Relatório de Atividade

Linearização por realimentação

Débora Oliveira, Arthur Oliveira
Prof Antonio Marcus, Análise e Projeto de Sistemas de controle 21.1

19 de julho de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a implementação de um sistema de controle de um quadricóptero baseado no método de linearização por realimentação. Para tal, a pose de um drone Parrot Mambo foi capturado da simulação no Simulink conforme pacote do fabricante. O sinal de controle virtual foi então produzido e aplicado na planta não-linear em conjunto com um controlador de ação proporcional-derivativa.

1 Fundamentação Teórica

A técnica de linearização por realimentação é uma abordagem comumente utilizada para o controle de sistemas não lineares. O objetivo deste método é obter uma representação linear do sistema e utilizar técnicas de controle tradicionais. Considerando uma classe de sistemas não lineares na forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

$$y = h(x) \tag{2}$$

Onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}^n$ e o domínio D contém a origem.

Define-se o grau relativo de um sistema não linear, ρ, como a ordem da derivada a partir da qual a entrada do sistema, u, passa a ter influência na saída do sistema. Caso $\rho < n$, se ao utilizar uma transformação de variáveis $z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x)$ e um sinal de controle da forma $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ obtém-se uma representação conforme as Equações 3, 4 e 5, diz-se que o sistema é linearizável por realimentação.

$$\dot{\eta} = f_o(\eta, \xi) \tag{3}$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \tag{4}$$

$$y = C\xi \tag{5}$$

Por sua vez, caso $\rho = n$, se uma transformação do tipo $z = T(x)$ e uma ação de controle $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ transformam o sistema na forma apresentada na Eq. 6, afirma-se que o sistema é linearizável na forma entrada-saída.

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}v \tag{6}$$

Para o desenvolvimento de uma ação de controle conforme o método de linearização por realimentação para um sistema MIMO, a Eq. 1 pode ser generalizada na forma:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u \tag{7}$$

para x o vetor de estados e $f(x, \dot{x})$ e $g(x, \dot{x})$ funções não lineares do vetor de estados e sua derivada.

Dessa forma, substituindo $w = \ddot{x}$ na Eq. 7, a entrada de controle virtual da planta w pode ser calculada conforme a expressão:

$$u = g(x, \dot{x})^{-1}[w - f(x, \dot{x})] \tag{8}$$

Observando a Eq. 8, é evidente que u depende linearmente de w. Sendo assim, é possível aplicar qualquer estratégia de controle clássica sobre o sinal virtual w e posteriormente transformá-lo em u, isto é, a entrada efetivamente aplicada na planta (MAGALHÃES et. al., 2017). É importante destacar que essa estratégia só é valida para $g(x, \dot{x})$ inversível.

2 Desenvolvimento

Para a implementação da linearização por realimentação, foi simulado o espaço de estados de um quadricóptero. Para tal, esse modelo não-linear foi configurado conforme os parâmetros físicos do minidrone Parrot Mambo, cujas constantes — i.e. massa, constante elétrica e de torque — estão disponíveis no Pacote de Suporte a Minidrones Parrot no Simulink.

Embora esse pacote forneça um modelo próprio para a simulação do quadricóptero, optou-se por simular diretamente o espaço de estados teórico de um drone. A diferença entre daquele modelo em relação ao último reside na consideração do efeito *inflow*, isto é, que a força de propulsão dos motores não possui exclusivamente componentes paralelas ao eixo $\vec{z}$.

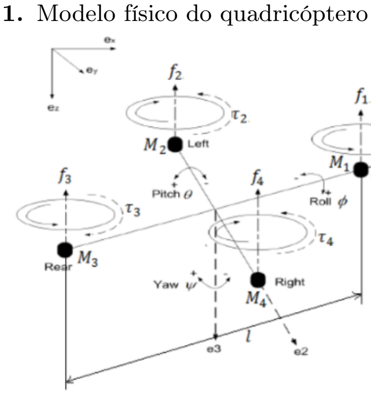
Inicialmente, é preciso descrever o espaço de estados não linear do drone, o qual foi simulado conforme um diagrama de blocos no Simulink. Em seguida, faz necessária discutir sobre a transformação da entrada virtual w no sinal de controle real u, conforme formulado na Eq. 8. Por fim, o controlador linear PD construído sobre o sinal virtual w será exposto.

No total foram realizados quatro experimentos: nos três primeiros, foi aplicado um degrau de 2 graus em cada eixo de rotação; por fim, foi executado um ensaio considerando um conjunto de degraus como referência do ângulo de rotação em torno do eixo $\vec{x}$. A resposta do espaço de estados simulado foi comparado com o modelo do drone fornecido pelo fabricante quando expostos aos mesmos sinais de controle.

2.1 Modelo de um quadricóptero

Segundo esquemático apresentado na Fig. 1, o modelo de um quadricóptero foi simplificado como quatro massas pontuais m_i, $\forall i \in \{1,2,3,4\}$, distribuídas nas extremidades de dois braços de comprimento l. A massa total do corpo é expressa como m.

Fig. 1. Modelo físico do quadricóptero em estudo.



Fonte: MAGALHÃES et.al. (2017)

O espaço de estados da orientação de um quadricóptero pode ser representador por:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 p - q_2 q - q_3 r \\ q_0 p - q_3 q + q_2 r \\ q_3 p + q_0 q - q_1 r \\ -q_2 p + q_1 q + q_0 r \end{bmatrix} \tag{9}$$

para $[\dot{q}_0\ \dot{q}_1\ \dot{q}_2\ \dot{q}_3]^T$ a pose do drone em quatérnions e $[p\ q\ r]^T$ a velocidade angular referente a rotação dos ângulos $[\phi\ \theta\ \psi]^T$. Com relação à atuação na atitude, representa-se por τ_ϕ, τ_θ e τ_ψ os torques provocados pelos motores ao redor dos eixos $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$, respectivamente, do sistema de coordenadas com origem no centro de massa do corpo. Segundo a formulação de Newton-Euler, o modelo dinâmico das velocidades angulares é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi}{J_x} \\ \frac{\tau_\theta}{J_y} \\ \frac{\tau_\psi}{J_z} \end{bmatrix} \tag{10}$$

para J_x, J_y e J_x os momentos de inércia em relação ao centro de massa do quadricóptero ao redor dos eixos $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$, respectivamente.

Analogamente, representa-se por F a força total vertical de propulsão gerada pela soma das forças individuais de cada motor f_i, $\forall i \in \{1,2,3,4\}$. Logo, o espaço de estados de posição pode ser descrito como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\dot{y} - q\dot{z} - g\sin\theta \\ p\dot{z} - r\dot{x} + g\sin\phi\cos\theta \\ q\dot{x} - p\dot{y} + g\cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m} \end{bmatrix} \tag{11}$$

para g a aceleração da gravidade. Os termos da Eq. 11 dependentes das funções trigonométricas são originados da rotação da força da gravidade do sistema de coordenadas inercial para o não-inercial, ambos com origem no centro de massa do drone.

É importante destacar que as posições e velocidades lineares calculadas pela Eq. 11 devem ser transformadas para o sistema de coordenadas inercial fixo no mundo. Além disso, o modelo descrito não inclui o efeito de *inflow*, isto é, a pertubação lateral — nos eixos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ — da força f_i de cada motor.

Comparando as Eq. 10 e Eq. 11 com a formulação exposta na Eq. 7, é evidente que o modelo do quadricóptero pode ser reescrito para a linearização por realimentação considerando o vetor de entradas $u = [\tau_\phi\ \tau_\theta\ \tau_\psi\ F]^T$ e o vetor de estados $x = [q_0\ q_1\ q_2\ q_3\ p\ q\ r\ x\ y\ z\ \dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}]^T$. Note não haver singularidades no modelo não linear.

2.2 Linearização por realimentação com o modelo de um quadricóptero

Embora o vetor de entradas seja $u = [\tau_\phi\ \tau_\theta\ \tau_\psi\ F]^T$, as entradas físicas da planta são os comandos de *duty cicle* (δ) do PWM (do inglês *Pulse Width Modulation*) dos motores. Dessa forma, as forças e os torques de cada motor M_i, $\forall i \in \{1,2,3,4\}$ são modelados como:

$$\begin{aligned} F &= a(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4) \qquad & \tau_\phi &= la(\delta_2 - \delta_4) \\ \tau_\psi &= c(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4) \qquad & \tau_\theta &= la(\delta_3 - \delta_1) \end{aligned} \tag{12}$$

As constantes a e c são determinadas experimentalmente. Na Tabela 1 estão expostos os valores para o quadricóptero Parrot Mambo empregado nos experimentos desse estudo.

Tab. 1. Parâmetros físicos para o Parrot Mambo.

Parâmetro	**Valor**	**Unidade**
m	$0,0630$	kg
l	$0,1248$	m
J_x	$5,8286 \times 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
J_y	$7,1691 \times 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
J_z	$0,0001$	$kg \cdot m^2$
g	$9,31$	m/s^2
a	$6,5329 \times 10^{-4}$	N
c	$1,5769 \times 10^{-6}$	$N \cdot m$
T_s	$0,0050$	s

É possível reescrever a Eq. 12 considerando as seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} k &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 & m &= \delta_2 - \delta_4 \\ o &= \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 & n &= \delta_3 - \delta_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Substituindo Eq. 13 na Eq. 12, obtêm-se novas entradas do sistema $u^* = [m\ n\ o\ k]^T$:

$$\begin{aligned} F &= a \cdot k & \tau_\phi &= l \cdot a \cdot m \\ \tau_\psi &= c \cdot o & \tau_\theta &= l \cdot a \cdot n \end{aligned} \tag{14}$$

Note que cada força ou torque depende exclusivamente de uma variável do vetor u^*. Portanto, as equivalências expostas na Eq. 14 são totalmente desacopladas, fato que não acontece considerando o vetor de entrada $[\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4]^T$ como na Eq. 12.

Substituindo a Eq. 14 na Eq. 9 , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{q_1} m \\ \sigma_{q_2} n \\ \sigma_{q_3} o \end{bmatrix} \tag{15}$$

para $\sigma_{q_1} = la/J_x$, $\sigma_{q_2} = la/J_y$ e $\sigma_{q_3} = c/J_z$. Derivando Eq. 9 e substituindo o vetor $[p\ q\ r]^T$ calculado conforme a Eq. 15, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 p - \dot{q}_3 q + \dot{q}_2 r \\ \dot{q}_3 p + \dot{q}_0 q - \dot{q}_1 r \\ -\dot{q}_2 p + \dot{q}_1 q + \dot{q}_0 r \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{q_1} m \\ \sigma_{q_2} n \\ \sigma_{q_3} o \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

Analogamente, substituindo a Eq. 14 na Eq. 11, tem-se:

$$\ddot{z} = (q\dot{x} - p\dot{y} + g \cos\phi \cos\theta) + \sigma_z k \tag{17}$$

para $\sigma_z = a/m$. Comparando as Eq. 17 e Eq. 16 com a formulação apresentada na Eq. 7, é evidente que elas possuem o mesmo formato. Considerando o vetor virtual $w = [m^{'}\ n^{'}\ z^{'}\ k^{'}]^T$, a lei de controle pode ser construída como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m \\ n \\ o \\ k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0 + \frac{q_1^2}{q_0} & q_3 + \frac{q_1 q_2}{q_0} & -q_2 + \frac{q_1 q_3}{q_0} & 0 \\ -q_3 + \frac{q_1 q_2}{q_0} & q_0 + \frac{q_2^2}{q_0} & q_1 + \frac{q_2 q_3}{q_0} & 0 \\ q_2 + \frac{q_1 q_3}{q_0} & -q_1 + \frac{q_2 q_3}{q_0} & q_0 + \frac{q_3^2}{q_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \frac{2m^{'}}{\sigma_{q_1}} - \frac{\dot{q}_0 p - \dot{q}_3 q + \dot{q}_2 r}{\sigma_{q_1}} - \frac{[1\ 0\ 0]A}{\sigma_{q_1}} \\ \frac{2n^{'}}{\sigma_{q_2}} - \frac{\dot{q}_3 p + \dot{q}_0 q - \dot{q}_1 r}{\sigma_{q_2}} - \frac{[0\ 1\ 0]A}{\sigma_{q_2}} \\ \frac{2o^{'}}{\sigma_{q_3}} - \frac{-\dot{q}_2 p + \dot{q}_1 q + \dot{q}_0 r}{\sigma_{q_3}} - \frac{[0\ 0\ 1]A}{\sigma_{q_3}} \\ \frac{k^{'} - (q\dot{x} - p\dot{y} + g\cos\phi\cos\theta)}{\sigma_z} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

para

$$A = \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{J_y - J_z}{J_x} qr \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} pr \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} pq \end{bmatrix}$$

Os estados atuais são obtidos do estimador, enquanto o vetor $w = [m^{'}\ n^{'}\ z^{'}\ k^{'}]^T$ é saída de um controlador PD. Em seguida, o vetor $u^* = [m\ n\ o\ k]^T$ obtido a partir de w pode ser transformado nos comandos dos motores conforme a Eq. 13.

2.3 Controlador PD

Para garantir o rastreio da referência, é necessário acrescentar um laço de realimentação para *tracking*. É importante destacar que, assim como outras técnicas de linearização do modelo — e.g. *backstepping* —, a linearização por realimentação não garante a estabilidade do sistema. Essa metodologia apenas possibilida o projeto de um controlador linear, cuja saída de controle será transformada no sinal efetivo de entrada da planta.

A lei de controle linear para o sinal de controle virtual w é dada por:

$$\frac{W(z)}{E(z)} = K_P + K_D \frac{N}{1 + N \cdot T_s \frac{1}{z-1}}$$

para K_P e K_D os ganhos proporcional e derivativo, respectivamente, T_s o período de amostragem do controlador embarcado, N o coeficiente do filtro derivativo e $e(t)$ o erro entre a orientação e altitude atual e desejada. Para o Parrot Mambo, conforme a Tabela 1, $T_s = 5$ milissegundos.

Os valores dos ganhos para os laços de realimentação de $m^{'}$, $n^{'}$, $o^{'}$ e $k^{'}$ foram encontrados utilizando a *toolbox* de sintonia do MATLAB. Na Tabela 2 estão expostos esses ganhos e os polos de cada laço.

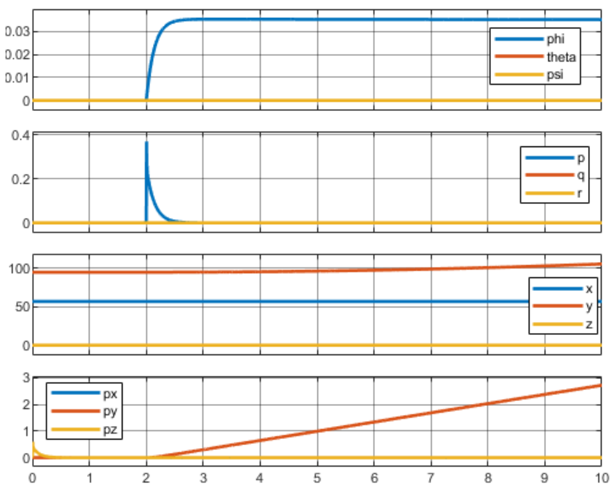
Tab. 2. Ganhos para o controlador PD.

Variável	K_P	K_D	N	**Polos**
$m^{'}/k^{'}$	$0,63$	$7,15$	$296,31$	$[-0,44\ \ 0,96\ \ 0,99]$
$n^{'}$	$0,77$	$8,79$	$296,31$	$[-0,43\ \ 0,96\ \ 0,99]$
$o^{'}$	$130,98$	$195,86$	$189,86$	$[0,53 \pm 0,84i\ \ 0,99]$

3 Resultados e Discussão

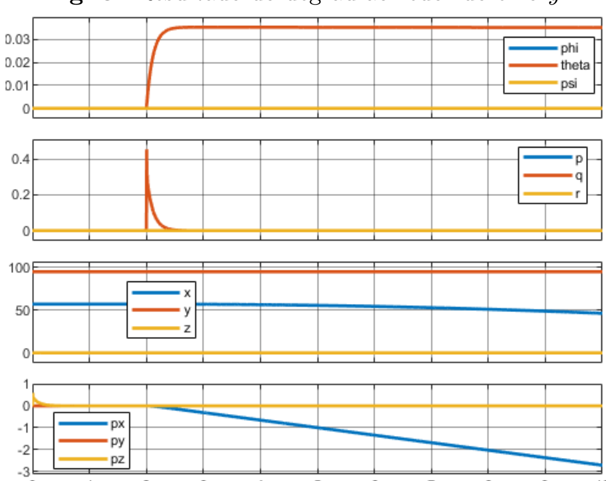
Segundo previamente apresentado, foram realizados três ensaios, cada um referente a um degrau de 2 graus em cada eixo de rotação $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$. Os resultados para esses experimentos estão ilustrados nas Fig. 2, Fig. 3 e Fig. 4, respectivamente. A posição inicial do centro de massa do drone no mundo é $p_0 = [57,0\ \ 95,0\ \ -0,046]^T$. O degrau foi aplicado em 2 segundos de simulação. A referência de altitude foi mantida nula.

Fig. 2. Resultado do degrau ao redor do eixo $\vec{x}$.



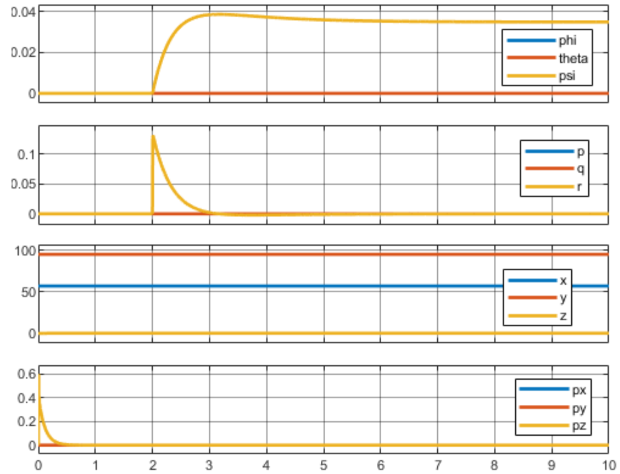
Fonte: Autoria própria.

Fig. 3. Resultado do degrau ao redor do eixo $\vec{y}$.



Fonte: Autoria própria.

Fig. 4. Resultado do degrau ao redor do eixo $\vec{z}$.



Fonte: Autoria própria.

Comparando a Fig. 2 e Fig. 3, é evidente a semelhança entre um giro ao redor do eixo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ em razão do acoplamento descrito na Eq. 11. Quando é aplicado um degrau de rotação em torno do eixo $\vec{x}$, isto é, $\phi > 0$, há um deslocamento do drone no eixo $\vec{y}$, ou seja, $\Delta y \neq 0$. analogamente, ao definir um degrau à referência θ, há um deslocamento do drone no eixo $\vec{x}$, ou seja, $\Delta x \neq 0$.

Por sua vez, a Fig. 2 e Fig. 3 com a Fig. 4, é perceptível que a rotação no eixo $\vec{z}$ possui uma dinâmica diferente. A rotação em torno do eixo vertical não provoca alterações na posição x ou y do drone. Logo após o início da simulação, há uma velocidade $\dot{z}$ não nula em razão da força de propulsão $F \neq 0$ que mantém o drone na altitude constante $z = 0$.

Em todos os gráficos, a atitude do drone segue a referência angular com erro nulo em regime permanente. É importante destacar que esse experimento comprova que a orientação do drone independe das componentes translacionais. Entretanto, a translação do quadricóptero depende diretamente da mudança das componentes rotacionais.

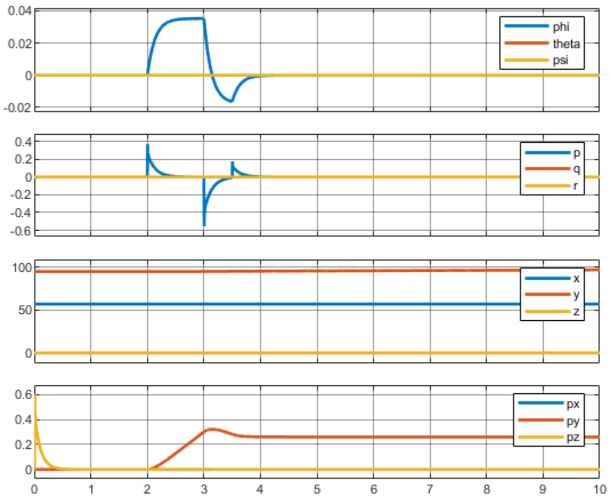
Por fim, para o último experimento, o sinal de referência aplicado foi:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 2 \\ 2^\circ & ,2 \leq t < 3 \\ -1^\circ & ,3 \leq t < 3,5 \\ 0 & ,t \geq 3,5 \end{cases}$$

$$\theta(t) = 0 \quad \phi(t) = 0 \quad z(t) = 0$$

para a atitude e altitude do drone. O resultado obtido está ilustrado na Fig. 5. Assim como nos três experimentos anteriores, há o rastreio pela referência angular fornecida à malha fechada.

Fig. 5. Resultado dos degraus ao redor do eixo $\vec{x}$ para $F \neq 0$.



Fonte: Autoria própria.

Observando a Fig. 5, é evidente que o degrau aplicado a partir de 2 segundos na referência do estado ϕ modifica exclusivamente a velocidade do corpo em relação ao eixo $\vec{y}$. Tendo em vista que a magnitude da posição inicial no mundo é grande em relação à variação δy provocada pelo degrau de 1 segundo, a alteração na curva y ilustrada na Fig. 5 é aproximadamente nula.

4 Conclusão

Esse estudo tem por objetivo o desenvolvimento de uma linearização por realimentação. Logo, foi necessário modelar um quadricóptero e encontrar o vetor do sinal de controle virtual adequado, cuja relação com a entrada real é linear.

Os experimentos garantiram o funcionamento do espaço de estados modelado e da lei de controle construída com base no novo vetor sinais de controle virtual. Além disso, os experimentos comprovaram a validez da sintonia do controlador proporcional-derivativo alocado no laço externo de rastreio da referência.

Esses ensaios poderiam ser otimizados considerando o equacionamento do efeito do *inflow* na linearização por realimentação. Dessa forma, a força F seria decomposta nos três eixos e duas novas variáveis de controle deveriam ser alocadas. Ao incluir esse efeito, poder-se-ia realizar o *deploy* do sistema de controle projetado no drone real e efetivamente testar a robustez dos controladores PD projetados.

5 Referências

[1] MAGALHÃES, Giorgio; SANTOS, Eder; BORGES, Luan; CUNHA, Antonio. **Comparison and Implementation of controle Strategies for a Quadrotor**. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2017. ISSN 2175 8905