Сходимость случайных величин

А. Плахин, Н. Аверьянов

Клуб теории вероятностей ФЭН ВШЭ

18 февраля 2022 г.

Равенство почти наверное

Определение (Равенство почти наверное)

Будем говорить, что случайные величины X и Y равны почти наверное (a.s.), если $\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}\big) = 1$

Утверждение

Пусть $\sim$ будет отношением, которое определено так: $X \sim Y$ тогда и только тогда, когда когда $X = Y$ a.s. Тогда $\sim$ это отношение эквивалентности на множестве случайных величин на вероятностном пространстве.

Для доказательства этого факта потребуется следующее тривиальное заменчание. Если A и B такие события, что $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, то $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. $[0 \leq \mathbb{P}((A \cap B)^c) = \mathbb{P}(A^c \cup B^c) \leq \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) = 0\ ]$

Равенство почти наверное

Доказательство.

1. Очевидно, что $X \sim X$ и из того, что $X \sim Y$ следует, что $Y \sim X$.
2. Предположим, что X, Y, V такие случайные величины, что $X \sim Y$ и $Y \sim V$. Нужно показать, что $X \sim V$.
   Пусть $A = \{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}$ и $B = \{\omega : Y(\omega) = V(\omega)\}$.
   Также помним, что $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, поэтому $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.
   Очевидно, что $A \cap B \subseteq \{\omega : X(\omega) = V(\omega)\}$, поэтому
   $P(\{\omega : X(\omega) = V(\omega)\}) = 1$,что завершает доказательство.

$\square$

Замечание

В общем, свойство выполнено почти наверное, если событие не выполняется с вероятностью 0.

Сходимости почти наверное

Определение

Последовательность случайных величин (f_n) случайных величин сходится почти наверное к случайной величине g если:

$$\mathbb{P}(\{\omega : f_n(\omega) \to g(\omega), \text{ as } n \to \infty\}) = 1$$

Утверждение

Если $f_n \to f$ почти наверное при $n \to \infty$ и $f_n \to g$ почти наверное при $n \to \infty$, то $f = g$ почти наверное.

Доказательство.

Пусть $A = \{\omega : f_n(\omega) \to f(\omega)\}$, $B = \{\omega : f_n(\omega) \to g(\omega)\}$ и $C = \{\omega : f(\omega) = g(\omega)\}$. Тогда $\mathbb{P}(A) = 1$ и $\mathbb{P}(B) = 1$ и тогда $P(A \cap B) = 1$. Но $A \cap B \subseteq C$, поэтому $\mathbb{P}(C) = 1$. $\square$

Сходимость произведения

Утверждение

Предположим, что $f_n \to f$ почти наверное и $g_n \to g$ почти наверное. Тогда $f_n + g_n \to f + g$ почти наверное и $f_n g_n \to fg$ почти наверное.

Доказательство.

Пусть $A = \{\omega : f_n(\omega) \to f(\omega)\}$, $B = \{\omega : g_n(\omega) \to g(\omega)\}$. Тогда $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$ и поэтому $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. Но каждое из множеств $\{\omega : f_n(\omega) + g_n(\omega) \to f(\omega) + g(\omega)\}$ и $\{\omega : f_n(\omega) + g_n(\omega) \to f(\omega) + g(\omega)\}$ содержат в себе $A \cap B$ и поэтому вероятностная мера от них равна 1. $\square$

Сходимость по вероятности

Определение (Сходимость по вероятности)

Последовательность $\{f_n\}$ случайных величин сходится по вероятности к случайной величине f, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \epsilon\}) = 0$$

- $f_n \to f, g_n \to g \;\Rightarrow\; f_n + g_n \to f + g$
- $f_n \to f, g_n \to g \;\Rightarrow\; f_n g_n \to fg$

Сходимость произведения

1. Предположим $f_n \to 0$ по вероятности. Тогда $f_n g \to 0, \forall g$
   $B_m = \{\omega : |g(\omega)| < m\} \Rightarrow \mathbb{P}(B_m) \uparrow 1 \Rightarrow \mathbb{P}(B_m^c) \to 0$

$$\{\omega : |f_n(\omega)g(\omega)| \geq \epsilon\} \subseteq \{\omega : |f_n(\omega)| \geq \epsilon/m\} \cup \{\omega : |g(\omega)| \geq m\}$$

$$\mathbb{P}(\{\omega : |f_n(\omega)g(\omega)| \geq \epsilon\}) \\ \leq \mathbb{P}(\{\omega : |f_n(\omega)| \geq \epsilon/m\}) + \mathbb{P}(\{\omega : |g(\omega)| \geq m\}) \to 0$$

2. $f_n \to 0, g_n \to 0 \Rightarrow f_n g_n \to 0$
3. $f_n \to f, g_n \to g \Rightarrow f_n g_n - fg \to 0$

Сходимость почти наверное $\Rightarrow$ по вероятности

Утверждение

$f_n \to f$ почти наверное $f_n \to f$ по вероятности

Доказательство.

Обозначим за O множество $\{\omega : \lim f_n(\omega) \neq f\}$
$A_n = \cup_{m \geq n}\{|f_m - f| \geq \epsilon\}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, $A = \cap_n A_n$
Для $\omega \in O^c$ и для какого-то $n > N$ выполняется $|X_n(\omega) - X| < \epsilon$
$\to \omega \notin A \Rightarrow A \cap O^c = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ □

Сходимость по распределению

Определение

Последовательность случайных величин $\{f_n\}$ сходится по распределнию к f, если

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

для всех x, в которых F непрерывна.

Теорема (Леви)

Последовательность случайных величин $\{f_n\}$ сходится по распределнию к f тогда и только тогда, когда:

$$\mathbb{E}[e^{iuf_n}] \to \mathbb{E}[e^{iuf}] \text{ поточечно}$$

Сходимость в среднем

Определение

Последовательность случайных величин $\{f_n\}$ сходится в среднем порядка r к f, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0$$