Задачи для Клуба теории вероятностей ФЭН ВШЭ

Александр Плахин, Николай Аверьянов

9 октября 2021

Задача 1

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, g – некоторая дифференцируемая функция. Докажите следующее соотношение (если обе части определены):

$$\mathbb{E}[(X-\mu)g(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)]$$

Задача 2

X – случайная величина с математическим ожиданием μ и функцией распределения F.

1. Покажите, что
$$\int_0^\infty (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx = \mu$$

2. Покажите, что
$$\int_{-\infty}^a F(x)dx = \int_a^\infty (1 - F(x))dx \iff a = \mu.$$

Задача 3

На бесконечный лист клетчатой бумаги (сторона клеточки равна 1) случайно бросается круг единичного радиуса. Считая, что центр круга равномерно распределен на том единичном квадрате, на который он попал, найти математическое ожидание числа точек с целочисленными координатами $(x,\ y)$, покрытых этим кругом.

Задача 4

1. Пусть X – случайная величина такая, что $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \sigma^2 < \infty$. Докажите, что
$$\mathbb{P}\{X \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2},\ a > 0$$

2. Теперь предположим, что X – нестрого положительная случайная величина с конечным вторым моментом. Докажите, что

$$\mathbb{P}\{X > a\} \geq \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}$$