Вероятностные пространства, случайные величины и функции распределения (+ бонус интеграл Римана-Стилтьеса).

Ж. Жуматаев, М. Абрахам

Клуб теории вероятностей ФЭН ВШЭ

8 февраля 2022 г.

Мотивация

- Большинство сегодняшних выкладок, связанные с основами ТВ, скорее всего вам уже знакомы;
- Однако так как мы тут хотим построить более менее строгую теорию, то их все равно надо проговорить и доказать;
- Сегодня постараемся ввести базовые понятия ТВ, используя новый для нас инструментарий теории меры, а также порешать задачи для освоения этих важных тем;

Определение (Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$)

Вероятностным пространством называется измеримое пространство $(X, \Sigma_X, \mu) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с вероятностной мерой, где:

1. Ω - Пространство элементарных исходов,
2. $\mathcal{F}$ - σ-алгебра на Ω,
3. $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ - вероятностная мера.

Случайная величина

Определение (Случайная величина)

Случайной величиной называется измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.
Напомним, что функция f называется измеримой,
если $\forall B \in \Sigma_Y$ выполнено $f^{-1}(B) \in \Sigma_X$ или в нашем случае:
если $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ выполнено $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

Почему именно такой вид?
При таком определении с.в. следующая запись имеет смысл:
$\mathbb{P}\{\xi^{-1}(B)\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \xi(w) \in B\}$

Лирическое отступление

Понятие измеримости функции является частным случаем более общего понятия: непрерывного отображения в топологических пространствах.

Определение (Непрерывное отображение)

Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - топологические пространства, тогда отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным, если $\forall A \in \mathcal{T}_Y$ выполнено $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$ (прообраз открытого открыт).

http://mech.math.msu.su/ asmish/lecture03.pdf

Определение (Функция распределения)

Функция распределения с.в. ξ это функция $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}\{\xi \leq x\}$$

Свойства

1. $0 \leq F_\xi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F_\xi(x) \leq F_\xi(y)$, если $x \leq y$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1$
4. $F_\xi(x) = \lim\limits_{h \to 0+} F_\xi(x+h)$

Последнее свойство называется непрерывностью справа. В дальнейшем будем предполагать именно её.

Точки разрыва

Определение (Скачок F_ξ)

Скачком функции F_ξ в точке $a \in \mathbb{R}$ называется разность $F_\xi(a) - F_\xi(a-0)$.

Вопрос: чему равна величина этого скачка? (Подумайте над этим в рамках 4-й задачи)

Утверждение

Ненулевые скачки функции F_ξ образуют счетное множество.

Существование вероятностной меры

Утверждение

Пусть функция F удовлетворяет всем свойствам функции распределения, тогда существует вероятностная мера ν на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ такая, что $F(x) = \nu((-\infty, x])\ \forall x \in \mathbb{R}$. Более того, такая мера единственна.

Следствие без доказательства:

1. $\nu((-\infty, a)) = F(a-)$
2. $\nu((a, b]) = F(b) - F(a+)$
3. $\nu((a, b)) = F(b-) - F(a+)$
4. $\nu([a, b)) = F(b-) - F(a-)$
5. $\nu([a, b]) = F(b) - F(a-)$

Мера, связанная таким образом с F называется мерой Лебега-Стилтьеса.

Мера Лебега и существование с.в.

В частности, если $F(x) = x\mathbb{I}_{\{x\in[0,1]\}} + \mathbb{I}_{\{x>1\}}$, тогда completed мера, порожденная данной F называется мерой Лебега на $[0, 1]$.
Для этой F мы имеем:

1. $\nu((-\infty, 0]) = F(0) = 0$,
2. $\nu((1, \infty)) = 1 - F(1) = 0$,
3. $\nu((a, b)) = \nu([a, b)) = \nu((a, b]) = \nu([a, b]) = b - a$

$(0 \le a \le b \le 1)$.

То есть мера Лебега это просто "длина".

Утверждение

Пусть функция F удовлетворяет всем свойствам функции распределения, тогда существует случайная величина ξ такая, что $F = F_\xi$.

Функция ограниченной вариации

Прежде чем перейти к рассмотрению интеграла Римана-Стилтьеса, необходимо определить понятие функции с ограниченной вариацией.

Определение (вариация)

Вариацией функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется $\bigvee_{\tau}(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})|$, при заданном разбиении τ.

Определение (полная вариация)

Полной вариацией функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется $\bigvee\limits_{a}^{b}(F) = \sup\limits_{\tau} \bigvee_{\tau}(F)$.

Функция ограниченной вариации

Заметим, что для монотонно неубывающих функций $\bigvee\limits_a^b(F) = F(b) - F(a)$, а для монотонно невозрастающих $\bigvee\limits_a^b(F) = |F(b) - F(a)|$.

Утверждение

Произвольную функцию ограниченной вариации $F(x)$, можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

Интеграл Римана-Стилтьеса

Эта часть посвящена обобщению Интеграла Римана, которое позволит нам интегрировать некоторые разрывные функции.

Определение

Пусть в интервале (a, b) определены две функции: $g(x)$ (интегрируемая) и $F(x)$ (интегрирующая), причем $F(x)$ не убывает и является функцией с ограниченной вариацией. Пусть также интервал (a, b) разбит на конечное число частичных интервалов $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда интегралом Стилтьеса будет называться предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \int\limits_a^b g(x)dF(x)$.

Интеграл Римана-Стилтьеса

Важно отметить, что в данном определении не накладывается иных требований к функции $F(x)$, кроме ограниченной вариации (требование о неубывании можно отбросить). В то время, как для интегрируемости по Риману нам было бы необходимо, чтобы $F(x) \in C^{(1)}[a, b]$. В таком случае справедливо следующее равенство

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)F'(x)dx$$

Утверждение

Интеграл Римана-Стилтьеса по интервалу, сводящемуся к одной точке $(a-0, a+0)$ может быть отличен от нуля.

Полезные применения в Теории Вероятностей:

1. $E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)$
2. Распределение двух независимых случайных величин
$F(x) = \int F_1(x-z)dF_2(z) = \int F_2(x-z)dF_1(z)$
3. Распределение частного ξ_1/ξ_2:
$$F(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} F_1(xz)dF_2(z) + \int\limits_{-\infty}^{0} [1 - F_1(xz)]dF_2(z)$$

Ссылки

1. Measure, Integration & Probability, Ivan F Wilde;
2. http://mech.math.msu.su/ asmish/lecture03.pdf;
3. http://math.phys.msu.ru/data/129/FANII.pdf;