

Modelo Dinâmico de um Robô de Tração Diferencial utilizando Metodologias de Lagrange e Newton-Euler

Débora Oliveira

Prof Antonio Marcus, Automação Inteligente 20.3

9 de Novembro de 2020

Esse documento tem por objetivo sintetizar o conteúdo do artigo “*Dynamic Modelling of Differential Drive Mobile Robots using Lagrange and Newton-Euler Methodologies: A Unified Framework*” escrito por Rached Dhaouadi e Ahmad Abu Hatab em língua portuguesa.

1 INTRODUÇÃO

A literatura disponível sobre controle de robôs móveis para âmbito educacional é extensa. Um modelo cinemático é ordinariamente abordado, uma vez que os princípios da cinemática são compreensíveis pelos estudantes no início da formação. Entretanto, não há uma descrição comum do modelo dinâmico de robôs móveis, tendo em vista que essa análise envolve sistemas não lineares e restrições não holonômicas de difícil assimilação por pesquisadores principiantes.

Os materiais que descrevem a modelagem dinâmica de robôs móveis não são consistentes entre si, dado que a diferença de notação e dos sistemas de coordenadas referenciados. Considerando que a modelagem dinâmica é um problema de otimização, a literatura atual também não analisa qual método de aproximação é o mais adequado para representar as restrições não holonômicas e a dinâmica da planta em estudo.

Este documento trata de dois métodos de aproximação do modelo dinâmico. O primeiro método é nomeado aproximação Lagrange, o qual expressa as a dinâmica do sistema baseado na energia. Essa metodologia requer um sistema de coordenadas inercial e, em sistemas não holonômicos, o conhecimento das equações das restrições de movimento.

O segundo método abordado fundamenta-se nas equações de Newton-Euler, o qual expressa a dinâmica do corpo segundo as forças aplicadas sobre o sistema. Essa metodologia não se aplica a casos nos quais as forças impostas pelos atuadores ou de interação do robô com o ambiente –tais como atrito– não possam ser quantificadas.

As próximas sessões tratam do desenvolvimento e comparação de um modelo dinâmico de um Robô de

Tração Diferencial (RTD) pela aproximação de Lagrange e de Newton-Euler. É demonstrado que ambos os métodos são equivalentes, atendendo suas respectivas limitações.

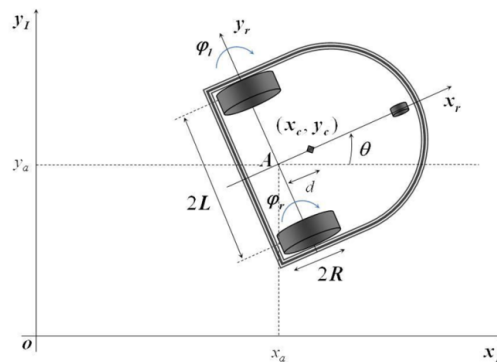
2 SISTEMA DE COORDENADAS

Para descrever a modelagem de um RTD, é preciso definir dois sistemas de coordenadas:

1. Sistema de coordenadas inercial: a origem e os eixos X e Y desse sistema pertencem ao plano sobre o qual o robô se locomove. É definido por $[x_I, y_I]$;
2. Sistema de coordenadas local: esse sistema está acoplado ao RTD e, portanto, se locomove com o mesmo. É definido por $[x_r, y_r]$;

Os dois sistemas de coordenadas acima descritos estão ilustrados na Fig. 1. É importante destacar que o centro de massa C localizado em $[x_c, y_c]$ está sobre o eixo x_r e distante d da origem do sistema de coordenadas local.

Fig. 1. Robô de Tração Diferencial.



Fonte: Adaptado de Dhaouadi e Hatab (2013).

Sendo $[x, y]$ e θ os estados referentes a posição e orientação do RTD, respectivamente, é possível relacionar os as coordenadas do robô nos dois sistemas de coordenadas por

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta_a \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{bmatrix}$$

para $R(\theta)$ a matriz de rotação ortogonal definida por

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta) & -s(\theta) & 0 \\ s(\theta) & c(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo $c(\theta) = \cos \theta$ e $s(\theta) = \sin \theta$.

Logo, é possível concluir que

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r c(\theta) - y_r s(\theta) \\ x_r s(\theta) + y_r c(\theta) \\ \theta_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

Derivando a equação (1), obtém-se as velocidade do RTD em relação ao sistema de coordenadas inercial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_r c(\theta) - x_r \dot{\theta} s(\theta) - \dot{y}_r s(\theta) - y_r \dot{\theta} c(\theta) \\ \dot{x}_r s(\theta) + x_r \dot{\theta} c(\theta) + \dot{y}_r c(\theta) - y_r \dot{\theta} s(\theta) \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

De modo análogo, tem-se que

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{bmatrix} = R(-\theta) \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a c(\theta) + y_a s(\theta) \\ -x_a s(\theta) + y_a c(\theta) \\ \theta_a \end{bmatrix} \quad (3)$$

Derivando a equação (3), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a c(\theta) - x_a \dot{\theta} s(\theta) + \dot{y}_a s(\theta) + y_a \dot{\theta} c(\theta) \\ \dot{y}_a c(\theta) - y_a \dot{\theta} s(\theta) - \dot{x}_a s(\theta) - x_a \dot{\theta} c(\theta) \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} \quad (4)$$

Considerando a posição $[x_a, y_a]$ da origem do sistema de coordenadas local do robô A , é possível representar a posição $[x_c, y_c]$ do centro de massa C , $[x_E, y_E]$ da roda esquerda e $[x_D, y_D]$ da roda direita do robô no sistema de coordenadas inercial por

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_c = x_a + dc(\theta) \\ y_c = y_a + ds(\theta) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x}_a - d\dot{\theta}s(\theta) \\ \dot{y}_c = \dot{y}_a + d\dot{\theta}c(\theta) \end{cases} \\ \begin{cases} x_D = x_a + Ls(\theta) \\ y_D = y_a - Lc(\theta) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_D = \dot{x}_a + L\dot{\theta}c(\theta) \\ \dot{y}_D = \dot{y}_a - L\dot{\theta}s(\theta) \end{cases} \\ \begin{cases} x_E = x_a - Ls(\theta) \\ y_E = y_a + Lc(\theta) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_E = \dot{x}_a - L\dot{\theta}c(\theta) \\ \dot{y}_E = \dot{y}_a + L\dot{\theta}s(\theta) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

para $2L$ a dimensão do eixo entre as rodas do RTD.

3 RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS DO RTD

Para um RTD, há duas restrições não holonômicas para o movimento do corpo:

1. Não há movimento lateral: o RTD é capaz de se locomover para frente e para trás ou em uma trajetória curva quando a velocidade de rotação de um dos motores é maior que a do outro. Logo, a velocidade $\dot{y}_r = 0$. Segundo a equação (2), conclui-se que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_r c(\theta) - x_r \dot{\theta} s(\theta) - y_r \dot{\theta} c(\theta) \\ \dot{x}_r s(\theta) + x_r \dot{\theta} c(\theta) - y_r \dot{\theta} s(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\therefore -\dot{x}_r s(\theta) + \dot{y}_r c(\theta) = 0$$

2. A roda mantém sempre apenas um ponto de contato com a superfície: as rodas do RTD não deslizam em relação ao eixo x_r ou derrapam em relação ao eixo y_r . A velocidade linear de cada uma das rodas, para R o raio da roda, é definida por

$$\begin{cases} v_D = R\dot{\phi}_D \\ v_E = R\dot{\phi}_E \end{cases}$$

Empregando as equação (5) e equação (4), encontra-se que

$$\begin{cases} v_D = R\dot{\phi}_D = \dot{x}_a c(\theta) + \dot{y}_a s(\theta) + L\dot{\theta} \\ v_E = R\dot{\phi}_E = \dot{x}_a c(\theta) + \dot{y}_a s(\theta) - L\dot{\theta} \end{cases}$$

Considerado $\dot{q} = [\dot{x}_a \ \dot{y}_a \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_D \ \dot{\phi}_E]^T$, as duas restrições não holonômicas podem ser representadas por

$$\Lambda(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} -s(\theta) & c(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ c(\theta) & s(\theta) & L & -R & 0 \\ c(\theta) & s(\theta) & -L & 0 & R \end{bmatrix} \dot{q} = 0 \quad (6)$$

4 MODELO CINEMÁTICO

O estudo cinemático de um corpo é análise do movimento desconsiderando as forças que atuam sobre o sistema. O modelo cinemático do RTD é representado pela velocidade linear v e angular ω do corpo em relação ao sistema de coordenadas local do robô.

A velocidade linear v do robô é equivalente a média das velocidades lineares das suas rodas:

$$v = \frac{v_D + v_E}{2} = R \frac{\dot{\phi}_D + \dot{\phi}_E}{2}$$

Por sua vez, a velocidade angular de cada roda é

$$\begin{cases} \omega_D L = v_D \\ -\omega_E L = v_E \end{cases}$$

Analogamente, a velocidade angular ω do robô é

$$\omega = \frac{\omega_D + \omega_E}{2} = \frac{v_D - v_E}{2L} = R \frac{\dot{\phi}_D - \dot{\phi}_E}{2L}$$

Observando a Fig. 1, é nítido que a v está na mesma direção do eixo x_r . Logo, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_E \end{bmatrix}$$

Ao rotacionar para o sistema de coordenadas inercial, encontra-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Rc(\theta)}{2} & \frac{Rc(\theta)}{2} \\ \frac{Rs(\theta)}{2} & \frac{Rs(\theta)}{2} \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_E \end{bmatrix} \quad (7)$$

Observando a equação (7), é possível concluir que a movimentação do robô é baseada na diferença entre as velocidades de rotação de cada roda.

5 MODELO DINÂMICO

Em contraposição ao modelo cinemático, o modelo dinâmico considera as forças que atuam sobre o corpo na análise do movimento. A equação de movimento para um sistema não holonômico desprezando as forças de atrito, gravitacional e o torque de distúrbios externos é dada por

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (8)$$

para $M(q)$ a matriz dos momentos de inércia, $V(q, \dot{q})$ a matriz de força centrípeta, λ os multiplicadores de e τ o vetor de torques externos impostos ao sistema.

5.1 APROXIMAÇÃO DINÂMICA DE LAGRANGE

A aproximação de Lagrange considera que a energia e o momento linear de um sistema deve ser conservado constante durante o movimento do sistema. Dessa forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F - \Lambda^T(q)\lambda \quad (9)$$

para $L = T - V$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial do sistema; q os estados referentes ao sistema de coordenadas generalizado e $F = B\tau$ o vetor de forças que atuam sobre o sistema.

No caso em estudo, as forças de entrada F do sistema são produzidas pelos torques $\tau = [\tau_D \ \tau_E]^T$ dos motores de cada roda.

O RTD não se movimenta no plano Z, logo, a energia potencial V do sistema é nula. Por sua vez, a energia cinética T do robô pode ser dividida em três termos

1. Energia cinética da plataforma (desconsiderando as rodas)

$$T_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2$$

para m_c a massa da plataforma (desconsiderando as rodas) e I_c o momento de inércia da plataforma em relação ao eixo vertical a partir do centro de massa C do corpo;

2. Energia cinética da roda direita

$$T_D = \frac{1}{2}m_r v_D^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_r \dot{\phi}_D^2$$

para m_r a massa de uma roda, I_m o momento de inércia de cada roda em relação ao eixo que atravessa o seu diâmetro e I_w o momento de inércia de cada roda em relação ao eixo entre as rodas;

3. Energia cinética da roda esquerda

$$T_E = \frac{1}{2}m_r v_E^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_r \dot{\phi}_E^2$$

Substituindo a equação (5) em cada termo da energia cinética, obtêm-se

$$\begin{aligned} T &= T_c + T_D + T_E \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + m_c d\dot{\theta}(\dot{y}_a c(\theta) - \dot{x}_a s(\theta)) \\ &\quad + \frac{1}{2}I_r(\dot{\phi}_D^2 + \dot{\phi}_E^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

para $m = m_c + 2m_r$ a massa total e $I = I_c + m_c d^2 + 2m_r L^2 + 2I_m$ o momento de inércia equivalente.

Aplicando $L = T$ definido na equação (10) na equação (9), encontra-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} m\ddot{x}_a - m_c d\ddot{\theta}s(\theta) - m_c d\dot{\theta}^2 c(\theta) = C_1 \\ m\ddot{y}_a + m_c d\ddot{\theta}c(\theta) - m_c d\dot{\theta}^2 s(\theta) = C_2 \\ I\ddot{\theta} - m_c \ddot{x}_a s(\theta)_a + m_c \ddot{y}_a c(\theta)_a = C_3 \\ I_r \ddot{\phi}_D = \tau_D + C_4 \\ I_r \ddot{\phi}_E = \tau_E + C_4 \end{cases} \quad (11)$$

para C_n , $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 , os termos referentes as restrições cinemáticas escritos em função dos multiplicadores de Lagrange na equação (6). Isto é

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = -\Lambda^T(q)\lambda = - \begin{bmatrix} -s(\theta) & c(\theta) & c(\theta) \\ c(\theta) & s(\theta) & s(\theta) \\ 0 & L & -L \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

A partir da equação (11), relacionando com a equação (8), encontra-se que

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c ds(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & m & m_c dc(\theta) & 0 & 0 \\ -m_c ds(\theta) & m_c dc(\theta) & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d\dot{\theta}c(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_c d\dot{\theta}s(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e com a equação (9), tem-se

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_D \\ \tau_E \end{bmatrix} = B\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_D \\ \tau_E \end{bmatrix}$$

Com o intuito de diminuir a quantidade de variáveis do vetor q e facilitar a simulação do robô, uma vez que as entradas do sistema são as velocidades de rotação na junta, define-se

$$\eta = [\dot{\phi}_D \ \dot{\phi}_E]^T$$

Com base no modelo cinemático descrito na equação (7), obtém-se a relação entre os vetores q e η .

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_E \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Rc(\theta) & Rc(\theta) \\ Rs(\theta) & -Rs(\theta) \\ \frac{R}{L} & \frac{-R}{L} \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_E \end{bmatrix} = S(q)\eta$$

Substituindo $\dot{q} = S(q)\eta$ no sistema descrito na equação (11), obtém-se as novas matrizes $\bar{M}(q)$, $\bar{V}(q, \dot{q})$ e $\bar{B}(q)$ referentes a uma equação análoga a equação (8).

$$\bar{M}(q)\ddot{\eta} + \bar{V}(q, \dot{\eta})\dot{\eta} = \bar{B}(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda$$

para

$$\bar{M}(q) = S^T(q)M(q)S(q)$$

$$= \begin{bmatrix} I_r + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) \\ \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) & I_r + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}(q, \dot{q}) = S^T(q)M(q)\dot{S}(q) + S^T(q)V(q, \dot{q})S(q)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{4L^2}(m_c d\dot{\theta}) \\ -\frac{R^2}{4L^2}(m_c d\dot{\theta}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}(q) = S^T(q)B(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^T(q)\Lambda^T(q)\lambda = 0$$

Dessa forma, é encontrada a equação diferencial das velocidades angulares das rodas

$$\ddot{\eta} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_D \\ \ddot{\phi}_E \end{bmatrix} = \bar{M}^{-1}(q)(-\bar{V}(q, \dot{q})\dot{\eta} + \bar{B}(q)\tau) \quad (12)$$

5.2 APROXIMAÇÃO DINÂMICA DE NEWTON-EULER

Para a representação do modelo dinâmico de Newton-Euler, a velocidade do entro de massa será representada por uma componente lateral v_w e outra longitudinal v_u . As forças laterais sobre o corpo são nulas, conforme a primeira restrição não holonômica.

Nessa aproximação, o corpo é considerado sólido e com massa total m . A posição do RTD será determinada em coordenadas polares, ou seja

$$\hat{r} = re^{j\theta}$$

Dessa forma, as velocidades laterais e longitudinais do corpo são

$$\begin{aligned} v_u &= \dot{r} \\ v_w &= r\dot{\theta} \end{aligned} \quad (13)$$

A partir da segunda lei de Newton, encontra-se

$$\begin{cases} ma_u = m(\dot{v}_u - v_w\dot{\theta}) = F_u \\ ma_u = m(\dot{v}_w - v_u\dot{\theta}) = F_w = 0 \\ I\ddot{\theta} = F_u L + F_w d \end{cases} \quad (14)$$

A partir da equação (5), para a primeira restrição não holonômica, tem-se que $v_w - d\dot{\theta} = 0$.

Substituindo as velocidades v_u e v_w definidas na equação (13), a velocidade angular $\dot{\theta}$ definido no modelo cinemático da equação (7) e as forças F_u e F_w pelas forças impostas pelo torque de rotação dos motores $R\tau$, o sistema de equações equação (14) é desenvolvido para o modelo encontrado pela aproximação de Lagrange na equação (12).

6 MODELO DO ATUADOR

Considerando o motor das rodas como um motor de corrente contínua, cuja tensão de armadura é v_a , tem-se as seguintes equações para o circuito de armadura

$$\begin{cases} \dot{i}_a = \frac{1}{L_a}(v_a - e_a - R_a i_a) \\ e_a = K_b N \dot{\phi} \\ \tau = K_t N i_a \end{cases} \quad (15)$$

para i_a a corrente de armadura, R_a e L_a a resistência e indutância do enrolamento de armadura, e_a a força contra-eletromotriz, K_b a constante da força contra-eletromotriz e K_t a constante de torque do motor.

A equação (15) deve ser resolvida simultaneamente a equação (12) e equação (7), uma vez que a velocidade de rotação da roda $\dot{\phi}$ impõe uma força contra-eletromotriz no motor e este motor atua sobre a roda com o torque τ .

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi comprovado que os modelos dinâmicos encontrados pela aproximação de Lagrange e de Newton-Euler são equivalentes. Além disso, foi apresentado um modelo dinâmico completo do RTD incluindo os atuadores. Essa abordagem complementa a falha da bibliografia atual, da qual é comumente ausente a abordagem da modelagem dinâmica.