Relatório de Atividade - Estimação de parâmetros

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Estimação e Identificação de Sistemas 21.2

16 de agosto de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a identificação de modelos pelo método dos mínimos quadrados. Esse algoritmo determina uma estimação dos parâmetros de um modelo e é adequado para ***processos não-lineares ou variantes no tempo***.

Sumário

Fundamentação teórica

Com base em dados coletados, é possível identificar um modelo cujo comportamento é semelhante à um planta qualquer observada. Entretanto, é importante destacar que esse modelo deve ser anteriormente validado, uma vez que os dados coletados podem representar apenas um ponto de operação específico. Além disso, é importante garantir que os dados coletados sejam representativos, isto é, que o experimento realizado explore corretamente os valores reais de entrada da planta.

Nesse documento, serão identificados sistemas dinâmicos, isto é, plantas cuja saída atual dependem dos valores de entrada atual e de entrada e saída anteriores. Dessa forma, a saída $y(t)$ do processo pode ser representada como:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-1) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m)$$

O tempo de amostragem é considerado unitário, e os sistemas analisados serão sistemas discretos. A saída estimada do processo $\hat{y}(t)$ pode ser representado compactamente por:

$$\hat{y}(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) = \varphi^T(t)\theta$$

para $\varphi(t) = [-y(t-1) \dots - y(t-n) \;\; u(t-1) \dots u(t-m)]^T$ e $\theta = [a_1 \dots a_n \;\; b_1 \dots b_m]^T$. É evidente que o modelo sugerido para a identificação é linear. Dessa forma, a escolha de θ para que a diferença entre a saída estimada $\hat{y}(t)$ e real $y(t)$ seja nula é calculada conforme uma função de custo $V(\theta, t)$, que, para o método dos mínimos quadrados, é definida como o erro quadrático médio do valor real medido e o estimado em N amostras coletadas:

$$V(\theta, t) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[y(t) - \hat{y}(t)\right]^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{T}\left[y(t) - \varphi^T(t)\theta\right]^2$$

Para encontrar $\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} V(\theta, t)$, encontra-se $\hat{\theta}$ tal que $\partial V(\theta, t)/\partial\theta = 0$:

$$\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\left[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}\right] = 0 \rightarrow \sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t) = \sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\hat{\theta}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)\right]^{-1}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t) = P(t)\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t)$$

Logo, é evidente que $P(t)$ deve ser inversível. Se considerarmos que há um ruído branco de média nula $e(t)$ na saída $y(t)$, é possível considerar esse erro na modelagem ao reescrever a equação de estimação como:

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t)\theta_0 + e(t)$$

Logo, encontra-se que:

$$\hat{\theta}_0 = P(t)\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\left[y(t) + e(t)\right]$$

Sendo assim, o erro entre a estimativa $\hat{\theta}$ não considerando o erro na modelagem e θ_0 considerando o erro na modelagem é dado por:

$$\widetilde{\theta} = \widehat{\theta} - \theta_0 = P(t) \sum_{t=1}^{N} \varphi(t) e(t)$$

A esperança desse erro é então dado por:

$$E(\widetilde{\theta}) = P(t) \sum_{t=1}^{N} \varphi(t) E\left(e(t)\right) = 0$$

Logo, é possível concluir que a estimativa por mínimos quadrados para modelos com ruído branco na medição não possui viés.

Desenvolvimento, resultados e discussão

Com o intuito de verificar o processo de identificação de uma planta desconhecida pelo método dos mínimos quadrados, serão simulados dois modelos discretos δ_1 e δ_2 . Ambos equacionamentos consideram o erro com distribuição normal $e(t)$ na modelagem. A função de transferência para δ_1 e δ_2 são, respectivamente:

$$\delta_1 : Y = \frac{q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1}} U + \frac{q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1}} E$$

$$\delta_2 : Y = \frac{q^{-1}}{1 - 0.8q^{-1}} U + E$$

para $u(t)$ e $e(t)$ a entrada e erro, respectivamente. Ao transformar as funções de transferência dos sistemas δ_1 e δ_2 para o domínio do tempo, obtém-se:

$$\delta_1 : y(t) = 0.8y(t-1) + u(t-1) + e(t-1)$$

$$\delta_2 : y(t) = 0.8y(t-1) + u(t-1) + e(t) - 0.8e(t-1)$$

Para os experimentos realizados, foi considerado que tanto $u(t)$ como $e(t)$ são variáveis aleatórias de distribuição normal com média nula e variância unitária, ou seja, $u \sim N(0,1)$ e $e \sim N(0,1)$. Para $N = 200$ amostras, é possível gerar os sinais de entrada $u(t)$ e $e(t)$ e de saída $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para cada dos modelos δ_1 e δ_2 conforme ilustrado na Figura 1.

```
inputGen
```

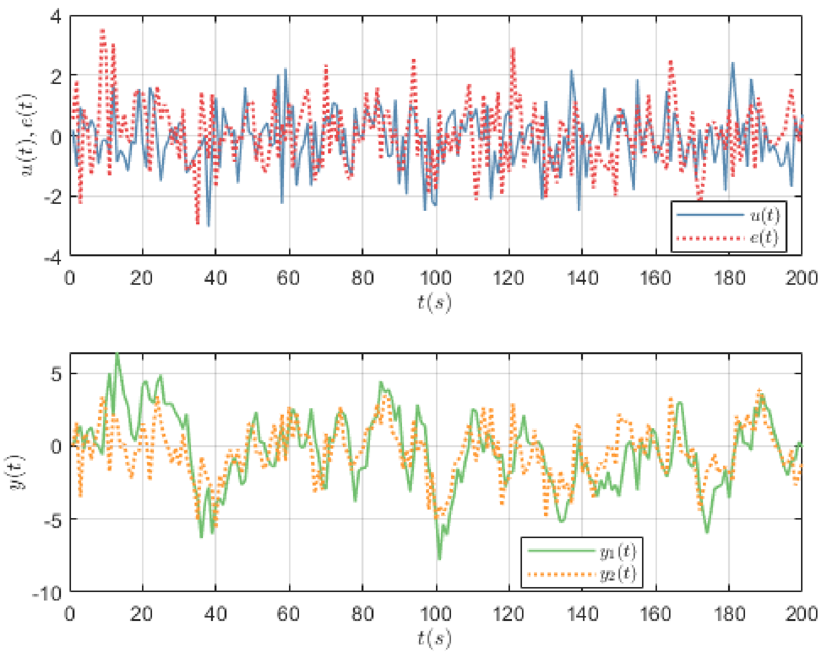

Figura 1: Sinais de entrada $u(t)$ e $e(t)$ e de saída $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dos modelos δ_1 e δ_2, respectivamente.

Em seguida, os parâmetros da função de transferência $H(q) = Y(q)/U(q)$ foram estimados utilizando o método dos mínimos quadrados descrito na seção anterior. Para os modelos δ_1 e δ_2, considerou-se um sistema parametrizado por duas constantes a e b conforme a função de transferência $H(q^{-1})$:

$$H(q^{-1}) = \frac{bq^{-1}}{1 + aq^{-1}}$$

Os parâmetros $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ estimados em função do tempo estão ilustrados na Figura 2.

```
estimateGen
```

```
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be
inaccurate. RCOND =  1.487760e-17.
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be
inaccurate. RCOND =  1.358781e-17.
```

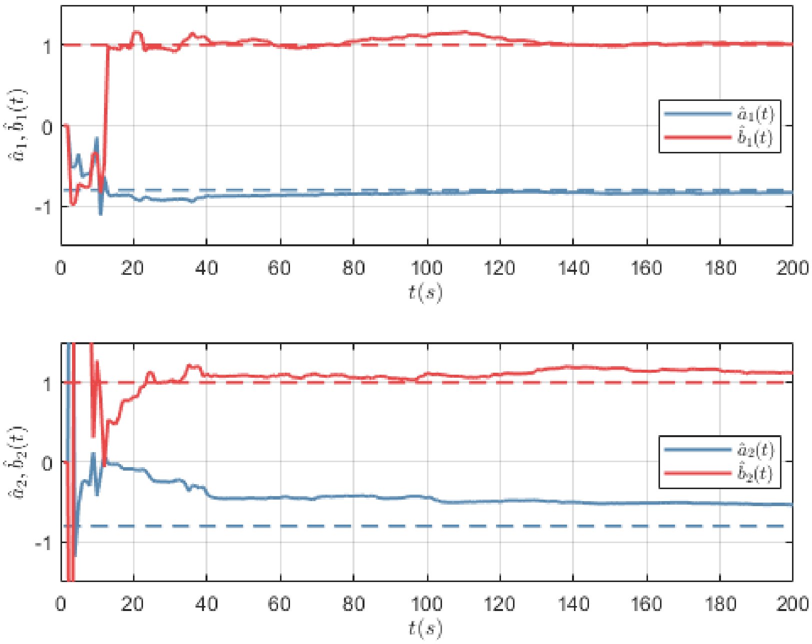

Figura 2: Parâmetros estimados $\hat{a}$ e $\hat{b}$ para os modelos simulados δ_1 e δ_2, respectivamente.

Observando a Figura 2, é evidente que os parâmetros estimados convergem para o valor real apenas para o modelo δ_1.

Além disso, é claro que δ_1 depende unicamente dos valores de erro $e(t-1)$ no instante anterior, enquanto o modelo δ_2 é influenciado pelo termo da amostra atual $e(t)$ e anterior $e(t-1)$. A covariância do sinal $z(t) = e(t) - 0.8e(t-1)$ é dada por:

$$\mathrm{Cov}\left[z(t), z(t-j)\right] = \mathrm{Cov}\left[e(t), e(t-j)\right] - 0.8\,\mathrm{Cov}\left[e(t-1), e(t-1-j)\right] - 0.8\,\mathrm{Cov}\left[e(t-1), e(t-j)\right] + 0.64\,\mathrm{Cov}\left[e(t), e(t-1-j)\right]$$

Como $e(t)$ e $e(t-1)$ possuem distribuição normal, é evidente que $\mathrm{Cov}\left[e(t), e(t-j)\right] = \mathrm{Cov}\left[e(t-1), e(t-1-j)\right] = 0$ para $j \neq 0$. Logo, tem-se que para $j \neq 0$:

$$\mathrm{Cov}\left[z(t), z(t-j)\right] = -0.8\,\mathrm{Cov}\left[e(t-1), e(t-j)\right] + 0.64\,\mathrm{Cov}\left[e(t), e(t-1-j)\right]$$

Para $z(t)$ ser um ruído gaussiano, a covariância desse sinal deve ser nula para qualquer $j \neq 0$. Entretanto, para $j = 1$, a expressão resulta em:

$$\mathrm{Cov}\left[z(t), z(t-1)\right] = -0.8\,\mathrm{Cov}\left[e(t-1), e(t-1)\right] = -0.8\,\lambda^2$$

considerando λ a variância do erro $e(t)$. Analogamente, o resultado encontrado para $j = -1$ é $\mathrm{Cov}\left[z(t), z(t-1)\right] = 0.64\,\lambda^2$. Dessa forma, o sinal $z(t)$ não é um ruído gaussiano. Observando a Figura 3, que ilustra a densidade espectral de potência dos sinais $u(t)$, $e(t)$ e $z(t)$, é evidente que o comportamento da soma $e(t) + e(t-1)$ difere dos ruídos brancos $u(t)$ e $e(t)$: teoricamente, é definido que a densidade espectral de potência de uma distribuição normal oscila em torno de uma constante, enquanto a DEP da soma de ruídos decaí com o aumento da frequência. Dessa forma, é confirmado que o sinal $z(t)$ de entrada do modelo δ_2 não é um ruído gaussiano.

```
psdEst
```

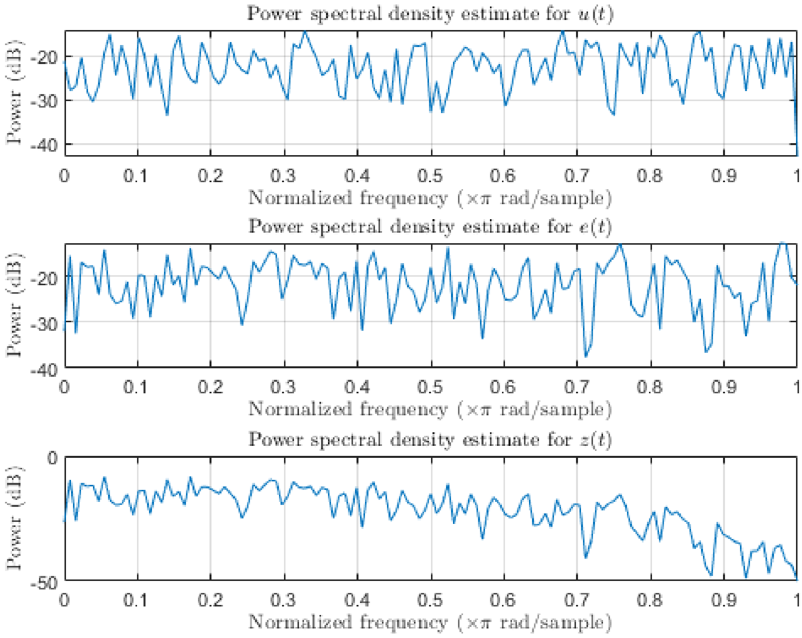

Figura 3: Densidade espectral de potência dos sinais $u(t)$, $e(t)$ e $z(t)$.

Em seguida, a covariância para o modelo δ_2 do erro $\widetilde{\theta} = \widehat{\theta} - \widehat{\theta}_0 = P(t)\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\left[e(t) - 0.8e(t-1)\right]$ é dada como:

$$
\begin{aligned}
R = E\left(\widetilde{\theta}\widetilde{\theta}^T\right) &= E\left[P(t)\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\left[e(t) - 0.8e(t-1)\right]\left[e(s) - 0.8e(s-1)\right]\varphi^T(s)P(s)\right] \\
&= P(t)\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(s)P(s)E\left\{\left[e(t) - 0.8e(t-1)\right]\left[e(s) - 0.8e(s-1)\right]\right\} \\
&= P(t)\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(s)P(s)\left(E\left[e(t)e(s)\right] - 0.8E\left[e(t)e(s-1)\right] - 0.8E\left[e(t-1)e(s)\right] + 0.64E\left[e(t-1)e(s-1)\right]\right)
\end{aligned}
$$

Sabendo que $E(XY) = \mathrm{Cov}(X,Y) + E(X)E(Y)$ para variáveis aleatórias X e Y, tem-se que:

- Como $e(t)$ e $e(t-1)$ são ruídos gaussianos de média nula, logo $E\left[e(t)e(s)\right] = E\left[e(t-1)e(s-1)\right] = \lambda^2\delta(0)$.
- No entanto, $E\left[e(t-1)e(s)\right] = \mathrm{Cov}\left[e(t-1)e(s)\right] = \lambda^2, \forall (t-1) = s$. Considerando que há N amostras, esse resultado equivale à $N-1$ impulsos de magnitude σ^2.
- Analogamente, $E\left[e(t)e(s-1)\right] = \mathrm{Cov}\left[e(t)e(s-1)\right] = \lambda^2, \forall (t) = s-1$.Considerando que há N amostras, esse resultado equivale à $N-1$ impulsos de magnitude σ^2.

Logo, considerando que a esperança está dentro de um somatório, obtém-se que:

$$
\begin{aligned}
R &= P(t)\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(s)P(s)\left(E\left[e(t)e(s)\right] - 0.8E\left[e(t)e(s-1)\right] - 0.8E\left[e(t-1)e(s)\right] + 0.64E\left[e(t-1)e(s-1)\right]\right) \\
&= P(t)\lambda^2[1.64 - 1.6(N-1)]\sum_{t,s=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(s)P(s) = P(t)\lambda^2(3.24 - 1.6N)
\end{aligned}
$$

Considerando que a covariância da entrada é denominada $M = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}P^{-1}(t)$, é possível reescrever a covariância do erro como $R = 2\lambda^2M^{-1}$. Logo:

$$
\lim_{N\to\infty} R = M^{-1}\lambda^2(3.24N^{-1} - 1.6)
$$

Logo, R depende do número de amostras coletadas e decaí conforme o aumento de N. Entretanto, o valor mínimo de $R \neq 0$ e é equivalente à $-1.6M^{-1}\lambda^2$. Dessa forma, a estimativa dos parâmetros por mínimos quadrados não é capaz de rejeitar o erro provocado pelo ruído $z(t) = e(t) - 0.8e(t-1)$. Conforme apresentado na bibliografia [1], esse resultado difere para o ruído gaussiano $e(t)$, já que, nesse caso, $R = \frac{\lambda^2}{N}M^{-1}$ e a covariância do erro tende a 0 ao passo que $N \to \infty$.

Referências bibliográficas

[1] L. LJUNG. **System Identification: Theory for the User**. Pearson, 1998. 2nd edition, ISBN 9788131744956.