Relatório de Atividade - Regulador auto-ajustável

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Análise e Projeto de Sistemas de Controle 21.1

19 de Maio de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a dinâmica de uma bola sobre um prato cuja angulação é controlada. Esse sistema é nomeado MOAB. Nesse trabalho, seá analisados o modelo dinâmico e as entradas de atuação sobre a pose do prato para que a bola percorra uma trajetória pré-definida.

Table of Contents

Fundamentação teórica

O sistema de balanceamento de uma bola sobre um prato estudado nesse trabalho está ilustrado na Figura 1**.** No caso em estudo, o prato pode ser inclinado em duas direções perpendiculares ($\vec{x}$ e $\vec{y}$) por meio do acionamento de três motores elétricos. Esses motores estão distribuído nos vértices de um triângulo equilátero, conforme ilustrado na Figura 2. A velocidade de rotação e angulação desses motores pode ser controlada para estabilizar a bola em um ponto específico do prato ou para navegar a bola sobre uma trajetória pré-definida.

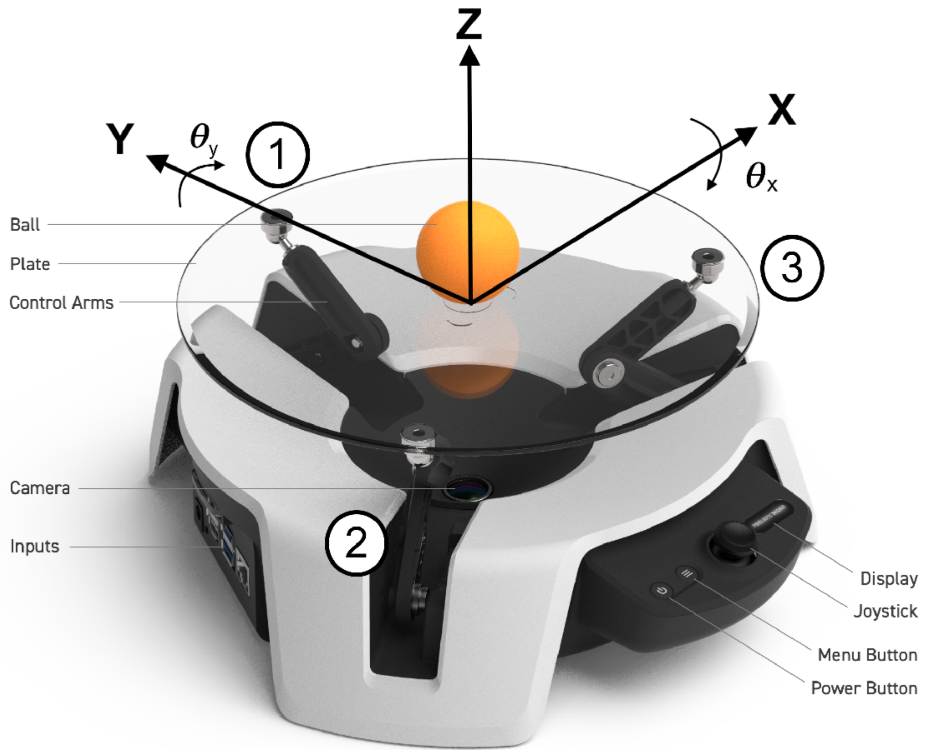

Figura 1: *Sistema da bola sobre um prato cuja angulação θ_y e θ_x é controlável. (Fonte: [1])*

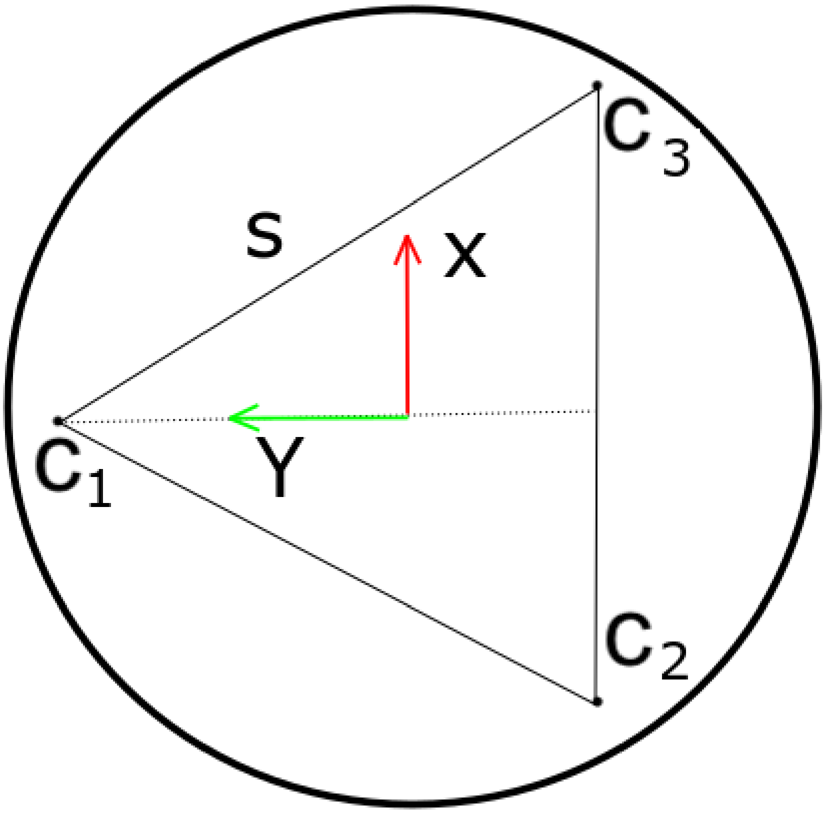

Figura 2: *Visão superior do prato. (Fonte:* [1])

O MOAB possui quatro graus de liberdade: dois graus de liberdade provenientes da inclinação do prato e dois graus referentes ao movimento da bola sobre o prato. Além disso, é importante destacar que a relação entre a posição atual da bola e a variação da inclinação do prato é não-linear. Para simplificar o modelo em estudo, são consideradas as seguintes premissas:

1. A bola nunca perde contato com a superfície do prato.
2. Não há deslizamento entre a bola e o prato.
3. Forças de atrito são desprezíveis.

A estimativa do modelo será realizada pela formulação de Lagrange, uma vez que, em relação ao modelo cinemático newtoniano, é mais fácil tratar as mudanças de sistemas de coordenadas.

Modelo simulado

O Lagrangiano de um sistema é descrito por:

$$\mathscr{L} = T - V$$

para T a energia cinética e V a energia potencial do processo. A energia cinética do sistema é composta pela energia translacional da bola em relação à origem do prato, energia rotacional da bola em relação ao seu centro de massa, energia translacional do prato e energia rotacional da bola em relação à origem do prato. Como a origem do prato é o ponto pivotante, a energia translacional do prato é nula. Qualquer movimento não intencional do centro do prato em relação a sua origem será considerado desprezível.

A posição da bola em relação ao sistema inercial do prato pode ser escrita como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + (-x\sin\theta_y + y\sin\theta_x)\hat{k}$$

Diferenciando a posição da bola em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{i} + (-\dot{x}\sin\theta_y - x\dot{\theta}_y\cos\theta_y + \dot{y}\sin\theta_x + y\dot{\theta}_x\cos\theta_x)$$

Considerando que o ponto de equilíbrio é para θ_y e θ_x aproximadamente nulo, considera-se, pela expansão em série de Taylor, que $\cos\theta = 1$ e $\sin\theta = 0$. Dessa forma, a derivada da posição em relação ao tempo é reescrita como:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{i} + (-x\dot{\theta}_y + y\dot{\theta}_x)$$

Por sua vez, A energia cinética pode ser expressa por:

$$T_T = \frac{1}{2}m_b|\dot{r}|^2 = \frac{1}{2}m_b\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (-x\dot{\theta}_y + y\dot{\theta}_x)^2\right]$$

para m_b a massa da bola.

Como a bola não se separa da superfície do prato, a velocidade em relação ao prato é nula. Sendo assim, a velocidade rotacional da bola pode ser escrita como $\omega_b = v_b/r_b$ para $\vec{v_b} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ a delovidade da bola em relação ao prato e r_b o raio da bola. Logo, a energia rotacional da bola ao redor do seu centro de gravidade é definida como:

$$T_R = \frac{1}{2}J_b\omega_b^2 = \frac{1}{2}J_b\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{r_b^2}$$

para J_b o momento de inércia da bola. Por sua vez, a energia rotacional do sistema bola-prato em relação ao sistema de coordenadas inercial é dada por:

$$T_r = \frac{1}{2}J_b(\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_x^2) + \frac{1}{2}J_{px}\dot{\theta}_x^2 + \frac{1}{2}J_{py}\dot{\theta}_y^2$$

para J_{px} e J_{py} os momentos de inércia do prato em relação aos eixos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, respectivamente. Por fim, a energia potencial da bola com o sistema em equilíbrio é dada por:

$$V = m_b g(-x\sin\theta_y + y\sin\theta_x)$$

Logo, tem-se que o Lagrangiano do sistema é $\mathscr{L} = T_T + T_R + T_r - V$, tal que:

$$\mathscr{L} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(m_b + J_b r_b^{-2}) + m_b(x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x)^2 + J_b(\dot{\theta_y}^2 + \dot{\theta_x}^2) + J_{px}\dot{\theta}_x^2 + J_{py}\dot{\theta}_y^2}{2} - m_b g(-x\sin\theta_y + y\sin\theta_x)$$

A equação de Lagrange-Euler descreve que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{q}_i}\right) - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta q_i} = Q_i$$

para q_i as coordenadas do sistema de coordenadas inercial no mundo e Q_i as forças sobre o sistema. Para $\dot{q}_i = \dot{x}$ e $q_i = \dot{y}$ tem-se

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}} = (m_b + J_b r_b^{-2})\dot{x} \text{ e } \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{y}} = (m_b + J_b r_b^{-2})\dot{y}$$

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta x} = m_b g\sin\theta_y + m_b\dot{\theta}_y(x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x) \text{ e } \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta y} = -m_b g\sin\theta_x + m_b\dot{\theta}_x(y\dot{\theta}_x + x\dot{\theta}_y)$$

Derivando $\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{q}_i}$ em relação ao tempo para $\dot{q}_i = \dot{x}$ e $q_i = \dot{y}$ t, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{x}}\right) = (m_b + J_b r_b^{-2})\ddot{x} \text{ e } \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot{y}}\right) = (m_b + J_b r_b^{-2})\ddot{y}$$

Como não há forças externas sobre o sistema, tem-se que $F_x = F_y = 0$. Logo, é evidente que $Q_i = 0$, para $q_i = y$ e $q_i = x$. Sendo assim, a equação de Euler-Lagrange para cada eixo é escrita para o modelo do MOAB como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{x}}\right) - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta x} = (m_b + J_b r_b^{-2})\ddot{x} - m_b g \sin\theta_y - m_b \dot{\theta}_y (x\dot{\theta}_y - y\dot{\theta}_x) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{y}}\right) - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta y} = (m_b + J_b r_b^{-2})\ddot{y} - m_b g \sin\theta_x + m_b \dot{\theta}_x (y\dot{\theta}_x + x\dot{\theta}_y) = 0$$

O momento de inércia para uma casca esférica é dada como $J_b = \frac{2}{5} m_b \frac{(r_2)^5 - (r_1)^5}{(r_2)^3 - (r_1)^3}$ para r_1 e r_2 o raio interno e externo, respectivamente. Isolando a segunda derivada das variáveis x e y em relação ao tempo, obtém-se:

$$\ddot{x} = \frac{m_b(x\dot{\theta}_y^2 - y\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y + g\sin\theta_y)}{(m_b + J_b r_b^{-2})} \text{ e } \ddot{y} = \frac{m_b(y\dot{\theta}_x^2 + x\dot{\theta}_y\dot{\theta}_x - g\sin\theta_x)}{(m_b + J_b r_b^{-2})}$$

No que lhe concerne, o controle sobre a angulação do prato θ_x e θ_y é realizada pelo acionamento de três motores.

Variáveis de atuação

Na Figura 3 está ilustrado um corte do MOAB ortogonal ao eixo do Motor 1 (M1). Considerando que d é a distância do vértice superior do triangulo equilátero em relação ao seu baricentro, é evidente que $d = s/\sqrt{3}$, para s a lateral do triângulo equilátero ilustrado na Figura 2.

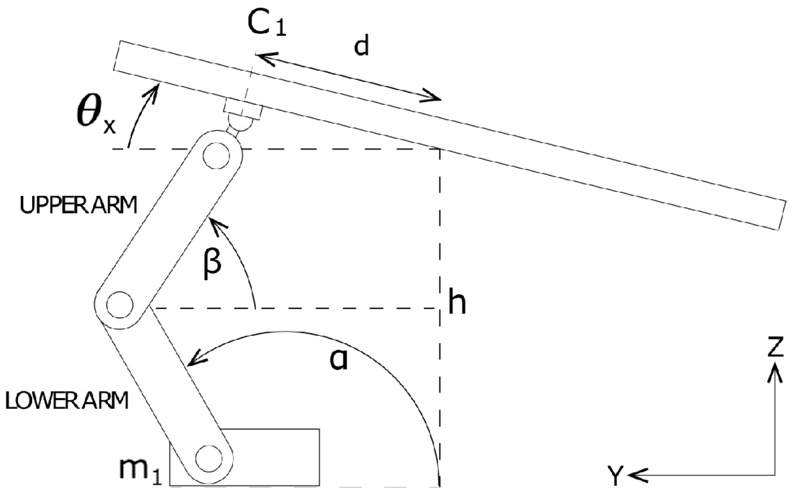

Figura 3: *Corte ortogonal ao eixo* $\vec{x}$ *. (Fonte:* [1]*)*

Para o ponto C_1 de apoio do prato sobre o braço conectado ao motor 1, tem-se que a altura z_{C1} em relação à base do motor é:

$$z_{C1} = h + \frac{s}{\sqrt{3}} \sin\theta_x$$

para h a altura do baricentro do prato em relação ao solo. Analogamente, na Figura 4 está um corte do MOAB ortogonal aos eixos do Motor 2 (M2) e Motor 3 (M3).

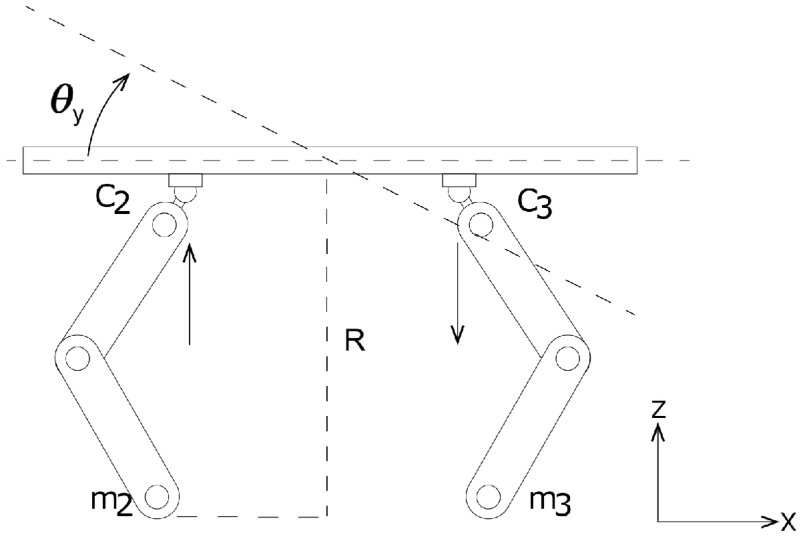

Figura 4: *Corte ortogonal ao eixo* $\vec{y}$ *. (Fonte:* [1])

Observando a Figura 2 e comparando-a com a Figura 4, é possível afirmar que os motores M2 e M3 distam $s/2$ da mediana do triângulo equilátero de lado s. Sendo assim, a altura dos pontos de apoio do prato nos braços 2 (z_{C2}) e 3 (z_{C3}) são:

$$z_{C2} = R + \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \theta_y \text{ e } z_{C3} = R - \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \theta_y$$

para R a altura do ponto medial da aresta entre os vértices M2 e M3. Essa altura é dada de modo semelhante à z_{C1}, visto que dista $2s/\sqrt{3}$ do baricentro. Sendo assim, tem-se que:

$$R = h - \frac{2s}{\sqrt{3}} \sin \theta_x$$

Considerando que as juntas entre os braços e o prato são completamente esféricas, cada ponto de apoio C_i está alinhado verticalmente com o respectivo motor M_i. Dessa forma, os ângulos α_1 e β_1 ilustrados na Figura 3 são equivalentes. Como o comprimento dos dois eixos do brço são iguais e representados pela variável L, é possível afimar que, para $h_\alpha = h_\beta = L \sin \alpha = L \sin \beta$:

$$z_{C1} = h_\alpha + h_\beta = 2L \sin \alpha_1$$

O ângulo α_1 representa a angulação do motor M1. Sendo assim, a atuação sobre o sistema é formulada como:

$$\alpha_i = \arcsin \left(\frac{z_{Ci}}{2L} \right)$$

para $i = [1, 2, 3]$. Para evitar singularidades, deve-se manter $90^\circ < \alpha < 145^\circ$.

Metodologia, experimentos e discussão

O modelo do MOAB descrito pelas equações diferenciais e a cinemática direta descrita pela relação de e conforme a altura das juntas foram simuladas pela ferramenta Simulink. Para verificar a veracidade das equações formuladas para o modelo, foram simulados dois experimentos.

Primeiramente, o sistema foi escrito na ferramenta Simscape [1]. Em segundo lugar, as equações diferenciais de x e y foram representadas conforme um diagrama de blocos no Simulink. Em ambos os experimentos, a malha foi fechada conforme os valores de referência θ_x^* e θ_y^* ilustrados na Figura 5.

```
initializeMoab;
```

```
showing Mechanics Explorer
```

```
out = sim('MyMOAB.slx');
input
```

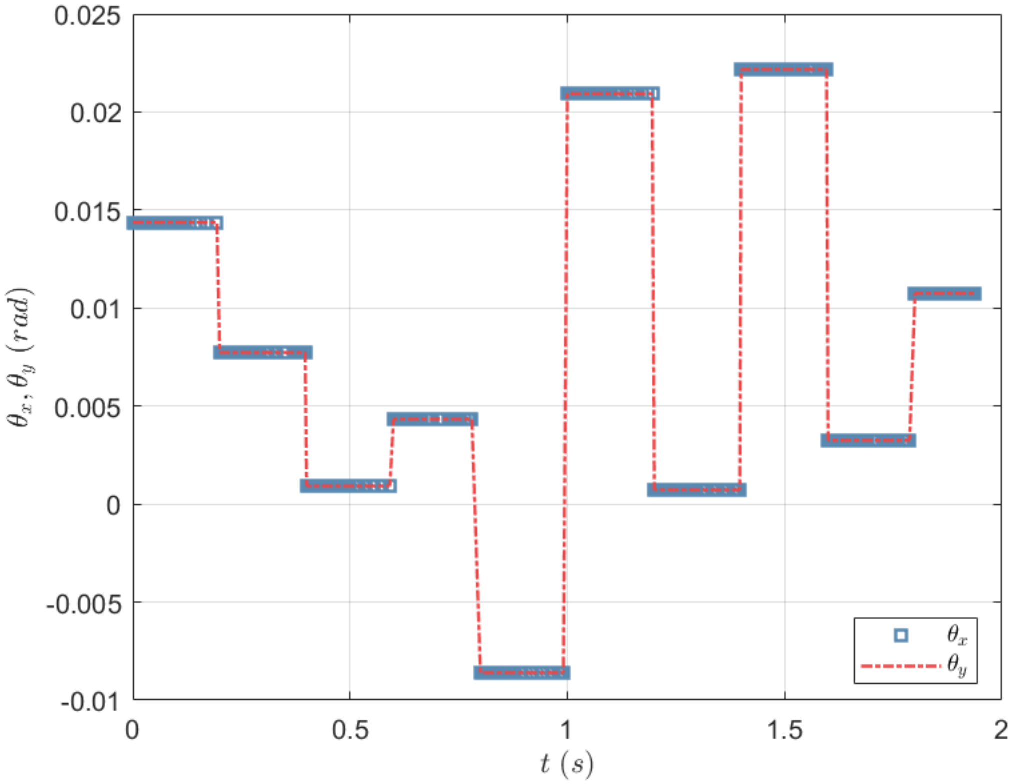

Figura 5: *Referência angular θ_x^* e θ_y^* para o modelo do MOAB.*

Por sua vez, os resultados da posição da bola x e y conforme os valores de entrada para θ_x^* e θ_y^* para ambos os experimentos está ilustrada na Figura 6.

```
output
```

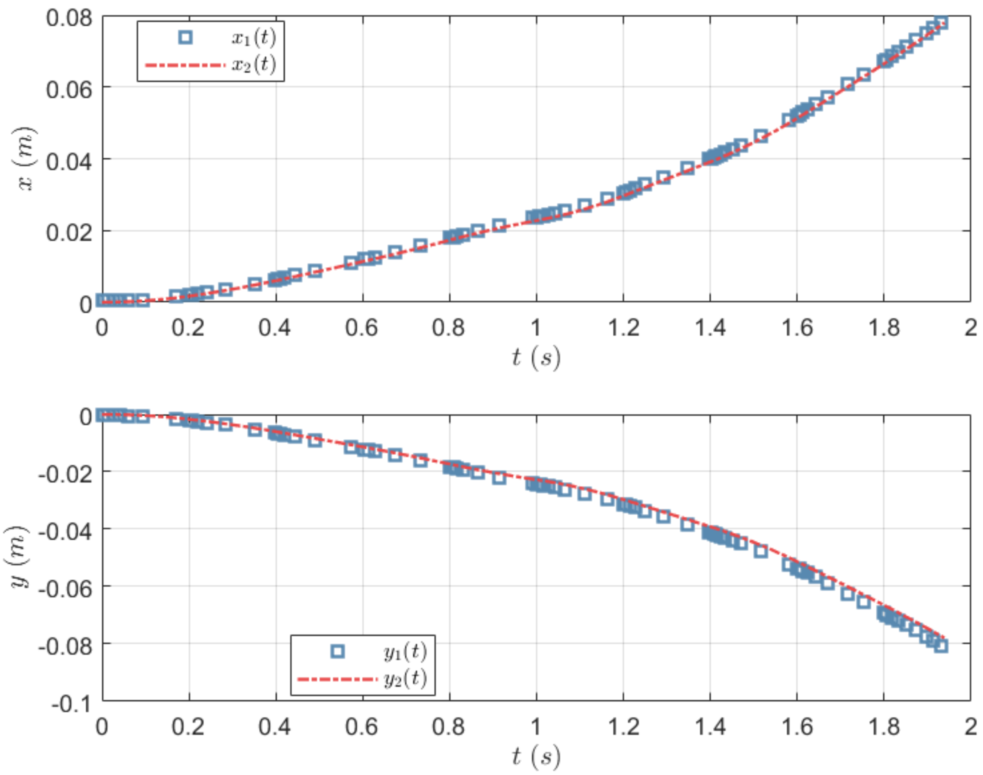

Figura 6: *Posição da bola* (x, y) *em relação ao sistema de coordenadas inercial para o experimento com o Simscape (1) e com o diagrama de blocos (2).*

Observando a Figura 6, é evidente que o modelo simulado no Simscape retorna valores menores em ambos os eixos em relação ao resultado do diagrama de blocos. Essa observação é justificada em razão do equacionamento diferencial representado no Experimento 2, o qual considera a premissa de atrito nulo. Por sua vez, o simulador Simscape considera um coeficiente de atrito estático e dinâmico não nulo, uma vez que o movimento da bola sobre o prato deriva da existência de uma força de atrito entre as superfícies. Sendo assim, é possível concluir que as perdas consideradas no modelo do Experimento 1 são desprezadas no Experimento 2.

Referências bibliográficas

[1] A. SINGH. **Moab System Modeling and PID Controller Design**.