

# Relatório de Atividade - MOAB

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Análise e Projeto de Sistemas de Controle 21.1

19 de Maio de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a dinâmica de uma bola sobre um prato cuja angulação é controlada. Esse sistema é nomeado MOAB. Nesse trabalho, serão analisados o modelo dinâmico e as entradas de atuação sobre a pose do prato para que a bola percorra uma trajetória pré-definida.

## Table of Contents

[Fundamentação teórica](#)

[Modelo simulado](#)

[Variáveis de atuação](#)

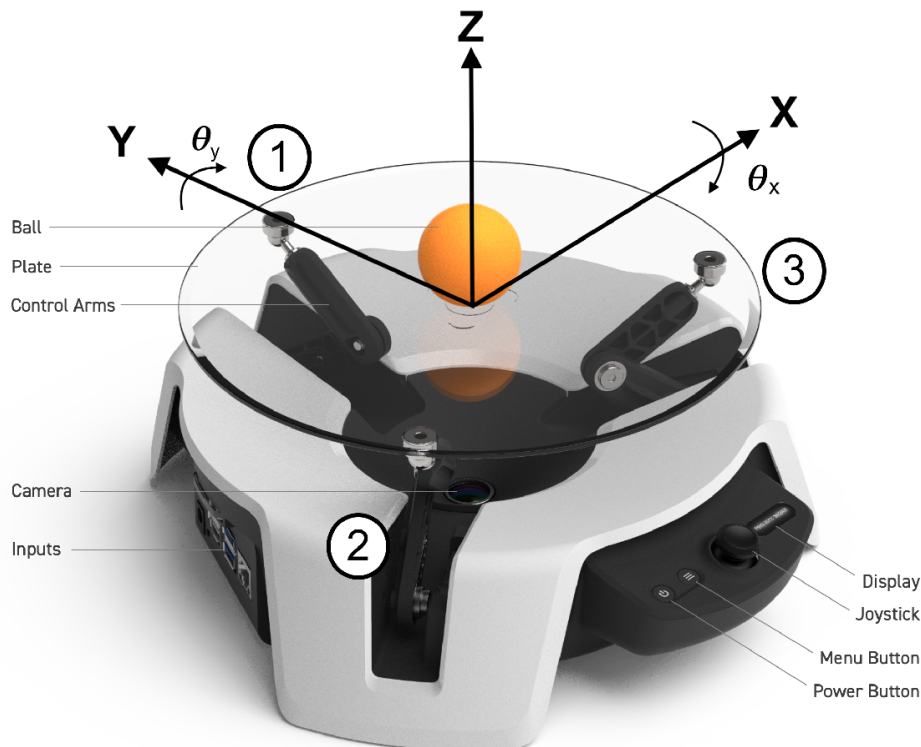
[Metodologia, experimentos e discussão](#)

[Referências bibliográficas](#)

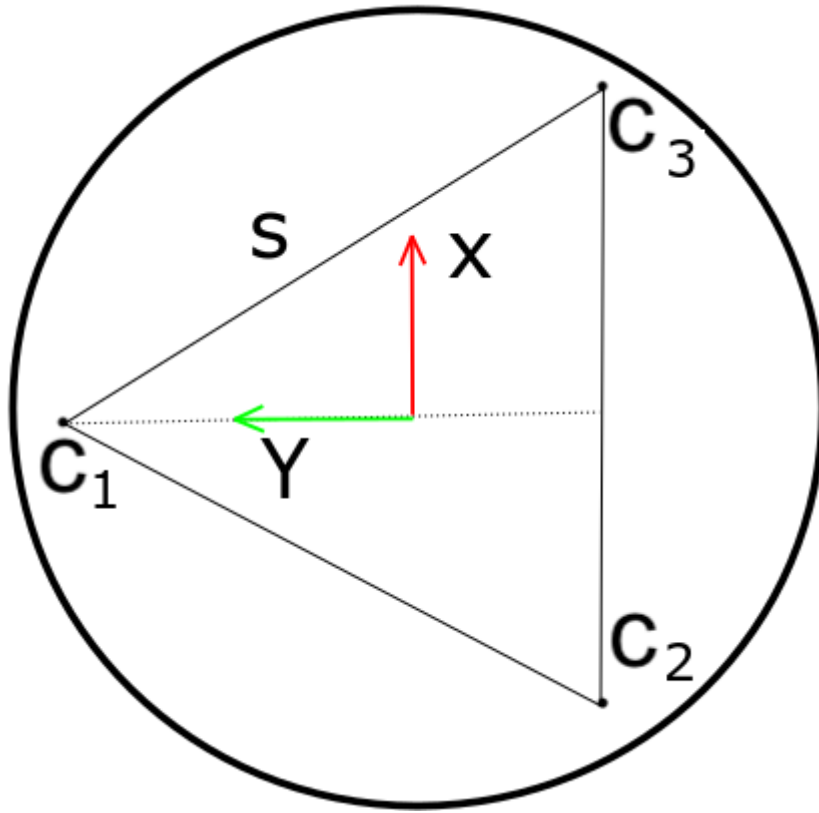
## Fundamentação teórica

O sistema de balanceamento de uma bola sobre um prato estudado nesse trabalho está ilustrado na [Figura 1](#).

No caso em estudo, o prato pode ser inclinado em duas direções perpendiculares ( $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ ) por meio do acionamento de três motores elétricos. Esses motores estão distribuído nos vértices de um triângulo equilátero, conforme ilustrado na [Figura 2](#). A velocidade de rotação e angulação desses motores pode ser controlada para estabilizar a bola em um ponto específico do prato ou para navegar a bola sobre uma trajetória pré-definida.



**Figura 1:** Sistema da bola sobre um prato cuja angulação  $\theta_y$  e  $\theta_x$  é controlável. (Fonte: [1])



**Figura 2:** Visão superior do prato. (Fonte: [1])

O MOAB possui quatro graus de liberdade: dois graus de liberdade provenientes da inclinação do prato e dois graus referentes ao movimento da bola sobre o prato. Além disso, é importante destacar que a relação entre a posição atual da bola e a variação da inclinação do prato é não-linear. Para simplificar o modelo em estudo, são consideradas as seguintes premissas:

1. A bola nunca perde contato com a superfície do prato.
2. Não há deslizamento entre a bola e o prato.
3. Forças de atrito são desprezíveis.

A estimativa do modelo será realizada pela formulação de Lagrange, uma vez que, em relação ao modelo cinemático newtoniano, é mais fácil tratar as mudanças de sistemas de coordenadas.

## Modelo simulado

O Lagrangiano de um sistema é descrito por:

$$\mathcal{L} = T - V$$

para  $T$  a energia cinética e  $V$  a energia potencial do processo. A energia cinética do sistema é composta pela energia translacional da bola em relação à origem do prato, energia rotacional da bola em relação ao seu centro de massa, energia translacional do prato e energia rotacional da bola em relação à origem do prato. Como a origem do prato é o ponto pivotante, a energia translacional do prato é nula. Qualquer movimento não intencional do centro do prato em relação a sua origem será considerado desprezível.

A posição da bola em relação ao sistema inercial do prato pode ser escrita como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + (-x\sin\theta_y + y\sin\theta_x)\hat{k}$$

Diferenciando a posição da bola em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + (-\dot{x}\sin\theta_y - x\dot{\theta}_y\cos\theta_y + \dot{y}\sin\theta_x + y\dot{\theta}_x\cos\theta_x)$$

Considerando que o ponto de equilíbrio é para  $\theta_y$  e  $\theta_x$  aproximadamente nulo, considera-se, pela expansão em série de Taylor, que  $\cos\theta = 1$  e  $\sin\theta = 0$ . Dessa forma, a derivada da posição em relação ao tempo é reescrita como:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + (-x\dot{\theta}_y + y\dot{\theta}_x)$$

Por sua vez, A energia cinética pode ser expressa por:

$$T_T = \frac{1}{2} m_b |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2} m_b [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (-x\dot{\theta}_y + y\dot{\theta}_x)^2]$$

para  $m_b$  a massa da bola.

Como a bola não se separa da superfície do prato, a velocidade em relação ao prato é nula. Sendo assim, a velocidade rotacional da bola pode ser escrita como  $\omega_b = v_b/r_b$  para  $\vec{v}_b = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$  a delovidade da bola em relação ao prato e  $r_b$  o raio da bola. Logo, a energia rotacional da bola ao redor do seu centro de gravidade é definida como:

$$T_R = \frac{1}{2} J_b \omega_b^2 = \frac{1}{2} J_b \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{r_b^2}$$

para  $J_b$  o momento de inércia da bola. Por sua vez, a energia rotacional do sistema bola-prato em relação ao sistema de coordenadas inercial é dada por:

$$T_r = \frac{1}{2} J_b (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2} J_{px} \dot{\theta}_x^2 + \frac{1}{2} J_{py} \dot{\theta}_y^2$$

para  $J_{px}$  e  $J_{py}$  os momentos de inércia do prato em relação aos eixos  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , respectivamente. Por fim, a energia potencial da bola com o sistema em equilíbrio é dada por:

$$V = m_b g (-x \sin \theta_y + y \sin \theta_x)$$

Logo, tem-se que o Lagrangiano do sistema é  $\mathcal{L} = T_T + T_R + T_r - V$ , tal que:

$$\mathcal{L} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(m_b + J_b r_b^{-2}) + m_b (x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x)^2 + J_b (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_x^2) + J_{px} \dot{\theta}_x^2 + J_{py} \dot{\theta}_y^2}{2} - m_b g (-x \sin \theta_y + y \sin \theta_x)$$

A equação de Lagrange-Euler descreve que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} = Q_i$$

para  $q_i$  as coordenadas do sistema de coordenadas inercial no mundo e  $Q_i$  as forças sobre o sistema. Para  $\dot{q}_i = \dot{x}$  e  $q_i = y$  tem-se

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}} = (m_b + J_b r_b^{-2}) \dot{x} \text{ e } \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{y}} = (m_b + J_b r_b^{-2}) \dot{y}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = m_b g \sin \theta_y + m_b \dot{\theta}_y (x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x) \text{ e } \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} = -m_b g \sin \theta_x + m_b \dot{\theta}_x (y\dot{\theta}_x + x\dot{\theta}_y)$$

Derivando  $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_i}$  em relação ao tempo para  $\dot{q}_i = \dot{x}$  e  $q_i = y$  t, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}} \right) = (m_b + J_b r_b^{-2}) \ddot{x} \text{ e } \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{y}} \right) = (m_b + J_b r_b^{-2}) \ddot{y}$$

Como não há forças externas sobre o sistema, tem-se que  $F_x = F_y = 0$ . Logo, é evidente que  $Q_i = 0$ , para  $q_i = y$  e  $q_i = x$ . Sendo assim, a equação de Euler-Lagrange para cada eixo é escrita para o modelo do MOAB como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = (m_b + J_b r_b^{-2}) \ddot{x} - m_b g \sin \theta_y - m_b \dot{\theta}_y (x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{y}} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta y} = (m_b + J_b r_b^{-2}) \ddot{y} - m_b g \sin \theta_x + m_b \dot{\theta}_x (y\dot{\theta}_x + x\dot{\theta}_y) = 0$$

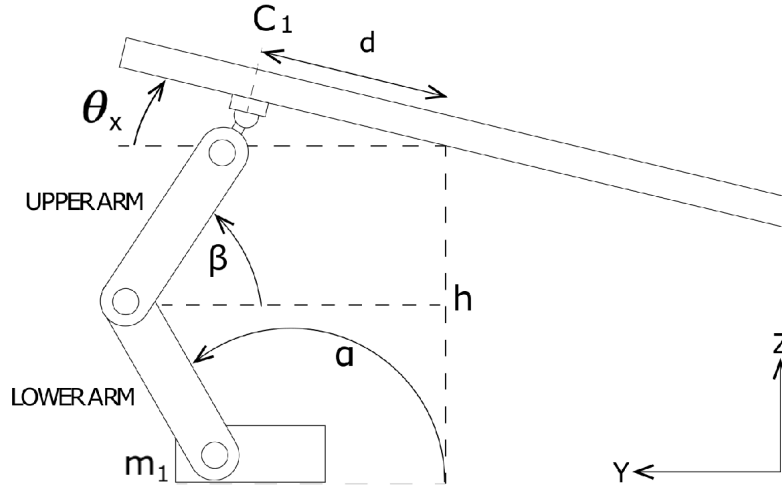
O momento de inércia para uma casca esférica é dada como  $J_b = \frac{2}{5} m_b \frac{(r_2)^5 - (r_1)^5}{(r_2)^3 - (r_1)^3}$  para  $r_1$  e  $r_2$  o raio interno e externo, respectivamente. Isolando a segunda derivada das variáveis  $x$  e  $y$  em relação ao tempo, obtém-se:

$$\ddot{x} = \frac{m_b(x\ddot{\theta}_y^2 - y\ddot{\theta}_x\dot{\theta}_y + g \sin \theta_y)}{(m_b + J_b r_b^{-2})} \text{ e } \ddot{y} = \frac{m_b(y\ddot{\theta}_x^2 + x\ddot{\theta}_y\dot{\theta}_x - g \sin \theta_x)}{(m_b + J_b r_b^{-2})}$$

No que lhe concerne, o controle sobre a angulação do prato  $\theta_x$  e  $\theta_y$  é realizada pelo acionamento de três motores.

## Variáveis de atuação

Na [Figura 3](#) está ilustrado um corte do MOAB ortogonal ao eixo do Motor 1 (M1). Considerando que  $d$  é a distância do vértice superior do triângulo equilátero em relação ao seu baricentro, é evidente que  $d = s/\sqrt{3}$ , para  $s$  a lateral do triângulo equilátero ilustrado na [Figura 2](#).

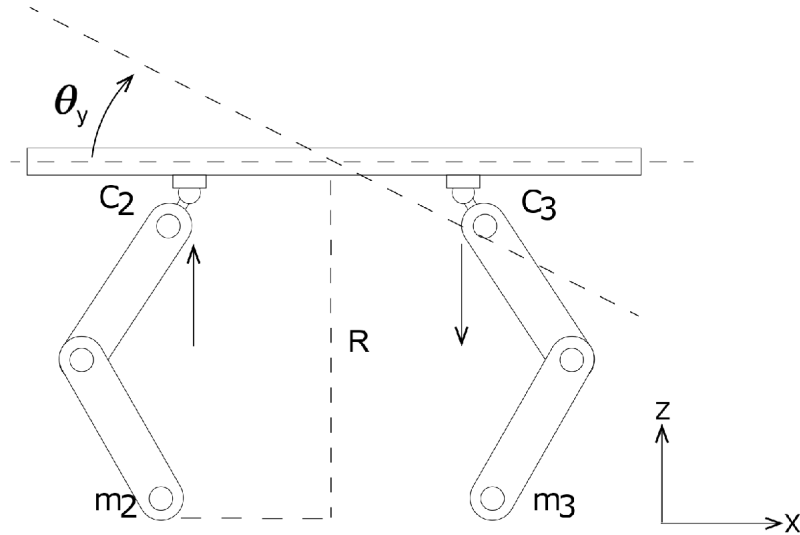


**Figura 3:** Corte ortogonal ao eixo  $\vec{x}$ . (Fonte: [1])

Para o ponto  $C_1$  de apoio do prato sobre o braço conectado ao motor 1, tem-se que a altura  $z_{C1}$  em relação à base do motor é:

$$z_{C1} = h + \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \theta_x$$

para  $h$  a altura do baricentro do prato em relação ao solo. Analogamente, na [Figura 4](#) está um corte do MOAB ortogonal aos eixos do Motor 2 (M2) e Motor 3 (M3).



**Figura 4:** Corte ortogonal ao eixo  $\vec{y}$ . (Fonte: [1])

Observando a [Figura 2](#) e comparando-a com a [Figura 4](#), é possível afirmar que os motores M2 e M3 distam  $s/2$  da mediana do triângulo equilátero de lado  $s$ . Sendo assim, a altura dos pontos de apoio do prato nos braços 2 ( $z_{C2}$ ) e 3 ( $z_{C3}$ ) são:

$$z_{C2} = R + \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \theta_y \text{ e } z_{C3} = R - \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \theta_y$$

para  $R$  a altura do ponto medial da aresta entre os vértices M2 e M3. Essa altura é dada de modo semelhante à  $z_{C1}$ , visto que dista  $2s/\sqrt{3}$  do baricentro. Sendo assim, tem-se que:

$$R = h - \frac{2s}{\sqrt{3}} \sin \theta_x$$

Considerando que as juntas entre os braços e o prato são completamente esféricas, cada ponto de apoio  $C_i$  está alinhado verticalmente com o respectivo motor  $M_i$ . Dessa forma, os ângulos  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  ilustrados na [Figura 3](#) são equivalentes. Como o comprimento dos dois eixos do brço são iguais e representados pela variável  $L$ , é possível afirmar que, para  $h_\alpha = h_\beta = L \sin \alpha = L \sin \beta$ :

$$z_{C1} = h_\alpha + h_\beta = 2L \sin \alpha_1$$

O ângulo  $\alpha_1$  representa a angulação do motor M1. Sendo assim, a atuação sobre o sistema é formulada como:

$$\alpha_i = \arcsin \left( \frac{z_{Ci}}{2L} \right)$$

para  $i = [1, 2, 3]$ . Para evitar singularidades, deve-se manter  $90^\circ < \alpha < 145^\circ$ .

## Metodologia, experimentos e discussão

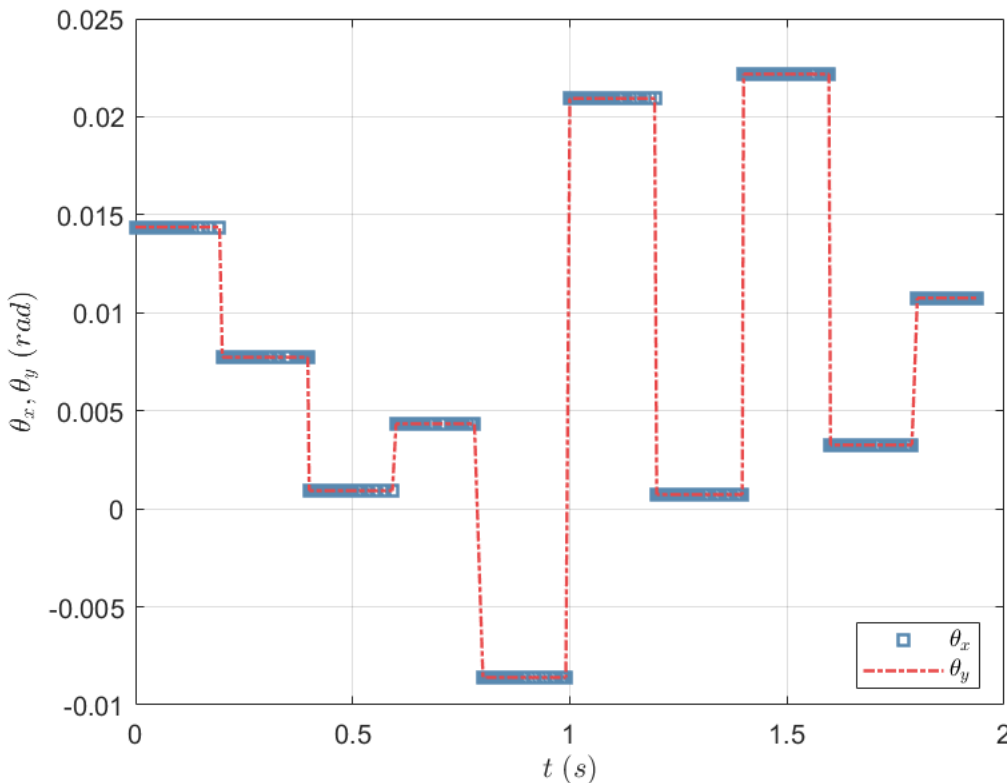
O modelo do MOAB descrito pelas [equações diferenciais](#) e a cinemática direta descrita pela [relação de e conforme a altura das juntas](#) foram simuladas pela ferramenta Simulink. Para verificar a veracidade das equações formuladas para o modelo, foram simulados dois experimentos.

Primeiramente, o sistema foi escrito na ferramenta Simscape [1]. Em segundo lugar, as equações diferenciais de  $x$  e  $y$  foram representadas conforme um diagrama de blocos no Simulink. Em ambos os experimentos, a malha foi fechada conforme os valores de referência  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  ilustrados na [Figura 5](#).

```
initializeMoab;
```

showing Mechanics Explorer

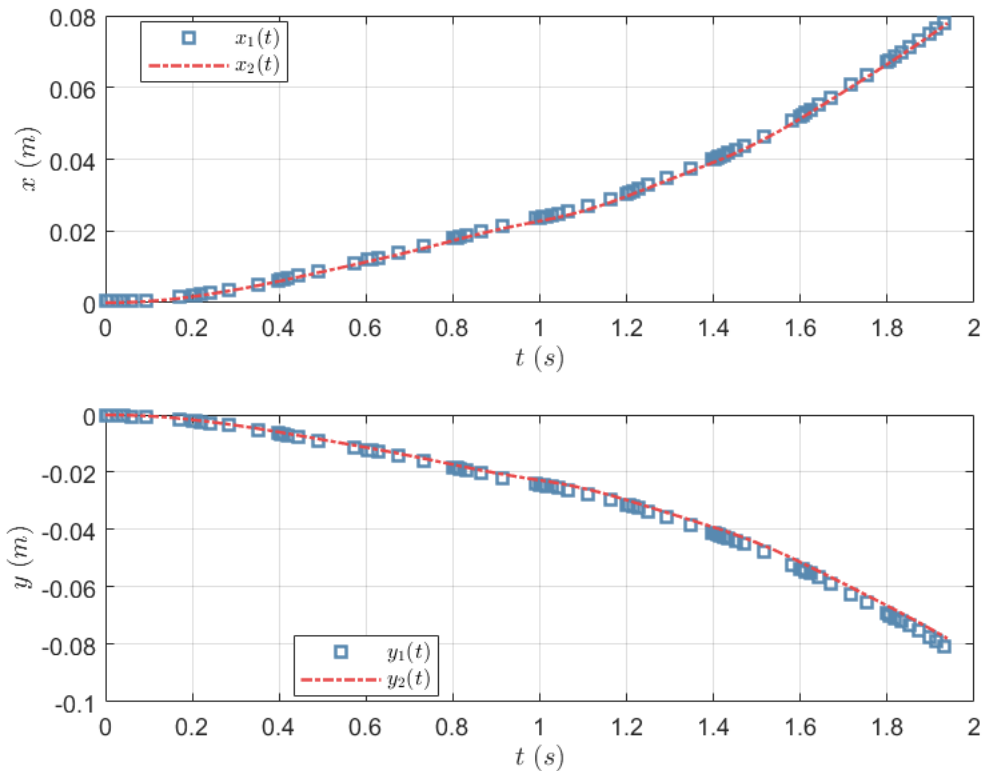
```
out = sim('MyMOAB.slx');
input
```



**Figura 5:** Referência angular  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  para o modelo do MOAB.

Por sua vez, os resultados da posição da bola  $x$  e  $y$  conforme os valores de entrada para  $\theta_x^*$  e  $\theta_y^*$  para ambos os experimentos está ilustrada na [Figura 6](#).

output



**Figura 6:** Posição da bola  $(x, y)$  em relação ao sistema de coordenadas inercial para o experimento com o Simscape (1) e com o diagrama de blocos (2).

Observando a [Figura 6](#), é evidente que o modelo simulado no Simscape retorna valores menores em ambos os eixos em relação ao resultado do diagrama de blocos. Essa observação é justificada em razão do [equacionamento diferencial representado no Experimento 2](#), o qual considera a [premissa de atrito nulo](#). Por sua vez, o simulador Simscape considera um coeficiente de atrito estático e dinâmico não nulo, uma vez que o movimento da bola sobre o prato deriva da existência de uma força de atrito entre as superfícies. Sendo assim, é possível concluir que as perdas consideradas no modelo do Experimento 1 são desprezadas no Experimento 2.

## Referências bibliográficas

[1] A. SINGH. **Moab System Modeling and PID Controller Design**.