# Интеграл Лебега

А. Плахин, Н. Аверьянов

Клуб теории вероятностей ФЭН ВШЭ

25 сентября 2021

# Мотивация

*Интеграл Римана, этот противоестественный кусок тошнотворной математической архаики, идет на помойку истории, а интегрирование выносится в отдельный курс "теории меры". Для многих прикладных задач интеграл Лебега - это, конечно, перебор, но тут достаточно школярского определения интеграла как площади под графиком, вполне уместного в курсе "математического анализа для студентов ПТУ*

Миша Вербицкий

# Recap

$(X, \Sigma, \mu)$ – пространство с мерой

- $X$ – некоторое множество произвольной природы
- $\Sigma$ – сигма-алгебра на множестве $X$
- $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ – мера (функция обладающая некоторыми свойствами)

Равномерная сходимость: $\lim_{n\to\infty} \sup |f_n - f| = 0$

# Интеграл Лебега для простых функций

Наша цель – определить интеграл на произвольном измеримом пространстве $(X, \Sigma, \mu)$. Назовем функцию $s$ простой (и измеримой), если $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$. Для начала определим понятие интеграла именно для таких функций.

## Определение

Пусть $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ – простая функция. Тогда интегралом данной функции по множеству $E \in \Sigma$ будет называть следующую величину:

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

## Пример

$$\int_X \mathbb{I}_A d\mu = \mu(A)$$

# Интеграл Лебега от измеримой функции

## Определение

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – некоторая неотрицательная измеримая функция, а $E \in \Sigma$. Тогда интегралом от нашей функции будем называть:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s d\mu$$

Супремум берется по всем простым функциям $s$, таким что $0 \leq s(x) \leq f(x), \forall x \in X$

# Свойства интеграла

1. $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$
2. $A \subseteq B; A, B \in \Sigma; f \geq 0 \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$
3. $f \geq 0; c \geq 0 \Rightarrow \int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$
4. $f(x) = 0 \ \forall x \in E \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$
5. $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0 \ \forall f \geq 0$
6. $f \geq 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = \int_X \mathbb{I}_E f d\mu$

# Линейность

## Утверждение

Пусть $s$ и $t$ это две простые функции $s \geq 0$ и $t \geq 0$. Для $E \in \Sigma$ зададим функцию $\varphi(E) = \int_E s d\mu$. Тогда $\varphi$ – мера на $(X, \Sigma)$ и более того:

$$\int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

Доказательство первого факта достаточно тривиально:

$$\varphi(E) = \int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

Каждое отображение $E \mapsto \mu(A_i \cap E)$ будет мерой, как их сумма.

# Lebesgue's Monotone Convergence Theorem

## Утверждение

Пусть $f_n$ это последовательность измеримых функций на $X$, и предположим, что:

1. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ for each $x \in X$
2. $f_n(x) \to f(x)$ as $n \to \infty$, for each $x \in X$

Тогда $f$ измеримая и $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ при $n \to \infty$

## Следствие

Предположим, что $f \geq 0$, $g \geq 0$ и каждая из этих функций является интегрируемой. Тогда $f + g$ интегрируема и:

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

# Fun facts

## Следствие

Предположим, что функция $f \geq 0$ интегрируема. Тогда отображение $\varphi : E \to \int_E f d\mu$ является мерой на $(X, \Sigma)$

## Определение

Комплекснозначная функция $f$ на $X$ называется интегрируемой (по Лебегу) по мере $\mu$, если $|f|$ интегрируема. Множество всех таких функций обозначается $\mathcal{L}^1(X, \mu)$. Для $f = u + iv \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, определим:

$$\int_X f d\mu = \int_X u_+ d\mu - \int_X u_- d\mu + i \int_X v_+ d\mu - i \int_X v_- d\mu$$

# Fun facts

## Утверждение

If $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ and $a, b \in \mathbb{C}$, then $af + bg \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ and:

$$\int_X (af + bg) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu$$

## Замечание

The above result says that the space $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ is a (complex) linear space.

## Утверждение

For any $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$:

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

# Lebesgue's Dominated Convergence Theorem

Let $f_n$ be a sequence of complex-valued measurable functions on $X$ such that

1. $f_n(x) \to f(x)$, as $n \to \infty$, for every $x \in X$ (pointwise convergence);
2. here is some $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ such that $|f_n(x)| \leq g(x)$ for all $n \in N$ and each $x \in X$ (the sequence $f_n$ is dominated by $g$).

Then $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ and $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ as $n \to \infty$. Furthermore, $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$, as $n \to \infty$