Relatório de Atividade - Análise em frequência e covariância

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Estimação e Identificação de Sistemas 21.2

24 de agosto de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a caracterização de um modelo de um sistema linear, causal e invariante no tempo considerando um distúrbio aditivo desconhecido.

Table of Contents

Exercício A: Reproduza a Figura 2.7 e Figura 2.8

Para o seguinte estudo, foi considerado um sistema invariante no tempo, linear e causal, isto é, cuja saída é unicamente representada por uma combinação de valores anteriores dos sinais de saída e entrada. Esse tipo de sistema pode ser modelado conforme:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

nomeada resposta ao impulso. Considerando que os dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ são amostrados em $t_k = kT, k = 1, 2, ...,$ pode-se reescrever $y(t)$ como:

$$y(kT) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(kT-\tau)d\tau = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\tau=(k-1)T}^{kT} g(\tau)u(kT-\tau)d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} g_T(n)u_{k-n}$$

para $u(t) = u_k,\ kT \leq t < (k+1)T$. Nesse estudo, considerou-se o período de amostragem $T = 1$. Sabendo que $q^{-k}u(t) = u(t-k)$, é possível reescrever o modelo acima como:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)q^{-k}u(t) = G(q)u(t)$$

Além disso, é possível considerar um distúrbio aditivo no modelo, tal como:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k) + v(t)$$

para $v(t)$ um sinal aleatório desconhecido.

Tendo em vista que o modelo do ruído não deve ser mais complexo do que a modelagem proposta para o sistema, é possível generalizar que:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k) = H(q)e(t)$$

para $e(t)$ um ruído branco com distribuição $N(0, \lambda)$ e $h(t)$ um filtro qualquer para $h(0) = 1$. Uma vez que $e(t)$ pode ser considerado um processo estocástico, é dado que $v(t)$ é a realização de um processo estocástico. Sendo assim, é adequada uma análise probabilística do modelo. A esperança e a covariância de $v(t)$ é dada por:

$$E[v(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E[e(t-k)] = 0$$

$$\begin{aligned} E[v(t)v(t-\tau)] = R_v(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(s)E[e(t-k)e(t-\tau-s)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(s)\delta(k-\tau-s)\lambda = \lambda\sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k-\tau) \end{aligned}$$

já que $R_e(0) = \lambda$ e $R_e(\tau) = 0$ para $\tau \neq 0$. Como as expressões acima independem de t, $v(t)$ é considerado estacionário.

Para quantificar o "peso" que cada componente de frequência $\omega = 2\pi k/N$, para N o número de amostra coletadas, na decomposição de $u(t)$, aplica-se a DFT (Transformada Discreta de Fourier):

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N} u(t)e^{-j\omega t}$$

Conforme a relação de Parseval, a energia do sinal $u(t)$ também pode ser decomposta conforme a magnitude das componentes em frequência $U_N(\omega)$:

$$\sum_{k=1}^{N} |U_N(2\pi k/N)|^2 = \sum_{t=1}^{N} u^2(t)$$

Essa decomposição espectral é ilustrada na forma de um periodograma ($|U_N(\omega)|^2$). Entretanto, para sinais aleatórios não periódicos, a DFT retorna resultados erráticos. Isso se deve pelo fato da variância da estimativa em frequência não reduzir para zero com o aumento do número de amostras N[2]. Esse problema pode ser solucionado aplicando uma média móvel no sinal pós DFT. Se o conjunto de dados for grande, as estimativas individuais são obtidas de blocos de dados não sobrepostos. Caso N seja pequeno, até metade de sobreposição do conjunto de dados permite a redução da variância da estimativa. Assintoticamente, o periodograma para $N \to \infty$ é equivalente a estimativa da potência de espectro de um sinal, a qual, para $s(t) = G(q)u(t) + H(q)v(t)$, é dada como:

$$\Phi_s(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_s(\tau)e^{-j\tau\omega}$$

Para um processo $v(t)$ estocástico com covariância $R_v(\tau) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} h(k)h(k-\tau)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\Phi_v(\omega) &= \lambda \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\tau}^{\infty} h(k)h(k-\tau)e^{jk\omega}e^{j(k-\tau)\omega} \\ &= \lambda \sum_{s=0}^{\infty} h(s)e^{js\omega} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega} = \lambda|H(e^{j\omega})|^2\end{aligned}$$

Observando a expressão acima, é evidente que o espectro só pode ser definido caso a função $H(q)$ seja conhecida.

Na Figura 1, estão ilustrados o periodograma $|V_N(\omega)|^2$ e espectro $\Phi_v(\omega)$ do sinal $v(t) = e(t) + 0.5e(t-1) + 1.5v(t-1) + 0.7v(t-2)$ para $e(t) \sim N(0,1)$.

```
exA
```

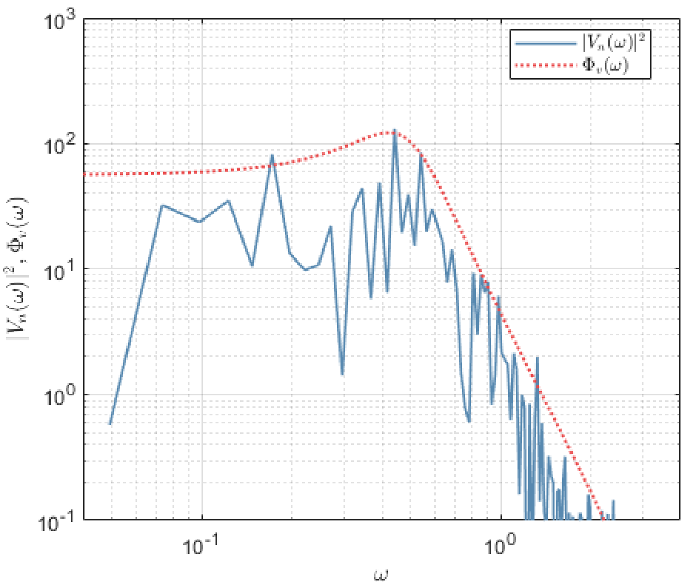

Figura 1: Periodograma $|V_N(\omega)|^2$ e espectro $\Phi_v(\omega)$ do sinal $v(t)$.

Conforme citado anteriormente, para sinais estocásticos não periódicos, o periodograma é errático. Dessa forma, é adequada a representação das componentes do espectro por $\Phi_v(\omega)$, a qual pode ser considerada como uma versão suavizada do sinal $|V_N(\omega)|^2$.

Exercício B: Gere as realizações e funções de covariância do sinal distúrbio

Considere o modelo genérico do distúrbio $v(t)$ tal que:

$$v(t) + a_1v(t-1) + ... + a_nv(t-n) = c_0e(t) + c_1e(t-1) + ...c_ne(t-n)$$

para $e(t) \sim N(0,1)$, foram construídos os seguintes modelos para $v(t)$:

1. $n = 1$, $a_1 = -0.9$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$
2. $n = 1$, $a_1 = 0.9$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$
3. $n = 2$, $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.7$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 2$
4. Semelhante a (3), mas $e(t)$ distribuído como $P(e(t)) = 0) = 0.98$, $P(e(t) = \sqrt{50}) = 0.01$ e $P(e(t) = -\sqrt{50}) = 0.01$

As realizações dos processos, isto é, o valor de $v(t)$ para $N = 200$ amostras está ilustrado na Figura 2.

```
exB
```

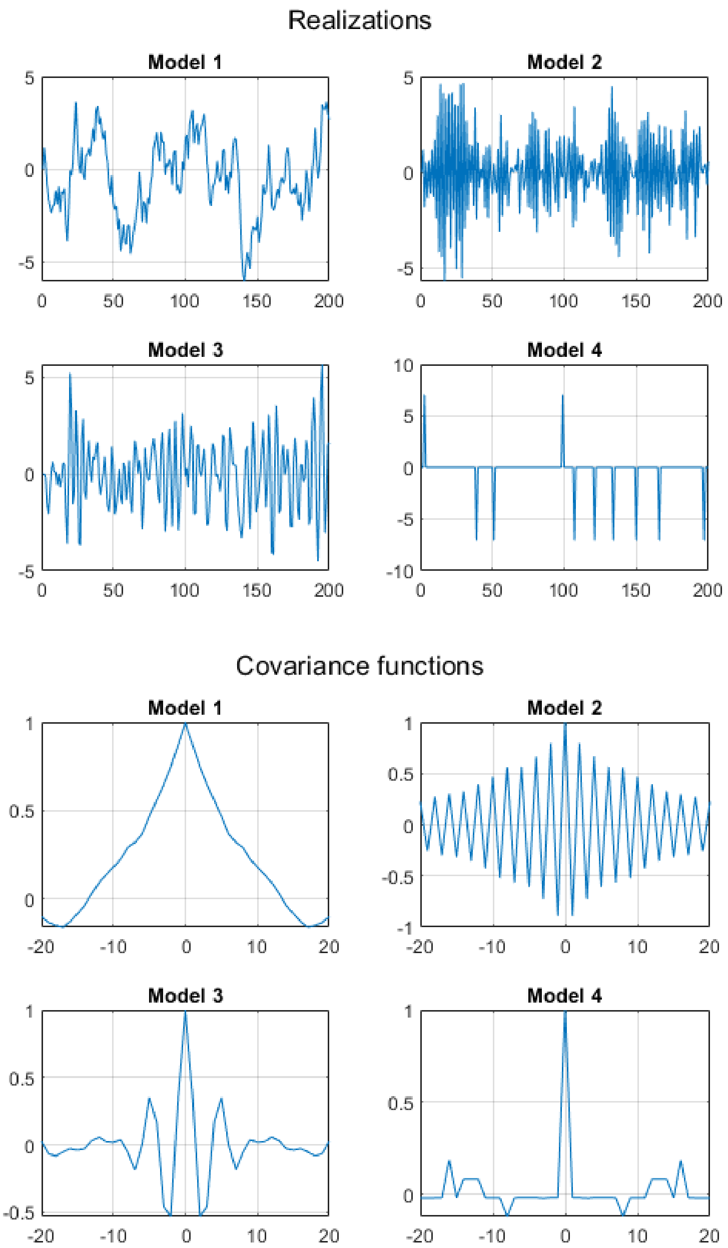

Figura 2: Realizações e funções de covariância para o sinal $v(t)$ resultante dos quatro modelos propostos.

A diferença entre os gráficos apresentados na Figura 2 e na literatura referenciada é justificada pela semente da função aleatória, a qual é responsável por gerar o ruído branco $e(t)$.

Exercício C: Obtenha as expressões de variância e covariância do processo ARMA

Um processo estocástico estacionário $v(t)$ que possuí um espectro racional $\Phi_v(\omega)$ pode ser representado como $v(t) = H(q)e(t)$ para $e(t)$ um ruído branco de média nula e covariância λ. A função de transferência $H(q)$ pode ser representada como:

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}, \text{ para } C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots c_{n_c} q^{-n_c} \text{ e } A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots a_{n_a} q^{-n_a}$$

Logo, analogamente ao Exercício B, o modelo genérico do distúrbio $v(t)$ é:

$$v(t) + a_1 v(t-1) + \dots + a_{n_a} v(t - n_a) = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots c_{n_c} e(t - n_c)$$

Se $n_c = 0$, a expressão acima é transformada em um modelo autorregressivo (AR), ou seja:

$$v(t) + a_1 v(t-1) + \dots + a_{n_a} v(t - n_a) = e(t)$$

Caso $n_a = 0$, encontra-se um modelo de média móvel (MA), isto é:

$$v(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots c_{n_c} e(t - n_c)$$

Sendo assim, essa modelagem do distúrbio é nomeada ARMA. A notação desse tipo de processo é dada por (n_a, n_c).

Considerando o processo ARMA(2,2), ou seja, $n_a = n_c = 2$, um processo $y(t)$ é modelado conforme a expressão abaixo:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2)$$

Pode-se substituir $y(k) = y_k$ e $e(k) = e_k$ para facilitar a notação. Multiplicando a expressão acima por y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, e_t, e_{t-1} e e_{t-2} e aplicando o operador de expectativa matemática (esperança), obtém-se as seguintes covariâncias:

$$\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_t y_t) &&= -a_1E(e_t y_{t-1}) - a_2E(e_t y_{t-2}) + E(e_t e_t) + c_1E(e_t e_{t-1}) + c_2E(e_t e_{t-2}) \\
R_{ey}(1) &= E(e_{t-1} y_t) &&= -a_1E(e_{t-1} y_{t-1}) - a_2E(e_{t-1} y_{t-2}) + E(e_{t-1} e_t) + c_1E(e_{t-1} e_{t-1}) + c_2E(e_{t-1} e_{t-2}) \\
R_{ey}(2) &= E(e_{t-2} y_t) &&= -a_1E(e_{t-2} y_{t-1}) - a_2E(e_{t-2} y_{t-2}) + E(e_{t-2} e_t) + c_1E(e_{t-2} e_{t-1}) + c_2E(e_{t-2} e_{t-2}) \\
R_{y}(0) &= E(y_t y_t) &&= -a_1E(y_t y_{t-1}) - a_2E(y_t y_{t-2}) + E(y_t e_t) + c_1E(y_t e_{t-1}) + c_2E(y_t e_{t-2}) \\
R_{y}(1) &= E(y_{t-1} y_t) &&= -a_1E(y_{t-1} y_{t-1}) - a_2E(y_{t-1} y_{t-2}) + E(y_{t-1} e_t) + c_1E(y_{t-1} e_{t-1}) + c_2E(y_{t-1} e_{t-2}) \\
R_{y}(2) &= E(y_{t-2} y_t) &&= -a_1E(y_{t-2} y_{t-1}) - a_2E(y_{t-2} y_{t-2}) + E(y_{t-2} e_t) + c_1E(y_{t-2} e_{t-1}) + c_2E(y_{t-2} e_{t-2})
\end{aligned}$$

Considerando que $E(e_i y_k) = 0, \forall i > k$ e que o erro $e(t)$ é um ruído gaussiano, isto é, $E(e_t e_k) = 0, \forall i \neq k$ e $E(e_t e_k) = \lambda$ para $i = k$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_t y_t) &&= E(e_t e_t) && \\
R_{ey}(1) &= E(e_{t-1} y_t) &&= -a_1E(e_{t-1} y_{t-1}) + c_1E(e_{t-1} e_{t-1}) &&= -a_1R_{ey}(0) + c_1E(e_t e_t) \\
R_{ey}(2) &= E(e_{t-2} y_t) &&= -a_1E(e_{t-2} y_{t-1}) - a_2E(e_{t-2} y_{t-2}) + c_2E(e_{t-2} e_{t-2}) &&= -a_1R_{ey}(1) - a_2R_{ey}(0) + c_2E(e_t e_t) \\
R_{y}(0) &= E(y_t y_t) &&= -a_1E(y_t y_{t-1}) - a_2E(y_t y_{t-2}) + E(y_t e_t) + c_1E(y_t e_{t-1}) + c_2E(y_t e_{t-2}) &&= -a_1R_y(1) - a_2R_y(2) + R_{ey}(0) + c_1R_{ey}(1) + c_2R_{ey}(2) \\
R_{y}(1) &= E(y_{t-1} y_t) &&= -a_1E(y_{t-1} y_{t-1}) - a_2E(y_{t-1} y_{t-2}) + c_1E(y_{t-1} e_{t-1}) + c_2E(y_{t-1} e_{t-2}) &&= -a_1R_y(0) - a_2R_y(1) + c_1R_{ey}(0) + c_2R_{ey}(1) \\
R_{y}(2) &= E(y_{t-2} y_t) &&= -a_1E(y_{t-2} y_{t-1}) - a_2E(y_{t-2} y_{t-2}) + c_2E(y_{t-2} e_{t-2}) &&= -a_1R_y(1) - a_2R_y(0) + c_2R_{ey}(0)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores nas equações de $R_{ey}(\tau)$ para $\tau = 0, 1, 2$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_t e_t) = \lambda \\
R_{ey}(1) &= -a_1R_{ey}(0) + c_1E(e_t e_t) = \lambda(-a_1 + c_1) \\
R_{ey}(2) &= -a_1R_{ey}(1) - a_2R_{ey}(0) + c_2E(e_t e_t) = \lambda\left[(a_1)^2 - a_1c_1 - a_2 + c_2\right]
\end{aligned}$$

Em seguida, calculando $R_y(\tau)$ para $\tau = 0, 1, 2$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
R_y(0) &= \gamma_0 &&= -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 + k_0 \\
R_y(1) &= \gamma_1 &&= -a_1\gamma_0 - a_2\gamma_1 + k_1 \\
R_y(2) &= \gamma_2 &&= -a_1\gamma_1 - a_2\gamma_0 + k_2
\end{aligned}$$

para $k_0 = \lambda[1 + c_1(-a_1 + c_1) + c_2\left((a_1)^2 - a_1c_1 - a_2 + c_2\right)]$, $k_1 = \lambda[c_1 + c_2(-a_1 + c_1)]$ e $k_2 = \lambda c_2$. Isolando γ_1 na equação de $R_y(1)$, tem-se que $\gamma_1 = \dfrac{-a_1\gamma_0 + k_1}{(1 + a_2)}$. Substituindo na equação de γ_2, tem-se:

$$\gamma_2 = -a_1\left[\frac{-a_1\gamma_0 + k_1}{(1 + a_2)}\right] - a_2\gamma_0 + k_2 = \frac{(a_1)^2\gamma_0 - a_1k_1 - a_2\gamma_0 + k_2 - (a_2)^2\gamma_0 + a_2k_2}{(1 + a_2)}$$

Logo, finalmente substituindo em γ_0, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= -a_1\left[\frac{-a_1\gamma_0 + k_1}{(1 + a_2)}\right] - a_2\left[\frac{(a_1)^2\gamma_0 - a_1k_1 - a_2\gamma_0 + k_2 - (a_2)^2\gamma_0 + a_2k_2}{(1 + a_2)}\right] + k_0 \\
&= \frac{(a_1)^2\gamma_0 - a_1k_1 - (a_1)^2a_2\gamma_0 + a_1a_2k_1 + (a_2)^2\gamma_0 - a_2k_2 + (a_2)^3\gamma_0 - (a_2)^2k_2 + k_0 + a_2k_0}{(1 + a_2)}
\end{aligned}$$

Isolando γ_0, obtém-se que:

$$\gamma_0 = \frac{-a_1k_1 + a_1a_2k_1 - a_2k_2 - (a_2)^2k_2 + k_0 + a_2k_0}{1 + a_2 - (a_1)^2 + (a_1)^2a_2 - (a_2)^2 - (a_2)^3}$$

Fatorando o denominador e substituindo as constantes k_0, k_1 e k_2 da expressão de γ_0, é encontrada que a variância de $y(t)$ é:

$$\gamma_0 = \frac{(1 + a_2)\left[1 + (c_1)^2 + (c_2)^2\right] - 2a_1c_1(1 + c_2) - 2c_2\left[a_2 - (a_1)^2 + (a_2)^2\right]}{(1 - a_2)(1 - a_1 + a_2)(1 + a_1 + a_2)}$$

Exercício D: Gerar um texto em vernáculo e em formato de artigo conforme o texto "Stochastic Model"

Um distúrbio genérico aplicado sobre um sistema pode ser caracterizado por um processo aleatório, cujo valor não é conhecido previamente. Entretanto, é possível produzir predições sobre esse valor conforme a natureza probabilística de um processo estocástico. Seja $e(t_k)$ uma série temporal de variáveis aleatórias independentes, isto é, um ruído branco, tem-se que:

$$w(t) + d_1w(t - T) + ... + d_nw(t - nT) = c_0e(t) + c_1e(t - T) + ... + c_ne(t - nT)$$

para $e(t) \in N(0, \lambda)$. O processo $w(t)$ é determinado uma realização de um processo estocástico, isto é, uma série de variáveis estocásticas com distribuição característica. O modelo acima descrito é denominado ARMA, e pode ser descrito como uma função racional $H(q)$ tal que:

$$H(q) = \frac{C(q)}{D(q)}$$

Como o valor de $e(t)$ não depende de t, assim também será para $w(t)$. Logo, pode-se nomear $w(t)$ como processo estocástico estacionário.

A expectativa matemática (ou esperança) do sinal $w(t)$ é descrita como $m_w = Ew(t)$. Por sua vez, a covariância é determinada como $R_w(t,s) = E(w(t) - m_w(t))(w(s) - m_w(s))$. Já que $w(t)$ é um processo estarionário, a covariância $R_w(t,s)$ depende unicamente de $\tau = t - s$.

A decomposição de um sinal em uma soma de senoides de determinada frequência é essencial para a caracterização de um distúrbio. Essa decomposição pode ser encontrada pela transformada de Fourier ($W_N(\omega)$), e o quadrado da magnitude das componentes de frequência presentes na decomposição do sinal é nomeada espectro ($\Phi_w(\omega)$). A potência de um sinal é então determinada por:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi_w(\omega) d\omega$$

para $\omega_1 < \omega_2$. Entretanto, esse conceito é modificado conforme os sinais possuem:

- Energia finita: o espectro é definido como $\Phi_w(\omega) = |W_N(\omega)|^2$;
- Energia infinita: o espectro é calculado para um sinal $w'(t)$ referente ao truncamento do sinal original $w(t)$, posteriormente normalizado e levado ao infinito, ou seja $\Phi_w(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}|W'_N(\omega)|^2$;
- ou são realizações de um processo estocástico: o espectro é definido por $\Phi_w(\omega) = \lim_{N\to\infty} E\left[\frac{1}{N}|W'_N(\omega)|^2\right]$.

Por sua vez, a dependência de dois sinais $u(t)$ e $y(t)$ pode ser inferida pelo espectro cruzado, isto é, $\Phi_{yu}(\omega)$. Se $\Phi_{yu}(\omega) = 0$, esses sinais são descorrelacionados. Para sinais $y(t)$ e $u(t)$ estocásticos, $\Phi_{yu}(\omega)$ equivale à transformada de fourier da função de covariância $R_{uy}(\tau)$.

Considere três sinais $y(t)$, $u(t)$ e $w(t)$ associados conforme a seguinte expressão:

$$y(t) = G(p)u(t) + w(t)$$

para p o operador diferencial, e $u(t)$ e $w(t)$ sinais independentes. Conforme a transformada contínua de Fourier, as componentes em frequência desse sinal são relacionadas por:

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega) + W(\omega)$$

Tomando o valor absoluto quadrado de cada termo a direita da igualdade e normalizando pelo intervalo de N amostras, tem-se, a partir do conceito de espectro anteriormente definido:

$$\Phi_y(\omega) = G(j\omega)^2\Phi_u(\omega) + \Phi_w(\omega)$$

uma vez que $\Phi_{wu}(\omega) = 0$. Analogamente, para o tempo discreto, tem-se que $Y(\omega) = G(e^{j\omega t})U(\omega) + W(\omega)$.

Referências bibliográficas

[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User**. Pearson, 1998. 2nd edition, ISBN 9788131744956.

[2] **PSD Estimation Using the DFT**. (Disponível em: http://www.ee.iitm.ac.in/~skrishna/ee471/dft_lab2.pdf)