Relatório de Atividade 06 - Modelos de predição não-paramétricos

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Estimação e Identificação de Sistemas 21.2

14 de setembro de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a caracterização de um preditor para um sistema a partir de técnicas não paramétricas.

Table of Contents

Introdução

Nos exercícios anteriores, a identificação de uma planta era realizada conforme um modelo de referência. No entanto, as técnicas diretas de estimação restringem o sistema a uma família de modelos. Existem métodos que contornam essa problemática, as quais são nomeadas não paramétricas.

Nesse estudo, serão descritas duas formas de analisar a função de transferência $G(q)$ de uma planta desconhecida: primeiramente no domínio do tempo; e, em segundo lugar, no domínio da frequência.

Análise no domínio do tempo

Se um sistema é generalizado pela formulação

$$y(t) = G_0(t)u(t) + v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(k)u(t-k) + v(t)$$

para $u(t)$ o sinal pulso com magnitude α e $v(t)$ um ruído, a saída é dada por

$$y(t) = \alpha g_0(t) + v(t)$$

para $g_0(t)$ a resposta ao impulso da função de transferência $G_0(q)$. Se o ruído for desprezível, é possível determinar os coeficientes da resposta ao impulso por;

$$g_0(t) = \frac{y(t)}{\alpha}$$

Todavia, muitos processos não são estáveis para sinais de pulso como entrada. Além disso, para $u(t)$ de magnitude α, há um erro $v(t)/\alpha$ na estimativa acima.

Uma alternativa seria adotar $u(t)$ como um degrau de magnitude α a partir do instante $t = 0$. Dessa forma, a saída do sistema é dada por:

$$y(t) = \alpha \sum_{k=1}^{t} g_0(k) + v(t)$$

Sendo assim, as estimativas de $g_0(t)$ são então encontradas por:

$$g_0(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{\alpha}$$

com um erro de $[v(t) - v(t-1)]/\alpha$. Apesar desse erro ser inferior ao computado pelo modelo que adota o pulso como sinal de entrada, não é possível garantir que os parâmetros estimados são próximos dos coeficientes reais da planta.

Uma forma de evitar que a estimativa derive da formulação de $y(t)$ (que possuí uma parcela $v(t)$) é realizar a análise a partir da correlação dos sinais $u(t)$ e $y(t)$, a qual é:

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(k) R_u(k-\tau)$$

Essa expressão foi discutida durante a Atividade 02, e, por isso, seu desenvolvimento não será aqui explicitado. Se $u(t)$ for escolhido como um ruído branco, tem-se que:

$$R_u(\tau) = \begin{cases} \alpha, \tau = 0 \\ 0, \tau \neq 0 \end{cases}$$

Logo, substuindo na equação de $R_{yu}(\tau)$:

$$g_0(\tau) = \frac{R_{yu}(\tau)}{\alpha}$$

Se $u(t)$ não for um ruído branco, é possível truncar $R_u(\tau)$ e encontrar uma aproximação de $G_0(q)$. Outra alternativa é empregar um filtro de "pré-branqueamento" em ambos sinais de saída $y(t)$ e entrada $u(t)$ para transformar $u(t)$ em um sinal o mais aproximado possível de um ruído branco antes de calcular as covariâncias.

Análise no domínio da frequência

Outro método para determinar o modelo de um processo desconhecido é a análise em frequência. Suponha $u(t) = \alpha \cos(\omega t)$, para $t = 0, 1, 2, ...$, logo:

$$y(t) = \alpha |G_0(e^{j\omega})| \cos(\omega t + \varphi) + v(t), \text{ para } \varphi = \angle G_0(e^{j\omega})$$

Dessa forma, $y(t)$ é um sinal cosseinoidal adicionado a um ruído. Conforme descrito por [1], a estimativa $\widehat{G}_N(q)$ pode ser encontrada considerando os seguintes passos:

- Calcule os seguintes somatórios para N amostras:

$$I_c(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} y(t) \cos \omega t = \frac{\alpha}{2} |G_0(e^{j\omega})| \cos \varphi + \frac{\alpha}{2N} |G_0(e^{j\omega})| \sum_{t=1}^{N} \cos(2\omega t + \varphi) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} v(t) \cos \omega t$$

$$I_s(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} y(t) \sin \omega t = -\frac{\alpha}{2} |G_0(e^{j\omega})| \sin \varphi + \frac{\alpha}{2N} |G_0(e^{j\omega})| \sum_{t=1}^{N} \sin(2\omega t + \varphi) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} v(t) \sin \omega t$$

- Estime $\widehat{G}_N$ tal que $|\widehat{G}_N(e^{j\omega})| = \dfrac{\sqrt{I_c^2(N) + I_s^2(N)}}{\alpha/2}$ e $\angle \widehat{G}_N(e^{j\omega}) = \arctan \dfrac{I_s(N)}{I_c(N)}$.

Ao repetir o processo para uma série de frequências ω, pode-se obter a estimativa $\widehat{G}_N(e^{j\omega})$ para múltiplas frequências. Entretanto, muitos sistemas não admitem entradas senoidais devido à persistência desse sinal. Sendo assim, de forma generalizada, pode-se estimar, de forma grosseira, que:

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

para ω a frequência do sinal de entrada, $Y_N(\omega)$ a DFT da saída $y(t)$ e $U_N(\omega)$ a TDF (transformada discreta de Fourier) da entrada $u(t)$. A função $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$ é nomeada estimada empírica da função de transferência (*empirical transfer-function estimate* - ETFE), e só existe para $U_N(\omega) \neq 0$.

Conforme descrito no Teorema 2.1 de [1]:

$$Y_N(\omega) = G_0(e^{j\omega})U_N(\omega) + V_N(\omega) + R_N(\omega)$$

para $R_N(\omega)$ o resíduo do truncamento da entrada $u(t)$ no somatório e $V_N(\omega)$ a DFT do ruído $v(t)$. Dessa forma, substituindo $Y_N(\omega)$ na expressão de $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$:

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega) + V_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

Logo, o valor esperado da estimativa $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$ é:

$$E\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{EV_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

Como $EV_N = 0$, é evidente que a equivalência entre o valor verdadeiro $G_0(z)$ e a ETFE depende unicamente da parcela $R_N(\omega)/U_N(\omega)$. Existem estratégias para minimizar esse erro de viés (BIAS) conforme a excitação do sistema, isto é, aplicando sinais de entrada $u(t)$ que minimizem a respectiva fração $R_N(\omega)/U_N(\omega)$.

Conforme discutido no Capítulo 2 de [1], o espectro $\Phi_v(\omega)$ é uma versão suavizada da curva $|V_N(\omega)|^2$. Dessa forma, pode-se descrever que:

$$E|V_N(\omega)|^2 = \Phi_v(\omega) + \rho(N), \text{ para } \rho < C/N$$

para $|u(t)| \leq C$, para todo t. Sendo assim, a variância da ETFE não decai com o aumento de N, mas é proporcional à relação sinal ruído na respectiva frequência. Como o ruído $v(t)$ é gaussiano, isto é, cada amostra independe do valor nos instantes anteriores e posteriores, é evidente que as propriedades em frequências diferentes são descorrelacionadas.

Uma solução para esse problema seria aumentar não a quantidade, mas a qualidade dos dados (*features*) de entrada do estimador, ou seja, assumir que as frequências são associadas entre si conforme a seguinte média ponderada:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k \hat{\hat{G}}_N(e^{2\pi jk/N})}{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k}, \text{ para } \alpha_k = \frac{|U_N(2\pi k/N)|^2}{\Phi_v(2\pi k/N)}$$

sendo ω_0 a frequência em que quero estimar $G(z)$, e assumindo que $G_0(e^{j\omega})$ é constante no intervalo $2\pi k_1/N < \omega < 2\pi k_2/N$. É evidente que α_k é o inverso da relação sinal-ruído para a frequência $2\pi k/N$.

Para N grande, é possível aproximar o somatório por uma integral de tal forma que:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} W_\gamma(\xi - \omega_0)\alpha(\xi)\hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} W_\gamma(\xi - \omega_0)\alpha(\xi)d\xi}, \text{ para } W_\gamma(\xi) \text{ um degrau unitário centrado em } \xi = 0 \text{ e largura } 2\Delta\omega,$$

Substituindo $\alpha(\xi) = |U_N(\xi)|^2/\Phi_v(\omega_0)$, obtém-se que:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 \hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 d\xi}$$

Entretanto, para $N \to \infty$, tem-se que $|U_N(\varepsilon)|^2 \to \Phi_u(\varepsilon)$. Além disso, se $W_\gamma(\varepsilon)$ for tal que $\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\varepsilon)d\varepsilon = 1$, a ponderação é concentrada ao redor de $\varepsilon = 0$ em uma largura $2\Delta\omega$, tal que $\Phi_u(\omega)$ é aproximadamente constante. Dessa forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)\Phi_u(\xi)d\xi = \Phi_u^N(\omega_0)$$

Analogamente, já que:

$$|U_N(\xi)|^2 \hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi}) = |U_N(\xi)|^2 \frac{Y_N(\xi)}{U_N(\xi)} = Y_N(\xi)\bar{U}_N(\xi)$$

é possível encontrar que:

$$\Phi_{yu}^N(\omega_0) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)Y_N(\xi)\bar{U}_N(\xi)d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 \hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi$$

Sendo assim, é possível reescrever a estimativa $\widehat{G}_N(e^{j\omega_0})$ como:

$$\widehat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\Phi_{yu}^N(\omega_0)}{\Phi_u^N(\omega_0)}$$

Outra maneira de representar $\Phi_u^N(\omega)$ é a partir da série de Fourier do periodograma $|U_N(\omega)|^2$, a qual é dada pela covariância do sinal $u(t)$:

$$\widehat{R}_u^N(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |U_N(\omega)|^2 e^{j\tau\omega}d\omega \to \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)u(t-\tau)$$

Similarmente, os coeficientes de Fourier para a função $2\pi W_\gamma(\xi)$ é:

$$w_\gamma(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi)e^{j\tau\xi}d\xi$$

Como a integral $\Phi_u^N(\omega)$ é uma convolução, ela é equivalente à multiplicação dos coeficientes de Fourier:

$$\Phi_u^N(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} w_\gamma(\tau)\widehat{R}_u^N(\tau)e^{-j\tau\omega}$$

Agora, é evidente que $W_\gamma(\xi)$ deve ser escolhido de tal forma que $w_\gamma(\tau) = 0$, para $|\tau| < \delta_\gamma$ e $\delta_\gamma << N$. Sendo assim, o espectro de $u(t)$ é reescrito como:

$$\Phi_u^N(\omega) = \sum_{\tau=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(\tau)\widehat{R}_u^N(\tau)e^{-j\tau\omega}$$

Desenvolvimento

Nessa atividade, é proposta a estimação de uma função de transferência $G(z)$ conhecida. Essa planta foi simulada e, a sua saída $y(t)$, foi adicionado um ruído branco $e(t)$ de média nula e variância unitária. O processo ARMA que define $y(t)$ é dado por:

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = u(t-1) + 0.5u(t-2) + e(t)$$

Assim, é evidente que:

$$G_0(q) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$

Primeiramente, será obtida a ETFE a partir da seguinte formulação discutida na seção [Introdução]:

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

para $Y_N(\omega)$ e $U_N(\omega)$ as transformadas discretas de Fourier de $y(t)$ e $u(t)$, respectivamente. Em seguida, esse resultado será comparado com as suavizações $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ obtidas a partir da expressão:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 \hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega_0)|U_N(\xi)|^2 d\xi}$$

Para o janelamento, serão consideradas três funções dependentes do parâmetro γ:

- Janela de Bartlett: $W_\gamma(\omega) = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{\sin(\gamma\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right)^2$
- Janela de Parzen: $W_\gamma(\omega) = \frac{2(2 + \cos\omega)}{\pi\gamma^3}\left(\frac{\sin(\gamma\omega/4)}{\sin(\omega/2)}\right)^4$
- Janela de Hamming:
$W_\gamma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[0.5D_\gamma(\omega) + 0.25D_\gamma(\omega - \pi/\gamma) + 0.25D_\gamma(\omega + \pi/\gamma)\right], D_\gamma(\omega) = \frac{\sin((\gamma + 0.5)\omega)}{\sin(\omega/2)}$

Por sua vez, o parâmetro γ será definido em três valores: 10, 50 e 100. Em todas as formulações acima apresentadas, o parâmetro γ é proporcional à largura da janela $\Delta\omega_0$.

Por fim, a estimativa $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ será encontrada pela mesma integral acima destacada, porém considerando que $\lim_{N\to\infty} |U_N(\xi)|^2 \approx \Phi_u(\xi)$ para $\Phi_u(\xi)$ a TDF da correlação $R_u(\tau)$.

Em conclusão, essas três estimativas serão comparadas com a função de transferência $G(z)$ real conhecida.

Resultados e discussões

Para os experimentos descritos nesse relatório, foi utilizada uma entrada $u(t)$ como um sinal PRBS. Além disso, conforme apresentado na seção [Desenvolvimento], o sinal $e(t)$ é um ruído branco de média nula. Esses sinais simulados, acompanhados da saída $y(t)$ computada a partir da equação do processo ARMA, estão ilustrados na [Figura 1].

```
myInput
```

```
Warning: The PRBS signal delivered is the 1000 first values of a full sequence of length 1023.
```

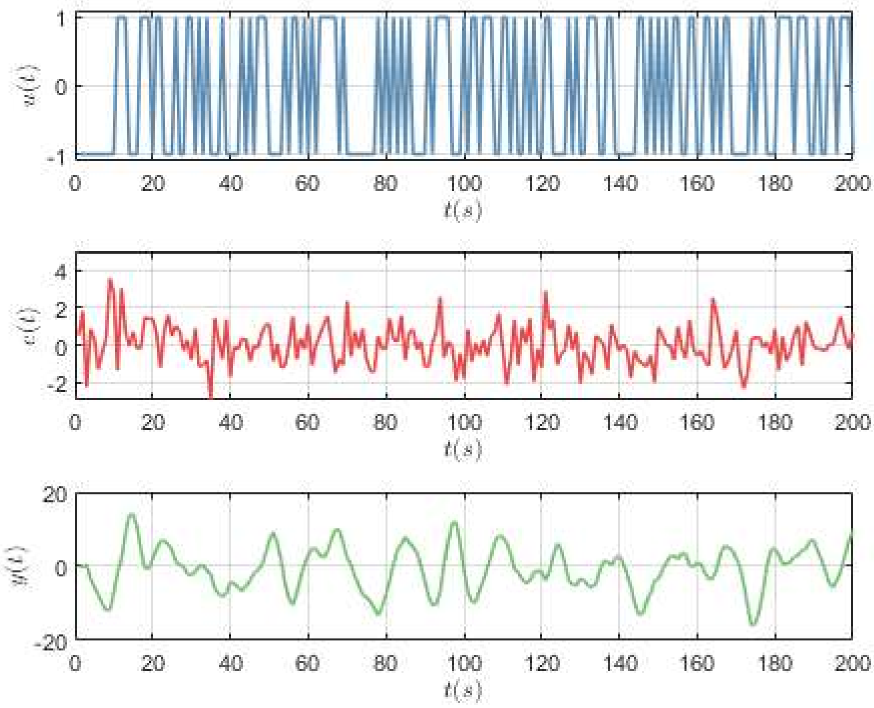

Figura 1: Sinal de entrada $u(t)$, ruído branco $e(t)$ e saída do processo $y(t)$.

Em seguida, as estimativas $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$ e $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ para a janela de Parzen e $\gamma \in \{10, 50, 100\}$ podem ser observados na Figura 2. Foram consideradas 1000 amostras, ou seja, $N = 1000$.

```
myParzen
```

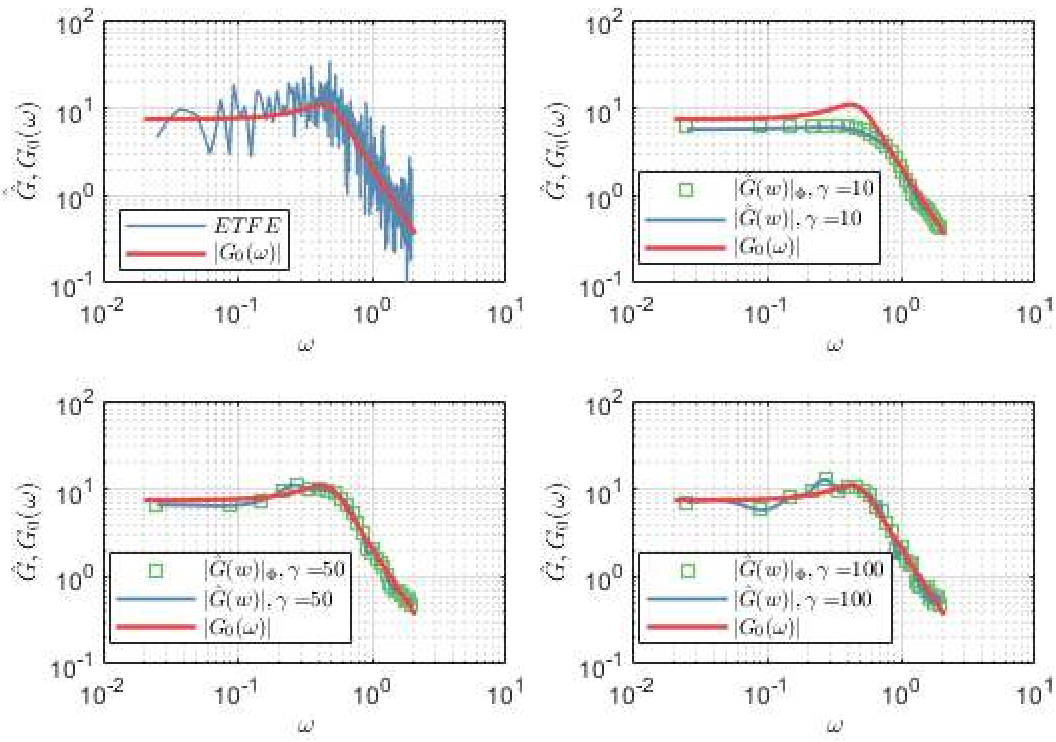

Figura 2: Estimativas $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$ e $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ para a janela de Parzen e $\gamma \in \{10, 50, 100\}$

Analisando a ETFE apresentada na Figura 2, é possível observar como essa estimativa é errática em relação à função conhecida $G_0(\omega)$. Por sua vez, examinando as estimativas suavizadas pósjanelamento $\widehat{G}_N(e^{j\omega})$, fica clara a melhor precisão em relação à função de transferência simulada quando comparada a ETFE. Por fim, a Figura 2 destaca a equivalência entre $\lim_{N\to\infty} |U_N(\xi)|^2 \approx \Phi_u(\xi)$, visto que $\widehat{G}(\omega)$ computado com base em $|U_N(\xi)|^2$ é equivalente a estimativa que emprega a aproximação $\Phi_u(\xi)$.

Agora, analisando o impacto dos vários valores de γ, é possível concluir que, com o aumento da largura da janela, há uma maior oscilação do polinômio estimado $\widehat{G}(\omega)$. Essa observação pode ser justificada de duas formas:

- Uma janela mais larga, isto é, maiores γ, pondera (com pesos não nulos) frequências mais distantes de ω_0 na obtenção de $\widehat{G}(\omega_0)$. Dessa forma, há uma menor variância da estimativa.
- Entretanto, uma janela mais larga considera estimativas de frequências cada vez mais longes de ω_0. Sendo assim, os valores esperados de $\widehat{G}(\omega_0)$ podem oscilar, gerando um alto BIAS.

Logo, é evidente que devemos procurar o ponto ótimo entre BIAS e variância de $\widehat{G}(\omega)$. A otimização dessa relação de compromisso é facilmente visualizada na Figura 2, para qual a melhor estimativa de $\widehat{G}(\omega)$ foi encontrada para $\gamma = 50$ (valor intermediário). É importante destacar que essa relação depende do número de amostras, uma vez que N influencia a resolução das TDFs.

Em seguida, as estimativas $\widehat{\widehat{G}}_N(e^{j\omega})$ e $\widehat{G}_N(e^{j\omega})$ para a janela de Bartlett e $\gamma \in \{10, 50, 100\}$ podem ser observados na Figura 3.

```
myBartlett
```

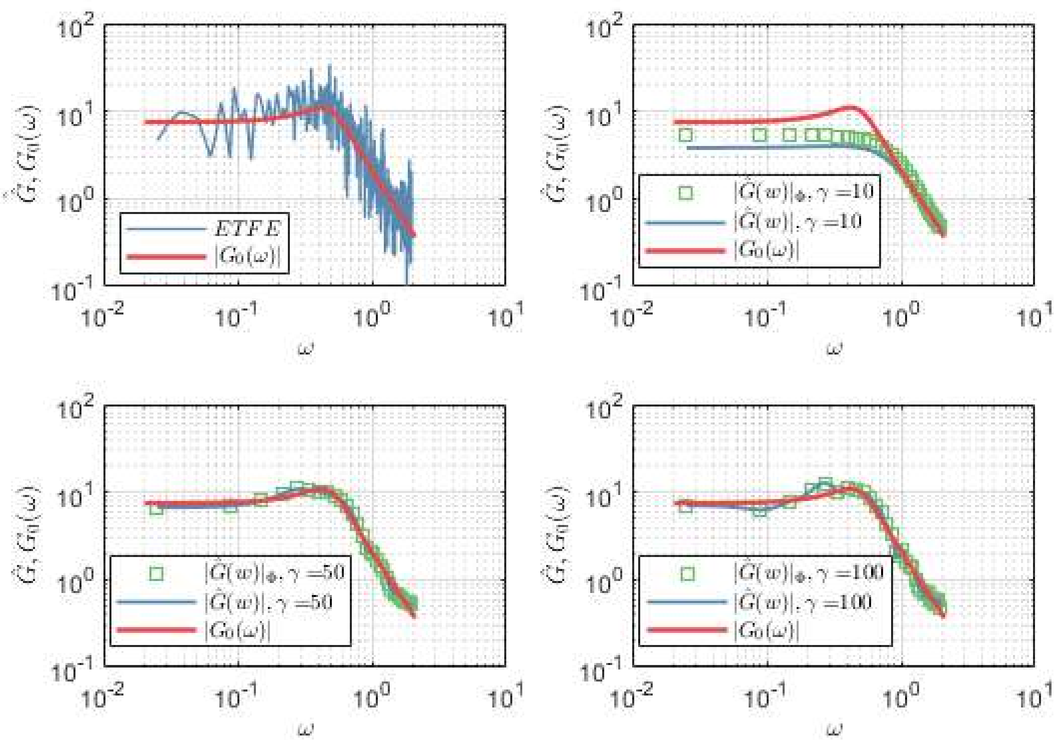

Figura 3: Estimativas $\widehat{\widehat{G}}_N(e^{j\omega})$ e $\widehat{G}_N(e^{j\omega})$ para a janela de Bartlett e $\gamma \in \{10, 50, 100\}$.

Comparando a Figura 2 com a Figura 3, é evidente a aproximação das estimativas para $\gamma = 50$ e $\gamma = 100$ para os dois tipos de janela. Todavia, para $\gamma = 10$, o janelamento de Bartlett não valida a aproximação $\lim_{N\to\infty} |U_N(\xi)|^2 \approx \Phi_u(\xi)$. Entretanto, esse erro pode ser minimizado aumentando o número de amostras N. Para tal, você (usuário), pode alterar o N no código `myInput` e re-executar as células dessa seção.

Por fim, para o janelamento de Hamming, encontra-se as estimativas ilustradas na Figura 4.

```
myHamming
```

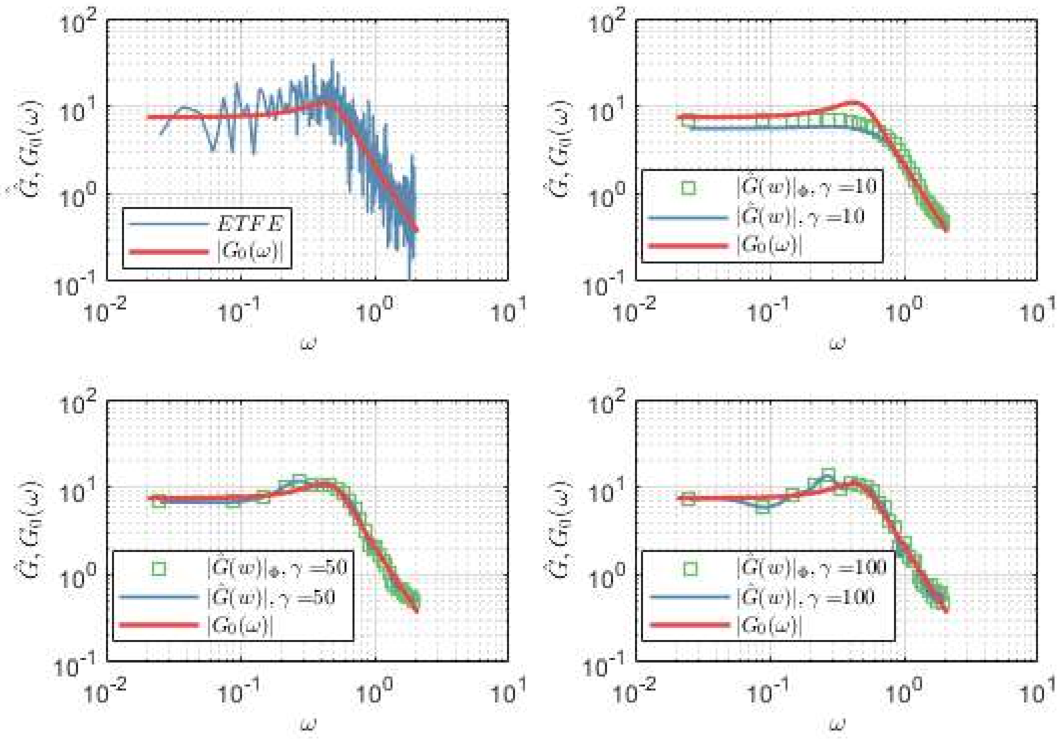

Figura 4: Estimativas $\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega})$ e $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ para a janela de Hamming e $\gamma \in \{10, 50, 100\}$.

Assim como para a formulação de Bartlett, para $\gamma = 10$, o janelamento de Hamming não valida a aproximação $\lim_{N\to\infty} |U_N(\xi)|^2 \approx \Phi_u(\xi)$. Esse erro pode, novamente, ser minimizado aumentando o número de amostras N.

Referências bibliográficas

[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User**. Pearson, 1998. 2nd edition, ISBN 9788131744956.