Relatório de Atividade 11 - Identificação por Subespaço

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Estimação e Identificação de Sistemas 21.2

09 de Novembro de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever o método de identificação de um sistema desconhecido por meio de subespaço. Em seguida, serão discutidos quatros exemplos de ordens e sinais de excitação diferente aplicando o método em estudo.

Table of Contents

Introdução

Em contraste com as atividades anteriores, esse documento analisa a estimação de um sistema desconhecido a partir da identificação de um subespaço. Nesse método, o único parâmetro fornecido pelo usuário é a ordem do sistema. Em relação aos métodos parametrizáveis tradicionais, a técnica de identificação por subespaço possuí os seguintes benefícios:

- Não é extremamente sensível a perturbações pequenas nos sinais de entrada, uma vez que não trata com matrizes mal condicionadas (como $P(t)$ no algoritmo de mínimos quadrados);
- Não limita as dinâmicas representativas do modelo, uma vez que não requer parametrização especial para dinâmicas não controláveis, mas observáveis.

O objetivo final desse método é estimar os melhores parâmetros do sistema A, B, C e D para que o modelo estimado forneça saídas semelhantes à planta real. Para tal, considera-se conhecidas as entradas $u(n)$ e saídas $y(n)$ da planta estimada. A dinâmica do sistema, por sua vez, é dada por:

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$$

$$y(n) = Cx(n) + Du(n)$$

Unicidade da solução

A solução encontrada para as matrizes A, B, C e D não é única. Para demonstrar esse problema, considere a multiplicação de ambos os lados da equação de $x(n+1)$ por uma matriz inversível T:

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(2) & x(3) & \dots & x(p+1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(p) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(p) \end{bmatrix}$$

para I a matriz identidade. Pode-se reescrever a expressão acima como:

$$\begin{bmatrix} Tx(2) & Tx(3) & ... & Tx(p+1) \\ y(1) & y(2) & ... & y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Tx(1) & Tx(2) & ... & Tx(p) \\ u(1) & u(2) & ... & u(p) \end{bmatrix}$$

Ou seja, para um mesmo conjunto de entradas e saídas $u(t)$ e $y(t)$, é possível encontrar múltiplos estados $Tx(n)$ que representam a dinâmica planta desconhecida.

Matrizes de Hankel

Para desenvolver a matemática envolvida no processo de estimação, é importante conhecer as matrizes de bloco de Hankel, as quais representam os sinais $u(n)$ e $y(n)$ como um histórico de linhas:

$$Y_{1|i} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & ... & y(j) \\ y(2) & y(3) & ... & y(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(i) & y(i+1) & ... & y(i+j+1) \end{bmatrix}$$

$$U_{1|i} = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & ... & u(j) \\ u(2) & y(3) & ... & u(j+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i) & u(i+1) & ... & u(i+j+1) \end{bmatrix}$$

Dessa forma, é possível reescrever a dinâmica do sistema como:

$$Y_{1|i} = \Gamma_i X_i + H_i U_{1|i} \text{ (Eq. 1)}$$

$$X_{i+1} = A^i X_1 + \Delta_i U_{1|i} \text{ (Eq.2)}$$

para $X_i = \begin{bmatrix} x(i) & x(i_1) & ... & x(i+j-1) \end{bmatrix}$, $\Gamma_i = \begin{bmatrix} C & CA & ... & CA^{i-1} \end{bmatrix}^T$, $\Delta_i = \begin{bmatrix} A^{i-1}B & A^{i-2}B & ... & B \end{bmatrix}$ e

$$H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & ... & 0 \\ CB & D & 0 & ... & 0 \\ CAB & CB & D & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & ... & CB & D \end{bmatrix}.$$

Equacionamento de estimação

Inicialmente, isola-se X_i na equação (1):

$$X_i = \Gamma_i^* Y_{1|i} - \Gamma_i^* H_i U_{1|i}$$

para Γ_i^* a pseudo-inversa de Γ_i. Substituindo na equação (2):

$$X_{i+1} = A^i \Gamma_i^* Y_{1|i} - A^i \Gamma_i^* H_i U_{1|i} + \Delta_i U_{1|i} = L_i W_{1|i}$$

para $L_i = \begin{bmatrix} \Delta_i - A^i \Gamma_i^* H_i & A^i \Gamma_i^* \end{bmatrix}$ e $W_{1|i} = \begin{bmatrix} U_{1|i} & Y_{1|i} \end{bmatrix}^T$. Logo, é possível computar a relação entrada-saída no instante $i+1$ como:

$$Y_{i+1|2i} = \Gamma_i X_{i+1} + H_i U_{i+1|2i} = \Gamma_i L_i W_{1|i} + H_i U_{i+1|2i}$$

A partir da relação matricial acima, é evidente que Y pertence ao subespaço definido pelas linhas de U e do vetor linha X. Para desconsiderar a contribuição das entradas U na saída Y, é necessário projetar Y em um espaço perpendicular ao subespaço definido por U. Dessa forma:

$$Y_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^{\perp} = \Gamma_i L_i W_{1|i}/U_{i+1|2i}^{\perp} + H_i U_{i+1|2i}/U_{i+1|2i}^{\perp}$$

para $U_{i+1|2i}^{\perp}$ o espaço perpendicular ao plano definido pelos vetores linhas de $U_{i+1|2i}$ e $A/B^{\perp} = A\left(I - B^T(BB^T)^* B\right)$. Detalhes sobre a definição da operação de projeção podem ser encontrada na literatura referenciada [1]. Como $B/B^{\perp} = 0$, é possível reescrever a relação acima como:

$$Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i} = \Gamma_i L_i W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i}$$

Isolando $\Gamma_i L_i$, encontra-se:

$$\Gamma_i L_i = [Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i}][W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i}]^*$$

Multiplicando ambos os lados por $W_{1|i}$ e considerando que $X_{i+1} = L_i W_{1|i}$, tem-se:

$$\Gamma_i X_{i+1} = [Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i}][W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i}]^* W_{1|i}$$

Os termos na direita do equacionamento acima são conhecidos, enquanto os termos à esquerda devem ser estimados. Considerando $O_{i+1} = [Y_{i+1|2i}/U^{\perp}_{i+1|2i}][W_{1|i}/U^{\perp}_{i+1|2i}]^* W_{1|i}$, tem-se:

$$O_{i+1} = \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{i-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x(i) & x(i_1) & \dots & x(i+j-1) \end{bmatrix}$$

Observando a relação acima, é claro que cada linha de O é um subespaço dos vetores linhas de X. Em adição, a matriz O é composta por vetores linha linearmente dependentes. Logo, o posto de O é equivalente ao posto de X, o qual representa a ordem do sistema simulado j.

Os valores exatos de Γ_i e X_{i+1} são obtidos a partir da decomposição de valores singulares de O_{i+1}:

$$O_{i+1} = \Gamma_i X_{i+1} = PSV = PS^{1/2}TT^{-1}S^{1/2}V$$

para P e V, respectivamente, matrizes de mesma dimensão que C e X. Logo, tem-se que $X_{i+1} = T^{-1}S^{1/2}V$ e $\Gamma_i = PS^{1/2}T$. Como a estimativa do vetor de estados $\widehat{X}_{i+1}$ é proporcional em relação ao vetor real X_{i+1} por uma constante T, é claro que $\widehat{X}_{i+1} = TX_{i+1} = S^{1/2}V$.

A matriz $V|$ representa V sem a última coluna. Analogamente, $|V$ representa a matriz V sem a primeira coluna. Analiticamente, encontra-se que:

$$\widehat{X}_{i+2}| = S^{1/2}|V$$

$$\widehat{X}_{i+1}| = S^{1/2}V|$$

Logo, o espaço de estados da dinâmica do sistema estimado é dado por:

$$\begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+2}| \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+1}| \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}$$

Uma vez que se conhece $U_{i+1|2i}$, $Y_{i+1|2i}$, $\widehat{X}_{i+2}|$ e $\widehat{X}_{i+1}|$, é possível computar as estimativas $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ como:

$$\begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+2}| \\ Y_{i+1|2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{X}_{i+1}| \\ U_{i+1|2i} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}$$

Sendo assim, é evidente que as estimativas dos parâmetros do modelo não devem ser iguais aos valores verdadeiros, uma vez que a constante T é desconhecida. O que o método de identificação por subsespaços propõe é a recuperação de um sistema equivalente ao identificado, isto é, que produzirá a mesma saída quando exposto a uma mesma entrada.

Desenvolvimento

Para aplicar o método de identificação por subespaços, foram estimados quatro sistemas: um par de primeira ordem, um sistema de segunda ordem, e outro de terceira ordem. Analogamente, cada sistema foi excitado por um sinal $u(t)$ equivalente a uma onda quadrática ou um ruído gaussiano de média nula e variância untária. As especificações de cada exemplo foram dadas pela literatura referenciada [1]. Para a conclusão, serão analisados os polinômios estimados obtidos em relação ao valores reais simulados.

Caso deseje não visualizar os gráficos de entrada e saída estimadas e reais, defina a variável abaixo como 1.

```
verbose = 1;
addpath '.\vanoverschee\SUBFUN';
```

Exemplo 1: 1ª ordem e onda quadrática

Para o primeiro exercício, foi simulado o seguinte espaço de estados de primeira ordem:

$$x(k+1) = 0.75x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = 0.5x(k)$$

O sistema foi excitado por uma onda quadrada de magnitude unitária e período de 30 amostras, conforme ilustrado na Figura 1. Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de Introdução, foram obtidos os seguintes valores:

```
ex01
```

```
A = 0.7500
B = 0.4841
C = 0.3099
D = 1.8049e-16
mse = 6.8892e-33
```

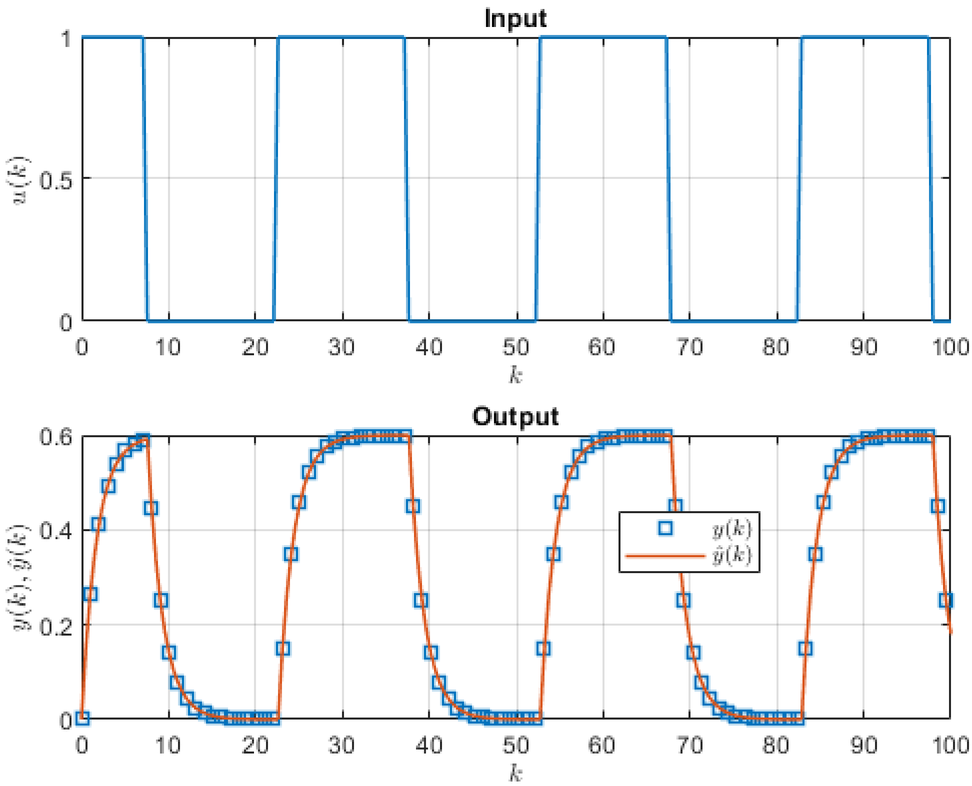

Figura 1: Sinal de excitação do sistema $u(k)$ e de saída estimado $\hat{y}(k)$ e real $y(k)$.

Comparando os valores acima expostos com os valores reais, é evidente que o os parâmetros convergem entre o sistema estimado e o real. Nesse caso, $T \approx 1$.

Exemplo 2: 3ª ordem e onda quadrática

Já para o segundo exercício, foi simulado o seguinte espaço de estados de terceira ordem:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Assim como no Exemplo 1, o sistema foi excitado por uma onda quadrada de magnitude unitária e período de 30 amostras. Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de Introdução, foram obtidos os seguintes valores:

```
ex02
```

```
A = 3×3
    0.8604   -0.1404    0.0114
   -0.1401    0.3794    0.1510
    0.0109    0.1537    0.3601
B = 3×1
    1.0385
    2.0443
   -0.4725
C = 1×3
    0.7863    0.3776   -0.0242
D = 1.0232e-15
mse = 3.2408e-30
```

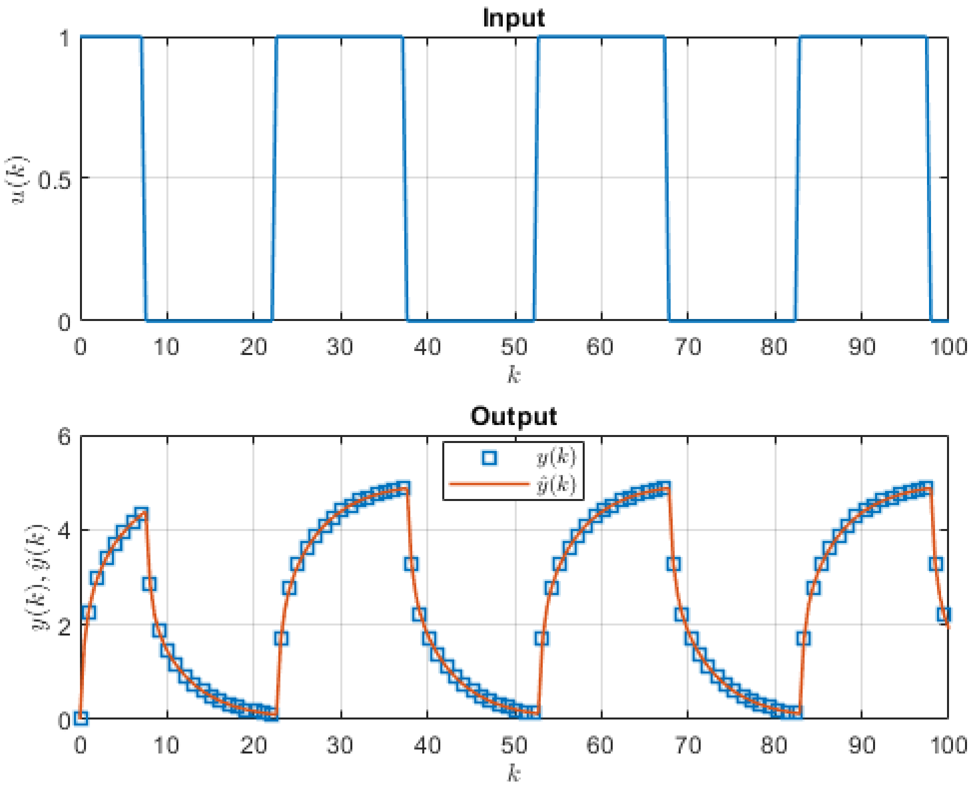

Figura 2: Sinal de excitação do sistema $u(k)$ e de saída estimado $\hat{y}(k)$ e real $y(k)$.

Comparando os valores acima apresentados e os valores reais de A, B, C e D, é evidente que a constante T é não unitária. Entretanto, observando a Figura 2, apesar de $\hat{A}$ não ser uma matriz diagonal, $\hat{B} \neq B$ e $\hat{C} \neq C$, a saída do sistema estimado $\hat{y}(k)$ equivale a saída real simulada $y(k)$. Ou seja, a planta estimada e o modelo estimado são sistemas equivalentes.

Exemplo 3: 1ª ordem e ruído branco

O terceiro exemplo é semelhante ao primeiro exercício, porém com um sinal de excitação $u(t)$ equivalente ao ruído branco, conforme ilustrado na Figura 3. Foi simulado o seguinte espaço de estados de primeira ordem:

$$x(k+1) = 0.85x(k) + 0.3u(k)$$

$$y(k) = -0.5x(k)$$

Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de Introdução, foram obtidos os seguintes valores:

```
ex03
```

```
A = 0.8500
B = 0.3383
C = -0.4434
D = 2.5485e-17
mse = 8.7651e-32
```

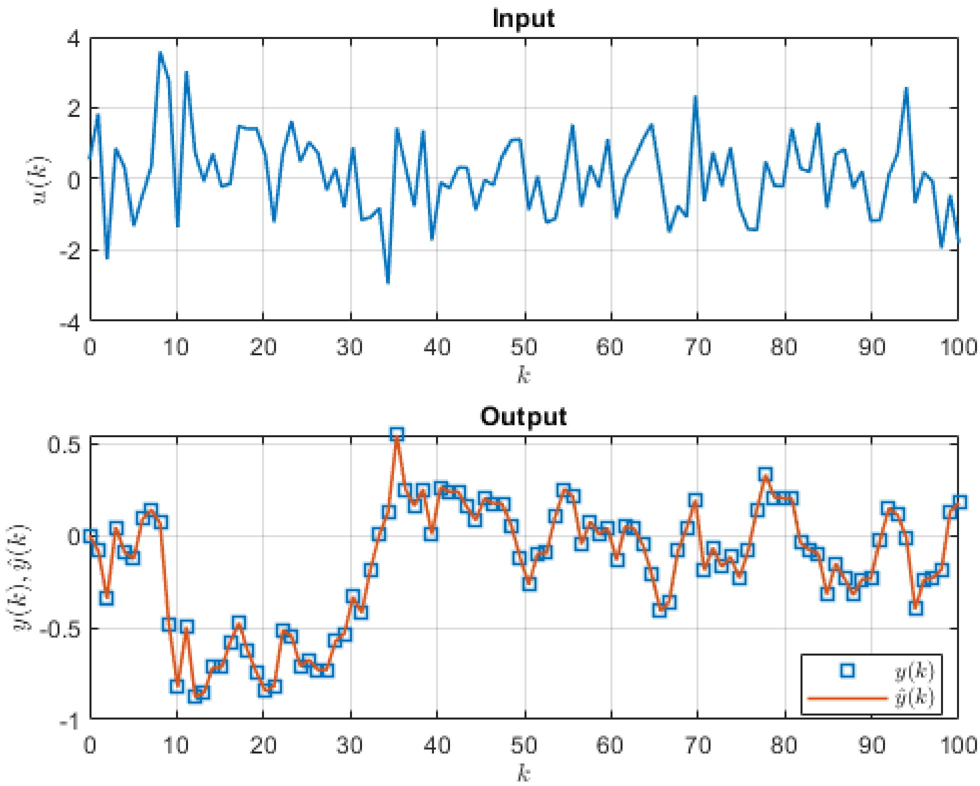

Figura 3: Sinal de excitação do sistema $u(k)$ e de saída estimado $\hat{y}(k)$ e real $y(k)$.

Assim como no Exemplo 1, os parâmetros estimados convergem para os valores reais. Nesse caso, $T \approx 1$. A variável `mse` representa *mean squared error*, ou seja, o erro médio quadrático, o qual é aproximadamente nulo.

Exemplo 4: 2ª ordem e ruído branco

Por fim, para o último exemplo, foi simulado o seguinte espaço de estados de segunda ordem:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Assim como no Exemplo 3, o sistema foi excitado por um ruído branco. Aplicando o método de identificação por subespaço descrito na seção de Introdução, foram obtidos os seguintes valores:

```
ex04
```

```
A = 2×2
    0.7595    0.1990
    0.1832    0.6405
B = 2×1
    0.5277
   -0.2615
C = 1×2
    0.6397   -0.2388
D = 5.7716e-17
mse = 1.2989e-31
```

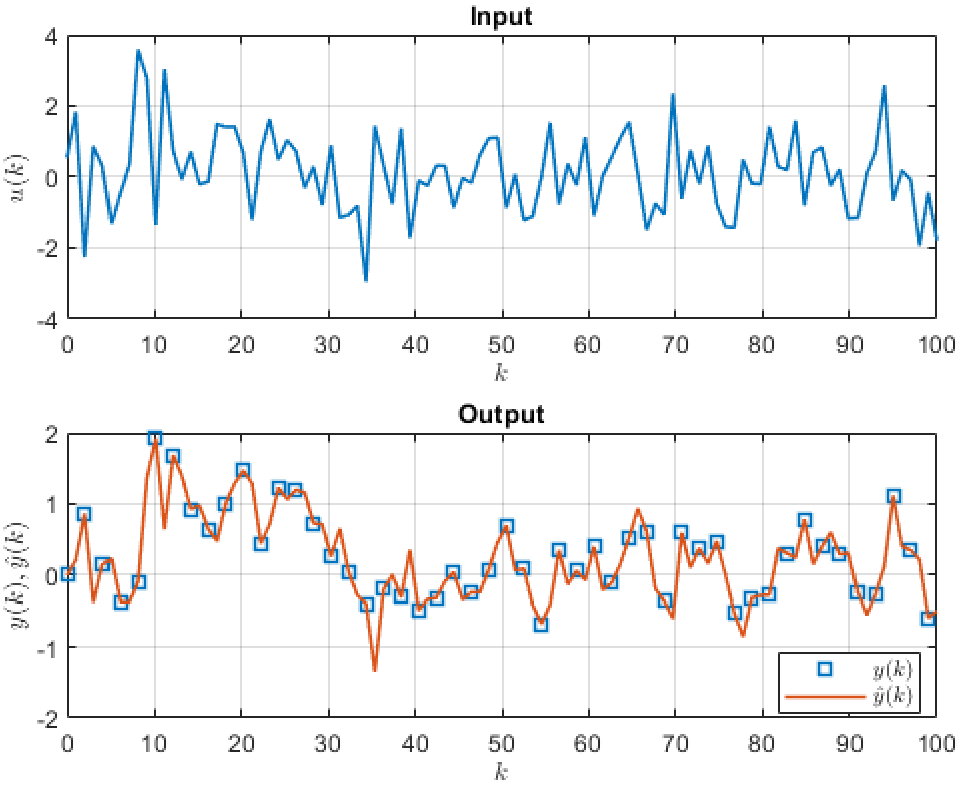

Figura 4: Sinal de excitação do sistema $u(k)$ e de saída estimado $\hat{y}(k)$ e real $y(k)$.

De modo semelhante ao Exemplo 2, é evidente que a constante T é não unitária. Entretanto, observando a Figura 4, a saída do sistema estimado $\hat{y}(k)$ equivale a saída real simulada $y(k)$. Ou seja, a planta estimada e o modelo estimado são sistemas equivalentes.

Referências bibliográficas

[1] VAN OVERSHEE, DE MOOR. **Subspace identification for linear systems**. Kluewer Academic, Boston, ISBN 978-1-4613-0465-4.