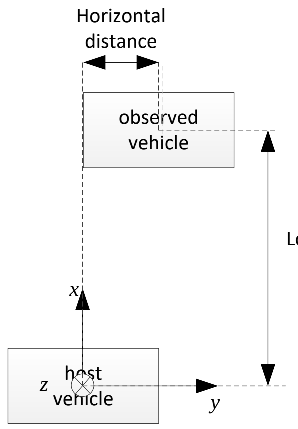
Mathematical models

首先对原问题进行数学建模，分为恒速度与恒加速度两种模型。主机与观测到的车辆关系及坐标系建立如下图所示。



Dynamic model assuming constant velocity and zero acceleration

$$X=\begin{pmatrix} x\\ v_x\\ a_x\\ y\\ v_y\\ a_y\\ z\\ v_z\\ a_z \end{pmatrix} \qquad \dot{X}=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} X+\begin{pmatrix} 0\\ v_{vx}\\ 0\\ 0\\ v_{vy}\\ 0\\ 0\\ v_{vz}\\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

v_{vx}, v_{vy}, v_{vz} 表示以 σ_x, σ_y, σ_z 为标准差的零偏置无关高斯噪声。物理意义表示加速度的不准确度。

离散化，得到

$$X(k)=\begin{pmatrix}1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X(k-1)+w(k-1) \qquad (2)$$

Dynamic model assuming constant accelerationf

$$X=\begin{pmatrix}x\\ v_x\\ a_x\\ y\\ v_y\\ a_y\\ z\\ v_z\\ a_z\end{pmatrix} \qquad \dot{X}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ v_{ax}\\ 0\\ 0\\ v_{ay}\\ 0\\ 0\\ v_{az}\end{pmatrix} \qquad (3)$$

v_{ax}, v_{ay}, v_{az} 表示对加速度的以 σ_{ax}, σ_{ay}, σ_{az} 为标准差的零偏置无关高斯噪声。物理意义上表示转矩的不准确度。
离散化，得到

$$X(k)=\begin{pmatrix}1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X(k-1)+w(k-1) \qquad (4)$$

Observation model

连续域中的观测模型如下

$$Y=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}X+v \tag{5}$$

离散化得到

$$Y(k)=\begin{pmatrix}\hat{x}(k)\\ \hat{y}(k)\\ \hat{z}(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}X(k)+v(k) \tag{6}$$

The whole mathematical models

不论是式(1)还是式(3)的动态运动模型，都采用以下数学模型表示：

$$\begin{cases}X(k+1)=\phi(k)X(k)+w(k)\\ Y(k)=H(k)X(k)+v(k)\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\phi(\mathrm{k})=\begin{pmatrix}1&T&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&T&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&T&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\text{or}\begin{pmatrix}1&T&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&T&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&T&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&T&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&T&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&T\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$H(k)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

令模型噪声的协方差矩阵为

$$Q(k)=E(w(k)w(k)^{T}) \tag{9}$$

令观测噪声的协方差矩阵为

$$R(k)=E(v(k)v(k)^{T}) \tag{10}$$

EKF filter

1. State prediction

对于一个初始化的状态量 X_0 和协方差阵 P_0，对于 k=1，2，3…，首先预测下一周期的状态量

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \phi(k-1)\hat{X}(k-1) \\ \tilde{P}(k) = \phi(k-1)\hat{P}(k-1)\phi(k-1)^T + Q(k-1) \end{cases} \tag{11}$$

2. Innovation

$$\mathrm{Z}(k) = Y(k) - H(k)\tilde{X}(k) \tag{12}$$

3. Kalman gain calculation

$$K(k) = \tilde{P}(k)H(k)^T[H(k)\tilde{P}(k)H(k)^T + R(k)]^{-1} \tag{13}$$

4. State estimate

$$\begin{cases} \hat{X}(k) = \tilde{X}(k) + K(k)Z(k) \\ \hat{P}(k) = [1 - K(k)H(k)]\tilde{P}(k) \end{cases} \tag{14}$$

代码运行方式

代码见 car_tracking_ekf 文件夹，包含匀加速和匀速两种动态运动模型，在 include/car_tracking_ekf.h 中由宏定义指明。

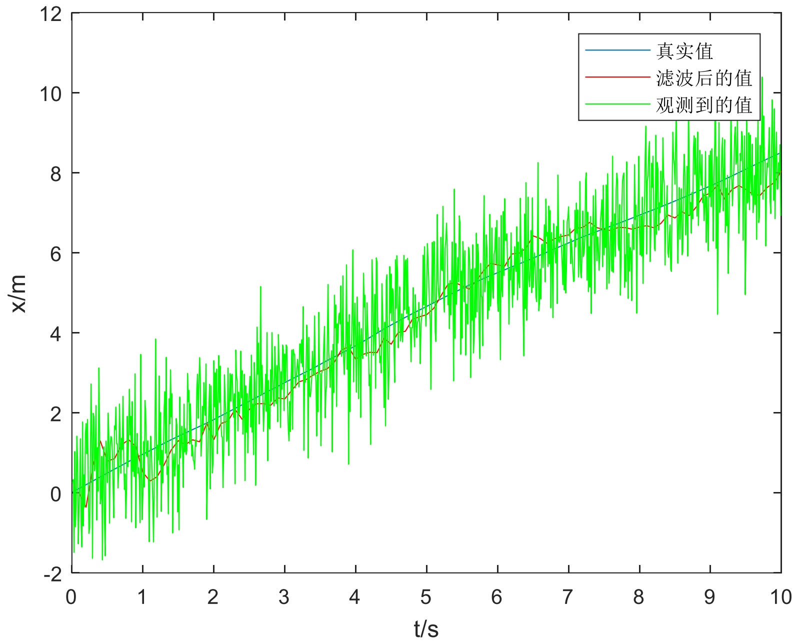
进入到文件夹内；

1. cd build
2. cmake ..
3. make
4. cd devel/lib/car_tracking_ekf
5. ./car_tracking
6. 原始观测结果放在 raw_pose.txt 中，滤波后的结果放在 esti_pose.txt 中，没有观测噪声的实际 pose 放在 real_pose.txt 中，将这几个结果进行比较

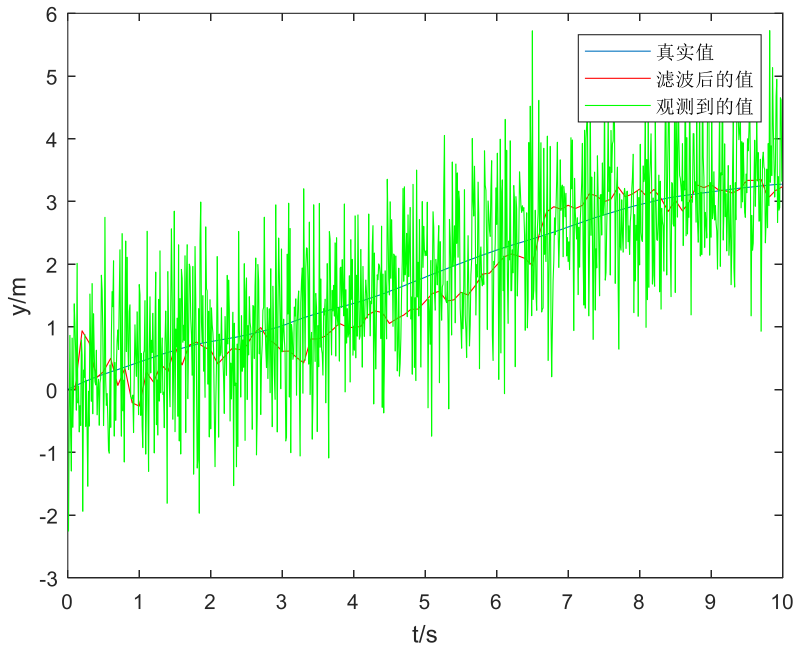
结果

恒速运动模型

对 x 的结果比较：

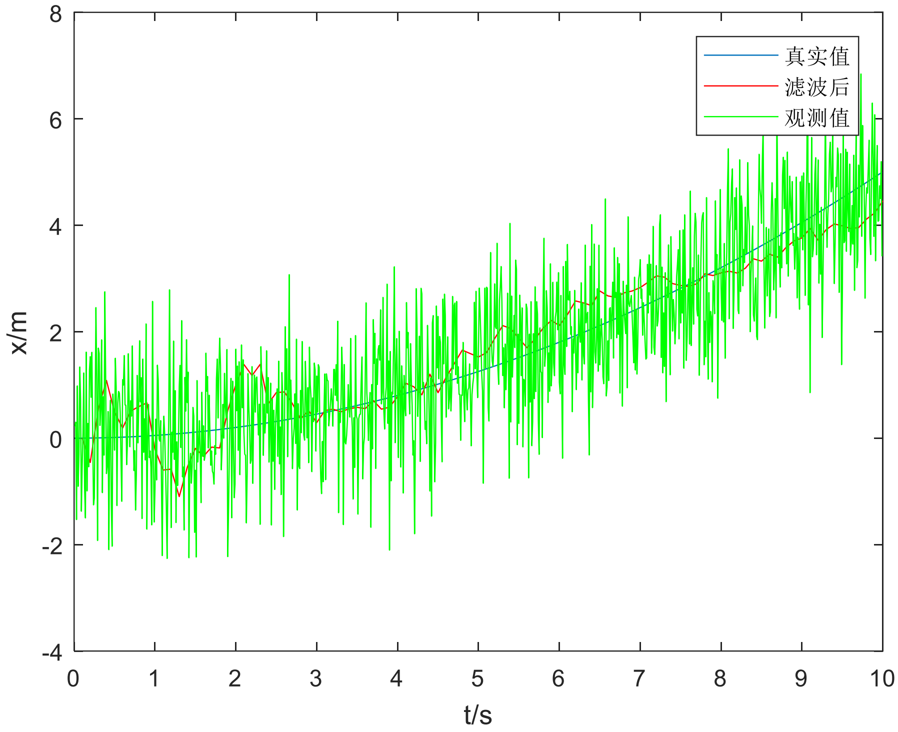


对 y 的结果比较

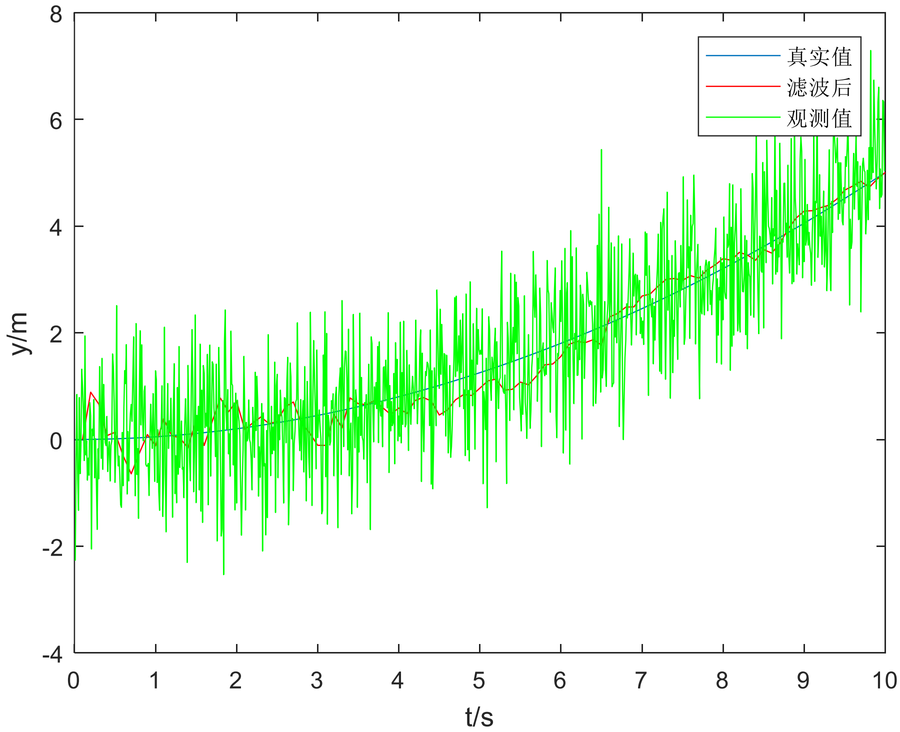


恒加速模型

对 x 的结果比较



对 y 的结果的比较



由上面结果可见，无论是哪种模型，都可以达到很好的滤波效果。

问题

当实际噪声的协方差 R 与滤波中采用的噪声协方差 R 相差较大时，或者实际动态模型的噪声协方差 Q 与滤波中采用的 Q 相差较大时，EKF 滤波效果不好。