Partial Differential Equations from Probabilistic Perspective

HSE FES Probability Theory Club

Sergei Tikhonov

June 2, 2024

Big picture of PDE

Black Scholes Equation

- Probabilistic Representation of Black Scholes solution
- Fourier Transform

Big Picture of PDE

Big picture of PDE

Оператор Лапласа:

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \qquad n \geq 1$$

Три важных линейных уравнения:

- Laplace Equation:

$$-\Delta u(x) = 0$$

- Heat Equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0$$

- Wave Equation:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0$$

Big picture of PDE

PDE второго порядка:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

- Elliptic PDE: $B^2 - AC < 0$
- Parabolic PDE: $B^2 - AC = 0$
- Hyperbolic PDE: $B^2 - AC > 0$

С прошлого слайда:
Laplace eq: $A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ D = 0,\ E = 0,\ F = 0.$
Heat eq: $A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 0,\ E = -1,\ F = 0$
Wave eq: $A = 1,\ B = 0,\ C = -1,\ D = 0,\ E = 0,\ F = 0$

Коэффициенты могут зависеть от x и t, тогда вышеописанные условия должны быть выполнены для любых x и t из домейна

Big picture of PDE

- "Weak" solutions

Иногда решение PDE или его производные не существуют pointwise (теория построенная на пространствах Соболева)

- Euler Lagrange equations

Вместо решения PDE будем решать оптимизационную задачу (теория построенная на вариационном исчислении)

Black Scholes Equation

Уравнение Блэка Шоулза

Figure: Блэк, Шоулз, Мертон

Уравнение Блэка Шоулза

$$\partial_t C(t,s) + rs\partial_s C(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} C(t,s) = rC(t,s) \qquad s \in \mathbb{R}_+ \; t \in [0, T)$$

С терминальным условием $F(T,s)$:

- для европейского опциона кол $F(T,s) = \max(s(T) - K, 0)$;
- для европейского опциона пут $F(T,s) = \max(K - s(T), 0)$;

Здесь:

- $s(t)$ - цена базового актива (бездивидендная акция)
- $C(t,s)$ - цена опциона
- T - момент экспирации
- K - страйк
- r - ставка дисконтирования
- σ - волатильность

Решение уравнения Блэка Шоулза для опциона колл

Пусть $\Phi(\cdot)$ функция стандартного нормального распределения, тогда решением уравнения Блэка Шоулза с payoff колл опциона:

$$C(t,s) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

where

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{se^{r(T-t)}}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{se^{r(T-t)}}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$

Решение уравнения Блэка Шоулза

Для "произвольного" терминального условия:

$$C(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^Q[F(T,S_T) \mid S_t = s]$$

где Q - риск нейтральная мера.

В самой модели мы предполгаем что цена акции имеет GBM динамику:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad S_0 = s_0$$

Формула Фейнмана Каца

Figure: Слева: Ричард Фейнман. Справа: Марк Катц

Обозначения

Пусть S_t цена базового актива:

$$dS_t = m(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad S_0 = s_0$$

Пусть R_t динамика процентных ставок:

$$dR_t = r(t, S_t)R_t dt$$

В "классической" модели Блэка Шоулза:

$$m(t, S_t) = \mu S_t \qquad \sigma(t, S_t) = \sigma S_t \qquad r(t, S_t) = r$$

Заметим, что динамика процентных ставок является ODE, и для классического случая имеем:

$$R_t = e^{rt}$$

Идея формулы Фейнмана Каца

Метод решения PDE с помощью аналитического вычисления математического ожидания / симуляций траекторий случайного процесса. Обратное тоже верно: важный класс математических ожиданий случайных процессов может быть вычислен как решения детерминированных моделей.

Формула Фейнмана Каца

Теорема (Фейнман-Кац формула). Пусть S_t удовлетворяет

$$dS_t = m(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad S_0 = s_0$$

и $r(t, s) \geq 0$ является ставкой дисконтирования. Пусть payoff F в момент времени T удовлетворяет $\mathbb{E}[|F(S_T)|] < \infty$. Если $C(t, s)$, $0 \leq t \leq T$ определяется как:

$$C(t, s) = \mathbb{E}\left[\frac{R_t}{R_T} F(S_T) \middle| S_t = s \right]$$

причём $C(t, s)$ является C^1 по t и C^2 по x, то $C(t, s)$ является решением PDE:

$$\partial_t C(t, s) + m(t, s)\partial_s C(t, s) + \frac{1}{2}\sigma(t, s)^2 \partial_{ss} C(t, s) = r(t, s)C(t, s)$$

для $0 \leq t < T$, с терминальным условием $C(T, s) = F(s)$.

Доказательство формулы Фейнмана Каца

Рассмотрим дисконтированный payoff $Y = R_T^{-1} F(S_T)$. Что можно сказать о $M_t = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_t)$? M_t является мартингалом (используем tower rule):

$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_s) = M_s$$

Более того, можем записать явную форму:

$$M_t = \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(R_T^{-1} F(S_T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{R_t} \frac{R_t}{R_T} F(S_T) \middle| \mathcal{F}_t\right] = R_t^{-1} C(t, s)$$

Хотим рассмотреть $M_t = R_t^{-1} C(t, s)$ через product rule и формулу Итô.

Доказательство формулы Фейнмана Каца

Product rule для случайных процессов (доказывается путём рассмотрения формулы Ито для $f(X_t, Y_t) = X_t Y_t$):

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + (dX_t)(dY_t)$$

Обратите внимание, что если X_t и/или Y_t, представленные в виде процесса Ито, не содержат диффузии, то $(dX_t)(dY_t)$ автоматически 0.
В нашем случае:

$$d(R_t^{-1} C(t, S_t)) = R_t^{-1} dC(t, S_t) + C(t, S_t) dR_t^{-1} + \underbrace{(dR_t^{-1})(dC(t, S_t))}_{=0}$$

Осталось применить Ито для $C(t, S_t)$ и посчитать "обычный" дифференциал для R_t^{-1}.

Доказательство формулы Фейнмана Каца

Так как мы предположили что $C(t,s)$ является C^1 по t и C^2, можем применить Ито для $C(t,S_t)$:

$$dC(t,S_t) = \dot{C}(t,S_t)dt + C'(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}C''(t,S_t)(dS_t)^2 =$$

$$= [\dot{C}(t,S_t) + m(t,S_t)C'(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S_t)C''(t,S_t)]dt +$$

$$+ C'(t,S_t)\sigma(t,S_t)dW_t$$

И дифференциал $d[R_t^{-1}]$:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{R_t} = -\frac{1}{R_t^2}dR_t = -\frac{1}{R_t}r(t,S_t)dt = -R_t^{-1}r(t,S_t)dt$$

Доказательство формулы Фейнмана Каца

Подставим в product rule:

$$d(R_t^{-1}C(t,S_t)) = R_t^{-1}[(\dot{C}(t,S_t) + m(t,S_t)C'(t,S_t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2(t,S_t)C''(t,X_t))dt + C'(t,S_t)\sigma(t,S_t)dW_t] - R_t^{-1}r(t,S_t)C(t,S_t)dt$$

Выносим R_t^{-1} за скобки и группируем слагаемые:

$$d(R_t^{-1}C(t,S_t)) = [\dot{C}(t,S_t) + m(t,S_t)C'(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,S_t)C''(t,S_t)$$

$$-r(t,S_t)C(t,S_t)]dt + C'(t,S_t)\sigma(t,S_t)dW_t$$

Но мы показали, что $R_t^{-1}C(t,S_t)$ - мартингал, а для мартингала дрифт равен 0...

Важная лемма

Процесс Itô X_t

$$dX_t = m(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

является (локальным) мартингалом тогда и только тогда когда коэффициент при dt, дрифт, равен 0 почти наверное:

$$m(t, X_t) = 0 \qquad \text{a.s.}$$

Важно: каждый мартингал является локальным мартингалом, но не каждый локальный мартингал является мартингалом.

Доказательство важной леммы

Запишем процесс Итô X_t в интегральной форме:

$$X_t = X_0 + \int_0^t m(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

Запишем определение мартингала:

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[X_0 + \int_0^t m(u, X_u)\, du + \int_0^t \sigma(u, X_u)\, dW_u \middle| \mathcal{F}_s\right] =$$

$$= \underbrace{X_0 + \int_0^s m(u, X_u)\, du + \int_0^s \sigma(u, X_u)\, dW_u}_{X_s} +$$

$$+\mathbb{E}\left[\int_s^t m(u, X_u)\, du + \int_s^t \sigma(u, X_u)\, dW_u \middle| \mathcal{F}_s\right] =$$

Доказательство важной леммы

Применим теорему Фубини для первого слагаемого, и определение интеграла Ито для второго слагаемого:

$$= X_s + \mathbb{E}\left[\int_s^t m(u, X_u)\, du \middle| \mathcal{F}_s \right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_s^t \sigma(u, X_u)\, dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right]}_{0 \text{ по определению}}$$

$$= X_s + \int_s^t \mathbb{E}[m(u, X_u) \mid \mathcal{F}_s]\, du = X_s$$

Чтобы последнее равенство было выполнено, условие $m(t, X_t) = 0$ почти наверное для любого t должно быть удовлетворено.

Проблема

В результате получили:

$$\partial_t C(t,s) + m(t,s)\partial_s C(t,s) + \frac{1}{2}\sigma(t,s)^2\partial_{ss} C(t,s) = r(t,s)C(t,s)$$

В классической версии Блэка Шоулза:

$$m(t,x) = \mu s \qquad \sigma(t,s) = \sigma s \qquad r(t,x) = r$$

Полученное уравнение не является уравнением Блэка Шоулза:

$$\partial_t C(t,s) + \mu s \partial_s C(t,s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} C(t,s) = rC(t,s)$$

Теорема Гирсанова (чёрный ящик нашей лекции)

Решение? Теорема Гирсанова... Гарантирует, что существует мера Q такая что W_t^Q будет являться Броуновским движением под мерой Q:

$$dW_t = A_t dt + dW_t^Q$$

Возьмём $A_t = \frac{r-\mu}{\sigma}$ и подставим dW_t в:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Получим:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$$

Фейнман Кац применим, но теперь ожидание будет вычисляться под мерой Q:

$$C(t,s) = \mathbb{E}^Q\left[\frac{R_t}{R_T}F(S_T)\middle| S_t = s\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^Q[F(S_T) \mid S_t = s]$$

Fourier Transform

Замены

С помощью сложных и совершенно неинтуитивных замен мы можем показать, что изначальное уравнение Блэка Шоулза эквивалентно Heat equation (достаточно решить для $V(\tau, x)$):

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ \tau \in [0, \sigma^2 T/2],$$

$$S = Ke^x,$$

$$\tau = (T - t)\sigma^2/2,$$

$$C(S, t) = Ke^{-(a^2/4+a+1)\tau} e^{-(a/2)x} V(x, \tau),$$

$$a = 2r/\sigma^2 - 1.$$

Поскольку удалось избавиться от постоянных коэффициентов, можем применить преобразование Фурье и воспользоваться его свойствами.

Преобразование Фурье

Определение:

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$$

Полезные свойства для решения PDE:

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\} = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

Решение PDE с помощью преобразования Фурье

Применим преобразование фурье к $V(\tau, x)$ по переменной x:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial V}{\partial \tau}(\tau, x)\right] = \frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{F}\Big[V(\tau, x)\Big] = \frac{\partial}{\partial \tau}\hat{V}(\tau, \xi)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tau, x)\right] = -\xi^2 \hat{V}(\tau, \xi)$$

$$\mathcal{F}[V(0, x)] = \hat{V}(0, \xi)$$

Таким образом, получили ODE относительно τ:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\hat{V}(\tau, \xi) = -\xi^2 \hat{V}(\tau, \xi)$$

ODE с разделяющимися переменными:

$$\hat{V}(\tau, \xi) = \hat{V}(0, \xi) e^{-\xi^2 \tau}$$

Решение PDE с помощью преобразования Фурье

Применим обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{V}(0,\xi)] = V(0,x)$$

$$\Phi(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-\xi^2\tau}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}$$

Воспользуемся свойством о свёртке и запишем решение:

$$V(\tau,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\tau, x-y)V(0,y)dy$$

Заметим, что $\Phi(x,\tau)$ является $\Phi(x,\tau) > 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,\tau)dx = 1$. Значит, $\Phi(x,\tau)$ является плотностью распределения. Более того, мы точно можем сказать, что $X \sim N(0, 2\tau)$.