МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

**YJM-элементы и симметрические многочлены**

Отчет по преддипломной практике

Разработал студент гр. ПМИм-2301-01-00 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ /Стерлягов А.А./

(подпись)

Руководитель \_\_\_\_\_\_\_\_\_ /Пушкарев И.А./

(подпись)

Киров 2017

1 Основные определения

Рассмотрим основные определения, используемые в данной работе.

Перестановкой множества называется биекция множества на себя. называется порядком перестановки. В теории групп под перестановкой произвольного множества подразумевается биекция этого множества на себя.

Тривиальная перестановка – это перестановка, которая отображает каждый элемент множества в себя. Циклом называется перестановка, которая тривиальна на всем множестве, кроме подмножества . в таком случае называется длиной цикла. Транспозицией называется цикл длины 2.

Группой называется множество, с определенной на нем бинарной операцией, обладающей свойством ассоциативности, причем для этой операции имеется нейтральный элемент, а также для каждого элемента существует обратный .

Симметрический многочлен – многочлен от переменных, который не изменяется при всех перестановках входящих в него переменных. Элементарные симметрические многочлены – это симметрические многочлены вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((1) |

Алгеброй над полем называется кольцо с единицей, являющееся одновременно векторным пространством над полем .

Рассмотрим всевозможные формальные суммы

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((2) |

Две суммы считаются равными тогда и только тогда, когда у них совпадают коэффициенты для всех (формальную сумму можно рассматривать как функцию на группе со значениями в поле , причем коэффициент дает значение этой функции на элементе ). Определим операции над формальными суммами следующим образом

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((3) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((4) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((5) |

Можно проверить, что относительно определенных операций множество формальных сумм образует алгебру , которая называется групповой алгеброй группы над полем .

2 YJM-элементы

Рассмотрим возрастающее семейство конечных групп . Эти группы имеют семейство образующих , так, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((6) |

Пусть – такой элемент группы , что никакой элемент, сопряжённый с ним в группе не содержится ни в какой группе с меньшим номером. Символом (при ) обозначим сумму всех элементов в групповой алгебре группы , которые сопряжёны в этой группе с элементом . Эти суммы будем называть элементами Юнга-Юциса-Мерфи или YJM-элементами [3].

Заметим, что элемент является разностью центрального элемента групповой алгебры группы и центрального элемента групповой алгебры предыдущей группы. Элементы образуют полную группу представителей классов сопряжённости в группе элементов этой группы, сопряжённых в группе с элементом : . Эти элементы, даже с разными номерами и соответствующие разным элементам, коммутируют между собой [4]. Действительно:

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((7) |

В каждом произведении какой-нибудь номер не меньше другого, так что соответствующий элемент лежит в центре соответствующей групповой алгебры и коммутирует с другим сомножителем.

Следовательно, всевозможные элементы вида попарно коммутируют между собой и, тем самым, порождают последовательность коммутативных подалгебр групповых алгебр серий групп. Фактически, теория основана на том факте, что эта подалгебра оказывается максимальной коммутативной подалгеброй групповой алгебры и позволяет построить базис пространства групповой алгебры, который состоит из общих собственных векторов всей подалгебры. Этот базис называется (как и сама подалгебра) базисом (подалгеброй) Гельфанда-Цетлина [3].

В основном примере групповых алгебр симметрических групп – кокстеровские образующие симметрической группы. Тогда

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((8) |

классические элементы Юнга-Юциса-Мерфи [4].

В остальных случаях применения рассматриваемого метода соответствующие формулы становятся, как правило, немного сложнее.

3 Симметрические многочлены от YJM-элементов

Рассмотрим последовательность коммутативных алгебр симметрических многочленов с целыми коэффициентами от формальных переменных . Подстановка в переменные элементов (8) индуцирует гомоморфизм алгебры в центр групповой алгебры -ой симметрической группы .

Теорема. Симметрические многочлены от YJM-элементов порождают центр и выражаются как линейные комбинации сумм классов сопряжённости, совпадающих с суммами перестановок одного циклического типа [5].

Заключение

В результате выполнения преддипломной практики был рассмотрена и проанализирована литература по теории представлений симметрических групп.

Приложение А – Библиографический список

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. 3-е издание-е изд. Москва: Наука, 1982. 288 с.

2. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва: Наука, 1969. 668 с.

3. Вершик А.М., Окуньков А.Ю. Новый подход к теории представлений симметрических групп // Зап. науч. сем. ПОМИ, Т. 307, 2004. С. 57-98.

4. Пушкарев И.А., Стерлягов А.А. Программное обеспечение исследования свойств YJM-элементов групповых алгебр. *Материалы Всероссийской ежегодной научно-практической конференции «Общество. Наука. Инновации» НПК-2017*, (стр. 547-553). Киров.

5. Ceccherini-Silberstein T., Scarabotti F., and Tolli F. Representation Theory of the Symmetric Groups. NY: Cambridge University Press, 2010. 412 pp.