

# Relatório de Atividade

## Implementação do Modelo Dinâmico de um Robô de Tração Diferencial

Débora Oliveira

Prof Antonio Marcus, Automação Inteligente 20.3

9 de Novembro de 2020

Esse documento tem por objetivo descrever e analisar a implementação de um modelo dinâmico de um robô de tração diferencial (RTD). Em seguida, comparar a solução numérica do modelo dinâmico com os resultados de uma simulação na plataforma CoppeliaSim.

### 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O modelo dinâmico de um sistema analisa a movimentação do corpo a partir das forças que atuam sobre o mesmo. Conforme a aproximação de Lagrange, para um RTD é aplicável o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}_{a_D} \\ \dot{i}_{a_E} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a}(v_{a_D} - K_b N \dot{\phi}_D - R_a i_{a_D}) \\ \frac{1}{L_a}(v_{a_E} - K_b N \dot{\phi}_E - R_a i_{a_E}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{R}{2L}(\dot{\phi}_D - \dot{\phi}_E) \\ \frac{Rc(\theta)}{2}(\dot{\phi}_D + \dot{\phi}_E) \\ \frac{Rs(\theta)}{2}(\dot{\phi}_D + \dot{\phi}_E) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_D \\ \ddot{\phi}_E \end{bmatrix} &= \bar{M}^{-1}(q) \left( -\bar{V}(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{\phi}_D \\ \dot{\phi}_E \end{bmatrix} + \bar{B}(q)\tau \right) \\ &\Rightarrow \tau = K_t N [\dot{\phi}_D \ \dot{\phi}_E]^T \end{aligned} \quad (1)$$

para

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) &= \begin{bmatrix} I_r + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) \\ \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) & I_r + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) \end{bmatrix} \\ \bar{V}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{4L^2}(m_c d \dot{\theta}) \\ -\frac{R^2}{4L^2}(m_c d \dot{\theta}) & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{B}(q) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considerando

- $[\dot{\phi}_D \ \dot{\phi}_E]^T$  as velocidades angulares da roda direita e esquerda, respectivamente;
- $[x_a \ y_a \ \theta]^T$  a pose do robô em relação ao sistema de coordenadas inercial;

- $[v_{a_D} \ v_{a_E}]^T$  as tensões de armadura do motor direito e esquerdo, respectivamente;
- $[i_{a_D} \ i_{a_E}]^T$  as correntes de armadura do motor direito e esquerdo, respectivamente;
- $R_a$  e  $L_a$  a resistência e indutância do enrolamento de armadura dos motores;
- $K_b$  e  $K_t$  as constantes da força contraeletromotriz e de torque do motor, respectivamente;
- $R$  e  $2L$  o raio da roda e a distância entre as rodas;
- $d$  a distância entre o centro de massa da plataforma e a origem do sistema de coordenadas local;
- $m_c$  a massa da plataforma sem considerar as rodas;
- $m_r$  a massa de cada roda;
- $m = m_c + 2m_r$  a massa completa do corpo;
- $I_c$  o momento de inércia da plataforma em relação ao eixo vertical a partir do centro de massa  $C$  do corpo;
- $I_m$  o momento de inércia de cada roda em relação ao eixo que atravessa o seu diâmetro;
- $I_w$  o momento de inércia de cada roda em relação ao eixo entre as rodas;
- $I = I_c + m_c d^2 + 2m_r L^2 + 2I_m$  o momento de inercia total equivalente do corpo.

Essa modelagem considera nula as forças de atrito ou de distúrbios externos, tais como correntes de ar.

## 2 DESENVOLVIMENTO

Para o caso implementado e simulado, é empregado o modelo do RTD P3DX. Os parâmetros desse robô são

$$R_a = 0,71\Omega \quad L_a = 0,66mH \quad K_b = 0,023 \frac{V}{rad \cdot s}$$

$$K_t = 0,029 \frac{N \cdot m}{A} \quad N = 38,3$$

$$R = 0,1m \quad L = 0,19m \quad d = 0,05m$$

$$m_w = 1Kg \quad m_c = 7Kg \quad I_m = 0,0025Kg \cdot m^2$$

$$I_r = 0.005Kg \cdot m^2 \quad I_c = 1Kg \cdot m^2$$

A tensão máxima de armadura de cada motor é 12V. O torque máximo sobre cada roda é 3Nm.

A próxima sessão trata da discussão e análise dos resultados da simulação numérica do modelo dinâmico no MATLAB em comparação com o modelo dinâmico do P3DX implementado na plataforma CoppeliaSim. A simulação numérica no MATLAB foi realizada a partir da solução da equação diferencial apresentada na equação (1) utilizando o método de Runge-Kutta (ode45).

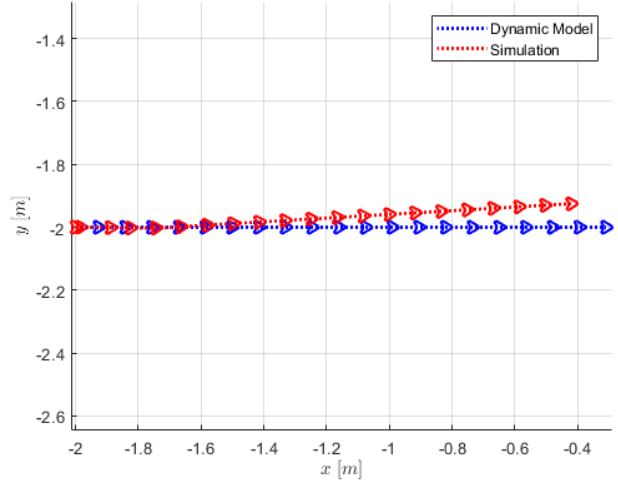
## 3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No código implementado, são calculadas as velocidades  $[\dot{\phi}_D \ \dot{\phi}_E]^T$  para uma entrada de tensão de armadura  $[v_{aD} \ v_{aE}]^T$  arbitrária conforme a equação (1). Em seguida, esses valores de velocidade são reamostrados no passo da simulação do CoppeliaSim (50ms) e transferidos para as juntas simuladas do motor esquerdo e direito.

Sabe-se que o modelo cinemático se aproxima do dinâmico para baixas velocidades do sistema. Caso contrário o torque será grande o suficiente para provocar a derrapagem e desliz do RTD. Para o P3DX, o torque máximo é alcançado com a tensão de armadura em 5V.

O primeiro experimento consiste na imposição de uma tensão de armadura constante equivalente sobre ambos os motores. O valor escolhido foi  $\frac{1}{4}$  da tensão de armadura máxima, ou seja, 3V. As poses do robô obtidas para a solução numérica do modelo dinâmico e a recuperada do modelo simulado podem ser observadas na Fig. 1.

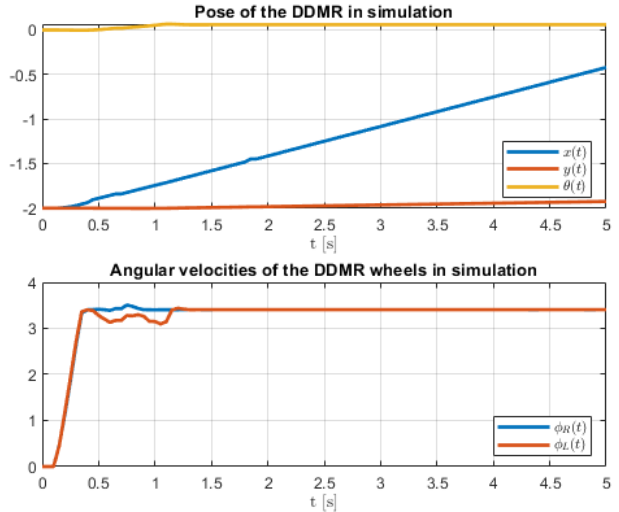
**Fig. 1.** Pose do RTD para  $v_a$  constante em 3V.



Observando a Fig. 1, é perceptível que o RTD simulado possui  $\dot{\theta}$  não nulo. Esse fato não ocorre no modelo dinâmico uma vez que, conforme a equação (1),  $\dot{\theta} = 0$  para  $\dot{\phi}_D = \dot{\phi}_E$ .

Na Fig. 2 estão ilustradas a curva de posição e orientação do RTD e das velocidades angulares dos motores adquiridas após a simulação. É perceptível que em aproximadamente 0,5s, há uma rotação  $\theta$  não nula sobre o corpo.

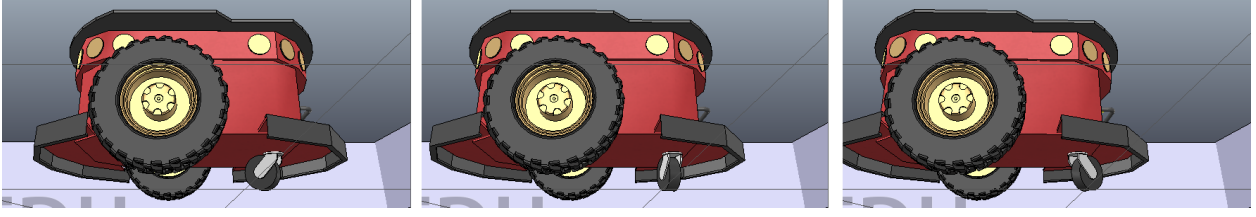
**Fig. 2.** Pose do RTD e velocidade angular dos motores em simulação para  $v_a$  constante em 3V.



Observando as curvas das velocidades angulares de cada motor na Fig. 2, há uma oscilação também em 0,5s. Essa oscilação é provocada por uma consideração do ambiente de simulação, a qual foi desprezada durante a modelagem dinâmica da equação (1).

Uma vez que a implementação do CoppeliaSim é síncrono, ou seja, o servidor indica quando deve ser simulado o próximo passo, foi possível observar o

**Fig. 3.** Rotação da roda de apoio Caster no ambiente virtual CoppeliaSim.

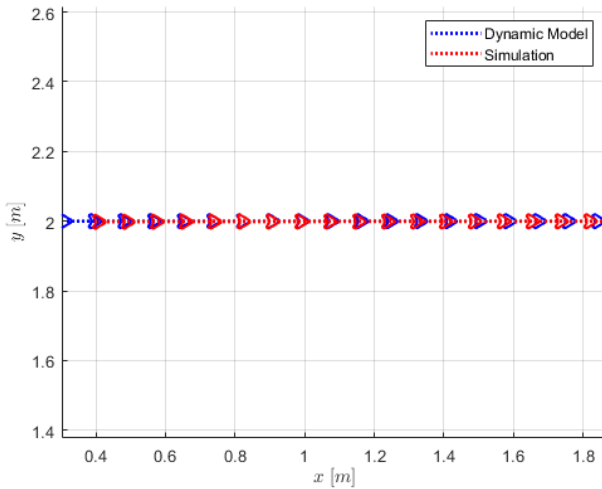


movimento do P3DX simulado quadro a quadro após 0,5s. Foi constatado que, a partir do 0,5s, a roda de apoio Caster do P3DX é rotacionada sobre o próprio eixo, conforme ilustrado na Fig. 3.

Enquanto a roda Caster está paralela ao eixo entre as rodas do P3DX, é provocado por um curto período de tempo um torque lateral sobre o RTD. Dessa forma, há a produção de um  $\theta$  não nulo. Logo, a diferença entre as curvas das trajetórias calculadas pelo modelo dinâmico e simulada no CoppeliaSim é justificada pela consideração do último da roda de apoio Caster.

Para analisar o comportamento do robô sem a rotação da roda Caster, foi imposta uma nova trajetória na qual o RTD se desloca para trás. Dessa forma, a tensão de armadura entrada do modelo dinâmico foi definida -3V. Em seguida, as velocidades de rotação calculadas foram transferidas como entrada do modelo simulado na plataforma CoppeliaSim. As curvas representantes da pose do RTD obtidas para a solução numérica do modelo dinâmico e a recuperada do modelo simulado podem ser observadas na Fig. 4.

**Fig. 4.** Pose do RTD para  $v_a$  constante em -3V.



Observando a Fig. 4, fica claro que o RTD simulado inicia a trajetória com uma aceleração não nula positiva e finaliza com uma desaceleração. O mesmo não ocorre para a solução numérica do modelo dinâ-

mico, uma vez que, segundo a equação (1), a velocidade do RTD é constante quando  $\dot{\phi}_D = \dot{\phi}_E$ .

Essa diferença é justificada pela desconsideração, no modelo dinâmico, dos distúrbios ambientais sobre o sistema, tais como força de atrito. Observando as configurações da ferramenta de análise numérica “Bullet” do CoppeliaSim, é definido um coeficiente de atrito não nulo da superfície. Por isso, nesse caso, é necessário uma aceleração maior para retirar o corpo de sua posição inicial e há uma desaceleração do torque inicial imposto pelo impulso da corrente de armadura.

Tendo em vista as restrições impostas pela modelagem do modelo dinâmico da equação (1), as trajetórias apresentadas na Fig. 4 são próximas. Portanto, os parâmetros considerados para a solução numérica da equação (1) – como massa do corpo, momento de inércia, etc. – podem ser avaliados como coerentes com os implementados no modelo nativo do P3DX no CoppeliaSim.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse relatório descreve a implementação e análise da equação diferencial do modelo dinâmico de um robô de tração diferencial no MATLAB. A partir da comparação dos resultados obtidos pela solução numérica com a simulação do mesmo sistema na plataforma CoppeliaSim, concluiu-se que o modelo dinâmico implementado é ideal: são desprezíveis as contribuições de força pela roda acessória Caster e forças de atrito da superfície. Para a aproximação dos resultados entre os dois modelos, deve-se acrescentar na modelagem dinâmica termos referentes as forças de atrito e distúrbios externos.