

# Relatório de Atividade

## Filtro Estendido de Kalman

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof Antonio Marcus, Análise e Projeto de Sistemas de Controle 21.1

6 de junho de 2021

**Esse documento tem por objetivo descrever a implementação de um estimador para sistemas não lineares utilizando filtro estendido de Kalman (FEK). Para tal, quatro espaços de estados não lineares foram simulados e adicionados a um ruído gaussiano. Os experimentos realizados analisam a rejeição ao ruído de medição e à incerteza do processo conforme a mudança das estimativas iniciais do filtro.**

### 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento de uma ação de controle, os estados atuais do sistema devem compor um vetor conhecido. Essa aferição pode ser realizada por sensores, aos quais são inerentes ruídos de saída. Para a produção de medidas com confiabilidade, os dados contaminados e o espaço de estados do modelo podem ser combinados utilizando um filtro de Kalman.

O filtro de Kalman é um método de estimação que utiliza o conhecimento da modelagem de um ruído gaussiano de média nula para corrigir o conjunto de medições. A versão não linear desse algoritmo é nomeado filtro estendido de Kalman (FEK).

De modo genérico, para o vetor de estados  $x(t)$  e o vetor de entrada do controle  $u(t)$ , a equação diferencial de um modelo não linear é:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + w \quad (1)$$

para  $w$  a variância do ruído branco do processo. O modelo discreto associado a Eq. (1) é

$$\begin{aligned} x_{[n+1]} &= f(x_{[n]}, u_{[n]}) + w \\ y_{[n]} &= g(x_{[n]}) + v \end{aligned} \quad (2)$$

para  $v$  a variância do ruído branco de medição. Com o intuito de implementar o FEK como estimador, é necessário linearizar o espaço de estados da Eq. (1) ao redor do vetor de estimativa atual  $\hat{x}_{[n|n]}$ .

A rejeição do ruído e fusão de sensores é realizada por meio da correção da estimativa do vetor de estados real atual conforme um ganho  $K_{[n]}$ . Esse ganho

não é constante e é escolhido de modo a minimizar a variância do erro entre o estado real atual  $x_{[n]}$  e sua estimativa no instante anterior  $\hat{x}_{[n|n-1]}$  a cada amostra  $n$ . A covariância desse erro é denominada  $P_{[n|n-1]} = \text{cov}\{x_{[n]} - \hat{x}_{[n|n-1]}\}$ .

Conforme a Musoff e Zarchan (2009), as equações que representam o filtro estendido de Kalman equivalente ao modelo não linear da Eq. (2) para

- Estimação da saída  $\hat{y}_{[n|n-1]}$  do sistema conforme o estado estimado  $\hat{x}_{[n|n-1]}$  em  $n-1$  e correção do ganho de Kalman  $K_{[n]}$  na amostra  $n$  são

$$\hat{y}_{[n|n-1]} = g(\hat{x}_{[n|n-1]}) \quad (3)$$

$$K_{[n]} = P_{[n|n-1]} G_{[n]}^T \cdot [G_{[n]} P_{[n|n-1]} G_{[n]}^T + \Lambda_{[n]} R_{[n]} \Lambda_{[n]}^T]^{-1} \quad (4)$$

- Correção dos estados e da matriz de correlação de  $P_{[n|n]}$  em  $n$  são

$$\hat{x}_{[n|n]} = \hat{x}_{[n|n-1]} + K_{[n]} \cdot [y_{[n]} - \hat{y}_{[n|n-1]}] \quad (5)$$

$$P_{[n|n]} = [I - K_{[n]} G_{[n]}] P_{[n|n-1]} \quad (6)$$

- Previsão dos estados e da matriz de correlação de  $P_{[n+1|n]}$  em  $n+1$  são

$$\hat{x}_{[n+1|n]} = f(\hat{x}_{[n|n]}, u_{[n]}) \quad (7)$$

$$P_{[n+1|n]} = F_{[n]} P_{[n|n]} F_{[n]}^T + \Gamma_{[n]} Q_{[n]} \Gamma_{[n]}^T \quad (8)$$

para  $Q = \text{cov}\{w\}$ ,  $R = \text{cov}\{v\}$  e as matrizes  $G_{[n]}$ ,  $F_{[n]}$ ,  $\Gamma_{[n]}$ ,  $\Lambda_{[n]}$  dadas pela linearização do sistema da Eq. (2) conforme as expressões a seguir:

$$G_{[n]} = \left. \frac{\delta y_{[n]}}{\delta x_{[n]}} \right|_{x_{[n]} = \hat{x}_{[n|n]}, v=0}$$

$$\Lambda_{[n]} = \left. \frac{\delta y_{[n]}}{\delta v} \right|_{x_{[n]} = \hat{x}_{[n|n]}, v=0}$$

$$F_{[n]} = \left. \frac{\delta x_{[n+1]}}{\delta x_{[n]}} \right|_{x_{[n]} = \hat{x}_{[n|n]}, u_{[n]} = u_{[n]}, w=0}$$

$$\Gamma_{[n]} = \left. \frac{\delta x_{[n+1]}}{\delta w} \right|_{x_{[n]} = \hat{x}_{[n|n]}, u_{[n]} = u_{[n]}, w=0}$$

## 2 DESENVOLVIMENTO

Para a implementação do filtro estendido de Kalman, foram modelados quatro espaços de estados referente a um sinal senoidal, conforme exemplificado em Mussoff e Zarchan (2009). Os dois primeiros modelos retratam a não linearidade na equação de medição, enquanto os dois últimos descrevem a não linearidade na matriz A do espaço de estados  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

Nos ensaios são estimadas a frequência de oscilação e/ou a magnitude do sinal senoidal, os quais são considerados constantes. No experimento nominal, a frequência e magnitude reais do sinal senoidal simulado são unitárias. Por sua vez, a estimativa inicial da frequência e magnitude da senoide são 2 rad/s e 3, respectivamente. Finalmente, a covariância do erro de medição  $R = \sigma^2$  e do processo  $Q$  foram considerados unitário e nulo, respectivamente.

Em seguida, foram realizados três ensaios variando as estimativas iniciais do filtro e a covariâncias  $Q$  do ruído do processo. Após o teste nominal descrito no parágrafo anterior, foram variadas a frequência estimada inicial e real para, respectivamente: -1 e 2 rad/s; 1 e -2 rad/s; e -1 e -2 rad/s. Apesar do conceito de frequência negativa ser fisicamente inexistente, esses três experimentos buscam verificar a robustez matemática do filtro em estimar os estados desconhecidos.

Por fim, considerou-se um experimento  $Q$  não nulo para análise da rejeição da perturbação do processo, isto é, a incerteza da constância da frequência e magnitude da onda. A seguir, serão descritos os quatro modelos empregados na implementação do FEK.

### 2.1 MODELO I

Uma onda senoidal pode ser descrita como:

$$y = A \sin \omega t = A \sin \phi + r \quad (9)$$

para  $\phi = \omega t$  a frequência de oscilação do sinal e  $r$  o ruído branco de medição. Considerando que a frequência e a amplitude de  $y$  são constantes, é claro que  $\dot{\omega} = 0$  e  $\dot{A} = 0$ . Dessa forma, o espaço de estados que desse modelo é escrito por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\omega} \\ \dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \omega \\ A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

para  $u_{s1}$  e  $u_{s2}$  sinais de ruído branco. Essa perturbação caracteriza o ruído do processo  $w$  descrito na Eq. (1). Sendo assim, a versão discretizada da Eq. (10) análoga à Eq. (2) é:

$$x_{[n+1]} = x_{[n]} \left( I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ u_{s1} \\ u_{s2} \end{bmatrix} T \quad (11)$$

para  $T$  o período de amostragem. Observando a Eq. (11), é evidente que o espaço de estados é linear. Entretanto, a equação de medição Eq. (9) é não linear. Dessa forma, tem-se que, para FEK:

$$F = \frac{\delta p_{[n+1]}}{\delta p_{[n]}} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 T & 1 & -2\omega x T \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{\delta p_{[n+1]}}{\delta u_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$G = \frac{\delta y}{\delta x} = \begin{bmatrix} A \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix}^T \quad e \quad \Lambda = \frac{\delta y}{\delta r} = 1$$

A covariância do ruído de medição foi modelo como  $R = \sigma^2$ . Por sua vez, a matriz de covariância do ruído do processo foi modelada como:

$$\Gamma_{[n]} Q_{[n]} \Gamma_{[n]}^T = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_{s1} T^3}{3} & \frac{\Phi_{s1} T^2}{2} & 0 \\ \frac{\Phi_{s1} T^2}{2} & \Phi_{s1} T & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{s2} T \end{bmatrix}$$

para  $\Phi_{s1}$  e  $\Phi_{s2}$  a densidade espectral de  $u_{s1}$  e  $u_{s2}$ , respectivamente. Observando a Eq. (10), é evidente que o modelo pode ser simplificado para dois estados caso a amplitude da onda seja conhecida. Essa modelagem será abordada a seguir.

### 2.2 MODELO 2

Considerando o mesmo sinal  $y$  descrito na Eq. (10), para a amplitude  $A$  conhecida, o espaço de estados pode ser descrito como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sendo assim, a matriz de covariância do ruído do processo é dada por:

$$\Gamma_{[n]} Q_{[n]} \Gamma_{[n]}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi_s \end{bmatrix}$$

para  $\Phi_s$  a densidade espectral do ruído  $u_s$ . Logo, a versão discretizada da Eq. (12) análoga à Eq. (2) é:

$$x_{[n+1]} = x_{[n]} \left( I + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ u_s \end{bmatrix} T \quad (13)$$

$$= F x_{[n]} + \Gamma w$$

para  $T$  o período de amostragem. Similarmente, apesar de o espaço de estados ser linear, a equação de medição é senoidal. Dessa forma, para a implementação do FEK, tem-se que:

$$G = \frac{\delta y}{\delta x} = \begin{bmatrix} A \cos \phi & 0 \end{bmatrix}^T \quad e \quad \Lambda = \frac{\delta y}{\delta r} = 1$$

### 2.3 MODELO 3

Nesse experimento, será considerada a não linearidade no espaço de estados. Dessa forma, assume-se que o sinal senoidal é representado por:

$$y = x = A \sin \omega t \quad (14)$$

Considerando que a frequência  $\omega$  e a amplitude  $A$  do sinal  $x$  são desconhecidas e constantes, isto é,  $\dot{\omega} = 0$  e  $\dot{A} = 0$ , obtém-se o seguinte espaço de estados:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} \quad (15)$$

para  $u_s$  a incerteza da derivada nula de  $\omega$ . Observando a matriz  $A$  do sistema expresso na Eq. (15), é evidente a não-linearidade do espaço de estados. Dessa forma, a matriz  $A$  pode ser linearizada como:

$$A = \frac{\delta f}{\delta x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & -2\omega x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, o modelo discreto análogo a Eq. (2) para o espaço de estados da Eq. (15) é dado por:

$$p_{[n+1]} = p_{[n]} \left( I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & -2\omega x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} T$$

para  $T$  o período de amostragem. Logo, para a implementação do FEK, tem-se que:

$$F = \frac{\delta p_{[n+1]}}{\delta p_{[n]}} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ -\omega^2 T & 1 & -2\omega x T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{\delta p_{[n+1]}}{\delta u_s} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

Como a equação de medição é linear, tem-se  $G = [1 \ 0 \ 0]$  e  $R = \sigma^2$ . A covariância dos estados foi modelada como:

$$\Gamma_{[n]} Q_{[n]} \Gamma_{[n]}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\omega^2 x^2 T^3 \Phi_s}{3} & -\omega x T^2 \Phi_s \\ 0 & -\omega x T^2 \Phi_s & \Phi_s T \end{bmatrix}$$

para  $\Phi_s$  a densidade espectral do ruído  $u_s$ . O modelo apresentado no espaço de estados da Eq. (15) pode ser aproximado por um estado  $z = \omega^2$ . Essa alternativa será descrita na modelagem a seguir.

### 2.4 MODELO 4

Considerando o vetor de estados  $[x \ \dot{x} \ z]$  para  $z = \omega^2$ , o modelo da Eq. (15) pode ser reescrito como:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} \quad (16)$$

para  $u_s$  o ruído do processo. Observando a matriz  $A$  do sistema expresso na Eq. (16), é evidente a não-linearidade do espaço de estados. Dessa forma, a matriz  $A$  pode ser linearizada como:

$$A = \frac{\delta f}{\delta x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, o modelo discreto análogo a Eq. (2) para o espaço de estados da Eq. (16) é dado por:

$$p_{[n+1]} = p_{[n]} \left( I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \end{bmatrix} T$$

para  $T$  o período de amostragem. Logo, para a implementação do FEK, tem-se que:

$$F = \frac{\delta p_{[n+1]}}{\delta p_{[n]}} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ -zT & 1 & -xT \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \frac{\delta p_{[n+1]}}{\delta u_s} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

Como a equação de medição é linear, tem-se  $G = [1 \ 0 \ 0]$  e  $R = \sigma^2$ . A covariância dos estados foi modelada como:

$$\Gamma_{[n]} Q_{[n]} \Gamma_{[n]}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2 T^3 \Phi_s}{3} & -\frac{x T^2 \Phi_s}{2} \\ 0 & -\frac{x T^2 \Phi_s}{2} & \Phi_s T \end{bmatrix}$$

para  $\Phi_s$  a densidade espectral do ruído  $u_s$ .

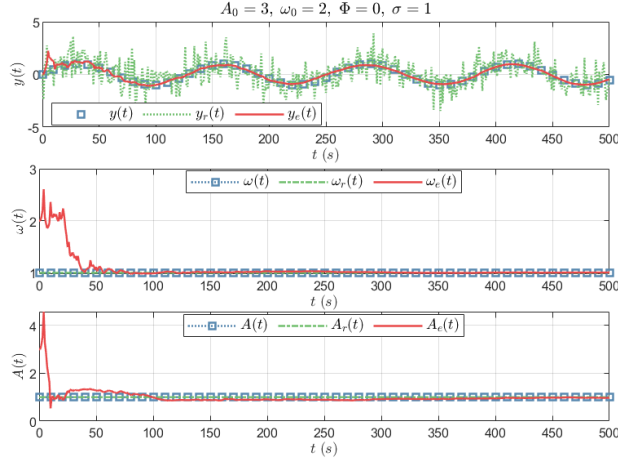
## 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme citado na Seção 2, foram realizados 5 experimentos para cada modelagem de 1 a 4. Para o experimento nominal empregando o sistema descrito na Subseção 2.1, estão ilustrados o valor verdadeiro  $x_v$ , com ruído  $x_r$  e estimado  $x_e$  para os estados  $\omega$  e  $A$  da Eq. (11) e a saída  $y$  na Fig. 1. Inicialmente, foi considerado que o erro do processo é nulo, ou seja,  $\Phi_{s1} = \Phi_{s2} = \Phi = 0$ .

Observando a Fig. 1, é evidente que a saída estimada  $y_e$  rastreia corretamente o valor verdadeiro  $y_v$ , uma vez que rejeita o ruído visível no sinal contaminado  $y_r$ . Como  $Q = 0$ , isto é, o ruído do processo é desconsiderado, é evidente que os estados com ruído ( $\omega_r$ ,  $A_r$ ) e verdadeiros ( $\omega_v$ ,  $A_v$ ) são equivalentes.

Com o intuito de verificar a robustez do filtro, foram realizados os testes alternando os sinais da estimativa inicial e valor verdadeiro de  $\omega$ .

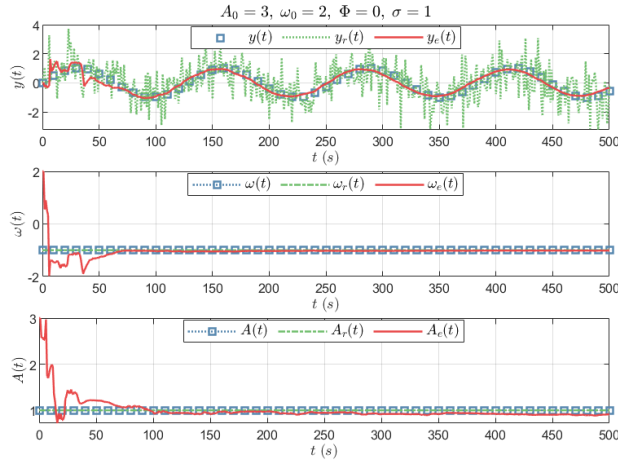
**Fig. 1.** Curvas dos estados  $\omega$  e  $A$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 1 no experimento 1.



Fonte: Autoria própria.

Na Fig. 2, Fig. 3 e Fig. 4 estão ilustrados o valor verdadeiro, com ruído e estimado  $x_e$  para os estados e a saída do modelo 1 para  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  equivalente à  $[-1 \ 2]$  rad/s;  $[1 \ -2]$  rad/s e  $[-1 \ -2]$  rad/s, respectivamente.

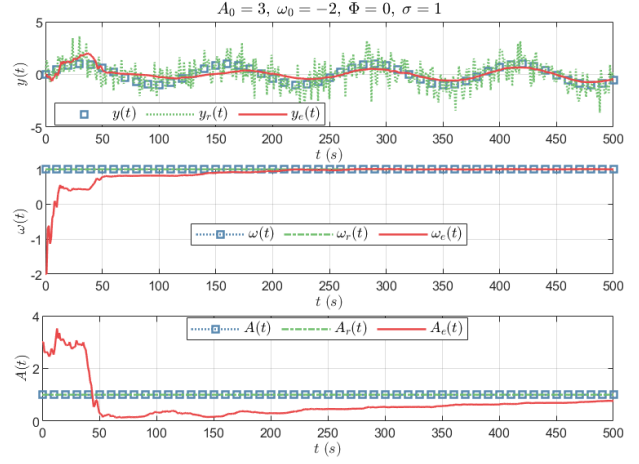
**Fig. 2.** Curvas dos estados  $\omega$  e  $A$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 2 no experimento 2.



Fonte: Autoria própria.

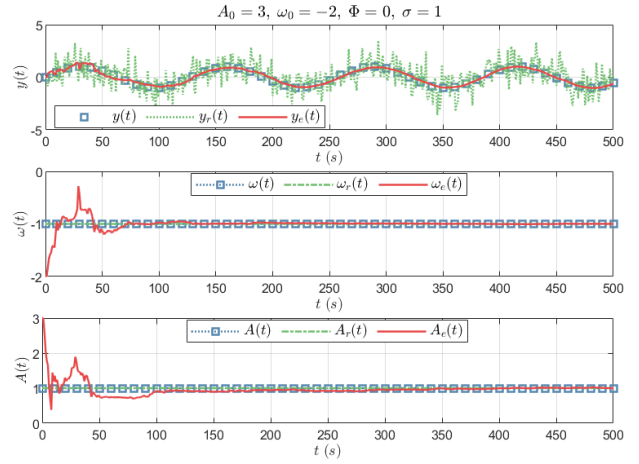
Analisando a Fig. 2, Fig. 3 e Fig. 4, é claro que o filtro estima corretamente a saída e os estados desconhecidos para qualquer combinação de  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$ . Esse resultado contradiz Musoff e Zarchan (2009), visto que a matriz de covariância inicial  $P_{[0]}$  utilizada nesse relatório provavelmente é menor que a empregada na bibliografia. Um maior valor de  $P_{[n|n-1]}$  provoca mudanças bruscas no ganho  $K_{[n]}$ , de modo que o filtro identifica estimativas erradas de  $\omega$  apesar de rastrear valor verdadeiro de  $y$ . Esse fato é matematicamente justificado pela equivalência  $y = A \sin(\omega t) = -A \sin(-\omega t)$ .

**Fig. 3.** Curvas dos estados  $\omega$  e  $A$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 1 no experimento 3.



Fonte: Autoria própria.

**Fig. 4.** Curvas dos estados  $\omega$  e  $A$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 1 no experimento 4.



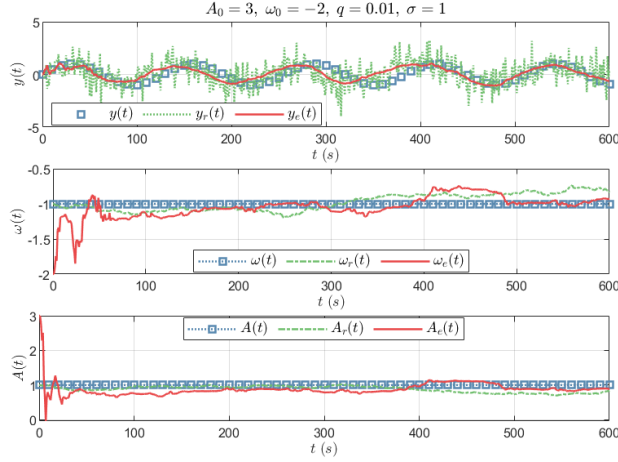
Fonte: Autoria própria.

Por fim, para verificar a robustez quando à incerteza de  $\dot{\omega} = 0$ , adotou-se  $w$  como um ruído branco de média nula e variância  $q = 0.01$ . Na Fig. 5, estão ilustrados o valor verdadeiro, com ruído e estimado  $x_e$  para os estados e a saída do modelo 1 para  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  equivalente à  $[-1 \ -2]$  rad/s.

Observando a Fig. 5, é possível concluir que o filtro rejeita a perturbação de estimativa do processo, dado que as estimativas finais de  $\omega_e$  e  $A_e$  são unitárias. O ruído do processo é observável pelo traçado  $\omega_r$  e  $A_r$ , os quais diferem de  $\omega_v$  e  $A_v$ , respectivamente.

Em seguida, foram simulados os mesmos testes para o modelo descrito na Subseção 2.2. Esse sistema é equivalente ao modelo 1 considerando o estado  $A$  conhecido. Dessa forma, o espaço de estados descrito pela Eq. (10) foi substituído pela Eq. (12).

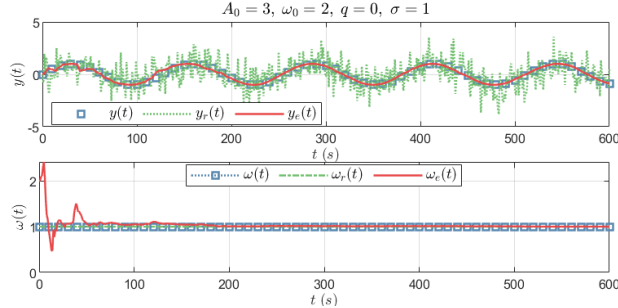
**Fig. 5.** Curvas dos estados  $\omega$  e  $A$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 1 no experimento 5.



Fonte: Autoria própria.

Na Fig. 6, estão ilustrados o valor verdadeiro  $x_v$ , com ruído  $x_r$  e estimado  $x_e$  para o estado  $\omega$  e a saída  $y$  para o experimento nominal. Observando a Fig. 6, é evidente que, assim como para o modelo 1, o FEK implementado rastreia os valores verdadeiros e rastreia o ruído de medição.

**Fig. 6.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 2 no experimento 1.

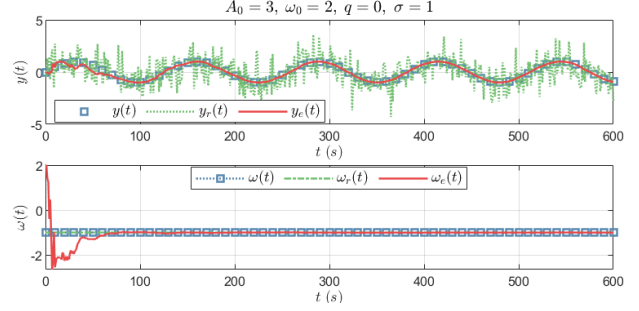


Fonte: Autoria própria.

Para testar a robustez do filtro, também foram executados ensaios para o vetor  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  equivalente à  $[-1 \ 2]$  rad/s;  $[1 \ -2]$  rad/s e  $[-1 \ -2]$  rad/s. Os resultados estão ilustrados na Fig. 7, Fig. 8 e Fig. 9, respectivamente.

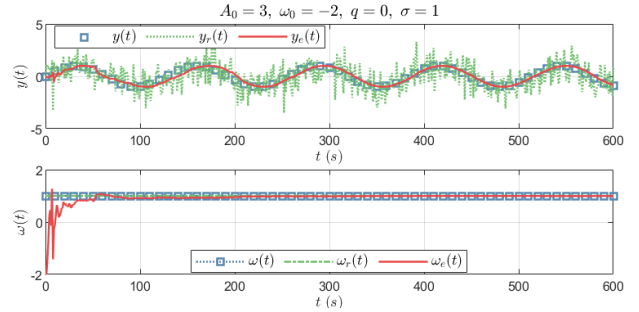
Analisando a Fig. 7, Fig. 8 e Fig. 9, é claro que o filtro estima corretamente a saída e os estados desconhecidos para qualquer combinação de  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  semelhantemente ao modelo 1. Entretanto, esse resultado também é encontrado por Musoff e Zarchan (2009) com a mesma matriz de covariância do modelo anterior. Essa diferença de resultados entre o experimento 4 aplicado ao modelo 1 e 2 encontrado na literatura e executado pode ser justificada pela ponderação de apenas um estado (nesse último modelo) para o ajuste nas equações do FEK para  $G_{[n]}$  e  $\hat{x}_{[n|n]}$ .

**Fig. 7.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 2 no experimento 2.



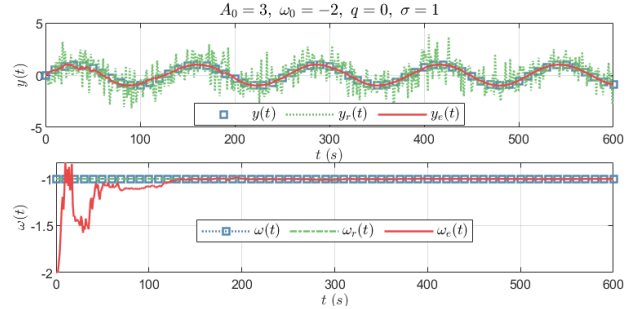
Fonte: Autoria própria.

**Fig. 8.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 2 no experimento 3.



Fonte: Autoria própria.

**Fig. 9.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 2 no experimento 4.

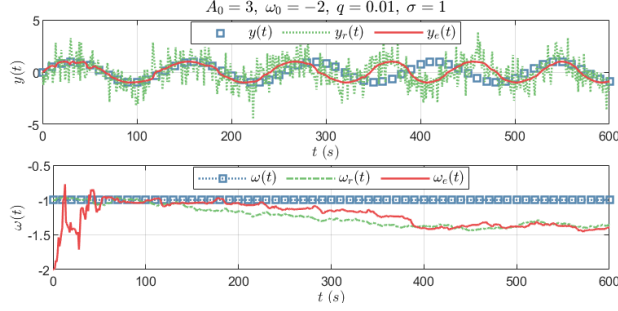


Fonte: Autoria própria.

Por fim, para verificar a robustez quando à incerteza de  $\dot{\omega} = 0$ , adotou-se  $w$  como um ruído branco de média nula e variância  $q = 0.01$ . Na Fig. 10, estão ilustrados o valor verdadeiro, com ruído e estimado  $x_e$  para os estados e a saída do modelo 2 para  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  equivalente à  $[-1 \ -2]$  rad/s.

Observando a Fig. 10, é evidente que o filtro não foi capaz de rejeitar o ruído de medição do processo, — diferentemente do experimento 5 executado sobre o modelo 1. Esse erro pode ser corrigido aumentando a matriz de covariância inicial  $P_{[0]}$ , a qual foi modelada apenas para os restes quem que  $R \neq 0$  e  $Q = 0$ . Outra alternativa, seria aumentar o ruído de medição (MUSOFF e ZARCHAN, 2009).

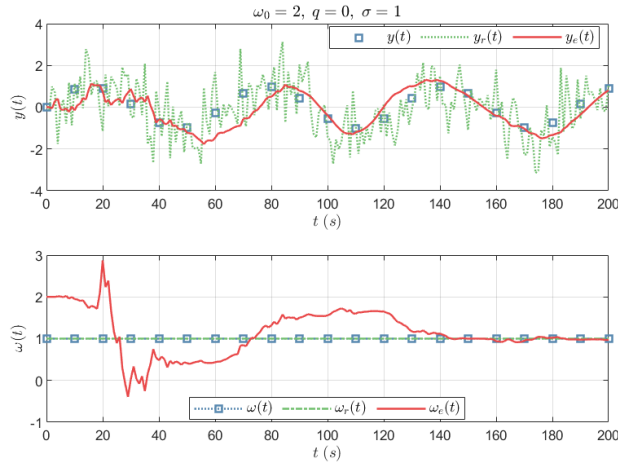
**Fig. 10.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 2 no experimento 5.



Fonte: Autoria própria.

Logo após, foram executados os mesmos experimentos para o modelo 3 discutido na Subseção 2.3. Na Fig. 11, estão ilustrados o valor verdadeiro  $x_v$ , com ruído  $x_r$  e estimado  $x_e$  para o estado  $\omega$  e a saída  $y$  para o experimento nominal. Observando a Fig. 11, é evidente que, assim como para o modelo 1 e 2, o FEK implementado rastreia os valores verdadeiros e rastreia o ruído de medição.

**Fig. 11.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 3 no experimento 1.

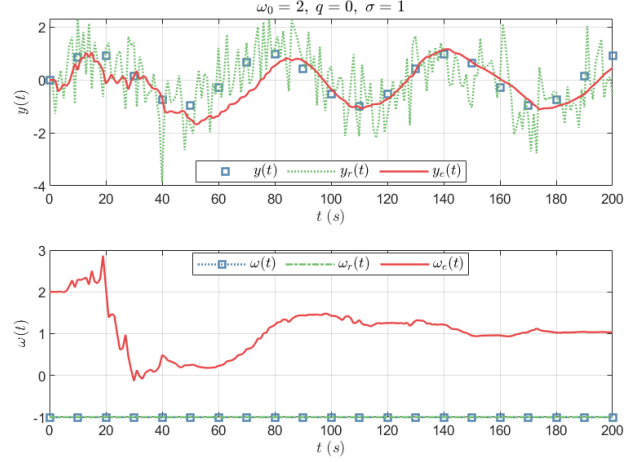


Fonte: Autoria própria.

Para testar a robustez do filtro, foram executados ensaios para  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  equivalente à  $[-1 \ 2]$  rad/s;  $[1 \ -2]$  rad/s e  $[-1 \ -2]$  rad/s. Os resultados estão ilustrados na Fig. 12 e Fig. 13, respectivamente.

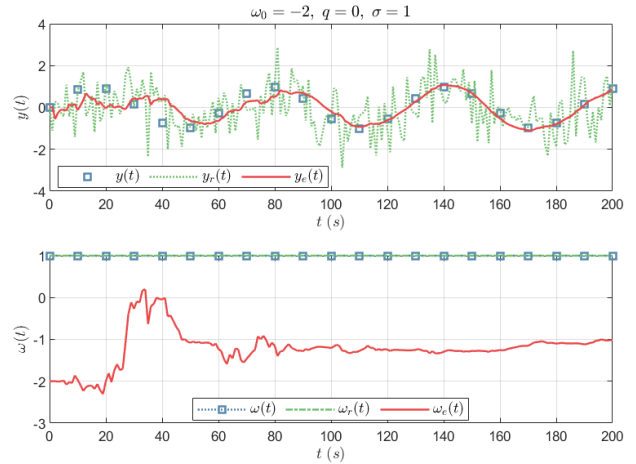
Analisando a Fig. 12 e Fig. 13, é claro que o filtro estimou corretamente apenas a magnitude da frequência  $\omega$ , ao passo que trocou o sinal da estimativa. Apesar desse erro, a saída  $y$  (equivalente ao primeiro estado de  $p(1) = x$ ) rastreia corretamente o valor verdadeiro após 140 segundos, rejeitando o ruído de medição. Por sua vez, observando a Fig. 14, é possível afirmar que o FEK estima corretamente a frequência quando  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  equivale a  $[-1 \ -2]$ .

**Fig. 12.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 3 no experimento 2.



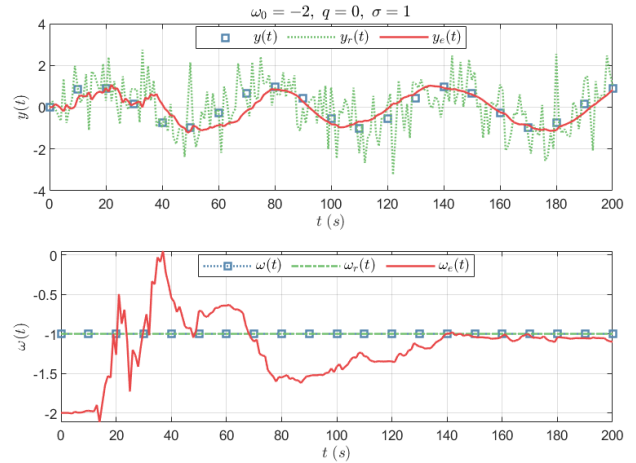
Fonte: Autoria própria.

**Fig. 13.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 3 no experimento 3.



Fonte: Autoria própria.

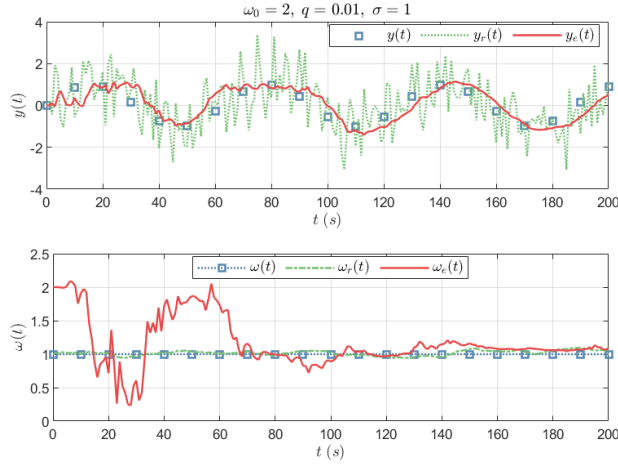
**Fig. 14.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 3 no experimento 4.



Fonte: Autoria própria.

Por fim, para verificar a robustez quando à incerteza de  $\dot{\omega} = 0$ , adotou-se  $w$  como um ruído branco de média nula e variância  $q = 0.01$ . Na Fig. 15, estão ilustrados o valor verdadeiro, com ruído e estimado  $x_e$  para os estados e a saída do modelo 3 para o vetor  $[\omega_v \ \hat{\omega}_{[0]}]$  equivalente à  $[1 \ 2]$  rad/s.

**Fig. 15.** Curvas do estado  $\omega$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 3 no experimento 5.



Fonte: Autoria própria.

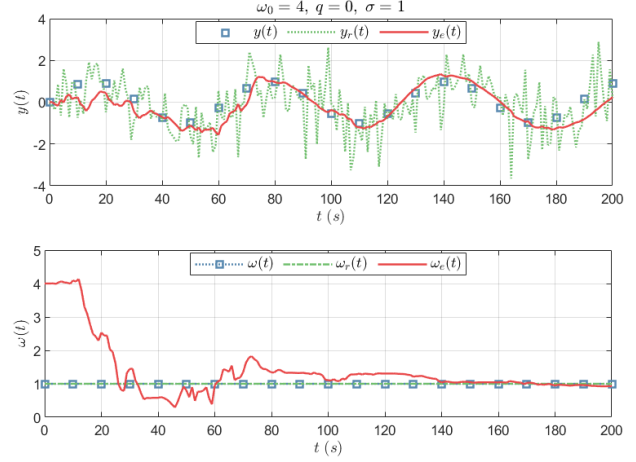
Observando a Fig. 15, assim como no modelo 1, o vetor de estados do modelo 3 estimado pelo FEK alcança os valores reais de frequência  $\omega$  e saída  $y$  do sistema. Esse ensaio garante a rejeição tanto da perturbação do processo quanto do ruído de medição.

Por fim, foi simulado o modelo 4 caracterizado na Subseção 2.4. Esse novo sistema define apenas um rearranjo do vetor de estados do modelo 3 com o intuito de facilitar a escrita da matriz  $F$ . Dessa forma, é esperado que o FEK aproxime corretamente a frequência estimada ao valor real para os experimentos 1, 4 e 5, assim como para a modelagem 3.

Na Fig. 16, estão ilustrados o valor verdadeiro  $x_v$ , com ruído  $x_r$  e estimado  $x_e$  para o estado  $z$  e a saída  $y$  para o experimento nominal. Observando a Fig. 16, é evidente que, assim como para o modelo 1, 2 e 3, o FEK implementado rastreia os valores verdadeiros e rastreia o ruído de medição. No entanto, comparando a Fig. 11 com a Fig. 16, percebe-se que o modelo 4, em relação ao modelo 3, apresenta uma melhor estimativa até 140 segundo e pior após esse instante. Essa diferença de comportamento entre o mesmo sinal modelado é justificada pelas diferentes aproximações da matriz  $F$  entre a modelagem 3 e 4.

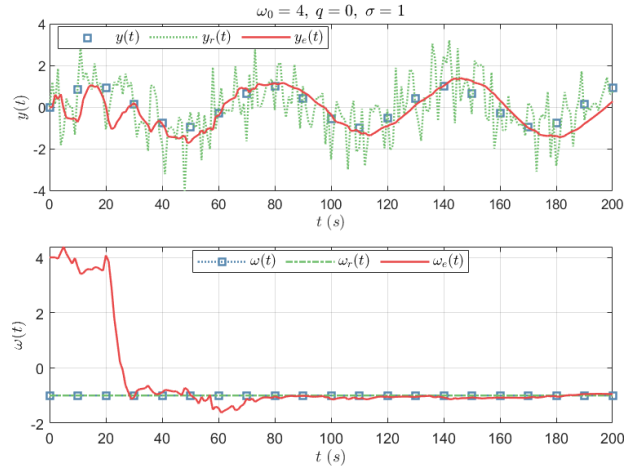
Como  $z = \omega^2 = (-\omega)^2$ , os testes para troca do sinal serão aplicados apenas para mudança do valor real  $z_r$  de 1 para  $-1$ . Na Fig. 17, e estão ilustrados o valor verdadeiro  $x_v$ , com ruído  $x_r$  e estimado  $x_e$  para o estado  $z$  e a saída  $y$  para o vetor  $[z_v \ \hat{z}_{[0]}] = [-1 \ 4]$ .

**Fig. 16.** Curvas do estado  $z$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 4 no experimento 1.



Fonte: Autoria própria.

**Fig. 17.** Curvas do estado  $z$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 4 no experimento 2.



Fonte: Autoria própria.

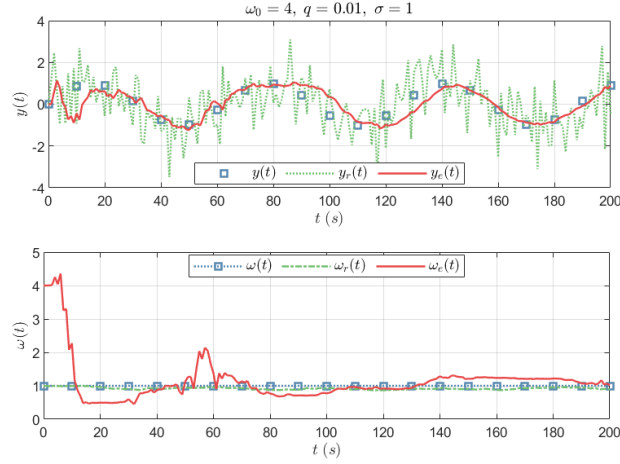
Diferentemente do resultado obtido para os experimentos 2 e 3 com o modelo 3, o resultado ilustrado na Fig. 17 expõe a robustez do FEK para o modelo 4 na troca de sinal do valor verdadeiro de frequência. Visto que o estado estimado é  $w^2$ , a inconsistência do sinal é omissa da estimativa final do filtro.

Por fim, para verificar a robustez quando à incerteza de  $\dot{z} = 0$ , adotou-se  $w$  como um ruído branco de média nula e variância  $q = 0.01$ . Na Fig. 18, estão ilustrados o valor verdadeiro, com ruído e estimado  $x_e$  para os estados e a saída do modelo 3 para o vetor  $[z_v \ \hat{z}_{[0]}]$  equivalente à  $[1 \ 4]$  rad/s.

Observando a Fig. 18, é evidente que o modelo 4 estimado por FEK alcança os valores reais de  $z = \omega^2$ . Comparando a Fig. 15 com a Fig. 18, é perceptível que o erro entre o valor real e estimado para a saída  $y$  é menor para o modelo 4 a partir de 140s.



**Fig. 18.** Curvas do estado  $z$  e saída  $y$  estimados, reais e com ruído para o modelo 4 no experimento 3.



Fonte: Autoria própria.

#### 4 CONCLUSÃO

Esse estudo tem por objetivo o desenvolvimento de um filtro estendido de Kalman para modelos não lineares de uma mesma onda não senoidal. Logo, foi necessário discretizar as equações diferenciais representantes da senoide e linearizá-las para o vetor de estados estimados para o passo anterior.

Os experimentos realizados permitiram uma análise da robustez de cada modelagem diante da variação da estimativa inicial do filtro, valor real dos estados estimados e incerteza do processo. Esse estudo demonstrou as influências no tempo de estabilização, no sinal da estimativa e na divergência do estado estimado conforme as modificações no número estados ou comportamento do vetor de estados do modelo considerado.

Uma otimização ao projeto é a modelagem das matrizes de covariância inicial  $P_{[0]}$  com maior magnitude. Tendo em vista que essa estimativa influencia a direção (e.g. positiva ou negativa) da derivada dos estados estimados, poderia-se concluir, com acurácia e confiabilidade, o funcionamento correto do FEK modelado segundo a literatura referenciada.

#### 5 REFERÊNCIAS

[1] MUSOFF, Howard; ZARCHAN, Paul. **Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009. 10.2514/4.867200.