Задачи для Клуба теории вероятностей ФЭН ВШЭ

Александр Плахин, Николай Аверьянов

4 декабря 2021

Задача 1

- Пусть X и Y имееют совместную плотность f. Найдите плотность Y/X.
- Пусть теперь X и Y независимы и одинаково распределены с плотностью f. Покажите, то $\arctan(Y/X)$ имеет равномерное распределение на $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ тогда и только тогда, когда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(xy)|x|dx = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Задача 2

Четыре точки выбираются равновероятно внутри треугольника. Найти вероятность того, что ни одна точка не лежит внутри треугольника, образованного тремя остальными точками.

Задача 3

Последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$ на отрезке $[0, 1]$ строится по следующему правилу: $\xi_1 \sim U[0, 1]$, и если значения $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ $(k \geq 2)$ определены, то точка ξ_k имеет равномерное распределение на минимальном по длине из k отрезков, на которые $[0, 1]$ разбивается точками $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$.

- Доказать, что существует случайная величина ξ, удовлетворяющая условию:

$$\mathbb{P}(\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\}) = 1$$

- Найти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,\xi$.

Задача 4

Предположим, что абсолютно непрерывное распределение вероятности скалярной случайной величины X обладает следующим свойством: плотность совместного распределения набора n независимых случайных величин, распределенных по такому же закону, зависит только от радиальной координаты $\sqrt{\sum_i x_i^2}$. Показать, что распределение X нормально (точнее, гауссово с нулевым математическим ожиданием).