

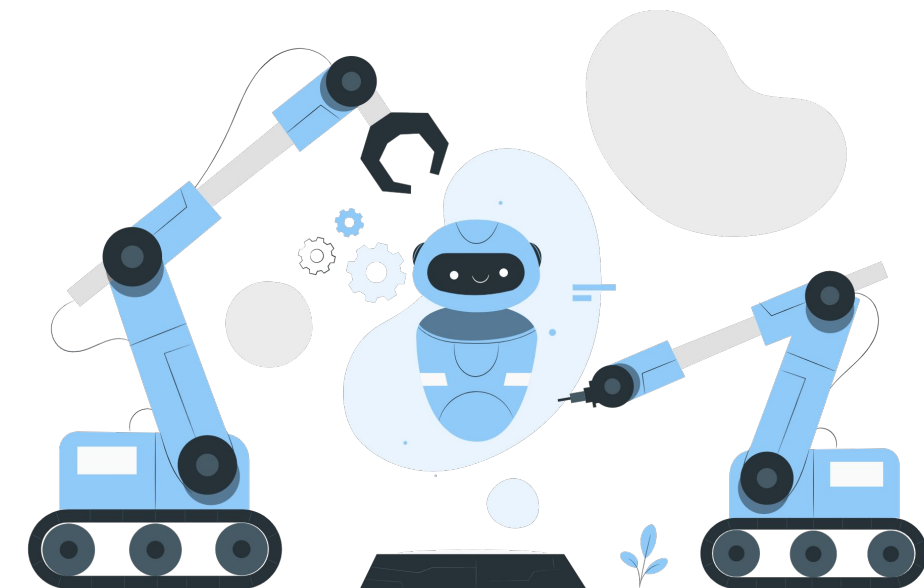
Estimação e identificação de sistemas

Atividade 9, 11 e 13



Débora Oliveira

2 de dezembro de 2021



Sumário

09 Variáveis de experimento

Conjunto de decisões e avaliação para a aquisição dos dados.

11 Identificação por subespaço

Ordem de estimação e sinais de excitação

13 Cadeias de Markov-Monte Carlo

Estimação Bayesiana

Variáveis de escolha

Método de coleta de dados, modelo do processo, algoritmo de estimação e de validação.



Modelo do processo

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q) \underbrace{e_o(t)}_{\sim \mathcal{N}(0, \lambda_0)} \Rightarrow \begin{aligned} T_0(q) &= [G_0(q) \ H_0(q)] \\ \hat{T}(q, \mathcal{D}) &= [\hat{G}(q, \mathcal{D}) \ \hat{H}(q, \mathcal{D})] \\ \tilde{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) &\triangleq \hat{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) - T_0(e^{j\omega}) \end{aligned}$$



Função de custo

$$\begin{aligned} \Pi(\omega, \mathcal{D}) &= \tilde{T}^T(e^{-j\omega}, \mathcal{D}) \tilde{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) \Rightarrow J_1(\tilde{T}(\cdot, \mathcal{D})) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}(e^{j\omega}, \mathcal{D}) C(\omega) \tilde{T}^T(e^{-j\omega}, \mathcal{D}) d\omega \\ C(\omega) &= \begin{bmatrix} C_{11}(\omega) & C_{12}(\omega) \\ C_{21}(\omega) & C_{22}(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\bar{J}(\mathcal{D}) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} [\Pi(\omega, \mathcal{D}) C(\omega)] d\omega$$



Limite de Cramér-Rao

$$P_{\theta}(\mathcal{X}) \sim \lambda_0 \left[E \left(\frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right) \left(\frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right)^T \right]^{-1}$$

Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left(\left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \Phi_u(\omega) + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \lambda_0 \right) d\omega$$

Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left(\left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \overset{\geq 0}{\nearrow} \Phi_u(\omega) + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \overset{> 0}{\nearrow} \right) d\omega$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 = 0$$

Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left(\left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \overset{\geq 0}{\cancel{\Phi_u(\omega)}} + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \overset{> 0}{\cancel{\lambda_0}} \right) d\omega$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

> 0

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$



$$\Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$|\Delta G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$

Persistência de um sinal



Erro de estimação

$$\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|H_1(e^{j\omega})|^2} \left(\left| \Delta G(e^{j\omega}) + \frac{G_0(e^{j\omega}) - G_2(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \Delta H(e^{j\omega}) \right|^2 \cancel{\Phi_u(\omega)} + |\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 \cancel{\chi_0} \right) d\omega \geq 0$$



$$\bar{E}[\Delta\varepsilon(t)]^2 = 0$$

> 0

$$|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} \right|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$



$$\Delta H(e^{j\omega}) \equiv 0$$

$$|\Delta G(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$

Filtro linear

$$M_n(q) = m_1 q^{-1} + \dots + m_n q^{-n}$$



Espectro filtrado

$$|M_n(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$$



$$M_n(e^{j\omega}) \equiv 0$$

Escolha do sinal de entrada



Fator de Crest

$$C_r^2 = \frac{\max_t u^2(t)}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t)}$$

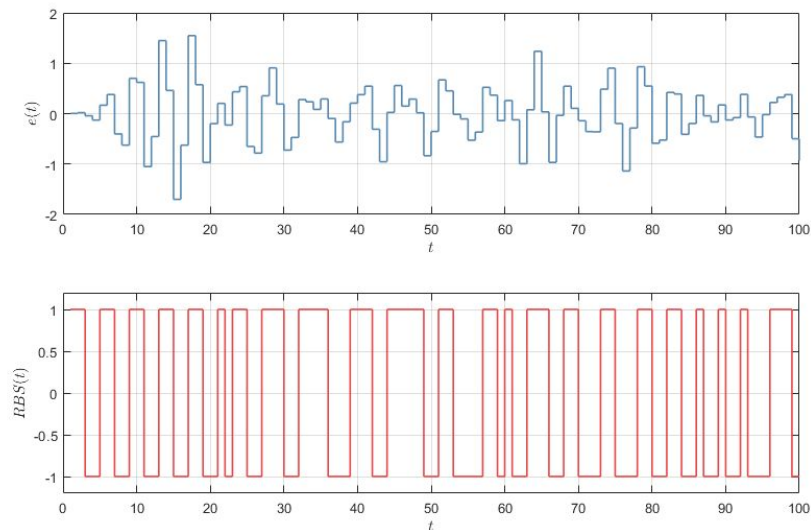


Fig. 1: Ruído gaussiano filtrado pelo passa-faixa e sinal RBS originado do ruído gaussiano.

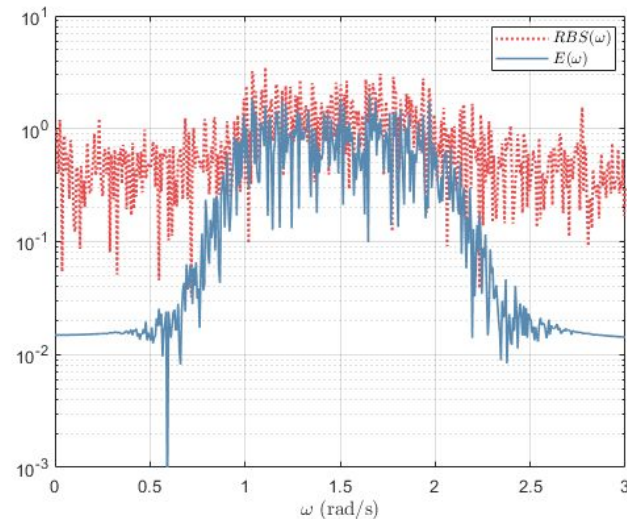


Fig. 2: Espectro do sinal gaussiano e do sinal binário aleatório.

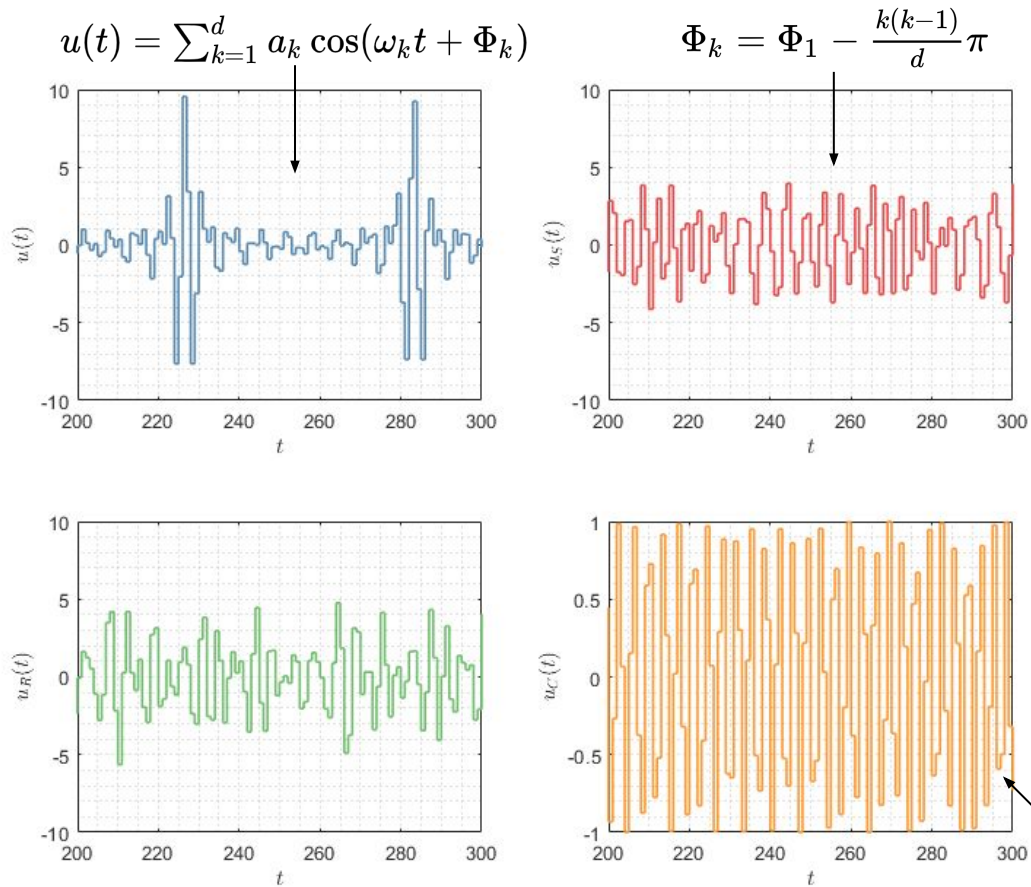


Fig. 3: Sinais de entrada $u(t)$ composto por senoides.

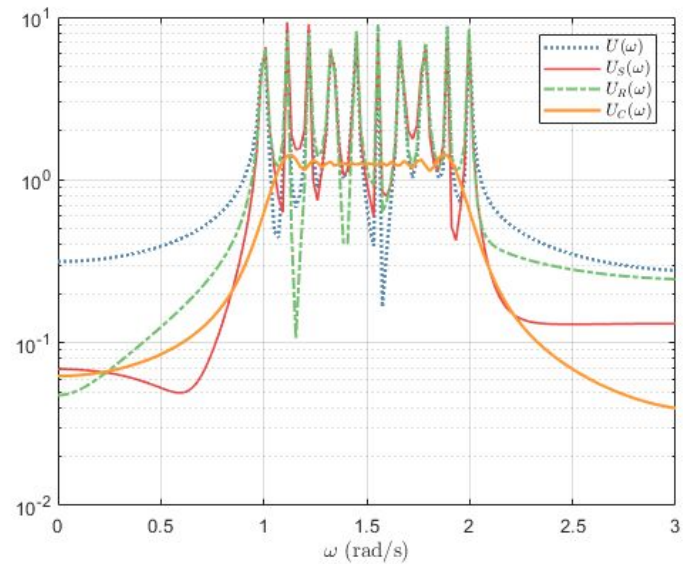


Fig. 4: Espectros dos sinais de entrada $u(t)$ composto por senoides.

$$u(t) = A \cos(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)t^2/(2M))$$

Remoção de *outliers*

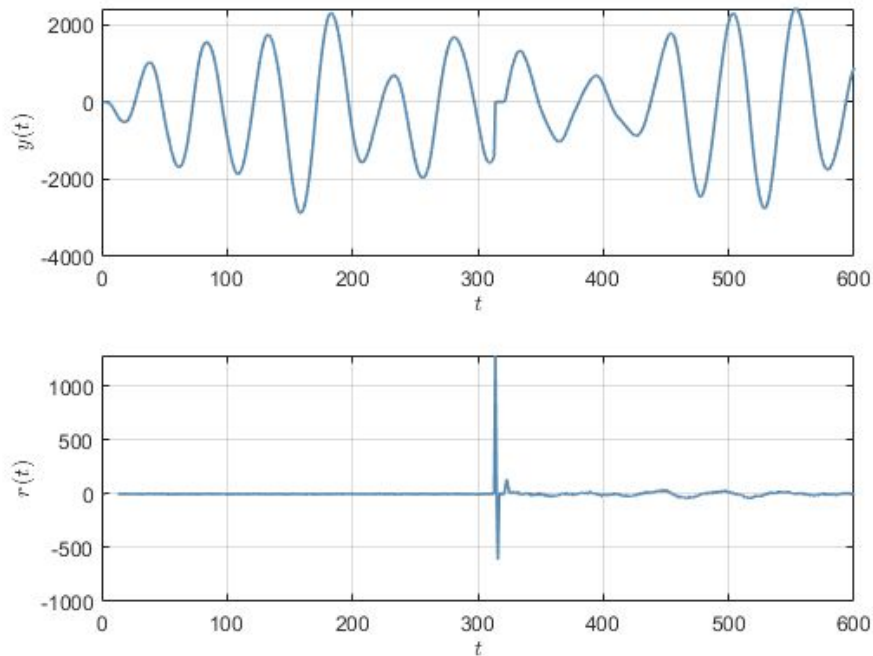




Fig. 5: Saída do sistema com *outliers* e resíduos para o método de mínimos quadrados.

$$y(t) = -2.85y(t-1) + 2.717y(t-1) + 0.865y(t-3) \\ + u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) \\ + e(t) + 0.7e(t) + 0.2e(t-3)$$

 **N = 600**


```
theta_LS1 = 1x6  
          -1.4694    0.0400    0.4527    2.0727   -2.9574    4.9850
```

 **N = 300**

```
theta_LS2 = 1x6  
          -2.8577    2.7322   -0.8725    1.1157    1.1788    1.1308
```

Identificação por subespaço

Método de **estimação** cujo **parâmetro único** de entrada é a ordem do sistema.

 **Modelo do processo**

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$




$$X_{i+1} = A^i X_1 + \Delta_i U_{1|i}$$

$$Y_{1|i} = \Gamma_i X_i + H_i U_{1|i}$$

► **Matriz de Hankel**

 **Não unicidade da solução**

$$\begin{bmatrix} Tx(2) & Tx(3) & \dots & Tx(p+1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tx(1) & Tx(2) & \dots & Tx(p) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(p) \end{bmatrix}$$

 **Estimativa do SS**

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+2|i} \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1|i} \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = 0.75x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = 0.5x(k)$$



$A = 0.7500$
 $B = 0.4841$
 $C = 0.3099$
 $D = 1.8049\text{e-}16$
 $\text{sme} = 5.7163\text{e-}17$

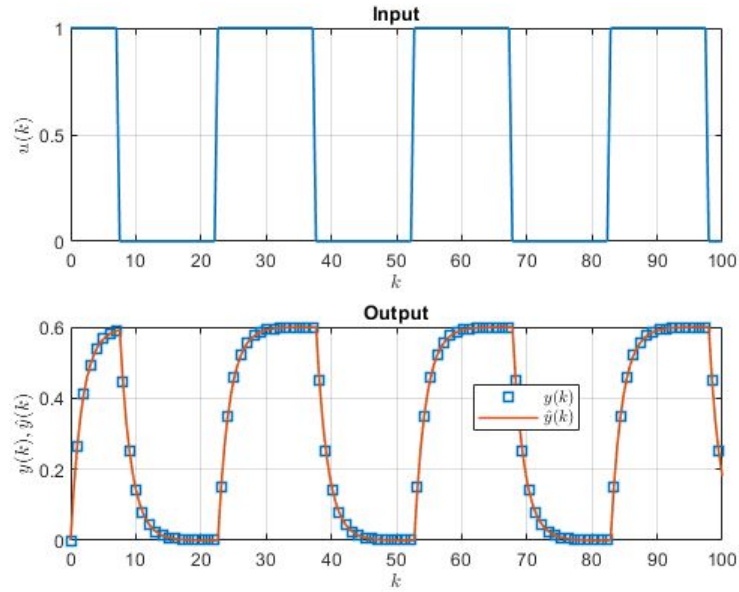


Fig. 6: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 1 \quad 1] x(k)$$



$A = 3 \times 3$
 $\begin{bmatrix} 0.8604 & -0.1404 & 0.0114 \\ -0.1401 & 0.3794 & 0.1510 \\ 0.0109 & 0.1537 & 0.3601 \end{bmatrix}$
 $B = 3 \times 1$
 $\begin{bmatrix} 1.0385 \\ 2.0443 \\ -0.4725 \end{bmatrix}$
 $C = 1 \times 3$
 $\begin{bmatrix} 0.7863 & 0.3776 & -0.0242 \end{bmatrix}$
 $D = 1.0232\text{e-}15$
 $\text{sme} = 1.5393\text{e-}15$

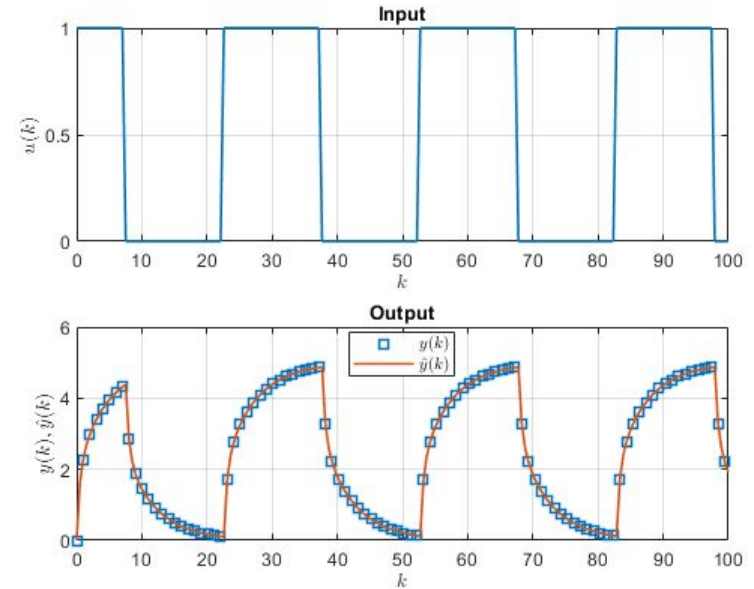


Fig. 7: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real .

$$x(k+1) = 0.85x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = -0.5x(k)$$

$A = 0.8500$
 $B = 0.3383$
 $C = -0.4434$
 $D = 2.5485e-17$
 $sme = 2.1610e-16$

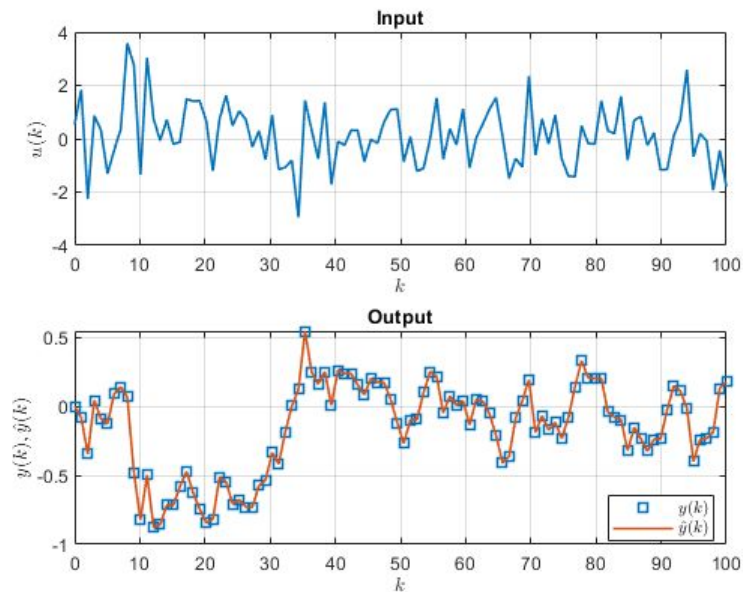


Fig. 7: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$A = 2 \times 2$
 $\begin{bmatrix} 0.7595 & 0.1990 \\ 0.1832 & 0.6405 \end{bmatrix}$
 $B = 2 \times 1$
 $\begin{bmatrix} 0.5277 \\ -0.2615 \end{bmatrix}$
 $C = 1 \times 2$
 $\begin{bmatrix} 0.6397 & -0.2388 \end{bmatrix}$
 $D = 5.7716e-17$
 $sme = 2.4655e-16$

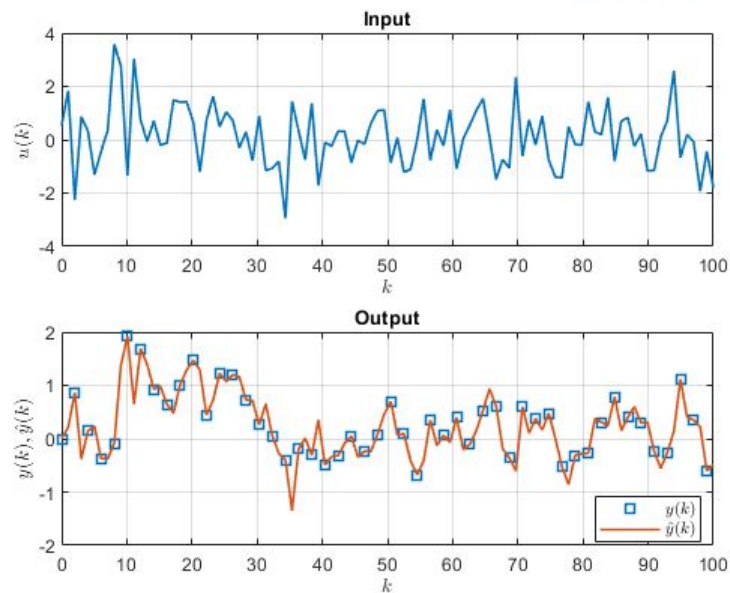


Fig. 8: Sinal de excitação do sistema e de saída estimado e real.

Cadeia de Markov - Monte Carlo

Método de **estimação** apropriado para pequenos conjuntos de dados disponíveis.



Teorema de Bayes

$$p(\theta|Y_N) = \frac{p(Y_N|\theta)p(\theta)}{p(Y_N)}$$



Função de aceitação

$$\alpha(\xi^{(k)}|\theta^{(k-1)}) = \min\left\{1, \frac{p(\xi^{(k)}|\theta^{(k-1)}, Y_N)}{p(\theta^{(k-1)}|Y_N)}\right\}$$



Valor estimado

$$\hat{\theta} = E(p(\theta_{(K)}|Y_n))$$



Modelo

$$y(t) = \left(\frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-1}}{1 + f_1 q^{-1}} \right) u(t) + e(t)$$



Real values

```
> [b1 b2 f1] = [0.50 0.20 0.80]
```

PEM estimated

```
> [b1 b2 f1] = [0.51 0.16 0.78]
```

MCMC estimated

```
> [b1 b2 f1 s0] = [0.52 0.17 0.80 0.83]
```

```
> dev([b1 b2 f1 s0]) = [0.05 0.04 0.01 0.23]
```

Acceptance rate: 99.15

Cadeia de Markov - Monte Carlo

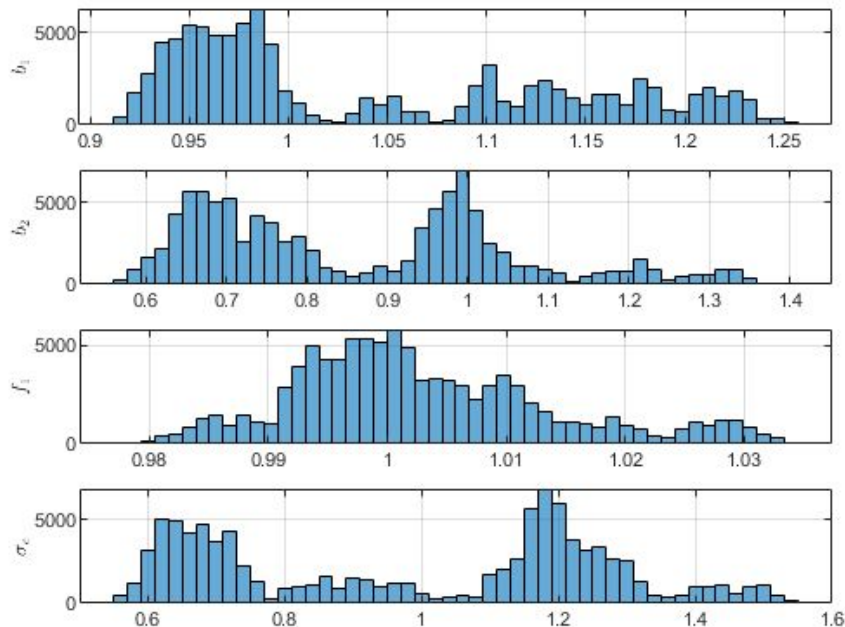


Fig. 8: Histograma dos valores candidatos.

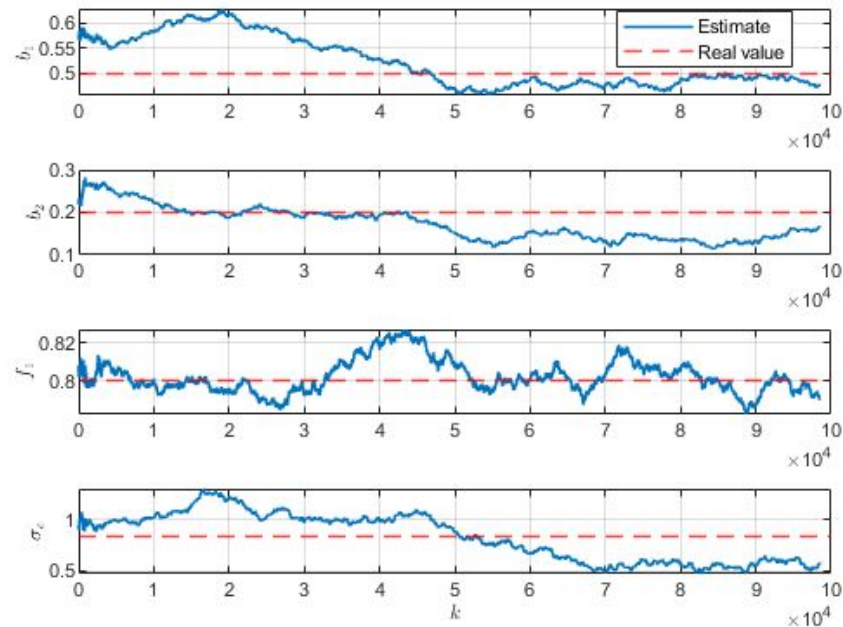


Fig. 9: Evolução dos valores candidatos por realização.

Estimação e identificação de sistemas

Atividade 9, 11 e 13



Débora Oliveira

2 de dezembro de 2021

