Relatório de Atividade 03

Débora Nunes Pinto de Oliveira

Prof. Antonio Marcus, Estimação e Identificação de Sistemas 21.2

31 de agosto de 2021

Esse documento tem por objetivo descrever a caracterização da função de transferência de um sistema a partir do seu espectro. Em adição, será desenvolvido um algoritmo iterativo para a obtenção da autocovariância de um processo também a partir de seu espectro.

Table of Contents

Resolver o exercício 2E.1 do livro "System Identification: Theory for the User".

Um processo estocástico estacionário $v(t)$ que possui um espectro racional $\Phi_v(\omega)$ pode ser representado como $v(t) = H(q)e(t)$ para $e(t)$ um ruído branco de média nula e covariância λ. A função de transferência $H(q)$ pode ser representada como:

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}, \text{ para } C(q) = c_0 + c_1q^{-1} + \ldots c_{n_c}q^{-n_c} \text{ e } A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \ldots a_{n_a}q^{-n_a}$$

Logo, o modelo genérico do distúrbio $v(t)$ é:

$$v(t) + a_1v(t-1) + \ldots + a_{n_a}v(t-n_a) = c_0e(t) + c_1e(t-1) + \ldots c_{n_c}e(t-n_c)$$

Se $n_c = 0$, a expressão acima é transformada em um modelo autorregressivo (AR), ou seja:

$$v(t) + a_1v(t-1) + \ldots + a_{n_a}v(t-n_a) = c_0e(t)$$

Caso $n_a = 0$, encontra-se um modelo de média móvel (MA), isto é:

$$v(t) = c_0e(t) + c_1e(t-1) + \ldots c_{n_c}e(t-n_c)$$

Sendo assim, essa modelagem do distúrbio é nomeada ARMA. A notação desse tipo de processo é dada por (n_a, n_c). Supondo $H(z)$ uma função de um processo ARMA(1,1), é claro que:

$$H(z) = \frac{c_1z + c_0}{a_1z + a_0} = \frac{C(z)}{A(z)}$$

e substituindo $z = e^{j\omega}$, tem-se que:

$$H(z) = \frac{c_1e^{j\omega} + c_0}{a_1e^{j\omega} + a_0}$$

Para encontrar $|H(e^{j\omega})|^2$, é necessário encontrar separadamente o valor absoluto do numerador $C(e^{j\omega})$ e do denominador $A(e^{j\omega})$. Logo:

$$\begin{cases} |C(e^{j\omega})|^2 = |c_1e^{j\omega} + c_0|^2 = |\sqrt{(c_1\cos\omega + c_0)^2 + c_1\sin^2\omega}|^2 = (c_1)^2 + (c_0)^2 + 2c_1c_0\cos\omega \\ |A(e^{j\omega})|^2 = |a_1e^{j\omega} + a_0|^2 = |\sqrt{(a_1\cos\omega + a_0)^2 + a_1\sin^2\omega}|^2 = (a_1)^2 + (a_0)^2 + 2a_1a_0\cos\omega \end{cases} \rightarrow |H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(c_1)^2 + (c_0)^2 + 2c_1c_0\cos\omega}{(a_1)^2 + (a_0)^2 + 2a_1a_0\cos\omega}$$

Tendo em vista que $\Phi_v(\omega) = \lambda|H(e^{j\omega})|^2$, é possível determinar os coeficientes c_0, c_1, a_1 e a_0 a partir da expressão do espectro. Nesse estudo, o espectro $\Phi_v(\omega)$ é dado por:

$$\Phi_v(\omega) = \frac{1.25 + \cos\omega}{1.64 + 1.6\cos\omega}$$

Comparando $\Phi_v(\omega)/\lambda$ com $|H(e^{j\omega})|^2$, encontra-se que:

$$\begin{cases} (c_1)^2 + (c_0)^2 + 2c_1c_0\cos\omega &= 1.25\lambda^{-1} &+ \lambda^{-1}\cos\omega \\ (a_1)^2 + (a_0)^2 + 2a_1a_0\cos\omega &= 1.64 &+ 1.6\cos\omega \end{cases}$$

Solucionando para o polinômio do denominador, obtém-se que:

$$\begin{cases} 2a_1a_0 & = & 1.6 \\ (a_1)^2 + (a_0)^2 & = & 1.64 \end{cases}$$

Isolando $a_1 = 0.8/a_0$ e substituindo na segunda equação, tem-se que:

$$(a_0)^4 - 1.64(a_0)^2 + 0.64 = 0$$

As quatro soluções (a_0, a_1) possíveis para a expressão acima são $(1, 0.8)$, $(-1, -0.8)$, $(0.8, 1)$ e $(-0.8, -1)$. Solucionando para o polinômio do numerador, obtém-se que:

$$\begin{cases} 2c_1c_0 & = & \lambda^{-1} \\ (c_1)^2 + (c_0)^2 & = & 1.25\lambda^{-1} \end{cases}$$

Isolando $c_1 = (0.5\lambda^{-1})/c_0$ e substituindo na segunda equação, tem-se que:

$$(c_0)^4 - 1.25\lambda^{-1}(c_0)^2 + 0.25\lambda^{-2} = 0$$

As quatro soluções (c_0, c_1) possíveis para a expressão acima são $(-\sqrt{\lambda^{-1}}/2, -\sqrt{\lambda^{-1}})$, $(\sqrt{\lambda^{-1}}/2, \sqrt{\lambda^{-1}})$, $(\sqrt{\lambda^{-1}}, \sqrt{\lambda^{-1}}/2)$ e $(-\sqrt{\lambda^{-1}}, -\sqrt{\lambda^{-1}}/2)$.

Definindo $a_1 = 1$, tem-se que $a_0 = 0.8$. Analogamente, para $c_1 = \lambda^{-0.5}$, tem-se que $c_0 = 0.5\lambda^{-0.5}$. Dessa forma, a função de transferência $H(z)$ pode ser reescrita como:

$$H(z) = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{(\lambda^{-0.5})z + 0.5\lambda^{-0.5}}{z + 0.8} = \lambda^{-0.5}\left[\frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 0.8z^{-1}}\right]$$

Considerando que $z^{-1}Y(z) \leftrightarrow y(t-1)$, é possível escrever a expressão de $v(t)$ com relação a $e(t)$ como:

$$v(t) + 0.8v(t-1) = \lambda^{-0.5}e(t) + 0.5\lambda^{-0.5}e(t-1)$$

Isolando $v(t)$ na expressão acima, obtém-se:

$$v(t) = \lambda^{-0.5}e(t) + 0.5\lambda^{-0.5}e(t-1) - 0.8v(t-1)$$

Resolver o exercício 2E.7 do livro "System Identification: Theory for the User".

Um processo $y(t)$ é modelado conforme a expressão abaixo:

$$y(t) = -ay(t-1) + bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$$

Pode-se substituir $y(k) = y_k$, $e(k) = e_k$ e $u(k) = u_k$ para facilitar a notação. Multiplicando a expressão acima por y_t, y_{t-1}, e_t, e_{t-1}, u_t e u_{t-1} e aplicando o operador de expectativa matemática (esperança), obtém-se as seguintes covariâncias:

$$\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_ty_t) &&= -aE(e_ty_{t-1}) + bE(e_tu_{t-1}) + E(e_te_t) + cE(e_te_{t-1}) \\
R_{ey}(1) &= E(e_{t-1}y_t) &&= -aE(e_{t-1}y_{t-1}) + bE(e_{t-1}u_{t-1}) + E(e_{t-1}e_t) + cE(e_{t-1}e_{t-1}) \\
R_{uy}(0) &= E(u_ty_t) &&= -aE(u_ty_{t-1}) + bE(u_tu_{t-1}) + E(u_te_t) + cE(u_te_{t-1}) \\
R_{uy}(1) &= E(u_{t-1}y_t) &&= -aE(u_{t-1}y_{t-1}) + bE(u_{t-1}u_{t-1}) + E(u_{t-1}e_t) + cE(u_{t-1}e_{t-1}) \\
R_y(0) &= E(y_ty_t) &&= -aE(y_ty_{t-1}) + bE(y_tu_{t-1}) + E(y_te_t) + cE(y_te_{t-1}) \\
R_y(1) &= E(y_{t-1}y_t) &&= -aE(y_{t-1}y_{t-1}) + bE(y_{t-1}u_{t-1}) + E(y_{t-1}e_t) + cE(y_{t-1}e_{t-1})
\end{aligned}$$

Considera-se que:

- $E(e_iy_k) = 0, \forall i > k$;
- $E(u_iy_k) = 0, \forall i \geq k$;
- Os sinais $e(t)$ e $u(t)$ são ruídos gaussianos de média nula, isto é, $E(e_ie_k) = \lambda$ e $E(u_iu_k) = \mu$ para $i = k$;
- Os distúrbios $e(t)$ e $u(t)$ são independentes, ou seja, $E(e_iu_k) = E(e_i)E(u_k) = 0, \forall k$.

Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_ty_t) &&= E(e_te_t) \\
R_{ey}(1) &= E(e_{t-1}y_t) &&= -aE(e_{t-1}y_{t-1}) + cE(e_{t-1}e_{t-1}) = -aR_{ey}(0) + cE(e_te_t) \\
R_{uy}(0) &= E(u_ty_t) &&= 0 \\
R_{uy}(1) &= E(u_{t-1}y_t) &&= bE(u_{t-1}u_{t-1}) = bE(u_tu_t) \\
R_y(0) &= E(y_ty_t) &&= -aE(y_ty_{t-1}) + bE(y_tu_{t-1}) + E(y_te_t) + cE(y_te_{t-1}) = -aR_y(1) + bR_{uy}(1) + R_{ey}(0) + cR_{ey}(1) \\
R_y(1) &= E(y_{t-1}y_t) &&= -aE(y_{t-1}y_{t-1}) + cE(y_{t-1}e_{t-1}) = -aR_y(0) + cR_{ey}(0)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores nas equações de $R_{ey}(\tau)$ e $R_{uy}(\tau)$ para $\tau = 0, 1$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
R_{ey}(0) &= E(e_t e_t) = \lambda \\
R_{ey}(1) &= -aR_{ey}(0) + cE(e_t e_t) = \lambda(c-a) \\
R_{uy}(0) &= 0 \\
R_{uy}(1) &= bE(u_t u_t) = b\mu
\end{aligned}
$$

Em seguida, calculando $R_y(\tau)$ para $\tau = 0, 1$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
R_y(0) &= \gamma_0 &= -a\gamma_1 + k_0 \\
R_y(1) &= \gamma_1 &= -a\gamma_0 + k_1
\end{aligned}
$$

para $k_0 = b^2\mu + \lambda + c\lambda(c-a)$ e $k_1 = c\lambda$. Substituindo γ_1 da equação de $R_y(1)$ na equação de γ_0, tem-se:

$$\gamma_0 = -a\left[-a\gamma_0 + k_1\right] + k_0 = a^2\gamma_0 - ak_1 + k_0$$

Isolando γ_0, obtém-se que:

$$\gamma_0 = \frac{-ak_1 + k_0}{1-a^2} = \frac{-a(c\lambda) + b^2\mu + \lambda + c\lambda(c-a)}{1-a^2} = \frac{b^2\mu + \lambda + c^2\lambda - 2ac\lambda}{1-a^2}$$

Logo, substituindo em γ_1, tem-se que:

$$\gamma_1 = -a\left[\frac{-ak_1 + k_0}{1-a^2}\right] + k_1 = \frac{a^2k_1 - ak_0 + k_1(1-a^2)}{1-a^2} = \frac{\lambda(a^2c - a - ac^2 + c) - ab^2\mu}{1-a^2}$$

Implementar a solução proposta no capítulo "Parametric Optimization" do livro "Introduction to Stochastic Control Theory".

A expressão da covariância de um sinal $v(t) = H(q)e(t)$ pode ser diretamente obtida a partir da inversão da transformada de Fourier de tempo discreto sobre o espectro do sinal $\Phi_v(\omega)$:

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_v(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

Seja o sinal $e(t)$ um ruído gaussiano de média nula e covariância λ, o espectro $\Phi_v(\omega)$ pode ser escrito como:

$$\Phi_v(\omega) = \lambda|H(e^{j\omega})|^2$$

para $H(z) = C(z)/A(z)$, na qual $C(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + ... + c_n$ e $A(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_n$. Considerando que $z = e^{j\omega}$ e substituindo $\Phi_v(\omega)$ na expressão da covariância, tem-se:

$$R_v(\tau) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{C(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})}\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{\lambda}{2\pi}\oint \frac{C(z)C(1/z)}{A(z)A(1/z)}z^{\tau-1}dz$$

A autocovariância é então dada por:

$$R_v(0) = \frac{\lambda}{2\pi}\oint \frac{C(z)C(1/z)}{A(z)A(1/z)}\frac{dz}{z}$$

Se o polinômio $A(z)$ é estável, a integral acima sempre irá existir, uma vez que todos os zeros do denominador estarão dentro do círculo unitário. Nesse caso, sempre é possível encontrar uma função de transferência de resposta ao impulso $H(q)$ representante de um sistema dinâmico estável, e então a integral acima representa a variância da saída $v(t)$ quando a entrada do sistema $e(t)$ é um ruído branco.

Se $A(z)$ possui zeros no círculo unitário, essa integral diverge. Caso o polinômio $A(z)$ possua zeros dentro e fora do círculo unitário, mas não sobre o círculo, a integral ainda existe. Nesse caso, é possível encontrar um polinômio $A^{'}(z)$ com todos os zeros dentro do círculo unitário como:

$$A(z)A(z^{-1}) = A^{'}(z)A^{'}(z^{-1})$$

e, portanto, a integral representa a variância da saída de um sistema representado por $C(z)/A^{'}(z)$.

Considerando que o algoritmo formulado para computação de $R_v(0)$ será iterativo, é essencial indicar o número da iteração k a partir da notação:

$$A_k(z) = a_0^k z^k + a_1 z^{k-1} + ... + a_k^k$$

É importante destacar que a^k denota o coeficiente "a na iteração k", enquanto z^k representa "z elevado a potência k". Por sua vez, o polinômio recíproco de $A^*(z)$ é determinado como:

$$A^*(z) = z^nA(z^{-1}) = a_0 + a_1z + ... + a^nz^n$$

Logo, recursivamente, tem-se que:

$$A_{k-1}(z) = z^{-1}[A_k(z) - \alpha_k A_k^*(z)]$$

para $\alpha_k = a_k^k / a_0^k$. Analogamente:

$$C_{k-1}(z) = z^{-1}[c_k(z) - \beta_k C_k^*(z)]$$

para $\beta_k = c_k^k a_0^k$. A condição inicial do algoritmo é $A_n(z) = A(z)$ e $C_n(z) = C(z)$ para uma função de transferência $H(z)$ conhecida. Logo, os coeficientes a_i e c_i são dados por $a_i^{k-1} = a_i^k + \alpha_k a_{k-i}^k$ e $c_i^{k-1} = c_i^k + \beta_k c_{k-i}^k$, para $i = 0, 1, ..., k$ e $k = 1, 2, ..., n$.

O resultado da integral é, portanto, aproximado por:

$$R_v(0) = \frac{1}{a_0^k} \sum_{k=0}^{n} \frac{(b_i^i)^2}{a_0^i}$$

Como exemplo, será considerada uma função de transferência $H(z)$ tal que:

$$H(z) = \frac{z^3 + 0.7z^2 + 0.5z - 0.3}{z^3 + 0.3z^2 + 0.2z + 0.1}$$

Aplicando o algoritmo iterativo acima caracterizado, obtém-se que $R_v(0)$ equivale a

```
parameterOptimization
```

```
I = 2.9488
```

Esse exemplo está descrito na página 125 do capítulo "Parametric Optimization". O histórico de recursão sobre os valores de a_i e c_i podem ser vizualizados nas matrizes a seguir:

```
hist_a
```

```
hist_a = 4×4
    1.0000    0.7000    0.5000   -0.3000
    0.9100    0.8500    0.7100         0
    0.3560    0.1868         0         0
    0.2580         0         0         0
```

```
hist_b
```

```
hist_b = 4×4
    1.0000    0.3000    0.2000    0.1000
    1.0300    0.2500    0.1300         0
    0.9286    0.1286         0         0
    0.8611         0         0         0
```