

# Relatório de Atividade 11 - Identificação por Subespaço

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Estimação e Identificação de Sistemas 21.2

09 de Novembro de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever o método de identificação de um sistema desconhecido por meio de subespaço. Em seguida, serão discutidos quatro exemplos de ordens e sinais de excitação diferente aplicando o método em estudo.

## Table of Contents

### [Introdução](#)

#### [Unicidade da solução](#)

#### [Matrizes de Hankel](#)

#### [Equacionamento de estimação](#)

### [Desenvolvimento](#)

#### [Exemplo 1: 1ª ordem e onda quadrática](#)

#### [Exemplo 2: 3ª ordem e onda quadrática](#)

#### [Exemplo 3: 1ª ordem e ruído branco](#)

#### [Exemplo 4: 2ª ordem e ruído branco](#)

### [Referências bibliográficas](#)

## Introdução

Em contraste com as atividades anteriores, esse documento analisa a estimação de um sistema desconhecido a partir da identificação de um subespaço. Nesse método, o único parâmetro fornecido pelo usuário é a ordem do sistema. Em relação aos métodos parametrizáveis tradicionais, a técnica de identificação por subespaço possui os seguintes benefícios:

- Não é extremamente sensível a perturbações pequenas nos sinais de entrada, uma vez que não trata com matrizes mal condicionadas (como  $P(t)$  no algoritmo de mínimos quadrados);
- Não limita as dinâmicas representativas do modelo, uma vez que não requer parametrização especial para dinâmicas não controláveis, mas observáveis.

O objetivo final desse método é estimar os melhores parâmetros do sistema  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  para que o modelo estimado forneça saídas semelhantes à planta real. Para tal, considera-se conhecidas as entradas  $u(n)$  e saídas  $y(n)$  da planta estimada. A dinâmica do sistema, por sua vez, é dada por:

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

## Unicidade da solução

A solução encontrada para as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  não é única. Para demonstrar esse problema, considere a multiplicação de ambos os lados da equação de  $x(n+1)$  por uma matriz inversível  $T$ :

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2) & x(3) & \dots & x(p+1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(p) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(p) \end{bmatrix}$$

para  $I$  a matriz identidade. Pode-se reescrever a expressão acima como:

$$\begin{bmatrix} Tx(2) & Tx(3) & \dots & Tx(p+1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tx(1) & Tx(2) & \dots & Tx(p) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(p) \end{bmatrix}$$

Ou seja, para um mesmo conjunto de entradas e saídas  $u(t)$  e  $y(t)$ , é possível encontrar múltiplos estados  $Tx(n)$  que representam a dinâmica planta desconhecida.

## Matrizes de Hankel

Para desenvolver a matemática envolvida no processo de estimação, é importante conhecer as matrizes de bloco de Hankel, as quais representam os sinais  $u(n)$  e  $y(n)$  como um histórico de linhas:

$$Y_{1|i} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(j) \\ y(2) & y(3) & \dots & y(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(i) & y(i+1) & \dots & y(i+j+1) \end{bmatrix}$$

$$U_{1|i} = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(j) \\ u(2) & u(3) & \dots & u(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j+1) \end{bmatrix}$$

Dessa forma, é possível reescrever a dinâmica do sistema como:

$$Y_{1|i} = \Gamma_i X_i + H_i U_{1|i} \text{ (Eq.1)}$$

$$X_{i+1} = A^i X_1 + \Delta_i U_{1|i} \text{ (Eq.2)}$$

para  $X_i = [x(i) \ x(i_1) \ \dots \ x(i+j-1)]$ ,  $\Gamma_i = [C \ CA \ \dots \ CA^{i-1}]^T$ ,  $\Delta_i = [A^{i-1}B \ A^{i-2}B \ \dots \ B]$  e

$$H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}.$$

## Equacionamento de estimação

Inicialmente, isola-se  $X_i$  na equação (1):

$$X_i = \Gamma_i^* Y_{1|i} - \Gamma_i^* H_i U_{1|i}$$

para  $\Gamma_i^*$  a pseudo-inversa de  $\Gamma_i$ . Substituindo na equação (2):

$$X_{i+1} = A^i \Gamma_i^* Y_{1|i} - A^i \Gamma_i^* H_i U_{1|i} + \Delta_i U_{1|i} = L_i W_{1|i}$$

para  $L_i = [\Delta_i - A^i \Gamma_i^* H_i \ A^i \Gamma_i^*]$  e  $W_{1|i} = [U_{1|i} \ Y_{1|i}]^T$ . Logo, é possível computar a relação entrada-saída no instante  $i+1$  como:

$$Y_{i+1|2i} = \Gamma_i X_{i+1} + H_i U_{i+1|2i} = \Gamma_i L_i W_{1|i} + H_i U_{i+1|2i}$$

A partir da relação matricial acima, é evidente que  $Y$  pertence ao subespaço definido pelas linhas de  $U$  e do vetor linha  $X$ . Para desconsiderar a contribuição das entradas  $U$  na saída  $Y$ , é necessário projetar  $Y$  em um espaço perpendicular ao subespaço definido por  $U$ . Dessa forma:

$$Y_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^\perp = \Gamma_i L_i W_{1|i}/U_{i+1|2i}^\perp + H_i U_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^\perp$$

para  $U_{i+1|2i}^\perp$  o espaço perpendicular ao plano definido pelos vetores linhas de  $U_{i+1|2i}$  e

$A/B^\perp = A(I - B^T(BB^T)^*B)$ . Detalhes sobre a definição da operação de projeção podem ser encontrada na literatura referenciada [1]. Como  $B/B^\perp = 0$ , é possível reescrever a relação acima como:

$$Y_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^\perp = \Gamma_i L_i W_{1|i}/U_{i+1|2i}^\perp$$

Isolando  $\Gamma_i L_i$ , encontra-se:

$$\Gamma_i L_i = [Y_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^\perp][W_{1|i}/U_{i+1|2i}^\perp]^*$$

Multiplicando ambos os lados por  $W_{1|i}$  e considerando que  $X_{i+1} = L_i W_{1|i}$ , tem-se:

$$\Gamma_i X_{i+1} = [Y_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^\perp][W_{1|i}/U_{i+1|2i}^\perp]^* W_{1|i}$$

Os termos na direita do equacionamento acima são conhecidos, enquanto os termos à esquerda devem ser estimados. Considerando  $O_{i+1} = [Y_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^\perp][W_{1|i}/U_{i+1|2i}^\perp]^* W_{1|i}$ , tem-se:

$$O_{i+1} = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{i-1}]^T [x(i) \quad x(i_1) \quad \dots \quad x(i+j-1)]$$

Observando a relação acima, é claro que cada linha de  $O$  é um subespaço dos vetores linhas de  $X$ . Em adição, a matriz  $O$  é composta por vetores linha linearmente dependentes. Logo, o posto de  $O$  é equivalente ao posto de  $X$ , o qual representa a ordem do sistema simulado  $j$ .

Os valores exatos de  $\Gamma_i$  e  $X_{i+1}$  são obtidos a partir da decomposição de valores singulares de  $O_{i+1}$ :

$$O_{i+1} = \Gamma_i X_{i+1} = PSV = PS^{1/2} T T^{-1} S^{1/2} V$$

para  $P$  e  $V$ , respectivamente, matrizes de mesma dimensão que  $C$  e  $X$ . Logo, tem-se que  $X_{i+1} = T^{-1} S^{1/2} V$  e  $\Gamma_i = PS^{1/2} T$ . Como a estimativa do vetor de estados  $\hat{X}_{i+1}$  é proporcional em relação ao vetor real  $X_{i+1}$  por uma constante  $T$ , é claro que  $\hat{X}_{i+1} = T X_{i+1} = S^{1/2} V$ .

A matriz  $V|$  representa  $V$  sem a última coluna. Analogamente,  $|V$  representa a matriz  $V$  sem a primeira coluna. Analiticamente, encontra-se que:

$$\hat{X}_{i+2}| = S^{1/2} |V$$

$$\hat{X}_{i+1}| = S^{1/2} V|$$

Logo, o espaço de estados da dinâmica do sistema estimado é dado por:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{i+2}| \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1}| \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}$$

Uma vez que se conhece  $U_{i+1|2i}$ ,  $Y_{i+1|2i}$ ,  $\hat{X}_{i+2}|$  e  $\hat{X}_{i+1}|$ , é possível computar as estimativas  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  como:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+2}| \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1}| \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}$$

Sendo assim, é evidente que as estimativas dos parâmetros do modelo não devem ser iguais aos valores verdadeiros, uma vez que a constante  $T$  é desconhecida. O que o método de identificação por subespaços propõe é a recuperação de um sistema equivalente ao identificado, isto é, que produzirá a mesma saída quando exposto a uma mesma entrada.

## Desenvolvimento

Para aplicar o método de identificação por subespaços, foram estimados quatro sistemas: um par de primeira ordem, um sistema de segunda ordem, e outro de terceira ordem. Analogamente, cada sistema foi excitado por um sinal  $u(t)$  equivalente a uma onda quadrática ou um ruído gaussiano de média nula e variância unitária. As especificações de cada exemplo foram dadas pela literatura referenciada [1]. Para a conclusão, serão analisados os polinômios estimados obtidos em relação ao valores reais simulados.

Caso deseje não visualizar os gráficos de entrada e saída estimadas e reais, defina a variável abaixo como 1.

```
verbose = 1;  
addpath '.\vanoverschee\SUBFUN';
```

### Exemplo 1: 1ª ordem e onda quadrática

Para o primeiro exercício, foi simulado o seguinte espaço de estados de primeira ordem:

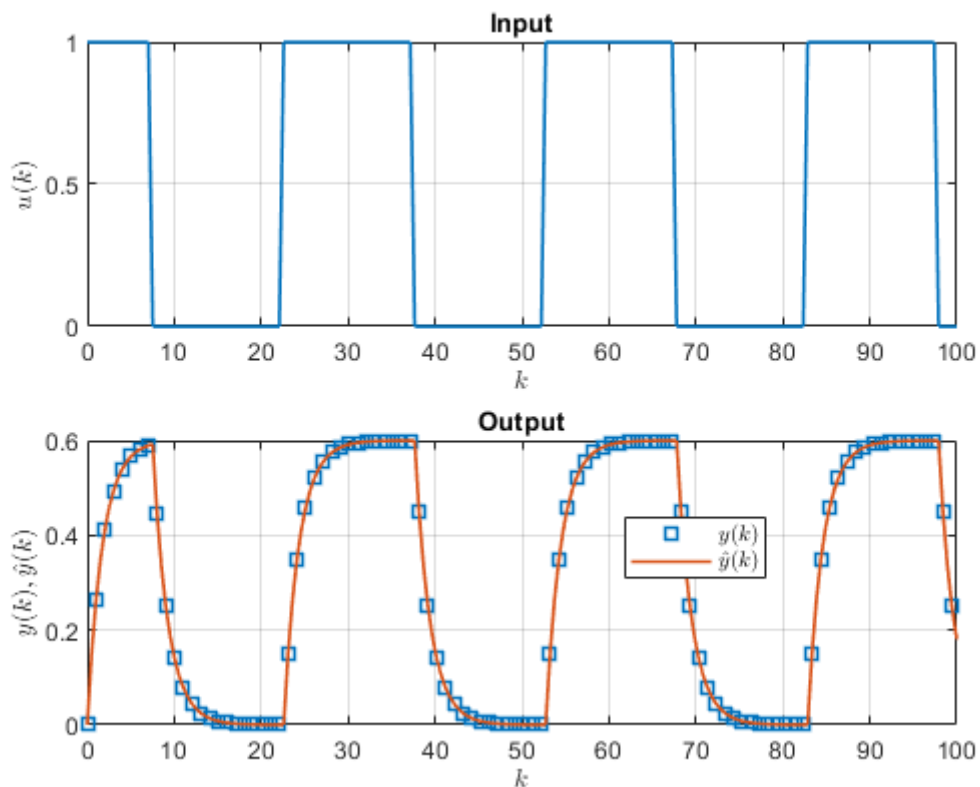
$$x(k+1) = 0.75x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = 0.5x(k)$$

O sistema foi excitado por uma onda quadrada de magnitude unitária e período de 30 amostras, conforme ilustrado na [Figura 1](#). Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de [Introdução](#), foram obtidos os seguintes valores:

ex01

A = 0.7500  
B = 0.4841  
C = 0.3099  
D = 2.5963e-16



**Figura 1:** Sinal de excitação do sistema  $u(k)$  e de saída estimado  $\hat{y}(k)$  e real  $y(k)$ .

Comparando os valores acima expostos com os valores reais, é evidente que os parâmetros convergem entre o sistema estimado e o real. Nesse caso,  $T \approx 1$ .

### Exemplo 2: 3ª ordem e onda quadrática

Já para o segundo exercício, foi simulado o seguinte espaço de estados de terceira ordem:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Assim como no [Exemplo 1](#), o sistema foi excitado por uma onda quadrada de magnitude unitária e período de 30 amostras. Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de [Introdução](#), foram obtidos os seguintes valores:

ex02

A = 3×3

0.8604	-0.1404	0.0114
-0.1401	0.3794	0.1510
0.0109	0.1537	0.3601

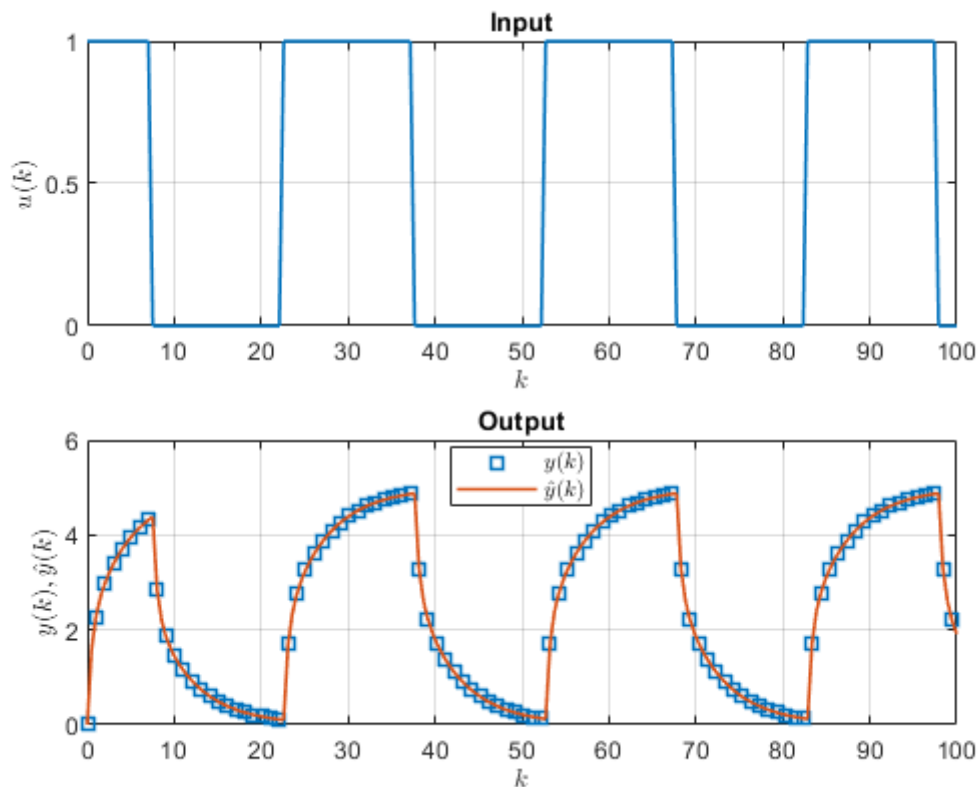
B = 3×1

1.0385
2.0443
-0.4725

C = 1×3

0.7863	0.3776	-0.0242
--------	--------	---------

D = 3.0161e-16



**Figura 2:** Sinal de excitação do sistema  $u(k)$  e de saída estimado  $\hat{y}(k)$  e real  $y(k)$ .

Comparando os valores acima apresentados e os valores reais de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , é evidente que a constante  $T$  é não unitária. Entretanto, observando a [Figura 2](#), apesar de  $\hat{A}$  não ser uma matriz diagonal,  $\hat{B} \neq B$  e  $\hat{C} \neq C$ , a saída do sistema estimado  $\hat{y}(k)$  equivale a saída real simulada  $y(k)$ . Ou seja, a planta estimada e o modelo estimado são sistemas equivalentes.

### Exemplo 3: 1ª ordem e ruído branco

O terceiro exemplo é semelhante ao [primeiro exercício](#), porém com um sinal de excitação  $u(t)$  equivalente ao ruído branco, conforme ilustrado na [Figura 3](#). Foi simulado o seguinte espaço de estados de primeira ordem:

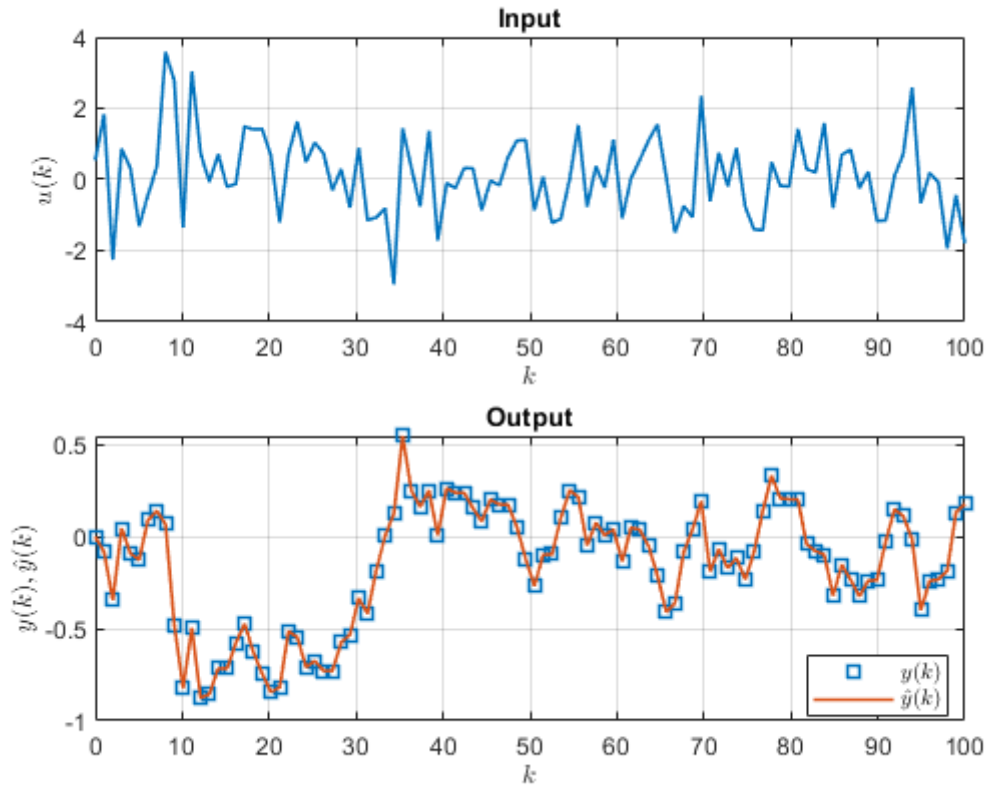
$$x(k+1) = 0.85x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = -0.5x(k)$$

Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de [Introdução](#), foram obtidos os seguintes valores:

ex03

A = 0.8500  
 B = 0.3383  
 C = -0.4434  
 D = 3.7496e-17



**Figura 3:** Sinal de excitação do sistema  $u(k)$  e de saída estimado  $\hat{y}(k)$  e real  $y(k)$ .

Assim como no [Exemplo 1](#), os parâmetros estimados convergem para os valores reais. Nesse caso,  $T \approx 1$ .

#### Exemplo 4: 2ª ordem e ruído branco

Por fim, para o último exemplo, foi simulado o seguinte espaço de estados de segunda ordem:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 1]x(k)$$

Assim como no [Exemplo 3](#), o sistema foi excitado por um ruído branco. Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de [Introdução](#), foram obtidos os seguintes valores:

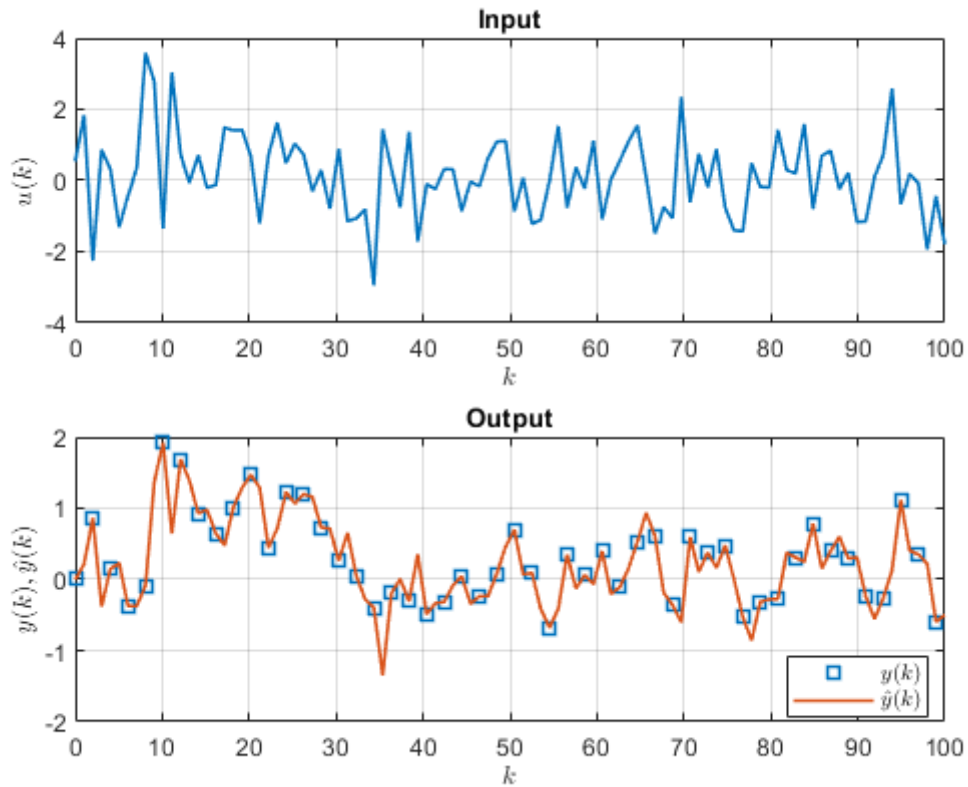
ex04

A = 2×2  
 0.7595    0.1990  
 0.1832    0.6405  
 B = 2×1  
 0.5277  
 -0.2615

$C = 1 \times 2$

0.6397    -0.2388

$D = 5.2757e-17$



**Figura 4:** Sinal de excitação do sistema  $u(k)$  e de saída estimado  $\hat{y}(k)$  e real  $y(k)$ .

De modo semelhante ao [Exemplo 2](#), é evidente que a constante  $T$  é não unitária. Entretanto, observando a [Figura 4](#), a saída do sistema estimado  $\hat{y}(k)$  equivale a saída real simulada  $y(k)$ . Ou seja, a planta estimada e o modelo estimado são sistemas equivalentes.

## Referências bibliográficas

[1] VAN OVERSHEE, DE MOOR. **Subspace identification for linear systems**. Kluwer Academic, Boston, ISBN 978-1-4613-0465-4.