Математическое ожидание и дисперсия

А. Макаров, Д. Тен

Клуб теории вероятностей ФЭН ВШЭ

9 октября 2021

Мотивация

- Одни из основных объектов ТВ;
- Первое применение интеграла Лебега в нашем клубе;

Введение матожидания

Определение (Математическое ожидание)

Говорится, что случайная величина f имеет конечное мат. ожидание, если $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{P})$. Тогда мы можем обозначить следующим образом $\mathbb{E}f = \int_\Omega f \, d\mathbb{P}$

Введение дисперсии

Определение (Дисперсия)

Говорится, что случайная величина f имеет конечную дисперсию, если $f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$. Тогда $var(f) = \int_\Omega (f - \mathbb{E}f)^2 \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(f - \mathbb{E}f)^2$

Замечание 1

А кто сказал, что дисперсия вообще существует? Может, такой интеграл равен бесконечности?
Постоянная с.в. 1 является квадратично-интегрируемой по Лебегу, поэтому, по неравенству Коши-Буняковского-Шварца, если $f \in \mathcal{L}^2$, то f - интегрируема по Лебегу. Из этого следует интегрируемость такого выражения $(f - \mathbb{E}f)^2$

Напоминание

Напомним, что можно задать меру на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ через функцию распределения: $\mu((-\infty, a]) = F_f(a) = Prob(f \leq a)$ Заметим, что $\mu(A) = Prob(f \in A) = \mathbb{P}(f^{-1}(A))$

Это значит, что мы теперь можем рассматривать $\int_{\mathbb{R}} x\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_f$

Важная теорема

Утверждение

Пусть функция f имеет конечное матожидание.
Тогда $\mathbb{E}f = \int_{\mathbb{R}} x \, dF_f$

Важнейшая теорема

Утверждение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - борелевская функция и ξ - случайная величина.
Тогда $\mathbb{E}f(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_\xi$

Следствие из важнейшей теоремы

Утверждение

Для случайной величины ξ выполнено следующее утверждение:
$var(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(\xi))^2 \, dF_\xi$

Доказательство: положим $g(x) = (x - \mathbb{E}(\xi))^2$

Не менее важная теорема

Утверждение

Пусть у нас есть случайная величина ξ с функцией распределения вида $F_\xi(a) = \int_{(-\infty,a]} \phi(x)\, dx$ с какой-то неотрицательной борелевской функцией ϕ, для которой выполнено $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx = 1$, где x - мера Лебега на $\mathbb{R}$.
Тогда для борелевской фукнции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено $\mathbb{E}g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\, dx$

Замечание 2

Если $g(x)f(x)$ интегрируема по Риману, то $\int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\,dx$ принимает одно и то же значение и по Риману, и по Лебегу, поэтому можно применить формулу из школы(а потом забыть, это помойка истории)

Абсолютно непрерыная случайная величина

Определение (Абсолютно непрерыная случайная величина)

Говорится, что случайная величина ξ является абсолютно непрерывной, если её функция распределения имеет вид: $F(\xi) = \int_{-} \infty^x \phi(t)\, dt$ с некоторой неотрицательной функцией ϕ, заданной на $\mathbb{R}$, для которой выполнено $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, dt = 1$

Если ϕ абсолютно непрервна, тогда $F_\phi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ непрерывна