ &+ C_n(\sigma) \cdot C_m(\eta) - C_{n-1}(\sigma_j) \cdot C_{m-1}(\eta_k) \end{aligned} \quad (7)$$

В каждом произведении какой-нибудь номер не меньше другого, так что соответствующий элемент лежит в центре соответствующей групповой алгебры и коммутирует с другим сомножителем.

Следовательно, всевозможные элементы вида $E_n(\sigma)$ попарно коммутируют между собой и, тем самым, порождают последовательность коммутативных подалгебр групповых алгебр серий групп. Фактически, теория основана на том факте, что эта подалгебра оказывается максимальной коммутативной подалгеброй групповой алгебры и позволяет построить базис пространства групповой алгебры, который состоит из общих собственных векторов всей подалгебры. Этот базис называется (как и сама подалгебра) базисом (подалгеброй) Гельфанда-Цетлина [8].

В основном примере групповых алгебр симметрических групп $s_i = (i, i + 1)$ – кокстеровские образующие симметрической группы. Тогда

$$\varepsilon_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} (i, n) \quad (8)$$

классические элементы Юнга-Юциса-Мерфи [9].

В остальных случаях применения рассматриваемого метода соответствующие формулы становятся, как правило, немного сложнее.

1.4 Симметрические многочлены от YJM-элементов

Рассмотрим последовательность коммутативных алгебр $Q_n(y_1, \dots, y_n)$ симметрических многочленов с целыми коэффициентами от формальных переменных y_1, \dots, y_n . Подстановка в переменные y_k элементов (8) индуцирует гомоморфизм алгебры Q_n в центр Z_n групповой алгебры $C[S_n]$ n -ой симметрической группы S_n .

Теорема. Симметрические многочлены от YJM-элементов порождают центр и выражаются как линейные комбинации сумм классов сопряжённости, совпадающих с суммами перестановок одного циклического типа [10].

2 Актуальность темы выпускной квалификационной работы.

Постановка задачи

Тема выпускной квалификационной работы актуальна, так как рассмотрение даже простейшей усложнённой ситуации (группы серии ВС) на этом этапе приводит уже к рассмотрению многочленов от двух семейств переменных, симметрических отдельно по семействам – то есть к многократному усложнению формальной стороны и конкретных вычислений. Это делает «ручные» вычисления малоэффективными, а использование компьютера ещё более необходимым.

Для изучения симметрических многочленов от YJM -элементов необходимо разработать программное обеспечение, которое будет включать в себя следующие функции:

- проведение вычислений в групповой алгебре;
- вычисление образа конкретного симметрического многочлена под действием рассматриваемого гомоморфизма;
- проведение «обратной процедуры» построения по конкретному стандартному элементу центра Z_n одного из многочленов прообраза.

Также необходимо детально изучить гомоморфизм из множества симметрических многочленов в центр групповой алгебры с выяснением следующих фактов: какой именно симметрический многочлен является прообразом некоторого стандартного элемента центра, есть ли у этого гомоморфизма ядро и как оно устроено и т.д.

3 Разработка программного обеспечения

3.1 Обоснование выбора средств реализации

Для реализации приложения был выбран язык C#. Такой выбор языка обусловлен несколькими причинами:

- данный язык является объектно-ориентированным, что позволяет удобнее работать с данными и организовывать их в структуры [11];
- наличие специального языка запросов LINQ, который значительно упрощает работу с большими объемами данных [12];
- встроенные реализации списков, словарей объектов, поддерживающие поиск, выполнение сортировки, выборку данных и другие операции [13] [14];
- кроссплатформенность языка позволяет разработку и использование программы независимо от используемого окружения – операционной системы, IDE, компилятора [15];
- присутствие широкого спектра встроенных средств разработки параллельных программ, таких как параллельные циклы (Parallel.For и Parallel.ForEach), класс Task, представляющий асинхронную операцию, класс Thread, представляющий реализацию потока, средства синхронизации, например классы Mutex и Semaphore [16].

3.2 Описание функций и схемы классов

Схемы алгоритмов основных реализованных функций приведены в приложении А, а исходные коды – в приложении Б.

Для выполнения поставленной задачи было разработано несколько классов: основные, реализующие функции по вычислениям в групповой алгебре, а также по работе с симметрическими многочленами и УЖМ-элементами, и вспомогательные, которые необходимы для работы основных.

Сначала рассмотрим вспомогательные классы. Для вычисления факториала числа используется статический класс Factorial. Он реализует метод `public static int Get (int)`, который принимает в качестве параметра число, факториал которого необходимо вычислить. Также в классе есть поле `private static readonly List<int> factorials`, которое используется для хранения уже вычисленных факториалов. Схема класса представлена на рисунке 1.

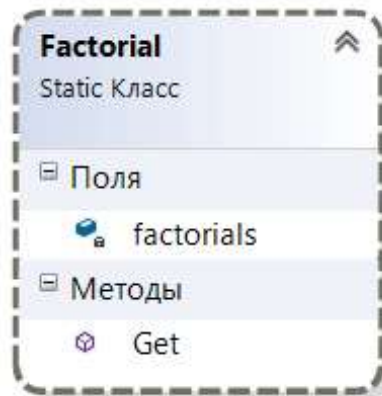


Рисунок 1 – Схема класса Factorial

Статический класс NumberSplits используется для генерации разбиений числа на слагаемые. Схема класса приведена на рисунке 2.

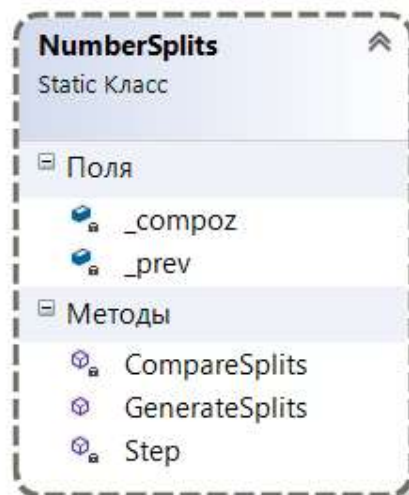


Рисунок 2 – Схема класса NumberSplits

Класс реализует следующие методы:

- `public static List<List<int>> GenerateSplits(int)` - возвращает список всех разбиений числа в лексикографическом порядке;
- `public static bool CompareSplits(List<int> l1, List<int> l2)` служит для поэлементного сравнения двух разложений дерева. Если два разложения не отличаются, то он возвращает `true`, иначе `false`.

Класс `Combination` необходим для генерации неупорядоченных выборок множества. Поля класса:

- `private List<int> setList` – хранит исходное множество;
- `private List<List<int>> combinations` – содержит все уже полученные выборки;
- `private int setLength` – хранит количество элементов множества;
- `private int combinationLength` – хранит количество элементов в выборке.

В классе есть следующие свойства:

- `public List<int> CurrentCombination { get; }` – используется для доступа к текущей выборке;
- `public List<List<int>> Combinations { get; }` – возвращает все уже сгенерированные выборки;
- `public int CurrentNumber { get; }` – возвращает номер текущей выборки по порядку;
- `public string Text { get; }` – возвращает текстовое представление выборки.

Класс реализует конструктор `public Combination(int ,int)`: в качестве первого параметра передается количество элементов множества, в качестве второго параметра – количество элементов, которое должно оказаться в выборке. Схема класса приведена на рисунке 3.

Класс реализует следующие методы:

- `public bool GetNextCombination()` генерирует следующую выборку и возвращает `true`, если это удалось сделать, а иначе возвращает `false`;
- `public void Print()` – печатает выборку.

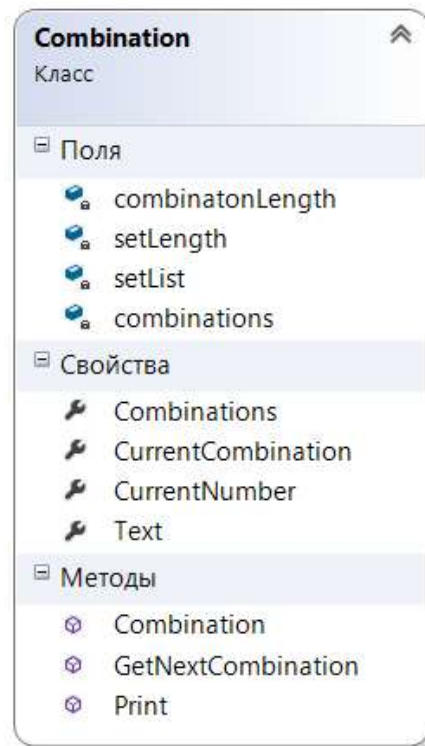


Рисунок 3 – Схема класса Combination

Далее рассмотрим основные классы. Класс Cycle реализует цикл перестановки. Класс содержит поле `private int[] cycle`, которое используется для хранения элементов цикла. Схема класса приведена на рисунке 4.

Класс реализует несколько конструкторов:

- `public Cycle ()` – конструктор по умолчанию, создает пустой цикл длины 0;
- `public Cycle (params int[])` – принимает переменное число параметров в виде массива целых чисел, инициализирует цикл полученным массивом;
- `public Cycle (Cycle)` – конструктор копирования, инициализирует цикл элементами переданного в качестве параметра цикла.

Класс содержит следующие свойства:

- `public int Length { get; }` – возвращает длину цикла;
- `public int[] Elements { get; }` – возвращает массив элементов цикла;
- `public int First { get; }` – возвращает первый элемент цикла;
- `public string Text { get; }` – возвращает текстовое представление цикла в стандартной записи – цикл начинается со своего максимального элемента, например (4, 1, 2, 3).

Методы класса:

- `private void InitCycle(int[])` - выполняет функцию инициализации цикла и принимает в качестве параметра целочисленный массив;
- `public int Apply(int)` – реализует функцию применения цикла к числу, которое передается в качестве параметра – в цикле ищется число, равное переданному параметру. Если такое число находится, то возвращается следующее число из цикла, иначе метод возвращает значение параметра;
- `public bool Contains(int)` – метод возвращает `true`, если цикл содержит число, иначе возвращает `false`;
- `public void Print()` – печатает цикл;
- `public override bool Equals(object)` – метод, сравнивающий два экземпляра класса `Cycle` и возвращающий `true`, если объекты равны;
- `public override int GetHashCode()` – возвращает хэш текущего экземпляра объекта;
- `public static bool operator ==(Cycle, Cycle)` – оператор равенства, который производит сравнение двух экземпляров и возвращает `true`, если экземпляры равны; сравнение циклов производится поэлементно;
- `public static bool operator !=(Cycle, Cycle)` – оператор неравенства, который производит сравнение двух экземпляров и возвращает `true`, если экземпляры неравны.

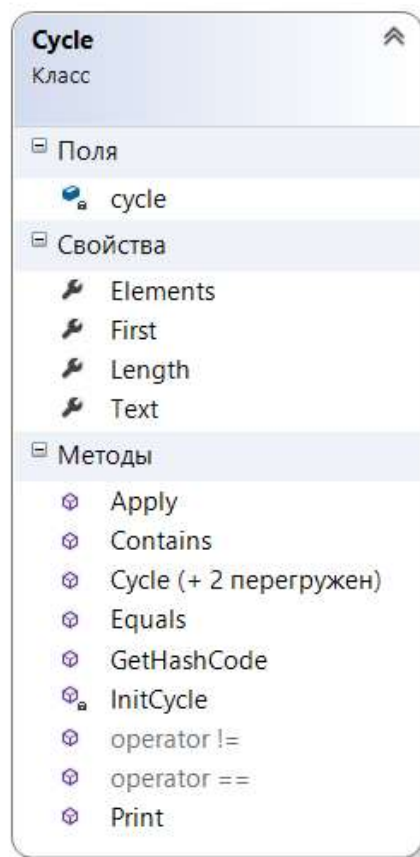


Рисунок 4 – Схема класса Cycle

Следующий класс – `Permutation`, который реализует перестановку множества. Схема класса представлена на рисунке 5.

Поля класса:

- `private static Comparison<Cycle> PermutationComparer` – компаратор, который применяется при сортировке циклов перестановки;
- `private int order` – хранит порядок перестановки;
- `private List<Cycle> cycles` – используется для хранения циклов перестановки.

В классе есть следующие свойства:

- `public List<Cycle> NotTrivialCycles { get; }` – возвращает только нетривиальные циклы перестановки, т.е. циклы, длина которых больше 1;

- `public int Order { get; }` – возвращает порядок перестановки;
- `public string Text { get; }` – возвращает текстовое представление перестановки в стандартной циклической записи – каждый цикл начинается со своего максимального элемента, циклы отсортированы по возрастанию первых элементов, например (4, 1, 2, 3)(7,5)(10,9).

Класс реализует следующие конструкторы:

- `public Permutation (int)` – принимает в качестве параметра порядок перестановки и создает пустую перестановку;
- `public Permutation (int, IEnumerable<Cycle>)` – принимает в качестве параметров порядок перестановки и коллекцию циклов и инициализирует ими перестановку;
- `public Permutation (int, params Cycle[])` – принимает в качестве параметров порядок перестановки и переменное число циклов, которыми инициализирует перестановку;
- `public Permutation(int, params int[][])` - принимает в качестве параметров порядок перестановки и переменное число целочисленных массивов, представляющих собой циклы, которыми инициализирует перестановку.

Методы класса:

- `private void InitPermuatation(IEnumerable<Cycle>)` – инициализирует перестановку коллекцией циклов;
- `private void Normalize()` – преобразует перестановку к стандартной циклической записи;
- `private void AddCycle(Cycle, bool), private void AddCycle(int[], bool)` – добавляет цикл в перестановку, второй параметр показывает, нужно ли вызывать нормализацию после добавления цикла;
- `public int Apply(int)` – применяет перестановку к числу, переданному в качестве параметра;

- `public void SetOrder(int)` – устанавливает порядок перестановки и добавляет недостающие тривиальные циклы;
- `public void Print()` – печатает перестановку;
- `public static bool Compare(Permutation, Permutation)` – сравнивает перестановки с точки зрения циклической структуры – возвращает `true`, если перестановки содержат одинаковое количество циклов и наборы длин циклов в обеих перестановках совпадают;
- `public static int GetPermutationsCount(Permutation)` – возвращает количество перестановок циклического типа перестановки, переданной в качестве параметра;
- `public override bool Equals(object)` – метод, сравнивающий два экземпляра класса `Permutation` и возвращающий `true`, если объекты равны;
- `public static Permutation operator *(Permutation, Permutation)` – оператор умножения перестановок;
- `public static bool operator ==(Permutation, Permutation)` – оператор равенства, возвращает `true`, если перестановки равны; сравнение производится посредством сравнения циклов перестановок;
- `public static bool operator !=(Permutation, Permutation)` – оператор неравенства, возвращает `true`, если перестановки неравны.

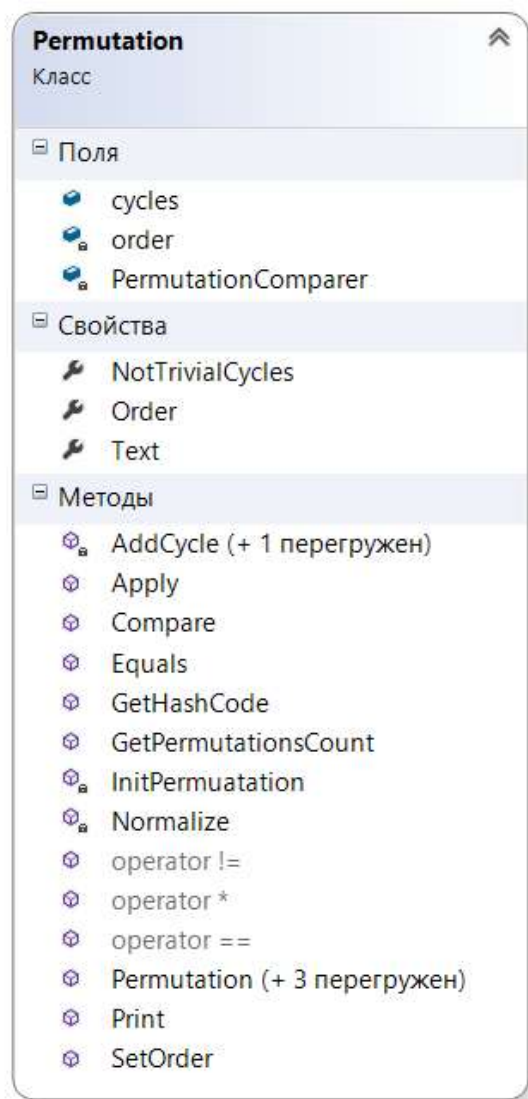


Рисунок 5 – Схема класса Permutation

Следующий класс ElementarySymmetricPolynomial, который описывает элементарный симметрический многочлен. Схема класса представлена на рисунке 6.

Поля класса:

- `private int variablesCount` – хранит количество переменных многочлена;
- `private List<List<int>> terms` – хранит наборы чисел, описывающие слагаемые многочлена: каждое слагаемое описывается номерами входящих в него переменных.

Класс содержит свойство `public string Text { get; }`, которое возвращает текстовое представление элементарного симметрического многочлена.

Класс реализует конструктор `public ElementarySymmetricPolynomial(int, int)`, который в качестве параметров принимает количество переменных и номер элементарного симметрического многочлена.

Методы класса:

- `private void GenerateElementarySymmetricPolynomial(int)` – генерирует элементарный симметрический многочлен с заданным номером.
- `public void Print()` – печатает многочлен;
- `public PermutationDictionary Substitution(List<YJMElement>)` – осуществляет подстановку аргументов, переданных в качестве параметра, в многочлен.

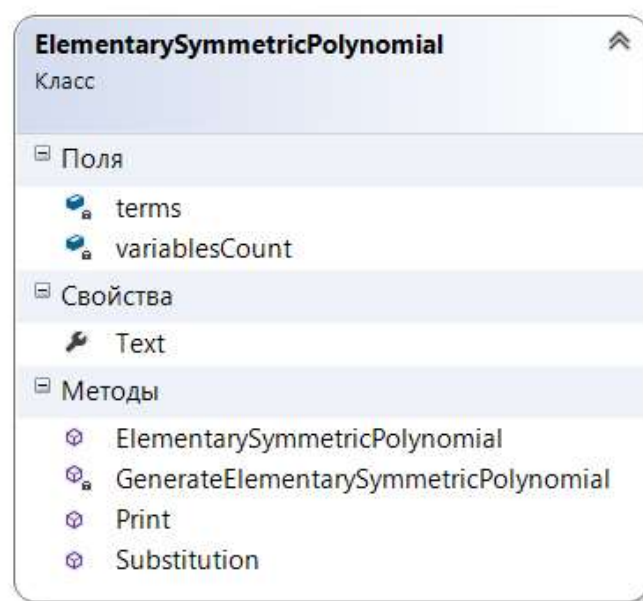


Рисунок 6 – Схема класса `ElementarySymmetricPolynomial`

Класс `YJMElement` описывает YJM-элемент. Схема класса приведена на рисунке 7.

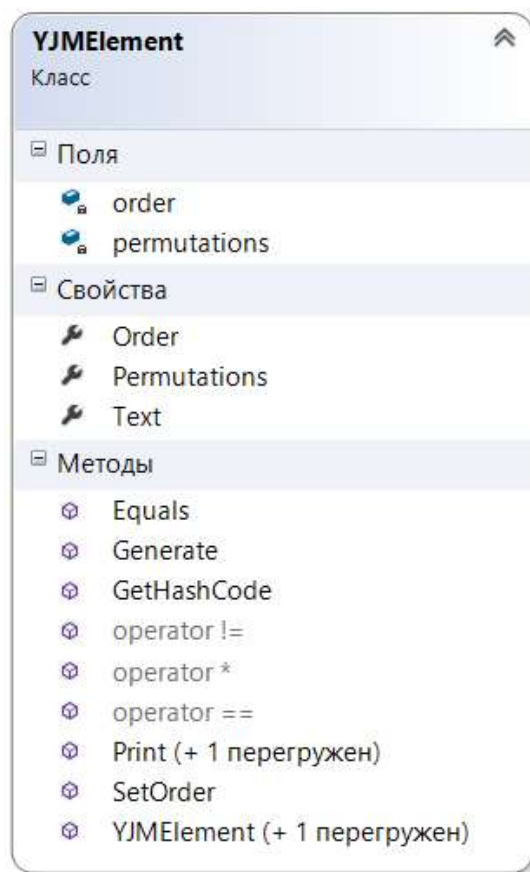


Рисунок 7 – Схема класса YJMElement

Поля класса:

- `private int order` – хранит порядок входящих в YJM-элемент перестановок;
- `private List<Permutation> permutations` – хранит список перестановок, входящих в YJM-элемент;

Свойства класса:

- `public int Order { get; }` – возвращает порядок перестановок, входящих в YJM-элемент;
- `public List<Permutation> Permutations` – возвращает список входящих в YJM-элемент перестановок;
- `public string Text { get; }` - возвращает текстовое представление YJM-элемента.

Класс реализует два конструктора:

- `public YJMElement(int)` – инициализирует стандартный классический YJM-элемент по формуле (8), в качестве параметра передается;
- `public YJMElement(List<Permutation>)` – инициализирует YJM-элемент списком перестановок.

Методы класса:

- `public void Print()` – печатает YJM-элемент;
- `public void SetOrder(int)` – устанавливает порядок входящих в YJM-элемент перестановок;
- `public static List<YJMElement> Generate(int)` – генерирует набор YJM-элементов по формуле (8);
- `public static void Print(List<YJMElement>)` – печатает набор YJM-элементов, переданный в качестве параметра;
- `public override bool Equals(object)` – метод, сравнивающий два экземпляра класса YJMElement и возвращающий true, если объекты равны;
- `public override int GetHashCode()` – возвращает хэш текущего экземпляра объекта;
- `public static YJMElement operator *(YJMElement, YJMElement)` – оператор умножения, перемножает между собой два YJM-элемента;
- `public static bool operator ==(YJMElement, YJMElement)` – оператор равенства, возвращает true, если YJM-элементы равны; сравнение производится посредством сравнения перестановок;
- `public static bool operator !=(YJMElement, YJMElement)` – оператор неравенства, возвращает true, если YJM-элементы неравны.

Следующий класс – `public class PermutationDictionary`, который наследуются от класса `Dictionary<Permutation, int>`. Схема класса представлена на рисунке 8.

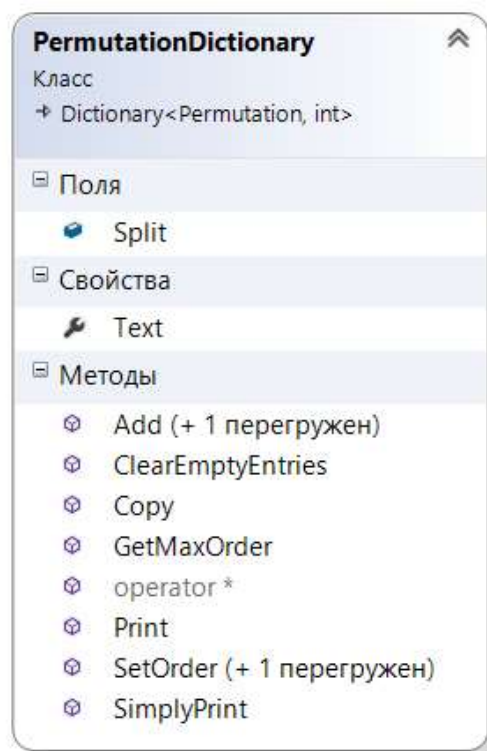


Рисунок 8 – Схема класса `PermutationDictionary`

В качестве ключа словаря используется перестановка, а в качестве значения – коэффициент количества вхождений данной перестановки. Он используется для хранения результатов подстановки YJM-элементов в элементарный симметрический многочлен, а также результатов перемножения объектов `PermutationDictionary`. Класс содержит поле `public List<int> Split`, которое хранит разбиение числа, соответствующее комбинации симметрических многочленов, использовавшихся для получения данного экземпляра класса. Свойство класса `public string Text { get; }` возвращает текстовое представление текущего объекта.

Методы класса:

- `public new void Add(Permutation, int)` – добавляет перестановку в словарь с соответствующим коэффициентом, если такой перестановки еще нет в словаре, иначе добавляет к соответствующему перестановке коэффициенту это число;

- `public void Add(IEnumerable<Permutation>)` – добавляет несколько перестановок в словарь с единицами в качестве коэффициентов;
- `public void Print(Output output = Output.Console, string path = "", string text = "")` – печатает текстовое представление словаря в консоль или в файл по переданному в качестве второго параметра пути. В качестве третьего параметра передается дополнительный текст, который нужно вывести;
- `public void SimplyPrint(Output output = Output.Console, string path = "", string addText = "")` – печатает сгруппированные по циклическим типам перестановки, входящие в словарь
- `public static PermutationDictionary Copy(PermutationDictionary)` – создает копию переданного в качестве параметра экземпляра класса;
- `public void ClearEmptyEntries()` – удаляет из словаря тривиальные перестановки;
- `public void SetOrder(int)` – устанавливает порядок перестановкам, входящим в словарь;
- `public int GetMaxOrder()` – возвращает максимальный порядок среди входящих в словарь перестановок;
- `public static PermutationDictionary operator *(PermutationDictionary, PermutationDictionary)` – перемножает два объекта класса.

3.3 Описание алгоритма работы программы

Первый этап работы программы – это задание исходных параметров, а именно количества элементов групповой алгебры k (или количества переменных элементарных симметрических многочленов), а также максимальной степени многочлена n . Исходя из этих параметров, генерируются первые n элементарных симметрических многочленов и k УЖМ-элементов. Многочлены генерируются следующим образом: для каждого из чисел от 1 до n генерируются неупорядоченные выборки m_i

соответствующего количества элементов из множества чисел $(1, 2, \dots, k)$. Эти выборки определяют слагаемые симметрического многочлена, -е слагаемое представляет собой произведение переменных с номерами из выборки m_i . YJM-элементы генерируются по формуле (8) для каждого из чисел от 2 до k включительно.

После генерации производится подстановка YJM-элементов вместо переменных с соответствующими номерами в элементарные симметрические многочлены, перемножение и приведение подобных. В результате получается сумма перестановок с некоторыми целыми коэффициентами.

Далее для каждого из чисел от 2 до n генерируются всевозможные разбиения этого числа. Алгоритм генерации всех разбиений в обратном лексикографическом порядке описан в [17] и проиллюстрирован на рисунке 9.

$$(4) \rightarrow (3,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (2,1,1) \rightarrow (1,1,1,1)$$

Рисунок 9 – Процесс разбиения числа 4

Каждому из разбиений соответствует некоторое произведение элементарных симметрических многочленов. Множителями произведения являются многочлены с номерами, соответствующими элементам разбиения, например разбиению $(2,1,1)$ числа 4 соответствует произведение $\sigma_2 \sigma_1^2$. После перемножения элементарных многочленов и приведения подобных получаем набор сумм перестановок с целыми коэффициентами, каждая из которых соответствует какому-либо произведению элементарных симметрических многочленов.

Далее слагаемые в этих суммах группируются по циклическому типу – в сумме остается только одна перестановка каждого циклического типа с коэффициентом, равным сумме коэффициентов перед всеми перестановками

этого циклического типа. После этого необходимо, в некотором смысле, «нормировать» полученные выражения. Для этого необходимо разделить коэффициенты перед каждой из перестановок на количество перестановок этого циклического типа. Это количество можно вычислить по формуле [18]:

$$\frac{n!}{1^{c_1}c_1! 2^{c_2}c_2! \dots n^{c_n}c_n!} \quad (11)$$

где n – количество элементов множества,

c_i – количество циклов длины i в перестановке.

Полученные выражения приравняем к соответствующим им произведениям элементарных симметрических многочленов. В результате получаем системы уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_1 \\ x_2 + x_3 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 10 = \sigma_1^2 \end{cases} \quad (12)$$

где x_1 – перестановка циклического типа (2,1),

x_2 – перестановка циклического типа (3,2,1),

x_3 – перестановка циклического типа (3,2)(4,1),

σ_i – i -ый элементарный симметрический многочлен.

Система (12) приведена для случая $k = 4, n = 2$. Иными словами, полученные системы позволяют выразить элементы центра групповой алгебры через элементарные симметрические многочлены и их комбинации.

Для решения полученных систем была использована система компьютерной математики Maple 2017, которая позволяет выполнять символьные вычисления. Для решения использовалась функция solve,

которая позволяет решать системы уравнений в символьном виде. Исходные коды скриптов для решения систем представлены в приложении Б.

3.4 Организация параллельных вычислений

Для организации параллельных вычислений использовалась встроенная в C# реализация параллельного цикла, а именно `Parallel.ForEach`.

`Parallel.ForEach` – статический метод класса `Parallel`, который позволяет параллельно выполнять итерации цикла `foreach` над коллекцией объектов, реализующей интерфейс `IEnumerable`, а также контролировать и управлять состоянием цикла. В качестве параметров он принимает коллекцию, по которой должен выполняться цикл, и делегат `Action`, который представляет реализацию одной итерации цикла. Для управления состоянием цикла делегату также может передаваться экземпляр класса `ParallelLoopState`, который используется, например, для преждевременной остановки цикла.

Большую часть времени работы программа тратит на перемножение элементарных симметрических многочленов, поэтому именно эту часть кода стоит распараллеливать. Здесь есть два основных цикла – первый пробегает по числам от 2 до n и генерирует их разбиения, а второй, который вложен в первый, пробегает по разбиениям числа i и вычисляет соответствующие этим разбиениям произведения многочленов. Реализуем два параллельных варианта работы алгоритма, с использованием `Parallel.ForEach` вместо первого цикла и второго и сравним их между собой, а также с последовательным алгоритмом. Полученные результаты приведены в следующем пункте.

3.5 Анализ полученных результатов

Первым из результатов работы программы является построение систем уравнений, которые позволяют определить параметры отображения

множества симметрических многочленов от YJM -элементов в центр групповой алгебры. Первая такая система приведена в формуле (12). Вторая система для случая $k = 6, n = 3$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_1 \\ x_2 + x_3 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 21 = \sigma_1^2 \\ x_4 + x_5 + x_6 = \sigma_3 \\ 20x_1 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 = \sigma_2\sigma_1 \\ 71x_1 + 16x_4 + 9x_5 + 6x_6 = \sigma_1^3 \end{cases} \quad (13)$$

где x_1 – перестановка циклического типа (2,1),

x_2 – перестановка циклического типа (3,2,1),

x_3 – перестановка циклического типа (3,2)(4,1),

x_4 – перестановка циклического типа (4,3,2,1),

x_5 – перестановка циклического типа (3,2,1)(5,4),

x_6 – перестановка циклического типа (2,1)(4,3)(6,5),

σ_i – i -ый элементарный симметрический многочлен.

Остальные построенные системы приведены в приложении В.

Определители матриц систем образуют следующую последовательность.

Таблица 1. Определители матриц систем

$k = 2, n = 1$	$k = 4, n = 2$	$k = 6, n = 3$	$k = 8, n = 4$	$k = 10, n = 5$
1	-1	1	1	-1

Так как все определители вычисленных матриц не равны 0, значит, решение системы существует и единственное. Следовательно, у рассматриваемого отображения нет ядра. Решения систем (11) и (12) можно выписать в следующем виде:

$$\begin{cases} (2,1) = \sigma_1 \\ (2,1)(4,3) = 10 + 3\sigma_2 - \sigma_1^2 \\ (3,2,1) = -10 - 2\sigma_2 + \sigma_1^2 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} (2,1) = \sigma_1 \\ (2,1)(4,3) = 21 + 3\sigma_2 - \sigma_1^2 \\ (2,1)(4,3)(6,5) = -2\sigma_1 + 10\sigma_3 - 7\sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^3 \\ (3,2,1)(5,4) = 13\sigma_1 - 12\sigma_3 + 10\sigma_2\sigma_1 - 3\sigma_1^3 \\ (4,3,2,1) = -11\sigma_1 + 3\sigma_3 - 3\sigma_2\sigma_1 + \sigma_1^3 \\ (3,2,1) = -21 - 2\sigma_2 + \sigma_1^2 \end{cases} \quad (15)$$

Решения остальных систем также приведены в приложении В.

Для сравнения быстродействия последовательной и параллельных версий алгоритма использовался ноутбук со следующими характеристиками:

- процессор Intel Core i7-2670QM CPU @ 2.20GHz 4 ядра 8 потоков;
- оперативная память 3,7 Гб 1333Mhz;
- среда исполнения Microsoft .NET 4.0.30319.42000;
- среда разработки Xamarin Studio Community v.6.3 (build 863).

На каждом из тестов программа запускалась по 5 раз, в качестве результата было взято среднее время по этим запускам, чтобы минимизировать влияние внешних факторов.

Таблица 2 – сравнение быстродействия

Максимальная степень многочлена	Последовательный	Параллельный внешний цикл	Параллельный внутренний цикл
1	00:00,024	00:00,053	00:00,023
2	00:00,032	00:00,063	00:00,038
3	00:00,235	00:00,247	00:00,169

Продолжение таблицы 2

4	00:24,813	00:23,604	00:12,038
---	-----------	-----------	-----------

Из таблицы сравнения быстродействия видно, что распараллеливать внешний цикл не имеет смысла. При малых размерах групповой алгебры этот вариант работает даже медленнее, чем последовательный (что можно объяснить достаточно большими накладными расходами на распараллеливание), а при больших показывает сравнимое быстродействие.

Распараллеливание внутреннего цикла на больших степенях многочленов дает практически двукратный прирост в быстродействии при очень малых затратах на реализацию параллельного алгоритма. Даже учитывая плохую приспособленность языка к разработке высокопроизводительных программ для решения математических проблем ввиду его объектно-ориентированной природы, это говорит о высокой эффективности встроенных в C# методов распараллеливания кода.

Заключение

В результате выполнения выпускной квалификационной работы были получены следующие результаты:

- разработана программа для изучения симметрических многочленов от YJM -элементов;
- построены и решены системы уравнений, определяющие параметры отображения из множества симметрических многочленов в центр групповой алгебры;
- показано, что у этого отображения нет ядра;
- стандартные элементы центра выражены через симметрические многочлены, тем самым подтверждена справедливость теоремы о том, что элементы центра являются симметрическими многочленами от YJM -элементов.

Работа показала, что единственным осложнением для изучения является не очень хорошая приспособленность языков программирования для решения алгебраических задач такой сложности. Просто описываемые и интуитивно хорошо понятные алгебраические структуры, как ни странно, оказываются на практике слишком гибкими и изменчивыми для описания при помощи стандартных алгоритмических структур данных.

Дальнейшим развитием темы данной работы может послужить совершенствование алгоритмов работы, так как с увеличением количества элементов в групповой алгебре, количество слагаемых в симметрических многочленах растет очень быстро, а значит, увеличивается и количество необходимой памяти, и время, необходимое на выполнение вычислений.

Приложение А
(справочное).
Схемы алгоритмов основных функций

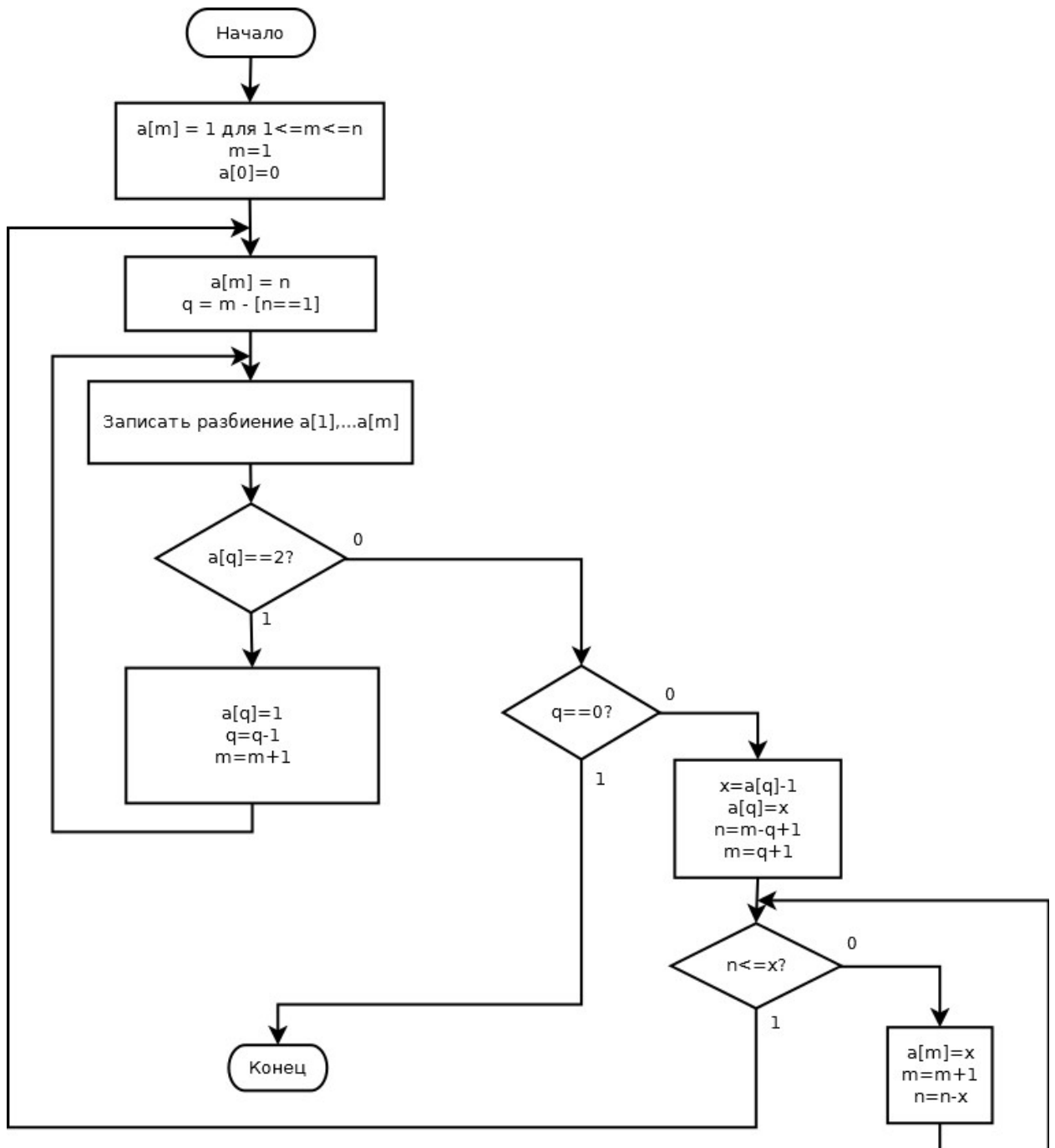


Рисунок А.1 – Схема алгоритма функции NumberSplits.GenerateSplits

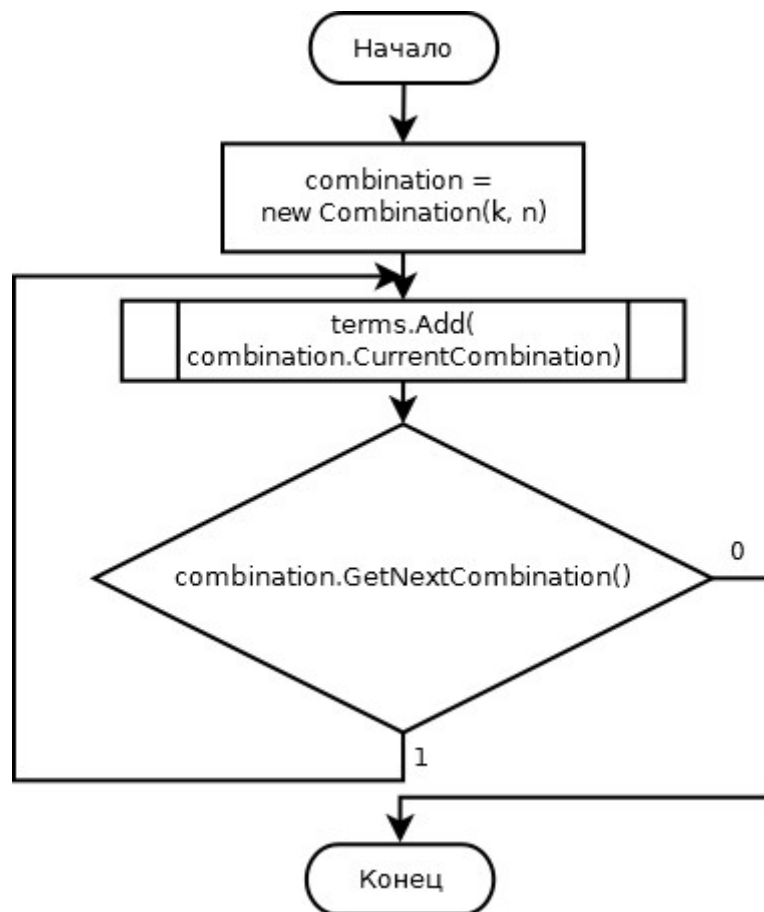


Рисунок А.2 – Схема алгоритма функции `GenerateElementarySymmetricPolynomial`

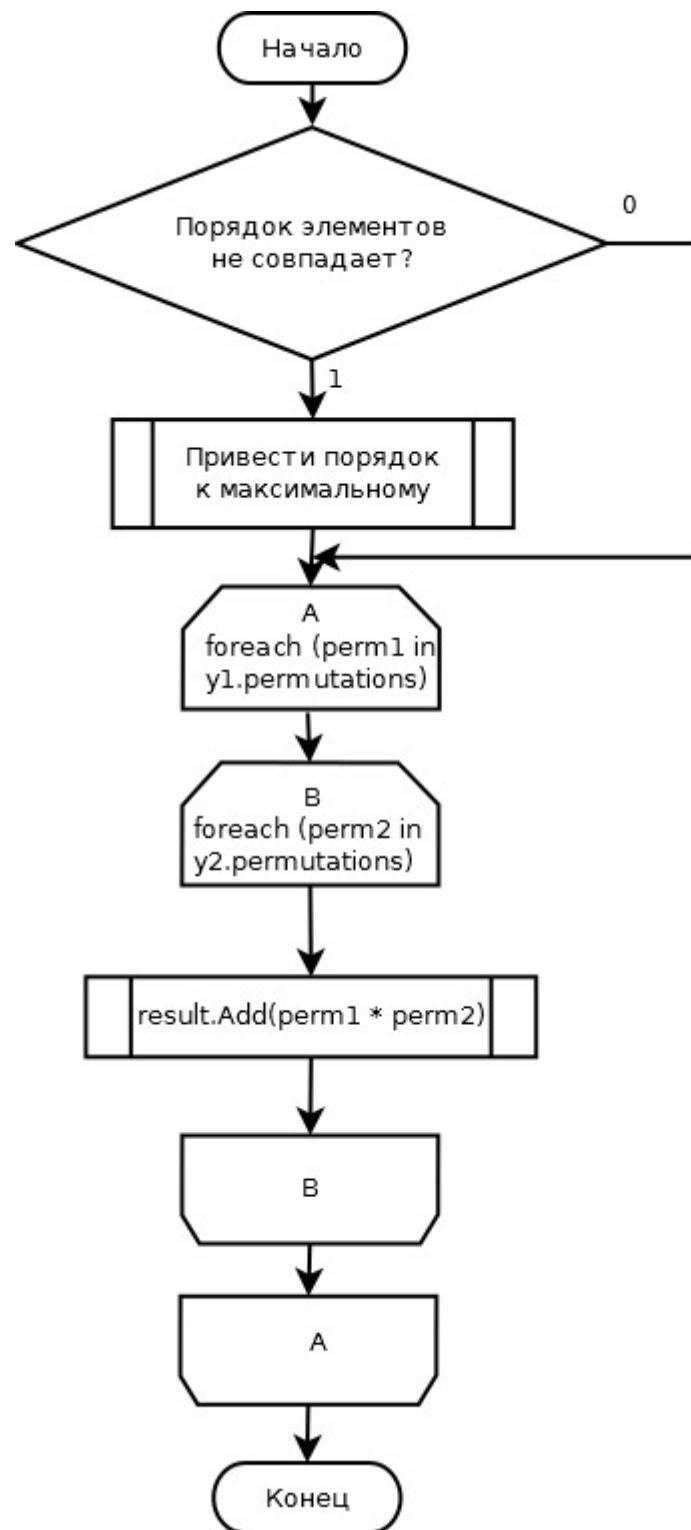


Рисунок А.3 – Схема алгоритма оператора YJMElement operator *

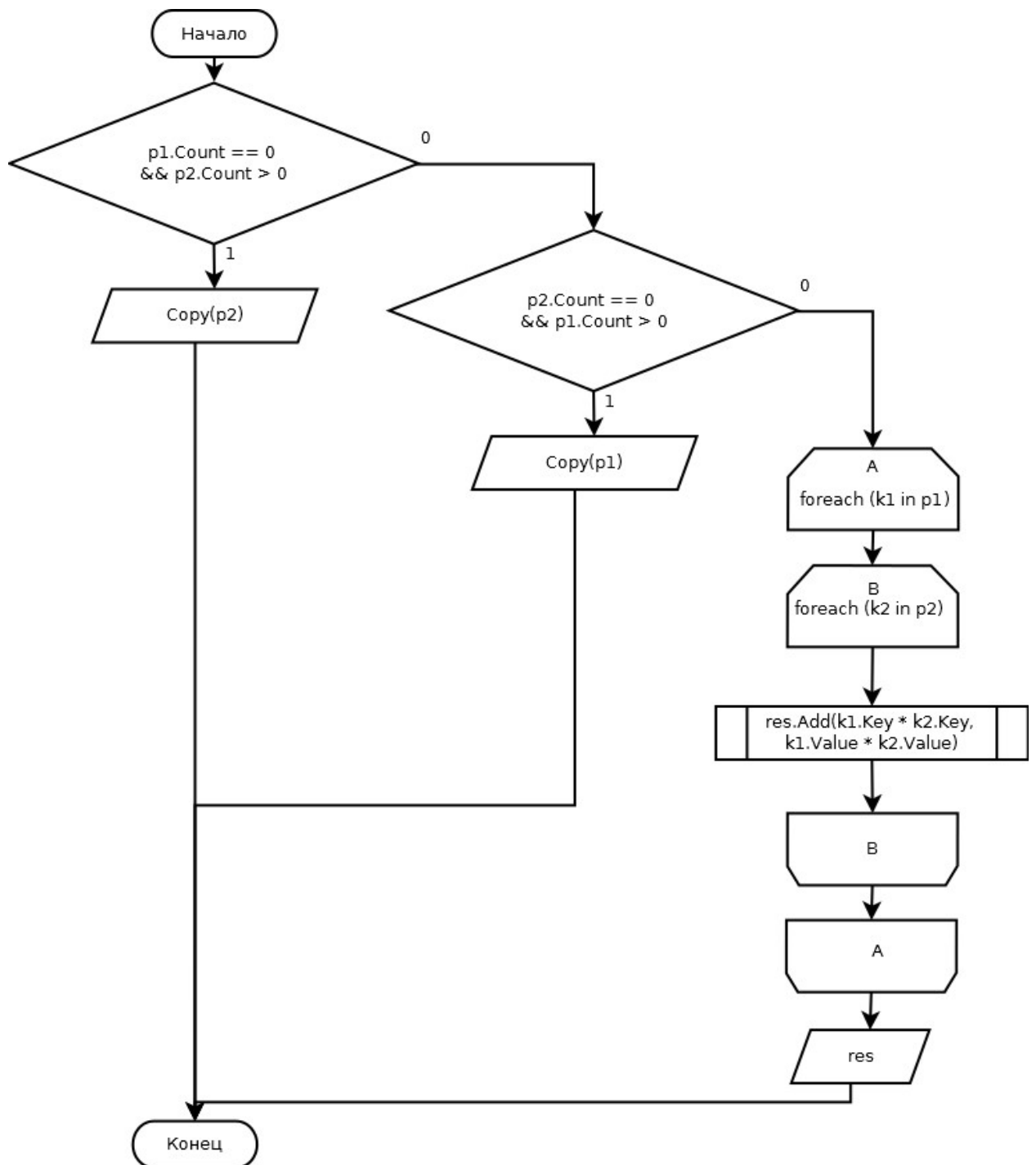


Рисунок А.4 – Схема алгоритма оператора PermutationDictionary operator *

Приложение Б

(справочное).

Часть листинга программы

```
/// <summary>
/// Класс для вычисления факториалов
/// </summary>
public static class Factorial
{
    /// <summary>
    /// Вычисленные факториалы
    /// </summary>
    private static readonly List<int> factorials = new List<int> { 1, 1 };
    /// <summary>
    /// Вычислить факториал числа
    /// </summary>
    /// <param name="num">Число</param>
    public static int Get(int num)
    {
        if (num >= factorials.Count)
        {
            for (int i = factorials.Count; i <= num; i++)
            {
                factorials.Add(factorials[i - 1] * i);
            }
        }
        return factorials[num];
    }
}

public static class NumberSplits
{
    /// <summary>
    /// генерирует разбиения числа
    /// </summary>
    /// <param name="n">Число</param>
    public static List<List<int>> GenerateSplits(int n)
    {
        var ls = new List<List<int>>();
        int[] a = new int[n + 1];
        int x = 0;
        int q = 0;
        //step 1

        for (int i = n; i >= 1; i--)
        {
            a[i] = 1;
        }
        int m = 1;
        a[0] = 0;
        var flag2 = true;
        //step 2

        do
        {
            if (flag2)
            {
                a[m] = n;
                q = m - (n == 1 ? 1 : 0);
                //step 3
            }
            else
            {
                flag2 = true;
            }
            ls.Add(a.ToList().GetRange(1, m));
            if (a[q] == 2)
            {
                //step 4
                a[q] = 1;
                q = q - 1;
                m = m + 1;
            }
        }
    }
}
```

```

        flag2 = false;
        continue;
    }
    else
    {
        //step 5
        if (q == 0)
        {
            return ls;
        }
        else
        {
            x = a[q] - 1;
            a[q] = x;
            n = m - q + 1;
            m = q + 1;
        }
    }
    //step 6
    do
    {
        if (n <= x)
        {
            break;
        }
        else
        {
            a[m] = x;
            m = m + 1;
            n = n - x;
        }
    }
    while (true);
}
while (true);
}

/// <summary>
/// шаг рекурсии, считающей композиции числа
/// </summary>
/// <param name="n">N.</param>
/// <param name="beg">Beg.</param>
private static void Step(int n, int beg)
{
    for (int i = 1; i <= n; i++)
    {
        _prev.Add(i);
        Step(n - i, beg);
    }
    if (_prev.Sum() == beg)
    {
        if (_prev.Count == 0)
        {
            _prev.Add(0);
        }
        _compoz.Add(new List<int>(_prev));
    }
    if (_prev.Count > 0)
    {
        _prev.RemoveAt(_prev.Count - 1);
    }
}

/// <summary>
/// Compares the splits2.
/// </summary>
/// <returns><c>true</c>, if splits2 was compared, <c>false</c> otherwise.</returns>
/// <param name="l1">L1.</param>
/// <param name="l2">L2.</param>
private static bool CompareSplits(List<int> l1, List<int> l2)
{
    if (l1.Count != l2.Count)
    {
        return false;
    }
}

```

```

        for (int i = 0; i < l1.Count; i++)
        {
            if (l1 [i] != l2 [i])
            {
                return false;
            }
        }
        return true;
    }
}

/// <summary>
/// Класс для получения неупорядоченных выборок множества
/// </summary>
public class Combination
{
    /// <summary>
    /// Множество
    /// </summary>
    private List<int> setList = new List<int>();
    /// <summary>
    /// Все уже полученные выборки
    /// </summary>
    private List<List<int>> combinations = new List<List<int>> ();
    /// <summary>
    /// Количество элементов множества
    /// </summary>
    private int setLength;
    /// <summary>
    /// Количество элементов выборки
    /// </summary>
    private int combinatonLength;
    /// <summary>
    /// Выборка
    /// </summary>
    public List<int> CurrentCombination
    {
        get
        {
            var res = new List<int> ();
            for (int i = 0; i < combinatonLength; i++)
            {
                res.Add (setList [i]);
            }
            return res;
        }
    }
    /// <summary>
    /// Все уже полученные выборки
    /// </summary>
    public List<List<int>> Combinations
    {
        get { return combinations; }
    }
    /// <summary>
    /// Текущий номер выборки
    /// </summary>
    public int CurrentNumber
    {
        get { return combinations.Count; }
    }
    /// <summary>
    /// Текстовое представление
    /// </summary>
    public string Text
    {
        get { return string.Join (" ", CurrentCombination); }
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="Combination"/>
    /// </summary>
    /// <param name="_setLength">Количество элементов множества</param>
    /// <param name="_combinationLength">Количество элементов выборки</param>
    public Combination(int _setLength, int _combinationLength)

```

```

{
    setLength = _setLength;
    combinatonLength = _combinationLength;
    for (int i = 0; i < setLength; i++)
    {
        setList.Add (i + 1);
    }
    combinations.Add (CurrentCombination);
}
/// <summary>
/// Вычисляет следующую выборку
/// </summary>
/// <returns><c>true</c>, если выборка получена, иначе - <c>false</c></returns>
public bool GetNextCombination ()
{
    for (int i = combinatonLength - 1; i >= 0; i--)
    {
        if (setList [i] < setLength - combinatonLength + i + 1)
        {
            setList [i]++;
            for (int j = i + 1; j < combinatonLength; j++)
            {
                setList [j] = setList [j - 1] + 1;
            }
            combinations.Add (CurrentCombination);
            return true;
        }
    }
    return false;
}
}
/// <summary>
/// Класс, описывающий цикл перестановки
/// </summary>
public class Cycle
{
    /// <summary>
    /// Сам цикл
    /// </summary>
    private int[] cycle;
    /// <summary>
    /// Длина цикла
    /// </summary>
    public int Length
    {
        get { return cycle.Length; }
    }
    /// <summary>
    /// Элементы цикла
    /// </summary>
    public int[] Elements
    {
        get { return cycle; }
    }
    /// <summary>
    /// Первый элемент цикла
    /// </summary>
    public int First
    {
        get { return cycle [0]; }
    }
    /// <summary>
    /// Текстовое представление
    /// </summary>
    public string Text
    {
        get { return "(" + string.Join (",", cycle) + ")"; }
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="Cycle"/>
    /// </summary>
    public Cycle ()
    {

```

```

        cycle = new int[0];
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="Cycle"/>
    /// </summary>
    /// <param name="newCycle">Массив элементов цикла</param>
    public Cycle (params int[] newCycle)
    {
        InitCycle (newCycle);
    }
    /// <summary>
    /// Конструктор копирования класса <see cref="Cycle"/>
    /// </summary>
    /// <param name="newCycle">Другой цикл</param>
    public Cycle (Cycle newCycle)
    {
        InitCycle (newCycle.Elements);
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует цикл массивом элементов
    /// </summary>
    /// <param name="newCycle">Массив элементов</param>
    private void InitCycle(int[] newCycle)
    {
        cycle = new int[newCycle.Length];
        var maxIndex = -1;
        var maxValue = -1;
        for (int i = 0; i < newCycle.Length; i++)
        {
            if (newCycle [i] > maxValue)
            {
                maxValue = newCycle [i];
                maxIndex = i;
            }
        }
        for (int i = maxIndex, j = 0; j < cycle.Length; i++, j++)
        {
            if (i == newCycle.Length)
            {
                i = 0;
            }
            cycle [j] = newCycle [i];
        }
    }
    /// <summary>
    /// Применяет цикл к элементу
    /// </summary>
    /// <returns>The cycle.</returns>
    /// <param name="number">Элемент</param>
    public int Apply(int number)
    {
        var res = number;
        for (int i = 0; i < cycle.Length; i++)
        {
            if (cycle [i] == number)
            {
                return cycle [(i + 1) % cycle.Length];
            }
        }
        return res;
    }
    /// <summary>
    /// Содержит ли цикл заданный элемент
    /// </summary>
    /// <param name="number">Элемент</param>
    public bool Contains(int number)
    {
        return cycle.Contains (number);
    }
    /// <summary>
    /// Определяет равен ли объект <see cref="object"/> данному объекту <see cref="Cycle"/>.
    /// </summary>
    /// <param name="obj">Объект, который нужно сравнить</param>

```

```

public override bool Equals(object obj)
{
    return obj is Cycle && this == obj as Cycle;
}
/// <summary>
/// Возвращает хэш-код объекта <see cref="Cycle"/>
/// </summary>
public override int GetHashCode()
{
    return Text.GetHashCode ();
}
/// <param name="c1">Цикл 1</param>
/// <param name="c2">Цикл 2</param>
public static bool operator ==(Cycle c1, Cycle c2)
{
    if (c1.Length == c2.Length)
    {
        for (int i = 0; i < c1.Length; i++)
        {
            if (c1.Elements [i] != c2.Elements [i])
            {
                return false;
            }
        }
    }
    else
    {
        return false;
    }
    return true;
}
/// <param name="c1">Цикл 1</param>
/// <param name="c2">Цикл 2</param>
public static bool operator !=(Cycle c1, Cycle c2)
{
    return !(c1 == c2);
}
}
/// <summary>
/// Класс, описывающий перестановку
/// </summary>
public class Permutation
{
    /// <summary>
    /// Компаратор для сортировки циклов перестановки
    /// </summary>
    private static Comparison<Cycle> PermutationComparer = new Comparison<Cycle> ((x, y) =>
    {
        if (x.First == y.First)
        {
            return 0;
        }
        else
        {
            return x.First < y.First ? -1 : 1;
        }
    });
    /// <summary>
    /// Порядок перестановки
    /// </summary>
    private int order;
    /// <summary>
    /// Циклы
    /// </summary>
    public List<Cycle> cycles;
    /// <summary>
    /// Gets the not trivial cycles.
    /// </summary>
    /// <value>The not trivial cycles.</value>
    public List<Cycle> NotTrivialCycles
    {
        get
        {

```



```

        return cycles.Where (c => c.Elements.Length > 1).ToList ();
    }
    /// <summary>
    /// Порядок перестановки
    /// </summary>
    public int Order
    {
        get { return order; }
    }
    /// <summary>
    /// Текстовое представление
    /// </summary>
    /// <value>The text.</value>
    public string Text
    {
        get
        {
            if (NotTrivialCycles.Count > 0)
            {
                return string.Join ("", NotTrivialCycles.Select (cycle =>
cycle.Text));
            }
            else
            {
                return string.Join ("", cycles.Select (cycle => cycle.Text));
            }
        }
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="Permutation"/>
    /// </summary>
    public Permutation (int o)
    {
        order = o;
        cycles = new List<Cycle> ();
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="Permutation"/>
    /// </summary>
    /// <param name="_cycles">Коллекция циклов</param>
    public Permutation (int o, IEnumerable<Cycle> _cycles)
    {
        order = o;
        InitPermuatation(_cycles);
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="Permutation"/>
    /// </summary>
    /// <param name="_cycles">Циклы</param>
    public Permutation (int o, params Cycle[] _cycles)
    {
        order = o;
        InitPermuatation(_cycles.ToList());
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="Permutation"/>
    /// </summary>
    /// <param name="cycles">Массивы элементов циклов</param>
    public Permutation(int o, params int[][] cycles)
    {
        order = o;
        var lsCycles = new List<Cycle> ();
        foreach (var cycle in cycles)
        {
            lsCycles.Add (new Cycle (cycle));
        }
        InitPermuatation(lsCycles);
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует перестановку
    /// </summary>
    /// <param name="_cycles">Коллекция циклов</param>

```

```

private void InitPermuatation(IEnumerable<Cycle> _cycles)
{
    cycles = new List<Cycle> (_cycles);
    Normalize ();
}
/// <summary>
/// Приводит перестановку к стандартному виду
/// </summary>
private void Normalize()
{
    for (int i = 1; i <= order; i++)
    {
        if (cycles.Count (c => c.Contains (i)) == 0)
        {
            cycles.Add (new Cycle (new [] { i }));
        }
    }
    cycles.Sort (PermutationComparer);
}
/// <summary>
/// Добавляет в перестановку цикл
/// </summary>
/// <param name="newCycle">Новый цикл</param>
private void AddCycle(Cycle newCycle, bool needNormalize = false)
{
    cycles.Add (newCycle);
    if (needNormalize)
    {
        Normalize ();
    }
}
/// <summary>
/// Добавляет в перестановку цикл
/// </summary>
/// <param name="newCycle">Новый цикл</param>
private void AddCycle(int[] newCycle, bool needNormalize = false)
{
    cycles.Add (new Cycle(newCycle));
    if (needNormalize)
    {
        Normalize ();
    }
}
/// <summary>
/// Применяет перестановку к заданному числу
/// </summary>
/// <param name="number">Число</param>
public int Apply(int number)
{
    var res = number;
    foreach (var cycle in cycles)
    {
        if (cycle.Contains (number))
        {
            res = cycle.Apply (number);
            break;
        }
    }
    return res;
}
/// <summary>
/// Устанавливает порядок перестановки
/// </summary>
/// <param name="newOrder">Новый порядок</param>
public void SetOrder(int newOrder)
{
    if (newOrder > order)
    {
        order = newOrder;
        for (int i = order + 1; i <= newOrder; i++)
        {
            AddCycle (new [] { i });
        }
    }
}

```

```

        Normalize ();
    }
}
/// <summary>
/// <summary>
/// "Сравнение двух перестановок" с точки зрения циклической структуры
/// </summary>
/// <param name="p1">P1.</param>
/// <param name="p2">P2.</param>
public static bool Compare(Permutation p1, Permutation p2)
{
    if (p1.NotTrivialCycles.Count != p2.NotTrivialCycles.Count)
    {
        return false;
    }
    var fLen = p1.NotTrivialCycles.Select(cycle => cycle.Length).ToList();
    var sLen = p2.NotTrivialCycles.Select(cycle => cycle.Length).ToList();
    fLen.Sort();
    sLen.Sort();
    for (int i = 0; i < fLen.Count; i++)
    {
        if (fLen[i] != sLen[i])
        {
            return false;
        }
    }
    return true;
}
/// <summary>
/// Количество перестановок определенного циклического типа
/// </summary>
/// <param name="p">Перестановка</param>
public static int GetPermutationsCount(Permutation p)
{
    var dict = new Dictionary<int, int>();
    foreach (var cycle in p.cycles)
    {
        if (!dict.ContainsKey(cycle.Length))
        {
            dict.Add(cycle.Length, 0);
        }
        dict[cycle.Length]++;
    }
    var nnn = 1;
    foreach (var kvp in dict)
    {
        nnn *= (int)Math.Pow(kvp.Key, kvp.Value) * Factorial.Get(kvp.Value);
    }
    return Factorial.Get(p.Order) / nnn;
}
/// <summary>
/// Определяет равен ли объект <see cref="object"/> данному объекту <see
cref="Permutation"/>.
/// </summary>
/// <param name="obj">Объект, который нужно сравнить</param>
public override bool Equals(object obj)
{
    return obj is Permutation && this == obj as Permutation;
}
/// <summary>
/// Возвращает хэш-код объекта <see cref="Permutation"/>
/// </summary>
public override int GetHashCode()
{
    return Text.GetHashCode ();
}
/// <param name="p1">Первая перестановка</param>
/// <param name="p2">Вторая перестановка</param>
public static Permutation operator *(Permutation p1, Permutation p2)
{
    if (p1.order != p2.order)
    {
        if (p1.order > p2.order)

```

```

        {
            p2.SetOrder(p1.order);
        }
        else if (p1.order < p2.order)
        {
            p1.SetOrder(p2.order);
        }
    }
    var result = new Permutation (p1.order);
    foreach (var cycle in p1.cycles)
    {
        var ls = new List<int>();
        foreach (var elem in cycle.Elements)
        {
            if (result.cycles.Count(c => c.Contains(elem)) == 0)
            {
                ls.Add(elem);
                var i = 0;
                while (i < ls.Count)
                {
                    var s = p2.Apply(p1.Apply(ls[i]));
                    if (!ls.Contains(s))
                    {
                        ls.Add(s);
                    }
                    i++;
                }
                if (ls.Count > 0)
                {
                    result.AddCycle(ls.ToArray());
                    ls = new List<int>();
                }
            }
        }
    }
    result.Normalize ();
    return result;
}
/// <param name="p1">Первая перестановка</param>
/// <param name="p2">Вторая перестановка</param>
public static bool operator ==(Permutation p1, Permutation p2)
{
    if (p1.order == p2.order)
    {
        for (int i = 0; i < p1.cycles.Count; i++)
        {
            if (p1.cycles [i] != p2.cycles [i])
            {
                return false;
            }
        }
    }
    else
    {
        return false;
    }
    return true;
}
/// <param name="p1">Первая перестановка</param>
/// <param name="p2">Вторая перестановка</param>
public static bool operator !=(Permutation p1, Permutation p2)
{
    return !(p1 == p2);
}
}
/// <summary>
/// Класс, описывающий элементарный симметрический многочлен
/// </summary>
public class ElementarySymmetricPolynomial
{
    /// <summary>
    /// Количество переменных
    /// </summary>

```

```

private int variablesCount;
/// <summary>
/// Переменные
/// </summary>
private List<List<int>> terms = new List<List<int>>();
/// <summary>
/// Текстовое представление
/// </summary>
/// <value>The text.</value>
public string Text
{
    get
    {
        return string.Join (" + ", terms.Select (t => string.Join ("*", t.Select
(tt => "x" + tt))));
    }
}
/// <summary>
/// Инициализирует экземпляр класса <see cref="ElementarySymmetricPolynomial"/>
/// </summary>
/// <param name="_varCount">Количество переменных</param>
/// <param name="_num">Номер элементарного симметрического многочлена</param>
public ElementarySymmetricPolynomial (int _varCount, int _num)
{
    if (_num > _varCount)
    {
        throw new ArgumentException ("Номер многочлена не может быть больше
количества переменных.");
    }
    variablesCount = _varCount;
    GenerateElementarySymmetricPolynomial (_num);
}
/// <summary>
/// Генерирует элементарный симметрический многочлен
/// </summary>
private void GenerateElementarySymmetricPolynomial(int num)
{
    var combination = new Combination (variablesCount, num);
    do
    {
        terms.Add(combination.CurrentCombination);
    }
    while (combination.GetNextCombination ());
}
/// <summary>
/// Подставить аргументы
/// </summary>
/// <param name="args">Список аргументов</param>
public PermutationDictionary Substitution(List<YJMElement> args)
{
    var res = new PermutationDictionary ();
    foreach (var term in terms)
    {
        var tmp = args[term[term.Count - 1] - 1];
        for (int i = term.Count - 2; i >= 0; i--)
        {
            tmp = tmp * args [term [i] - 1];
        }
        res.Add (tmp.Permutations);
    }
    return res;
}
}
/// <summary>
/// Класс, представляющий YJM элемент
/// </summary>
public class YJMElement
{
    /// <summary>
    /// Порядок входящих в YJM-элемент перестановок
    /// </summary>
    private int order;
    /// <summary>

```

```

    /// Список перестановок
    /// </summary>
    private List<Permutation> permutations;
    /// <summary>
    /// Порядок перестановки
    /// </summary>
    public int Order
    {
        get { return order; }
    }
    /// <summary>
    /// Список перестановок
    /// </summary>
    public List<Permutation> Permutations
    {
        get { return permutations; }
    }
    /// <summary>
    /// Текстовое представление
    /// </summary>
    /// <value>The text.</value>
    public string Text
    {
        get
        {
            return string.Format("S({0}) = {1}", order, string.Join("+",
permutations.Select(p => p.Text)));
        }
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="YJMElement"/>
    /// </summary>
    /// <param name="ord">Порядок</param>
    public YJMElement(int ord)
    {
        order = ord;
        permutations = new List<Permutation>();
        for (int i = 1; i < ord; i++)
        {
            permutations.Add(new Permutation(ord, new int[] { i, ord }));
        }
    }
    /// <summary>
    /// Инициализирует экземпляр класса <see cref="YJMElement"/>
    /// </summary>
    /// <param name="perm">Список перестановок</param>
    public YJMElement(List<Permutation> perm)
    {
        permutations = new List<Permutation>();
        permutations.AddRange(perm);
    }
    /// <summary>
    /// Устанавливает порядок YJM-элемента
    /// </summary>
    /// <param name="newOrder">Новый порядок</param>
    public void SetOrder(int newOrder)
    {
        if (newOrder > order)
        {
            order = newOrder;
            foreach (var perm in permutations)
            {
                perm.SetOrder(newOrder);
            }
        }
    }
    /// <summary>
    /// Генерирует набор последовательных YJM-элементов
    /// </summary>
    /// <param name="order">Порядок группы</param>
    public static List<YJMElement> Generate(int order)
    {
        var result = new List<YJMElement>();
    }

```

```

        for (int i = 2; i <= order; i++)
        {
            result.Add(new YJMElement(i));
        }
        return result;
    }
    /// <summary>
    /// Печатает набор YJM-элементов
    /// </summary>
    /// <param name="elements">Набор YJM-элементов</param>
    public static void Print(List<YJMElement> elements)
    {
        foreach (var elem in elements)
        {
            elem.Print();
        }
    }
    /// <summary>
    /// Определяет равен ли объект <see cref="object"/> данному объекту <see
    cref="YJMElement"/>.
    /// </summary>
    /// <param name="obj">Объект, который нужно сравнить</param>
    public override bool Equals(object obj)
    {
        return obj is YJMElement && this == obj as YJMElement;
    }
    /// <summary>
    /// Возвращает хэш-код объекта <see cref="YJMElement"/>
    /// </summary>
    public override int GetHashCode()
    {
        return permutations.GetHashCode();
    }
    /// <param name="y1">Первый YJM-элемент</param>
    /// <param name="y2">Второй YJM-элемент</param>
    public static YJMElement operator *(YJMElement y1, YJMElement y2)
    {
        if (y1.order > y2.order)
        {
            y2.SetOrder(y1.order);
        }
        else if (y2.order > y1.order)
        {
            y1.SetOrder(y2.order);
        }
        var result = new List<Permutation>();
        foreach (var perm1 in y1.permutations)
        {
            foreach (var perm2 in y2.permutations)
            {
                result.Add(perm1 * perm2);
            }
        }
        return new YJMElement(result);
    }
    /// <param name="y1">Первый YJM-элемент</param>
    /// <param name="y2">Второй YJM-элемент</param>
    public static bool operator ==(YJMElement y1, YJMElement y2)
    {
        if (y1.order == y2.order)
        {
            for (int i = 0; i < y1.order; i++)
            {
                if (y1.permutations[i] != y2.permutations[i])
                {
                    return false;
                }
            }
        }
        else
        {
            return false;
        }
    }

```

```

        return true;
    }
    /// <param name="y1">Первый YJM-элемент</param>
    /// <param name="y2">Второй YJM-элемент</param>
    public static bool operator !=(YJMElement y1, YJMElement y2)
    {
        return !(y1 == y2);
    }
}
/// <summary>
/// Словарь "перестановка - коэффициент"
/// </summary>
public class PermutationDictionary : Dictionary<Permutation, int>
{
    /// <summary>
    /// Разбиение, соответствующее объекту
    /// </summary>
    public List<int> Split = new List<int>();
    /// <summary>
    /// Текстовое представление
    /// </summary>
    public string Text
    {
        get
        {
            return string.Join(" + ", this.Select(kvp =>
            {
                if (kvp.Value < 1)
                {
                    return "";
                }
                else if (kvp.Value == 1)
                {
                    return kvp.Key.Text;
                }
                else
                {
                    return kvp.Value + "*" + kvp.Key.Text;
                }
            }
            ));
        }
    }
    /// <summary>
    /// Добавляет перестановку в словарь
    /// </summary>
    /// <param name="p">Перестановка</param>
    public new void Add(Permutation p, int count = 1)
    {
        if (ContainsKey(p))
        {
            this[p] += count;
        }
        else
        {
            base.Add(p, count);
        }
    }
    /// <summary>
    /// Добавляет несколько перестановок в словарь
    /// </summary>
    /// <param name="p">Коллекция перестановок</param>
    public void Add(IEnumerable<Permutation> p)
    {
        foreach (var i in p)
        {
            Add(i);
        }
    }
    /// <summary>
    /// Печатает словарь перестановок
    /// </summary>
    public void Print(Output output = Output.Console, string path = "", string text = "")
    {

```



```

        if (text == "")
        {
            text = Text;
        }
        if (output == Output.Console)
        {
            Console.WriteLine(text);
        }
        else if (output == Output.File)
        {
            using (var fs = File.AppendText(path))
            {
                fs.Write(text);
                fs.WriteLine();
            }
        }
    }
    /// <summary>
    /// Печатаем только тип перестановки и его количество
    /// </summary>
    public void SimplyPrint(Output output = Output.Console, string path = "", string addText =
    "")
    {
        var dictCounts = new Dictionary<Permutation, int>();
        foreach (var kvp in this)
        {
            var flagInc = false;
            foreach (var kvp2 in dictCounts)
            {
                if (Permutation.Compare(kvp2.Key, kvp.Key))
                {
                    dictCounts[kvp2.Key] += kvp.Value;
                    flagInc = true;
                    break;
                }
            }
            if (!flagInc)
            {
                dictCounts.Add(kvp.Key, kvp.Value);
            }
        }
        var txt = dictCounts.Select(kvp =>
        {
            var cnt = Permutation.GetPermutationsCount(kvp.Key);
            if (kvp.Value % cnt > 0)
            {
                Console.WriteLine("Error. Order = " + kvp.Key.Order + "; Perm = "
                + kvp.Key.Text + "; Count = " + kvp.Value + "; PermCount = " + cnt + "; Reminder = " + (kvp.Value % cnt));
                MainClass.ErrorBeep();
                Console.ReadKey();
            }
            return ((kvp.Value / cnt) != 1 ? (kvp.Value / cnt).ToString() : "") +
            (kvp.Key.NotTrivialCycles.Count > 0 ? "(" + kvp.Key.Text + ")") : "");
        });
        Print(output, path, string.Join(" + ", txt) + addText + "\r\n");
    }
    /// <summary>
    /// Copy the specified PermutationDictionary.
    /// </summary>
    /// <param name="p1">P1.</param>
    public static PermutationDictionary Copy(PermutationDictionary p1)
    {
        var res = new PermutationDictionary();
        foreach (var kvp in p1)
        {
            res.Add(kvp.Key, kvp.Value);
        }
        res.Split.AddRange(p1.Split);
        return res;
    }
    /// <summary>
    /// Clears the empty entries.
    /// </summary>

```

```

public void ClearEmptyEntries()
{
    var keys = new List<Permutation>();
    foreach (var kvp in this)
    {
        if (kvp.Key.NotTrivialCycles.Count == 0)
        {
            keys.Add(kvp.Key);
        }
    }
    foreach (var key in keys)
    {
        Remove(key);
    }
}
/// <summary>
/// Sets the order.
/// </summary>
/// <param name="newOrder">New order.</param>
public void SetOrder(int newOrder)
{
    foreach (var kvp in this)
    {
        kvp.Key.SetOrder(newOrder);
    }
}
/// <summary>
/// Sets the order.
/// </summary>
public void SetOrder()
{
    SetOrder(GetMaxOrder());
}
/// <summary>
/// Gets the max order.
/// </summary>
/// <returns>The max order.</returns>
public int GetMaxOrder()
{
    return Keys.Max(t => t.Order);
}
/// <param name="p1">P1.</param>
/// <param name="p2">P2.</param>
public static PermutationDictionary operator *(PermutationDictionary p1,
PermutationDictionary p2)
{
    var res = new PermutationDictionary();
    if (p1.Count == 0 && p2.Count > 0)
    {
        return Copy(p2);
    }
    else if (p2.Count == 0 && p1.Count > 0)
    {
        return Copy(p1);
    }
    else if (p1.Count == 0 && p2.Count == 0)
    {
        throw new Exception("Две нулевых штуки.");
    }
    foreach (var kvp1 in p1)
    {
        foreach (var kvp2 in p2)
        {
            res.Add(kvp1.Key * kvp2.Key, kvp1.Value * kvp2.Value);
        }
    }
    return res;
}
}
/// <summary>
/// Словарь "перестановка - коэффициент"
/// </summary>
public class PermutationDictionary : Dictionary<Permutation, int>

```

```

{
    /// <summary>
    /// Разбиение, соответствующее объекту
    /// </summary>
    public List<int> Split = new List<int>();
    /// <summary>
    /// Текстовое представление
    /// </summary>
    public string Text
    {
        get
        {
            return string.Join(" + ", this.Select(kvp =>
            {
                if (kvp.Value < 1)
                {
                    return "";
                }
                else if (kvp.Value == 1)
                {
                    return kvp.Key.Text;
                }
                else
                {
                    return kvp.Value + "*" + kvp.Key.Text;
                }
            }
            ));
        }
    }
    /// <summary>
    /// Добавляет перестановку в словарь
    /// </summary>
    /// <param name="p">Перестановка</param>
    public new void Add(Permutation p, int count = 1)
    {
        if (ContainsKey(p))
        {
            this[p] += count;
        }
        else
        {
            base.Add(p, count);
        }
    }
    /// <summary>
    /// Добавляет несколько перестановок в словарь
    /// </summary>
    /// <param name="p">Коллекция перестановок</param>
    public void Add(IEnumerable<Permutation> p)
    {
        foreach (var i in p)
        {
            Add(i);
        }
    }
    /// <summary>
    /// Печатает словарь перестановок
    /// </summary>
    public void Print(Output output = Output.Console, string path = "", string text = "")
    {
        if (text == "")
        {
            text = Text;
        }
        if (output == Output.Console)
        {
            Console.WriteLine(text);
        }
        else if (output == Output.File)
        {
            using (var fs = File.AppendText(path))
            {
                fs.Write(text);
            }
        }
    }
}

```

```

        fs.WriteLine();
    }
}
/// <summary>
/// Печатаем только тип перестановки и его количество
/// </summary>
public void SimplyPrint(Output output = Output.Console, string path = "", string addText =
""")
{
    var dictCounts = new Dictionary<Permutation, int>();
    foreach (var kvp in this)
    {
        var flagInc = false;
        foreach (var kvp2 in dictCounts)
        {
            if (Permutation.Compare(kvp2.Key, kvp.Key))
            {
                dictCounts[kvp2.Key] += kvp.Value;
                flagInc = true;
                break;
            }
        }
        if (!flagInc)
        {
            dictCounts.Add(kvp.Key, kvp.Value);
        }
    }
    var txt = dictCounts.Select(kvp =>
    {
        var cnt = Permutation.GetPermutationsCount(kvp.Key);
        if (kvp.Value % cnt > 0)
        {
            Console.WriteLine("Error. Order = " + kvp.Key.Order + "; Perm = "
+ kvp.Key.Text + "; Count = " + kvp.Value + "; PermCount = " + cnt + "; Reminder = " + (kvp.Value % cnt));
            MainClass.ErrorBeep();
            Console.ReadKey();
        }
        return ((kvp.Value / cnt) != 1 ? (kvp.Value / cnt).ToString() : "") +
(kvp.Key.NotTrivialCycles.Count > 0 ? "(" + kvp.Key.Text + ")") : "");
    });
    Print(output, path, string.Join(" + ", txt) + addText + "\r\n");
}
/// <summary>
/// Copy the specified PermutationDictionary.
/// </summary>
/// <param name="p1">P1.</param>
public static PermutationDictionary Copy(PermutationDictionary p1)
{
    var res = new PermutationDictionary();
    foreach (var kvp in p1)
    {
        res.Add(kvp.Key, kvp.Value);
    }
    res.Split.AddRange(p1.Split);
    return res;
}
/// <summary>
/// Clears the empty entries.
/// </summary>
public void ClearEmptyEntries()
{
    var keys = new List<Permutation>();
    foreach (var kvp in this)
    {
        if (kvp.Key.NotTrivialCycles.Count == 0)
        {
            keys.Add(kvp.Key);
        }
    }
    foreach (var key in keys)
    {
        Remove(key);
    }
}

```

```

    }
    /// <summary>
    /// Sets the order.
    /// </summary>
    /// <param name="newOrder">New order.</param>
    public void SetOrder(int newOrder)
    {
        foreach (var kvp in this)
        {
            kvp.Key.SetOrder(newOrder);
        }
    }
    /// <summary>
    /// Sets the order.
    /// </summary>
    public void SetOrder()
    {
        SetOrder(GetMaxOrder());
    }
    /// <summary>
    /// Gets the max order.
    /// </summary>
    /// <returns>The max order.</returns>
    public int GetMaxOrder()
    {
        return Keys.Max(t => t.Order);
    }
    /// <param name="p1">P1.</param>
    /// <param name="p2">P2.</param>
    public static PermutationDictionary operator *(PermutationDictionary p1,
    PermutationDictionary p2)
    {
        var res = new PermutationDictionary();
        if (p1.Count == 0 && p2.Count > 0)
        {
            return Copy(p2);
        }
        else if (p2.Count == 0 && p1.Count > 0)
        {
            return Copy(p1);
        }
        else if (p1.Count == 0 && p2.Count == 0)
        {
            throw new Exception("Две нулевых штуки.");
        }
        foreach (var kvp1 in p1)
        {
            foreach (var kvp2 in p2)
            {
                res.Add(kvp1.Key * kvp2.Key, kvp1.Value * kvp2.Value);
            }
        }
        return res;
    }
}
/// <summary>
/// Генерация
/// </summary>
/// <param name="degree">Степень</param>
/// <param name="variablesCount">Количество переменных</param>
public static void Generate(int degree, int variablesCount, bool newVariant = true)
{
    Stopwatch sw = new Stopwatch(), sw2 = new Stopwatch(), sw3 = new Stopwatch();
    sw.Start();
    var sigmas = new List<List<PermutationDictionary>>();
    //first variant
    for (int i = 1; i <= degree; i++)
    {
        var y = YJMElement.Generate(variablesCount + 1);
        var e = new ElementarySymmetricPolynomial(variablesCount, i);
        var pd = e.Substitution(y);
        pd.Split.Add(i);
    }
}

```

```

        sigmas.Add(new List<PermutationDictionary> { pd });
    }
    var maxOrder = sigmas.Max(kvp => kvp.Max(kvp2 => kvp2.GetMaxOrder()));
    foreach (var item in sigmas)
    {
        foreach (var item2 in item)
        {
            item2.SetOrder(maxOrder);
        }
    }
    sw.Stop();

    #if sharp6
        Console.WriteLine($"First stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("First stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif

    sw.Restart();
    sigmas[0][0].SimplyPrint(Output.File, "temp.txt", " = {" + string.Join(", ",
sigmas[0][0].Split) + "}");
    #if sharp6
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + "} printed! " +
$"{sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + "} printed! " +
sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif

    for (int i = 2; i <= degree; i++)
    {
        var ls = NumberSplits.GenerateSplits(i);
        foreach (var split in ls)
        {
            if (split.Count > 1)
            {
                var res = new PermutationDictionary();
                //split.Reverse ();
                int i1 = 0, i2 = 0, i3 = -1, prevCnt = 0;
                var c1 = 0;
                sw2.Start();
                if (newVariant)
                {
                    foreach (var sigma in sigmas)
                    {
                        var c2 = 0;
                        foreach (var perm in sigma)
                        {
                            if (perm.Split.Count <= split.Count)
                            {
                                var cnt = 0;
                                int j = 0;
                                for (; j < perm.Split.Count; j++)
                                {
                                    if (split[j] != perm.Split[j])
                                    {
                                        break;
                                    }
                                    cnt++;
                                }
                                if (cnt > prevCnt)
                                {
                                    prevCnt = cnt;
                                    i1 = c1;
                                    i2 = c2;
                                    i3 = j;
                                }
                            }
                            c2++;
                        }
                        c1++;
                    }
                }
                if (i3 >= 0)
                {
                    res = sigmas[i1][i2];
                }
            }
        }
    }

```

```

        }
        if (!newVariant)
        {
            i3 = 0;
        }
        sw2.Stop();
        sw3.Start();
        for (int j = i3; j < split.Count; j++)
        {
            res = res * sigmas[split[j] - 1][0];
        }
        res.Split.AddRange(split);
        sigmas[i - 1].Add(res);
        res.SimplePrint(Output.File, "temp.txt", " = {" + string.Join(", ", res.Split) + "}");
    #if sharp6
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", res.Split) + " }");
    #else
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", res.Split) + " }");
    #endif
    printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    sw3.Stop();
    }
    else
    {
        sigmas[i - 1][0].SimplePrint(Output.File, "temp.txt", " = {" + string.Join(", ", sigmas[i - 1][0].Split) + "}");
    #if sharp6
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[i - 1][0].Split) + " } printed! " + $"{sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[i - 1][0].Split) + " } printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    }
    }
    }
    sw.Stop();
    #if sharp6
        Console.WriteLine($"Finding stage: {sw2.Elapsed} elapsed.");
        Console.WriteLine($"Multiplying stage: {sw3.Elapsed} elapsed.");
        Console.WriteLine($"Second stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine($"Finding stage: " + sw2.Elapsed + " elapsed.");
        Console.WriteLine($"Multiplying stage: " + sw3.Elapsed + " elapsed.");
        Console.WriteLine($"Second stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    sw.Restart();
    sw.Stop();
    #if sharp6
        Console.WriteLine($"Third stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("Third stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    }
    /// <summary>
    /// Генерация
    /// </summary>
    /// <param name="degree">Степень</param>
    /// <param name="variablesCount">Количество переменных</param>
    public static void ParallelGenerate(int degree, int variablesCount, bool newVariant = true)
    {
    #if TRACE
        Stopwatch sw = new Stopwatch(), sw2 = new Stopwatch(), sw3 = new Stopwatch();
        sw.Start();
    #endif
        var sigmas = new List<List<PermutationDictionary>>();
        //first variant
        for (int i = 1; i <= degree; i++)
        {
            var y = YJMElement.Generate(variablesCount + 1);

```

```

        var e = new ElementarySymmetricPolynomial(variablesCount, i);
        var pd = e.Substitution(y);
        pd.Split.Add(i);
        sigmas.Add(new List<PermutationDictionary> { pd });
    }

    var maxOrder = sigmas.Max(kvp => kvp.Max(kvp2 => kvp2.GetMaxOrder()));

    foreach (var item in sigmas)
    {
        foreach (var item2 in item)
        {
            item2.SetOrder(maxOrder);
        }
    }

    #if TRACE
        sw.Stop();
    #if sharp6
        Console.WriteLine($"First stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("First stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
        sw.Restart();
    #endif
        sigmas[0][0].SimplyPrint(Output.File, "parall" + "\\temp" + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + ".txt", " = {" + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + "}");
    #if TRACE
    #if sharp6
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + " } printed! " + $"{sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + " } printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    #endif

    var ls = new Dictionary<int, List<List<int>>>>();
    for (int i = 2; i < degree + 1; i++)
    {
        ls.Add(i, NumberSplits.GenerateSplits(i));
    }
    Parallel.ForEach(ls, splits =>
    {
        //var ls = NumberSplits.GenerateSplits(i);
        var i = splits.Key;
        foreach (var split in splits.Value)
        {
            var fName = $"parall\\temp " + string.Join(", ", split) + ".txt";
            if (split.Count > 1)
            {
                var res = new PermutationDictionary();

                #if TRACE
                sw3.Start();
                #endif

                for (int j = 0; j < split.Count; j++)
                {
                    res = res * sigmas[split[j] - 1][0];
                }
                res.Split.AddRange(split);
                res.SimplyPrint(Output.File, fName, " = {" + string.Join(", ", res.Split) + "}");

                #if TRACE
                #if sharp6
                    Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", res.Split) + " } printed! " + $"{sw.Elapsed} elapsed.");
                #else
                    Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", res.Split) + " } printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
                #endif
                #endif

                sw3.Stop();
            }
            else
            {
                sigmas[i -

```



```

1][0].SimplyPrint(Output.File, fName, " = {" + string.Join(", ", sigmas[i - 1][0].Split) + "}");
#if TRACE
#if sharp6
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[i -
1][0].Split) + " } printed! " + $"{sw.Elapsed} elapsed.");
#else
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[i -
1][0].Split) + " } printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
#endif
#endif
    }
}
});
#if TRACE
sw.Stop();
#if sharp6
    Console.WriteLine($"Finding stage: {sw2.Elapsed} elapsed.");
    Console.WriteLine($"Multiplying stage: {sw3.Elapsed} elapsed.");
    Console.WriteLine($"Second stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
#else
    Console.WriteLine($"Finding stage: " + sw2.Elapsed + " elapsed.");
    Console.WriteLine($"Multiplying stage: " + sw3.Elapsed + " elapsed.");
    Console.WriteLine($"Second stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
#endif
#endif

    sw.Restart();
    sw.Stop();
#if sharp6
    Console.WriteLine($"Third stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
#else
    Console.WriteLine("Third stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
#endif
#endif
}
/// <summary>
/// Генерация
/// </summary>
/// <param name="degree">Степень</param>
/// <param name="variablesCount">Количество переменных</param>
public static void ParallelGenerate2(int degree, int variablesCount, bool newVariant = true)
{
#if TRACE
    Stopwatch sw = new Stopwatch(), sw2 = new Stopwatch(), sw3 = new Stopwatch();
    sw.Start();
#endif

    var sigmas = new List<List<PermutationDictionary>>();
    //first variant
    for (int i = 1; i <= degree; i++)
    {
        var y = YJMElement.Generate(variablesCount + 1);
        var e = new ElementarySymmetricPolynomial(variablesCount, i);
        var pd = e.Substitution(y);
        pd.Split.Add(i);
        sigmas.Add(new List<PermutationDictionary> { pd });
    }

    var maxOrder = sigmas.Max(kvp => kvp.Max(kvp2 => kvp2.GetMaxOrder()));

    foreach (var item in sigmas)
    {
        foreach (var item2 in item)
        {
            item2.SetOrder(maxOrder);
        }
    }

#if TRACE
    sw.Stop();
#if sharp6
    Console.WriteLine($"First stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
#else
    Console.WriteLine("First stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
#endif
#endif

```

```

        sw.Restart();
    #endif
    sigmas[0][0].SimplyPrint(Output.File, "parall2" + "\\temp" + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + ".txt", " = {" + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + "}");
    #if TRACE
    #if sharp6
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + "} printed! " + $"{sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[0][0].Split) + "} printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    #endif
    #endif

    var ls = new Dictionary<int, List<List<int>>>>();
    for (int i = 2; i < degree + 1; i++)
    {
        ls.Add(i, NumberSplits.GenerateSplits(i));
    }
    for (int i = 2; i < degree + 1; i++)
    {
        //var ls = NumberSplits.GenerateSplits(i);
        Parallel.ForEach(ls[i], split =>
        {
            var fName = $"parall2\\temp " + string.Join(", ", split) + ".txt";
            if (split.Count > 1)
            {
                var res = new PermutationDictionary();

                sw3.Start();

                for (int j = 0; j < split.Count; j++)
                {
                    res = res * sigmas[split[j] - 1][0];
                }
                res.Split.AddRange(split);
                res.SimplyPrint(Output.File, fName, " = {" + string.Join(", ", res.Split) + "}");

                #if TRACE
                #if sharp6
                    Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", res.Split) + "} printed! " + $"{sw.Elapsed} elapsed.");
                #else
                    Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", res.Split) + "} printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
                #endif
            }
            sw3.Stop();
        }
        else
        {
            sigmas[i - 1][0].SimplyPrint(Output.File, fName, " = {" + string.Join(", ", sigmas[i - 1][0].Split) + "}");

            #if TRACE
            #if sharp6
                Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[i - 1][0].Split) + "} printed! " + $"{sw.Elapsed} elapsed.");
            #else
                Console.WriteLine("{ " + string.Join(", ", sigmas[i - 1][0].Split) + "} printed! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
            #endif
        }
    }
    });
    #if TRACE
    sw.Stop();
    #if sharp6
        Console.WriteLine($"Finding stage: {sw2.Elapsed} elapsed.");
        Console.WriteLine($"Multiplying stage: {sw3.Elapsed} elapsed.");
        Console.WriteLine($"Second stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine($"Finding stage: " + sw2.Elapsed + " elapsed.");
    #endif

```

```

        Console.WriteLine($"Multiplying stage: " + sw3.Elapsed + " elapsed.");
        Console.WriteLine($"Second stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif

    sw.Restart();
    sw.Stop();

    #if sharp6
        Console.WriteLine($"Third stage ready! {sw.Elapsed} elapsed.");
    #else
        Console.WriteLine("Third stage ready! " + sw.Elapsed + " elapsed.");
    #endif
    #endif
}

```

eq2.mws

```

eq1:=1*x1+0*x2+0*x3+0=sigma1;
eq2:=0*x1+1*x2+1*x3+0=sigma2;
eq3:=0*x1+3*x2+2*x3+10=(sigma1)^2;
res:=solve({eq1,eq2,eq3},{x1,x2,x3}):
x1:="(2,1)": x2:="(3,2,1)": x3:="(2,1) (4,3)":
res;

```

eq3.mws

```

eq1:=1*x1+0*x2+0*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0=sigma1:
eq2:=0*x1+1*x2+1*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0=sigma2:
eq3:=0*x1+3*x2+2*x3+0*x4+0*x5+0*x6+21=sigma1^2:
eq4:=0*x1+0*x2+0*x3+1*x4+1*x5+1*x6+0=sigma3:
eq5:=20*x1+0*x2+0*x3+6*x4+4*x5+3*x6+0=sigma2*sigma1:
eq6:=71*x1+0*x2+0*x3+16*x4+9*x5+6*x6+0=sigma1^3:
res:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6},{x1,x2,x3,x4,x5,x6}):
x1:="(2,1)": x2:="(3,2,1)": x3:="(2,1) (4,3)": x4:="(4,3,2,1)": x5:="(3,2,1) (5,4)":
x6:="(2,1) (4,3) (6,5)":
res;

```

eq4.mws

```

eq1:=1*x1+0*x2+0*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0=sigma1:
eq2:=0*x1+1*x2+1*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0=sigma2:
eq3:=0*x1+3*x2+2*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+36=sigma1^2:
eq4:=0*x1+0*x2+0*x3+1*x4+1*x5+1*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0=sigma3:
eq5:=35*x1+0*x2+0*x3+6*x4+4*x5+3*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0=sigma2*sigma1:
eq6:=120*x1+0*x2+0*x3+16*x4+9*x5+6*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0=sigma1^3:
eq7:=0*x1+0*x2+0*x3+0*x4+0*x5+0*x6+1*x7+1*x8+1*x9+1*x10+1*x11+0=sigma4:
eq8:=0*x1+33*x2+34*x3+0*x4+0*x5+0*x6+10*x7+7*x8+6*x9+5*x10+4*x11+0=sigma3*sigma1:
eq9:=0*x1+100*x2+70*x3+0*x4+0*x5+0*x6+20*x7+12*x8+11*x9+8*x10+6*x11+546=sigma2^2:
eq10:=0*x1+273*x2+204*x3+0*x4+0*x5+0*x6+50*x7+28*x8+24*x9+17*x10+12*x11+1260=sigma2*(sigma1^2):eq
11:=0*x1+783*x2+544*x3+0*x4+0*x5+0*x6+125*x7+64*x8+54*x9+36*x10+24*x11+4320=sigma1^4:

res:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10,eq11},{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11}):
> x1:="(2,1)": x2:="(3,2,1)": x3:="(2,1) (4,3)": x4:="(4,3,2,1)": x5:="(3,2,1) (5,4)":
x6:="(2,1) (4,3) (6,5)": x7:="(5,4,3,2,1)": x8:="(4,3,2,1) (6,5)": x9:="(3,2,1) (6,5,4)":
x10:="(3,2,1) (5,4) (7,6)": x11:="(2,1) (4,3) (6,5) (8,7)":
res;

```

eq5.mws

```

eq1:=1*x1+0*x2+0*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*x17
+0*x18+0=sigma1:
eq2:=0*x1+1*x2+1*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*x17
+0*x18+0=sigma2:
eq3:=0*x1+3*x2+2*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*x17
+0*x18+55=sigma1^2:
eq4:=0*x1+0*x2+0*x3+1*x4+1*x5+1*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*x17
+0*x18+0=sigma3:
eq5:=54*x1+0*x2+0*x3+6*x4+4*x5+3*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*x1
7+0*x18+0=sigma2*sigma1:
eq6:=181*x1+52*x2+53*x3+0*x4+0*x5+0*x6+10*x7+7*x8+6*x9+5*x10+4*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*
x17+0*x18+0=sigma1^3:
eq7:=0*x1+0*x2+0*x3+0*x4+0*x5+0*x6+1*x7+1*x8+1*x9+1*x10+1*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*x17
+0*x18+0=sigma4:
eq8:=0*x1+52*x2+53*x3+0*x4+0*x5+0*x6+10*x7+7*x8+6*x9+5*x10+4*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x16+0*
x17+0*x18+0=sigma3*sigma1:
eq9:=0*x1+157*x2+108*x3+0*x4+0*x5+0*x6+20*x7+12*x8+11*x9+8*x10+6*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0*x1
6+0*x17+0*x18+1320=sigma2^2:

```

```

eq10:=0*x1+418*x2+307*x3+0*x4+0*x5+0*x6+50*x7+28*x8+24*x9+17*x10+12*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15+0
*x16+0*x17+0*x18+2970=sigma2*(sigma1^2):
eq11:=0*x1+1179*x2+804*x3+0*x4+0*x5+0*x6+125*x7+64*x8+54*x9+36*x10+24*x11+0*x12+0*x13+0*x14+0*x15
+0*x16+0*x17+0*x18+9955=sigma1^4:
eq12:=0*x1+0*x2+0*x3+0*x4+0*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+1*x12+1*x13+1*x14+1*x15+1*x16+1*x1
7+1*x18+0=sigma5:
eq13:=0*x1+0*x2+0*x3+49*x4+51*x5+0*x6+0*x7+0*x8+0*x9+52*x10+0*x11+15*x12+11*x13+9*x14+8*x15+7*x16
+6*x17+5*x18+0=sigma4*sigma1:
eq14:=1266*x1+0*x2+0*x3+299*x4+211*x5+162*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+50*x12+30*x13+25*x14+19*x
15+17*x16+13*x17+10*x18+0=sigma3*sigma2:
eq15:=2844*x1+0*x2+0*x3+741*x4+544*x5+433*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+120*x12+70*x13+55*x14+42*
x15+36*x16+27*x17+20*x18+0=sigma3*(sigma1^2):
eq16:=8034*x1+0*x2+0*x3+1656*x4+1069*x5+768*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+225*x12+120*x13+96*x14+
68*x15+59*x16+42*x17+30*x18+0=(sigma2^2)*sigma1:
eq17:=21546*x1+0*x2+0*x3+4274*x4+2686*x5+1887*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+540*x12+275*x13+214*x
14+148*x15+126*x16+87*x17+60*x18+0=sigma2*(sigma1^3):
eq18:=60121*x1+0*x2+0*x3+11168*x4+6681*x5+4500*x6+0*x7+0*x8+0*x9+0*x10+0*x11+1296*x12+625*x13+480
*x14+320*x15+270*x16+180*x17+120*x18+0=(sigma1^5):
res:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10,eq11,eq12,eq13,eq14,eq15,eq16,eq17,eq18},{x1
,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14,x15,x16,x17,x18}):
> x1:="(2,1)": x2:="(3,2,1)": x3:="(2,1)(4,3)": x4:="(4,3,2,1)": x5:="(3,2,1)(5,4)":
x6:="(2,1)(4,3)(6,5)": x7:="(5,4,3,2,1)": x8:="(4,3,2,1)(6,5)": x9:="(3,2,1)(6,5,4)":
x10:="(3,2,1)(5,4)(7,6)": x11:="(2,1)(4,3)(6,5)(8,7)": x12:="(6,5,4,3,2,1)":
x13:="(5,4,3,2,1)(7,6)": x14:="(4,3,2,1)(7,6,5)": x15:="(4,3,2,1)(6,5)(8,7)":
x16:="(3,2,1)(6,5,4)(8,7)": x17:="(3,2,1)(5,4)(7,6)(9,8)": x18:="(2,1)(4,3)(6,5)(8,7)(10,9)":
res;

```

Приложение В
(справочное).
Системы уравнений и их решения

$$k = 8, n = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sigma_1 \\ x_2 + x_3 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 36 = \sigma_1^2 \\ x_4 + x_5 + x_6 = \sigma_3 \\ 35x_1 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 = \sigma_2\sigma_1 \\ 120x_1 + 16x_4 + 9x_5 + 6x_6 = \sigma_1^3 \\ x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} = \sigma_4 \\ 33x_2 + 34x_3 + 10x_7 + 7x_8 + 6x_9 + \\ + 5x_{10} + 4x_{11} = \sigma_3\sigma_1 \\ 100x_2 + 70x_3 + 20x_7 + 12x_8 + 11x_9 + \\ + 8 * x_{10} + 6x_{11} + 546 = \sigma_2^2 \\ 273x_2 + 204x_3 + 50x_7 + 28x_8 + 24x_9 + \\ + 17x_{10} + 12x_{11} + 1260 = \sigma_2\sigma_1^2 \\ 783x_2 + 544x_3 + 125x_7 + 64x_8 + 54x_9 + \\ + 36x_{10} + 24x_{11} + 4320 = \sigma_1^4 \end{array} \right. \quad (B.1)$$

где x_1 – перестановка циклического типа (2,1),

x_2 – перестановка циклического типа (3,2,1),

x_3 – перестановка циклического типа (3,2)(4,1),

x_4 – перестановка циклического типа (4,3,2,1),

x_5 – перестановка циклического типа (3,2,1)(5,4),

x_6 – перестановка циклического типа (2,1)(4,3)(6,5),

x_7 – перестановка циклического типа (5,4,3,2,1),

x_8 – перестановка циклического типа (4,3,2,1)(6,5),

x_9 – перестановка циклического типа (3,2,1)(6,5,4),

x_{10} – перестановка циклического типа (3,2,1)(5,4)(7,6),

x_{11} – перестановка циклического типа (2,1)(4,3)(6,5)(8,7),

σ_i – i -ый элементарный симметрический многочлен.

$$\begin{aligned}
"(2,1)" &= \sigma_1 \\
"(3,2,1)" &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 - 36 \\
"(2,1)(4,3)" &= -\sigma_1^2 + 3\sigma_2 + 36 \\
"(2,1)(4,3)(6,5)" &= 2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 5\sigma_1 + 10\sigma_3 \\
"(3,2,1)(5,4)" &= -3\sigma_1^3 + 10\sigma_1\sigma_2 + 10\sigma_1 - 12\sigma_3 \\
"(3,2,1)(6,5,4)" &= -2\sigma_1^4 + 8\sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_1^2 - 10\sigma_1\sigma_3 - 3\sigma_2^2 - 6\sigma_2 + 10\sigma_4 - 18 \\
"(4,3,2,1)" &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - 15\sigma_1 + 3\sigma_3 \\
"(4,3,2,1)(6,5)" &= -4\sigma_1^4 + 17\sigma_1^2\sigma_2 + 66\sigma_1^2 - 17\sigma_1\sigma_3 - 10\sigma_2^2 - 146\sigma_2 + 20\sigma_4 - 1056 \\
"(5,4,3,2,1)" &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 - 19\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 + 34\sigma_2 - 4\sigma_4 + 312 \\
"(2,1)(4,3)(6,5)(8,7)" &= -5\sigma_1^4 + 22\sigma_1^2\sigma_2 + 42\sigma_1^2 - 25\sigma_1\sigma_3 - 13\sigma_2^2 - 92\sigma_2 + 35\sigma_4 - 534 \\
"(3,2,1)(5,4)(7,6)" &= 10\sigma_1^4 - 43\sigma_1^2\sigma_2 - 95\sigma_1^2 + 48\sigma_1\sigma_3 + 24\sigma_2^2 + 210\sigma_2 - 60\sigma_4 + 1296
\end{aligned}$$

Рисунок В.1 – Решение системы (В.1)

$$k = 10, n = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sigma_1 \\ x_2 + x_3 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 55 = \sigma_1^2 \\ x_4 + x_5 + x_6 = \sigma_3 \\ 54x_1 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 = \sigma_2\sigma_1 \\ 181x_1 + 16x_4 + 9x_5 + 6x_6 = \sigma_1^3 \\ x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} = \sigma_4 \\ 52x_2 + 53x_3 + 10x_7 + 7x_8 + 6x_9 + \\ + 5x_{10} + 4x_{11} = \sigma_3\sigma_1 \\ 157x_2 + 108x_3 + 20x_7 + 12x_8 + 11x_9 + \\ + 8x_{10} + 6x_{11} = \sigma_2^2 \\ 418x_2 + 307x_3 + 50x_7 + 28x_8 + 24x_9 + \\ + 17x_{10} + 12x_{11} = \sigma_2\sigma_1^2 \\ 1179x_2 + 804x_3 + 125x_7 + 64x_8 + 54x_9 + \\ + 36x_{10} + 24x_{11} + 9955 = \sigma_1^4 \\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + \\ + x_{17} + x_{18} = \sigma_5 \\ 49x_4 + 51x_5 + 52x_{10} + 15x_{12} + 11x_{13} + \\ + 9x_{14} + 8x_{15} + 7x_{16} + 6x_{17} + 5x_{18} = \sigma_4\sigma_1 \\ 1266x_1 + 299x_4 + 211x_5 + 162x_6 + 50x_{12} + \\ + 30x_{13} + 25x_{14} + 19x_{15} + 17x_{16} + 13x_{17} + \\ + 10x_{18} = \sigma_3\sigma_2 \\ 2844x_1 + 741x_4 + 544x_5 + 433x_6 + 120x_{12} + \\ + 70x_{13} + 55x_{14} + 42x_{15} + 36x_{16} + 27x_{17} + \\ + 20x_{18} = \sigma_3\sigma_1^2 \\ 8034x_1 + 1656x_4 + 1069x_5 + 768x_6 + 225x_{12} + \\ + 120x_{13} + 96x_{14} + 68x_{15} + 59x_{16} + 42x_{17} \\ + 30x_{18} = \sigma_2^2\sigma_1 \\ 21546x_1 + 4274x_4 + 2686x_5 + 1887x_6 + 540x_{12} + \\ + 275x_{13} + 214x_{14} + 148x_{15} + 126x_{16} + 87x_{17} + \\ + 60x_{18} = \sigma_2\sigma_1^3 \\ 60121x_1 + 11168x_4 + 6681x_5 + 4500x_6 + 1296x_{12} + \\ + 625x_{13} + 480x_{14} + 320x_{15} + 270x_{16} + 180x_{17} + \\ + 120x_{18} = \sigma_1^5 \end{array} \right. \quad (B.2)$$

где x_1 – перестановка циклического типа (2,1),

x_2 – перестановка циклического типа (3,2,1),

x_3 – перестановка циклического типа $(3,2)(4,1)$,
 x_4 – перестановка циклического типа $(4,3,2,1)$,
 x_5 – перестановка циклического типа $(3,2,1)(5,4)$,
 x_6 – перестановка циклического типа $(2,1)(4,3)(6,5)$,
 x_7 – перестановка циклического типа $(5,4,3,2,1)$,
 x_8 – перестановка циклического типа $(4,3,2,1)(6,5)$,
 x_9 – перестановка циклического типа $(3,2,1)(6,5,4)$,
 x_{10} – перестановка циклического типа $(3,2,1)(5,4)(7,6)$,
 x_{11} – перестановка циклического типа $(2,1)(4,3)(6,5)(8,7)$,
 x_{12} – перестановка циклического типа $(5,4,3,2,1)$,
 x_{13} – перестановка циклического типа $(5,4,3,2,1)(7,6)$
 x_{14} – перестановка циклического типа $(4,3,2,1)(7,6,5)$
 x_{15} – перестановка циклического типа $(4,3,2,1)(6,5)(8,7)$
 x_{16} – перестановка циклического типа $(3,2,1)(6,5,4)(8,7)$
 x_{17} – перестановка циклического типа $(3,2,1)(5,4)(7,6)(9,8)$
 x_{18} – перестановка циклического типа $(2,1)(4,3)(6,5)(8,7)(10,9)$
 σ_i – i -ый элементарный симметрический многочлен.

$$\begin{aligned}
& "(2,1)" = \sigma_1 \\
& "(3,2,1)" = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 - 55 \\
& "(2,1)(4,3)" = -\sigma_1^2 + 3\sigma_2 + 55 \\
& "(2,1)(4,3)(6,5)" = 2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 16\sigma_1 + 10\sigma_3 \\
& "(3,2,1)(5,4)" = -3\sigma_1^3 + 10\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1 - 12\sigma_3 \\
& "(3,2,1)(6,5,4)" = -2\sigma_1^4 + 8\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 10\sigma_1\sigma_3 - 3\sigma_2^2 + 8\sigma_2 + 10\sigma_4 + 165 \\
& "(4,3,2,1)" = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - 19\sigma_1 + 3\sigma_3 \\
& "(4,3,2,1)(6,5)" = -4\sigma_1^4 + 17\sigma_1^2\sigma_2 + 86\sigma_1^2 - 17\sigma_1\sigma_3 - 10\sigma_2^2 - 194\sigma_2 + 20\sigma_4 - 2200 \\
& "(5,4,3,2,1)" = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 - 25\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 + 46\sigma_2 - 4\sigma_4 + 660 \\
& "(6,5,4,3,2,1)" = \sigma_1^5 + 2600\sigma_1^4 - 5\sigma_1^3\sigma_2 - 545\sigma_1^3 - 11180\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 27300\sigma_1^2 \\
& \quad + 1889\sigma_1\sigma_2 + 12480\sigma_1\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 6240\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3 - 3812\sigma_1 + 61100\sigma_2 - 2657\sigma_3 - 15600\sigma_4 \\
& \quad + 5\sigma_5 + 586300 \\
& "(2,1)(4,3)(6,5)(8,7)" = -5\sigma_1^4 + 22\sigma_1^2\sigma_2 + 45\sigma_1^2 - 25\sigma_1\sigma_3 - 13\sigma_2^2 - 95\sigma_2 + 35\sigma_4 - 880 \\
& "(3,2,1)(5,4)(7,6)" = 10\sigma_1^4 - 43\sigma_1^2\sigma_2 - 105\sigma_1^2 + 48\sigma_1\sigma_3 + 24\sigma_2^2 + 235\sigma_2 - 60\sigma_4 + 2255 \\
& "(3,2,1)(5,4)(7,6)(9,8)" = -35\sigma_1^5 - 114400\sigma_1^4 + 185\sigma_1^3\sigma_2 + 23395\sigma_1^3 + 491920\sigma_1^2\sigma_2 - 198\sigma_1^2\sigma_3 \\
& \quad - 200\sigma_1\sigma_2^2 + 1201200\sigma_1^2 - 81683\sigma_1\sigma_2 - 549120\sigma_1\sigma_3 + 220\sigma_1\sigma_4 - 274560\sigma_2^2 + 224\sigma_2\sigma_3 \\
& \quad + 180940\sigma_1 - 2688400\sigma_2 + 116130\sigma_3 + 686400\sigma_4 - 280\sigma_5 - 25797200 \\
& "(3,2,1)(6,5,4)(8,7)" = 15\sigma_1^5 + 49400\sigma_1^4 - 77\sigma_1^3\sigma_2 - 10090\sigma_1^3 - 212420\sigma_1^2\sigma_2 + 83\sigma_1^2\sigma_3 + 78\sigma_1\sigma_2^2 \\
& \quad - 518700\sigma_1^2 + 35201\sigma_1\sigma_2 + 237120\sigma_1\sigma_3 - 95\sigma_1\sigma_4 + 118560\sigma_2^2 - 81\sigma_2\sigma_3 - 77495\sigma_1 \\
& \quad + 1160900\sigma_2 - 49985\sigma_3 - 296400\sigma_4 + 105\sigma_5 + 11139700 \\
& "(4,3,2,1)(6,5)(8,7)" = 15\sigma_1^5 + 44200\sigma_1^4 - 79\sigma_1^3\sigma_2 - 9125\sigma_1^3 - 190060\sigma_1^2\sigma_2 + 82\sigma_1^2\sigma_3 + 86\sigma_1\sigma_2^2 \\
& \quad - 464100\sigma_1^2 + 31832\sigma_1\sigma_2 + 212160\sigma_1\sigma_3 - 85\sigma_1\sigma_4 + 106080\sigma_2^2 - 96\sigma_2\sigma_3 - 69580\sigma_1 \\
& \quad + 1038700\sigma_2 - 45175\sigma_3 - 265200\sigma_4 + 105\sigma_5 + 9967100 \\
& "(4,3,2,1)(7,6,5)" = -5\sigma_1^5 - 15600\sigma_1^4 + 25\sigma_1^3\sigma_2 + 3200\sigma_1^3 + 67080\sigma_1^2\sigma_2 - 27\sigma_1^2\sigma_3 - 24\sigma_1\sigma_2^2 \\
& \quad + 163800\sigma_1^2 - 11155\sigma_1\sigma_2 - 74880\sigma_1\sigma_3 + 30\sigma_1\sigma_4 - 37440\sigma_2^2 + 24\sigma_2\sigma_3 + 24345\sigma_1 - 366600\sigma_2 \\
& \quad + 15825\sigma_3 + 93600\sigma_4 - 30\sigma_5 - 3517800 \\
& "(5,4,3,2,1)(7,6)" = -5\sigma_1^5 - 13520\sigma_1^4 + 26\sigma_1^3\sigma_2 + 2819\sigma_1^3 + 58136\sigma_1^2\sigma_2 - 26\sigma_1^2\sigma_3 - 28\sigma_1\sigma_2^2 \\
& \quad + 141960\sigma_1^2 - 9808\sigma_1\sigma_2 - 64896\sigma_1\sigma_3 + 26\sigma_1\sigma_4 - 32448\sigma_2^2 + 30\sigma_2\sigma_3 + 20718\sigma_1 - 317720\sigma_2 \\
& \quad + 13850\sigma_3 + 81120\sigma_4 - 30\sigma_5 - 3048760 \\
& "(2,1)(4,3)(6,5)(8,7)(10,9)" = 14\sigma_1^5 + 47320\sigma_1^4 - 75\sigma_1^3\sigma_2 - 9654\sigma_1^3 - 203476\sigma_1^2\sigma_2 + 81\sigma_1^2\sigma_3 \\
& \quad + 83\sigma_1\sigma_2^2 - 496860\sigma_1^2 + 33724\sigma_1\sigma_2 + 227136\sigma_1\sigma_3 - 91\sigma_1\sigma_4 + 113568\sigma_2^2 - 96\sigma_2\sigma_3 \\
& \quad - 75116\sigma_1 + 1112020\sigma_2 - 47988\sigma_3 - 283920\sigma_4 + 126\sigma_5 + 10670660
\end{aligned}$$

Рисунок В.2 – Решение системы (В.2)

Приложение Г
(обязательное).
Графическая часть

ВЫРАЖЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП КОКСТЕРА ЧЕРЕЗ УЖМ-ЭЛЕМЕНТЫ

Разработал: Стерлягов А.А., магистрант ВятГУ, г. Киров

Руководитель: Пушкарёв И.А., к.ф.-м.н., доцент ВятГУ, г. Киров

Рисунок Г.1 – Слайд «Титульный»

Постановка задачи

- Разработать модуль для проведения вычислений в групповой алгебре.
- Разработать модуль для вычисления образа конкретного симметрического многочлена.
- Разработать модуль для реализации построения по конкретному стандартному элементу центра Z_n его прообраза.
- При помощи разработанного ПО изучить свойства гомоморфизма из множества симметрических многочленов в центр групповой алгебры

Рисунок Г.2 – Слайд «Постановка задачи»

Основные определения

- Пусть σ – такой элемент группы G_m , что никакой элемент, сопряжённый с ним в группе G_m не содержится ни в какой группе с меньшим номером. Символом $\Xi_n(\sigma)$ (при $n \geq m$) обозначим сумму (в групповой алгебре группы G_n) всех элементов, сопряжённых в этой группе с элементом σ .
- В основном примере групповых алгебр симметрических групп $s_i = (i, i + 1)$ – кокстеровские образующие симметрической группы, $\Xi_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} (i, n)$ – классические элементы Юнга-Юциса-Мэрфи.

Рисунок Г.3 – Слайд «»

Симметрические многочлены от YJM-элементов

- Рассмотрим последовательность коммутативных алгебр $Q_n(y_1, \dots, y_n)$ симметрических многочленов с целыми коэффициентами от формальных переменных (y_1, \dots, y_n) . Подстановка в переменные YJM-элементов индуцирует гомоморфизм алгебры $C[S_n]$ в центр групповой алгебры n -ой симметрической группы.
- Теорема. Элементы центра групповой алгебры являются симметрическими многочленами от YJM-элементов.

Рисунок Г.4 – Слайд «Симметрические многочлены от YJM-элементов 1»

Симметрические многочлены от YJM-элементов

$$\sum_{i=2}^n \varepsilon_i(\sigma) = S((2,1))$$

$$\sum_{i=2}^n \varepsilon_i^2(\sigma) = S((3,2,1)) + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \times 1$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i(\sigma) \left(\sum_{j=i+1}^n \varepsilon_j(\sigma) \right) = S((3,2,1)) + S((2,1)(4,3))$$

Рисунок Г.5 – Слайд «Симметрические многочлены от YJM-элементов 2»

Анализ полученных результатов

$k=2, n=1$	$k=4, n=2$	$k=6, n=3$	$k=8, n=4$	$k=9, n=5$
1	-1	1	1	-1

Рисунок Г.6 – Слайд «Анализ результатов 1»

Анализ полученных результатов

$$k=4, n=2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sigma_1 \\ x_2 + x_3 + 0 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 10 = \sigma_1^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (2,1) = \sigma_1 \\ (2,1)(4,3) = 10 + 3\sigma_2 - \sigma_1^2 \\ (3,2,1) = -10 - 2\sigma_2 + \sigma_1^2 \end{array} \right.$$

Рисунок Г.7 – Слайд «Анализ результатов 2»

Анализ полученных результатов

$$k=6, n=3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sigma_1 \\ x_2 + x_3 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 21 = \sigma_1^2 \\ x_4 + x_5 + x_6 = \sigma_3 \\ 20x_1 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 = \sigma_2\sigma_1 \\ 71x_1 + 16x_4 + 9x_5 + 6x_6 = \sigma_1^3 \end{array} \right.$$

Рисунок Г.8 – Слайд «Анализ результатов 3»

Анализ полученных результатов

$k=6, n=3$

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_1 \\ x_2 + x_3 = \sigma_2 \\ 3x_2 + 2x_3 + 21 = \sigma_1^2 \\ x_4 + x_5 + x_6 = \sigma_3 \\ 20x_1 + 6x_4 + 4x_5 + 3x_6 = \sigma_2\sigma_1 \\ 71x_1 + 16x_4 + 9x_5 + 6x_6 = \sigma_1^3 \end{cases}$$

Рисунок Г.9 – Слайд «Анализ результатов 4»

Сравнение быстродействия

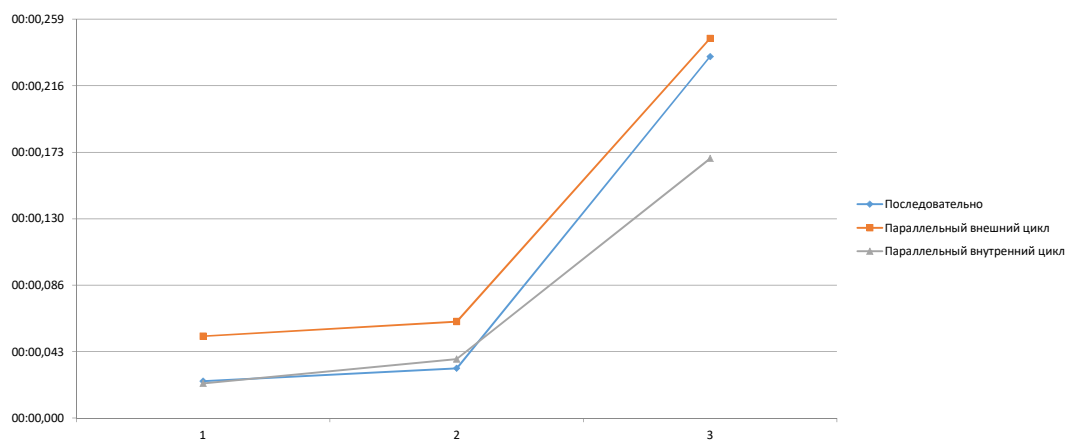


Рисунок Г.10 – Слайд «Сравнение быстродействия 1»

Сравнение быстродействия

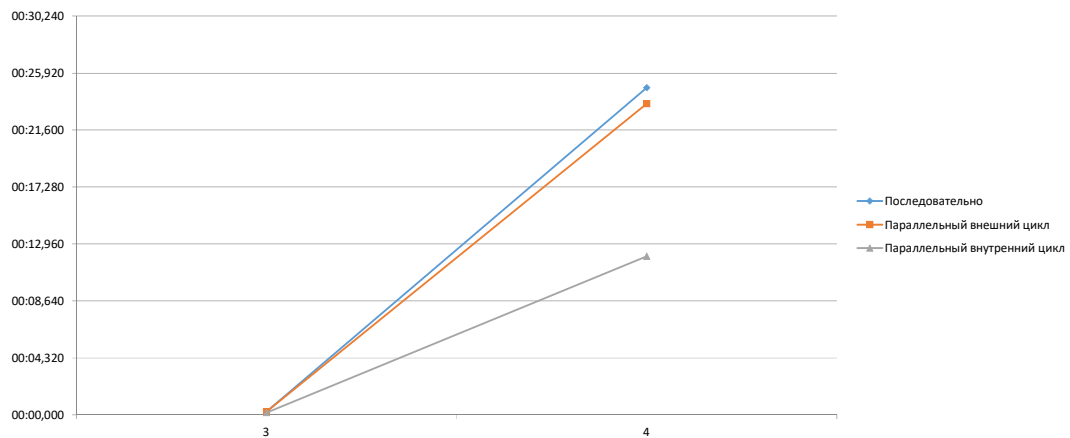


Рисунок Г.11 – Слайд «Сравнение быстродействия 2»

Выводы

- Построены и решены системы уравнений, определяющие параметры отображения из множества симметрических многочленов в центр групповой алгебры.
- Показано, что у этого отображения нет ядра.
- Стандартные элементы центра выражены через симметрические многочлены, тем самым подтверждена справедливость теоремы о том, что элементы центра являются симметрическими многочленами от YJM -элементов.

Рисунок Г.12 – Слайд «Выводы»

Приложение Д
(обязательное).
Авторская справка

Я, Стерлягов Андрей Александрович, автор выпускной квалификационной работы, сообщаю, что мне известно о персональной ответственности автора за разглашение сведений, подлежащих защите законами РФ о защите объектов интеллектуальной собственности.

Одновременно сообщаю, что:

1) при подготовке к защите выпускной квалификационной работы не использованы источники (документы, отчеты, диссертации, литература и т.п.), имеющие гриф секретности или «Для служебного пользования» ВятГУ или другой организации;

2) данная выпускная квалификационная работа не связана с незавершенными исследованиями или уже с завершенными, но еще официально не разрешенными к опубликованию ВятГУ или другими организациями;

3) данная выпускная квалификационная работа не содержит коммерческую информацию, способную нанести ущерб интеллектуальной собственности ВятГУ или другой организации;

4) данная выпускная квалификационная работа не является результатом НИР или ОКР, выполняемой по договору с организацией;

5) в предлагаемом к опубликованию тексте нет данных по незащищенным объектам интеллектуальной собственности других авторов;

6) согласен на использование результатов своей работы ВятГУ для учебного процесса;

7) использование моей выпускной квалификационной работы в научных исследованиях оформляется в соответствии с законодательством РФ о защите интеллектуальной собственности.

«__»_____ 2017 г. Автор работы _____

Сведения по авторской справке подтверждаю

«__»_____ 2017 г. Зав. кафедрой ФИиПМ _____

Приложение Ж
(обязательное).
Библиографический список

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. 3-е издание-е изд. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
3. Young A. The Collected Papers of Alfred Young (1873–1940). Toronto, Ont., Buffalo, NY.: University of Toronto Press, 1977. 714 pp.
4. Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 216 с.
5. Vershik A., Okunkov A. A new approach to representation theory of symmetric groups // Selecta Math, No. 4, 1996. pp. 581–605.
6. Пушкарев И.А. К теории представлений сплетений конечных групп с симметрическими группами // Зап. научн. сем. ПОМИ, № 240, 1997. С. 229-244.
7. Пушкарев И.А. Дистрибутивные решётки в теории представлений локальных алгебр и комбинаторике фибоначчиевых разбиений. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. СПбГУ, Санкт-Петербург. 1997. 158 с.
8. Вершик А.М., Окуньков А.Ю. Новый подход к теории представлений симметрических групп // Зап. науч. сем. ПОМИ, Т. 307, 2004. С. 57-98.
9. Пушкарев И.А., Стерлягов А.А. Программное обеспечение исследования свойств УМ-элементов групповых алгебр. *Материалы Всероссийской ежегодной научно-практической конференции «Общество. Наука. Инновации» НПК-2017*, (стр. 547-553). Киров.

10. Ceccherini-Silberstein T., Scarabotti F., and Tolli F. Representation Theory of the Symmetric Groups. NY: Cambridge University Press, 2010. 412 pp.
11. Microsoft Corporation. C# Language Specification. Version 5.0. 2012. Документ.
12. Wagner B. Синтаксис LINQ // docs.microsoft.com | Microsoft Docs. 2017. URL: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/csharp/programming-guide/concepts/linq/> (дата обращения: 15.05.2017).
13. Microsoft Corporaion. Класс List(T) (System.Collections.Generic) // MSDN – сеть разработчиков Microsoft. 2016. URL: [https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/6sh2ey19\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/6sh2ey19(v=vs.110).aspx) (дата обращения: 17.05.2017).
14. Microsoft Corporation. Класс Dictionary(TKey, TValue) (System.Collections.Generic) // MSDN - сеть разработчиков Microsoft. 2016. URL: [https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/xfhwa508\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/xfhwa508(v=vs.110).aspx) (дата обращения: 17.05.2017).
15. Пушков Р. Работаем с Mono. Часть 1: Основные принципы Mono, инструменты, создание простейшего приложения // IBM developerWorks : IBM's resource for developers and IT professionals. 2010. URL: https://www.ibm.com/developerworks/ru/library/os_mono1/index.html (дата обращения: 17.05.2017).
16. Ерохин А. Параллельное программирование // Программирование на языке C#, платформа.NET Framework. 2017. URL: https://professorweb.ru/my/csharp/thread_and_files/level2/2_1.php (дата обращения: 17.05.2017).
17. Кнут Д.Э. Искусство программирования, том 4, выпуск 3: генерация всех сочетаний и разбиений. Пер. с англ. М.: ООО "И. Д. Вильямс", 2007. 208 с.
18. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 440 с.