

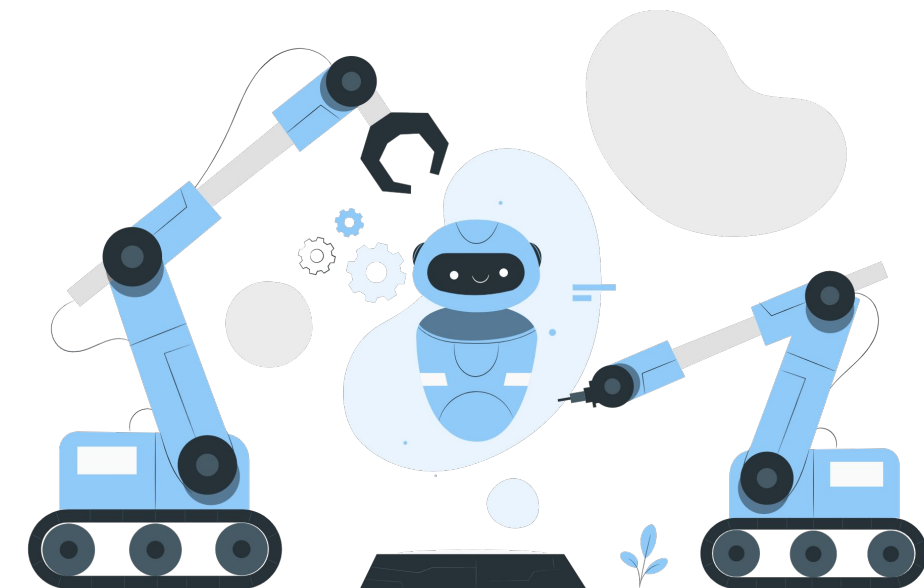
# Estimação e identificação de sistemas

*Atividade 9, 11 e 13*



*Débora Oliveira*

*2 de dezembro de 2021*



# Sumário

## 09 Variáveis de experimento

Conjunto de decisões e avaliação para a aquisição dos dados.

## 11 Identificação por subespaço

Ordem de estimação e sinais de excitação

## 13 Cadeias de Markov-Monte Carlo

Estimação Bayesiana

# Variáveis de escolha

Método de coleta de dados, modelo do processo, algoritmo de estimação e de validação.



Modelo do processo

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q) \underbrace{e_o(t)}_{\sim \mathcal{N}(0, \lambda_0)} \Rightarrow \begin{aligned} T_0(q) &= [G_0(q) \ H_0(q)] \\ \hat{T}(q, \mathcal{D}) &= [\hat{G}(q, \mathcal{D}) \ \hat{H}(q, \mathcal{D})] \\ \tilde{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) &\triangleq \hat{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) - T_0(e^{j\omega}) \end{aligned}$$



Função de custo

$$\begin{aligned} \Pi(\omega, \mathcal{D}) &= \tilde{T}^T(e^{-j\omega}, \mathcal{D}) \tilde{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) \Rightarrow J_1(\tilde{T}(\cdot, \mathcal{D})) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) C(\omega) \tilde{T}^T(e^{-j\omega}, \mathcal{D}) d\omega \\ C(\omega) &= \begin{bmatrix} C_{11}(\omega) & C_{12}(\omega) \\ C_{21}(\omega) & C_{22}(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\bar{J}(\mathcal{D}) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} [\Pi(\omega, \mathcal{D}) C(\omega)] d\omega$$



Limite de Cramér-Rao

$$P_{\theta}(\mathcal{X}) \sim \lambda_0 \left[ E \left( \frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right) \left( \frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right)^T \right]^{-1}$$

# Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left( \left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \Phi_u(\omega) + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \lambda_0 \right) d\omega$$

# Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left( \left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \overset{\geq 0}{\nearrow} \Phi_u(\omega) + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \overset{> 0}{\nearrow} \right) d\omega$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 = 0$$

# Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left( \left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \overset{\geq 0}{\cancel{\Phi_u(\omega)}} + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \overset{> 0}{\cancel{\lambda_0}} \right) d\omega$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

> 0

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$



$$\Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$|\Delta G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$

# Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left( \left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \cancel{\Phi_u(\omega)} + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \cancel{\chi_0} \right) d\omega \begin{matrix} \geq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

> 0

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$



$$\Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$|\Delta G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$

Filtro linear

$$M_n(q) = m_1 q^{-1} + \dots + m_n q^{-n}$$



Espectro filtrado

$$|M_n(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$



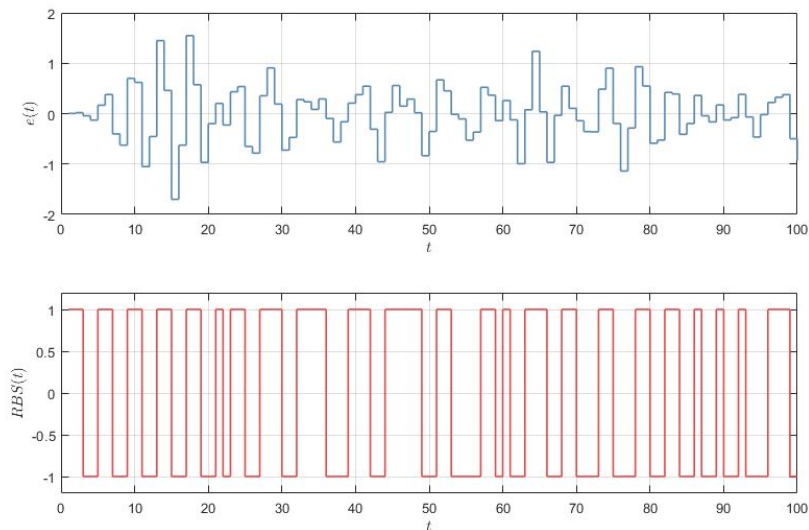
$$M_n(e^{j\omega}) \equiv 0$$

# Escolha do sinal de entrada

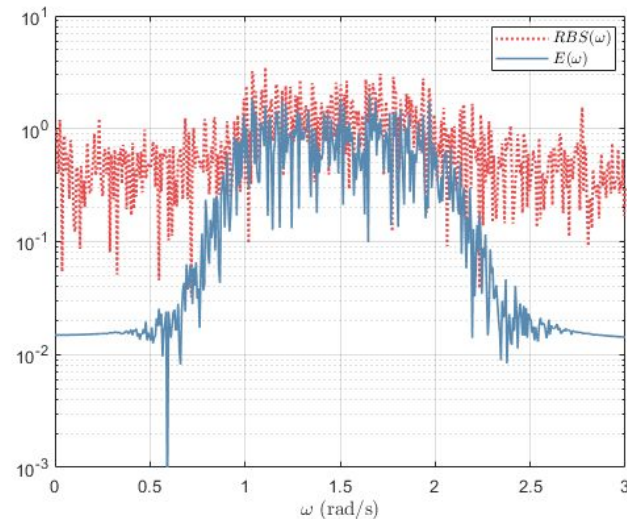


Fator de Crest

$$C_r^2 = \frac{\max_t u^2(t)}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t)}$$

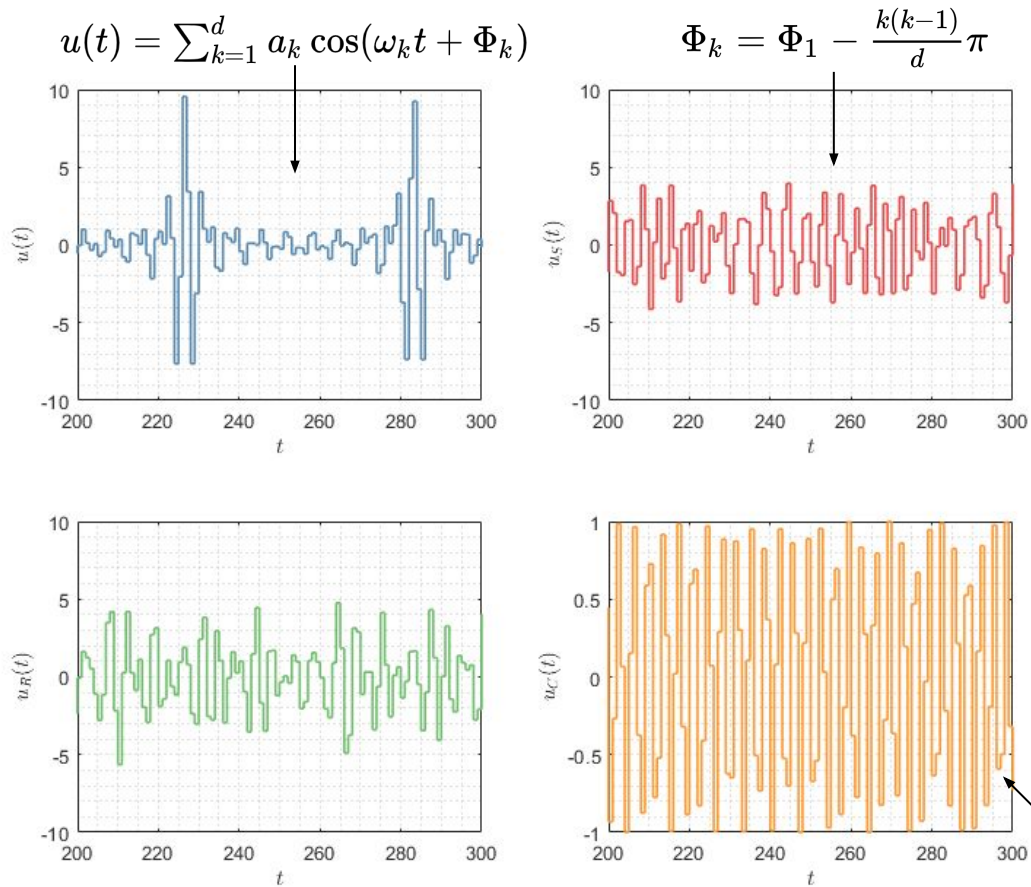


**Fig. 1:** Ruído gaussiano filtrado pelo passa-faixa e sinal RBS originado do ruído gaussiano.

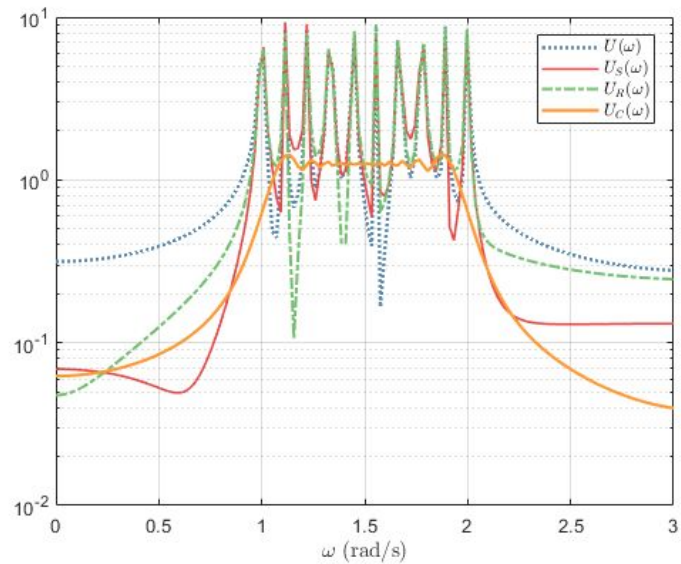


**Fig. 2:** Espectro do sinal gaussiano e do sinal binário aleatório.





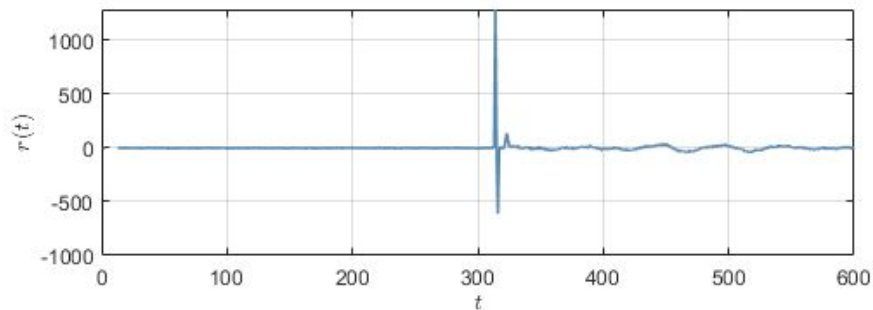
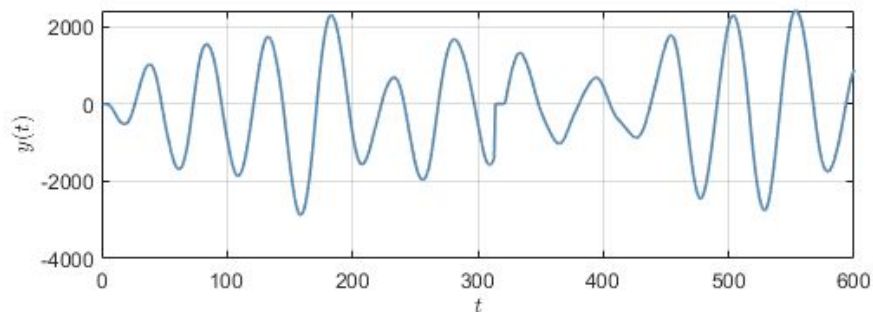
**Fig. 3:** Sinais de entrada  $u(t)$  composto por senoides.



**Fig. 4:** Espectros dos sinais de entrada  $u(t)$  composto por senoides.

$$u(t) = A \cos(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)t^2/(2M))$$

# Remoção de *outliers*



**Fig. 5:** Saída do sistema com *outliers* e resíduos para o método de mínimos quadrados.

$$\begin{cases} y(t) = 2.85y(t-1) - 2.717y(t-2) + 0.865y(t-3) \\ \quad + u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + e(t) \\ \quad + 0.7e(t-1) + 0.2e(t-3) \\ y(t) = 0, 313 \leq t \leq 320 \end{cases}$$



**N = 600**

```
theta_LS1 = 1x6
           -1.4694    0.0400    0.4527    2.0727   -2.9574    4.9850
```




**N = 300**

```
theta_LS2 = 1x6
           -2.8577    2.7322   -0.8725    1.1157    1.1788    1.1308
```

# Identificação por subespaço

**Método** de **estimação** cujo **parâmetro único** de entrada é a ordem do sistema.

 **Modelo do processo**

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$




$$X_{i+1} = A^i X_1 + \Delta_i U_{1|i}$$

$$Y_{1|i} = \Gamma_i X_i + H_i U_{1|i}$$

► **Matriz de Hankel**

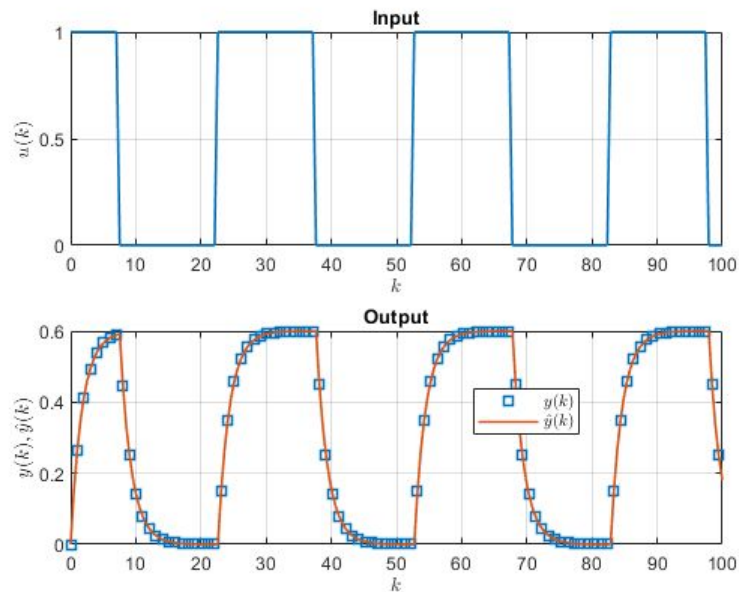
 **Não unicidade da solução**

$$\begin{bmatrix} Tx(2) & Tx(3) & \dots & Tx(p+1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tx(1) & Tx(2) & \dots & Tx(p) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(p) \end{bmatrix}$$

 **Estimativa do SS**

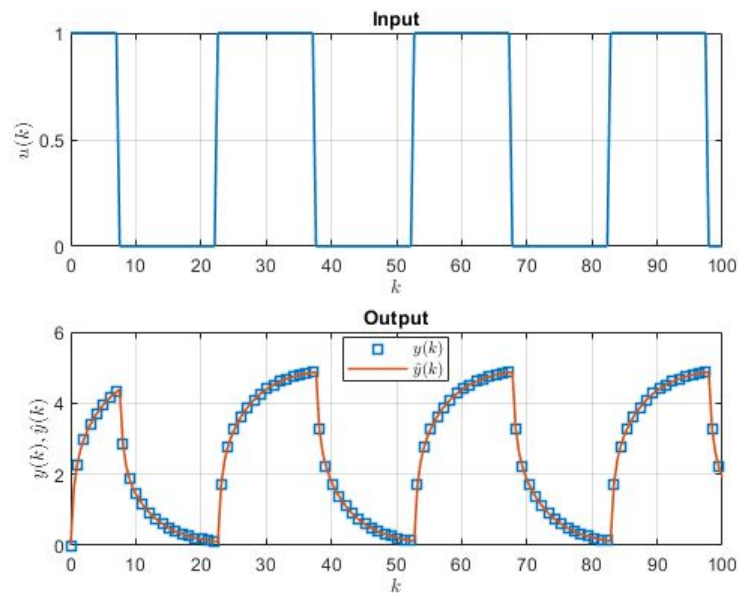
$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+2|} \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1|} \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= 0.75x(k) + 0.3u(k) \\
 y(k) &= 0.5x(k)
 \end{aligned}
 \begin{aligned}
 A &= 0.7500 \\
 B &= 0.4841 \\
 C &= 0.3099 \\
 D &= 2.5963e-16
 \end{aligned}$$



**Fig. 6:** Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix} u(k) \\
 y(k) &= [1 \quad 1 \quad 1] x(k)
 \end{aligned}
 \begin{aligned}
 A &= 3 \times 3 \\
 &\begin{bmatrix} 0.8604 & -0.1404 & 0.0114 \\ -0.1401 & 0.3794 & 0.1510 \\ 0.0109 & 0.1537 & 0.3601 \end{bmatrix} \\
 B &= 3 \times 1 \\
 &\begin{bmatrix} 1.0385 \\ 2.0443 \\ -0.4725 \end{bmatrix} \\
 C &= 1 \times 3 \\
 &\begin{bmatrix} 0.7863 & 0.3776 & -0.0242 \end{bmatrix} \\
 D &= 3.0161e-16
 \end{aligned}$$



**Fig. 7:** Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$x(k+1) = 0.85x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = -0.5x(k)$$

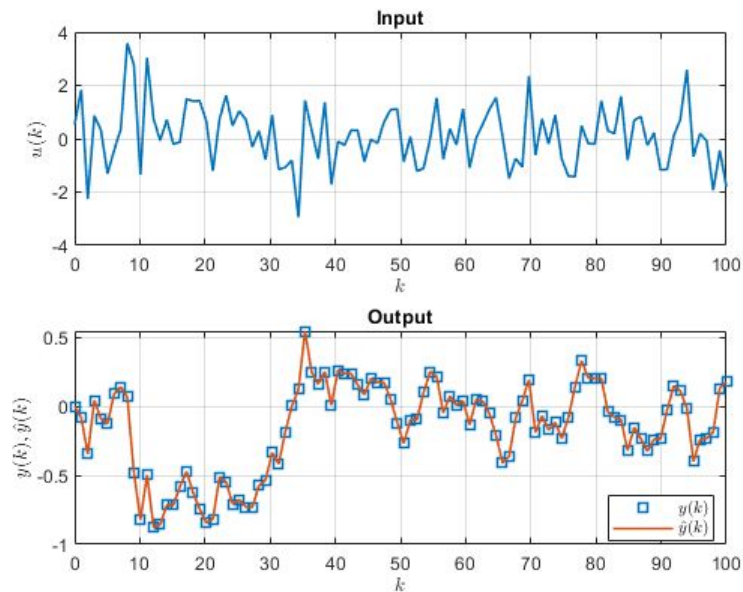


$$A = 0.8500$$

$$B = 0.3383$$

$$C = -0.4434$$

$$D = 3.7496e-17$$



**Fig. 7:** Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$



$$A = 2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 0.7595 & 0.1990 \\ 0.1832 & 0.6405 \end{bmatrix}$$

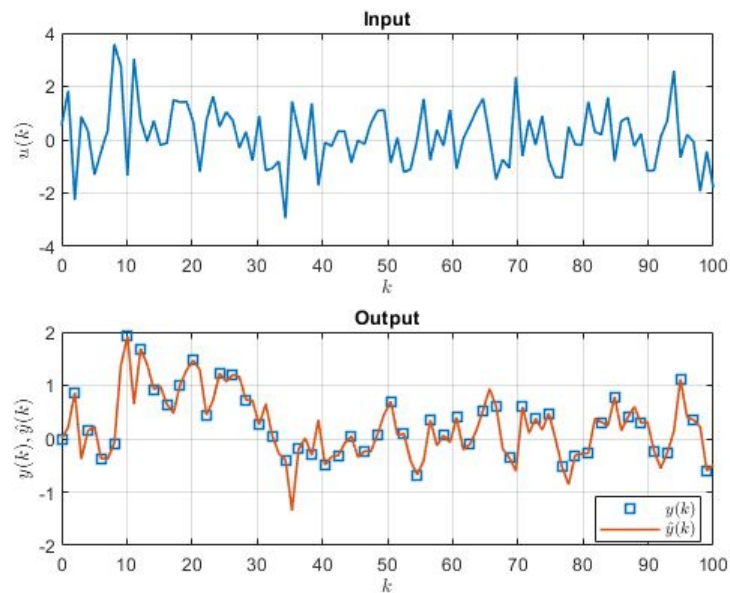
$$B = 2 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 0.5277 \\ -0.2615 \end{bmatrix}$$

$$C = 1 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 0.6397 & -0.2388 \end{bmatrix}$$

$$D = 5.2757e-17$$



**Fig. 8:** Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

# Cadeia de Markov - Monte Carlo


**Método** de **estimação** apropriado para pequenos conjuntos de dados disponíveis.

 Teorema de Bayes

$$p(\theta|Y_N) = \frac{p(Y_N|\theta)p(\theta)}{p(Y_N)}$$

 Função de aceitação

$$\alpha(\xi^{(k)}|\theta^{(k-1)}) = \min\left\{1, \frac{p(\xi^{(k)}|\theta^{(k-1)}, Y_N)}{p(\theta^{(k-1)}|Y_N)}\right\}$$

 Valor estimado

$$\hat{\theta} = E(\theta^{(K)}|Y_N)$$

 Modelo

$$y(t) = \left( \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-1}}{1 + f_1 q^{-1}} \right) u(t) + e(t)$$



Real values

```
> [b1 b2 f1] = [0.50 0.20 0.80]
```

PEM estimated

```
> [b1 b2 f1] = [0.51 0.16 0.78]
```

MCMC estimated

```
> [b1 b2 f1 s0] = [0.52 0.17 0.80 0.83]
```

```
> dev([b1 b2 f1 s0]) = [0.05 0.04 0.01 0.23]
```

Acceptance rate: 99.15

# Cadeia de Markov - Monte Carlo

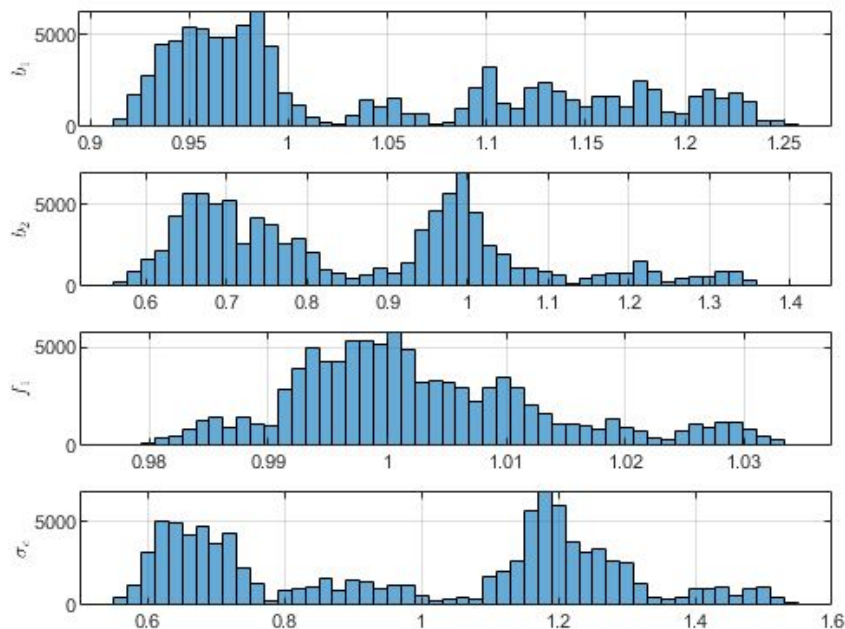


Fig. 8: Histograma dos valores candidatos.

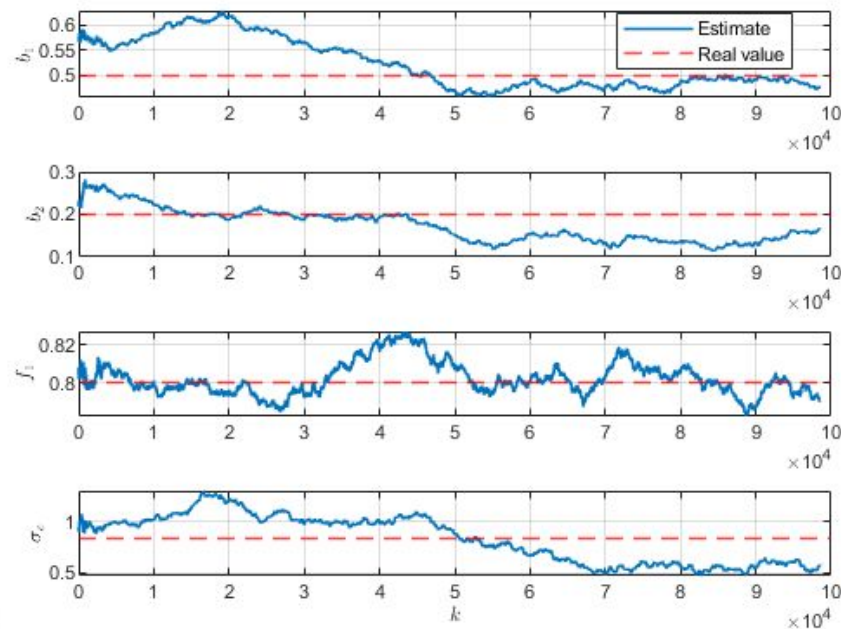


Fig. 9: Evolução dos valores candidatos por realização.

# Estimação e identificação de sistemas

*Atividade 9, 11 e 13*



*Débora Oliveira*

*2 de dezembro de 2021*

