

Relatório de Atividade - Regulador auto-ajustável

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Análise e Projeto de Sistemas de Controle 21.1

15 de Maio de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever um *Self Tuning Regulator* (STR). Esse algoritmo determina uma convergência de um controlador adaptativo para um **processo linear e invariante no tempo**. Nesse trabalho, será considerado que a planta possui uma única entrada e uma única saída. Também será definido que a frequência do laço de estimação é a mesma do controlador. Por fim, será utilizado o método de mínimos quadrados para estimar os parâmetros do processo e o algoritmo de localização determinística dos polos para o projeto da lei de controle.

Table of Contents

[Fundamentação Teórica](#)

[Desenvolvimento](#)

[Exemplo 1: STR com cancelamento de zeros](#)

[Exemplo 2: STR sem cancelamento de zeros](#)

[Exemplo 3: STR contínuo no tempo](#)

[Exemplo 4: Regulador indireto adaptativo com cancelamento de zeros discreto](#)

[Exemplo 5: Regulador indireto adaptativo sem cancelamento de zeros discreto](#)

[Exemplo 6: Regulador indireto adaptativo sem cancelamento de zeros no domínio contínuo](#)

[Exemplo 7: Regulador adaptativo direto para \$d_0=1\$](#)

[Exemplo 8: Regulador adaptativo direto para \$d_0=2\$](#)

[Exemplo 9: Adição de distúrbios ao sinal de controle](#)

[Exemplo 10: Rejeição de distúrbios no sinal de controle](#)

[Exercício proposto: Observador-estimador com ação integral](#)

[Referências bibliográficas](#)

Fundamentação Teórica

Um processo linear de única entrada e única saída (SISO, *Single Input - Single Output*) pode ser matematicamente expresso como:

$$Ay(t) = B(u(t) + v(t))$$

para y a saída do sistema, u a entrada do processo e v um distúrbio qualquer. Por sua vez, A e B são polinômios primos relativos em função do operador de atraso q^{-1} . Tendo em vista que as funções de transferência $Y(s)/U(s)$ e $Y(s)/V(s)$ caracterizam um sistema causal, é evidente que, se $\deg A = n$, obtém-se $\deg B = \deg A - d_0 = m$, para d_0 o "excesso" de polos do denominador A em relação ao numerador B . É importante destacar que o polinômio A é mônico.

A malha de realimentação para um controlador generalizado pode ser expressa como:

$$Ru(t) = Tu_c(t) - Sy(t)$$

para R , T e S polinômios e u_c o sinal de referência para o controlador. Similarmente, para garantir um controlador causal, é claro que $\deg S \leq \deg R$ e $\deg T \leq \deg R$.

Substituindo a [função da malha de realimentação](#) na [equação do processo](#), obtém-se o sistema em malha fechada descrito por:

$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS} u_c(t) + \frac{BR}{AR + BS} v(t)$$
$$u(t) = \frac{AT}{AR + BS} u_c(t) - \frac{BS}{AR + BS} v(t)$$

É evidente que o polinômio característico da malha fechada é $A_c = AR + BS$. Essa equação é denominada "Equação Diophantina" e possui infinitas soluções para R e S caso os polinômios A e B não compartilhem fatores comuns, isto é, caso sejam primos relativos. Considerando que o A possui maior ordem que B , a ordem de R é definida como $\deg R = \deg A_c - \deg A$.

Para determinar o polinômio T não incluso na equação Diophantina, é preciso especificar a função de transferência da saída $y_m(t)$ em malha fechada em relação ao sinal de referência $u_c(t)$ tal como:

$$\frac{BT}{AR + BS} = \frac{BT}{A_c} = \frac{B_m}{A_m}$$

O polinômio B pode ser fatorado em B^+B^- , para B^+ um polinômio mônico com os zeros de B bem amortecidos que podem ser cancelados com os polos do controlador, e B^- um polinômio com os zeros não amortecidos de B que não podem ser cancelados com polos do controlador.

Logo, o polinômio B_m deve conter o fator B^- tal como $B_m = B^-B'_m$. Além disso, o polinômio A_c deve conter o fator cancelado B^+ , tal como $A_c = A_0A_mB^+$. Como B^+ é fator de B e A_c mas não é fator de A , é evidente que B^+ deve ser fator de R , o qual é descrito como $R = B^+R'$.

Logo, determina-se o polinômio T como:

$$\frac{B^+B^-T}{A_0A_mB^+} = \frac{B^-B'_m}{A_m} \rightarrow T = A_0B'_m$$

Dessa forma, a equação Diophantina pode ser reescrita como:

$$A'_c = A_0A_m = AR' + B^-S$$

Essa equação garante que, para determinado controlador definido pelos polinômios R , S e T , a resposta em malha fechada do processo A e B é conforme o comportamento de A_m e B_m . A nova formulação de da equação Diophantina possui infinitas soluções para $R = R_0 + QB$ e $S = S_0 - QA$ para Q um polinômio qualquer. Neste trabalho, será buscada a solução para o controlador de menor grau. Sendo assim, tem-se que $\deg S \leq \deg A - 1$. Logo, pode-se obter as seguintes restrições para garantir a causalidade do controlador:

$$\deg S \leq \deg R \rightarrow \deg A - 1 \leq \deg A_c - \deg A \therefore 2 \deg A - 1 \leq \deg A_c$$

$$\deg T \leq \deg R \rightarrow \deg A_0 + \deg B'_m \leq \deg A_0 + \deg A_m + \deg B^+ - \deg A \therefore \deg A - \deg B^+ \leq \deg A_m - \deg B'_m$$

Somando o fator $\deg B^-$ em ambos os lados da [última inequação](#), obtém-se que:

$$d_0 = \deg A - \deg B \leq \deg A_m - \deg B_m$$

Como o controlador é discreto, é necessário que todos os polinômios R , S e T representem o mesmo atraso, e, portanto, possuam o mesmo grau. Dessa forma, tem-se que:

$$\deg R = \deg A_0 + \deg A_m + \deg B^+ - \deg A = \deg S = \deg A - 1$$

Considerando que foi encontrado o modelo de mínima ordem do processo em malha fechada, isto é, $\deg A_m = \deg A$, pode-se encontrar que:

$$\deg A_0 = \deg A - \deg B^+ - 1$$

É evidente que o algoritmo apresentado é puramente algébrico e pode ser aplicado tanto em sistemas contínuos quanto processos discretos.

Desenvolvimento

Os controladores propostos foram construídos e simulados utilizando blocos no Simulink. As estratégias adotadas seguem a apresentação citada na [Seção 1](#). Primeiramente, serão apresentados os exercícios resolvidos. Por fim, serão discutidas as questões propostas.

Exemplo 1: STR com cancelamento de zeros

Para este exemplo, será considerado o processo contínuo $G(s)$ tal que seu equivalente discreto $H(q)$ é expresso por:

$$H(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0q + b_1}{q^2 + a_1q + a_2}$$

Sendo assim, é claro que $\deg A = 2$ e $\deg B = 1$. É possível aplicar que $B^- = b_0$ e $B^+ = \frac{B}{B^-} = q + \frac{b_1}{b_0}$. Dessa forma, o único zero de B é parcela de B^+ e, portanto, cancelado por um polo do controlador A_c . Sabendo que a resposta esperada em malha fechada é dada por:

$$H_m(q) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} = \frac{b_{m0}q}{q^2 + a_{m1}q + a_{m2}}$$

Tem-se que, $B'_m = \frac{B_m}{B^-} = \frac{b_{m0}q}{b_0}$. Como $\deg S = \deg A - 1 = 1$ e $\deg R = \deg S = 1$, é evidente que $\deg R' = \deg R - \deg B^+ = 0$.

Logo, como R' é mônico, $R' = 1$. Como $\deg A_m = \deg A$ e $\deg B^+ = \deg B$, obtém-se que $\deg A_0 = \deg A - \deg B - 1 = 0$. Logo, pode-se definir que $A_0 = 1$.

A equação Diophantina é, então, escrita como:

$$q^2 + a_{m1}q + a_{m2} = (q^2 + a_1q + a_2) + b_0S$$

Como $\deg S = 1$, é possível representar $S = s_0q + s_1$. Dessa forma, tem-se que:

$$s_0 = \frac{a_{m1} - a_1}{b_0} \text{ e } s_1 = \frac{a_{m2} - a_2}{b_0}$$

Logo, conclui-se que $R = B^+ = q + \frac{b_1}{b_0}$, $S = \frac{(a_{m1} - a_1)q + (a_{m2} - a_2)}{b_0}$ e $T = B'_m = \frac{b_{m0}q}{b_0}$.

Para que o fator B^+ seja cancelado pelo polinômio característico do controlador A_c , é necessário que o zero de B^+ seja fortemente amortecido. Caso contrário, o polo do controlador discreto se aproxima da instabilidade. Em casos de zeros pouco amortecidos em B , esses fatores devem ser considerados no fator B^- , como descrito no [Exemplo 2](#).

Exemplo 2: STR sem cancelamento de zeros

Para este exemplo, será considerado o processo contínuo $G(s)$ tal que seu equivalente discreto $H(q)$ é expresso por:

$$H(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0q + b_1}{q^2 + a_1q + a_2}$$

Sendo assim, $\deg A = 2$ e $\deg B = 1$. É possível aplicar que $B^- = b_0q + b_1$ e $B^+ = \frac{B}{B^-} = 1$. Dessa forma, o único zero de B é parcela de B^- e, portanto, não cancelado por um polo do controlador A_c . Sabendo que a resposta esperada em malha fechada é dada por:

$$H_m(q) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)} = \frac{\beta(b_0q + b_1)}{q^2 + a_{m1}q + a_{m2}} = \frac{b_{m0}q + b_{m1}}{q^2 + a_{m1}q + a_{m2}}$$

para $B'_m = \frac{B_m}{B^-} = \beta$. Como $\deg S = \deg A - 1 = 1$ e $\deg R = \deg S = 1$, é evidente que $\deg R' = \deg R - \deg B^+ = 1$. Logo, como R' é mônico, tem-se que $R' = q + r_1$. Como $\deg A_m = \deg A$, obtém-se que $\deg A_0 = \deg A - \deg B^+ - 1 = 1$. Logo, pode-se representar que $A_0 = q + a_0$. Analogamente, como $\deg S = 1$, é possível representar $S = s_0q + s_1$.

A equação Diophantina é então escrita como:

$$(q + a_0)(q^2 + a_{m1}q + a_{m2}) = (q^2 + a_1q + a_2)(q + r_1) + (b_0q + b_1)(s_0q + s_1)$$

Adotando $q = -b_1/b_0$, é possível encontrar que

$$r_1 = \frac{(a_0 + a_{m1} - a_1)b_1^2 + (a_2 - a_{m2} - a_0a_{m1})b_0b_1 + (a_0a_{m2})b_0^2}{b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2}$$

Se $A(q)$ e $B(q)$ possuírem algum fator em comum, o denominador de r_1 é nulo. Entretanto, essa condição invalida a premissa considerada pela equação Diophantina que os polinômios A e B são primos relativos.

Conhecendo r_1 , é possível definir as constantes s_0 e s_1 . Pelo extensivo equacionamento para equivalência das potências de q em ambos os lados da equação Diophantina, esse resultado pode ser encontrado na equação 3.21 da [bibliografia](#). Por fim, tem-se que $T = B'_m A_0 = \beta(q + a_0)$.

Os métodos aplicados no [Exemplo 1](#) e [Exemplo 2](#) podem ser utilizados com funções de transferência contínuas, tal como apresentado no [Exemplo 3](#).

Exemplo 3: STR contínuo no tempo

Para este exemplo, será considerado o processo contínuo $G(s)$ expresso por:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b}{s^2 + as}$$

Sendo assim, $\deg A = 2$ e $\deg B = 1$. É possível aplicar que $B^- = b$ e $B^+ = \frac{B}{B^-} = 1$. Sabendo que a resposta esperada em malha fechada é dada por:

$$H_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

para $B'_m = \frac{B_m}{B^-} = \frac{\omega^2}{b}$. Como $\deg S = \deg A - 1 = 1$ e $\deg R = \deg S = 1$, é evidente que $\deg R' = \deg R - \deg B^+ = 1$. Logo, como R' é mônico, tem-se que $R' = s + r_1$. Como $\deg A_m = \deg A$, obtém-se que $\deg A_0 = \deg A - \deg B^+ - 1 = 1$. Logo, pode-se representar que $A_0 = s + a_0$. Analogamente, como $\deg S = 1$, é possível representar $S = s_0s + s_1$.

A equação Diophantina é então escrita como:

$$(s + a_0)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) = (s^2 + as)(s + r_1) + b(s_0s + s_1)$$

Expandindo as multiplicações, obtém-se:

$$s^3 + s^2(2\zeta\omega + a_0) + s(\omega^2 + 2a_0\zeta\omega) + a_0\omega^2 = s^3 + s^2(a + r_1) + s(ar_1 + bs_0) + bs_1$$

Aplicando a equivalência dos fatores multiplicativos das das potências de q ambos os lados da equação Diophantina, tem-se que:

$$r_1 = 2\zeta\omega + a_0 - a, \quad s_0 = \frac{\omega^2 + 2a_0\zeta\omega - ar_1}{b} \quad e \quad s_1 = \frac{a_0\omega^2}{b}$$

para $b \neq 0$. Por fim, $T = B'_m A_0 = \frac{\omega^2(s + a_0)}{b}$.

Analisando este exemplo, é evidente que o polinômio $A_0 \neq 1$ para solução de mínimo grau quando há zeros não cancelados do processo, ou seja, se $B^- \neq b_0$. Esse polinômio A_0 representa a dinâmica do observador, o qual deve ser cancelado na função de transferência entre o sinal de comando u_c e a saída do processo y . Aplicando a equação Diophantina sobre a fração T/R , encontra-se que:

$$\frac{T}{R} = \frac{A_0 B'_m}{R} = \frac{(AR' + B^-S)B'_m}{A_m R} = \frac{AB_m}{BA_m} + \frac{SB_m}{RA_m}$$

Dessa forma, a lei de controle é reescrita como:

$$u = \frac{T}{R} u_c - \frac{S}{R} y = \frac{AB_m}{BA_m} u_c + \frac{SB_m}{RA_m} u_c - \frac{S}{R} y = \frac{AB_m}{BA_m} u_c - \frac{S}{R} (y_m - y)$$

Como $\deg B < \deg A$ para um processo causal, a função de transferência A/B não é realizável. Além disso, caso o sistema seja de fase não mínima, isto é, se os zeros de B estão no semi-plano direito de s , a função de transferência A/B é instável. Entretanto, a combinação em cascata do modelo de referência B_m/A_m e a inversa do processo A/B é realizável se $\deg T \leq \deg R$, uma vez que, conforme apresentado na [Seção 1](#), a causalidade da lei de controle garante que $d_0 = \deg A - \deg B \leq \deg A_m - \deg B_m$.

Tendo em vista que o termo $\frac{AB_m}{BA_m}$ representa a malha de *feedforward* e está separada da função de transferência de realimentação $\frac{S}{R}$, a cascata do modelo de referência e inversa do processo podem apresentar termos não lineares sem prejudicar a estabilidade da malha fechada.

Exemplo 4: Regulador indireto adaptativo com cancelamento de zeros discreto

Caso a função de transferência do processo B/A seja desconhecida, é possível estimá-la pelo método dos mínimos quadrados antes de aplicar os coeficientes a_n e b_n na equação Diophantina. Esse método é denominado regulador adaptativo indireto, uma vez que os parâmetros do controlador não são atualizados diretamente, mas alterados conforme a estimativa do modelo do processo.

Para tal, considera-se que o modelo do processo pode ser escrito como:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_0 u(t-d_0) + \dots + b_m u(t-d_0-m) = \varphi^T(t-1)\theta$$

para $\theta = [a_1 \dots a_n \ b_0 \dots b_m]$ e $\varphi^T(t-1) = [-y(t-1) \dots y(t-n) \ u(t-d_0) \dots u(t-d_0-m)]$. Conforme descrito na Atividade 2, o método dos mínimos quadrados recursivo é expresso como:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$$

para $\varepsilon = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$, $K(t) = P(t-1)\varphi(t-1)(\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1))^{-1}$ e

$P(t) = (I - K(t)\varphi^T(t-1)P(t-1))/\lambda$. Após estimar os coeficientes em θ referentes aos polinômios A e B , pode-se aplicar a equação Diophantina conforme a especificação da malha fechada B_m/A_m e do polinômio observador A_0 . Esse processo deve ser repetido a cada passo de amostragem.

Na [Figura 1](#), está ilustrado o sinal de saída do processo $y_m(t)$ em malha fechada e o sinal de referência $u_c(t)$ para uma função de malha fechada $H_m(q)$ tal que:

$$H_m(q) = \frac{B_m}{A_m} = \frac{0.1761q}{q^2 - 1.3205q + 0.4966}$$

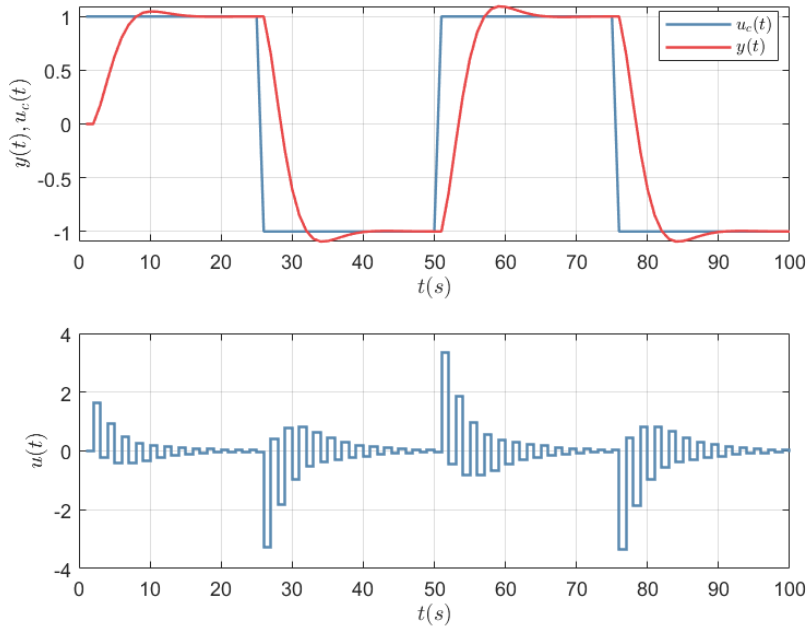


Figura 1: Sinal de saída da malha fechada $y_m(t)$, de referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

Conforme descrito no [Exemplo 1](#), a lei de controle generalizada conforme os polinômios da equação Diophantina para o cancelamento de todos os zeros do processo com os polos do controlador é escrita como:

$$u(t) = t_0 u_c(t) - s_0 y(t) - s_1 y(t-1) - r_1 u(t-1)$$

Esse sinal de controle $u(t)$ para o sinal de saída $y_m(t)$ e de referência $u_c(t)$ também está ilustrado na [Figura 1](#). Observando a [Figura 1](#), é evidente uma oscilação no sinal de controle $u(t)$. Essa variação é decorrente do cancelamento de um zero pouco amortecido do processo.

Em seguida, empregou-se o método dos mínimos quadrados recursivos (RLS) para a estimativa do processo em malha aberta. A função de transferência em malha aberta $H(q)$ é descrita por:

$$H(q) = \frac{B}{A} = \frac{b_0 q + b_1}{q^2 + a_1 q + a^2}$$

Na [Figura 2](#), está ilustrada a estimativa dos parâmetros $\hat{\theta} = [a_1 \ a_2 \ b_0 \ b_1]$ empregando RLS.

epex4_2

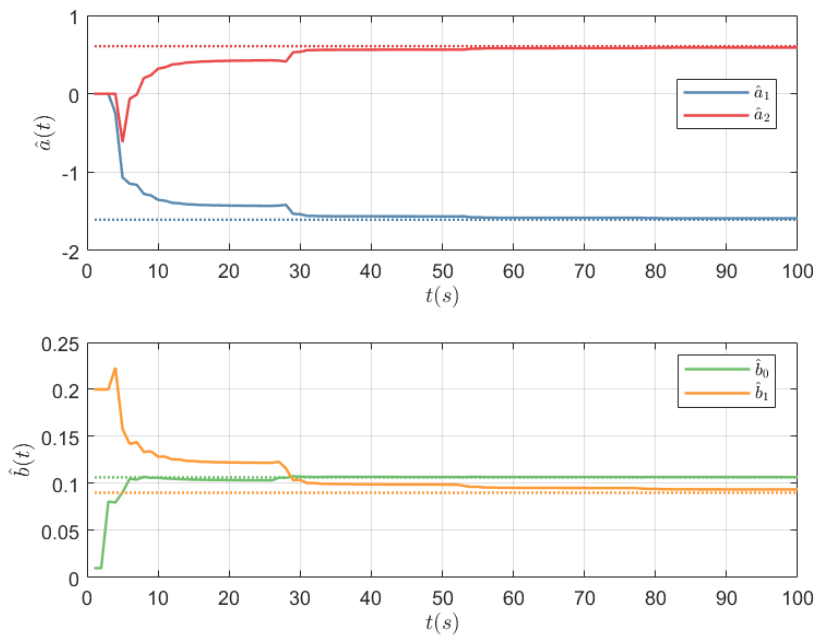


Figura 2: Estimativa dos parâmetros $\hat{\theta}$ do processo $H(q)$.

Observando a [Figura 2](#), é evidente a convergência do modelo estimado em relação aos parâmetros reais do processo em malha aberta. Conforme descrito no algoritmo, a cada passo de amostragem também são estimados os coeficientes r_n , s_n e t_n dos polinômios da lei de controle. Essa estimativa está ilustrada na [Figura 3](#).

epex4_3

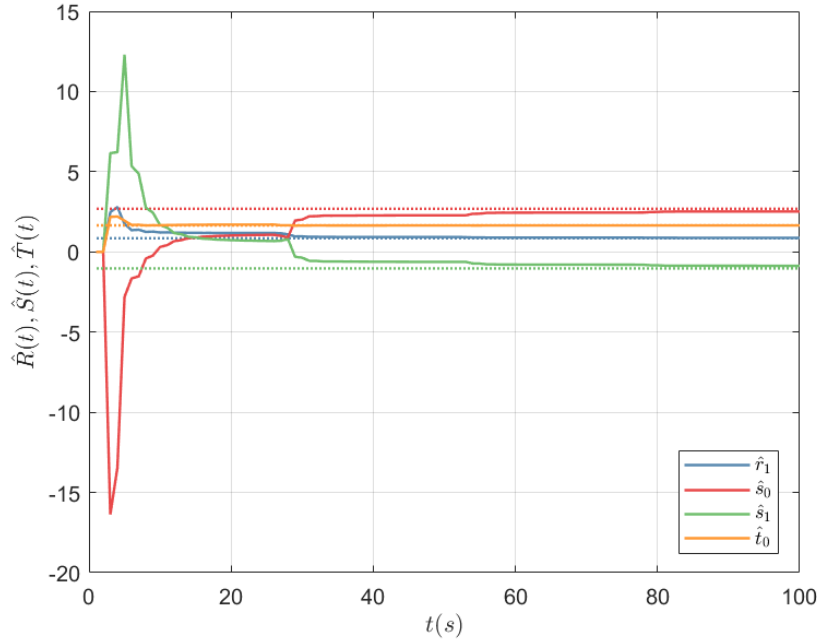


Figura 3: Estimativa dos coeficientes dos polinômios R , S e T .

Observando a [Figura 3](#), é possível concluir que os coeficientes de R , S e T convergem para os valores projetados. Com o intuito de evitar a oscilação do sinal de controle $u(t)$, pode-se aplicar a formulação sem cancelamento de zeros do processo apresentada no [Exemplo 2](#). Essa alteração será apresentada no [Exemplo 5](#) a seguir.

Exemplo 5: Regulador indireto adaptativo sem cancelamento de zeros discreto

Para esse exemplo, será considerada a função em malha fechada $H_m(q)$ tal que:

$$H_m(q) = \frac{B_m}{A_m} = \frac{0.0953q + 0.0808}{q^2 - 1.3205q + 0.4966}$$

Conforme descrito no [Exemplo 2](#), para a definição de $B^+ = 1$, é necessário considerar $A_0 = q + a_0$. Neste exemplo, será definido que $a_0 = 0$. O sinal de controle $u(t)$, o sinal de saída $y_m(t)$ e o sinal de referência $u_c(t)$ estão ilustrados na [Figura 4](#).

epex5_1

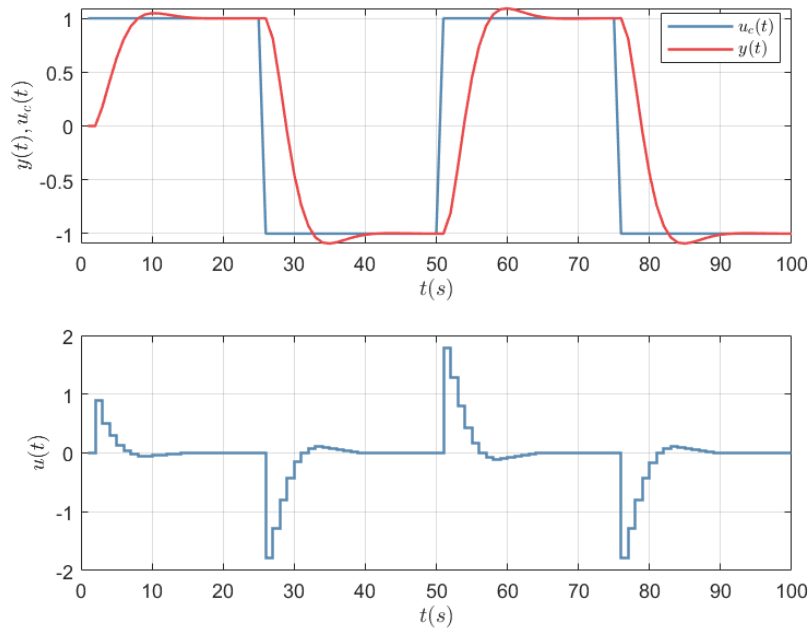


Figura 4: Sinal de saída da malha fechada $y_m(t)$, de referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

Observando a [Figura 4](#), é evidente a ausência da oscilação em $u(t)$ assim como apresentado na [Figura 1](#). Essa modificação é justificada pelo não cancelamento dos zeros pouco amortecidos do processo. Analogamente ao exemplo anterior, na [Figura 5](#), está ilustrada a estimativa dos parâmetros $\hat{\theta} = [a_1 \ a_2 \ b_0 \ b_1]$ empregando RLS.

epex5_2

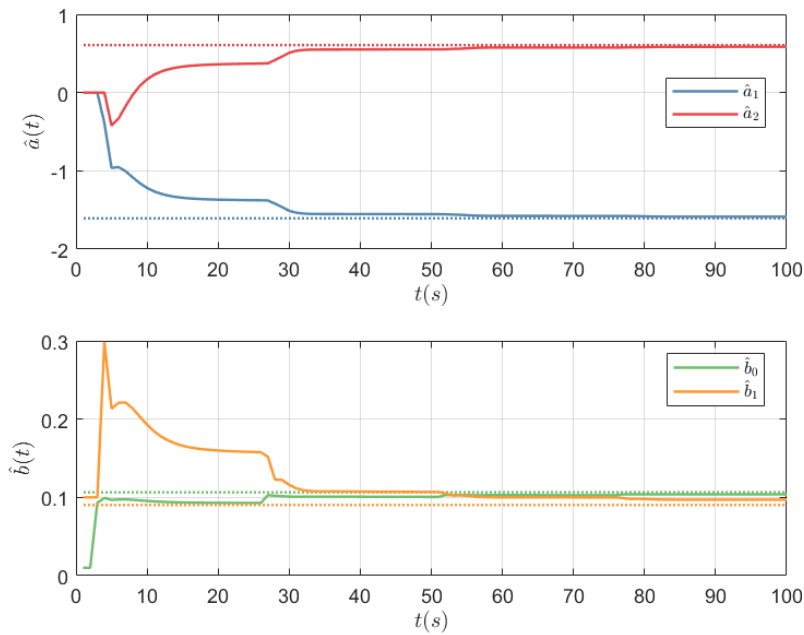


Figura 5: Estimativa dos parâmetros $\hat{\theta}$ do processo $H(q)$.

Observando a [Figura 5](#), é clara a convergência do modelo estimado em relação aos parâmetros reais a_n e b_n do processo em malha aberta. Conforme descrito no algoritmo, a cada passo de amostragem também são estimados os coeficientes r_n , s_n e t_n dos polinômios da lei de controle. Essa estimativa está ilustrada na [Figura 6](#).

epex4_3

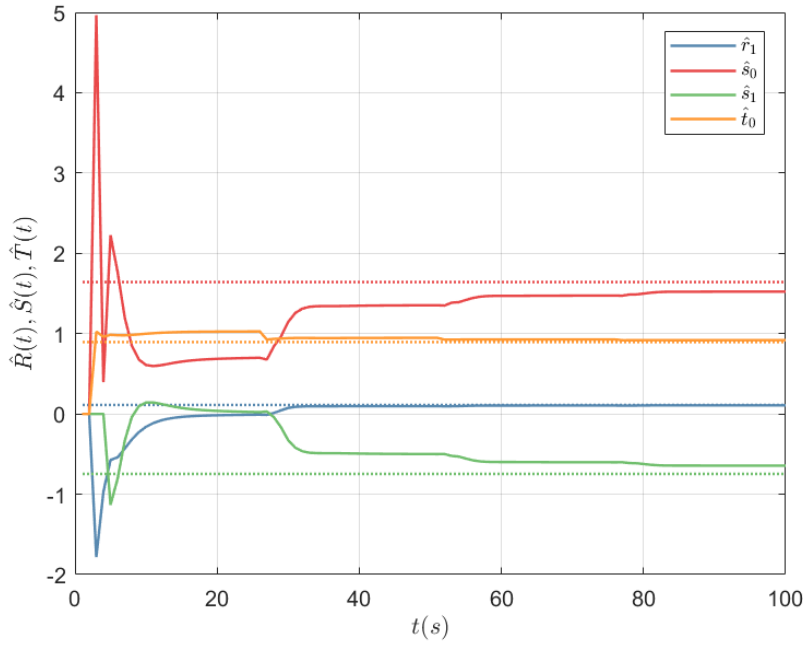


Figura 6: Estimativa dos coeficientes dos polinômios R , S e T .

Observando a [Figura 6](#), é possível observar que os coeficientes de R , S e T convergem para os valores projetados com um erro de regime permanente não nulo. Esse mesmo algoritmo para a estimativa de um controlador adaptativo indireto pode ser aplicado sobre modelos contínuos, assim como descrito no [Exemplo 6](#).

Exemplo 6: Regulador indireto adaptativo sem cancelamento de zeros no domínio contínuo

Para esse exemplo, será considerada a função em malha fechada $G_m(s)$ e aberta $G(s)$ tal que:

$$G_m(s) = \frac{B_m}{A_m} = \frac{1}{s^2 + 0.14s + 1} \text{ e } G(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

Conforme descrito no [Exemplo 3](#), para a definição de $B^+ = 1$, é necessário considerar $A_0 = q + a_0$. Neste exemplo, será definido que $a_0 = 2$. O sinal de controle $u(t)$, o sinal de saída $y_m(t)$ e o sinal de referência $u_c(t)$ estão ilustrados na [Figura 7](#).

epex6_1

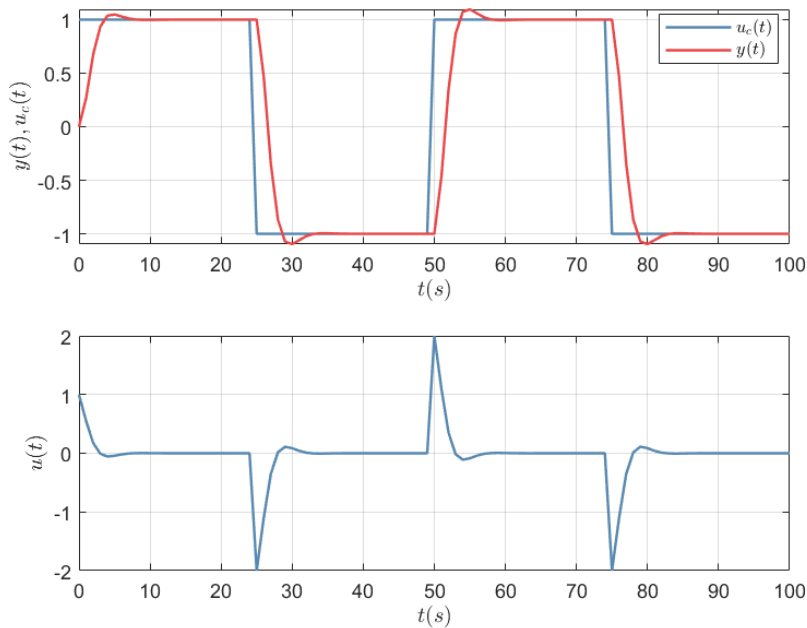


Figura 7: Sinal de saída da malha fechada $y_m(t)$, de referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

A função de transferência estimada para o processo pelo método de mínimos quadrados recursivo é:

epex6_2

Gc =

$$\frac{-0.0506 s + 0.8209}{s^2 + 1.355 s + 0.002332}$$

Continuous-time transfer function.

É evidente que, comparando com o numerador $b = 1$ da função $G(s)$ real do modelo, há o surgimento de um polinômio de primeiro grau $b_0s + b_1$ no numerador da função de transferência estimada. Essa diferença é decorrente da conversão do modelo discreto em contínuo para o período de amostragem simulado, isto é, há um erro numérico. Na [Figura 8](#), está ilustrada, respectivamente, a resposta $y_m(t)$ e $y_e(t)$ do processo real e estimado no domínio discreto em malha fechada.

epex6_3

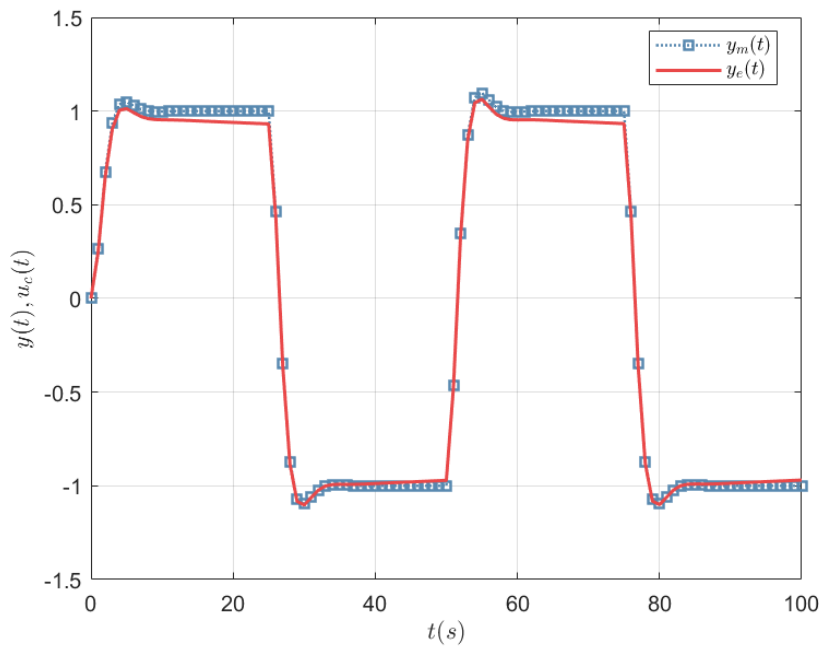


Figura 8: Sinal de saída da malha fechada $y_m(t)$ e estimada $y_e(t)$ via RLS.

Observando a [Figura 8](#), é evidente que a estimativa dos parâmetros da da função de transferência discreta está correta. O erro médio quadrático entre a curva estimada e $y_m(t)$ é aproximadamente 0.0013.

Exemplo 7: Regulador adaptativo direto para d0=1

É possível obter uma nova formulação da equação Diophantina multiplicando ambos os termos por $y(t)$. Dessa forma:

$$A_0 A_m y(t) = AR' y(t) + B^- S y(t)$$

Substituindo $Ay(t) = Bu(t)$, caso o distúrbio sobre a saída $v(t) = 0$, e considerando que $R'B = RB^-$, obtém-se que:

$$A_0 A_m y(t) = BR' u(t) + B^- S y(t) = B^- (Ru(t) + Sy(t))$$

Esse equacionamento pode ser considerado como um novo modelo do processo, uma vez que relaciona a saída $y(t)$ com a entrada $u(t)$. Logo, a estimativa dos coeficientes dos polinômios R e S projeta uma lei de controle sem necessidade da busca dos parâmetros da planta. Esse método é nomeado controlador adaptativo direto, uma vez que é dispensável a estimativa do modelo da planta. É importante destacar, na nova equação do modelo, a não linearidade introduzida pelo termo B^- , caso $B^- \neq b_0$.

Se $B^- = b_0$ e todos os zeros do processo são bem amortecidos, tem-se que:

$$A_0 A_m y(t) = b_0 (Ru(t) + Sy(t)) = \tilde{R}u(t) + \tilde{S}y(t) \therefore y(t) = \frac{\tilde{R}u(t) + \tilde{S}y(t)}{A_0 A_m}$$

para $\tilde{R} = b_0 R$ e $\tilde{S} = b_0 S$. É importante destacar que \tilde{R} não é mônico. O vetor θ de parâmetros estimados e o vetor φ dos sinais de regressão podem ser descritos como $\theta = [r_0 \cdots r_i \ s_0 \cdots s_i]$ e $\varphi = [u(t) \cdots u(t-i) \ y(t) \cdots y(t-1)]$. Por sua vez, a

quantidade de parâmetros $2(i + 1)$ do vetor θ é definida para $i = \deg(A_0 A_m) - d_0$. Sendo assim, além de especificar o polinômio $H_m(q)$ e A_0 da dinâmica em malha fechada e do observador, respectivamente, é necessário especificar o grau $d_0 = \deg A - \deg B$.

Considerando o sistema apresentado na [Figura 1](#), é possível estimar diretamente os parâmetros da lei de controle empregando RLS. Para a aplicação do algoritmo, foi considerado $d_0 = 1$ e $A_0 = 1$. Sendo assim, o modelo estimado é descrito por:

$$y(t) = r_0 u(t-1) + r_1 u(t-2) + s_0 y(t-1) + s_1 y(t-2)$$

Os parâmetros \hat{r}_1 , \hat{s}_0 e \hat{s}_1 devem ser divididos por \hat{r}_0 para transformar os polinômios \tilde{R} e \tilde{S} nos polinômios R e S , respectivamente, uma vez que R é mônico. Além disso, $T = A_0 A_m = t_0 q = 1 + a_{m1} + a_{m2}$ para β um ganho unitário. As estimativas dos coeficientes dos polinômios R , S e T estão ilustradas na [Figura 9](#).

epex7_2

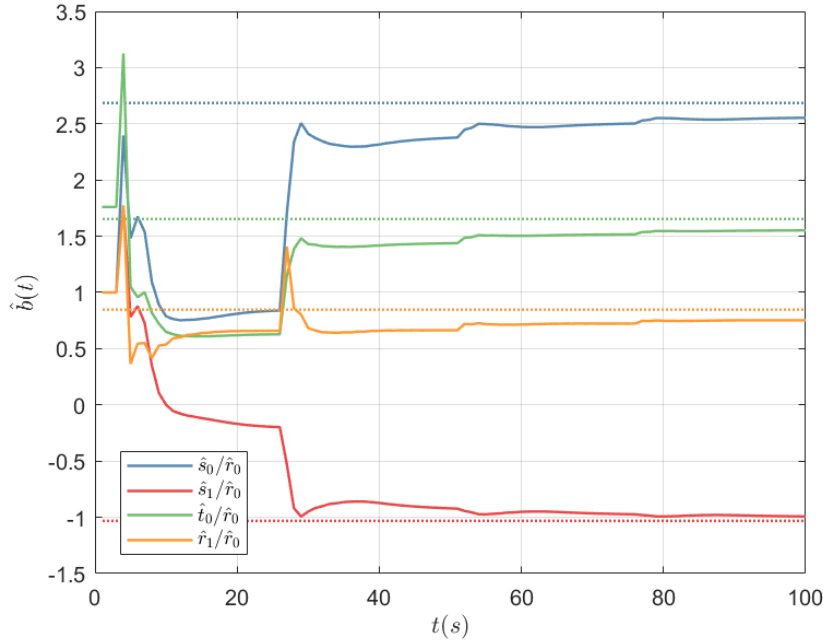


Figura 9: Estimativa dos coeficientes dos polinômios R , S e T .

Observando a [Figura 9](#), é possível concluir que os coeficientes de R , S e T convergem para os valores projetados. Esse mesmo algoritmo pode ser aplicado para $d_0 \neq 1$, conforme apresentado no [Exemplo 8](#) a seguir.

Exemplo 8: Regulador adaptativo direto para $d_0=2$

Considerando o sistema apresentado na [Figura 4](#), é possível estimar diretamente os parâmetros da lei de controle empregando RLS. Para a aplicação do algoritmo, foi considerado por especificação de projeto $d_0 = 2$ e $A_0 = 1$. Sendo assim, o modelo estimado em malha fechada é descrito por:

$$y(t) = r_0 u(t-2) + r_1 u(t-3) + s_0 y(t-2) + s_1 y(t-3)$$

Assim como no [Exemplo 7](#), $B^- = b_0$. Logo, os parâmetros \hat{r}_1 , \hat{s}_0 e \hat{s}_1 devem ser divididos por \hat{r}_0 para transformar os polinômios \tilde{R} e \tilde{S} nos polinômios R e S , respectivamente, uma vez que R é mônico. Além disso, como $T = A_0 A_m = t_0 q = 1 + a_{m1} + a_{m2}$ para β um ganho unitário. As estimativas dos coeficientes dos polinômios R , S e T estão ilustradas na [Figura 10](#).

epex8_2

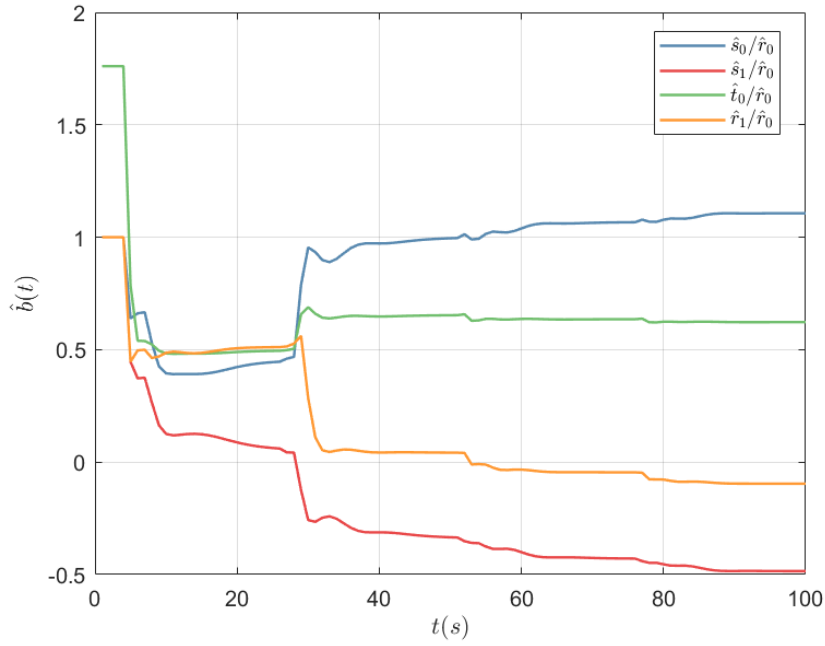


Figura 10: Estimativa dos coeficientes dos polinômios R , S e T .

Observando a [Figura 10](#), é possível observar que os coeficientes de R , S e T convergem para o intervalo de $N = 100$ amostras.

Exemplo 9: Adição de distúrbios ao sinal de controle

Nesse exemplo, será considerada a adição de um distúrbio à entrada $u(t)$ do regulador indireto descrito no [Exemplo 5](#). Essa perturbação é definida como $v(t) = 0.5$, para $t \geq 40$. O sinal de controle $u(t)$, o sinal de saída $y_m(t)$ e o sinal de referência $u_c(t)$ estão ilustrados na [Figura 11](#).

epex9_1

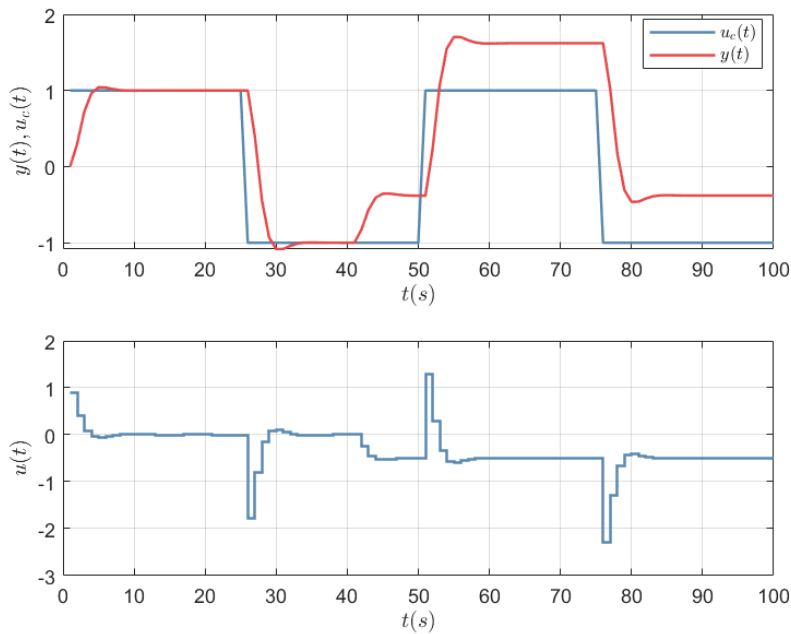


Figura 11: Sinal de saída da malha fechada $y_m(t)$, de referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

Observando a [Figura 11](#), é evidente que o erro em regime permanente é não nulo após a adição do distúrbio.

Para a estimativa de parâmetros do processo por RLS, o fator de esquecimento foi definido como $\lambda = 0.98$. Na [Figura 12](#) estão apresentadas as estimativas para os parâmetros $\hat{\theta} = [a_1 a_2 b_0 b_1]$.

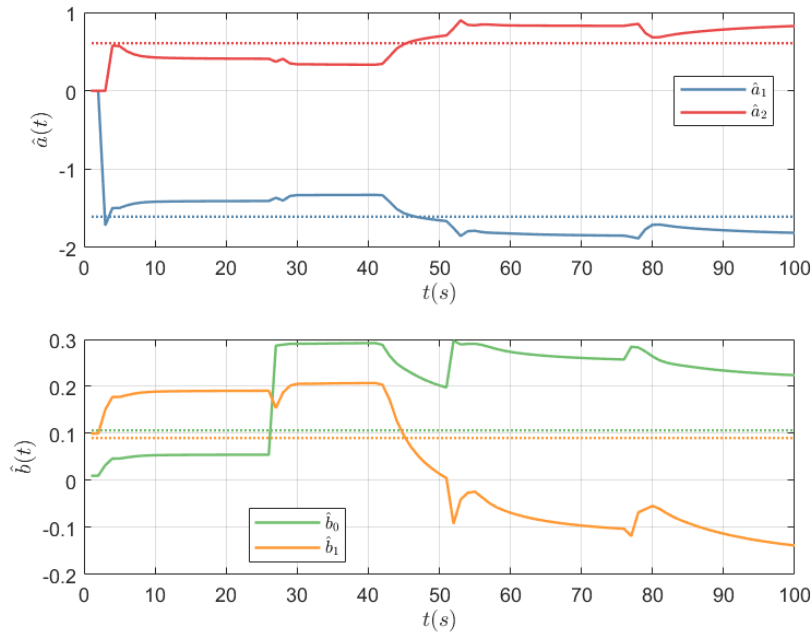


Figura 12: Estimativa dos parâmetros $\hat{\theta}$ do processo $H(q)$.

Observando a [Figura 12](#), é evidente que a adição de um ruído em $t = 40$ altera rapidamente os parâmetros estimados. Essa modificação indica ao algoritmo recursivo que a estimativa $\hat{\theta}(k)$ está incorreta e, portanto, maiores parcelas devem ser incrementadas à $\hat{\theta}(k)$ para obter $\hat{\theta}(k+1)$. Após a manutenção do sinal de controle $u(t)$ a partir de $t = 60$, as estimativas convergem para um valor distante do real.

A rejeição à perturbação pode ser adicionada ao modelo estimado de duas maneiras: primeiramente, pode-se incluir o modelo da perturbação, caso conhecida, ao modelo estimado; em segundo lugar, é possível filtrar o sinal de saída $y(t)$ e de entrada $u(t)$ do processo com um filtro $H_f(s)$ tal que a magnitude da perturbação seja reduzida. Esse último caso será descrito no [Exemplo 10](#) a seguir.

Exemplo 10: Rejeição de distúrbios no sinal de controle

Para rejeição do distúrbio $v(t)$ caracterizado como $v(t) = 0.5$ para $t \geq 40$, foi adotado um filtro $H_f(s)$ cujo equivalente discreto é o polinômio $A_d(q) = q - 1$. Dessa forma, o modelo estimado no [Exemplo 9](#) pode ser reescrito como:

$$A_d A y(t) = A_d B (u(t) + v(t)) = A_d B u(t) + e(t)$$

para $e(t) = A_d v(t)$. Como o distúrbio $v(t)$ é um degrau, o erro $e(t)$ é um pulso de magnitude 0.5 em $t = 40$. Considerando $y_f(t) = A_d y(t)$ e $u_f(t) = A_d u(t)$, pode-se escrever o novo modelo como:

$$A y_f(t) = B u_f(t) + e(t)$$

Aplicando RLS, os parâmetros estimados são os coeficientes dos polinômios A e B . Assim como, no estimador, acrescentou-se a parcela A_m ; no controlador A_c^0 , deve-se adicionar o fator X , tal que o novo polinômio característico $A_c = X A_c^0$. Caso $X = q + x_0$, é acrescentada um polo $-x_0$ à malha fechada, isto é, uma ação integral para garantir erro nulo em regime permanente. Dessa forma, considera-se que a solução da equação Diophantine os polinômios R e S é:

$$R = A_d R' = X R^0 + Y B \text{ e } S = A_d S' = X R^0 - Y A$$

para R_0 e S_0 as soluções da equação Diophantina para o polinômio característico A_c^0 e $Y = y_0$. Isolando o polinômio Y para $q = 1$, tem-se:

$$y_0 = \frac{-(1 + x_0) R^0(1)}{B(1)}$$

Para esse exemplo, foi definido $x_0 = 0$, $R = q + r_1$, $S = s_0 1 + s_1$, $\deg A = 2$ e $\deg B = 1$. Logo, é evidente que:

$$y_0 = -\frac{1 + r_1}{b_0 + b_1}, \text{ para } q = 1$$

$$R = q(q + r_1) + y_0(b_0 q + b_1) = q^2 - (b_1 y_0 + 1)q + b_1 y_0$$

$$S = q(s_0q + s_1) - y_0(q^2 + a_1q + a_2) = (s_0 - y_0)q^2 + (s_1 - a_1y_0)q - a_2y_0$$

Nessa configuração, o sinal de controle $u(t)$, o sinal de saída $y_m(t)$ e o sinal de referência $u_c(t)$ obtidos estão ilustrados na [Figura 13](#).

epex10_1

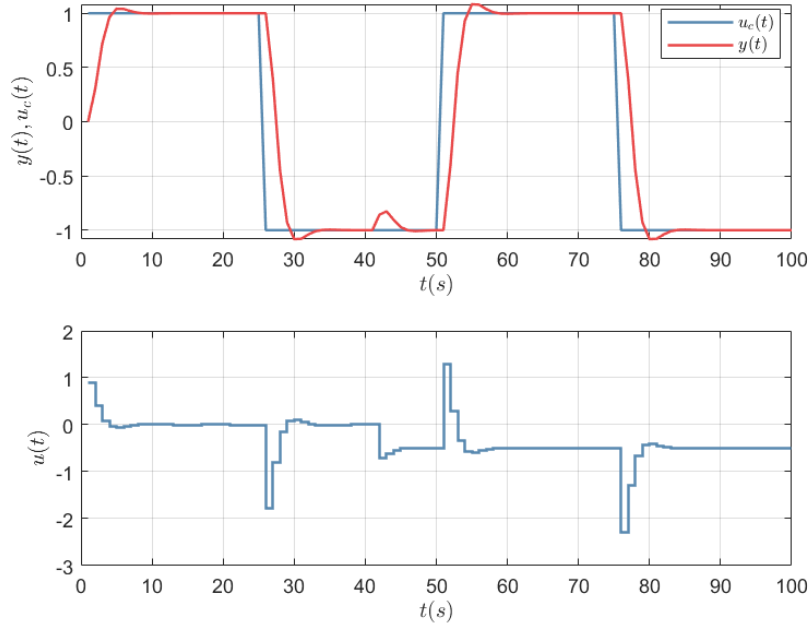


Figura 13: Sinal de saída da malha fechada $y_m(t)$, de referência $u_c(t)$ e de controle $u(t)$.

Observando a [Figura 13](#) e comparando-a com a [Figura 11](#), é evidente que a ação integral reduz a perturbação imposta por $v(t)$ no sinal de controle $u(t)$ logo após $t = 40$.

Assim como no [Exemplo 9](#), para a estimativa de parâmetros por mínimos quadrados, o fator de esquecimento foi definido como $\lambda = 0.98$. Na [Figura 14](#) estão apresentadas as estimativas para os parâmetros $\hat{\theta} = [a_1 \ a_2 \ b_0 \ b_1]$ do modelo estimado empregando RLS.

epex10_2

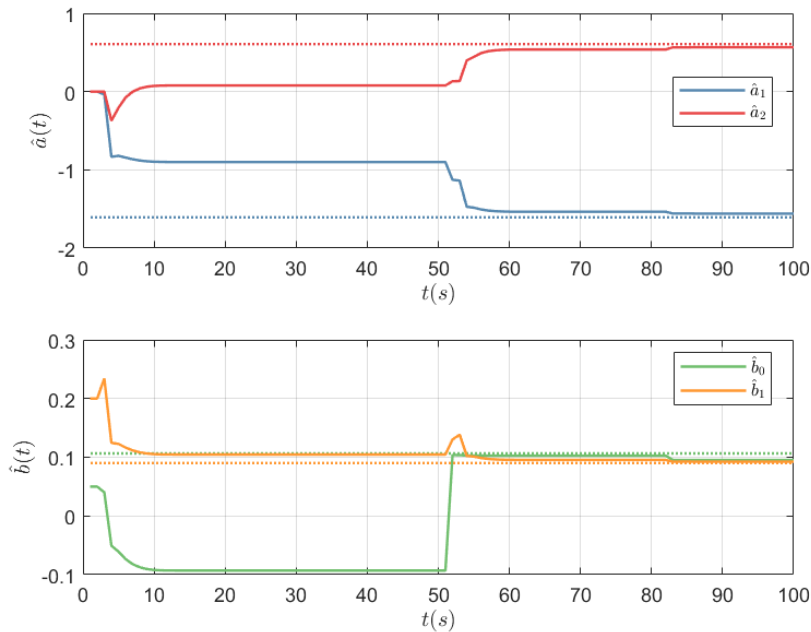


Figura 14: Estimativa dos parâmetros $\hat{\theta}$ do processo $H(q)$.

Observando a [Figura 14](#), é evidente que, com a modificação do estimador e controlador pelo fator A_d , os parâmetros estimados para os coeficientes dos polinômios A e B convergem para os valores reais. Desse modo, é possível afirmar que

houve a rejeição da perturbação $v(t)$ imposta sobre o sinal de controle.

Exercício proposto: Observador-estimador com ação integral

Considere um sistema descrito por:

$$\begin{aligned}\rho x &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

para x e u o vetor de estados e de entradas do sistema, respectivamente. Esse modelo pode ser estimado por um observador, cujo equacionamento equivale a:

$$\begin{aligned}\rho \hat{x} &= A\hat{x} + Bu + J(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x}\end{aligned}$$

Subtraindo $\rho \hat{x}$ de ρx , obtém-se o erro $\rho \tilde{x} = (A - JC)\tilde{x} = (A - JC)(x - \hat{x})$. Logo, a lei de controle para a malha fechada é expressa por:

$$u = -k_c \hat{x} + k_i x_i = -k_p(x - \tilde{x}) + k_i x_i$$

para $\dot{x}_i = v - y = v - Cx$ para v o sinal de referência da malha fechada. Dessa forma, o espaço de estados em malha fechada pode ser escrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -C & 0 \\ Bk_i & A - Bk_p & Bk_p \\ 0 & 0 & A - JC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v, u = -[-k_i \quad k_p \quad -k_p] \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \text{ e } y = [0 \quad C \quad 0] \begin{bmatrix} x_i \\ x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

Analogamente, o observador-estimador pode ser descrito conforme a seguinte expressão:

$$\rho \hat{x} = (A - JC)\hat{x} + Bu + Jy \therefore E_1(\rho)\hat{x} = V_1(\rho)u + V_2(\rho)y$$

para $V_1(\rho) = \text{Adj}[\rho I - A + JC]^{-1}B$, $V_2(\rho) = \text{Adj}[\rho I - A + JC]^{-1}J$ e $E_1(\rho) = \det[\rho I - A + JC]$. Como $V_1(\rho)$ e $V_2(\rho)$ são vetores com n elementos, para n a quantidade de estados em x , os polinômios correspondentes possuem $(n - 1)$ grau.

Substituindo \hat{x} na lei de controle, tem-se:

$$u = -k_c \hat{x} + k_i x_i = -k_c \left[\frac{V_1(\rho)}{E_1(\rho)} u + \frac{V_2(\rho)}{E_1(\rho)} y \right] + k_i x_i$$

que pode-se ser reescrito como:

$$\frac{L}{E_1} u = -\frac{P}{E_1} y + k_i x_i$$

para $P(\rho) = k_c V_2(\rho)$ e $L(\rho) = E_1(\rho) + k_c V_1(\rho)$. Analogamente à equação Diophantina, pode-se considerar que:

$$L(\rho)D(\rho) + P(\rho)N(\rho) = [E_1(\rho) + k_c V_1(\rho)]D(\rho) + [k_c V_2(\rho)]N(\rho)$$

para $\frac{N(\gamma)}{D(\gamma)} = C(\gamma I - A)^{-1}B$ os polinômios da função de transferência do processo. Substituindo $N(\gamma) = [C(\gamma I - A)^{-1}B]D(\gamma)$, obtém-se:

$$L(\rho)D(\rho) + P(\rho)N(\rho) = D(\rho) \left\{ E_1(\rho) + k_c [V_1(\rho) + V_2(\rho)C(\gamma I - A)^{-1}B] \right\}$$

Como $V_1(\rho) = E_1(\rho)[\rho I - A + JC]^{-1}B$ e $V_2(\rho) = E_1(\rho)[\rho I - A + JC]^{-1}J$, tem-se que:

$$D(\rho) \left\{ E_1(\rho) + k_c [V_1(\rho) + V_2(\rho)C(\gamma I - A)^{-1}B] \right\} = D(\rho)E_1(\rho) \left\{ 1 + k_c [(\rho I - A + JC)^{-1}B + (\rho I - A + JC)^{-1}JC(\rho I - A)^{-1}B] \right\}$$

Evidenciando o fator B e $(\rho I - A + JC)^{-1}$, obtém-se:

$$D(\rho)E_1(\rho) \left\{ 1 + k_c [(\rho I - A + JC)^{-1}B + (\rho I - A + JC)^{-1}JC(\rho I - A)^{-1}B] \right\} = D(\rho)E_1(\rho) \left\{ 1 + k_c (\rho I - A + JC)^{-1} [I + JC(\rho I - A)^{-1}] B \right\}$$

Em seguida, evidenciando o fator $(\rho I - A)^{-1}$, conclui-se:

$$\begin{aligned}D(\rho)E_1(\rho) \left\{ 1 + k_c (\rho I - A + JC)^{-1} [I + JC(\rho I - A)^{-1}] B \right\} &= D(\rho)E_1(\rho) \left\{ 1 + k_c (\rho I - A + JC)^{-1} [(\rho I - A) + JC] (\rho I - A)^{-1} B \right\} \\ &= D(\rho)E_1(\rho) \left\{ 1 + k_c (\rho I - A)^{-1} B \right\} = D(\rho)E_1(\rho) \det \left\{ I + (\rho I - A)^{-1} B k_c \right\} = D(\rho)E_1(\rho) \det \left\{ (\rho I - A)^{-1} \right\} \det \left\{ \rho I - A + B k_c \right\}\end{aligned}$$

Logo, encontra-se que:

$$L(\rho)D(\rho) + P(\rho)N(\rho) = E_1(\rho)E_2(\rho)$$

para $D(\rho) = \det(\rho I - A)$ e $E_2(\rho) = \det(\rho I - A + Bk_c)$. Nesse caso, v é escolhido como $v = \frac{G}{E_1}(y^* - y)$.

Esse algoritmo para observador-estimador com ação integral pode ser simulado com diagrama Simulink abaixo.

graham

Referências bibliográficas

[1] K. ASTRÖM, B. WITTENMARK. **Real-time Parameter Estimation**. CRC Press, 2000. ISBN 0486462781.