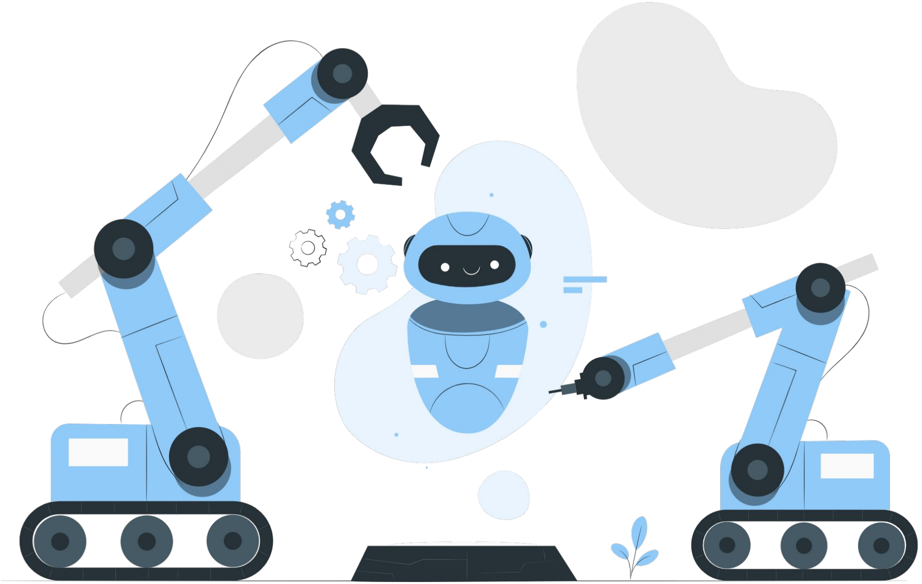
Estimação e identificação de sistemas

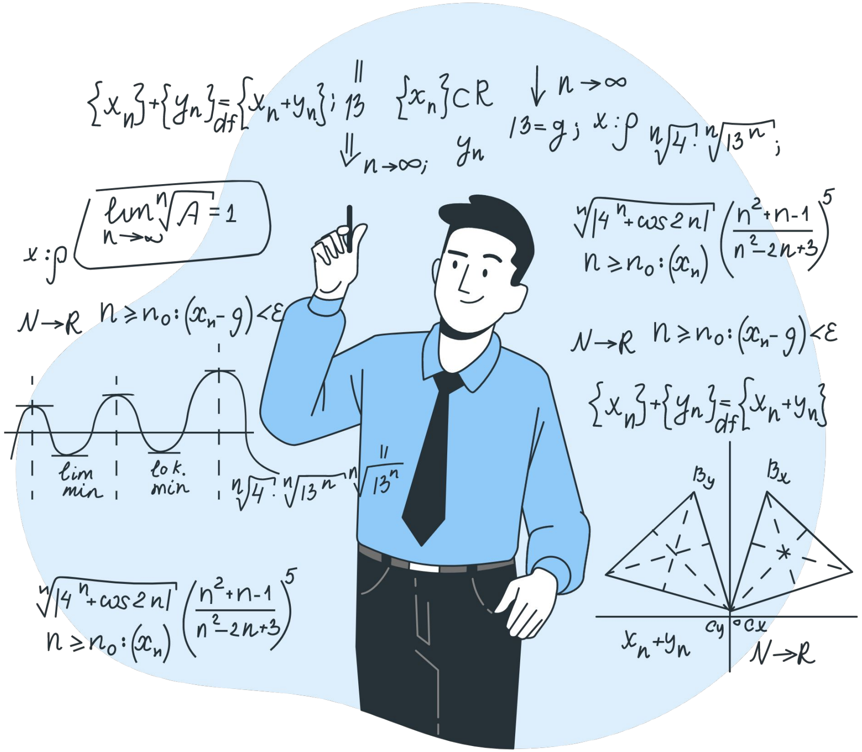
Atividade 1 a 4

Débora Oliveira

14 de Outubro de 2021



Sumário



01

Estimação de parâmetros

Identificação pelo método dos mínimos quadrados.

Métodos dos mínimos quadrados

Método de estimação que propõe encontrar o **menor erro** entre o sistema discreto estimado e real.

Processo estimado $\hat{y}(t|\theta) = -a_1 y(t-1) - \ldots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \ldots + b_m u(t-m) = \varphi^T(t)\theta$

Função de custo $V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{t} \left(y(k) - \varphi^T(k)\theta\right)^2$

$$\partial V(\hat{\theta}, t)/\partial\theta = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^{t} \varphi(k)\varphi^T(k)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{t} \varphi(k)y(k) = P(t) \sum_{k=1}^{t} \varphi(k)y(k)$$

Métodos dos mínimos quadrados

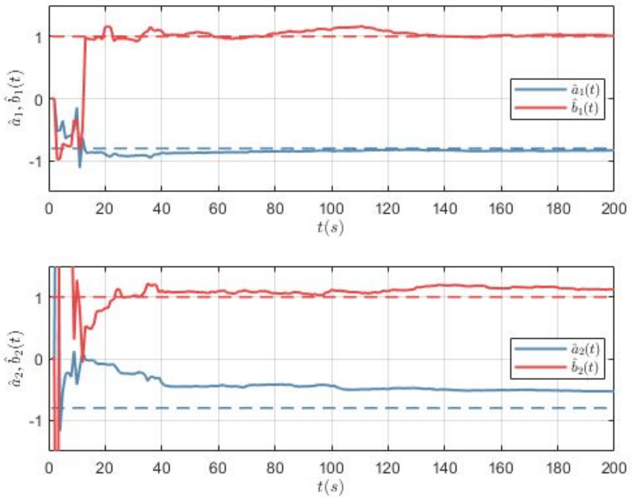


Fig. 1: Parâmetros a e b da função de transferência estimados para os dados coletados a partir dos modelos simulados 1 e 2.

$$\delta_1 : y(t) = 0.8y(t-1) + u(t-1) + e(t-1)$$
$$\delta_2 : y(t) = 0.8y(t-1) + u(t-1) + e(t) - 0.8e(t-1)$$

Ruído gaussiano com média nula e variância unitária.

Modelo estimado

$$H(q^{-1}) = \frac{bq^{-1}}{1+aq^{-1}}$$

Métodos dos mínimos quadrados

Covariância do erro

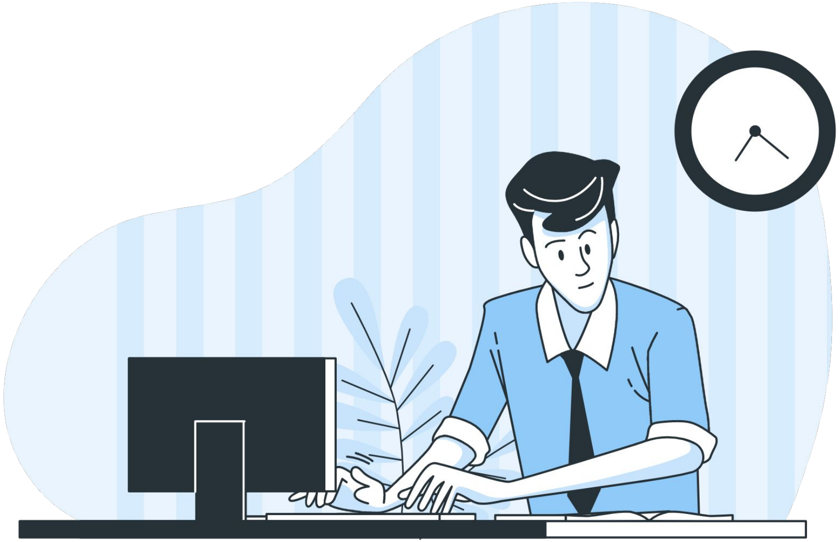
$$R = E(\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T) = E\left[P(t)\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\left[e(t)-0.8e(t-1)\right]\left[e(s)-0.8e(s-1)\right]\varphi^T(s)P(s)\right]$$

$$= P(t)\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(s)P(s)\left(E\left[e(t)e(s)\right]-0.8E\left[e(t)e(s-1)\right]-0.8E\left[e(t-1)e(s)\right]+0.64E\left[e(t-1)e(s-1)\right]\right)$$

$$= P(t)\lambda^2\left[1.64-1.6(N-1)\right]\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(s)P(s) = P(t)\lambda^2(3.24-1.6N)$$

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} R = M^{-1}\lambda^2(3.24N^{-1}-1.6)}$$

Covariância da entrada



02/03

Sistemas lineares variantes no tempo

Análise em frequência e covariância.

Periodograma

Periodograma ou **DFT** (*Discrete Fourier Transform*) **pondera** cada componente de frequência em um sinal para **manutenção do teorema de Parseval**.

DFT

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^{N} u(t) e^{-j\omega t}$$

Relação de Parseval

$$\sum_{k=1}^{N} |U_N(2\pi k/N)|^2 = \sum_{t=1}^{N} u^2(t)$$

Espectro de um sinal

$$\Phi_s(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j\tau\omega}$$

$$s(t) = G(q)u(t) + H(q)v(t)$$

$$v(t) = H(q)e(t)$$

$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{j\omega})|^2$$

Periodograma

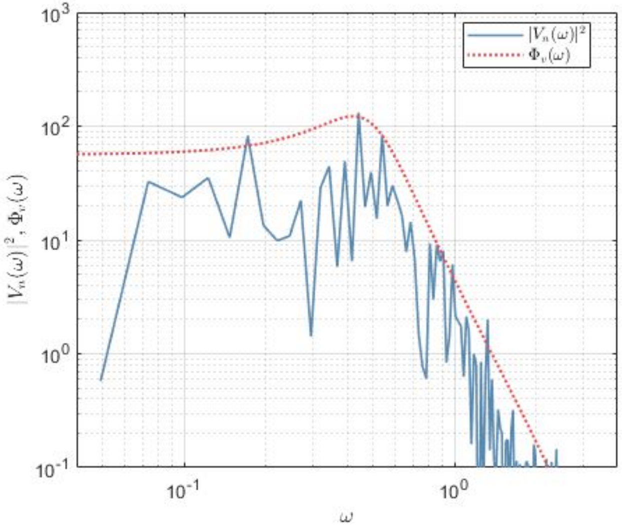


Fig. 2: Periodograma e espectro suavizado para a função v(t)

$$v(t) = e(t) + 0.5e(t-1) + 1.5v(t-1) + 0.7v(t-2)$$

Ruído gaussiano com média nula e variância unitária.

Podemos encontrar a **função de transferência** a partir do **espectro**?

Exemplo

$$\Phi_v(\omega) = \frac{1.25+\cos\omega}{1.64+1.6\cos\omega}$$

Modelo estimado

$$v(t) + a_1 v(t-1) + \ldots + a_{n_a} v(t-n_a) = c_0 e(t) + c_1 e(t-1) + \ldots c_{n_c} e(t-n_c)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{c_1 e^{j\omega} + c_0}{a_1 e^{j\omega} + a_0}$$

$$|H(e^{j\omega})^2|$$

$$\begin{cases} |C(e^{j\omega})|^2 = (c_1)^2 + (c_0)^2 + 2c_1 c_0 \cos\omega & = 1.25\lambda^{-1} + \lambda^{-1}\cos\omega \\ |A(e^{j\omega})|^2 = (a_1)^2 + (a_0)^2 + 2a_1 a_0 \cos\omega & = 1.64 + 1.6\cos\omega \end{cases}$$

Numerador

$$(a_0)^4 - 1.64(a_0)^2 + 0.64 = 0 \quad \Rightarrow \quad [a_0, a_1] = (0.8, 1)$$

Denominador

$$(c_0)^4 - 1.25\lambda^{-1}(c_0)^2 + 0.25\lambda^{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad [c_0, c_1] = (0.5\lambda^{-0.5}, \lambda^{-0.5})$$

$$H(z) = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{(\lambda^{-0.5})z + 0.5\lambda^{-0.5}}{z+0.8}$$

$$v(t) = \lambda^{-0.5} e(t) + 0.5\lambda^{-0.5} e(t-1) - 0.8v(t-1)$$

$$H(z) = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{(\lambda^{-0.5})z + 0.5\lambda^{-0.5}}{z+0.8} = \lambda^{-0.5}\left[\frac{1+0.5z^{-1}}{1+0.8z^{-1}}\right]$$

Processo ARMA

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2)$$

$$\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_t y_t) = -a_1 E(e_t y_{t-1}) - a_2 E(e_t y_{t-2}) + E(e_t e_t) + c_1 E(e_t e_{t-1}) + c_2 E(e_t e_{t-2}) \\
R_{ey}(1) &= E(e_{t-1} y_t) = -a_1 E(e_{t-1} y_{t-1}) - a_2 E(e_{t-1} y_{t-2}) + E(e_{t-1} e_t) + c_1 E(e_{t-1} e_{t-1}) + c_2 E(e_{t-1} e_{t-2}) \\
R_{ey}(2) &= E(e_{t-2} y_t) = -a_1 E(e_{t-2} y_{t-1}) - a_2 E(e_{t-2} y_{t-2}) + E(e_{t-2} e_t) + c_1 E(e_{t-2} e_{t-1}) + c_2 E(e_{t-2} e_{t-2}) \\
R_y(0) &= E(y_t y_t) = -a_1 E(y_t y_{t-1}) - a_2 E(y_t y_{t-2}) + E(y_t e_t) + c_1 E(y_t e_{t-1}) + c_2 E(y_t e_{t-2}) \\
R_y(1) &= E(y_{t-1} y_t) = -a_1 E(y_{t-1} y_{t-1}) - a_2 E(y_{t-1} y_{t-2}) + E(y_{t-1} e_t) + c_1 E(y_{t-1} e_{t-1}) + c_2 E(y_{t-1} e_{t-2}) \\
R_y(2) &= E(y_{t-2} y_t) = -a_1 E(y_{t-2} y_{t-1}) - a_2 E(y_{t-2} y_{t-2}) + E(y_{t-2} e_t) + c_1 E(y_{t-2} e_{t-1}) + c_2 E(y_{t-2} e_{t-2})
\end{aligned}$$

$E(e_i y_k) = 0, \forall i > k$

$$\begin{aligned}
E(e_i e_k) &= 0, \forall i \neq k \\
E(e_i e_k) &= \lambda, \forall i = k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_t e_t) = \lambda \\
R_{ey}(1) &= -a_1 R_{ey}(0) + c_1 E(e_t e_t) = \lambda(-a_1 + c_1) \\
R_{ey}(2) &= -a_1 R_{ey}(1) - a_2 R_{ey}(0) + c_2 E(e_t e_t) = \lambda\left[(a_1)^2 - a_1 c_1 - a_2 + c_2\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_y(0) &= \gamma_0 = -a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_2 + k_0 \\
R_y(1) &= \gamma_1 = -a_1 \gamma_0 - a_2 \gamma_1 + k_1 \\
R_y(2) &= \gamma_2 = -a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_0 + k_2
\end{aligned}$$

$$R_y(0) = \frac{(1+a_2)\left[1+(c_1)^2+(c_2)^2\right] - 2a_1 c_1 (1+c_2) - 2c_2\left[a_2 - (a_1)^2 + (a_2)^2\right]}{(1-a_2)(1-a_1+a_2)(1+a_1+a_2)}$$

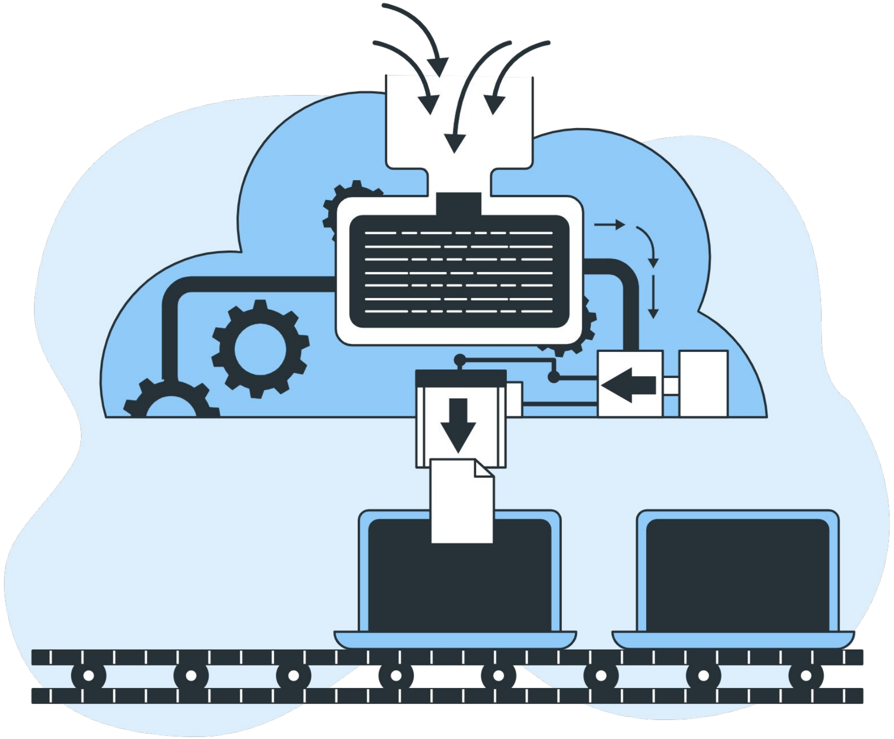
Podemos encontrar a **autocovariância** não analiticamente?

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_v(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{C(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{\lambda}{2\pi}\oint\frac{C(z)C(1/z)}{A(z)A(1/z)}z^{\tau-1}dz$$

$$A_k(z) = a_0^k z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k^k$$
$$A^*(z) = z^n A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z + \ldots + a^n z^n$$

$$A_{k-1}(z) = z^{-1}[A_k(z) - \alpha_k A_k^*(z)], \alpha_k = a_k^k/a_0^k$$
$$C_{k-1}(z) = z^{-1}[c_k(z) - \beta_k C_k^*(z)], \beta_k = c_k^k/a_0^k$$

$$R_v(0) = \frac{1}{a_0^k}\sum_{k=0}^{n}\frac{(b_i^i)^2}{a_0^i}$$



04

Equação de predição

Vetores de regressão para múltiplos modelos.

Preditor de um passo

Modelo Geral

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

Preditor Geral

$$C(q)F(q)\hat{y}(t|\theta) = D(q)B(q)u(t) + F(q)\left[C(q) - D(q)A(q)\right]y(t)$$

Modelo ARX

Modelo

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + a_{n_a} t(t - n_a) = b_1 u(t-1) + \ldots + b_{n_b} u(t - n_b) + e(t)$$

Regressão

$$\theta = \left[a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_{n_b}\right]$$

$$\varphi(t) = \left[-y(t-1) \ \ldots \ y(t-n_a) \ u(t-1) \ \ldots \ u(t-n_b)\right]$$

Preditor

$$\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t) = \theta^T \varphi(t)$$

Preditor de um passo

Modelo Geral

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

Preditor Geral

$$C(q)F(q)\hat{y}(t|\theta) = D(q)B(q)u(t) + F(q)\left[C(q) - D(q)A(q)\right]y(t)$$

Modelo ARMAX

Modelo

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + a_{n_a} t(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \ldots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) + c_1 e(t-1) + \ldots + c_{n_c} e(t-n_c)$$

Regressão

$$\theta = \left[a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_{n_b} \ c_1 \ c_2 \ \ldots \ c_{n_c}\right]$$

$$\varphi(t,\theta) = [-y(t-1) \ \ldots \ y(t-n_a) \ u(t-1) \ \ldots \ u(t-n_b) \ \varepsilon(t-1,\theta) \ \ldots \ \varepsilon(t-n_c,\theta)]$$

Preditor

$$C(q)\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [C(q) - A(q)]y(t)$$

$$\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t) + [C(q) - 1][y(t) - \hat{y}(t|\theta)]$$

Preditor de um passo

Modelo Geral

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

Preditor Geral

$$C(q)F(q)\hat{y}(t|\theta) = D(q)B(q)u(t) + F(q)\big[C(q) - D(q)A(q)\big]y(t)$$

Modelo *Output-error*

Modelo

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t)$$

$$w(t) = [B(q)/F(q)]u(t)$$

$$w(t) + f_1 w(t-1) + \ldots + f_{n_f} w(t-n_f) = b_1 u(t-1) + \ldots + b_{n_b} u(t-n_b)$$

Regressão

$$\theta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n_b} & f_1 & f_2 & \ldots & f_{n_f} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t,\theta) = [u(t-1) \; \ldots \; u(t-n_b) \; w(t-1,\theta) \; \ldots \; w(t-n_c,\theta)]$$

Estimação e identificação de sistemas

Atividade 1 a 4

Débora Oliveira

14 de Outubro de 2021