Combinación lineal de variables Gaussianas independientes:

Sea el conjunto de variables $\{x_n : n \in N\}$ mutuamente independientes, cada una con distribución normal de tipo $\mathcal{N}_{x_n}(\mu_{x_n}, \sigma_{x_n})$.

Entonces, su combinación lineal $y = \sum_{\forall n \in N} w_n x_n$ con $w_n \in \mathbb{R}$, corresponde a otra variable Gaussiana.

Se introduce una forma alterna a la función densidad de probabilidad como descriptor de aleatoriedad atravez de la función generadora de momentos

$$m_x(\xi) = \mathbb{E}\{\exp(\xi x)\}$$

que corresponde al valor esperado de la variable aleatoria proyectada $\exp(\xi x)$ y para cual se cumple que

$$m_y(\xi) = \mathbb{E}\left\{\exp(\xi(\sum_{\forall n \in N} w_n x_n))\right\}$$

$$= \mathbb{E}\{\exp(\xi w_1 x_1)\} \cdots \mathbb{E}\{\exp(\xi w_N x_N)\}$$

$$= m_x(w_1 \xi) \cdots m_{x_N}(w_N \xi)$$

$$= \prod_{\forall n \in N} m_{x_n}(w_n \xi)$$

Por cuanto, para cada variable normal se tiene que $m_x(\xi) = \exp(\mu_{x_n}\xi + \sigma^2_{x_n}\xi^2/2)$, luego,

$$\prod_{\forall n \in N} m_{x_n}(w_n \xi) = \prod_{\forall n \in N} \exp(\mu_{x_n}\xi + \sigma^2_{x_n}\xi^2/2)$$

$$= \exp\left(\xi(\sum_{\forall n \in N} w_n \mu_{x_n}) + \xi^2(\sum_{\forall n \in N} w_n^2 \sigma^2_{x_n})\right)$$

$$= \exp(\mu_y \xi + \sigma_y^2 \xi^2/2)$$

con lo cual, la variable resultante y también es Gaussiana $\mathcal{N}_y(\mu_y, \sigma_y)$ con momentos:

$$\mu_y = \sum_{\forall n \in N} w_n \mu_{xn}$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{\forall n \in N} w_n^2 \sigma_{xn}^2$$

Si multiplicamos la combinación lineal de variables gaussianas independientes por un factor α, obtenemos una nueva variable gaussiana con la amplitud y el ancho de banda cambiados, pero la media sigue siendo la misma.

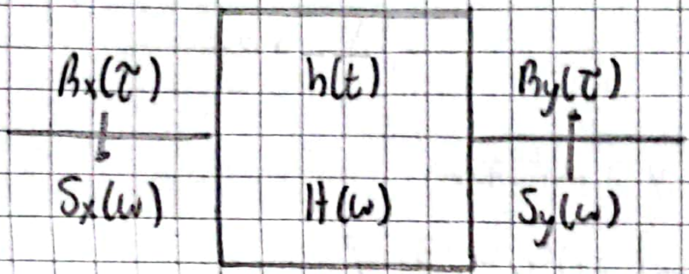
Dado que tenemos la combinación lineal $y = \sum w_n x_n$, multiplicarla por α resulta en $y' = \alpha \sum w_n x_n$. Podemos ver como se afecta la función generadora de momentos de y' (denotada como $m_{y'}(\xi)$) en comparación con la función generadora de momentos de y ($m_y(\xi$

La función generadora de momentos de y' se puede escribir como $m_{y'}(\xi) = \mathbb{E}\{\exp(\xi(\alpha \sum w_n x_n))\}$. Dado que las variables x_n son independientes, podemos utilizar la propiedad de la función generadora de momentos de una suma de variables independientes para simplificar esta expresión

Aplicando esta propiedad, tenemos $m_{y'}(\xi) = \prod m_{xn}(\alpha w_n \xi)$ donde $m_{xn}(\alpha w_n \xi) = \exp(\mu_{xn}(\alpha w_n \xi) + \sigma_{xn}(\alpha w_n \xi) 2/2$. Al expandir esta expresión, obtenemos $m_{y'}(\xi) = \exp(\alpha \xi (\sum w_n \mu_{xn}) + \alpha 2 \xi 2 (\sum w2_n$ $\sigma 2 x_n)/2)$. Esto muestra que la función generadora de momentos de la combinación lineal multiplicada por α también sigue la forma de una variable gaussiana.

Observamos que la media, representada por $\sum w_n \mu_{xn}$ no se ve afectada por el factor α, lo que implica que la media de la variable resultante sigue siendo la misma que la de la combinación lineal original.

Sin embargo, la amplitud y el ancho de banda de la variable gaussiana resultante se modifican por el factor α. La amplitud se escala por α y el ancho de banda se escala por $\sqrt{\alpha}$ esto significa que la variable resultante Tendra una mayor amplitud si $\alpha > 1$ y una menor amplitud si $\alpha < 1$. Del mismo modo, el ancho de banda sera mas amplio si $\alpha > 1$ y mas estrecho si $\alpha < 1$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$E[y(t)] = E[x(t) * h(t)]$$

$$M_y = E[\int x(t-\tau) h(t) dt]$$

$$M_y = \int E[x(t-\tau) h(t)] dt$$ por estacionariedad

$$M_y = \int E[x(t)] E[h(t)] dt$$ $h(t)$ es SLIT, no se afecta por la esperanza

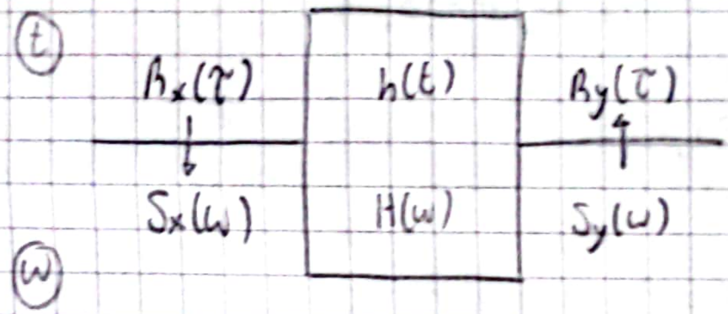
$$M_y = \int E[x(t)]\, h(t) dt$$

$$M_y = \int M_x\, h(t) dt$$

$$M_y = M_x \int h(t) dt$$

$$M_y = M_x \int h(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0}$$

$$M_y = M_x\, H(0)$$



$$S_x(\omega) = F\{R_x(\tau)\}$$

$S_x(\omega) = \|X(\omega)\|^2$ potencia de la señal en la frecuencia

$$R_y(\tau) = F^{-1}\{S_y(\omega)\}$$

$$R_y(\tau) = F^{-1}\{\|Y(\omega)\|^2\}$$

Como

$$Y(\omega) = X(\omega)\,H(\omega)$$

se tiene

$$F^{-1}\{\|Y(\omega)\|^2\} = F^{-1}\{\|X(\omega)H(\omega)\|^2\}$$

$$R_y(\tau) = F^{-1}\{\|X(\omega)H(\omega)\|^2\}$$

$$R_y(\tau) = F^{-1}\{\|X(\omega)\|^2\,\|H(\omega)\|^2\}$$

$$R_y(\tau) = F^{-1}\{S_x(\omega)\,\|H(\omega)\|^2\}$$

$$F\{R_y(\tau)\} = F\{F^{-1}\{S_x(\omega)\,\|H(\omega)\|^2\}$$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\,\|H(\omega)\|^2$$

Taller 2.

Entrada:

* $R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \int_T x(t)x^*(t+\tau)\,dt = \frac{N_0}{2}\int_0^{\infty} x(t)x^*(t+\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(t)$

* $S_x(w) = F\{R_x(\tau)\} = \frac{N_0}{2}$

Salida:

* $R_n(\tau) = \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1 - \tau)\, h(t_1) h(t_2)\, dt_2$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^{\infty} h(t)h(t+\tau)\,dt$$

* $S_n(w) = F\{R_n(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} R_x(t_2 - t_1 - \tau) h(t_1) h(t_2)\, dt_2\right\} e^{-jw\tau} d\tau$

$$S_n(w) = \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} h(t_1)h(t_2)\,dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t_2 - t_1 - \tau)e^{-jw\tau}\,d\tau$$

$$S_n(w) = \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} h(t_1)h(t_2) S_x(w) e^{-jw(t_2 - t_1)}\,dt_2$$

$$S_n(w) = S_x(w)\int_0^{\infty} h(t_1)e^{jwt_1}\,dt_1 \int_0^{\infty} h(t_2)e^{-jwt_2}\,dt_2$$

$$S_n(w) = S_x(w)\, H(-w)\, H(w)$$

$$S_n(w) = S_x(w)\,|H(w)|^2$$