Задачи для Клуба теории вероятностей ФЭН ВШЭ

Николай Аверьянов

9 сентября 2021

Задача 1

Доказать, что если $F(x)$ – функция распределения, то при любом $h \neq 0$ функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} F(t)dt, \quad \Psi(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} F(t)dt$$

также являются функциями распределения.

Задача 2

Пусть $\alpha(x) = x + [x]$, где квадратные скобки означают взятие целой части числа. Вычислите следуюший интеграл:

$$\int\limits_{0}^{10} x d\alpha(x)$$

Задача 3

Функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ удовлетворяют условию

$$F_1(x) \leq F_2(x)\ \forall x.$$

Показать, что можно так задать на одном вероятностном пространстве случайные величины ξ_1 и ξ_2 с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, что

$$\mathbb{P}\{\xi_1 \geq \xi_2\} = 1$$

Задача 4

Покажите, что функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}\{\xi = x_0\} = 0$

Задача 5

Доказать, что любая функция распределения обладает следующими свойствами:

$$\lim_{x\to\infty} x\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{z}dF(z)=0,\quad \lim_{x\to+0} x\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{z}dF(z)=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{z}dF(z)=0,\quad \lim_{x\to-0} x\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{z}dF(z)=0,$$