

# Задачи для Клуба теории вероятностей ФЭН ВШЭ

Саша Плахин, Коля Аверьянов

18 февраля 2021

## Задача 1

- Доказать, что если  $X \geq 0$  и  $\mathbb{E}X = 0$ , то  $X = 0$  почти наверное.
- Доказать, что если  $\text{Var } X = 0$ , то  $X$  почти наверное константа.

## Задача 2

Пусть  $\{X_n : n \geq 1\}$  – последовательность независимых экспоненциальных случайных величин с параметром  $\lambda = 1$ . Докажите:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right\}\right) = 1.$$

## Задача 3

Пусть  $\{X_r, r \geq 1\}$  независимые пуассоновские случайные величины с параметрами  $\{\lambda_r, r \geq 1\}$ . Нужно показать, что  $\sum_{r=1}^{\infty} X_r$  сходится или расходится почти наверное в соответствии с тем сходится или расходится  $\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r$ .

## Задача 4

- Докажите, что из сходимости в среднем порядка  $r$  следует сходимость в среднем порядка  $r - k$ ,  $k \in \{1, \dots, r - 1\}$
- Докажите, что из сходимости в среднем следует сходимость по вероятности
- Докажите, что  $X_n \rightarrow 0$  по вероятности тогда и только тогда, когда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right) = 0.$$

## Задача 5

Пусть  $\xi_n \rightarrow \xi$  по распределению.  $h(x)$  – дважды дифференцируемая функция в вещественной точке  $a$ . Известно, что  $h'(a) = 0$ . Найдите предел сходимости по распределению у последовательности:

$$\frac{h(a + \xi_n b_n) - h(a)}{b_n^2},$$

где  $b_n \rightarrow 0$  – произвольная последовательность положительных чисел.