

# Задачи для Клуба теории вероятностей ФЭН ВШЭ

Александр Плахин, Николай Аверьянов

25 сентября 2021

## Задача 1

Докажите следующее утверждение:

$$\int_{[0,1]} f d\mu = \inf_{\varphi \geq f} \int_{[0,1]} \varphi d\mu,$$

где инфимум берется по простым функциям  $\varphi$ . На какое утверждение связанное с интегралом Римана похож данный факт?

## Задача 2

Будем говорить, что  $f \sim g$  относительно меры  $\mu$ , если  $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ .

1. Покажите, что  $\sim$  – отношение эквивалентности.

2. Докажите, что если  $f \sim g$ , то

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \Sigma$$

## Задача 3

Докажите, что функция Дирихле  $D(x)$  не интегрируема по Риману, но интегрируема относительно меры Лебега. Напомним, что

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

## Задача 4

Вычислите следующий предел, воспользовавшись теоремой Лебега о мажорируемой сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(nx)}{x + x^2 \ln n} dx$$