

# Relatório de Atividade - Estimação de parâmetros

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Análise e Projeto de Sistemas de Controle 21.1

19 de abril de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a identificação de modelos pelo método dos mínimos quadrados. Esse algoritmo determina uma estimação dos parâmetros do modelo e é adequado para **processos não-lineares ou variantes no tempo**.

## Table of Contents

Fundamentação Teórica.....	1
Desenvolvimento.....	2
Exemplo 1: Mínimos quadrados em processos não variantes no tempo.....	2
Exemplo 3: Mínimos quadrados em processo não-linear.....	3
Exemplo 5: Função degrau como entrada de um sistema.....	5
Exemplo 10: Perda de identificação em razão da realimentação.....	6
A) Ganho constante.....	6
B) Ganho variável.....	7
Exemplo 12: Mudança de sinal de excitação.....	8
A) Pulso unitário.....	8
B) Sinal periódico.....	9
Exemplo 13: Estimativa do erro.....	11
A) RLS.....	11
B) ELS.....	12
Exemplo 19: Parametrização de um circuito.....	13
Exercício proposto 21: Variação de parâmetros do RLS.....	15
A) Variação de .....	15
B) Variação de .....	16
C) Variação de .....	17
D) Variação de .....	18
Referências bibliográficas.....	19

## Fundamentação Teórica

O modelo de uma planta é construído conforme dados experimentais [1]. Isto é, a identificação de um processo é desenvolvida segundo uma relação matemática entre as entradas e saída coletadas. Para controle adaptativo, a entrada da planta é originada via *feedback* e não pode ser determinada unicamente [2]. Portanto, deve-se estimar os parâmetros do modelo simulado para o comportamento mais próximo do processo real. Um desses algoritmos de estimação é nomeado método dos mínimos quadrados.

A relação de entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$  de um sistema discreto pode ser dada por:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_ny(t-n) = b_1u(t-1) + \dots + b_mu(t-m)$$

A qual pode ser reescrita como:

$$\hat{y}(t|\theta) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) = \varphi^T(t)\theta$$

para  $\varphi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n) \ u(t-1) \dots u(t-m)]^T$  e  $\theta = [a_1 \dots a_n \ b_1 \dots b_m]^T$ . com o intuito de encontrar o menor erro entre o processo real e o estimado, deve-se encontrar o mínimo da função de custo  $V(\theta, t)$ , sendo

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t (y(k) - \hat{y}(k))^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2$$

Para encontrar  $\min V(\theta, t)$ , encontra-se  $\hat{\theta}$  tal que  $\partial V(\hat{\theta}, t)/\partial \theta = 0$ . Dessa forma:

$$\sum_{k=1}^t \varphi(k) (y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}) = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^t \varphi(k) y(k) = \sum_{k=1}^t \varphi(k) \varphi^T(k) \hat{\theta}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \left[ \sum_{k=1}^t \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^t \varphi(k) y(k) = P(t) \sum_{k=1}^t \varphi(k) y(k)$$

Logo, é evidente que  $P(t)$  deve ser positiva definida. Nesse estudo, será generalizado  $\varphi(t) = [\varphi_1(t) \dots \varphi_{n+m}(t)]^T$  para  $\varphi_i(t)$  uma função das entradas e saídas do processo.

## Desenvolvimento

Os controladores propostos foram construídos e simulados utilizando blocos no Simulink. As estratégias adotadas seguem a apresentação citada na [Seção 1](#). Primeiramente, serão apresentados os exercícios resolvidos. Por fim, serão discutidas as questões propostas.

### Exemplo 1: Mínimos quadrados em processos não variantes no tempo

Considere o sistema tal que  $\varphi(t) = [1 \ u(t) \ u^2(t)]^T$  e  $\theta = [b_0 \ b_1 \ b_2]^T$  para  $y(t) = \varphi^T(t)\theta_0 + e(t)$ , sendo  $e(t)$  um ruído gaussiano com desvio padrão 0.1. A expressão de  $\hat{\theta}$  é adaptada para:

$$\hat{\theta} = P(t) \sum_{k=1}^t \varphi(k) [\varphi^T(k)\theta_0 + e(k)]$$

Logo, o erro  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta_0$  é dado por:

$$\tilde{\theta} = P(t) \sum_{k=1}^t \varphi(k) e(k)$$

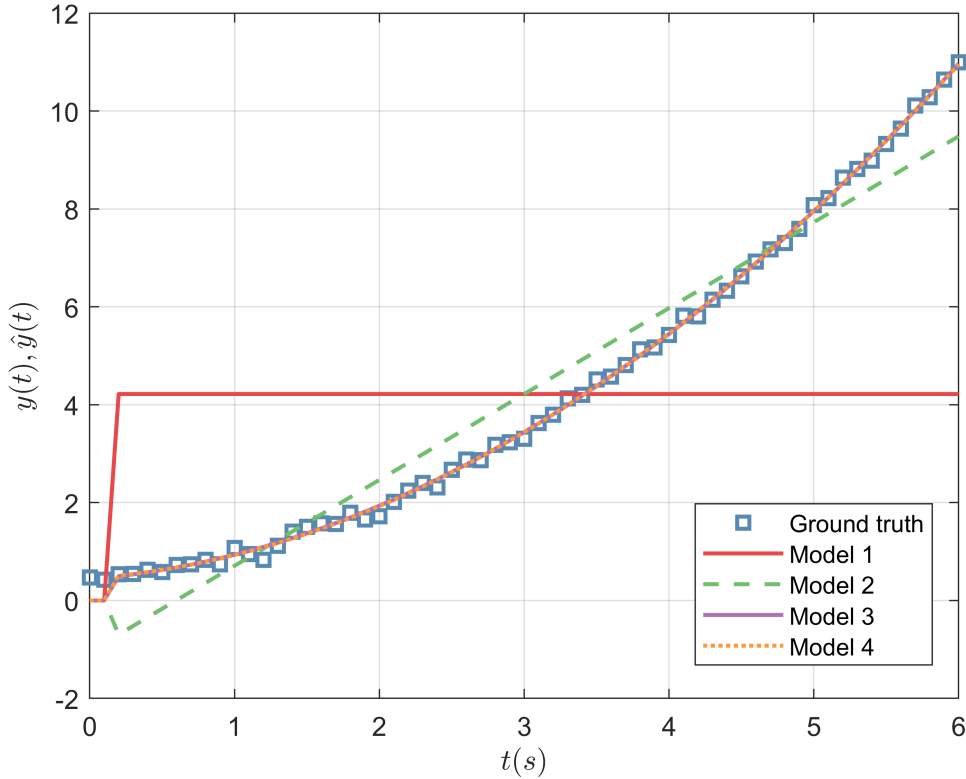
Se  $e(t)$  é um ruído gaussiano de média nula,  $u$  e  $y$  variáveis determinísticas e  $E$  o valor esperado, obtém-se que

$$E\tilde{\theta} = P(t) \sum_{k=1}^t \varphi(k) Ee(k) = 0$$

Logo, a estimativa de  $\hat{\theta}$  pelo método de mínimos quadrados rejeita ruídos gaussianos na medição da saída  $y(t)$ .

Essa questão tem por objetivo discutir qual a ordem de  $\hat{\theta}$  do modelo estimado mais se adequa à planta simulada. É esperado que com o aumento da ordem, a curva do modelo identificado se aproxime do processo real até atingir um erro mínimo. Foram realizados 4 experimentos variando a ordem da matriz  $\hat{\theta}$  entre 1 e 4. O valor real de  $y(t)$  e estimado  $\hat{y}(t)$  para cada modelo estão ilustrados na [Figura 1](#).

ex01



**Figura 1:**  $y(t)$  e  $\hat{y}(t)$  para  $\hat{\theta}$  um vetor de ordem 1 a 4.

Para os modelos para ordem de 2 ou 3 de  $u(t)$  em  $\varphi$ , o desvio padrão entre  $y(t)$  e  $\hat{y}(t)$  é aproximadamente 0,13. Para  $\varphi = [1 \ u(t)]$  e  $\varphi = [1]$ , o desvio padrão entre  $y(t)$  e  $\hat{y}(t)$  é 0,65 e 10, respectivamente. Analisando esses resultados, é evidente que o aumento da ordem da matriz  $\theta$  aproxima  $\hat{y}$  de  $y$  até atingir um erro mínimo. Observando a [Figura 1](#), fica claro que o erro gaussiano  $e(t)$  é rejeitado pela estimativa de mínimos quadrados.

### Exemplo 3: Mínimos quadrados em processo não-linear

A matriz  $R = P^{-1}(t)$  pode ser reescrita como:

$$P^{-1}(t) = \sum_{k=1}^{t-1} \varphi(k)\varphi^T(k) + \varphi(t)\varphi^T(t) = P^{-1}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t)$$

Considerando que

$$\hat{\theta}(t-1) = P(t-1) \sum_{k=1}^{t-1} \varphi(k)y(k) \therefore \sum_{k=1}^{t-1} \varphi(k)y(k) = P^{-1}(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

Substituindo  $P^{-1}$ :

$$P^{-1}(t-1)\hat{\theta}(t-1) = [P^{-1}(t) - \varphi(t)\varphi^T(t)]\hat{\theta}(t-1)$$

Logo

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= P(t) \sum_{k=1}^t \varphi(k)y(k) = P(t) \left[ \sum_{k=1}^{t-1} \varphi(k)y(k) + \varphi(t)y(t) \right] = P(t) [P^{-1}(t-1)\hat{\theta}(t-1) + \varphi(t)y(t)] \\ \therefore \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) - P(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t)y(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t) \end{aligned}$$

para  $K(t) = P(t)\varphi(t)$  e  $\varepsilon = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$ . Dessa forma,  $\hat{\theta}(t)$  depende apenas da última amostra e é, portanto, adequado para aplicação no laço de realimentação de um controlador adaptativo. É importante destacar a necessidade de definir o valor  $\hat{\theta}(0)$  e  $P(0)$ .

Considerando que, para matrizes quadradas  $A$ ,  $C$  e  $C^{-1} + DA^{-1}B$  não singulares, a matriz inversa de  $A + BCD$  é

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

para  $A = P^{-1}(t-1)$ ,  $B = \varphi(t)$ ,  $C = I$  e  $D = \varphi^T(t)$ , encontra-se que:

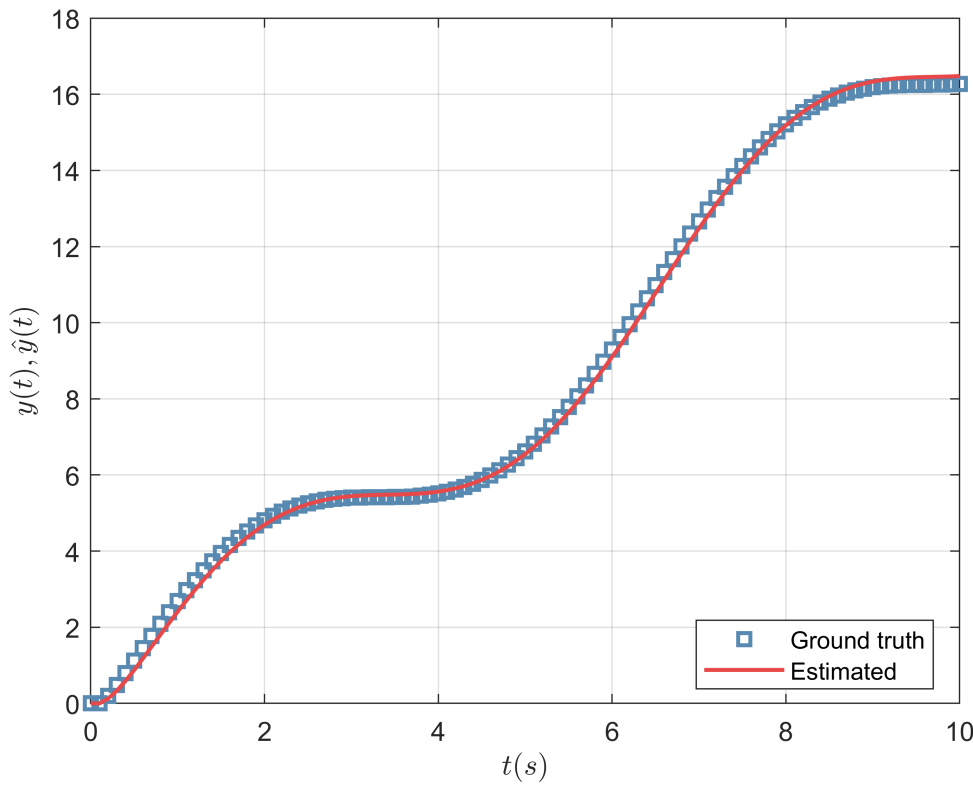
Logo, para  $K(t) = P(t)\varphi(t)$ , obtém-se:

$$K(t) = P(t)\varphi(t) = P(t-1)\varphi(t) [I + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)]^{-1}$$

É evidente o cálculo de uma matriz inversa. Porém, como  $\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)$  é um escalar, a inversão é simples e nunca indefinida, uma vez que  $I = 1$ . Essa formulação dos métodos dos mínimos quadrados é nomeada recursivo (RLS).

Considere o sistema não linear  $\varphi(t) = [-y(t) \ u(t) \ \sin u(t)]^T$  e  $\theta = [a \ b_1 \ b_2]^T$  para  $y(t) = \varphi^T(t-1)\theta_0$ . Como os parâmetros são lineares, a estimativa de  $\hat{\theta}$  pode ser obtida conforme o método dos mínimos quadrados recursivo. O valor real de  $y(t)$  e estimado  $\hat{y}(t)$  para cada modelo estão ilustrados na [Figura 2](#).

ex03



**Figura 2:**  $y(t)$  e  $\hat{y}(t)$  para  $\hat{\theta}$  um vetor de ordem 3.

Conforme ilustrado na Figura 2, o modelo não linear é corretamente estimado empregando RLS. Como os parâmetros são lineares, é possível construir um vetor  $\theta$  tal que  $y(t) = \varphi^T(t)\theta_0$ . O desvio padrão entre a função estimada  $\hat{y}$  e a real  $y$  é:

```
sqrt(mean((z-y).^2))
```

```
ans = 0.1493
```

### Exemplo 5: Função degrau como entrada de um sistema

Para analisar a persistência de um sinal de excitação  $u$ , considera-se a matriz  $C_n$  tal que:

$$C_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P^{-1}(t)}{t} = \begin{bmatrix} c(0) & c(1) & \cdots & c(n-1) \\ c(1) & c(0) & \cdots & c(n-2) \\ \vdots & & \ddots & \\ c(n-1) & c(n-2) & \cdots & c(0) \end{bmatrix}$$

para  $\varphi = [u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-n)]$  e  $c(k)$  a covariância entre as amostras da entrada, isto é:

$$c(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u(i)u(i-k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [A(q)u(k)]^2$$

para  $A(q) = a_0q^{n-1} + a_1q^{n-2} + \dots + a_{n-1}$ . Se  $a = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]$ , é evidente que:

$$c(k) = U = a^T C_n a$$

Caso  $C_n$  seja positiva definida, é evidente que  $U > 0$ . Sinais persistentes com  $U$  positivo indicam matrizes inversíveis de  $P(t)$  e, portanto, estimáveis via RLS. Além disso, sinais de excitação persistentes garantem a unicidade dos dados experimentais. Dessa forma, são adquiridas mais informações sobre o processo modela e torna-se possível aumentar a ordem de  $\hat{\theta}$ .

Por exemplo, para  $u(t)$  um pulso unitário,  $A(q) = 1$ :

$$c(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u(i)u(i-k) = 0 \therefore C_n = U = 0$$

Dessa forma, o pulso unitário não é persistente para qualquer número de amostras  $n$ . Já para degrau unitário, tem-se:

$$C_1 = c(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u^2(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t} = 1$$

Logo, para ordem 1, o degrau unitário é persistente. Para as demais ordens,  $U = 0$ . Dessa forma, deve-se empregar outros sinais periódicos de excitação com período  $n$ , os quais são sinais persistentes de ordem  $n$ .

## Exemplo 10: Perda de identificação em razão da realimentação

Para malhas fechadas, considera-se o  $\varphi = [y(t-1) \ y(t-2) \ \dots \ y(t-m) \ u(t-1) \ u(t-2) \ \dots \ u(t-n)]^T$ . Logo, a matriz  $P(t)$  possui produtos cruzados entre sinais de entrada  $u$  e saída  $y$ . Para realimentação de baixa ordem, a matriz  $C_n$  não possui posto completo. Dessa forma,  $U = 0$  e os parâmetros não podem ser determinados unicamente.

### A) Ganho constante

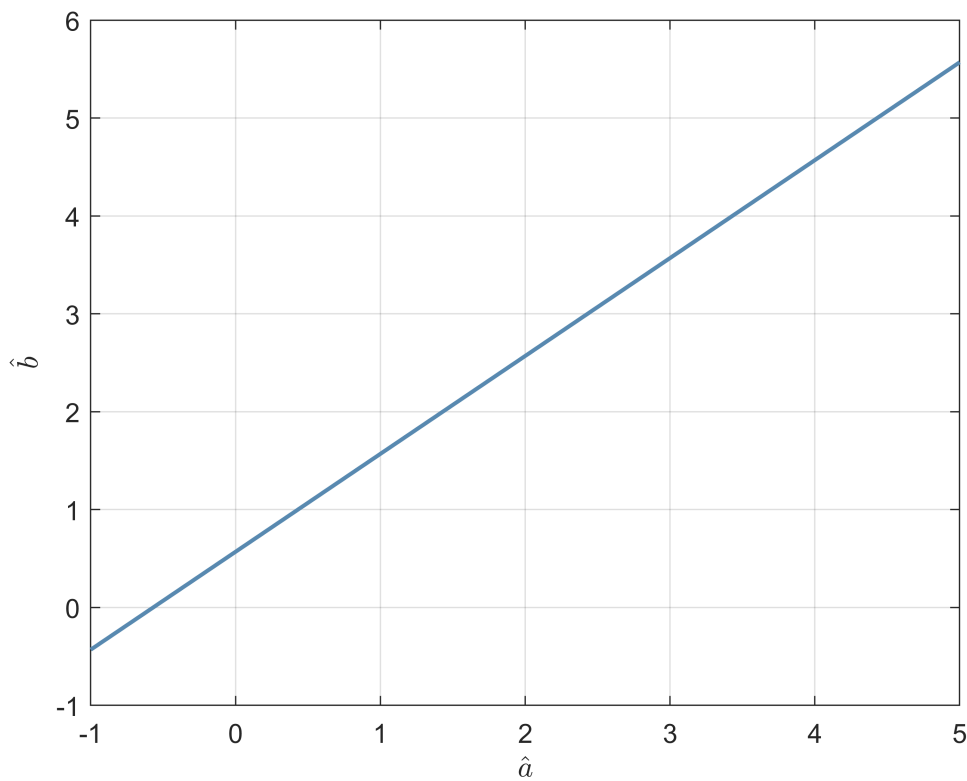
Por exemplo, considere o sistema  $y(t+1) + ay(t) = bu(t)$  tal que  $\varphi(t) = [-y(t) \ u(t-1)]^T$  e  $\theta = [-(a + \alpha k) \ (b - \alpha)]^T$  para  $y(t) = \varphi(t-1)^T \theta$  e  $k$  o ganho da malha de realimentação  $u(t) = -ky(t)$ .

Considerando  $\hat{a} = a + \alpha k$  e  $\hat{b} = b - \alpha$ :

$$\therefore \hat{b} = b - \frac{(\hat{a} - a)}{k}$$

Portanto, qualquer solução  $\hat{\theta} = [\hat{b} \ \hat{a}]$  garante infinitas soluções para  $a$  e  $b$ , os quais são associados conforme o valor do ganho de realimentação  $k$ . Esses parâmetros  $a$  e  $b$  estão contidos na reta ilustrada na [Figura 3](#), porém não podem ser unicamente identificados.

ex10\_A



**Figura 3:** Reta representante da relação entre  $a$  e  $b$  para  $\hat{\theta}$ .

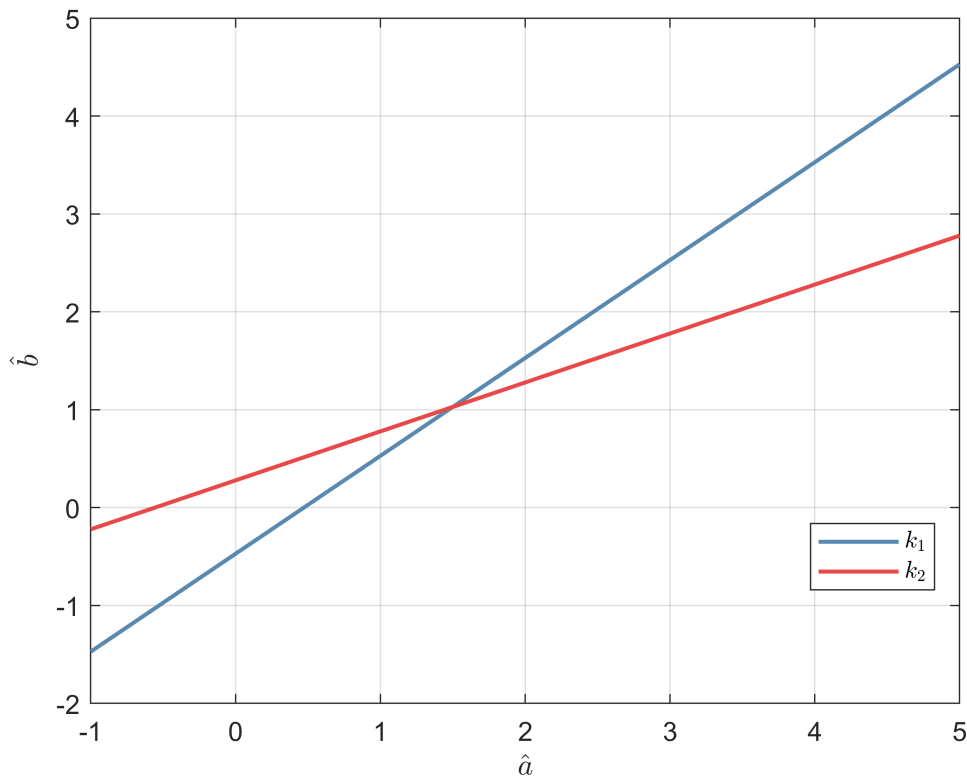
### B) Ganho variável

Com o intuito de garantir  $U > 0$ , pode-se realimentar  $u(t) = -k(t)y(t)$  para  $k(t)$  um ganho variável ou aumentar a ordem da realimentação para  $u(t) = -k_1y(t) - k_2y(t-1)$ . Para:

$$k(t) = \begin{cases} k_1, & t \leq 5 \\ k_2, & t > 5 \end{cases}$$

a reta  $b(a)$  está ilustrada na [Figura 4](#). Como as retas para  $k_1$  e  $k_2$  são referentes aos mesmos parâmetros  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$ , o ponto de intersecção entre as retas indica unicamente os valores de  $a + k\alpha = 1.5$  e  $b - \alpha = 1$ . Se  $k = 1$  e  $\alpha = 0.5$ , obtém-se  $b = 1.5$  e  $a = 1$ .

ex10\_B



**Figura 4:** Reta representante da relação entre  $a$  e  $b$  para  $\hat{\theta}$  com ganho de realimentação variável.

## Exemplo 12: Mudança de sinal de excitação

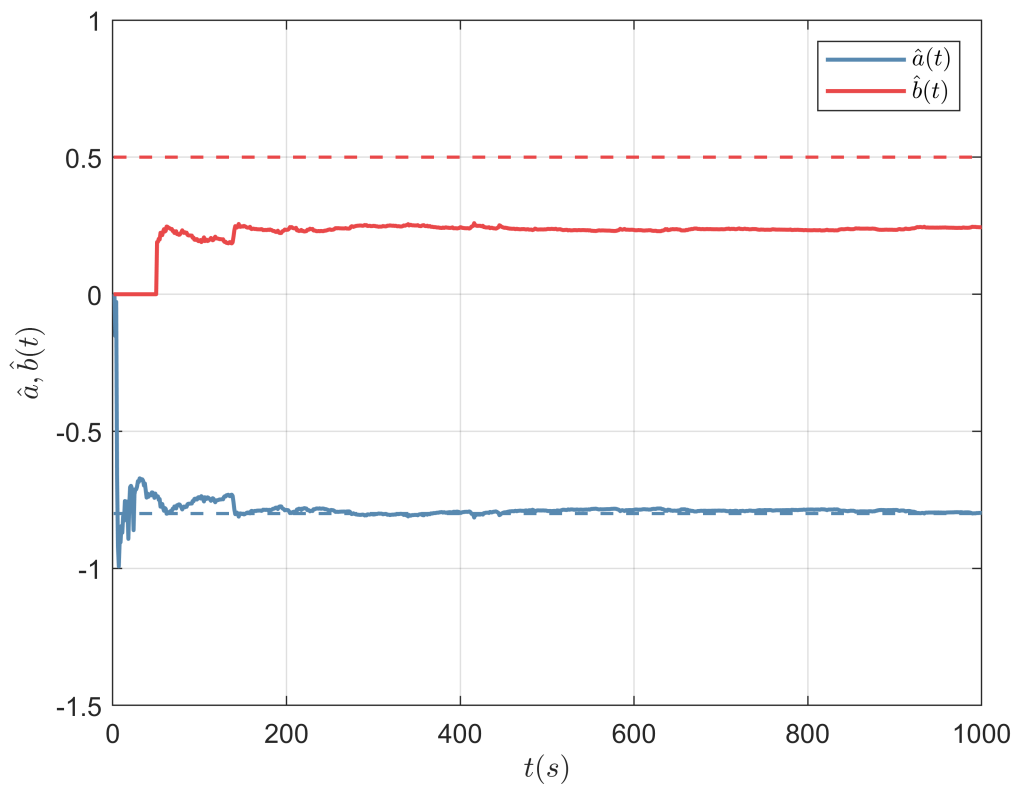
Considere o sistema  $y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$  para  $a = -0.8$ ,  $b = 0.5$  e  $e(t)$  um ruído branco gaussiano de média nula e variância 0,5. Além disso,  $c = 0$ ,  $P(0) = 100I$  e  $\hat{\theta}(0) = 0$ .

### A) Pulso unitário

Para o RLS, é possível definir  $\varphi(t-1) = [-y(t-1) \ u(t-1)]^T$  e  $\hat{\theta} = [-a \ b]^T$ . Considerando um sinal de excitação  $u(t)$  como um pulso unitário em  $t = 50$  e um total de  $n = 1000$  amostras, obtém-se as estimativas para  $a$  e  $b$  conforme ilustrado na [Figura 5](#).

ex12\_A





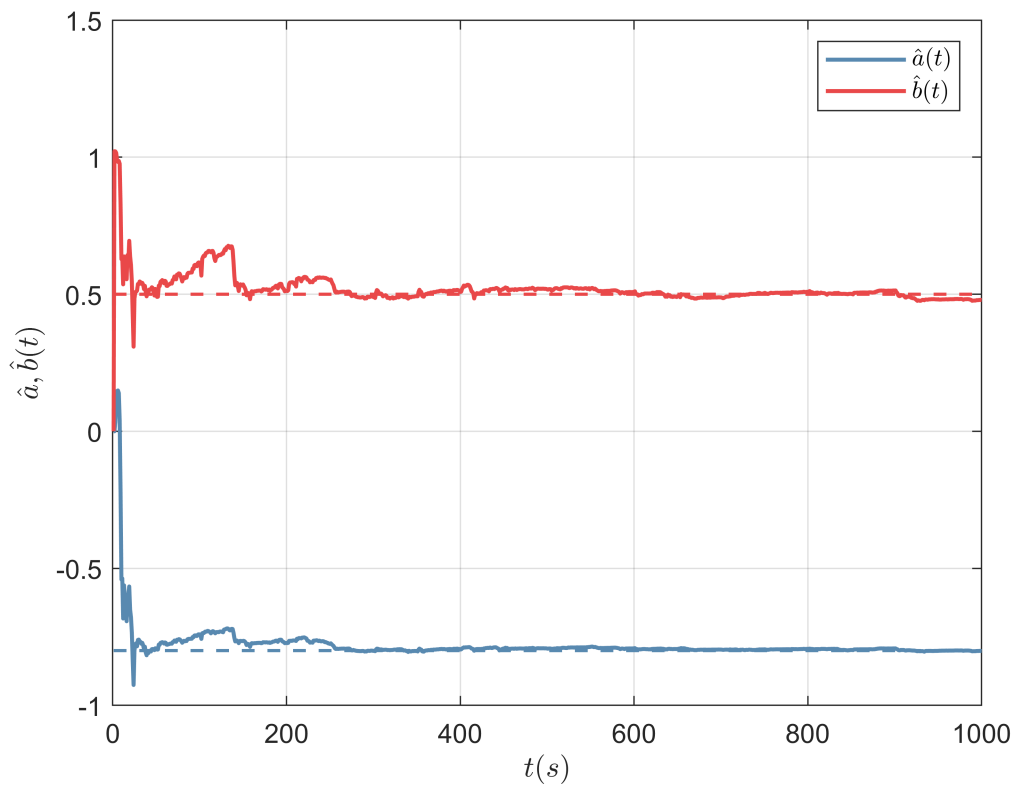
**Figura 5:** Estimativas dos parâmetros  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  em função do tempo empregando RLS para  $u(t)$  um pulso.

Observando a [Figura 5](#), é evidente que a estimativa do parâmetro  $\hat{b}$  referente à entrada realimentada não acompanha o valor real 0,5. Conforme discutido no [Ex. 5](#), a função de excitação  $u(t)$  pulso unitário não é persistente.

### B) Sinal periódico

Dessa forma, aplicou-se sobre o sistema uma entrada de onda quadrada  $u(t)$  periódica com período  $T = 100$ . As novas estimativas para  $a$  e  $b$  estão ilustradas na [Figura 6](#).

ex12\_B



**Figura 6:** Estimativas dos parâmetros  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  em função do tempo empregando RLS para  $u(t)$  uma onda quadrática.

Observando a [Figura 6](#), é evidente que a estimativa do parâmetro  $\hat{b}$  referente à entrada realimentada acompanha o valor real 0,5. Conforme discutido no [Ex. 5](#), a função de excitação  $u(t)$  pulso unitário não é persistente para qualquer ordem  $n = 100$ . O desvio padrão entre as estimativas  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  de seus valores reais são, respectivamente:

```
sqrt(mean((theta-ones(size(theta)).*[-0.8;0.5]).^2,2))
```

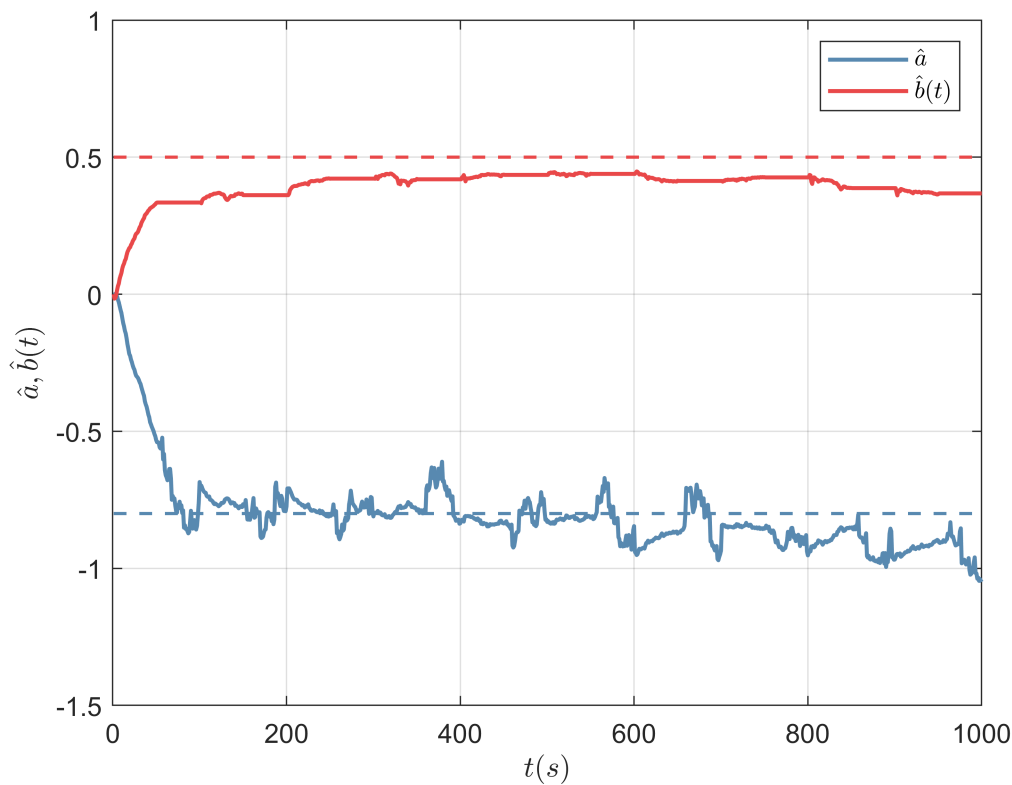
```
ans = 2x1
    0.0863
    0.0613
```

Para simplificar a computação de uma nova matriz  $P$  e  $\hat{\theta}$  a cada amostra, pode-se empregar o algoritmo de aproximação de Kaczmarz, o qual considera:

$$K(t) = \frac{\gamma \varphi(t)}{\alpha + \varphi^T(t) \varphi(t)}$$

Determinando  $\gamma = 0.025$  e  $\alpha = 0.01$ , encontra-se na [Figura 7](#) estimativa para os parâmetros  $a$  e  $b$  com o método RLS.

```
ex12_C
```



**Figura 7:** Estimativas dos parâmetros  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  em função do tempo empregando RLS para  $u(t)$  uma onda quadrática com a aproximação de Kaczmarz.

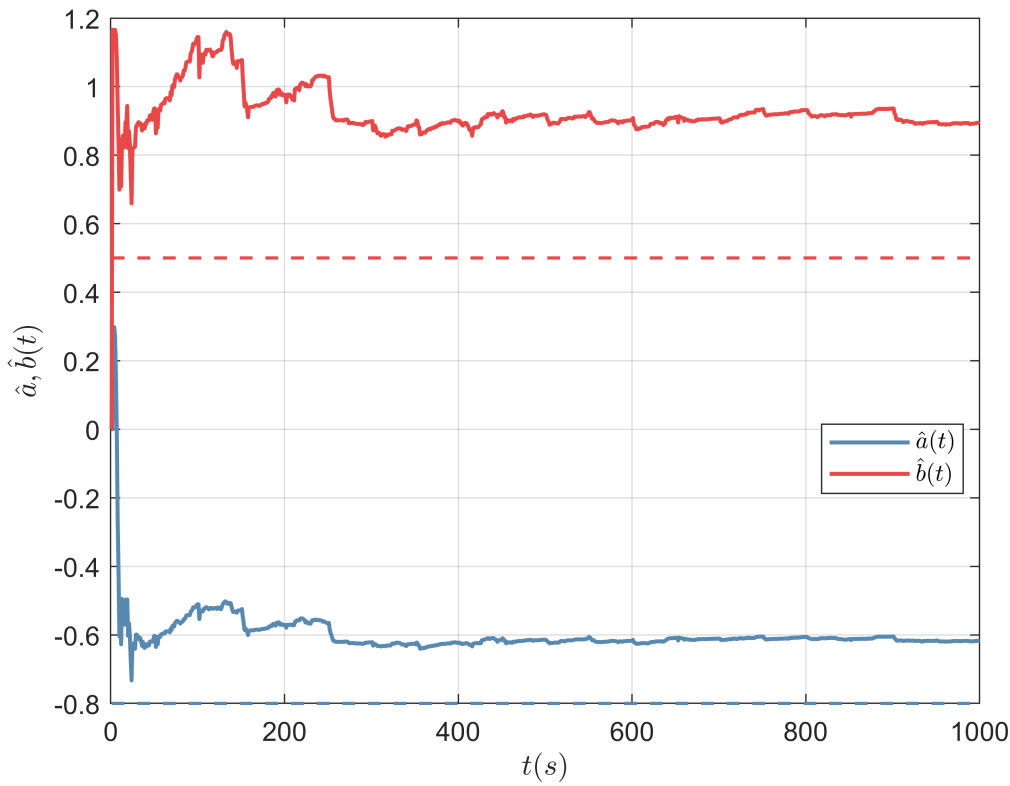
Observando a [Figura 7](#), é evidente que a simplificação do algoritmo minimiza a precisão da estimação. Uma maior eficiência do algoritmo poderia ser encontrada para diferentes valores de  $\gamma$  e  $\alpha$ .

### Exemplo 13: Estimativa do erro

#### A) RLS

Agora, considera-se o sistema apresentado no [Ex.12](#) com  $c \neq 0$ . Como o ruído modelado  $e(t) + ce(t-1)$  não é mais gaussiano com média zero, o desenvolvimento apresentado no [Ex. 1](#) para  $E\tilde{\theta} = 0$  não é mais válido. Aplicando o método RLS sobre o sistema, obtém-se as estimativas de  $a$  e  $b$  conforme apresentado na [Figura 8](#).

ex13\_A



**Figura 8:** Estimativas dos parâmetros  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  em função do tempo empregando RLS para  $u(t)$  uma onda quadrática e  $c \neq 0$ .

Observando a [Figura 8](#), é evidente que por  $E\tilde{\theta} \neq 0$ , a estimativa dos parâmetros  $\theta$  é enviesada.

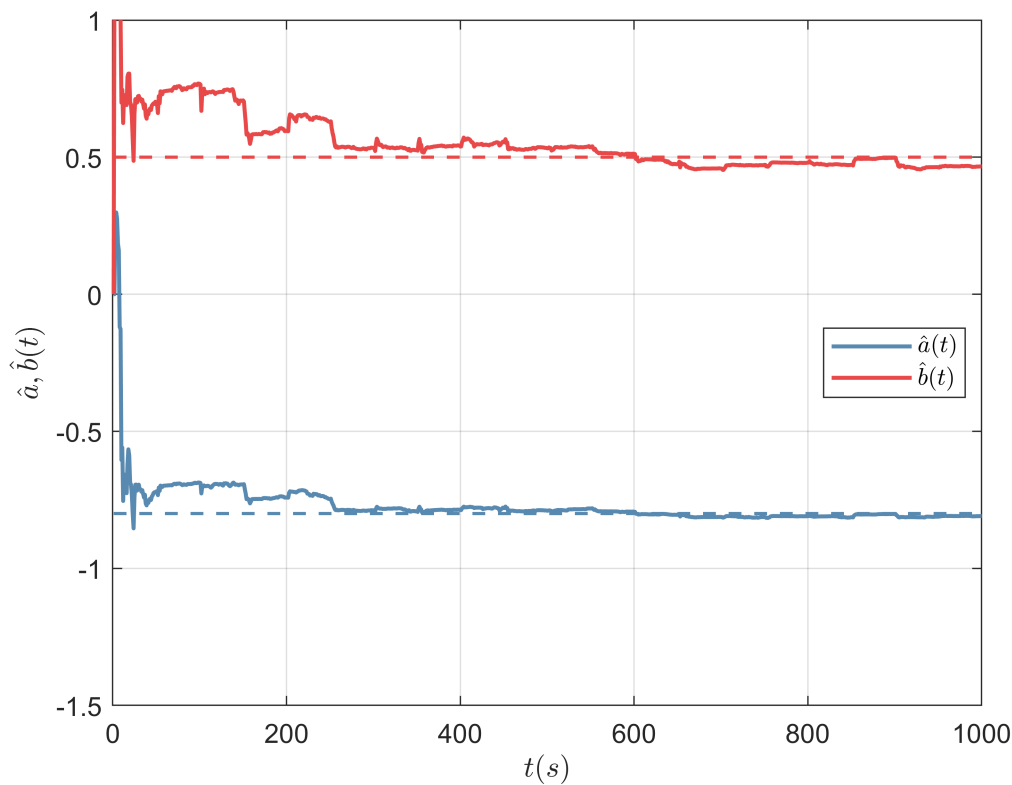
### B) ELS

Para solucionar esse problema, pode-se aplicar a metodologia dos mínimos quadrados estendido (ELS), ou seja, para casos em que  $E\varphi^T(t)e(t) \neq 0$ . No ELS, considera-se o vetor

$$\varphi(t-1) = [-y(t-1) \dots -y(t-n) \ u(t-1) \dots u(t-n) \ \varepsilon(t-1) \dots \varepsilon(t-n)]^T$$

para  $\varepsilon = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$ , conforme discutido no [Ex. 3](#). Dessa forma, considera-se  $y(t) = \varphi^T(t-1)\theta_0 + e(t)$ . Aplicando o método ELS sobre o sistema, obtém-se as estimativas de  $a$  e  $b$  conforme apresentado na [Figura 9](#).

ex13\_B



**Figura 9:** Estimativas dos parâmetros  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  em função do tempo empregando ELS para  $u(t)$  uma onda quadrática e  $c \neq 0$ .

Observando a [Figura 9](#), é evidente que a estimativa do parâmetro  $\hat{b}$  referente à entrada realimentada acompanha o valor real 0,5. O desvio padrão entre as estimativas  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  de seus valores reais são, respectivamente:

```
sqrt(mean((theta-ones(size(theta)).*[-0.8;0.5;-0.5]).^2,2))
```

```
ans = 3×1
    0.0984
    0.1143
    0.1438
```

O desvio padrão para 1000 amostras é maior para o ELS que para o RLS quando  $c = 0$ . Considerando no primeiro caso deve-se ajustar um parâmetro a mais que no último, é evidente que a estabilidade da estimativa no ELS será atingida com maior número de amostras em relação ao RLS.

### Exemplo 19: Parametrização de um circuito

Para estimar parâmetros em sistemas de tempo contínuo, é possível empregar LS para ajustar os coeficientes da função de transferência  $G(s)$  do processo. Considerando que essa função de transferência descreve, no domínio do tempo, a seguinte relação entre entrada e saída:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + b_n u$$

é possível reescrever a relação entre  $y(t)$  e  $u(t)$  como  $A(p)y(t) = B(p)u(t)$ , para  $A(p)$  e  $B(p)$  polinômios em função do operador diferencial  $p = \frac{d}{dt}$ . Analogamente à relação entre  $y(t)$  e  $u(t)$  apresentada na [Fund. Teórica](#), é possível escrever os vetores:

$$\varphi^T(t) = [-p^{n-1}y_f \dots -y_f \ p^{n-1}u_f \dots u_f] \text{ e } \theta^T = [a_1 \dots a_n \ b_1 \dots b_n]$$

para  $y_f(t) = H_f(p)y(t)$  e  $u_f(t) = H_f(p)u(t)$ , no qual  $H_f$  é um filtro estável com excesso de polos responsável pela rejeição dos ruídos da operação derivada.

Para esse exemplo, considere o sistema contínuo determinado pelo espaço de estados:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad R]x$$

A função de transferência desse sistema pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{s^2 + \theta_1 \theta_2 s + \theta_2 \theta_3}$$

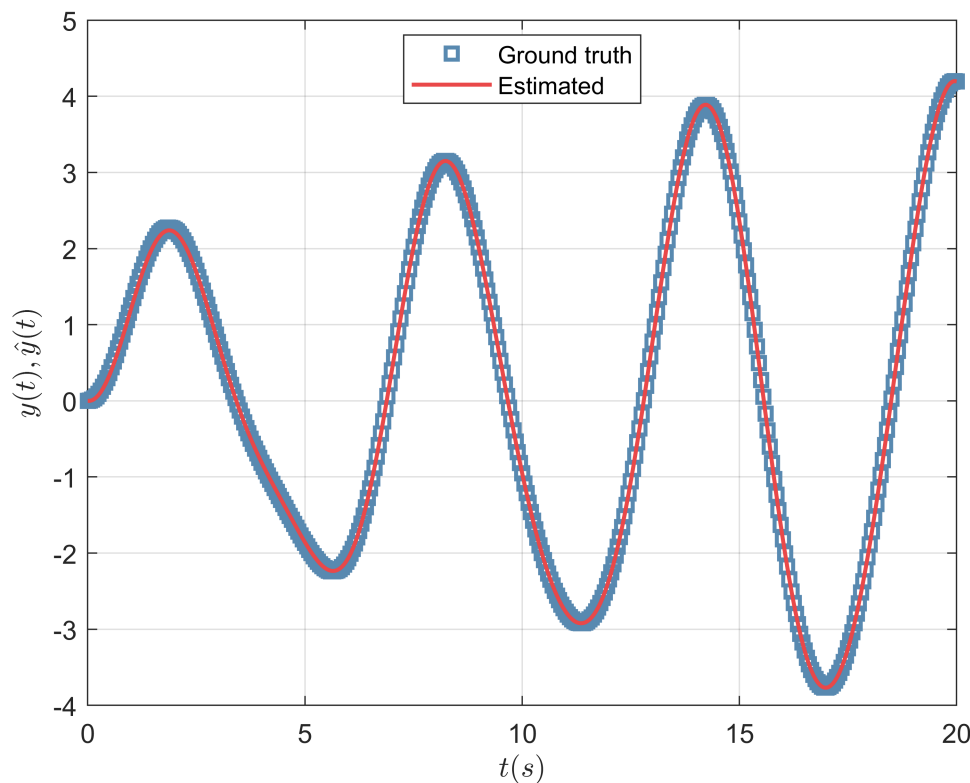
para  $\theta_1 = R$ ,  $\theta_2 = 1/L$  e  $\theta_3 = 1/C$ . Considerando  $k_1 = \theta_1 \theta_2 \theta_3$ ,  $k_2 = \theta_1 \theta_2$  e  $k_3 = \theta_2 \theta_3$ , é possível estimar o vetor  $\theta = [k_2 \ k_3 \ k_1]^T$  para  $\varphi^T(t-1) = [-dy(t-1)/dt \ -y(t-1) \ u(t-1)]$ . Discretizando  $G(s)$  com período de amostragem  $h$ , obtém-se a função de transferência:

$$H(q) = \frac{b_1 q + b_2}{q^2 + a_1 q + a_2}$$

Dessa forma, pode-se considerar  $\varphi^T(t-1) = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ u(k-1) \ u(k-2)]$  e  $\theta^T = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]$ . Estimando os parâmetros da função de transferência discreta  $H(q)$ , obtém-se a estimativa  $\hat{y}$  ilustrada na [Figura 10](#).

```
sim(' ../Simulink/ctlsea.slx')
```

The electrical initial states of your model are forced to zero by the powergui block.



**Figura 10:** Estimativa  $\hat{y}$  e saída  $y$  do espaço de estados do circuito.

A transformação de  $H(q)$  em tempo discreto para  $G(s)$  resulta na seguinte função de transferência:

```
gd=tf(numd,dend,h);
gc=d2c(gd)
```

gc =

$$\frac{9.768e-12 s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

Logo, comparando com o [equacionamento de](#)  $G(s)$ , conclui-se que  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ . Quaisquer valores de  $R$ ,  $L$  ou  $C$  que obedecem a esse equacionamento validam o sistema simulado.

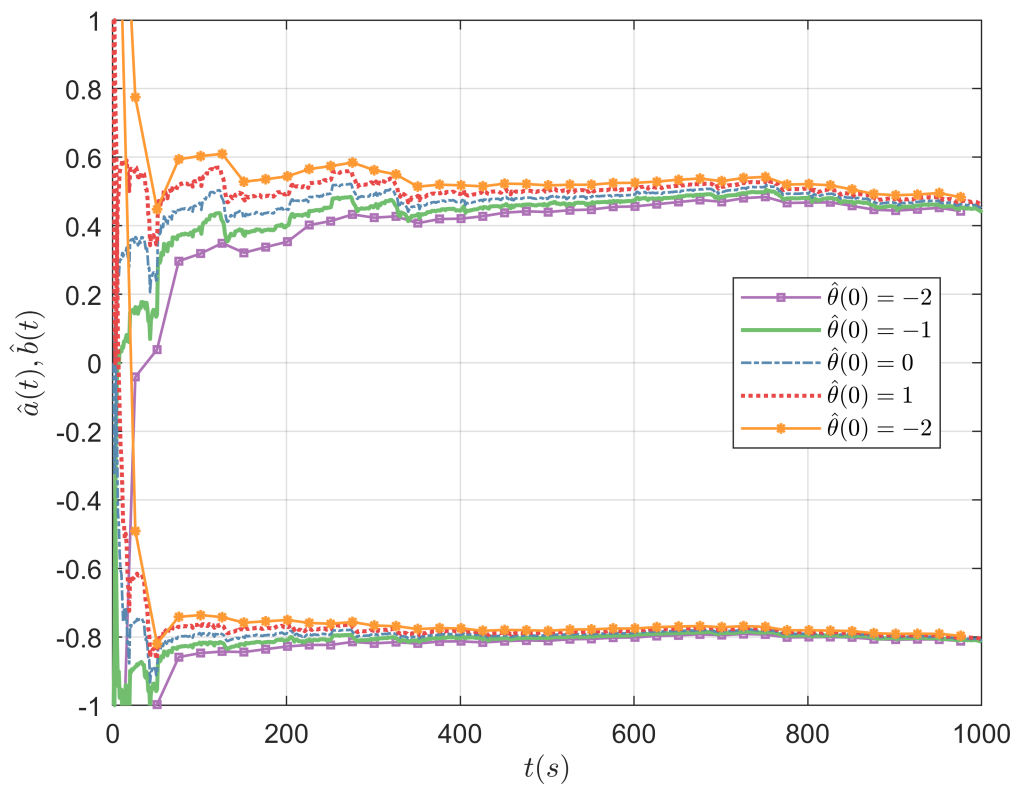
## Exercício proposto 21: Variação de parâmetros do RLS

Para esse exercício, será considerado o sistema apresentado no [Ex. 12B](#).

### A) Variação de $\hat{\theta}$

Ao variar o valor inicial de  $\hat{\theta}(0)$ , considerando  $P(0) = I$ , obtém-se o traçado para as estimativas  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  ilustrado na [Figura 11](#).

ex21\_A



**Figura 11:** Estimativa  $\hat{\theta}$  considerando a variação de  $\hat{\theta}(0)$ .

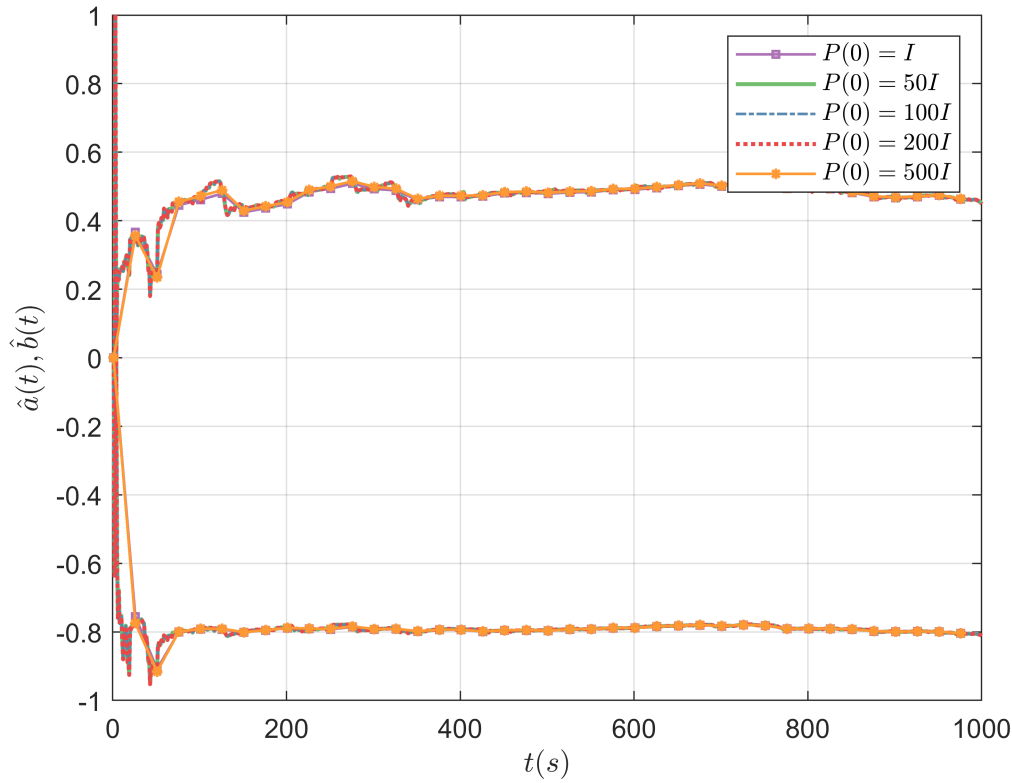
Observando a [Figura 11](#), é evidente que a estimativa inicial de  $\hat{\theta}(0)$  influencia os valores das primeiras amostras de  $\hat{\theta}(t)$ , tendo em vista que a atualização de  $\hat{\theta}(t)$  em função de  $\hat{\theta}(t+1)$  é uma soma. Entretanto, essa mudança não influencia a estimativa final de  $\hat{\theta}(1000)$ , uma vez que o algoritmo RLS é robusto e independe do valor de  $\hat{\theta}(0)$ .

### B) Variação de $P(0)$

Ao variar o valor inicial de  $P(0)$  considerando  $\hat{\theta}(0) = 0$ , obtém-se o traçado para as estimativas  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  ilustrado na [Figura 12](#).

ex21\_B





**Figura 12:** Estimativa  $\hat{\theta}$  considerando a variação de  $P(0)$ .

Observando a [Figura 12](#), analogamente ao [item A](#), é evidente que o valor inicial de  $P(0)$  influencia os valores das primeiras amostras de  $\hat{\theta}(t)$ , tendo em vista que a atualização de  $\hat{\theta}(t)$  em função de  $\hat{\theta}(t+1)$  é uma soma. Entretanto, essa mudança não influencia a estimativa final de  $\hat{\theta}(1000)$ , uma vez que o algoritmo RLS é robusto e independe do valor de  $P(0)$ .

Comparando a [Figura 11](#) com a [Figura 12](#), é claro que a mudança de  $\hat{\theta}(0)$  impacta mais nas amostras iniciais de  $\hat{\theta}(t)$  do que a variação de  $P(0)$ . Esse fator é justificável por  $K(t)\epsilon(t) \ll \hat{\theta}(t-1)$  na [equação de atualização](#) de  $\hat{\theta}(t)$ .

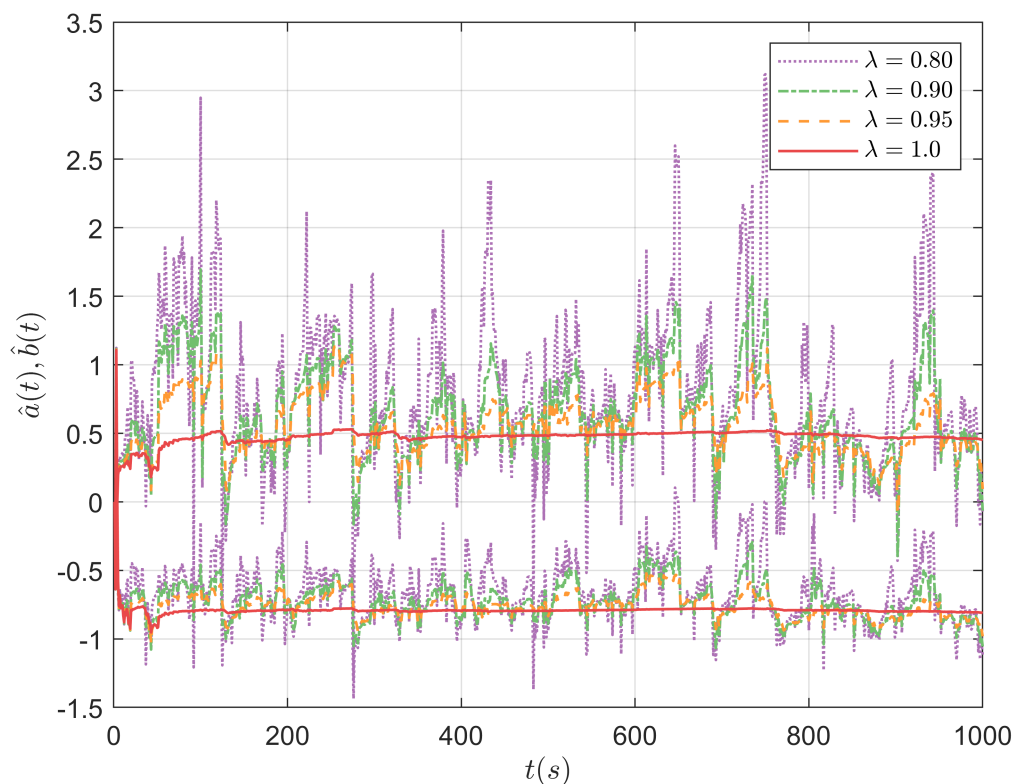
### C) Variação de $\lambda$

Para estimar parâmetros variantes no tempo, pode-se acrescentar à função de custo  $V(\theta, t)$  um fator  $\lambda$  de esquecimento das amostras, tal qual a seguinte formulação:

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \lambda^{t-k} (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2$$

para  $0 < \lambda \leq 1$ . Dessa forma, quanto mais recente a amostra, isto é, quando maior  $k$ , maior será  $\lambda^{t-k}$  e, consequentemente, o peso dessa amostra para o ajuste da estimativa  $\hat{\theta}$ .

Ao variar  $\lambda$ , obtém-se o traçado para as estimativas  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  ilustrado na [Figura 13](#).

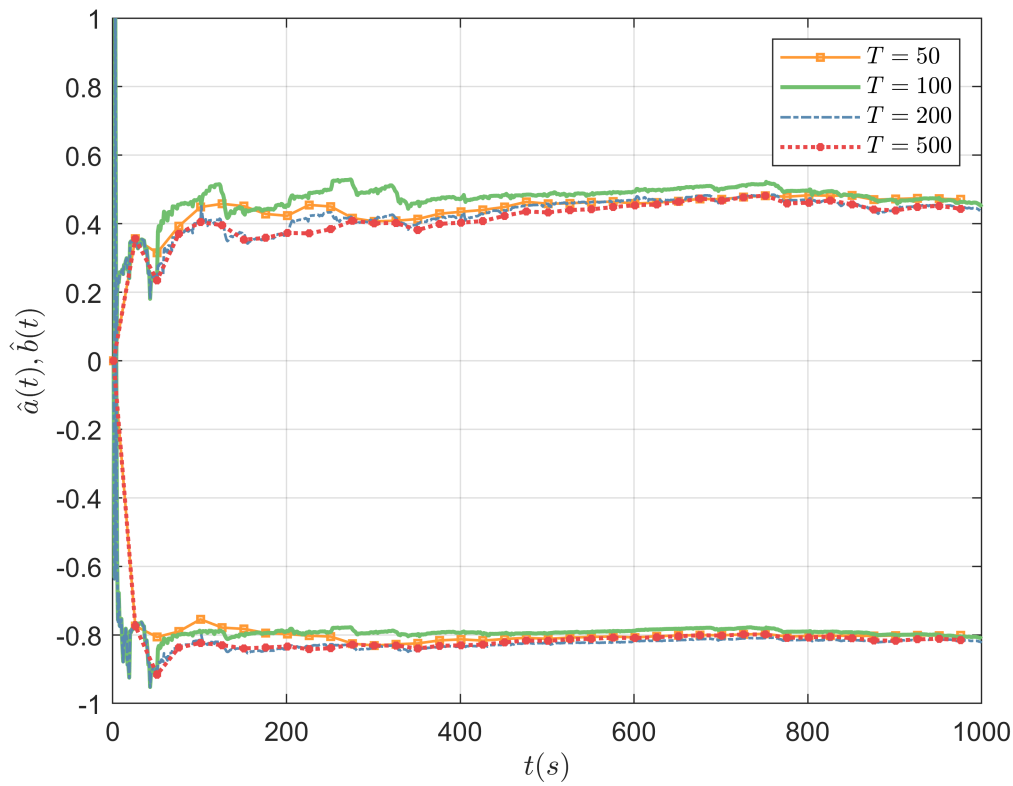


**Figura 13:** Estimativa  $\hat{\theta}$  considerando a variação de  $\lambda$ .

Observando a [Figura 13](#), é evidente que quanto menor o  $\lambda$ , maior é o esquecimento do algoritmo e maior é a oscilação da estimativa. Dessa forma, conclui-se que esse método é adequado apenas para processos cujos parâmetros são variantes no tempo, o qual não é o caso da questão proposta. Uma forma de minimizar a oscilação seria diminuir o período do sinal de excitação, em razão do aumento da variação da resposta  $y(t)$ .

#### D) Variação de $T$

Ao variar o período  $T$ , obtém-se o traçado para as estimativas  $\hat{b}$  e  $\hat{a}$  ilustrado na [Figura 14](#).



**Figura 14:** Estimativa  $\hat{\theta}$  considerando a variação de  $T$ .

Observando a [Figura 14](#), é evidente que quanto menor o  $T$ , maior é a oscilação da estimativa. Tendo em vista a menor regularidade do processo com a redução do período, mais difícil é o ajuste do vetor  $\hat{\theta}$  tendo em vista a mudança do sinal de  $K(t)\varepsilon(t)$ .

## Referências bibliográficas

[1] L. LJUNG. **Introduction**. Courier Corporation, 2008. ISBN 9780748408788.

[2] K. ASTRÖM, B. WITTENMARK. **Real-time Parameter Estimation**. CRC Press, 2000. ISBN 0486462781.