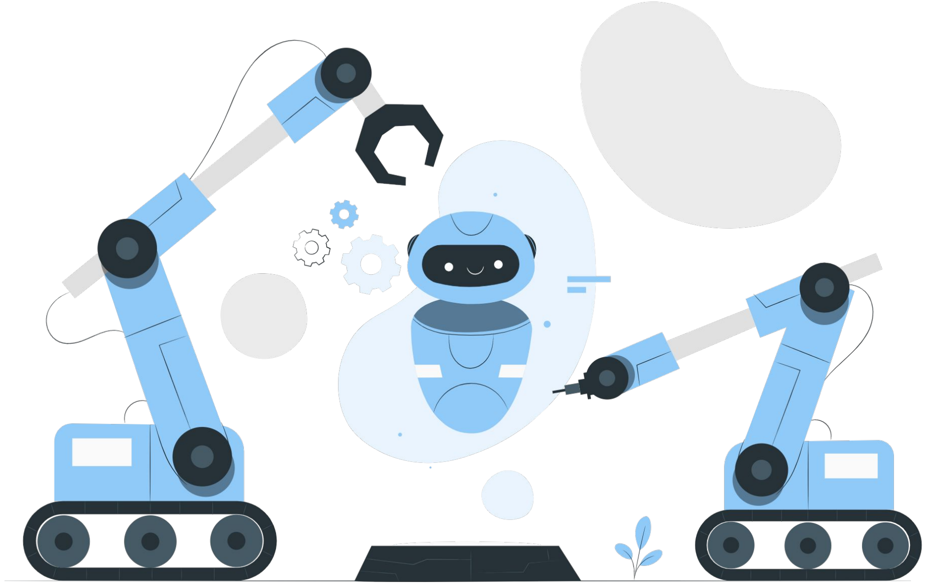
Estimação e identificação de sistemas

Atividade 5 a 8

Débora Oliveira

19 de Outubro de 2021



Sumário

Método dos mínimos quadrados

Estimar o valor de uma **resistência R_0** a partir de uma série de medições de corrente e tensão.

Processo estimado

$$u(t) = \underbrace{u_0(t)}_{R_0 i_0(t)} + \eta_u(t)$$

$$t = 1, 2, \ldots, N$$

$$N = 10, 100, 1000, 10000$$

$$\varphi^T = i_0(t)$$
$$\theta_0 = R_0$$
$$y(t) = u(t)$$

Função de custo

$$V(R) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[u(t) - Ri_0(t)]^2$$

$$\hat{R} = \arg\min_R V(R) = \sum_{t=1}^{N} u(t) i_0(t) / \sum_{t=1}^{N} i_0(t)^2$$

Método dos mínimos quadrados

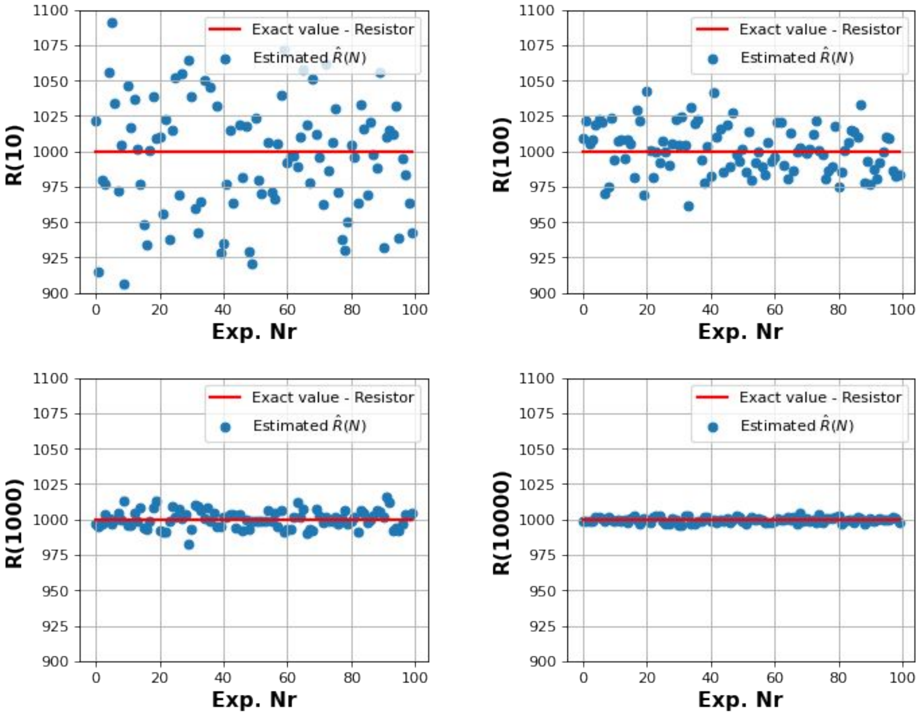


Fig. 1: Estimativa da resistência R para N = 10, 100, 1000 e 10000.

Método dos mínimos quadrados

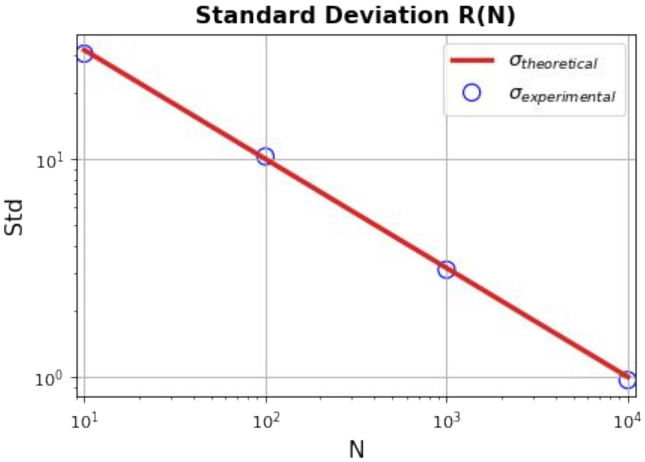


Fig. 2: Desvio padrão da estimativa R para N = 10, 100, 1000 e 10000.

Desvio padrão

$$\sigma_R = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sigma_u}{i_0}$$

Método dos mínimos quadrados

Estimar o valor de uma **resistência** R_0 a partir de uma série de medições de corrente e tensão.

Processo estimado

$$u(t) = \underbrace{u_0(t)}_{R_0 i_0(t)} + \eta_u(t)$$

$$t = 1, 2, \ldots, N$$

$$N = 2, 4, 8, 10^5$$

$$\varphi^T = i_0(t)$$
$$\theta_0 = R_0$$
$$y(t) = u(t)$$

Função de custo

$$V(R) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[u(t) - R i_0(t)]^2$$

$$\hat{R} = \arg\min_R V(R) = \sum_{t=1}^{N} u(t) i_0(t) / \sum_{t=1}^{N} i_0(t)^2$$

Método dos mínimos quadrados

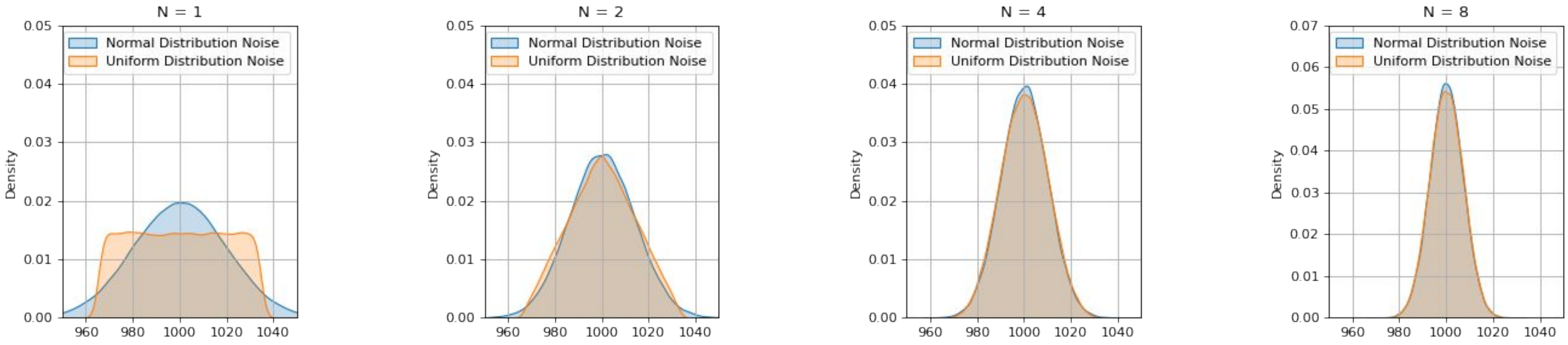


Fig. 3: Evolução da FDP das estimativas de R em função de N para um ruído aditivo gaussiano e uniformemente distribuído.

Método dos mínimos quadrados

Estimar o valor de uma **resistência** R_0 a partir de uma série de medições de corrente e tensão.

Processo estimado

$$u(t) = \underbrace{u_0(t)}_{R_0 i_0(t)} + \eta_u(t)$$

$$i(t) = i_0(t) + \eta_i(t)$$

$$N = 100$$

$$\varphi^T = i(t)$$

$$\theta_0 = R_0$$

$$y(t) = u(t)$$

Função de custo

$$V(R) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[u(t) - Ri(t)]^2$$

$$\hat{R} = \arg\min_R V(R) = \sum_{t=1}^{N} u(t)i(t) / \sum_{t=1}^{N} i(t)^2$$

Método dos mínimos quadrados

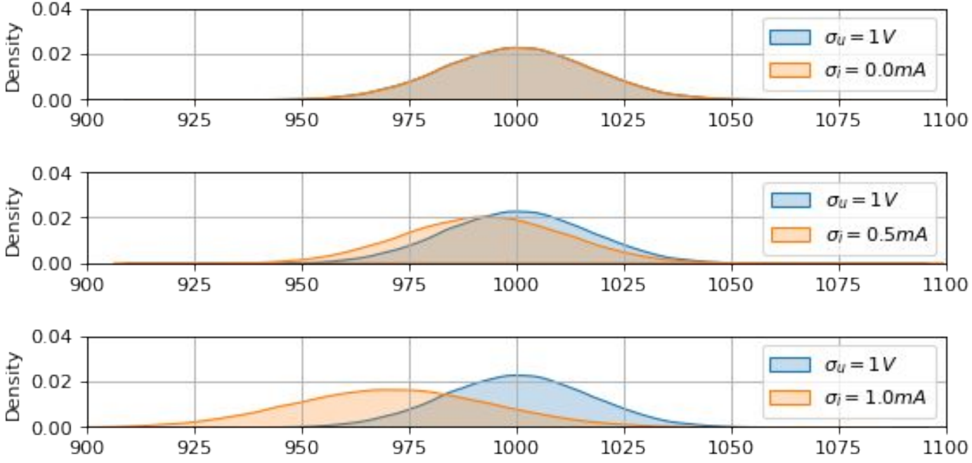


Fig. 4: Evolução da FDP das estimativas de R em função do ruído aditivo na medição de corrente.

Empirical transfer-function estimate

Estimar a função de transferência entre entrada e saída sem modelo de referência.

ETFE

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} \qquad Y_N(\omega) = G_0(e^{j\omega})U_N(\omega) + V_N(\omega) + R_N(\omega)$$

$$E\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{EV_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

$$E|V_N(\omega)|^2 = \Phi_v(\omega) + \rho(N)$$

$$\begin{cases} \rho(N) < C/N \\ |u(t)| \leq C \end{cases}$$

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k \hat{\hat{G}}_N(e^{2\pi jk/N})}{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k}$$

$$\alpha_k = \frac{|U_N(2\pi k/N)|^2}{\Phi_v(2\pi k/N)}$$

Empirical transfer-function estimate

Estimar a função de transferência entre entrada e saída sem modelo de referência.

Suavização

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k \hat{\hat{G}}_N(e^{2\pi jk/N})}{\sum_{k=k_1}^{k_2} \alpha_k}$$

$$\alpha_k = \frac{|U_N(2\pi k/N)|^2}{\Phi_v(2\pi k/N)}$$

$N \to \infty$

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} W_\gamma(\xi-\omega_0)\alpha(\xi)\hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi})d\xi}{\int_{\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} W_\gamma(\xi-\omega_0)\alpha(\xi)d\xi}$$

Funções de janelamento

Parzen

$$W_\gamma(\omega) = \frac{2(2+\cos\omega)}{\pi\gamma^3}\left(\frac{\sin(\gamma\omega/4)}{\sin(\omega/2)}\right)^4$$

Bartlett

$$W_\gamma(\omega) = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{\sin(\gamma\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right)^2$$

Hamming

$$W_\gamma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[0.5D_\gamma(\omega) + 0.25D_\gamma(\omega-\pi/\gamma) + 0.25D_\gamma(\omega+\pi/\gamma)\right]$$

$$D_\gamma(\omega) = \frac{\sin\left((\gamma+0.5)\omega\right)}{\sin(\omega/2)}$$

Empirical transfer-function estimate

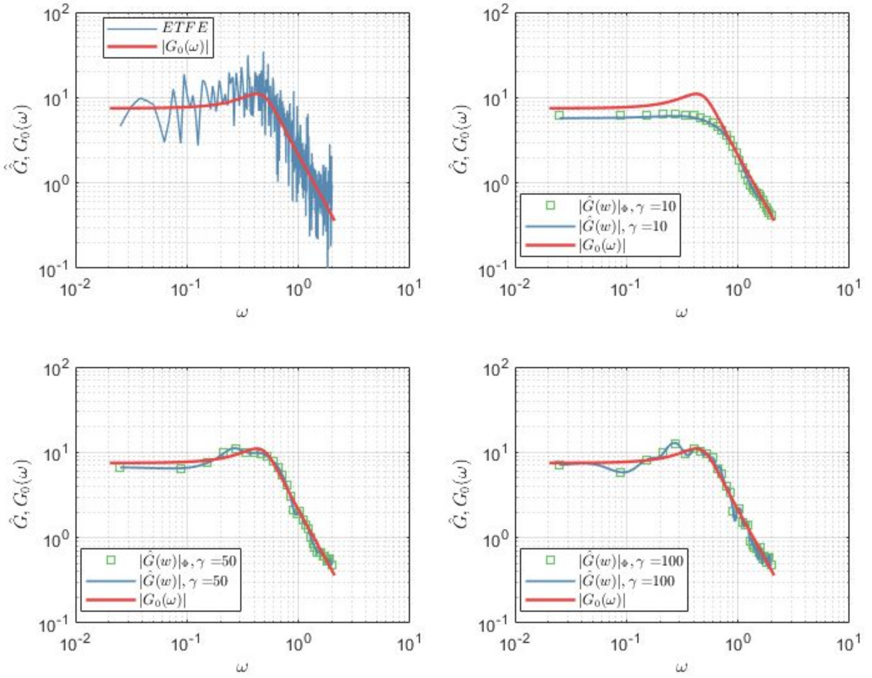


Fig. 5: ETFE e curva suavizada para a janela de Parzen e γ = 10, 50 e 100.

Variáveis instrumentais

Erro de predição deve ser, idealmente, independente dos dados em instantes anteriores.

Variáveis instrumentais

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\zeta(t)\varepsilon(t,\theta)=0$$

$$\hat{\theta}_{LS}^{IV}=\mathrm{sol}\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\zeta(t)\left[y(t)-\varphi^{T}(t)\theta\right]=0\right\}$$

Variáveis instrumentais

Erro de predição deve ser, idealmente, independente dos dados em instantes anteriores.

Modelo ARX

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\zeta(t)v(t) = 0$$

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \ldots + b_{n_b} u(t-n_b) + v(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\zeta(t) = K(q)[-x(t-1) \; -x(t-2) \ldots \; -x(t-n_a) \; u(t-1) \; u(t-2) \ldots \; u(t-n_b)]^T$$

$$N(q)x(t) = M(q)u(t)$$

Variáveis instrumentais

Modelo ARX

$$G_0(q) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \ \ -y(t-2) \ u(t-1) \ u(t-2)]^T$$
$$\theta = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]^T$$
$$\theta_0 = [-1.5 \ , \ 0.7 \ , \ 1.0 \ , \ 0.5]^T$$

```
theta_LS = 1×4
    -1.5433    0.7759    1.0800    0.5326
```

$$\zeta(t) = [-x(t-1) \ \ -x(t-2) \ u(t-1) \ u(t-2)]^T$$
$$x(t) = u(t-2)$$

```
theta_IV_c1 = 1×4
    -1.7205    1.1890    1.0126    0.2072
```

Variáveis instrumentais

Modelo ARX

$$G_0(q) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \;\; -y(t-2) \; u(t-1) \; u(t-2)]^T$$
$$\theta = [a_1 \; a_2 \; b_1 \; b_2]^T$$
$$\theta_0 = [-1.5 \, , \; 0.7 \, , \; 1.0 \, , \; 0.5]^T$$

```
theta_LS = 1×4
    -1.5433    0.7759    1.0800    0.5326
```

$$\zeta(t) = [-x(t-1) \;\; -x(t-2) \; u(t-1) \; u(t-2)]^T$$
$$x(t) = 1.543x(t-1) - 0.776x(t-2) + 1.08u(t-1) + 0.533u(t-1)$$

```
theta_IV_c2 = 1×4
    -1.5938    0.8439    1.0796    0.4706
```

Variáveis instrumentais

Modelo ARX

$$G_0(q) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1)\ \ -y(t-2)\ u(t-1)\ u(t-2)]^T$$
$$\theta = [a_1\ a_2\ b_1\ b_2]^T$$
$$\theta_0 = [-1.5\ ,\ 0.7\ ,\ 1.0\ ,\ 0.5]^T$$

```
theta_LS = 1×4
    -1.5433    0.7759    1.0800    0.5326
```

$$\zeta(t) = 1.5\zeta(t-1) - 0.7\zeta(t-1) + [-x(t-1)\ \ -x(t-2)\ u(t-1)\ u(t-2)]^T$$
$$x(t) = 1.5x(t-1) - 0.7x(t-2) + u(t-1) + 0.5u(t-1)$$

```
theta_IV_c3 = 1×4
    -1.6256    0.8665    1.1805    0.2358
```

Variáveis instrumentais

Modelo ARX

$$G_0(q) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

```
theta_LS = 1×4
    -1.4986    0.7131    1.0533    0.5010
```

```
theta_IV_c1 = 1×4
    -1.4282    0.6171    1.0556    0.5705
```

```
theta_IV_c2 = 1×4
    -1.5111    0.7269    1.0524    0.4880
```

```
theta_IV_c3 = 1×4
    -1.5509    0.7587    1.0856    0.3199
```

Estimação recursiva de parâmetros

Modelo *Output-Error*

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t)$$

Modelo ARX

$$F(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

Mínimos quarados

$$\hat{B}_N(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_n q^{-n}$$
$$\hat{F}_N(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \ldots + f_m q^{-m}$$

$$\begin{cases} y_F(t) = \hat{F}_N^{-1}(q)y(t) \\ u_F(t) = \hat{F}_N^{-1}(q)u(t) \end{cases}$$

Modelo ARX

$$F(q)y_F(t) = B(q)u_F(t) + e_F(t)$$

Mínimos quarados

$$\hat{B}_N(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_n q^{-n}$$
$$\hat{F}_N(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \ldots + f_m q^{-m}$$

Critério de parada

$$-\beta \leq \hat{F}_N^{(i)} - \hat{F}_N^{(i-1)} \leq \beta$$
$$-\beta \leq \hat{B}_N^{(i)} - \hat{B}_N^{(i-1)} \leq \beta$$

$$\varepsilon_F(t,\theta) = L(q)\varepsilon(t,\theta), \; L(q) = F(q)$$

Estimação recursiva de parâmetros

Método Newton-Raphson

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \hat{\theta}^{(i)} - \left[f_N'(\hat{\theta}^{(i)}, Z^N)\right]^{-1} f_N(\hat{\theta}^{(i)}, Z^N)$$

$$f_N = 1/N \sum_{t=1}^{N} \zeta(t,\theta)\alpha(\varepsilon(t,\theta))$$

$$f_N'(\hat{\theta}^{(i)}, Z^N) = R_N^{(i)}$$

$$R_N^{(i)} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[\zeta_\theta'(t,\theta)\alpha(\varepsilon(t,\theta)) + \zeta(t,\theta)\alpha_\varepsilon'(\varepsilon(t,\theta))\psi(t,\theta)\right]$$

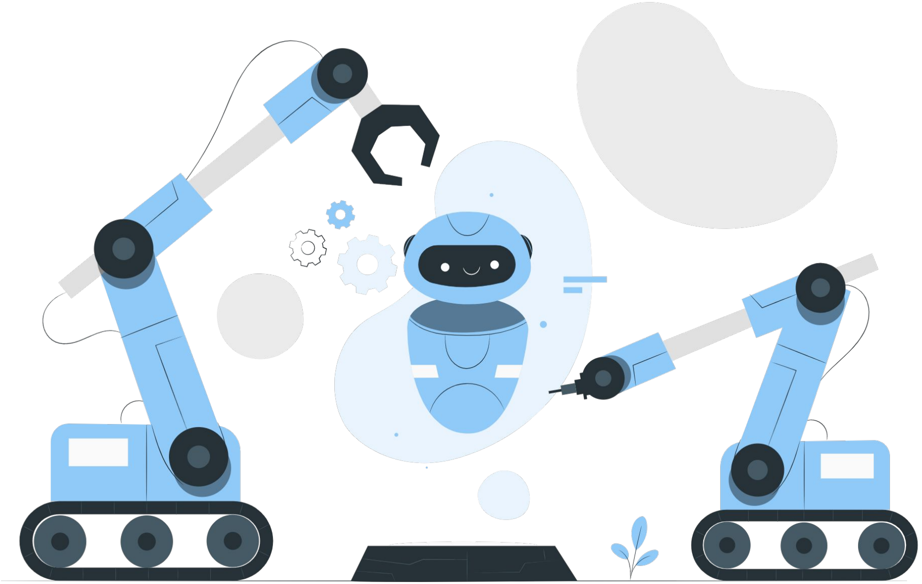
$$f_N(\hat{\theta}^{(N)}, Z^N) = f_{N-1}(\hat{\theta}^{(N-1)}, Z^{N-1}) + \frac{1}{N}\left[\zeta(N,\hat{\theta}^{(N-1)})\alpha(\varepsilon(N,\hat{\theta}^{(N-1)})) - f_{N-1}(\hat{\theta}^{(N-1)}, Z^{N-1})\right]$$

$$= \frac{1}{N}\zeta(N,\theta)\alpha(\varepsilon(N,\theta))$$

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \hat{\theta}^{(i)} - \tfrac{1}{N}[R_N]^{-1}\zeta(N,\theta)\alpha(\varepsilon(N,\theta))$$

Estimação e identificação de sistemas

Atividade 5 a 8



Débora Oliveira

19 de Outubro de 2021