Введение в теорию меры

А. Плахин, Н. Аверьянов

Клуб теории вероятностей ФЭН ВШЭ

30 августа 2021 г.

Мотивация

- Современная теория вероятностей полностью основывается на теории меры;
- Для того, чтобы темы связанные со стохастикой излагались достаточно строго, мы должны их рассказывать, используя ряд понятий из теории меры;
- Сегодняшний доклад ставит своей целью ввести слушателей в курс дела относительно базовых понятий из теории меры, которые будут релевантны для дальнейшего изучения вероятностных дисциплин;

Алгебры

Сигма-алгебры, с которыми мы работаем в теории вероятностей в качестве множества возможных событий, являются частным случаем более общей структуры: алгебры.

Определение (Алгебра)

Алгеброй $\mathcal{A}$ называется любая система подмножеств множества X, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
2. $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \backslash B \in \mathcal{A}$.

Определение (σ-алгебра)

Алгебра $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй, если она замкнута относительно операции счетного объединения.

σ-алгебры

Определение (σ-алгебра, альтернативное)

σ-алгеброй Σ называется любая система подмножеств X, удовлетворяющая условиям:

1. $X \in \Sigma$;
2. Если $A \in \Sigma$, то $A^c \in \Sigma$;
3. Σ замкнута относительно счетного объединения.

Множества, принадлежащие Σ, называются измеримыми множествами, а пространство (X, Σ) называется измеримым пространством.

Отметим, что σ-алгебры замкнуты и относительно счетных пересечений.

Пересечение σ-алгебр

Важным для дальнейших рассуждений является следующий факт:

Утверждение

Пусть дано некоторое семейство σ-алгебр на множестве X $\{\Sigma_\alpha\}$, тогда $\bigcap_\alpha \Sigma_\alpha$ также будет являться σ-алгеброй. (доказательство на доске)

Вопрос: будет ли любое объединение σ-алгебр также являться σ-алгеброй?

Определение

Пусть Y – некоторый набор подмножеств X. Обозначим за $\mathcal{F}$ семейство всех сигма-алгебр, содержащих внутри себя Y. Тогда

$$\Sigma(Y) = \bigcap_{\mathcal{F}} \Sigma$$

будет минимальной σ-алгеброй, содержащей Y (ее еще называют σ-алгеброй, порождаемой Y).

Борелевская σ-алгебра

Для дальнейших рассуждений мы по техническим причинам будем оперировать с особым видом σ-алгебр.

Определение (Борелевская σ-алгебра)

Обозначим за $\mathcal{C}$ множество всех открытых подмножеств $\mathbb{R}$. Тогда $\Sigma(\mathcal{C}) \equiv \mathcal{B}(\mathbb{R})$ будем называть борелевской σ-алгеброй. Множества, включенные в борелевскую σ-алгебру, будут называться борелевскими. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ определяется аналогичным образом.

Отметим, что σ-алгебра, порожденная множеством всех закрытых подмножеств $\mathbb{R}$, также будет борелевской (более того, σ-алгебра, порожденная любой из совокупностей подмножеств в пунктах 1-9 следующего слайда будет борелевской).

Борелевская σ-алгебра

Следующие типы подмножеств включены в $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

1. $(a, b), \forall a < b$;
2. $(-\infty, a), \forall a \in \mathbb{R}$
3. $(a, \infty), \forall a \in \mathbb{R}$
4. $[a, b], \forall a < b$;
5. $(-\infty, a], \forall a \in \mathbb{R}$
6. $[a, \infty), \forall a \in \mathbb{R}$
7. $[a, b), \forall a < b$;
8. $(a, b], \forall a < b$;
9. Все закрытые подмножества $\mathbb{R}$

Почему именно борелевская σ-алгебра?

Вероятно, у многих возникает разумный вопрос: зачем нам понадобилось конструировать такую сложную структуру как сигма-алгебра (еще и борелевская)? Интуитивно, кажется возможным просто использование булеана $2^{\mathbb{R}}$, но оказывается, что с точки зрения теории вероятностей существуют некоторые проблемы.

- Мы действительно можем использовать булеан в случае, когда мощность нашего sample set не более, чем счетно (такой булеан будет являться σ-алгеброй).
- Проблемы возникают с булеаном на множестве мощности континуум.
- Если мы используем в качестве вероятностной меры, например, отношение объемов, то мы не сможем аккуратно определить вероятность для некоторых множеств из-за их неизмеримости (см. парадокс Банаха-Тарского).

Измеримые функции

Определение

Пусть (X, Σ_X) и (Y, Σ_Y) – измеримые пространства, а $f : X \to Y$ некоторая функция. Функция f называется измеримой, если $\forall B \in \Sigma_Y$ выполняется $f^{-1}(B) \in \Sigma_X$.

Замечание: вообще говоря, можно дать такое определение не только для измеримых пространств, а для множеств, на которых задана некоторая алгебра множеств.

Если в роли обоих пространств в определении выступают $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то функция f называется борелевской.

Борелевские функции

Выпишем ряд полезных свойств борелевских функций:

- Если f - борелевская, а g - непрерывная, то $g \circ f$ – борелевская;
- Теперь пусть f и g – борелевские. Тогда $af + bg + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ – борелевская;
- $|f|^\alpha, \alpha \geq 0$ – борелевская;
- Если f не обращается в 0, то $1/f$ – борелевская.
- fg – борелевская;
- $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ – борелевские

Мера

Определение (Мера)

Мерой на измеримом пространстве (X, Σ) называется такое отображение $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$, что если $A_1, A_2, \ldots$ любая последовательность попарно непересекающихся элементов Σ, то:

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(это условие еще можно назвать счетная аддитивность или σ-аддитивность)

Определение (Пространство с мерой)

Пространством с мерой называется тройка (X, Σ, μ), где μ это мера на σ-алгебре Σ из подмножеств X

Мера

Замечание: если $\mu(X) = 1$, то μ называется вероятностной мерой и (X, Σ, μ) называется вероятностным пространством. X в данном случае будет пространством элементарных событий и элементы Σ называются событиями

Утверждение

Пусть μ мера на Σ. Тогда верно следующее:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если $A_1, ..., A_N \in \Sigma$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$, тогда: $\mu(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + ... + \mu(A_n)$
3. Если $A, B \in \Sigma$ и $A \subseteq B$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$
4. Если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ и A_n, $n = 1, 2, ...$, тогда мы имеем $\mu(A_n) \uparrow \mu(\cup_m A_m)$ при $n \to \infty$
5. Если $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ и A_n, $n = 1, 2, ...$, тогда мы имеем $\mu(A_n) \downarrow \mu(\cap_m A_m)$ при $n \to \infty$

Мера

Утверждение

Пусть $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ и $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, когда $A, B \in \Sigma$ и $A \cap B = \emptyset$ (это значит, что μ конечно-аддитивная мера). Тогда μ σ-аддитивная мера тогда и только тогда, когда $\mu(E_n) \downarrow 0$ для любой последовтельности (E_n) из Σ при условии, что $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ и $\cap_n E_n = \emptyset$

Пример

Пусть X это счетное множество (скажем $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ с σ-алгеброй Σ, содержащей все подмножества X). Пусть (p_n) любая последовательность неотрицательных действительных чисел с конечной суммой $\sum_n p_n$. Если мы определим $\mu(A)$ для любого множества $A \in \Sigma$, как $\mu(A) = \sum_{n \in I} p_n$ (где $I = i : x_i \in A$), тогда μ это мера на (X, Σ)

Продолжение меры

Пример (мотивирующий)

Предположим, что у нас есть пространство с мерой (X, Σ, μ) и множество $A \in \Sigma$ такое, что $\mu(A) = 0$. Пусть $C \subset A$. Тогда из $\mu(A) = 0$ следует $\mu(C) = 0$. Однако, это работает только в случае, когда $C \in \Sigma$. В ином случае $\mu(C)$ неопределено. Можно либо принять эту странную на интуитивном уровне ситуацию, либо попытаться как-то эту штуку довести до определенности. Мы приходим таким образом к процедуре продолжение меры.

Продолжение меры

Давайте за Σ' обозначать набор подмножеств X, которые удовлетворяют следующему условию: $E \in \Sigma'$ тогда и только тогда, когда если существуют такие множества $A, B \in \Sigma$, что $A \subseteq E \subseteq B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$ (это равносильно условию $\mu(A) = \mu(B)$). Из этого следует, что $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

Утверждение

Σ' is σ-алгебра

Теперь нужно подумать, как мы можем сконструировать меру μ' на Σ'. Достаточно интуитивно будет доопределить μ' следующим образом: $\mu'(E) = \mu(A) = \mu(B)$. Оказывается, что значение $\mu'(E)$ не зависит от выбора A и B.

Продолжение меры

Утверждение

μ' является продолжением μ на Σ до меры на Σ', то есть μ' мера на Σ' и $\mu'(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \Sigma$

Определение

Пространство с мерой (X, Σ', μ') называется продолжением пространства (X, Σ, μ)

Определение

Пространство с мерой (X, Σ, μ) называется полным (complete) если из $E \subseteq A$ (где $A \in \Sigma$) и $\mu(A) = 0$ следует, что $E \in \Sigma$

Литература

1. Measure, Integration & Probability, Ivan F Wilde;
2. Measure and Integration MIT course;
3. Лекции по теории вероятностей МФ ВШЭ;
4. Незаконченный учебник по стохастическому анализу Б. Б. Демешева :)