

# Relatório de Atividade

## Linearização por realimentação

Débora Oliveira, Arthur Oliveira  
Prof Antonio Marcus, Análise e Projeto de Sistemas de controle 21.1

17 de julho de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a implementação de um sistema de controle de um quadricóptero baseado no método de linearização por realimentação. Para tal, a pose de um drone Parrot Mambo foi capturado da simulação no Simulink conforme pacote do fabricante. O sinal de controle virtual foi então produzido e aplicado na planta não-linear em conjunto com um controlador de ação proporcional-derivativa.

### 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A técnica de linearização por realimentação é uma abordagem comumente utilizada para o controle de sistemas não lineares. O objetivo deste método é obter uma representação linear do sistema e utilizar técnicas de controle tradicionais. Considerando uma classe de sistemas não lineares na forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

$$y = h(x) \quad (2)$$

Onde  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^1$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e o domínio  $D$  contém a origem.

Define-se o grau relativo de um sistema não linear,  $\rho$ , como a ordem da derivada a partir da qual a entrada do sistema,  $u$ , passa a ter influência na saída do sistema. Caso  $\rho < n$ , se ao utilizar uma transformação de variáveis  $z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x)$  e um sinal de controle da forma  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  obtém-se uma representação conforme as Equações 3, 4 e 5, diz-se que o sistema é linearizável por realimentação.

$$\dot{\eta} = f_o(\eta, \xi) \quad (3)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad (4)$$

$$y = C\xi \quad (5)$$

Por sua vez, caso  $\rho = n$ , se uma transformação do tipo  $z = T(x)$  e uma ação de controle  $u =$

$\alpha(x) + \beta(x)v$  transformam o sistema na forma apresentada na Eq. 6, afirma-se que o sistema é linearizável na forma entrada-saída.

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}v \quad (6)$$

Para o desenvolvimento de uma ação de controle conforme o método de linearização por realimentação para um sistema MIMO, a Eq. 1 pode ser generalizada na forma:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u \quad (7)$$

para  $x$  o vetor de estados e  $f(x, \dot{x})$  e  $g(x, \dot{x})$  funções não lineares do vetor de estados e sua derivada.

Dessa forma, substituindo  $w = \ddot{x}$  na Eq. 7, a entrada de controle virtual da planta  $w$  pode ser calculada conforme a expressão:

$$u = g(x, \dot{x})^{-1}[w - f(x, \dot{x})] \quad (8)$$

Observando a Eq. 8, é evidente que  $u$  depende linearmente de  $w$ . Sendo assim, é possível aplicar qualquer estratégia de controle clássica sobre o sinal virtual  $w$  e posteriormente transformá-lo em  $u$ , isto é, a entrada efetivamente aplicada na planta (MAGALHÃES et. al., 2017). É importante destacar que essa estratégia só é válida para  $g(x, \dot{x})$  inversível.

### 2 DESENVOLVIMENTO

Para a implementação da linearização por realimentação, foi simulado o espaço de estados de um quadricóptero. Para tal, esse modelo não-linear foi configurado conforme os parâmetros físicos do minidrone Parrot Mambo, cujas constantes — i.e. massa, constante elétrica e de torque — estão disponíveis no Pacote de Suporte a Minidrones Parrot no Simulink.

Embora esse pacote forneça um modelo próprio para a simulação do quadricóptero, optou-se por simular diretamente o espaço de estados teórico de um drone. A diferença entre aquele modelo em relação ao último reside na consideração do efeito *inflow*, isto

é, que a força de propulsão dos motores não possui exclusivamente componentes paralelas ao eixo  $\vec{z}$ .

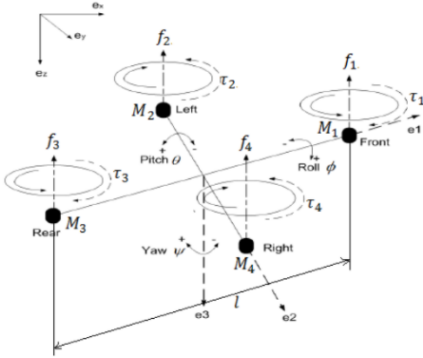
Inicialmente, é preciso descrever o espaço de estados não linear do drone, o qual foi simulado conforme um diagrama de blocos no Simulink. Em seguida, faz necessária discutir sobre a transformação da entrada virtual  $w$  no sinal de controle real  $u$ , conforme formulado na Eq. 8. Por fim, o controlador linear PD construído sobre o sinal virtual  $w$  será exposto.

No total foram realizados quatro experimentos: nos três primeiros, foi aplicado um degrau de 2 graus em cada eixo de rotação; por fim, foi executado um ensaio considerando um conjunto de degraus como referência do ângulo de rotação em torno do eixo  $\vec{x}$ . A resposta do espaço de estados simulado foi comparado com o modelo do drone fornecido pelo fabricante quando expostos aos mesmos sinais de controle.

## 2.1 MODELO DE UM QUADRICÓPTERO

Segundo esquemático apresentado na Fig. 1, o modelo de um quadricóptero foi simplificado como quatro massas pontuais  $m_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , distribuídas nas extremidades de dois braços de comprimento  $l$ . A massa total do corpo é expressa como  $m$ .

**Fig. 1.** Modelo físico do quadricóptero em estudo.



Fonte: MAGALHÃES et.al. (2017)

O espaço de estados da orientação de um quadricóptero pode ser representador por:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 p - q_2 q - q_3 r \\ q_0 p - q_3 q + q_2 r \\ q_3 p + q_0 q - q_1 r \\ -q_2 p + q_1 q + q_0 r \end{bmatrix} \quad (9)$$

para  $[\dot{q}_0 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$  a pose do drone em quatérnions e  $[p \ q \ r]^T$  a velocidade angular referente a rotação dos ângulos  $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ . Com relação à atuação na atitude, representa-se por  $\tau_\phi$ ,  $\tau_\theta$  e  $\tau_\psi$  os torques provocados pelos motores ao redor dos eixos  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ , respectivamente, do sistema de coordenadas com origem no centro de massa do corpo. Segundo a formulação

de Newton-Euler, o modelo dinâmico das velocidades angulares é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} q r \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} p r \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} p q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi}{J_x} \\ \frac{\tau_\theta}{J_y} \\ \frac{\tau_\psi}{J_z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

para  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$  os momentos de inércia em relação ao centro de massa do quadricóptero ao redor dos eixos  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ , respectivamente.

Analogamente, representa-se por  $F$  a força total vertical de propulsão gerada pela soma das forças individuais de cada motor  $f_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Logo, o espaço de estados de posição pode ser descrito como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\dot{y} - q\dot{z} - g \sin \theta \\ p\dot{z} - r\dot{x} + g \sin \phi \cos \theta \\ q\dot{x} - p\dot{y} + g \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

para  $g$  a aceleração da gravidade. Os termos da Eq. 11 dependentes das funções trigonométricas são originados da rotação da força da gravidade do sistema de coordenadas inercial para o não-inercial, ambos com origem no centro de massa do drone.

É importante destacar que as posições e velocidades lineares calculadas pela Eq. 11 devem ser transformadas para o sistema de coordenadas inercial fixo no mundo. Além disso, o modelo descrito não inclui o efeito de *inflow*, isto é, a perturbação lateral — nos eixos  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  — da força  $f_i$  de cada motor.

Comparando as Eq. 10 e Eq. 11 com a formulação exposta na Eq. 7, é evidente que o modelo do quadricóptero pode ser reescrito para a linearização por realimentação considerando o vetor de entradas  $u = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi \ F]^T$  e o vetor de estados  $x = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ p \ q \ r \ x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ . Note não haver singularidades no modelo não linear.

## 2.2 LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO COM O MODELO DE UM QUADRICÓPTERO

Embora o vetor de entradas seja  $u = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi \ F]^T$ , as entradas físicas da planta são os comandos de *duty cycle* ( $\delta$ ) do PWM (do inglês *Pulse Width Modulation*) dos motores. Dessa forma, as forças e os torques de cada motor  $M_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  são modelados como:

$$\begin{aligned} F &= a(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4) & \tau_\phi &= la(\delta_2 - \delta_4) \\ \tau_\psi &= c(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4) & \tau_\theta &= la(\delta_3 - \delta_1) \end{aligned} \quad (12)$$

As constantes  $a$  e  $c$  são determinadas experimentalmente. Na Tabela 1 estão expostos os valores para o quadricóptero Parrot Mambo empregado nos experimentos desse estudo.

**Tab. 1.** Parâmetros físicos para o Parrot Mambo.

Parâmetro	Valor	Unidade
$m$	0,0630	$kg$
$l$	0,1248	$m$
$J_x$	$5,8286 \times 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
$J_y$	$7,1691 \times 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
$J_z$	0,0001	$kg \cdot m^2$
$g$	9,31	$m/s^2$
$a$	$6,5329 \times 10^{-4}$	$N$
$c$	$1,5769 \times 10^{-6}$	$N \cdot m$
$T_s$	0,0050	$s$

É possível reescrever a Eq. 12 considerando as seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} k &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 & m &= \delta_2 - \delta_4 \\ o &= \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 & n &= \delta_3 - \delta_1 \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo Eq. 13 na Eq. 12, obtêm-se novas entradas do sistema  $u^* = [m \ n \ o \ k]^T$ :

$$\begin{aligned} F &= a \cdot k & \tau_\phi &= l \cdot a \cdot m \\ \tau_\psi &= c \cdot o & \tau_\theta &= l \cdot a \cdot n \end{aligned} \quad (14)$$

Note que cada força ou torque depende exclusivamente de uma variável do vetor  $u^*$ . Portanto, as equivalências expostas na Eq. 14 são totalmente desacopladas, fato que não acontece considerando o vetor de entrada  $[\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4]^T$  como na Eq. 12.

Substituindo a Eq. 14 na Eq. 9, obtêm-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} q r \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} p r \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} p q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{q_1} m \\ \sigma_{q_2} n \\ \sigma_{q_3} o \end{bmatrix} \quad (15)$$

para  $\sigma_{q_1} = la/J_x$ ,  $\sigma_{q_2} = la/J_y$  e  $\sigma_{q_3} = c/J_z$ . Derivando Eq. 9 e substituindo o vetor  $[p \ q \ r]^T$  calculado conforme a Eq. 15, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 p - \dot{q}_3 q + \dot{q}_2 r \\ \dot{q}_3 p + \dot{q}_0 q - \dot{q}_1 r \\ -\dot{q}_2 p + \dot{q}_1 q + \dot{q}_0 r \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} q r \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} p r \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} p q \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{q_1} m \\ \sigma_{q_2} n \\ \sigma_{q_3} o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Analogamente, substituindo a Eq. 14 na Eq. 11, tem-se:

$$\ddot{z} = (q\dot{y} - p\dot{z} + g \cos \phi \cos \theta) + \sigma_z k \quad (17)$$

para  $\sigma_z = a/m$ . Comparando as Eq. 17 e Eq. 16 com a formulação apresentada na Eq. 7, é evidente

que elas possuem o mesmo formato. Considerando o vetor virtual  $w = [m' \ n' \ z' \ k']^T$ , a lei de controle pode ser construída como:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \\ o \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 + \frac{q_1^2}{q_0} & q_3 + \frac{q_1 q_2}{q_0} & -q_2 + \frac{q_1 q_3}{q_0} & 0 \\ -q_3 + \frac{q_1 q_2}{q_0} & q_0 + \frac{q_2^2}{q_0} & q_1 + \frac{q_2 q_3}{q_0} & 0 \\ q_2 + \frac{q_1 q_3}{q_0} & -q_1 + \frac{q_2 q_3}{q_0} & q_0 + \frac{q_3^2}{q_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2m'}{\sigma_{q_1}} - \frac{\dot{q}_0 p - \dot{q}_3 q + \dot{q}_2 r}{\sigma_{q_1}} - \frac{A}{\sigma_{q_1}} \\ \frac{2n}{\sigma_{q_2}} - \frac{\dot{q}_3 p + \dot{q}_0 q - \dot{q}_1 r}{\sigma_{q_2}} - \frac{A}{\sigma_{q_2}} \\ \frac{2o}{\sigma_{q_3}} - \frac{-\dot{q}_2 p + \dot{q}_1 q + \dot{q}_0 r}{\sigma_{q_3}} + \frac{A}{\sigma_{q_3}} \\ \frac{k' - (q\dot{y} - p\dot{z} + g \cos \phi \cos \theta)}{\sigma_z} \end{bmatrix} \quad (18)$$

para

$$A = \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} q r \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} p r \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} p q \end{bmatrix}$$

Os estados atuais são obtidos do estimador, enquanto o vetor  $w = [m' \ n' \ z' \ k']^T$  é saída de um controlador PD. Em seguida, o vetor  $u^* = [m \ n \ o \ k]^T$  obtido a partir de  $w$  pode ser transformado nos comandos dos motores conforme a Eq. 13.

### 2.3 CONTROLADOR PD

Para garantir o rastreo da referência, é necessário acrescentar um laço de realimentação para *tracking*. É importante destacar que, assim como outras técnicas de linearização do modelo — e.g. *backstepping* —, a linearização por realimentação não garante a estabilidade do sistema. Essa metodologia apenas possibilita o projeto de um controlador linear, cuja saída de controle será transformada no sinal efetivo de entrada da planta.

A lei de controle linear para o sinal de controle virtual  $w$  é dada por:

$$\frac{W(z)}{E(z)} = K_P + K_D \frac{N}{1 + N \cdot T_s \frac{1}{z-1}}$$

para  $K_P$  e  $K_D$  os ganhos proporcional e derivativo, respectivamente,  $T_s$  o período de amostragem do controlador embarcado,  $N$  o coeficiente do filtro derivativo e  $e(t)$  o erro entre a orientação e altitude atual e desejada. Para o Parrot Mambo, conforme a Tabela 1,  $T_s = 5$  milissegundos.

Os valores dos ganhos para os laços de realimentação de  $m'$ ,  $n'$ ,  $o'$  e  $k'$  foram encontrados utilizando a *toolbox* de sintonia do MATLAB. Na Tabela 2 estão expostos esses ganhos e os polos de cada laço.

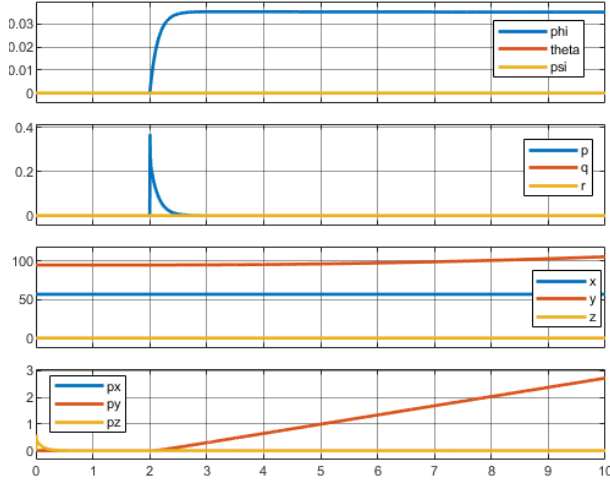
**Tab. 2.** Ganhos para o controlador PD.

Variável	$K_P$	$K_D$	$N$	Polos
$m'/k'$	0,63	7,15	296,31	$[-0,44 \ 0,96 \ 0,99]$
$n'$	0,77	8,79	296,31	$[-0,43 \ 0,96 \ 0,99]$
$o'$	130,98	195,86	189,86	$[0,53 \pm 0,84i \ 0,99]$

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

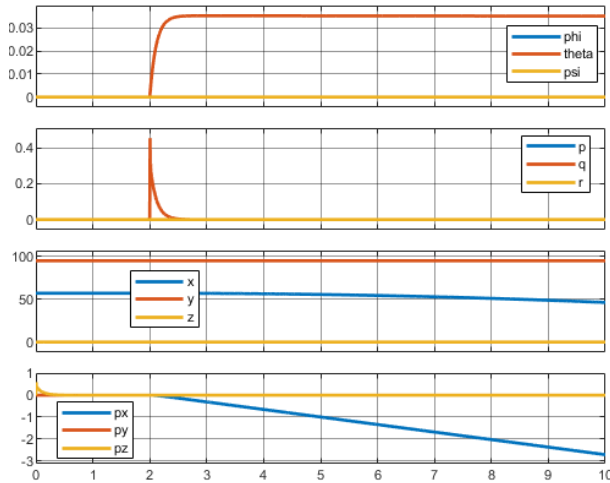
Segundo previamente apresentado, foram realizados três ensaios, cada um referente a um degrau de 2 graus em cada eixo de rotação  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ . Os resultados para esses experimentos estão ilustrados nas Fig. 2, Fig. 3 e Fig. 4, respectivamente. A posição inicial do centro de massa do drone no mundo é  $p_0 = [57,0 \ 95,0 \ -0,046]^T$ . O degrau foi aplicado em 2 segundos de simulação. A referência de altitude foi mantida nula.

**Fig. 2.** Resultado do degrau ao redor do eixo  $\vec{x}$ .



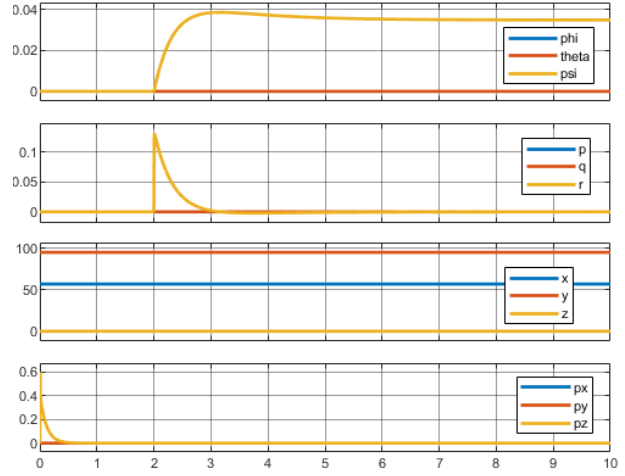
Fonte: Autoria própria.

**Fig. 3.** Resultado do degrau ao redor do eixo  $\vec{y}$ .



Fonte: Autoria própria.

**Fig. 4.** Resultado do degrau ao redor do eixo  $\vec{z}$ .



Fonte: Autoria própria.

Comparando a Fig. 2 e Fig. 3, é evidente a semelhança entre um giro ao redor do eixo  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  em razão do acoplamento descrito na Eq. 11. Quando é aplicado um degrau de rotação em torno do eixo  $\vec{x}$ , isto é,  $\phi > 0$ , há um deslocamento do drone no eixo  $\vec{y}$ , ou seja,  $\Delta y \neq 0$ . analogamente, ao definir um degrau à referência  $\theta$ , há um deslocamento do drone no eixo  $\vec{x}$ , ou seja,  $\Delta x \neq 0$ .

Por sua vez, a Fig. 2 e Fig. 3 com a Fig. 4, é perceptível que a rotação no eixo  $\vec{z}$  possui uma dinâmica diferente. A rotação em torno do eixo vertical não provoca alterações na posição  $x$  ou  $y$  do drone. Logo após o início da simulação, há uma velocidade  $\dot{z}$  não nula em razão da força de propulsão  $F \neq 0$  que mantém o drone na altitude constante  $z = 0$ .

Em todos os gráficos, a atitude do drone segue a referência angular com erro nulo em regime permanente. É importante destacar que esse experimento comprova que a orientação do drone independe das componentes translacionais. Entretanto, a translação do quadricóptero depende diretamente da mudança das componentes rotacionais.

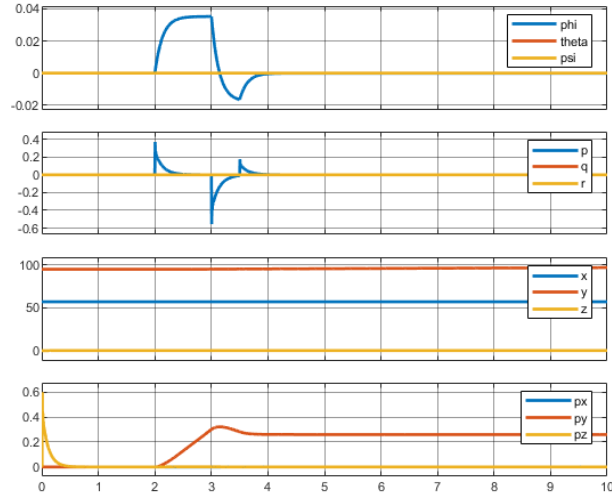
Por fim, para o último experimento, o sinal de referência aplicado foi:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & , t < 2 \\ 2^\circ & , 2 \leq t < 3 \\ -1^\circ & , 3 \leq t < 3,5 \\ 0 & , t \geq 3,5 \end{cases}$$

$$\theta(t) = 0 \quad \phi(t) = 0 \quad z(t) = 0$$

para a atitude e altitude do drone. O resultado obtido está ilustrado na Fig. 5. Assim como nos três experimentos anteriores, há o rastreamento pela referência angular fornecida à malha fechada.

**Fig. 5.** Resultado dos degraus ao redor do eixo  $\vec{x}$  para  $F \neq 0$ .



Fonte: Autoria própria.

Observando a Fig. 5, é evidente que o degrau aplicado a partir de 2 segundos na referência do estado  $\phi$  modifica exclusivamente a velocidade do corpo em relação ao eixo  $\vec{y}$ . Tendo em vista que a magnitude da posição inicial no mundo é grande em relação à variação  $\delta y$  provocada pelo degrau de 1 segundo, a alteração na curva  $y$  ilustrada na Fig. 5 é aproximadamente nula.

#### 4 CONCLUSÃO

Esse estudo tem por objetivo o desenvolvimento de uma linearização por realimentação. Logo, foi necessário modelar um quadricóptero e encontrar o vetor do sinal de controle virtual adequado, cuja relação com a entrada real é linear.

Os experimentos garantiram o funcionamento do espaço de estados modelado e da lei de controle construída com base no novo vetor sinais de controle virtual. Além disso, os experimentos comprovaram a validade da sintonia do controlador proporcional-derivativo alocado no laço externo de rastreamento da referência.

Esses ensaios poderiam ser otimizados considerando o equacionamento do efeito do *inflow* na linearização por realimentação. Dessa forma, a força  $F$  seria decomposta nos três eixos e duas novas variáveis de controle deveriam ser alocadas. Ao incluir esse efeito, poder-se-ia realizar o *deploy* do sistema de controle projetado no drone real e efetivamente testar a robustez dos controladores PD projetados.

#### 5 REFERÊNCIAS

- [1] MAGALHÃES, Giorgio; SANTOS, Eder; BORGES, Luan; CUNHA, Antonio. **Comparison and Implementation of controle Strategies for a Quadrotor**. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2017. ISSN 2175 8905