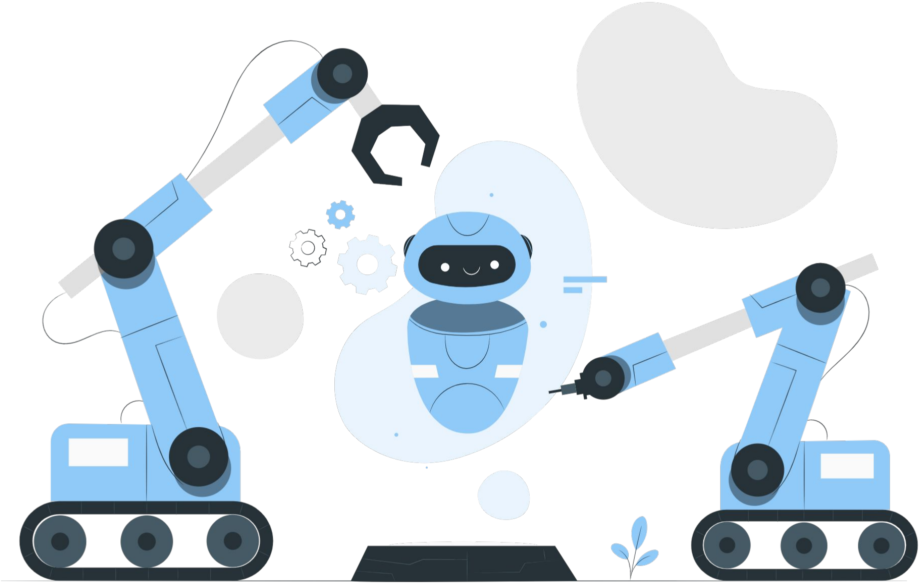
Estimação e identificação de sistemas

Atividade 9, 11 e 13

Débora Oliveira

2 de dezembro de 2021



Sumário

Variáveis de escolha

Método de coleta de dados, **modelo** do processo, **algoritmo** de estimação e de validação.

Modelo do processo

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)\underbrace{e_o(t)}_{\sim\mathcal{N}(0,\lambda_0)}$$

$$T_0(q) = [G_0(q) \;\; H_0(q)]$$
$$\hat{T}(q,\mathcal{D}) = [\hat{G}(q,\mathcal{D}) \;\; \hat{H}(q,\mathcal{D})]$$
$$\tilde{T}(e^{j\omega},\mathcal{D}) \triangleq \hat{T}(e^{j\omega},\mathcal{D}) - T_0(e^{j\omega})$$

Função de custo

$$\Pi(\omega,\mathcal{D}) = \tilde{T}^T(e^{-j\omega},\mathcal{D})\tilde{T}(e^{j\omega},\mathcal{D})$$
$$C(\omega) = \begin{bmatrix} C_{11}(\omega) & C_{12}(\omega) \\ C_{21}(\omega) & C_{22}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$J_1(\tilde{T}(\cdot,\mathcal{D})) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}(e^{j\omega},\mathcal{D})C(\omega)\tilde{T}^T(e^{-j\omega},\mathcal{D})d\omega$$

$$\bar{J}(\mathcal{D}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}\,[\Pi(\omega,\mathcal{D})C(\omega)]d\omega$$

Limite de Cramér-Rao

$$P_\theta(\mathcal{X}) \sim \lambda_0 \left[E\left(\frac{d}{d\theta}\hat{y}(t|\theta)\right)\left(\frac{d}{d\theta}\hat{y}(t|\theta)\right)^T \right]^{-1}$$

Persistência de um sinal

Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$

$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2}\left(\left|\Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}\Delta H(e^{j\omega})\right|^2 \Phi_u(\omega) + |\Delta H(e^{j\omega})|^2\left|\frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}\right|^2 \lambda_0\right] d\omega$$

Persistência de um sinal

Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$

$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2}\left(\left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}\Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \cancelto{\geq 0}{\Phi_u(\omega)} + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \cancelto{> 0}{\lambda_0} \right] d\omega$$

$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 = 0$$

Persistência de um sinal

Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$

$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2}\left(\left|\Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}\Delta H(e^{j\omega})\right|^2 \overset{\geq 0}{\cancel{\Phi_u(\omega)}} + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left|\frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}\right|^2 \overset{> 0}{\cancel{\lambda_0}}\right] d\omega$$

$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left|\overset{> 0}{\cancel{\frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}}}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$\Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$|\Delta G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$

Persistência de um sinal

Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$

$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2}\left(\left|\Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega})-G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}\Delta H(e^{j\omega})\right|^2 \cancelto{\geq 0}{\Phi_u(\omega)} + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left|\frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}\right|^2 \cancelto{> 0}{\lambda_0}\right] d\omega$$

$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left|\cancelto{> 0}{\frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})}}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$\Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$|\Delta G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$

Filtro linear		Espectro filtrado		
$M_n(q) = m_1 q^{-1} + \ldots + m_n q^{-n}$	⇒	$\lvert M_n(e^{j\omega})\rvert^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$	⇒	$M_n(e^{j\omega}) \equiv 0$

Escolha do sinal de entrada

Fator de Crest

$$C_r^2 = \frac{\max_t u^2(t)}{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} u^2(t)}$$

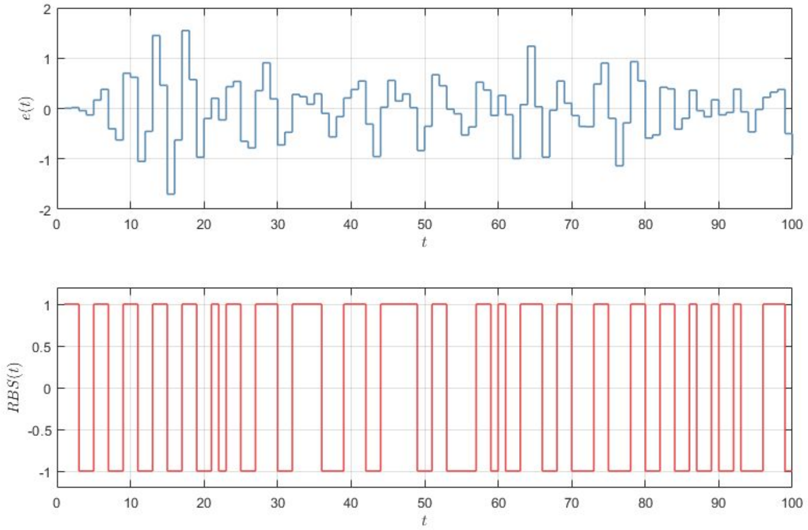


Fig. 1: Ruído gaussiano filtrado pelo passa-faixa e sinal RBS originado do ruído gaussiano.

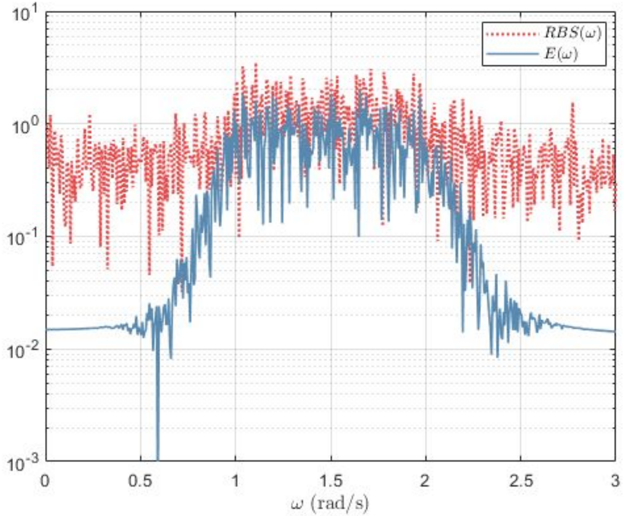


Fig. 2: Espectro do sinal gaussiano e do sinal binário aleatório.

$$u(t) = \sum_{k=1}^{d} a_k \cos(\omega_k t + \Phi_k)$$

$$\Phi_k = \Phi_1 - \frac{k(k-1)}{d}\pi$$

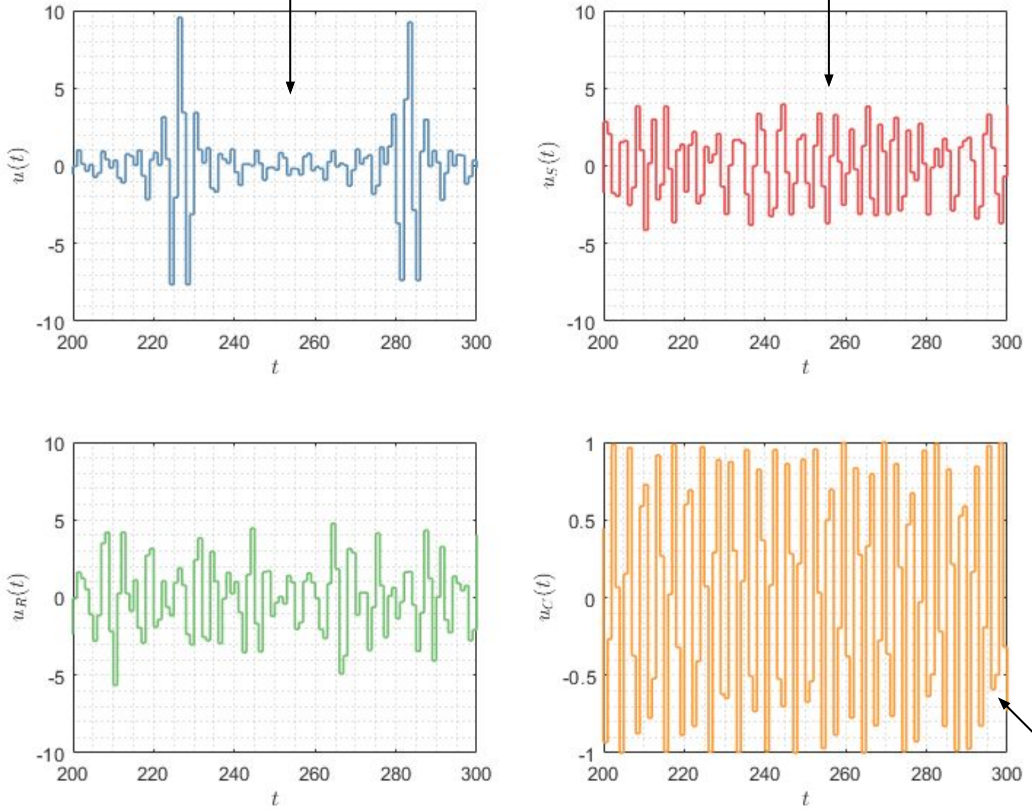


Fig. 3: Sinais de entrada u(t) composto por senoides.

$$u(t) = A\cos\left(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)t^2/(2M)\right)$$

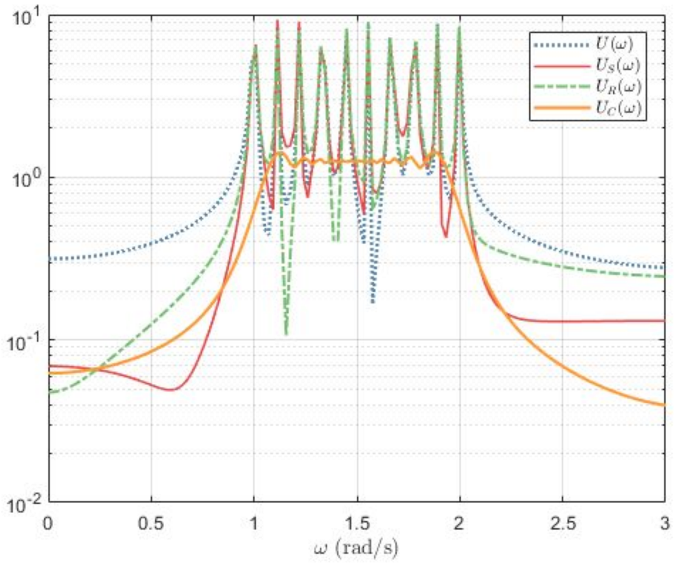


Fig. 4: Espectros dos sinais de entrada u(t) composto por senoides.

Remoção de *outliers*

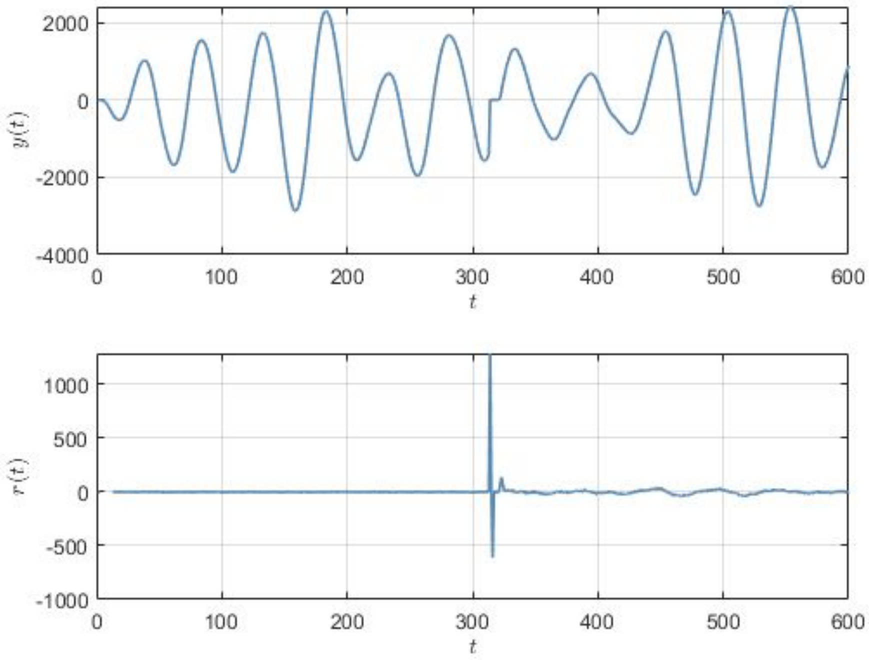


Fig. 5: Saída do sistema com *outliers* e resíduos para o método de mínimos quadrados.

$$
\begin{aligned}
y(t) = &-2.85y(t-1) + 2.717y(t-1) - 0.865y(t-3) \\
&+ u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) \\
&+ e(t) + 0.7e(t) + 0.2e(t-3)
\end{aligned}
$$

N = 600

```
theta_LS1 = 1×6
   -1.4694    0.0400    0.4527    2.0727   -2.9574    4.9850
```

N = 300

```
theta_LS2 = 1×6
   -2.8577    2.7322   -0.8725    1.1157    1.1788    1.1308
```

Identificação por subespaço

Método de **estimação** cujo parâmetro único de entrada é a ordem do sistema.

Modelo do processo

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$
$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

$$X_{i+1} = A^i X_1 + \Delta_i U_{1|i}$$
$$Y_{1|i} = \Gamma_i X_i + H_i U_{1|i}$$

Matriz de Hankel

Não unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} Tx(2) & Tx(3) & \dots & Tx(p+1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tx(1) & Tx(2) & \dots & Tx(p) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(p) \end{bmatrix}$$

Estimativa do SS

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+2} | \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} | \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = 0.75x(k) + 0.3u(k)$$
$$y(k) = 0.5x(k)$$

```
A = 0.7500
B = 0.4841
C = 0.3099
D = 1.8049e-16
sme = 5.7163e-17
```

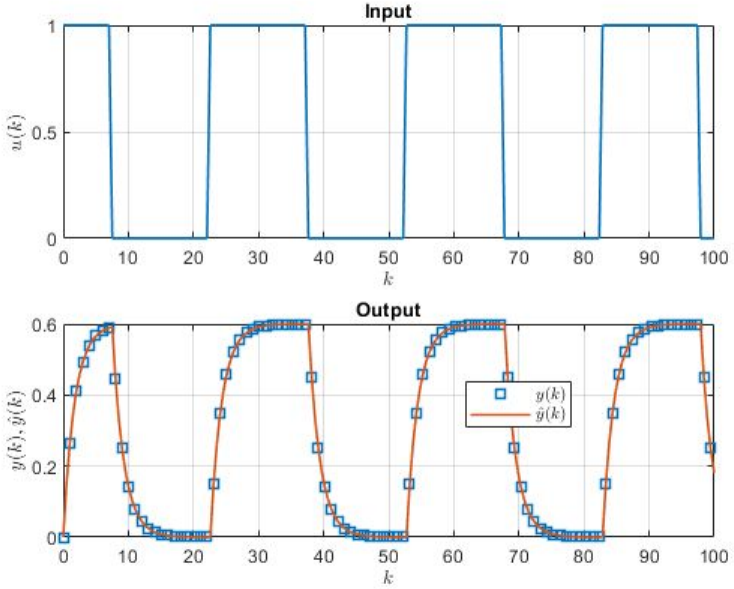


Fig. 6: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

```
A = 3×3

    0.8604   -0.1404    0.0114
   -0.1401    0.3794    0.1510
    0.0109    0.1537    0.3601

B = 3×1

    1.0385
    2.0443
   -0.4725

C = 1×3

    0.7863    0.3776   -0.0242

D = 1.0232e-15
sme = 1.5393e-15
```

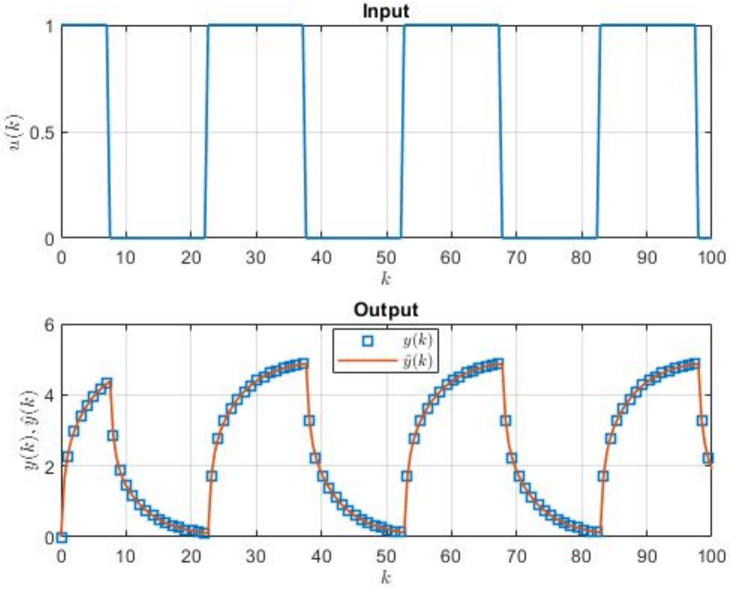


Fig. 7: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$x(k+1) = 0.85x(k) + 0.3u(k)$$
$$y(k) = -0.5x(k)$$

```
A = 0.8500
B = 0.3383
C = -0.4434
D = 2.5485e-17
sme = 2.1610e-16
```

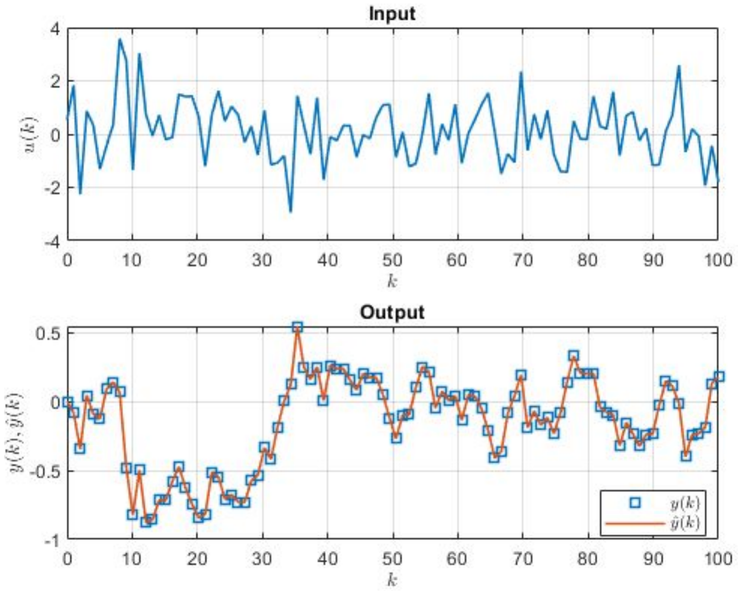


Fig. 7: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

```
A = 2×2
    0.7595    0.1990
    0.1832    0.6405

B = 2×1
    0.5277
   -0.2615

C = 1×2
    0.6397   -0.2388

D = 5.7716e-17
sme = 2.4655e-16
```

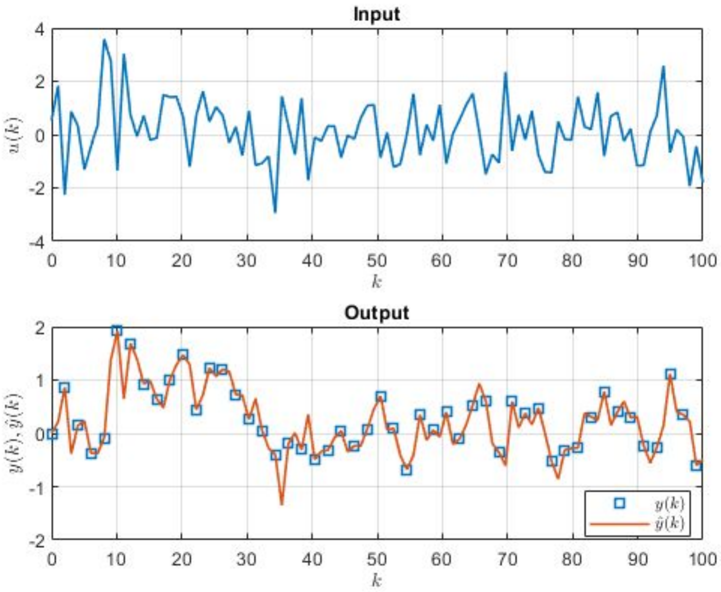


Fig. 8: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

Cadeia de Markov - Monte Carlo

Método de **estimação** apropriado para <u>pequenos conjuntos</u> de dados disponíveis.

Teorema de Bayes

$$p(\theta|Y_N) = \frac{p(Y_N|\theta)p(\theta)}{p(Y_N)}$$

Função de aceitação

$$\alpha(\xi^{(k)}|\theta^{(k-1)}) = min\left\{1, \frac{p(\xi^{(k)}|\theta^{(k-1)}, Y_N)}{p(\theta^{(k-1)}|Y_N)}\right\}$$

Valor estimado

$$\hat{\theta} = E(p(\theta_{(K)}|Y_n))$$

Modelo

$$y(t) = \left(\frac{b_1 q^{-1} + b_2 q_{-1}}{1 + f_1 q^{-1}}\right) u(t) + e(t)$$

```
Real values
 > [b1 b2 f1] = [0.50 0.20 0.80]
PEM estimated
 > [b1 b2 f1] = [0.51 0.16 0.78]
MCMC estimated
 > [b1 b2 f1 s0] = [0.52 0.17 0.80 0.83]
 > dev([b1 b2 f1 s0]) = [0.05 0.04 0.01 0.23]
Acceptance rate: 99.15
```

Cadeia de Markov - Monte Carlo

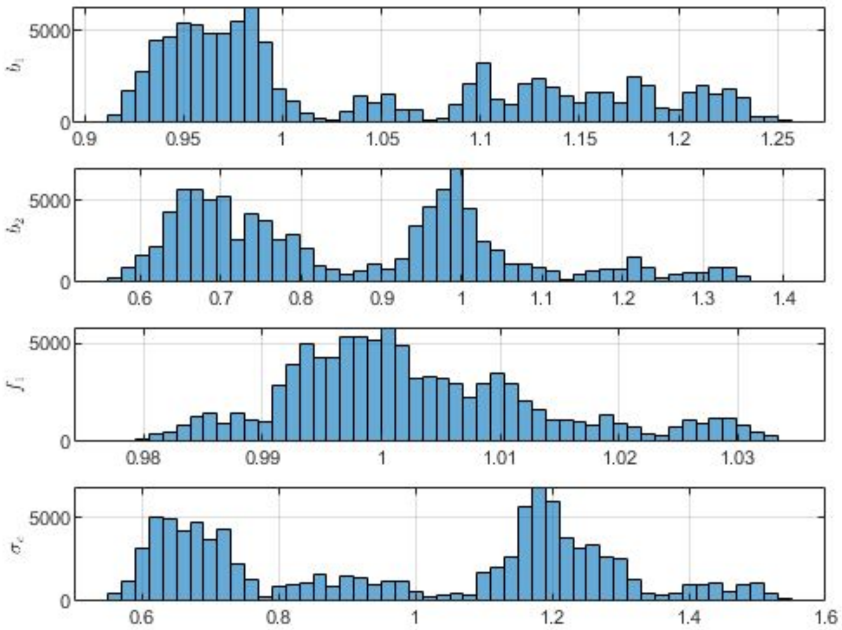


Fig. 8: Histograma dos valores candidatos.

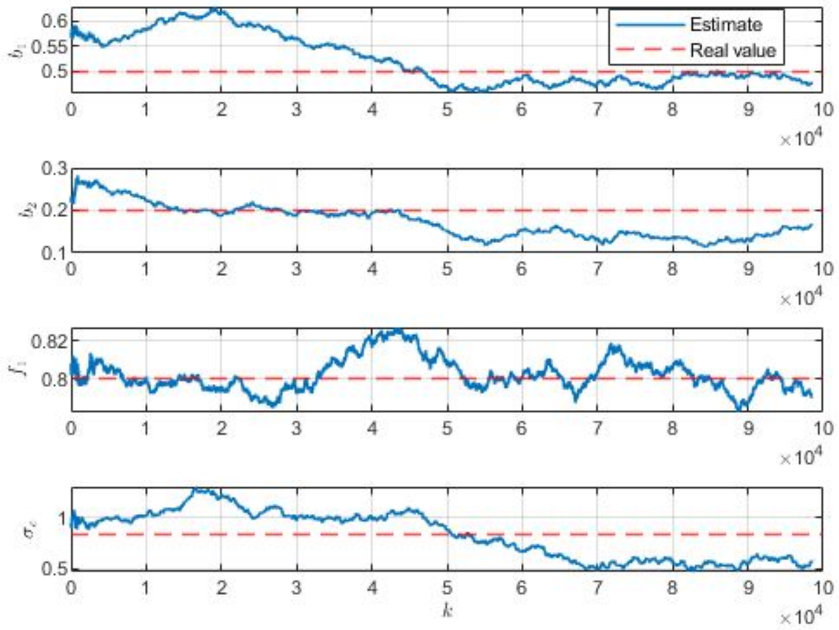
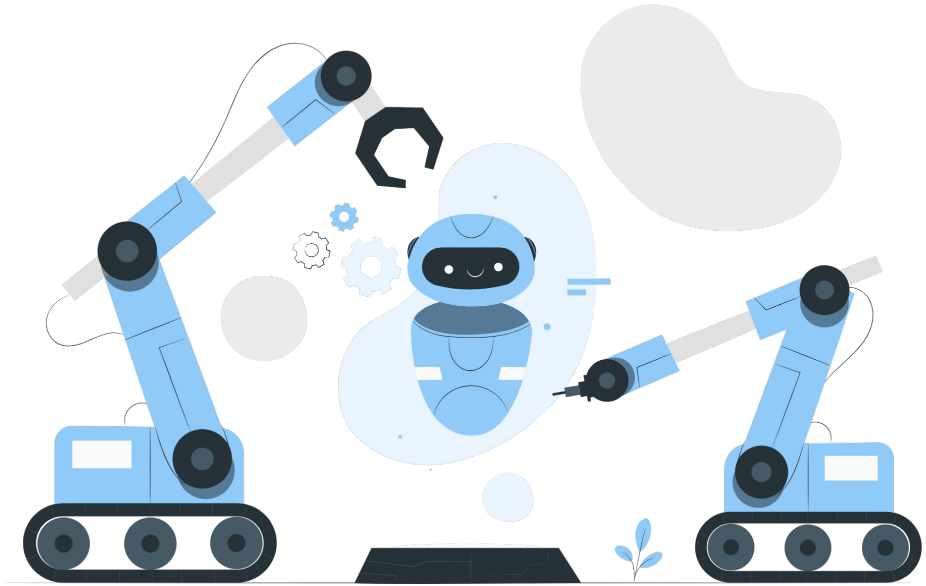


Fig. 9: Evolução dos valores candidatos por realização.

Estimação e identificação de sistemas

Atividade 9, 11 e 13



Débora Oliveira

2 de dezembro de 2021